Processos Estocásticos - Aula 01

Campo Estocástico

$X = \{X_\alpha, \alpha \in A\}$

v.a's — cj. de índices

Exs. (1) Esfera terrestre

(2) Imagem:

X_α = preto ou branco
0 ou 1

Caso simples: $\{X_1 \ldots X_n\}$ independentes

Distribuição de probabilidades

$$\{P(X_{\alpha_1} \in B_1, \ldots, X_{\alpha_n} \in B_n), B_1, \ldots, B_n \subset S$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A, n \geq 1\}$$

→ distribuição finito-dimensionais de X (teorema da Extensão de Kolmogorov)

→ O teorema determina a dist. de X.

Processos Estocásticos:

Há uma ordem total em A.

Tipicamente: $A = \underbrace{\mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}}_{\text{tempo discreto}}$ ou $\underbrace{[0,\infty) \text{ ou } \mathbb{R}}_{\text{tempo contínuo}}$.

$\{X_i,\ i = 0, 1, 2, \dots\}$

$\{X_t,\ t \in [0, \infty)\}$.

Markov:

Texto: encadeamento de palavras.

	1	
0	1	2

Processos Estocásticos

$$X : \mathbb{N} \longrightarrow S$$

ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$

S ← espaço de estados.

S = enumerável (muitas vezes finito) ($\subset \mathbb{N}$).

Distr. finito-dimensionais:

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n \in A.$$

$B_1, \dots, B_n \subset S$.

É natural

$$P(X_{t_n} \in B_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1)$$

$t_1 < \dots < t_n \in A$

$x_1, \dots, x_{n-1} \in S$, $B_n \subset S$.

Processos de Markov:

$$P(X_{t_n} \in B_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{t_n} \in B_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

Scanned by CamScanner

$S =$ enumerável

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \quad \begin{cases} t_n > t_{n-1} \\ x_{n-1}, x_n \in S. \end{cases}$$

Hom. temporal:

$$P(X_{t_n - t_{n-1}} = x_n \mid X_0 = x_{n-1}).$$

De agora em diante: $A = \mathbb{N}$

Neste caso: $X = (X_n)_{n=0,1,\dots}$ Cadeia de Markov.

Matriz de transição de uma cadeia de Markov: • $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$. $\forall i,j \in S$.

• $P_{ij} := P(i,j) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$: prob. de transição (em 1 passo) de i para j.

Scanned by CamScanner

Distribuição inicial de X

$$\underset{\underset{\mu\ :\ \text{dist. de prob. em } S}{\parallel}}{\mathbb{P}(X_0 = \cdot)} = \{ P(X_0 = i,\ i \in S) \}$$

Proposição 1: A distribuição de prob. de uma cadeia de Markov é determinada pela matriz de transição $\mathbb{P}$ e pela distribuição inicial μ.

Dem: Basta mostrar que μ e $\mathbb{P}$ determinam as distribuições fi-di.

$n \geq 1$, $s_0, s_1, \dots, s_n$

$$P(X_0 = s_0, \dots, X_n = s_n) \overset{\text{regra do produto}}{=} \mathbb{P}(X_0 = s_0)\, P(X_1 = s_1 \mid X_0 = s_0)\, P(X_2 = s_2 \mid X_0 = s_0, X_1 = s_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_0 = s_0)$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}(X_0 = s_0)\, P(X_1 = s_1 \mid X_0 = s_0)\, P(X_2 = s_2 \mid X_1 = s_1) \dots P(X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1})$$

$$\overset{\text{Hom. temporal}}{=} \underbrace{P(X_0 = s_0)}_{\mu(s_0)}\, \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = s_1 \mid X_0 = s_0)}_{P(s_0, s_1)}\, \underbrace{P(X_1 = s_2 \mid X_0 = s_1)}_{P(s_1, s_2)} \dots \underbrace{P(X_1 = s_n \mid X_0 = s_{n-1})}_{P(s_{n-1}, s_n)}$$

$$= \mu(s_0)\, P(s_0,s_1)\, P(s_1,s_2) \ldots P(s_{n-1},s_n).$$

Obs.: (1) $\mu = \{\mu(s),\ s \in S\}$

$=$ vetor linha e dist. de prob em S

(2) $\mathbb{P} = (p_{ij},\ i,j \in S)$.

é uma matriz estocástica em S.

$\longrightarrow$ as linhas de $\mathbb{P}$ são distr. de prob. em S.

Em outras palavras,

$$\forall i,j \in S:\ p_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall i \in S: \sum_{j \in S} p_{ij} = 1.$$

Proposição II: Dados μ uma distr. de prob em S e $\mathbb{P}$ uma matriz estocástica, em S, existe uma C.M. X com distribuição inicial μ e matriz de transição $\mathbb{P}$.

Dem.: O lado direito determina uma família de distribuições f-d consistente

$\longrightarrow$ Extensão de Kolmogorov

Distribuição marginal de X_n, $n \geq 1$.

Matriz de transição em $\underline{n}$ passos:

$$\mathbb{P}^{(n)} = \left(P_{ij}^{(n)} : i,j \in S\right) = P(X_n = j \mid X_0 = i), \; i,j \in S.$$

Proposição 2: $\underline{P}^{(n)} = P^n = \underbrace{P \cdot P \ldots\ldots}_{\text{n vezes..}} P$

Produto de matrizes.

Obs. $\underline{P}^{(1)} = \underline{P}$ $\quad (P^{(0)} = I)$

Dem.:

Vamos raciocinar por indução

- A afirmação é válida para $n=1$.

- Supor válida para $n = 1, \ldots, \ell$; $\ell \geq 1$.

- $$P_{ij}^{(\ell+1)} = \underline{P}(X_{\ell+1} = j \mid X_0 = i) = \sum_{K \in S} \underbrace{P(X_{\ell+1} = j \mid X_\ell = K, X_0 = i)}_{p_{Kj}} \overbrace{P(X_\ell = K \mid X_0 = i)}^{\text{Markov}}$$

ℓ passos $P_{iK}^{(\ell)}$

$$= \sum_{K \in S} P_{iK}^{(\ell)} P_{Kj} = \left(P^{(\ell)} P\right)_{ij} \quad \forall i,j \in S.$$

$$\therefore \; P^{(\ell+1)} = P^{(\ell)} \cdot P \overset{\text{hip. de indução}}{=} P^{\ell} \cdot P = P^{\ell+1}.$$

Distr. de X_n:

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} \underbrace{P(X_n = j \mid X_0 = i)}_{P_{ij}^{n}} \overbrace{P(X_0 = i)}^{\mu(i)}$$

$$= \sum_{i \in S} \mu(i) P_{ij}^{n} = (\mu P^{n})_j \;, \; j \in S.$$

Obs. (i) $\mu^{(n)}(\cdot) = P(X_n = \cdot)$ vetor linha

$$\longrightarrow \mu^{(n)} = \mu P^{n}.$$

(ii) Note que $P^{(n)}$ é uma matriz estocástica.

Ex.: $S = \{1,2\}$ Seja X uma C.M. com M.T.

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in [0,1]. \text{ Vamos supor que } \alpha + \beta > 0.$$

Vamos calcular P^{n}, $n \geq 1$

$$P^{n+1} = P^{n} \cdot P \Rightarrow \begin{cases} P_{11}^{0} = 1 \\ P_{11}^{n+1} = (1-\alpha) P_{11}^{n} + \beta P_{12}^{n} \quad (P_{12}^{n} = 1 - P_{11}^{n}) \quad (*) \\ \quad = (1-\alpha) P_{11}^{n} + \beta (1 - P_{11}^{n}) = \beta + (1-\alpha-\beta) P_{11}^{n}, \; n \geq 0 \end{cases}$$

$P_{11}^{(0)} = 1$

A eq. de diferenças (*) tem solução dada por:

$$p_{11}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n, \quad n \geq 0.$$

E podemos obter p_{12}^n, p_{21}^n, p_{22}^n similarmente.

Processos Estocásticos - Aula 02

Revisão:

tempo discreto — espaço de estados (enumerável)

Cadeias de Markov $\leftrightarrow$ em S

$$(X_0, X_1, X_2, \dots) = X$$

Dado $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \overset{\text{Markov}}{=} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$\overset{\text{hom. temporal}}{=} P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}, \quad \forall i, j, i_0, \dots, i_{n-1} \in S.$$

Prop. de Markov: "Dado o presente, futuro e passado são independentes".

Matriz de transição (de C.M.)

$$P = (p_{ij})_{i,j \in S}$$

Dist. inicial: μ dist. de prob. em S

μ e P determinam a dist. de prob. de X

- $\underset{\mu^{(n)}}{\mathbb{P}(X_n = \cdot)} = \mu P^{(n)} = \mu P^n$

Exemplo aula passada (rever).

Exemplo 1:

$\alpha \in [0,1]$

Virus (variedade i) $\xrightarrow[\text{geração}]{\text{muda a}}$ $\begin{cases} \text{mantém variedade c/ prob. } 1-\alpha \\ \text{muda p/ variedade } j \text{ c/ prob. } \dfrac{\alpha}{N-1} \quad (j \neq i). \end{cases}$

$\downarrow$

N variedades ($N \geq 2$).

Qual a prob. de o virus após n gerações estar c/ a mesma variedade do que a inicial?

$X_\ell =$ a variedade do virus na geração ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$X = (X_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ é uma C.M. c/ M.T.

c/ $P_{ii} = 1-\alpha, \; i \in S$ ③

$$P_{ij} = \frac{\alpha}{N-1}, \quad i \neq j$$

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$P(X_n = X_0), \; n \geq 1$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P(X_n = i \mid X_0 = i)}_{P_{ii}^n} \underbrace{P(X_0 = i)}_{\mu_i} = P_{11}^n \quad (P^n)_{11}.$$

ñ depende de i.

<u>Cálculo de P_{11}^n.</u>

Seja $\tilde{X}_n$ a cadeia "at propriada"

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = 1 \\ \hat{2}, & \text{se } X_n \geq 2 \end{cases}$$

$X_n = 1 \Leftrightarrow \tilde{X}_n = 1$

$P_{11}^n = P(\tilde{X}_n = 1 \mid \tilde{X}_0 = 1)$

Verificar que

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \geq 0} \text{ é uma C.M.}$$

Obs. Se $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma C.M. e $f: S \to S'$ então se f ñ for injetiva, então $(f(X_n))_{n \geq 1}$ pode não ser uma C.M.

$\tilde{\mathbb{P}}$: Mt de $\tilde{X}$

$P_{11} = 1 - \alpha$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & \tilde{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \tilde{2} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\frac{\alpha}{N-1} \end{pmatrix} \end{array} = \tilde{P}.$$

Do ex 1:

$$P_{11}^n = \tilde{P}_{11}^n = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n = \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[1 - \alpha \frac{N}{N-1}\right]^n,$$

$n \geq 2$

Ex. 2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Achar $P^n = \begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix}$

Se houver $U = (U_{ij})_{i,j \in S}$ inversível e $D = (D_{ij})_{i,j \in S}$ diagonal

$D_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

$P = U D U^{-1}$

$P^n = U D^n U^{-1}$

$$D^n = \begin{pmatrix} D_{11}^n & & 0 \\ & D_{22}^n & \\ 0 & & \ddots \; D \end{pmatrix}$$

Autovalores de P

$$\det(P - xI) = -x \cdot (x - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0 \,.$$

Obs: Como P é estocástica, 1 é sempre autovalor de P associado ao autovetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (verifiquem)

$$\det = (x-1)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ é autovalor} \\ \lambda_2 = \frac{i}{2} \text{ é} \\ \lambda_3 = -\frac{i}{2} \text{ autovalor} \end{cases}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, então existe $U = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3)$

$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$.

u_i é um autovetor associado a λ_i, $i = 1,2,3$.

$\left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n = \frac{1}{2^n} e^{2n\pi/2}$, $-\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(-i)$.

7

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} e^{in\pi/2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} e^{-in\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^n = U D^n U^{-1}$$

Dada a forma de P e D,

$$P_{11}^n = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2} + \gamma \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

α, β, γ são funções das entradas de U, $n \geq 0$.

$$\begin{cases} P_{11}^0 = 1 = \alpha + \beta \\ P_{11}^1 = 0 = \alpha + \frac{1}{2}\gamma \\ P_{11}^2 = 0 = \alpha - \frac{\beta}{4}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = \frac{4}{5} \\ \gamma = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$P_{11}^n = \frac{1}{5} + \frac{1}{2^n}\left[\frac{4}{5} * \cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right].$$

Similarmente, obtemos

- p_{ij}^n, $i,j = 1,2,3$, $n \geq 1$.

Obs Se $|S| < \infty$ (card.)

Da teoria de matrizes positivas (ou não)

- $P = UJU^{-1}$; U inversível

$P^n = UJ^nU^{-1}$

Obs Se P (S finito, $|S| = K$) for diagonalizável (p. ex, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores distintos),

então $p_{ij}^n = \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_K \lambda_K^n$.

Usar método semelhante p/ achar $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ (p/ cada $(i,j) \in S \times S$)

Obs. O caso 2x2 pode ser feito dessa forma (vide site)

Perda de memória de uma CM

$P(X_n = \cdot) = (p_{ij}^n,\ i,j \in S)$

$P(X_n = \cdot \mid X_0 = i)$

Pode ocorrer que

$$P^n \xrightarrow[n\to\infty]{(*)} \Pi^* = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \pi \text{ é a dist. de prob. em } S.$$

(perda de memória).

No ex. 1,

$$P_{11}^n = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$$

Se $0 < \alpha+\beta < 1$

$$|1-\alpha-\beta| < 1 : \; P_{11}^n \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

$$P_{22}^n = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n \longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

$$P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

O limite

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad \text{ñ depende de } i.$$

No ex. 1', temos perda de memória se $\alpha < 1$ ou $N \geq 2$

No ex. 2, temos perda de memória.

$$P_{11}^{n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2^n} \cdot \left[\frac{4}{5} \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right] \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{5} =$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{n} = \lim_{n\to\infty} P_{21}^{n}.$$

$\alpha + \beta = 0$

$P = I$

$P^n = I$ $\left(\lim_{n\to\infty} P^n \text{ existe}\right)$. As linhas ñ são as mesmas ∴ ñ há perda de memória.

$P_{11}^{n} = 1, \forall n.$

$P_{21}^{n} = 0, \forall n.$

Se $\alpha + \beta = 2$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} P^{2n+1} = P, & \forall n \geq 0 \\ P^{2n} = I, & \forall n \geq 0 \end{cases}$$

ñ há perda de memória!

Processos Estocásticos - Aula 03:

16/08 (1)

Revisão:

$X = (X_n)_{n \geq 0}$ CM, S: espaço de estados enumerável

M.T. $\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$: matriz estocástica.

$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, $i,j \in S$.

Perda de memória: $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = P_{ij}^n \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \pi_j$, $\forall i,j \in S$, → não depende de i

onde $\pi_j \geq 0$, $\forall j \in S$ e $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$.

Nos exs. 1 e 2: $|S| \overset{=\ell}{<} \infty$ (teoria de matrizes positivas)

(1) → autovalores de $\mathbb{P}$ são todos ≤ 1 em módulo.

(2) → Se todos os autovalores forem < 1 em módulo (a menos de 1).

Então,

$$\mathbb{P} \overset{(*)}{=} U \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & 0 \\ 0 & \ddots & J_K \end{pmatrix}_{1 \leq K \leq \ell} U^{-1}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

(*) decomposição de Jordan

> **Lembrete:**
> Em matrizes estocásticas, 1 é sempre autovalor associado ao autovetor $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (verificar!)

U: matriz inversível

$U = (u_1 \ldots u_\ell)$, $u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{i\ell} \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

De (*):

$$P^n = U \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_K^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

Condição (**)

$|\lambda_i| < 1, \; i = 2, \dots, K$

$$\lambda_i^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

$$P^n \xrightarrow[n \to \infty]{} U \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} U^{-1} .$$

(teorema de Perron-Frobenius).

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}, \; \pi = (\pi_1 \dots \pi_\ell)$$

1ª linha de U.

Obs.: (1) $|S| = \infty$ não está contemplado.

(2) A condição (**) estará satisfeita se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$:

$$P_{ij}^n > 0,\ i,j \in S.$$ (está satisfeito se $P_{ij} > 0$, $i,j \in S$).

(3) A convergência $P^n \xrightarrow[n\nearrow\infty]{} \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$ qdo. ocorre, é exponencialmente rápida.

$$\max_{i,j} |P_{ij}^n - \pi_j| < a e^{-bn},\ b > 0,\ \forall n \geq 1.$$

(Verifiquem nos exs. 1 e 2 que isto ocorre).

Aplicação (Simulação): Queremos simular π: dist. prob. em S.

Suponha que existe uma C.M. $X = (X_n)_{n\geq 0}$ em S c/ M.T. $\mathbb{P}$ tal que: $P^n \xrightarrow[n\nearrow\infty]{} \Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$.

$P_{i\cdot}^n \approx \pi(\cdot)$ se n for grande.

P-F: $b \approx |1 - \lambda_2|$ (cond.)

lacuna espectral

Estrutura de Classes:

Notação:

$P_i(X_0 \in \cdot) = P(X \in \cdot \mid X_0 = i)$, $i \in S$.

Seja $X = (X_n)_{n \geq 0}$ em S (enumerável)

Def.: (1) Dados $i, j \in S$, dizemos que i atinge j se $P_i(X_n = j$ p/ algum $n \geq 0) > 0$.

Notação: $i \to j$.

Teorema 1: Para $i, j \in S$, são equivalentes:

(i) $i \to j$

(ii) $\exists n \geq 0$ e $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ tq. $i_0 = i, i_n = j$ e $P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} > 0$

(iii) $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (iii):

$$0 < P_i\left(\bigcup_{n \geq 0} \{X_n = j\}\right) \leq \sum_{n \geq 0} P_i(\{X_n = j\})$$

$\therefore$ $P_i(X_n = j) > 0$, para algum $n \geq 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $\quad p_{ij}^{(n)} = P_i(X_n = j) = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1} \in S} \underbrace{P_i(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j)}_{\text{Markov: } P_{i i_1} \cdots P_{i_{n-1} j}}$

Se o lado esquerdo é positivo, $\exists\, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ $P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} j} > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad \exists\, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$

$$P_{i i_1} \cdots P_{i_{n-1} j} > 0$$

$$P(X_1 = i_1, \dots, X_n = j) > 0$$

$$\bigcap$$

$$\text{"}P(i \to j)\text{"} \Rightarrow \text{"}P(i \to j) > 0\text{"}.$$

Def: Dados $i, j \in S$ dizemos que i e j se comunicam (entre si) se $i \to j$ e $j \to i$. Notação: $i \leftrightarrow j$

Proposição 1: $(\leftrightarrow)$ é uma relação de equivalência.

Dem.: 1) $i \leftrightarrow i$ ✓ (reflexividade)

2) Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$ (transitividade).

Verif.: Como $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $\exists\, m, n \geq 0$:

$$P_{ij}^{m} > 0 \text{ e } P_{jk}^{n} > 0$$

Então, por Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ik}^{m+n} \overset{CK}{=} \sum_{l \in S} P_{il}^{m} P_{lk}^{n} \geq P_{ij}^{m} P_{jk}^{n} > 0 \overset{(\text{teo} 1)}{\Rightarrow} i \to k \; (k \to i \text{ análogo}).$$

Um argumento similar partindo de $k \to j$ e $j \to i$ nos diz que $k \to i$.

3) $i \leftrightarrow j$ então $j \leftrightarrow i$ (óbvio).

Scanned by CamScanner

Equações de Chapman-Kolmogorov:

Dados $i,j \in S$, $m,n \geq 0$

$$P_i(X_{m+n}=j) = P_{ij}^{m+n} = (P^m P^n)$$

$$= \sum_{l \in S} P_{il}^m P_{lj}^n = \sum_{l \in S} P_i(X_m = l)\, P_l(X_n = j)$$

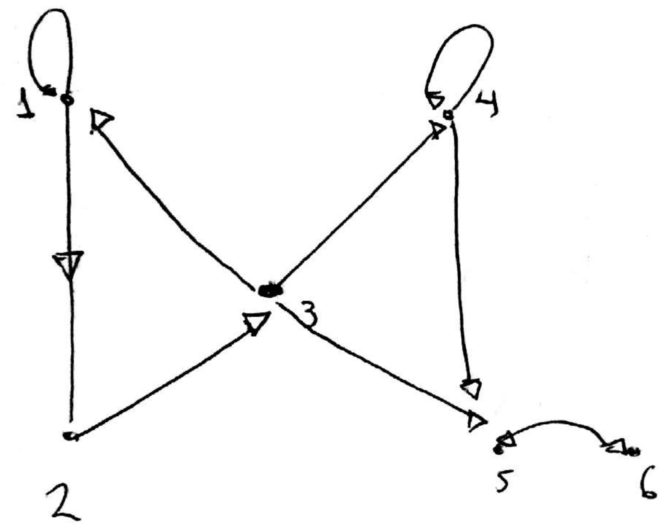
A relação $\leftrightarrow$ decompõe S em "classes de comunicação" ($i,j \in S$ estão na mesma classe se $i \leftrightarrow j$).

Def.: (3) Dizemos que uma classe (de comunicação) $C \subset S$ é fechada se para todo $i \in C$, se $j \in S$ e $i \to j$ então $j \in C$.

Exemplo:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Decomposição de S em classes:



Na mesma classe:

(1) 5 e 6 é uma classe (fechada).

(2) 1, 2 e 3 é uma classe (não fechada).

(3) 4 é uma classe

Def. 4: Dizemos que um estado S é absorvente se $\{i\}$ for uma classe fechada ($\Leftrightarrow P_{ii} = 1$).

Def. 5 Se S for uma classe então dizemos que X é irredutível ($\Leftrightarrow i \leftrightarrow j, \forall i,j \in S$).

Tempos de chegada e prob. de absorção:

Seja $X = (X_n)_{n \geq 0}$ uma CM em S. Dado $A \subset S$, o tempo de chegada de X em A é a v.a.
(hitting time)

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \quad (\text{conv. } \inf \emptyset = \infty)$$

Seja $h_i^A = P_i(H^A < \infty) = P_i(i \to A)$

$$i \to A = \bigcup_{j \in A} \{i \to j\}.$$

Qdo. A for uma classe fechada, h_i^A: prob. de absorção em A (começando de i).

$$K_i^A = E_i(H^A) = \sum_{n \geq 0} n\, P^i(H^A = n) + \infty \cdot P(H^A = \infty) \quad \text{conv } \infty \cdot 0 = 0$$

Processos Estocásticos - Aula 04

Tempo de chegada e probabilidade de absorção

$X = (X_n)_{n\geq 0}$ CM em S com MT $P = (P_{ij})_{i,j\in S}$

Se $A \subset S$, segue

$H^A = \inf\{n\geq 0 : X_n \in A\}$ tempo de chegada em A ($\inf \emptyset = \infty$)

$h_i^A = P_i(H^A < \infty)$

$P_i(\cdot) = P(X \in \cdot \mid X_0 = i)$

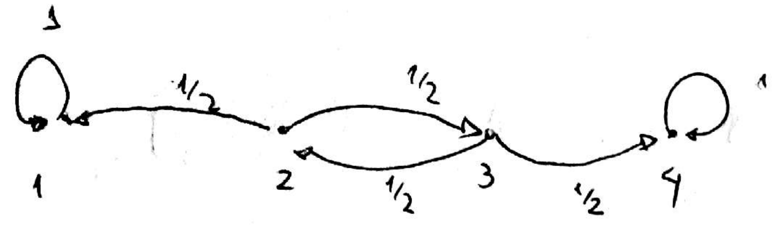
Se A for uma classe fechada

h_i^A = prob. de absorção em A (começando de i)

$K_i^A = E_i(H^A) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \mathbb{P}(H^A = n) + \infty \cdot P(H^A = \infty)$ (tempo esperado de chegada em A começando em i).

Ex.:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



classes (fechada) $\quad P_{11} = P_{44} = 1$.

$\{1\}, \{4\}$

estados absorventes

$\{2,3\}$ classe (ñ fechada).

$$h_i = h_i^{\{1\}} \quad ; \quad K_i = K_i^{\{1,4\}} \quad ; \quad i = 1,2,3,4.$$

$$h_1 = 1 = P_1(H^{\{1\}} < \infty) = P_1(H^{\{1\}} = 0) = 1.$$

$$h_4 = 0 = P_4(H^{\{1\}} < \infty) = 0.$$

$$h_2 = P_2(H^{\{1\}} < \infty) = P(H^{\{1\}} < \infty \mid X_0 = 2) \overset{\text{cond.}}{\underset{\text{em } X_1}{=}} \overset{\text{Markov}}{P(H^{\{1\}} < \infty \mid X_1 = 1, \underset{\text{Hom. temporal}}{X_0 = 2})}$$

$$\underbrace{P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)}_{P_{21}} + \overset{\text{Markov}}{P(\ \ldots \mid X_0 = 2, \underset{\text{Hom. temporal.}}{X_1 = 3})} \underbrace{P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)}_{P_{23}}$$

$$\boxed{h_2 = \overset{1/2}{P_{21}}\, \overset{1}{h_1} + \overset{1/2}{P_{23}}\, h_3 .} \quad (1)$$

Similarmente,

$$\boxed{h_3 = \overset{1/2}{p_{32}} h_2 + \overset{1/2}{p_{34}} \overset{1}{h_4}} \qquad (2)$$

Resolvendo esse sistema de equações,

$$\boxed{h_2 = 2h_3} \qquad (3)$$

Subst. (3) em (1):

$$2h_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h_3 \Longrightarrow \boxed{h_3 = \frac{1}{3}} \quad (4).$$

Subst. em (3) $\Longrightarrow \boxed{h_2 = \frac{2}{3}}$. □

prop. de Markov e hom. temporal.

$$\underbrace{E_3[1 + H^{\{1,4\}}]}_{\parallel} = 1 + \overbrace{E_3[H^{\{1,4\}}]}^{K_3}$$

$K_1 = K_4 = 0$ ($H^{\{1,4\}}$ se $i = 1$ ou 4).

$$K_2 = E_2(H^{\{1,4\}}) = E_2[H^{\{1,4\}} \mid X_1 = 1]\, \overset{1/2}{p_{21}} + E_2[H^{\{1,4\}} \mid X_1 = 3]\, \overset{1/2}{p_{23}}$$

$$\begin{cases} K_2 = 1 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_3 \\ K_3 = 1 + \frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}K_4 \end{cases}$$

$K_2 = K_3 = 2$.

Teorema 1: $X=(X_n)_{n\geq 0}$ CM em S e $A\subset S$ com $P=(P_{ij})_{i,j\in S}$. As probabilidades de chegada $h^A=\{h_i^A : i\in S\}$ são a solução mínima positiva do sistema de equações:

$$(*)\begin{cases} h_i^A = 1 \quad (i), & \text{se } i\in A. \\ h_i^A = \sum_{j\in S} P_{ij}\, h_j^A \quad (ii), & \text{se } i\notin A. \end{cases}$$

Dem.: Pela PM e HT as probs. de chegada satisfazem $(*)$.

Suponha $\{x^i : i\in S\}$ satisfaz $(*)$ e $x_i\geq 0, \forall i\in S$. Mostremos que

$$x_i \geq h_i^A,\ i\in S.$$

Como $x_i = 1$, se $i\in A$.
$ = h_i^A$.

Se $i\notin A$,

$$x_i = \sum_{j\in S} P_{ij}x_j = \sum_{j\in A} P_{ij}\overset{\geq 1}{x_j} + \sum_{j\notin A} P_{ij}x_j$$

$$= \sum_{j\in A} P_{ij} + \sum_{j\notin A} P_{ij}\sum_{k\in S} P_{jk}\, x_k.$$

$$= \sum_{j\in A} P_{ij} + \sum_{j\notin A} P_{ij}\left(\sum_{k\in A} P_{jk}\overset{\geq 1}{x_k} + \sum_{k\notin A} P_{jk}x_k\right).$$

$$= \underbrace{\sum_{j\in A} P_{ij}}_{P_i(X_1\in A)} + \underbrace{\sum_{j\notin A} P_{ij}\sum_{k\in A} P_{jk}}_{(**) = P_i(H^A=2)} + \sum_{j\notin A,\, k\notin A} P_{ij}\, P_{jk}\, x_k$$

Scanned by CamScanner

Iterando:

$$\ldots = \overbrace{P_i(H^A = 1) + P_i(H^A = 2) + \ldots + P_i(H^A = n)}^{P_i(H^A \leq n)} + \sum_{i_1, \ldots, i_n \notin A} P_{i i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} x_n$$

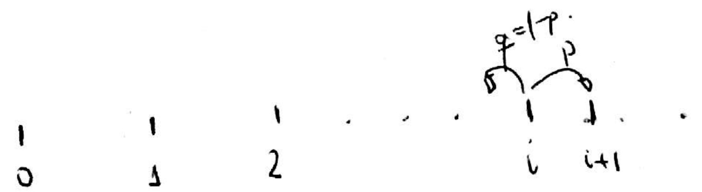
$$= x_i, \quad \forall n \geq 1.$$

Como $x_i \geq 0, \ \forall i \in S$:

$$x_i \geq P_i(H^A \leq n), \quad \forall n \geq 1.$$

$$\Rightarrow x_i \geq \lim_{n \to \infty} P_i(H^A \leq n) = P_i(H^A < \infty) = h_i^A \quad \square$$

Ex.: (Ruína do jogador)



$X_0 = i$

X_n = fortuna após n jogadas.

$(X_n)_{n \geq 0}$ é uma CM em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ c/ MT

$P_{00} = 1$ (0 é absorvente)

$P_{i,i+1} = 1 - P_{i,i-1} = p, \ i \geq 1$, $p \in (0,1)$.

Sistema satisfeito por $h_i = h_i^{(0)}$ (6)

$$\begin{cases} h_0 = 1 & (i) \\ h_i = q h_{i-1} + p h_{i+1}, \ i \geq 1 & (ii) \end{cases} \Rightarrow p(\underbrace{h_i - h_{i+1}}_{\delta_i}) = q\,(\underbrace{h_{i-1} - h_i}_{\delta_{i-1}}), \ i \geq 1.$$

$$(p+q) h_i$$

$$\Rightarrow \delta_i = \frac{q}{p}\delta_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \delta_{i-2} = \ldots =$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^i \delta_0$$

Temos então:

$$h_i - h_{i+1} = \left(\frac{q}{p}\right)^i \delta_0$$

$\sum_{j=0}^{i-1} \delta_j = (h_0 - h_1) + (h_1 - h_2) + \ldots + (h_{i-1} - h_i) = h_0 - h_i$. Por outro lado,

$$\Rightarrow h_0 - h_i = \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \delta_0 = \delta_0 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j$$

Se $q \neq p$:

$$= \delta_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - q/p}$$

$h_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$, $i \geq 0$. (**) para certas constantes A e B (dependem de δ_0, h_0, q, p).

Obs.: Soluções de (*) tem a forma (**) p/ certas escolhas de A e B. Por outro lado, para toda escolha de A e B (**) é uma solução de (*) (ii).

Para achar a solução h_i^A, $i \geq 1$, vamos tomar a solução genérica (**) de (*ii) e impor

(a) (*i)

(b) $h_i^A \geq 0$ e $h_i^A \leq 1$.

(c) h_i^A é mínima.

Restrição (a) $A+B=1 \Rightarrow B=1-A$

(b) $\frac{q}{p} > 1 \Leftrightarrow q > p \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$

$\left(\frac{q}{p}\right)^i \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty \Rightarrow B=0$, se não vale $h_i \in [0,1]$ $\forall i \geq 1$.

2º caso

jogo favorável

$\frac{q}{p} < 1 \Rightarrow p > \frac{1}{2}$

(b) $\left(\frac{q}{p}\right)^i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

$1 \geq A = \lim_{i \to \infty} \left(A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i\right) \geq 0 \qquad 0 \leq A \leq 1.$

$B = 1-A, \quad A \in [0,1].$

Soluções a serem consideradas:

$$A + (1-A)\left(\frac{q}{p}\right)^i = \underbrace{\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right]}_{>0} A + \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

Impondo (c): $A = 0$.

$$\therefore\ h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i,\ i \geq 0.$$

3º Caso: $p = q = 1/2\ \left(\frac{q}{p} = 1\right)$.

Solução genérica: $A + Bi \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty$. $h_i = 1$.

Teorema 2: Nas mesmas condições do teorema 1, os tempos esperados ($E_i[H^A]$)

$\{K_i^A : i \in S\}$ satisfazem:

$$(**)\ \begin{cases} K_i^A = 0 & i \in A \\ 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} K_j^A, & i \notin A. \end{cases}$$

Dem.: O fato de K_i^A satisfazer $(**)$, segue do mesmo tipo de arg feito antes.

Supondo $(y_i,\ i \in S)$ satisfaz $(**)$, então

$$y_i = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left[1 + \sum_{k \notin A} p_{jk} y_k \right]$$

$$= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} + \sum_{j,k \notin A} p_{ij} p_{jk} y_k = \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} + \sum_{j,k \notin A} p_{ij} p_{jk} + \ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_n \notin A} p_{i i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i_1, \ldots, i_n \notin A} p_{i i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}}_{\geq 0} y_{i_n}^{\geq 0}$$

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(H^A > j) \; ; \; \forall n \geq 1$$

$$\therefore \; y_i \geq \lim_{n \to \infty} \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(H^A > j) = E_i(H^A) = k_i^A .$$

∎

Processos Estocásticos - Aula 05

$(X_n)_{n\geq 1}$ CM em S, M.t. $P = (P_{ij})_{i,j}$.

$A \subset S$

$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$

$h_i^A = P_i(H^A < \infty)$; $K_i^A = E_i(H^A)$.

Eqs. p/ h_i^A:

$$(*) \begin{cases} h_i^A = 1, \text{ se } i \in A \\ h_i^A = \sum_{j \in S} P_{ij} h_j^A \end{cases}$$

é a sol. min. positiva de $(*)$.

Se $|S| < \infty$; $A = \{1, \ldots, m\}$, $S = \{1, \ldots, n\}$, $m < n$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ P_{m+1\,1} & \cdots & P_{m+1\,m+1}-1 & \cdots & P_{m+1\,n} \\ P_{n1} & \cdots & & \cdots & P_{nn}-1 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(*)$ $M\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$(*)$ tem solução: $x \equiv 1$

Sistema autônomo

$(*')$ $M\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$; $\underset{\sim}{x} = 0$ é uma solução de $(*)$.

Similarmente, K_i^A, $i \in S$, satisfazem:

$$(**) \begin{cases} K_i^A = 0, & i \in A \\ K_i^A = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} K_j^A. \end{cases}$$

é sol mínima positiva de $(**)$.

Ex. (aula passada): Ruína do Jogador

$h_i = h_i^{\{0\}}$

$h_i \equiv 1$, se $p \leq \frac{1}{2}$

$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^i$, $p > \frac{1}{2}$.

Vamos calcular: $K_i := K_i^{\{0\}} = E_i\left(H^{\{0\}}\right)$: tempo de ruína esperado começando com fortuna $i \geq 1$. Vamos supor que $p \leq \frac{1}{2}$ (c.c. $K_i = \infty, i \geq 1$).

Neste caso,

$$(**) \begin{cases} K_0 = 0 & (i) \\ K_1 = 1 + qK_{i-1} + pK_{i+1}, \; i \geq 1. & (ii) \end{cases}$$

Se $K_1 = \infty \Rightarrow K_2 = \infty$.

Naturalmente: $K_i \geq K_{i-1}, \; i \geq 1$.

Se $K_1 < \infty \Rightarrow \begin{cases} K_2 < \infty \\ K_3 < \infty \\ \vdots \\ K_i < \infty, \; i \geq 1 \end{cases}$.

$\frac{1-p}{p} = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} - 1$

$\Delta_{i+1} p = \Delta_i (1-p)$

$\Delta_{i+1} = \Delta_i -$

$(1-p)$

Vamos supor que $K_1 < \infty$:

De (ii), $p\underbrace{\left(K_{i+1} - K_i\right)}_{\Delta_{i+1}} = q\underbrace{\left(K_i - K_{i-1}\right)}_{\Delta_i} - 1 \Rightarrow \Delta_{i+1} = \frac{q}{p}\Delta_i - \frac{1}{p}$.

$\Rightarrow \Delta_{i+1} = \frac{q}{p}\Delta_i - \frac{1}{p}, \; i \geq 1$ (***). Se $p = \frac{1}{2}$, $\Delta_{i+1} = \Delta_i - 2$

Se $p=\frac{1}{2}$, $\Delta_{i+1}=\Delta_i-2=\ldots=\Delta_1-2i\geq 0, \forall i\geq 0$. ④

A contradição implica que

$$K_1=\infty \Rightarrow K_2=K_3=\ldots=\infty.$$

(Se $p=\frac{1}{2}$).

Supondo $K_1=\infty$.

Se $p<\frac{1}{2}$: (**) tem uma solução geral dada por

$$(2)\ \Delta_i = A\left(\frac{p}{q}\right)^i+B, \quad A, B \text{ fçs. de } p.$$

Do teorema acima, queremos a solução mínima positiva de (***).

Como $\frac{q}{p}>1$

Substituindo (2) em (***):

$$l.e. = A\left(\frac{q}{p}\right)^{i+1}+B \qquad l.d. = \left(\frac{q}{p}\right)\left[A\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^i+B\right]-\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{q}{p}\right)^i+\frac{q}{p}B-\frac{1}{p}.$$

Scanned by CamScanner

Segue que:

$$\left(\frac{q}{p} - 1\right)B = \frac{1}{p} \Rightarrow B = \frac{1}{q-p} = \frac{1}{1-2p}.$$

Temos que

$$\Delta_i = A\left(\frac{q}{p}\right)^i + \frac{1}{1-2p} \quad \forall i \geq 1.$$

Como $q > p$; e $\Delta_i \geq 0$. $A \geq 0$.

Resolvendo (***):

Iterando:

$$\Delta_{i+1} = \frac{q}{p}\left[\frac{q}{p}\Delta_{i-1} - \frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p} = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Delta_{i-1} - \left[\frac{1}{p} + \frac{q}{p^2}\right] = \dots =$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^2\left[\frac{q}{p}\Delta_{i-2} - \frac{1}{p}\right] - \left[\qquad\qquad\right]$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^3 \Delta_{i-2} - \frac{1}{p}\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right] = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^i \Delta_1 - \frac{1}{p}\left[1 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

Como $A \geq 0$, e $\Delta_i = \frac{1}{1-2p}$, $i \geq 1$.

MAS

$$\Delta_i = K_i - K_{i-1} \; ; \; K_0 = 0$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{1-2p},$$

$$\Rightarrow K_i = \frac{i}{1-2p}, \quad i \geq 1.$$

Obs.: Note que, $K_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta_j$

Pela minimalidade dos K's, $A = 0$.

Propriedade de Markov Forte:

Prop. de Markov: $(X_t)_{t \geq 0}$; $t, s > 0$.

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in \cdot \mid X_r, 0 \leq r \leq t) = \mathbb{P}_{X_t}(X_s \in \cdot).$$

Será a propriedade de Markov é válida p/ t's aleatorios?

Em geral, não é válida!

P. ex.:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

T = tempo de última visita a $1 = \sup\{n \geq 0 : X_n = 1\}$; $\max \emptyset = 0$.

$$P(X_{T+1} = 1 \mid X_T = 1) \overset{\text{pela def. de } T}{=} 0$$

$$\neq$$

$$P_1(X_1 = 1) = p_{11} = 1/2 .$$

Tempos de parada

Dada uma sequência $(X_n)_{n\geq 0}$ def. em uma mesmo esp. de probabilidades e uma v.a. T no mesmo espaço tal que:

$T \in \{0, 1, \dots\}$, dizemos que T é um tempo de parada (com relação a $(X_n)_{n \geq 0}$) se: $\forall n \geq 0$:

$\{T = n\}$ não depender de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

"T ñ depende do futuro $(X_n)_{n\geq 1}$".

Exs.: • T indep. de $(X_n)_{n\geq 0}$.

• T determinístico.

• tempo de 1ª passagem

$(X_n \in S, n \geq 0, S$ enumerável$)$

Para $j \in S$: $t_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$ tempo de 1ª passagem por j.

$\{t_j = 1\} = \{X_1 = j\}$

Se $n \geq 2$:

$\{t_j = n\} = \{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$. Logo para todo $n \geq 1$,

$\{t_j = n\}$ ñ depende de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$

• tempo de chegada:

$H_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}$

$\{H_j = n\} = \{X_0 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$ ñ depende de $X_{n+1}, \ldots$

tempo de última visita:

$$L_j = \max\{n \geq 0 : X_n = j\}$$

$\{L_j = n\} = \{X_n = j, X_{n+1} \neq j, X_{n+2} \neq j, \dots\}$ .. depende (em geral) de X_{n+1}, $X_{n+2}, \dots$.

Mas veja o caso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $L_1 \equiv 0$.

teorema (Prop. de Markov Forte): Se $(X_n)_{n\geq 0}$ CM e T um tempo de parada. Então para todo $i, j, i_0, i_1, \dots \in S$

$$\mathbb{P}(X_{T+n} = j \mid T < \infty, X_0 = i_0, \dots, X_{T-1} = i_{T-1}, X_T = i) = \mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}.$$

Scanned by CamScanner

Processos Estocásticos - Aula 06

25/08

Prop. de Markov Forte

Revisão:

$(X_n)_{n\geq 0}$ CM em S enumerável, M.t.P. T é (uma v.a. inteira não-negativa) um tempo de parada p/ $(X_n)_{n\geq 0}$ se
+∞ possível

$\{T=n\}$ não depende de $\{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$.

Teorema: Se $(X_n)_{n\geq 0}$ CM em S, e T um t.p. então dados $n\geq 0$; i, j; $i_0, i_1, \dots \in S$, temos que:

$$P(X_{T+n}=j \mid T<\infty, X_0=i_0, \dots, X_{T-1}=i_{T-1}, X_T=i_T)$$

Dem.: $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$$P(B\cap A) = P(X_{T+n}=j, T<\infty, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{P(X_{T+n}=j, T=m, \dots)}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I} = P(X_{m+n}=j, T=m, X_0=i_0, \dots, X_{m-1}=i_{m-1}, X_m=i) = P(X_{m+n}=j \mid \quad)$$

$P(T=m, X_0=i_0, \dots)$

obs.: $\{X_m=i\}\cap\{T=m\} = \{X_m=i\}\cap D$

D depende apenas de $X_0, \dots, X_{m-1}$.

$$(1) = P_i(X_n=j)\underbrace{\sum_{m\geq 0}' P(T=m,\dots)}_{\|}$$

$$= P_i(X_n=j) \qquad P(A)$$

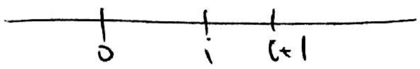
$$\therefore\ P(B|A) = P_i(X_n=j).$$

$\square$

Ex.: Voltando à ruína do jogador,

$$K_i = E_i(H^{\{0\}})$$

$$K_{i+1} \geq K_i$$

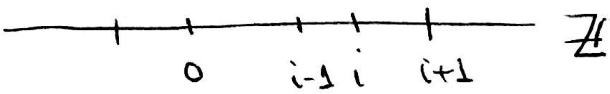


$$H^{\{0\}} = H^{\{i\}} + \tilde{H}^{\{0\}}$$

A partir de i+1.

"a partir de $X_{H^{\{i\}}}$

Ex.: Passeio aleatório



Vamos supor $i \geq 1$, $H_0 = H^{\{0\}}$.

Seja $\varphi(s) = E_1(s^{H_0})$, $s \geq 0$ e $s \leq 1$.

Fixado $s \in [0,1)$, vamos obter $\varphi(s)$ como a sol. de uma eq. de 2º grau:

$$E_0(s^{H_0+1}) = s.$$

$$E_1(s^{H_0}) = E_1(s^{H_0} \mid X_1=0)\, P(X_1=0 \mid X_0=1) + E_1(s^{H_0} \mid X_1=2) \cdot P(X_1=2 \mid X_0=1)$$

$$E_1(s^{H_0} \mid X_1=2) = E_2(s^{H_0+1}) = s \cdot E_2(s^{H_0})$$

$H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, se $H_1 < \infty$.

$\tilde{H}_0 = \inf\{n \geq 0 : X_{H_1+n} = 0\}$. Como H_1 é um t.p.

(0) H_1 sob P_2 tem a mesma dist. do que H_0 sob P_1.

Sob P_2, condicionando em $\{H_1 < \infty\}$,

1) $\tilde{H}_0$ tem a mesma dist. que H_0.

2) $\tilde{H}_0$ e $\tilde{H}_1$ são independentes.

Justificativa (PFM):

$$P_2(\tilde{H}_0 = n \mid H_1 < \infty) = P_2(X_{H_1} \neq 0, X_{H_1+1} \neq 0, \dots, X_{H_1+\ell-1} \neq 0, X_{H_1+\ell} = 0 \mid H_1 < \infty, X_{H_1} = 1)$$

$$\overset{PMF}{=} P_1(X_0 \neq 0, \dots, X_{\ell-1} \neq 0, X_\ell = 0) = P_1(H_1 = \ell)$$

Então temos:

$$E_2(s^{H_0}) = E_2(s^{H_1+\tilde{H}_0}) = E_2(s^{H_1+\tilde{H}_0} ; H_1 < \infty) = E_2(s^{H_1+\tilde{H}_0} \mid H_1 < \infty)$$

$$P_2(H_1 < \infty) = E_2(s^{H_1} \mid H_1 < \infty) \overset{(2)\text{ acima}}{E_2(s^{\tilde{H}_0} \mid H_1 < \infty)}$$

$$\overset{(1)}{=} E_1(s^{H_0}).$$

$$\overset{(0)}{=} E_1(s^{H_0})$$

$$= E_2(s^{H_1} \mid H_1 < \infty) E_1(s^{H_0}) = E_2(s^{H_1}) E(s^{H_0}) = \varphi^2(1).$$

Relembrando,

$$\varphi(s) = qs + ps E_2(s^{H_0}) = qs + ps\,\varphi^2(1).$$

$\therefore$ $\varphi(s)$ satisfaz

$$x = qs + psx^2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4qps^2}}{2ps}.$$

Duas obs: $\varphi(s)$ contínua em $[0,1)$.

$$\varphi(s) = \sum_{n \geq 0} P_1(H_0 = n)\, s^n.$$

- $\varphi(0) = P_1(H_0 = 0) = 0 \Longrightarrow \varphi(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}.$

$$P_1(H_0<\infty) = \lim_{s \nearrow 1} \varphi(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p} = \begin{cases} 1, & p\leq q \\ \frac{q}{p}, & p > q. \end{cases}$$

$$E_1(H_0; H_0<\infty) = \lim_{s\nearrow 1} \varphi'(s)$$

Para diferenciar $\varphi'(s)$, $0<S<1$, vamos diferenciar a identidade:

$$\varphi(s) = qs + ps(\varphi^2(s)) \Rightarrow \varphi'(s) = q + p\varphi^2 + 2ps\,\varphi(s)\varphi'(s)$$

$$= [1-2pq\varphi]\varphi' = q + p\varphi^2$$

$$\therefore \quad \varphi'(s) = \frac{\varphi^2 p + q}{1-2ps\varphi(s)}$$

$$\lim_{s\nearrow 1} \varphi'(s) = \frac{q + p\,P_1^2(H_1<\infty)}{1-2p\,P_1(H_1<\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{1-2p}, & p\leq q \\ \infty, & p = 1/2. \\ \bigcirc, & p>q \end{cases}$$

$$\bigcirc = \frac{q + \frac{pq^2}{p^2}}{1-2\cancel{p}\frac{q}{\cancel{p}}} = \frac{pq+q^2}{p-2pq} = \frac{q(p+q)}{p(1-2p)} = \frac{q/p}{1-2\cancel{q}} ..$$

$$\therefore E_1(H_1 | H_1<\infty) = \begin{cases} (1-2p)^{-1}, & p<q. \\ (1-2q)^{-1} & p>q. \end{cases} = \frac{1}{1-2p\wedge q}, \quad p\wedge q = \min(p,q)$$

Voltando:

$$\varphi(s) = E(s^{H_0}) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}.$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n\geq 0} P_1(H_0 = n)\, s^n.$$

Vamos considerar a f_s.

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\varphi(s) = \frac{f(4pqs^2)}{2ps}.$$

$$\ulcorner f(0) = 0 \; ; \; f^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k} \frac{1\times 3\times \ldots \times (2k-1)}{2k-1} (1-x)^{-(2k-1)/2}$$

$$= \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} k! \, (1-x)$$

$f^{(k)}(0) = a_k \quad \therefore \quad f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$, válida no dom. aberto $\subset [0,1]$ em que a série seja convergente.

Repr. válida em $[0,1)$

$$\therefore \quad \varphi(s) = \frac{1}{2ps} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k-1} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} \left[4pqs^2\right]^k.$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2ps}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}\left[4pqs^2\right]^k$$

$\frac{2k!}{k!k!}$

$$= \frac{1}{2ps}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2(2k-1)}\binom{2k}{k}p^{k-1}q^k s^{2k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell s^\ell$$

$\frac{2k!}{k!k!}$. $\frac{2k\cdot(2k-1)(2k-2)\cdot(2k-3)}{(2k-1)}$

$$b_\ell = \begin{cases} 0, & \ell \text{ par} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}p^{k-1}q^k, & \ell = 2k-1,\ k\geq 1. \end{cases}$$

Fazendo a identificação: $P_1(H_0 = \ell) = b_\ell$

Recorrência e Transitoriedade

$(X_n)_{n\geq 0}$ CM em S, M.t. $P = (P_{ij})_{i,j=1}^m$. Dizemos que o estado $i \in S$ é recorrente se $P_i(X_n = i \text{ i.v.}) = 1$

$= P_i(X_n = i \text{ infinitas vezes}) = P_i(X_n = i \text{ p/ inf. } n\text{'s}) =$

$= P(\bigcap \bigcup_{m\geq n} \{X_m = i\}) = P_i(\text{existe seq. } 0 < n_1 < n_2 < \ldots \text{ tq. } X_{n_\ell} = i\ \forall \ell \geq 1)$

Dizemos que i é transitório se

$$P_i(X_n = i \text{ i.v.}) = 0.$$

Processos Estocásticos - Aula 07

Transitoriedade e recorrência

O estado $i \in S$ de uma C.M. $(X_n)_{n \geq 0}$ é recorrente se

$$P_i(X_n = i \text{ i.v.}) = 1.$$

e transitório se ... $= 0$.

Seja T_i o tempo de 1ª passagem por i:

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}.$$

Sejam $T_i^{(r)}$: tempo de rª passagem por i, $r \geq 0$.

$$T_i^{(0)} = 0$$

Se $T_i^{(r-1)} < \infty$, então

$$T_i^{(r)} = \inf\{n \geq T_i^{(r-1)} + 1, X_n = i\}.$$

Se $T_i^{(r-1)} = \infty \Rightarrow T_i^{(r)} = \infty$.

Se $t_i^{(r-1)} < \infty$, então $S_i^{(r)} = t_i^{(r)} - t_i^{(r-1)}$.

Se $t_i^{(r-1)} = \infty$, então $S_i^{(r)} = 0$.

$S_1^{(1)}, S_2^{(2)}, \dots$

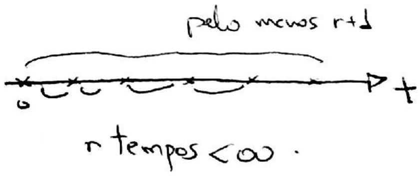
Pela PFM, se

$t_i^{(r-1)} < \infty$ e $X_0 = i$, então $S_i^{(r)}$ indep. de $\{X_n : n \le t_i^{(r-1)}\}$ e $\sim t_i$ $(*)$

Obs.: Os tempos $t_i^{(r)}$, $r \geq 0$, são tempos de parada.

Def.: Seja V_i = nº de visitas ao estado i:

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{X_n = i\}$$



Obs.: $V_i > r$. (Se $X_0 = i$)

$\iff t_i^{(r)} < \infty$, $r \geq 0$.

$\therefore P_i(V_i > r) = P_i(T_i^{(r)} < \infty)$, $r \geq 0$.

$= P_i(t_i^{(r)} < \infty, t_i^{(r-1)} < \infty) = P_i(S_i^{(r)} < \infty; t_i^{(r-1)} < \infty)$.

$\overset{(*)}{=} P_i(S_i^{(r)} < \infty) P_i(t_i^{(r-1)} < \infty) = \dots = f_i^r$, onde

$f_i = P_i(T_i < \infty)$

Obs.: $\{X_n = i \text{ i.v.}\} = \{V_i = \infty\}$. $\therefore$ i recorrente $\iff P_i(V_i = \infty) = 1$

i transitório $\iff$ $\dots = 0$

$V_i \sim Geo(1-f_i)$ prob. de não voltar ao i.

Se $f_i = 1 \Rightarrow P(V_i = \infty) = 1$.

Teorema 1: Vale a seguinte dicotomia

(1) $f_i = 1 \Leftrightarrow i$ recorrente e $\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$.

(2) $f_i < 1 \Leftrightarrow i$ é transitório e $\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Obs.: Note que:

$$E_i(V_i) = E_i\left(\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{X_n = i\}\right) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\mathbb{P}_i(X_n = i)}_{p_{ii}^{(n)}}.$$

Dem.: Se $f_i = 1$, então $P_i(V_i > r) = P_i(T_i^{(r)} < \infty) \overset{(**)}{=} \underbrace{f_i^r}_{\equiv 1}$, $r \geq 1$.

$\therefore P_i(V_i = \infty) = \lim_{r \nearrow \infty} P_i(V_i > r) = 1 \Rightarrow i$ é recorrente $\Rightarrow E_i(V_i) = \infty$.

Se $f_i < 1$,

$$E_i(V_i) = \sum_{r\geq 0} P_i(V_i > r) \overset{(**)}{=} \sum_{r\geq 0} f_i^r = \frac{1}{1-f_i} < \infty \Rightarrow P_i(V_i = \infty) = 0$$

$\Rightarrow i$ transitório.

Em particular, cada estado é recorrente OU transitório.

Teorema 2: Se $C \subset S$ for uma classe então em C ou todos os estados são recorrentes ou todos são transitórios.

Obs: Recorrência (e transitoriedade) são propriedades de classe $\Rightarrow$ fala-se em classe recorrente.

Dem.: Seja C uma classe e suponha $i \in C$ transitória. Seja $j \in C$, então existem $n, m \geq 0$ tq.

$$p_{ij}^{(m)} \, p_{ji}^{(n)} > 0.$$

Para $r \geq 0$,

$$p_{ii}^{(m+n+r)} \geqslant p_{ij}^{(n)} \, p_{jj}^{(r)} \, p_{ji}^{(m)}$$

$$p_{ij}^{(n+m)} = (P^{n+m})_{ij} = (P^n P^m)_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{n} p_{kj}^{m}$$

$\forall l \in S$ fixo:

$$\geqslant \cancel{\sum} p_{il}^{n} = p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}.$$

$$\therefore \; p_{jj}^{(r)} \leqslant \frac{1}{p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)}} \, p_{ii}^{(m+n+r)}$$

$$\therefore \; \sum_{r \geq 0} p_{jj}^{(r)} \leqslant \frac{1}{p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)}} \sum_{r \geq 0} p_{ii}^{(m+n+r)} \Rightarrow \sum_{l \geq m+n} p^{(l)} < \infty \Rightarrow j \text{ é transitório.}$$

j trans.

Teorema 3: Toda classe recorrente é fechada.

Dem.: Se C for uma classe e não for fechada, existem $i \in C$ e $j \notin C$ e $m \geq 1$ tais que

$$P_i(X_m = j) > 0$$

e

$$P_j(X_n = i \text{ p/ algum } n \geq 0) = 0.$$

$$\therefore \underbrace{P_i(X_m = j, X_n = i \text{ i.v.})}_{(***)} \overset{PM}{=} P_i(X_m = j)\, P_j(X_n = i \text{ i.v.}) = 0.$$

Então,

$$P_i(X_n = i \text{ i.v.}) < 1 \quad (2)$$

(c.c. a prob. (***) > 0).

(2) vale e por def. i é transitório.

teorema 4: Toda classe fechada finita é recorrente.

Dem.: Suponha C uma classe finita e $X_0 \in C$.

$$\bigcup_{i \in C} \{X_n = i \text{ i.v.}\} = \Omega \quad \therefore \text{ existe } i \in C : P(X_n = i \text{ i.v.}) > 0.$$

$$0 < P(X_n=i \text{ i.v.}) = \sum_{j\in C} P(X_0=j) P_j(X_n=i \text{ i.v.}) .$$

$$\exists j\in C : P_j(X_n=i \text{ i.v.}) > 0$$

$$\shortparallel$$

$$P_j(X_n=i \text{ i.v.} \mid t_i<\infty) P_j(t_i<\infty)$$

$$\shortparallel$$

$$P_i(X_n=i \text{ i.v.})$$

$\therefore$ $P_i(X_n=i \text{ i.v.}) > 0 \Rightarrow \quad = 1 \Rightarrow i$ é recorrente.

Teorema 5: Suponha que P seja irredutível (ss tem 1 classe) e recorrente. Então

$$P(t_j<\infty) = 1, \ \forall j\in S.$$

Dem.: $P(t_j<\infty) = \sum_{i\in S} P(X_0=i) P_i(t_j<\infty)$

basta mostrar que $\forall i,j\in S$: $P_i(t_j<\infty)=1$. Como $i \leftarrow j$, existe m tal que:

$$P_j(X_m=i) > 0 .$$

$$1 = P_j(t_j<\infty) = P_j(X_n=j \text{ i.v.}) = P_j(X_n=j \text{ para algum } n\geq m+1) =$$

$$= \sum_{\ell\in S} P_j(X_m=\ell, X_n=j \text{ p/ algum } n\geq m+1) \overset{PM}{=} \sum_{\ell\in S} P_j(X_m=\ell) P_\ell(X_n=j, \text{ algum } n\geq 1) .$$

Para todo termo ℓ da soma tem que ser

$P_j(X_m=\ell) > 0 \Rightarrow P_\ell(t_j<\infty) = 1$. Como i é uma destas formas $\Rightarrow P_i(t_j<\infty)=1$.

Prop. de Markov: $\mathbb{P}(X_{t_n} \in B_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = P(X_{t_n} \in B_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$.

S enumerável: $= P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$

Hom. temporal: $\mathbb{P}(X_{t_n - t_{n-1}} = x_n \mid X_0 = x_{n-1}) = P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$

$\dots \qquad = P(X_1 = x_n \mid X_0 = x_{n-1}), \forall x_n, x_{n-1}$.

$A = \mathbb{N}$:

$X = (X_n)_{n \geq 0}$

Matriz de transição de uma cadeia de Markov:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1K} \\ \vdots & \ddots & & \\ P_{K1} & \cdots & & P_{KK} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$

$\forall i,j \in S$: $P_{:} = P(i,j) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$ transição de (1 passo) de $i \to j$.

Dist. inicial de X: $\mathbb{P}(X_0 = \cdot) = \mu = \{P(X_0 = i, i \in S)\}$.

Prop. A dist. de probabilidade X (c.M.) é determinada pela matriz de transição P e por μ.

$\mu = \mu(s)$: vetor linha e dist. de prob em S.

$\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$. $\forall i,j \in S$: $\sum_j p_{ij} = 1$, $\forall i \in S$ e $p_{ij} \geq 0$.

$P^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$, $i,j \in S$

Prop.: $\mathbb{P}^{(n)} = P^n = \underbrace{P.P. \dots P}_{n \text{ vezes}}$

Marginal de $X_n \Rightarrow P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} \mu(i)\, p_{ij}^n = (\mu P^n)_j$, $j \in S$.

Perda de memória de uma CM: $P(X_n = \cdot) = P^n$

$$P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}\pi\\ \vdots \\ \pi\end{pmatrix}$$

Processos Estocásticos - Aula 08

01/09

(1)

Revisão: i é transitório $\iff \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} < \infty$

i é recorrente $\iff \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$

$C_1, C_2, \dots$ classes fechadas

$\underbrace{C_1', C_2', \dots}_{\text{transitórias}}$ " "abertas"

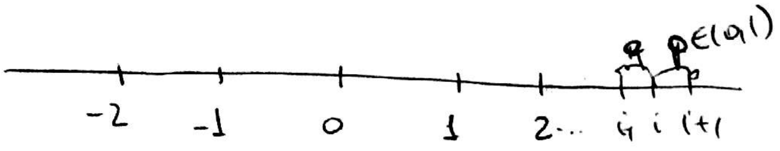
Se C_i for fechada $\rightarrow$ recorrente.

Se $|S| < \infty \Rightarrow$ classificação completa.

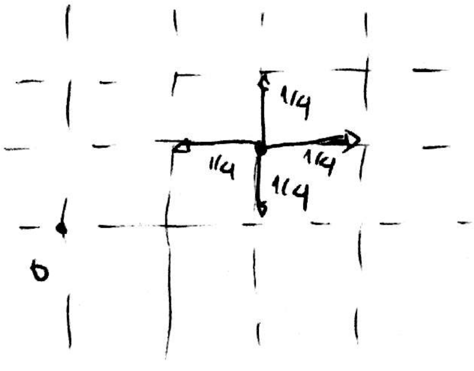
Recorrência e transitoriedade no passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$

S.

PAS em $\mathbb{Z}$:



PAS em $\mathbb{Z}^2$:



Scanned by CamScanner

Note que $|S| = \infty$ nesses casos e a cadeia é irredutível (todos os estados se comunicam entre si)

Para classificar $\mathbb{Z}^d$, basta classificar a origem. $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} p_{00}^{(n)} = \infty \; ? \\ \text{ou} \\ \sum_{n\geq 0} p_{00}^{(n)} < \infty \; ? \end{cases}$

Em $\underline{\underline{d=1}}$: $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = p_{00}^{(n)}$.

Seja D_n = nº de saltos à direita do passeante até o passo $n \sim Bin(n, p)$.

$$X_n = D_n - (\underbrace{n - D_n}_{\substack{\text{nº de saltos} \\ \text{à esq.}}}) = 2D_n - n$$

Obs.: (1) $X_n + n = 2D_n$, X_n e n tem a mesma paridade.

(2) $p_{00}^{(2K+1)} = 0, \forall K \geq 0$

$$p_{00}^{(2K)} = \mathbb{P}_0(X_{2K} = 0) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}_0\left(D_{2K} = \frac{2K}{2}\right) = \mathbb{P}_0(D_{2K} = K) \overset{(2)}{=}$$

$$= \binom{2K}{K} (pq)^K$$

Basta analisar $\sum_{K\geq 0} \binom{2K}{K} \cdot (pq)^K \overset{\text{recorrência}}{=} \infty$.

$< \infty \Leftrightarrow$ trans.

Comportamento assintótico: $\binom{2K}{K} = \frac{(2K)!}{(K!)^2}$ qdo $K \to \infty$.

Aproximação de Stirling

$$n! \sim A\sqrt{n}\, n^n e^{-n}, \quad 0 < A < \infty.$$

$\left(a_n \sim b_n : \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1\right).$

$$\therefore \binom{2K}{K} \sim \frac{A\sqrt{2K}\,(2K)^{2K} e^{-2K}}{(A\sqrt{K}\,K^K e^{-K})^2} = \frac{\sqrt{2}}{A\sqrt{2}} 4^K$$

$$\therefore \binom{2K}{K} (pq)^K \sim \frac{C}{\sqrt{K}} (4pq)^K.$$

Basta analisar

$$\sum_{K \geq 1} \frac{1}{\sqrt{K}} (4pq)^K \begin{matrix} = \infty \\ < \infty \end{matrix} ?$$

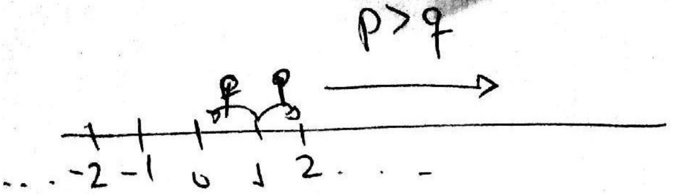
Se $p = q = 1/2 \therefore pq = 1/4 \therefore 4pq = 1.$

$\sum_{K \geq 1} \frac{1}{\sqrt{K}} (4pq)^K = \sum_{K \geq 1} \frac{1}{\sqrt{K}} = \infty.$ Logo, o pass. em $\mathbb{Z}$ é recorrente.

Se $p \neq q$: $4pq = \lambda < 1.$

$$\sum_{K \geq 1} \frac{1}{\sqrt{K}} (4pq)^K \leq \sum_{K \geq 1} \lambda^K = \frac{\lambda}{1-\lambda} < \infty.$$

$\therefore$ o PAS assimétrico em $\mathbb{Z}$ é transitório

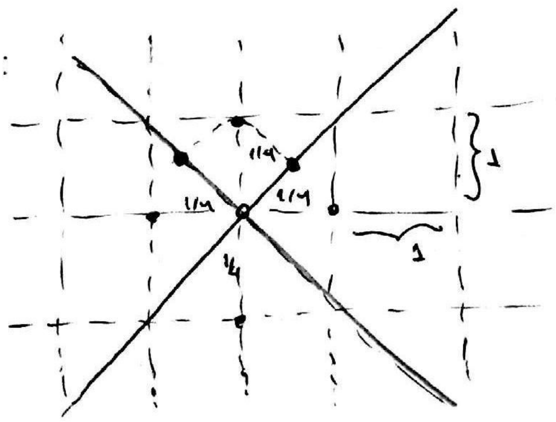


Pela lei forte dos Grandes números:

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{p-q}_{\neq 0}\right) = 1$$

$$P_0(X_n = 0 \text{ i.v.}) \leq P_0\left(\forall \varepsilon > 0 : \left|\frac{X_n}{n}\right| \leq \varepsilon \text{ i.v.}\right) \leq P_0\left(\frac{X_n}{n} \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{0}{\overset{p-q}{\#}}\right) \underset{\text{LFGN}}{=} 0$$

PASS em $\mathbb{Z}^2$:



$X_n = (X_n^+, X_n^-)$

X_n^+ ... PASS em 1 dim.

X_n^- ... PASS em 1 dim.

indep. entre si

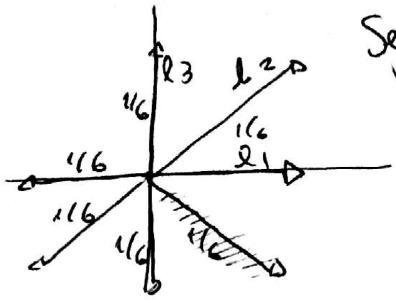
Logo $\quad P_{(0,0)}(X_n = (0,0)) = P\left((X_n = (0,0) \mid X_0 = (0,0)\right) \overset{(3)}{=}$

$$= P(X_n^+ = 0, X_n^- = 0 \mid X_0^+ = 0, X_0^- = 0) \overset{\text{indep.}}{=} P(X_n^+ = 0, X_n^- = 0 \mid X_0^+ = 0, X_0^- = 0)$$

$$= \left(\tilde{p}_{00}^{(n)}\right)^2 = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ \left[\binom{2K}{K}\frac{1}{4^K}\right]^2, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Basta achar se $\sum_{K\geq 1} \frac{1}{K} = \infty$. $\quad$ PASS em $\mathbb{Z}^2$ é recorrente.

Em $\mathbb{Z}^3$:



Sejam $l_1=(1,0,0)=e_1$

$l_2=(0,1,0)=e_2$

$l_3=(0,0,1)=e_3$

Então $X_n=\sum S_i V_i$

Se $(X_0=(0,0,0))$ então

$$\left.\begin{matrix} V_1, V_2, \dots \\ S_1, S_2, \dots \end{matrix}\right\} \text{indep.}$$

$P(V_1=e_i)=1/3,\quad i=1,2,3.$

$P(S_1=+1)=P(S_i=-1)=\frac{1}{2}.$

Para $n\geq 1$, seja

$$N^{(i)}=N_n^{(i)}=\{j\leq n: V_j=e_i\},\quad i=1,2,3.$$

$$N_i=|N_n^{(i)}|,\quad N_1+N_2+N_3=n.$$

$$(N_1,N_2,N_3)\sim M\left(n,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Dado $(N^{(1)},N^{(2)},N^{(3)})$: $U_i=\sum_{j\in N^{(i)}} S_j \sim \cancel{\mathrm{Bin}\left(N_i,\frac{1}{2}\right)}$

$= X^{(i)}_{N_i}.$

$X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ são PASS em $\mathbb{Z}$ começando da origem, indep. ⑥

$$P_0(X_n=0) = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar.} \\ & n=2K. \end{cases}$$

$$P_{00}^{(n_1)} P_{00}^{(n_2)} P_{00}^{(n_3)} = \prod_{i=1}^{n} \binom{n_i}{n_i/2} \frac{1}{2^{n_i}} = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \binom{n_i}{n_i/2}$$

$$P_0(X^{(1)}_{N_1}=0,\ X^{(2)}_{N_2}=0,\ X^{(2)}_{N_3}=0) = \sum_{\substack{n_i \text{ per} \\ n_1+n_2+n_3=2K}} P(X^{(1)}_{n_1} = X^{(2)}_{n_2} = X^{(3)}_{n_3} = 0 \mid N_1=n_1, N_2=n_2, N_3=n_3) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{P(N_1=n_1, N_2=n_2, N_3=n_3)}_{\binom{n}{n_1,n_2,n_3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\therefore\ P_0(X_{2K}=0) = \left(\frac{1}{6}\right)^{2K} \sum_{\substack{K_1,K_2,K_3 \geq 0 \\ K_1+K_2+K_3=K}} \binom{2K}{2K_1, 2K_2, 2K_3} \prod_{i=1}^{3} \binom{2K_i}{K_i}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{2K} \sum_{K_1,K_2,K_3} \frac{(2K)!}{(K_1!K_2!K_3!)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2K} \underbrace{\binom{2K}{K}}_{\sim \frac{c}{\sqrt{K}}} \sum_{\substack{K_1,K_2,K_3 \geq 0 \\ K_1+K_2+K_3=K}} \left(\frac{K!}{K_1!K_2!K_3!}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2K}$$

$$\sim M(K, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2K} \binom{2K}{K} \sum_{K_1+K_2+K_3=n} \left(\frac{1}{3}\right)^{K} \overbrace{\binom{K}{K_1,K_2,K_3} \left(\frac{1}{3}\right)^{K}}^{P(Y=(K_1,K_2,K_3))}$$

Scanned by CamScanner

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \max_{\substack{k_1+k_2+k_3 \\ =k}} \left(\frac{k!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \right).$$

Se $k=3m$, neste caso:

$$\frac{(3m)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \leq \frac{(3m)!}{m!\,m!\,m!}$$

Se $k_1 \leq m \leq k_2$: $\quad \dfrac{3m!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} < \dfrac{3m!}{(k_1+1)!\,(k_2+1)!\,(k_3+1)!}$.

$$p_{00}^{(2k)} \leq \frac{c}{\sqrt{3m}} \; \frac{1}{3^{3m}} \binom{3m}{m \;\; m \;\; m}$$

Stirling: $\displaystyle \binom{3m}{m \;\; m \;\; m} \sim \frac{A\sqrt{3m}\,(3m)^{3m}\,e^{-3m}}{\left(A\sqrt{m}\,m^{m}\,e^{-m}\right)^{3}} \sim \frac{c}{m}\;\frac{3^{3m}\,m^{3m}\,e^{-3m}}{m^{3m}\,e^{-3m}}$ ..

Finalmente:

$$p_{00}^{(2k)} \leq \frac{c'}{m^{3/2}}.$$

$$\sum_{n:\, n=6k} p_{00}^{(n)} < \infty.$$

Se $n =$ per $\tilde{n}$ múltiplo de 6

$n = 6m-2$ ou $n = 6m-4$.

$$p_{00}^{(6m-2)} \leq c'' \cdot p_{00}^{(6m)} \qquad \therefore \sum_{n \text{ per}} p_{00}^{(n)} \leq$$

$$p_{00}^{(6m-4)} \leq c''' \, p_{00}^{(6m)}$$

Note que $p_{00}^{(6m)} \geq p_{00}^{(6m-2)} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$$\geq p_{00}^{(6m-4)} \left(\frac{1}{6}\right)^4.$$

$$\therefore \sum_{n \text{ par}} p_{00}^{(n)} \leq \tilde{c} \sum_{\substack{n \text{ mult.} \\ \text{de } 6}} p_{00}^{(n)} < \infty \Rightarrow \text{PASS em } \mathbb{Z}^3 \text{ é transitório}.$$

Processos Estocásticos

Medida $\gamma_i^K = E_K \sum_{n=0}^{T_K - 1} 1\{X_n = i\}, \; i \in S$

Se X for irredutível e recorrente então γ^K é uma medida invariante a menos de uma constante.

Motivação: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1\{X_n = i\} \approx \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} t_k^{(j)}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=S_k^{(j-1)}}^{S_k^{(j)}-1} 1\{X_n = i\}$

$\longrightarrow \frac{\gamma_i^K}{m_K}$

Obs. $\sum_{i \in S} \gamma_i^K = E_K(t_K) = m_K$.

Definição: Dizemos que um estado $i \in S$ é recorrente positivo se

$$E_i[T_i] < \infty.$$

Se i for recorrente mas $E_i[T_i] = \infty \Rightarrow i$ é dito recorrente nulo (PASS 1d).

Teo 3: Suponha que P seja irredutível. Então são equivalentes:

(i) todos os estados são recorrentes positivos;

(ii) $\exists$ um estado recorrente positivo;

(iii) $\exists$ uma dist. invariante para P - dizemos π.

Sob a validade de (iii), então $\pi_i = 1/m_i$, $i \in S$.

Obs.: Sob a validade de (i) ou (ii) ou (iii), há uma única distribuição invariante.

Dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii) óbvio.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Como i é recorrente, pela irredutibilidade, a cadeia é recorrente. Do teo 1,

γ^k é invariante.

Agora: $$\sum_{i \in S} \gamma_i^k = \sum_{i \in S} E_k \sum_{n=0}^{T_k - 1} 1\{X_n = i\} = E_k(T_k) = m_k < \infty.$$

Fazendo $\pi_i = \dfrac{\gamma_i^k}{m_k}$ temos uma dist. invariante.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Como π é invariante,

$$\pi P^{(n)} = \pi \Longrightarrow \pi_K = \sum_{i\in S} \pi_i P_{iK}^{(n)}, \quad \forall K$$

$\forall n \geq 1$.

K fixo: $\lambda_i = \dfrac{\pi_i}{\pi_K}$, K fixo, é invariante e $\lambda_K = 1$.

Do teo. 2: $\lambda \geq \gamma^K \;(1) \Longrightarrow m_K = \sum_{i\in S} \gamma_i^K \leq \sum_{i\in S} \lambda_i = \sum_{i\in S} \dfrac{\pi_i}{\pi_K} = \dfrac{1}{\pi_K} < \infty$

$\Rightarrow$ K é recorrente pos. $\Longrightarrow$ recorrente $\overset{\text{irred.}}{\Longrightarrow}$ cadeia é recorrente $\Longrightarrow$

(1) é uma igualdade $\Rightarrow$ $m_K = \dfrac{1}{\pi_K}$.

Obs.: (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) do teo 3 diz que em cadeias irredutíveis a recorrência positiva é prop. de classe.

Como recorrência é prop. de classe e classes recorrentes são fechadas, a cadeia restrita a uma classe recorrente é irredutível.

Outras obs.: 1) Se S é irredutível, então:

(a) recorrente positiva $\Longleftrightarrow$ $\exists$ dist. invariante!

(b) recorrente $\Rightarrow \exists!$ medida inveriante (a menos de uma cte multiplicativa).

recorrência nula $\Rightarrow$ ñ há dist. inveriante

medida inv. inf. + recorrência $\Rightarrow$ ~~rec~~ recorrência nula.

(c) Se S for finito $\Rightarrow$ S é recorrente $\Rightarrow \gamma^k$ é inv. $\Rightarrow$

γ^k é finito $\Rightarrow m_k = \sum_{i \in S} \gamma_i^k < \infty \Leftrightarrow \exists!$ dist. inveriante.

Exs.: (1) PASS em $\mathbb{Z}$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{irred.}\\ \text{recorr.}\end{smallmatrix}\right)$. Seja $\pi_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$$\pi_i = \frac{1}{2}\pi_{i-1} + \frac{1}{2}\pi_{i+1} \Rightarrow \pi \text{ é inveriante.}$$

Logo qq. medida inveriante é um múltiplo cte. de $\pi \Rightarrow$ são medidas infinitas $\Rightarrow$ ñ existem dist. inveriantes.

(2) Medida $\equiv 1$ π é inveriante p/ PASS em $\mathbb{Z}^2$ $\Rightarrow$ ñ há dist. inveriante.

e PS em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ (mas a cadeia é transitória).

(3) PAS assimétrico em $\mathbb{Z}$

$$\pi P = \pi \Leftrightarrow \pi_{i} = \pi_{i-1}\, p + \pi_{i+1}\, q \;, i \in \mathbb{Z}.$$

A solução de (*)

$$\Pi_i = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^i, \quad A, B \geq 0 \text{ p/}\Pi \text{ ser medida positiva}$$

$\therefore$ não há unicidade a menos de cte. multiplicativa $\Rightarrow$ cadeia transitória

Castelo de cartas:

$$\begin{tikzcd} 0 & \cdots & i \arrow[ll, bend right, "q_i = 1-p_i"'] \arrow[r, bend left] & i+1 \end{tikzcd}$$

$, i \geq 0, \; p_i \in (0,1)$

$\therefore$ a cadeia é irredutível.

$$\Pi = \Pi P \iff \Pi_0 = \sum_{i \geq 0} q_i \Pi_i$$

$$\Pi_i = p_{i-1} \Pi_{i-1}, \; i \geq 1 \quad (2)$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \\ \hline 0 & q_0 & p_0 & 0 & & & \\ 1 & q_1 & 0 & p_1 & & 0 & \\ 2 & q_2 & 0 & 0 & p_2 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ & & 0 & & & & \ddots \end{array}$$

Iterando (2),

$$\Pi_i = p_{i-1} p_{i-2} \Pi_{i-2} = \cdots = \underbrace{p_{i-1} p_{i-2} \cdots p_0}_{\prod_{j=0}^{i-1} p_j = P_{i-1}, \; i \geq 1.} \Pi_0 = P_i \Pi_0$$

Logo

$(1, P_0, P_1, \dots)$ e seus múltiplos são medidas invariantes

Para que exista dist. inv. é necessário que

$$\sum_{i\geq 0} P_i < \infty$$

Se isto acontecer: $\tilde{\pi}_i = \dfrac{P_i}{1+\sum_{j\geq 0} P_j}, \quad i \geq 1.$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\pi}_i &= \frac{P_i}{1+\sum_{j\geq 0} P_j}, \quad i\geq 1 \\ \tilde{\pi}_0 &= \frac{1}{1+\sum_{j\geq 0} P_j} \end{aligned}\right\} \text{é dist. invariante}$$

Verifique que se $\lim_{i\to\infty} P_i = \prod_{i\geq 0} p_i > 0$ então a classe é transitória. Se (3) ou (4) estiverem satisfeitas $\Rightarrow$ cadeia recorrente nula.

Convergência ao equilíbrio:

Def.: Estado $i \in S$ é dito aperiódico se $P_{ii}^{(n)} > 0$ p/ todo n suficientemente grande.

Obs.: Verifica-se que i é aperiódico sse o m.d.c. $\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$ é 1.

Lema: Se $\mathbb{P}$ é irredutível e admitir um estado aperiódico, então para todo par $i,j \in S$,

$$P_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{para todo } n \text{ suf. grande.}$$

(Logo, todos os estados s̃ periódicos).

Dem: Se $K \in S$ for aperiódico, então

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq. } P_{KK}^{(n)} > 0, \ \forall n \geq n_0.$$

Pela irredutibilidade, dados $i,j \in S$

$$\exists r,s : P_{ik}^{(r)} > 0 \text{ e } P_{Kj}^{(r)} > 0.$$

Logo fazendo $n_0' = n_0 + r + s$ então p/ ~~todo~~ $n \geq n_0$, temos:

$$P_{ij}^{(n)} \geq \underbrace{P_{ik}^{(r)}}_{>0} \underbrace{P_{KK}^{(n-r-s)}}_{>0} \underbrace{P_{Kj}^{(s)}}_{>0} > 0, \text{ pois } n-r-s \geq n_0.$$

obs.: Demonstração mostra que aperiodicidade é prop. de classe.

teo. 1 (Conv. ao equilíbrio): Suponha que $\mathbb{P}$ seja irredutível, aperiódica e admita dist. inv. π. Dada uma dist. μ qualquer, temos que

$$\mathbb{P}(X_n = j) \longrightarrow \pi_j, \ \forall j \in S \qquad (1)$$

Em particular, dado $i \in S$,

$$P_i(X_n = j) \longrightarrow \pi_j, \ \forall j \in S \qquad (2).$$

Obs.: (1) O limite não depende de μ ou i (perda de memória)

(2) Supondo o resultado que acabamos de ver podemos substituir a condição "e que tenha dist. inicial π" por "e recorrente positiva". Neste caso, adicionamos depois de (1):

"onde π é a única dist. inv. dada pelo teo. 3".

3) Cadeias irredutíveis e recorrentes positivas são ergódicas. Cadeias finitas e irredutíveis são ergódicas.

Obs.: Notem que o argumento da dem. que aperiod. é prop. de classe.

Aula - Processos Estocásticos

13/09.

(1)
CM $X = (X_n)_{n\geq 0}$ em S c/ MT $\mathbb{P}$. Uma medida $\mu = (\mu_i, i \in S)$ é dita invariante (p/ X ou $\mathbb{P}$) se

$$\mu \mathbb{P} = \mu \quad (\Longleftrightarrow \mu_j = \sum_{i\in S} \mu_i P_{ij}, \forall j \in S).$$

(2) Se μ for uma probabilidade, i.e. se $\sum_{i\in S} \mu_i = 1$, e μ for invariante então μ é dita distribuição invariante
(ou de equilíbrio)
ou estacionária

Def: Um processo estocástico em S $(X_n)_{n\geq 0}$ é dito estacionário se p/ todo $m \geq 0$:

$$(X_n)_{n\geq 0} \sim (X_{m+n})_{n\geq 0}$$

Teo 1: Se $(X_n)_{n\geq 0}$ for uma CM e μ for uma dist. invariante, então se $X_0 \sim \mu$, temos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é estacionária.

Obs: Se μ for uma medida estacionária, então de (1), temos

$$\mu P^n = \mu, \forall n \geq 0.$$

(ii) Se μ é dist. estacionária sse dado que $X_0 \sim \mu$ então ②

$X_1 \sim X_0 \quad (X_n \sim X, \forall n \geq 0)$.

Dem. teo 1: Dados $m \geq 1$ e $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \infty$,

$i_1, \dots, i_k \in S$:

$$\mathbb{P}(X_{m+n_1} = i_1, \dots, X_{m+n_k} = i_k) = \mathbb{P}(X_{m+n_1} = i_1)\mathbb{P}(X_{m+n_2} = i_2 \mid X_{m+n_1} = i_1)$$

$$\dots \mathbb{P}(X_{m+n_k} = i_k \mid X_{m+n_{k-1}} = i_{k-1}) \underset{\text{Estacionariedade}}{\overset{\text{Hom. temporal}}{=}}$$

$$= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1)\mathbb{P}(X_{n_2} = i_2 \mid X_{n_1} = i_1) \dots \mathbb{P}(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_{k-1}} = i_{k-1})$$

$$\overset{P.M.}{=} \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k).$$

Teo. 2: Suponha que S seja finito e exista $i \in S$ e $\pi = (\pi_i, i \in S)$ uma medida tal que:

$$P_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi_j, \quad \forall j \in S.$$

Neste caso, π é uma dist. invariante.

$$= \sum_{l \in S} \lim_{n \to \infty} p_{il}^{(n-1)} p_{lj}.$$

Dem.: $$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{l \in S} p_{il}^{(n-1)} p_{lj} = \sum_{l \in S} \pi_l P_{lj} = (\pi P)_j$$

$\pi = \pi P \therefore \pi$ é invariante.

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in S} P_{ij}^{(n)} = 1$$

Exs: $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

$0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ excluído $\alpha=\beta=0$ ou $\alpha=\beta=1$.

Vimos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

do teo 2: $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ é uma medida invariante.

Obs: Note que a condição $\mu P = \mu$ é um sistema linear (se μ invariante então $c\mu$ é inv. p/ $c \geq 0$).

Uma dist. invariante satisfaz (1) e

$$\sum_{i \in S} \mu_i = 1.$$

Outro ex do começo do curso:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Montando o sistema linear:

$$\pi = \pi P$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_3}{2} \Rightarrow \pi_3 = 2\pi_1.$$

$$\pi_2 = \pi_1 + \frac{\pi_2}{2} \Rightarrow 2\pi_1 = \pi_2.$$

$(\pi_1, 2\pi_1, 2\pi_1)$, $\pi_1 \geq 0$ são invariantes. Impondo (2):

$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ é dist. invariante. (observe que $p_{11}^{(n)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2^n}(\ldots)$
$\Rightarrow \frac{1}{5}$)

Obs.: Ex. ao teo. 2 qdo. $|S| = \infty$. PAS em $\mathbb{Z}$ $\quad p_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0, \ \forall i, j \in \mathbb{Z}$

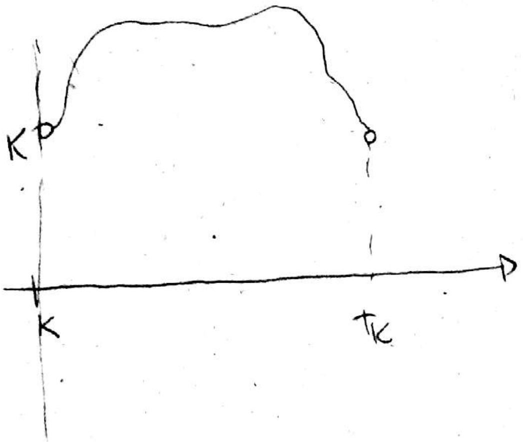
Para $K \in S$ fixado e $i \in S$:

$$\gamma_i^K = E_K\left[\sum_{n=0}^{T_K-1} 1\{X_n=i\}\right] \qquad i=K \quad \gamma_i^K=1$$

nº esperado de visitas a i por X começando em K até o retorno até de retornar a K.

Obs: Neste contexto, T_K tempo de 1º retorno a K

$$T_K = \inf\{n \geq 1 : X_n \geq k\}.$$



$i, K \in S$ fixos:

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} P_K(X_l = i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{i}{m_K} \qquad \text{se } E(T_K)<\infty$$

Teo 1: Suponha que $\mathbb{P}$ seja irredutível e recorrente. Então:

(i) $\gamma_K^K = 1$ (óbvio).

(ii) $\gamma^K = (\gamma_i^K, i \in S)$ é invariante, i.e., $\gamma^K P = \gamma^K$.

(iii) $0 < \gamma_i^K < \infty$.

Dem: (ii) Dado $j \in S$: $\gamma_j^K = E_K\left(\sum_{n=1}^{T_K} 1\{X_n=j\}\right)$ (note que

$$P_K(T_K < \infty) \overset{P \text{ é recorrente}}{=} 1 = E_K\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n=j, T_K \geq n\}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_n = j, t_k \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in S} P_k(X_n = j, X_{n-1} = i, t_k \geq n)$$

depende somente de $X_1, \dots, X_{n-1}$ $\{X_1 \neq k, \dots, X_{n-1} \neq k\}$

$$= \dots = \sum = p_{ij} P_k(X_{n-1} = i, t_k \geq n).$$

$$= \sum_{i \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_{n-1} = i, t_k \geq n) = \sum_{i \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_{n-1} = i, t_k \geq n)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_k(X_m = i, t_k \geq m+1) = E\left[\sum_{m=0}^{t_k - 1} \mathbb{1}\{X_m = i\}\right] = \gamma_i^k$$

(2) está verificado!

Logo, temos:

$$\gamma_j^k = \sum_{i \in S} \gamma_i^k p_{ij}$$

(iii) Pela irredutibilidade, dado j, existe $n \geq 1$: $p_{kj}^{(n)} > 0$.

$\therefore$ de (4) $\gamma_j^k \geq \gamma_k^k \cdot p_{kj}^{(n)} = p_{kj}^{(n)} > 0$.

$$1 = \gamma_k^k \geq \gamma_j^k p_{jk}^{(m)} > 0 \implies \gamma_j^k \leq \frac{1}{p_{jk}^{(m)}} < \infty.$$

Scanned by CamScanner

Teo. 2: Suponha λ $(\lambda_i, i \in S)$ uma medida (positiva) invariante para P e tq. $\lambda_K = 1$

Então $\lambda \geq \gamma^K$ $(\lambda_i \geq \gamma_i^K, i \in S)$. Se além disso, P for recorrente, então $\lambda = \gamma^K$.

Obs.: No caso irredutível recorrente existe apenas uma medida invariante a menos de uma cte multiplicativa.

Dem.: Para todo $j \in S$, $j \neq K$, λ inv.:

$$\lambda_j \overset{\lambda\ \text{inv}}{=} \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} P_{i_0 j} = P_{Kj} + \sum_{i_0 \neq K} \lambda_{i_0} P_{i_0 j} = P_{Kj} + \sum_{i_0 \neq K} P_{K i_0} P_{i_0 j} +$$

$$+ \sum_{i_1 \neq K} \sum_{i_0 \neq K} \lambda_{i_1} P_{i_1 i_0} P_{i_0 j} = P_K(X_1 = j, t_K \geq 1) +$$

$$P_K(X_2 = j, t_K \geq 2) + \dots + \sum_{i_0, \dots, i_{n-1} \neq K} P_{K i_{n-1}} P_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots P_{i_1 i_0} P_{i_0 j} +$$

$$+ \sum_{i_0, \dots, i_n \neq K} \lambda_{i_n} P_{i_n i_{n-1}} \cdots P_{i_1 i_0} P_{i_0 j}$$

$$\therefore \lambda_j \geq \sum_{l=1}^{n+1} P_K(X_l = j, t_K \geq l), \forall n \geq 1.$$

$$\therefore \lambda_j \geq \sum_{l=1}^{\infty} P_K(X_l = i, t_K \geq l) = E_K \sum_{l=1}^{t_K} 1\{X_l = j\} = \gamma_j^K.$$

2^a afirmação: Se $\mathbb{P}$ for recorrente, pelo teorema 1,

γ^k é invariante e finito.

$\mu = \lambda - \gamma^k \geq 0$ é invariante.

$$0 = \mu_k = \sum_{i \in S} \mu_i P_{ik}^{(n)}, \forall n \geq 1.$$

$$\geq \mu_j P_{jk}^{(n)}, \forall n \geq 1.$$

Pela irredutibilidade $\exists n_0 : P_{jk}^{(n_0)} > 0$:

$$0 \leq \mu_j \cdot P_{jk}^{(n_0)} \leq 0 \Rightarrow \mu_j = 0.$$

Scanned by CamScanner

Processos Estocásticos

Dem - teorema 3 (Doeblin): Por acoplamento Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ uma CM com a mesma MT e dist. inicial π $(Y_n)_{n\geq 0}$ indep de $(X_n)_{n\geq 0}$

Seja $T = \inf\{n \geq 0 \quad X_n = Y_n = b\}$

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } n \leq T \\ Y_n, & \text{se } n > T \end{cases}$$

Vamos mostrar que

$$P(T < \infty) = 1 \quad (1)$$

$$(Z_n)_{n\geq 0} \sim (X_n)_{n\geq 0} \quad (2)$$

De

$$P(X_n = j) \overset{(2)}{=} P(Z_n = j) = P(Z_n = j, T \geq n) + P(Z_n = j, T < n)$$

$$= P(X_n, T \geq n) + P(Y_n = j, T < n) = P(Y_n = j) - P(Y_n = j, T \geq n)$$

$$= \pi_j + \varepsilon_{n,j}, \quad |\varepsilon_{n,j}| \leq P(T \geq j) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{(1)} 0$$

Para verificar (1) e (2), segue que $W_n = (X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia em $S\times S$, ela é Markoviana com MT $\tilde{P}$

$$\tilde{P}_{(i,j)(k,l)} = P_{ik} \times P_{jl} .$$

Pela irredutibilidade e aperiodicidade:

$$\tilde{P}^{(n)}_{(i,j)(k,l)} = P^{(n)}_{(i,k)} \, P_{(j,l)} > 0 , \quad \text{p/ todo } n \text{ grande.}$$

$\therefore$ W é irredutível. E note ainda que (W_n) tem dist. invariante

$$\tilde{\pi}_{(i,j)} = \pi_i \times \pi_j .$$

Logo, de um teorema da aula passada, (W_n) é recorrente positivo

$$T = H_{(b,b)} = \inf\{ n\geq 0 : W_n = (b,b) \} \Rightarrow \mathbb{P}(T<\infty) = 1 \quad (1)$$

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n<T \\ Y_n, & n\geq T \end{cases}$$

Observe que T é um t.p. p/ $(W_n)_{n\geq 0}$; pela PMF:

$(W_{T+n})_{n\geq 0} = ((X_{T+n}, Y_{T+n}))_{n\geq 0}$ tem a mesma distribuição que (W_n) começando em (b,b), indep. de $W_0, \dots, W_T)$.

Por simetria:

$$((X_{T+n}, Y_{T+n}))_{n\geq 0} \sim ((Y_{T+n}, X_{T+n}))_{n\geq 0}$$

Isto tem como consequência:

$$X_n = \begin{cases} X_n, & n<T \\ X_n, & n\geq T \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (2)$$

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n<T \\ Y_n, & n\geq T \end{cases}$$

$\square$

Para tratar do caso periódico, vamos precisar do seguinte resultado.

Scanned by CamScanner

Teorema 2: Seja $\mathbb{P}$ irredutível. Então existe um inteiro $d \geq 1$ e uma partição de S

$$S = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{d-1}.$$

tal que (fazendo $C_{nd+r} = C_r, \forall n \geq 1$).

(i) $P_{ij}^{(n)} > 0$ só se $j \in C_{r+n}$, onde r é tq. $i \in C_r$.

(ii) Dados $i,j \in C_r$, temos $P_{ij}^{(nd)} > 0$ para todo n gde. o suficiente.

Dem.: Para $K \in S$ fixado, segue

$$N = \{ n \geq 0 : P_{KK}^{(n)} > 0 \} \sim \text{(conj infinito pela irredutibilidade)}.$$

Escolhemos $n_1, n_2 \in N$ tais que $n_1 < n_2$ e $d = n_2 - n_1$ é mínimo.

Para $r = 0, 1, \dots, d-1$, seja

$$C_r = \{ i \in S : P_{Ki}^{(nd+r)} > 0 \text{ p/ algum } n \geq 0 \}.$$

Pela irredutibilidade

$$S = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{d-1}.$$

Vamos mostrar agora que cada $i \in S$ não pode estar em dois C'_s, $r \neq s$. Suponha que para

$$r, s \in \{0, \dots, d-1\}$$

$i \in C_r \cap C_s$.

$$\text{Como } i \in C_r : \exists\, n \geq 0 : P_{ki}^{(nd+r)} > 0 \dots\dots$$

$$\dots\dots \exists\, n' \geq 0 : P_{ki}^{(n'd+s)} > 0 .$$

Podemos supor que $n' \geq n$, e que $\delta = n' - n$. Da irredutibilidade, $\exists\, m \geq 0 : P_{ik}^{(n)} \geq 0$. Podemos dizer que $P_{KK}^{(\delta n_1)}$ e $P_{KK}^{(\delta n_2)} > 0$.

Podemos então concluir que

$$P_{KK}^{(\overbrace{\delta n_2 + nd}^{n''} + r + m)} \geq \overbrace{P_{KK}^{(\delta n_2)}}^{>0} \overbrace{P_{ki}^{(nd+r)}}^{>0} \overbrace{P_{ik}^{(m)}}^{>0} > 0 .$$

$$\cap$$

$$\mathbb{N}$$

$$P_{KK}^{(\underbrace{\delta n_1 + n'd}_{n''} + s + m)} \geq \dots > 0 .$$

$$\in \mathbb{N}$$

$\therefore \quad |r - s| = 0 \therefore C_0, \dots, C_{d-1}$ é partição.

Para verificar (i), seja $i \in C_r$ para algum $r \in \{0, \dots, d-1\}$ e j, n:

$P_{ij}^{(n)} > 0$, então, sabemos que

$$P_{ki}^{(md+r)} > 0 \quad \text{para algum } m \geq 0.$$

$$\Rightarrow P_{kj}^{(md+r+n)} \geq P_{ki}^{(md+r)} P_{ij}^{(n)} > 0 \qquad j \in C_{r+n}$$

Obs: Fazendo $i=j=k$, temos que d divide todos os nos de N. Logo $d \mid n_1$

[Vamos estipular $n_1 \geq 1$]

Suponha que $nd \geq n_1^2 \Rightarrow nd = qn_1 + s$, onde $0 \leq s \leq n_1 - 1$. Como

$d \mid n_1$ então $d \mid s \Rightarrow s = md$

$$P_{kk}^{(nd)} = P_{kk}^{(qn_1 + m\overbrace{d}^{n_2 - n_1})} = P_{kk}^{[\overbrace{(q-m)}^{\geq 0} n_1 + \overbrace{n_2 m}^{\geq 0}]} \geq \underbrace{\left[P_{kk}^{(n_1)}\right]}_{>0}^{q-m} \underbrace{\left[P_{kk}^{(n_2)}\right]}_{>0}^{m} > 0$$

Agora, seja $i, j \in C_r$:

$\boxed{\text{obs: } d \text{ é o mdc de } N}$

Da irredutibilidade, $\exists m, l \geq 0$: $P_{jk}^{(m)} > 0$, $P_{kj}^{(l)} > 0$: se $nd \geq n_1^2$

$$P_{ij}^{(nd+m+l)} \geq P_{jk}^{(m)} P_{kk}^{(nd)} P_{kj}^{(l)} > 0. \text{ Por (i), } d \mid m+l.$$

Teo. 3: (Conv. p/ CM irredutíveis) Suponha que P seja irredutível, e sejam d, $C_0, \dots, C_{d-1}$ o período e a partição do teo 2. Seja X uma dist. inicial pt centrada em C_0. Então se $j \in C_r$

$$P(X_{nd+r} = j) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{d}{m_j}$$

$m_j = E_j(T_j)$. [Em particular, se $m_j = \infty \Rightarrow \frac{d}{m_j} = 0$]

Além disso,

$$P_i(X_{nd+r} = j) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{d}{m_j}$$

Processos Estocásticos

Dem. (teo. 3): (a) Façamos $\nu = \lambda P^r$. Pelo teo 2:

$$\sum_{i \in C_r} \nu_i = 1 .$$

Definimos $Y_n = X_{nd+r}$, $n \geq 0$. Então $(Y_n)_{n \geq 1}$ é uma CM c/ distribuição inicial ν e MT. P^d.

Pelo teo 2: $(Y_n)_{n \geq 0}$ é irredutível e aperiódica. Então,

$$P(X_{nd+r} = j) = P(Y_n = j) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{d}{m_j}$$

É suficiente mostrar que e o teo. de conv. vale no caso aperiódico.

Há 3 casos para considerar:

a) recorr. positivo

b) transitório

c) recorr. nulo.

b) Supondo $\mathbb{P}$ transitório façamos, $i \in S$,

$V_i =$ nº total de visitas ao estado i

Como já vimos, começando de P_i

$$V_i \sim Geo(p), \quad p_i = P_i(T_i = \infty).$$

Como $\mathbb{P}$ é transitório, $p_i > 0$

$$\therefore P_i(V_i < \infty) = 1$$

$$\therefore P_i(L_i < \infty) = 1,$$

$$L_i = \max\{n \geq 0 : X_n = i\}$$

Logo,

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n} P(H_i = k) \overbrace{P_i(X_{n-k} = i)}^{\leq P_i(L_i \geq n-k)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} + \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} P(H_i = k) P_i(L_i \geq n/2) + \underbrace{\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} \mathbb{P}(H_i = k)}_{\leq 1}$$

$$= P_i(\underbrace{L_i \geq n/2}_{\to 0 \text{ (trans)}}) \sum_{k=0}^{n/2} P(H_i = k) + P(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \leq H_i \leq \overset{\infty}{n}) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\to 0$ $n \to \infty$

c) Se P for recorrente nulo

$$m_j = E_j(t_j) = \infty$$

$$\| $$

$$\sum_{k \geq 0} P(t_j > k)$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher K

$$\sum_{k=0}^{K-1} P(t_j > k) \geq \frac{2}{\varepsilon}$$

Para $n \geq K-1$

$$1 \geq \sum_{k=n-K+1}^{n} P(\underbrace{X_k = j, X_{k+1} \neq j, \ \ , X_n \neq j}_{A_k})$$

Os eventos $(A_k)_{k=n-K+1}^{n}$ são disjuntos

$$\overset{P.M.}{=} \sum_{k=n-K+1}^{n} P(X_k = j)\, P_j(t_j > n-k) = \sum_{l=0}^{K-1} P(X_{n-l} = j)\, P_j(t_j > l)$$

$l = n-k$

A desigualdade implica na existência de $l \in \{0, \dots, K-1\}$ tal que

$$P(X_{n-l} = j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Usando novevi e acoplamento

$(Y_n)_{n\geq 0}$ indep. de $(X_n)_{n\geq 0}$ e começando de μ. Seja

$W_n = (X_n, Y_n)$. Como antes, aperiodicidade de P se implica em

irredutibilidade de $(W_n)_{n\geq 1}$.

Se (W_n) for transitório, então fazendo $\mu = \lambda$.

$$\mathbb{P}^2(X_n = j) = P(W_n = (j,j)) \xrightarrow[n\to\infty]{(b)} 0$$

Se (W_n) for recorrente então $T = \inf\{n\geq 0 : W_n = (b,b)\}$ é finito

c.p. 1.

$$\Rightarrow |P(X_n = j) - P(Y_n = j)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fazendo $\mu = \lambda P^k$ então

$$\mathbb{P}(Y_n = j) = P(X_{n+k} = j) \Rightarrow \exists N\geq 0 : \text{se } n\geq N:$$

$$|P(X_n = j) - P(X_{n+k} = j)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

O que implica na existência de $N' \geq k$ tq. $\forall n \geq N'$.

$$|\mathbb{P}(X_{n+k} = j) - \mathbb{P}(X_n = j)| \leq \varepsilon/2. \quad (2)$$

⑤

$\forall n \geq K$, existe $k \in \{0, \dots, K-1\}$ tq

$$P(X_{n-k} = j) \leq \varepsilon/2 \quad (1)$$

Se $n \geq N'$ De (1) e (2)

$$\mathbb{P}(X_n = j) \leq \varepsilon$$

Como ε é arbitrário, o resultado segue $\square$

No caso irredutível

1) Se recorr positiva, aperiódica:

$$P(X_n = \ ) \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi(\ )$$

2) Recorrente nula e transi:

$$P(X_n = \ ) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

3) Recorrente periódico.

$$P_i(X_{nd+r} = j) \longrightarrow \frac{d}{m_j}, \quad i \in C_0, \ j \in C_r$$

$$\shortparallel$$

$$P(Y_n = j) \longrightarrow \frac{1}{E_j(T_j) = \frac{m_j}{d}} = \frac{d}{m_j}$$

Se P não for irredutível: sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ as classes recorrentes (6)

positivas (todas aperiódicas):

$$P_i(X_n=j) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \underbrace{h_i^{\mathcal{F}_\ell}}_{P_i(\text{absorção em } \mathcal{F}_\ell)} \cdot \pi_j^\ell .$$

onde π^ℓ é a dist. invariante associada a $\mathcal{F}_\ell$:

$$P_i(X_n=j) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0, \quad j \notin \bigcup_\ell \mathcal{F}_\ell .$$

Num caso geral, o comportamento limite envolve:

$$h_j^{i,s}(\ell) = P_j(H^{\mathcal{F}_i} = \ell, X_\ell \in C_s^i), \quad s \in \{0, \ldots, \underbrace{d_i}_{\text{período de } \mathcal{F}_i}\}, \ \ell \geq 0 .$$

Reversão Temporal

$(X_n)_{n\geq 0}$ CM.: "Dado presente, passado e futuro são independentes".

Teo. 1: Suponha P irredutível e tenha distribuição invariante π. Suponha que (X_n) CM. c/ MT P e dist. inv. π. Dado $N \geq 0$ fixo, seja $(Y_n)_{n\geq 0}^N$ $\ulcorner (X_n) \models CM(\pi, P) \lrcorner$ tal que $Y_n = X_{N-n}$. Então

$$(Y_n)_{n\geq 0} = CM(\pi, \hat{P}), \quad \text{onde } \hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{ji}$$

Além disso, $\hat{P}$ é irredutível e π é invariante p/ $\hat{P}$

Obs.: Lembrando que $\pi_j > 0$, $\forall i \in S$.

Dem.: 1) $\hat{P}$ é uma matriz estocástica:

$$\sum_{j\in S} \hat{P}_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j \in S} \pi_j P_{ji} = 1$$

2) π é inv. p/ $\hat{P}$:

$$\sum_{i\in S} \pi_i \hat{P}_{ij} = \sum_{i \in S} \cancel{\pi_i} \cdot \frac{\pi_j}{\cancel{\pi_i}} \cdot P_{ji} = \pi_j .$$

3) PM Dados $i_0, i_1, \dots, i_N \in S$:

$$P(Y_0 = i_0, \dots, Y_N = i_N) = P(X_0 = i_N, \dots, X_N = i_0) = \frac{\pi_{i_N}}{\cdot(\pi_{i_{N-1}})} P_{i_N i_{N-1}} \cdot (\pi_{i_{N-1}}) \frac{P_{i_{N-1} i_{N-2}}}{\pi_{i_{N-2}}} \dots \pi_{i_{N-2}} P_{i_0 i_1}$$

$$= \dots = \hat{P}_{i_N i_N} \hat{P}_{i_{N-2} i_{N-1}} \dots \hat{P}_{i_1 i_0} \pi_{i_0} .$$

4) Irredutibilidade: Dados $i, j \in S$, pela irredutibilidade de P, existe $n \geq 0$ e $i_0 = i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j$:

$$P_{i i_1} \dots P_{i_{n-1} j} > 0$$

$$\parallel$$

$$\hat{P}_{j i_{n-1}} \dots \hat{P}_{i_1 i} \frac{\pi_i}{\pi_j}$$

Aula - Processos Estocásticos

Def. 1: Dada uma matriz estocástica P e uma medida ~~distribuição~~ de prob. ~~em~~
* (em S) dizemos que λ e P estão em equilíbrio detalhado se:

$$\lambda_i P_{ij} = \lambda_j P_{ji}, \quad \forall i,j \in S. \qquad (*)$$

Lema 1: Se λ e P estiverem em equilíbrio em eq. det., então λ é inv. p/ P.

Dem.: Vamos verificar que:

$$\lambda P = \lambda$$

$$\lambda_j = \sum_{i \in S} \lambda_i P_{ij}, \quad \forall j \in S$$

Por $(*)$, $\displaystyle\sum_{i \in S} \lambda_i P_{ij} = \sum_{i \in S} \lambda_j P_{ji} = \lambda_j$.

$\square$

Def. 2: Dada uma cadeia $CM(\lambda, P)$ $(X_n)_{n\geq 0}$, com P irredutível, dizemos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é reversível se $\forall N \geq 0$,

$$(X_{N-n})_{n=0}^{N} = CM(\lambda, P).$$

Teorema: Sejam P uma matriz estocástica e λ uma dist. prob. Suponha que $(X_n)_{n\geq 0} = CM(\lambda, P)$. Então são equivalentes:

(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ é reversível

(ii) λ e P estão em equilíbrio detalhado

$(ii \Rightarrow i)$ Dem: Pelo Lema 1, ~~último teorema~~ de ~~aula passada~~, λ é inv p/ P. De $(*)$: $\hat{P} = P$. Pelo último teorema de aula passada, $(X_{N-n})_{n=0}^{N} = CM(\lambda, P)$

$(i \rightarrow ii)$ Fazendo $N=1$, $(X_0, X_1) \sim (X_1, X_0)$.

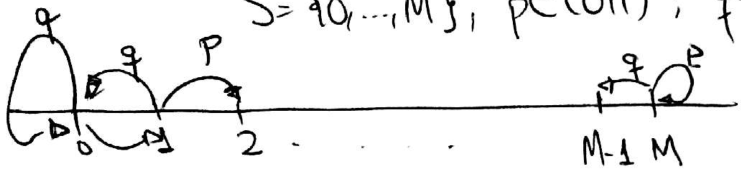
Def.: Dada uma matriz estocástica P ...

Obs: $(*)$ pode ser visto como um sistema de eq. lineares satisfeitas por λ. Soluções de $(*)$ nos dão medidas invariantes p/ P. Se tais medidas forem finitas, podem ser normalizadas.

Ex. 1: $P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ é duplamente estocástica (linhas e colunas são dist. de prob.).

É fácil ver que $\lambda = (1,1,1)$ é inv. p/ P. A única dist. inv. p/ P é $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Notem que λ (em π) ñ estão em eq det. c/ P. Logo a $CM(\pi, P)$ ñ é reversível.

2) $S = \{0, \dots, M\}$, $p \in (0,1)$; $q = 1-p$.



As eq's. de ED:

$$\lambda_i P_{i\,i+1} = \lambda_{i+1} P_{i+1\,i} \quad , i = 0, \dots, M-1$$

$$\Longrightarrow \lambda_{i+1} = \frac{p}{q} \lambda_i \quad , \quad i = 0, \dots, M-1. \; (*)$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i$$ é uma solução de $(*)$.

$\pi = \dfrac{\lambda}{\text{norm}}$ é uma distr. inv. p/ P e $(X_n) = CM(\pi, P)$ é reversível

Ex. 2': Mesmas condições válidas (com ajustes óbvios) se $M = \infty$, $p < 1/2$.

Ex. 3: PASS em Grafos.

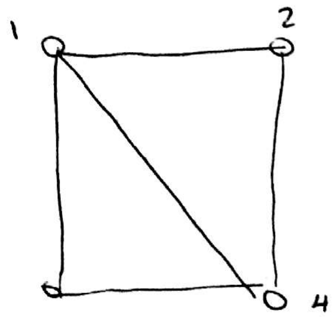
Grafo: $G = (S, E)$

vértices — S; y de elos — E.

E = pares de vértices de $S \times S$.

Se p/ $i, j \in S$, $(i,j) \in E$, então $(j,i) \in E$ e é identificado como (i,j).

Ex.:



$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{(1,2), (1,4), (1,3), (2,4), (3,4)\}$

Seja $V_i = \{j \in S : (i,j) \in E\}$, $i \in S$;

Suponha que $V_i \neq \emptyset$, p/ todo $i \in S$.

Seja $v_i = \# V_i$ valência de i, e seja a CM c/ M.t.P tal que

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{v_i}, & \forall j \in V_i \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

"A cadeia salta uniformemente p/ os vizinhos de cada vértice".

O grafo (S,E) é dito conexo se $\forall (i,j) \in S \times S$, temos que:

$n \geq 0$ e $i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j$ tq.

$$(i_{\ell-1}, i_\ell) \in E \text{ p/ todo } \ell = 1, \dots, n.$$

Se $G = (S,E)$ for conexo, então a CM é irredutível. É fácil ver que $v = (v_i, i \in S)$ está em equilíbrio detalhado c/ P:

$$\left(v_i \, P_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall (i,j) \in E \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \right).$$

$\therefore$ Se S for finito, então $\pi = \frac{v}{\text{norm}}$ é dist. inv. p/ P e logo

$CM(\pi, P)$ é reversível.

Ex: Cavalo de xadrez (aleatório)

Movimentos uniformes dentre os possíveis $=$ O grafo de movimentos em 1 passo. $v_c = 2$. Verifique que o grafo é conexo.

2) Há 4 casos c/ valência 2

" 8 casos " 3

⋮

Soma das valências $= 336$.

16 " 8.

Pergunta: Saindo de um dos cantos, qual o tempo esperado até voltar ⑥

ao mesmo canto?

Da teoria vista em algumas aulas:

$$E_c(t_c) = \frac{1}{\pi_c} = \frac{1}{2/336} = \underline{168}.$$

Teorema Ergódico

Recordação: Lei dos Grandes Números (p/ v.a.s ñ-negativas). Sejam $X_1, X_2, \ldots$

iid ñ negativas. Então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{q.c.} E(X_1)$$

Dem.: Supondo conhecido o caso em que $E(X_1) < \infty$, se $E(X_1) = \infty$, então

p/ todo $M > 0$: $\exists N > 0 : E(X_1 \wedge N) \geq M$.

$$\therefore \varliminf \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \varliminf \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i \wedge N) \overset{LGN}{=} \lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i \wedge N)$$

$\overset{q.c.}{=} E(X_1 \wedge N) \geq M$. Como M é arbitrário, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \infty$.

Teorema 1 (Ergódico): Seja P irredutível, λ dist. qualquer, $(X_n) = CM(\lambda, P)$.

Para cada $i \in S$, seja

$$V_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}\{X_k = i\}.$$

Então p/ cada $i \in S$,

$$\frac{V_i(n)}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{m_i}, \quad m_i = E_i(H_i).$$

(b) Além disso, se P for recorr. positiva então p/ toda $f: S \to \mathbb{R}$ limitad

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{q.c.} \bar{f} = E_\pi(f(X_0)) = \sum_{i \in S} f(i)\pi_i.$$

onde π é a única dist. invariante.

Dem.: (a) Se P for transitório, então

$$V_i(\infty) = \lim_{n \to \infty} V_i(n) < \infty.$$

$$\underline{\lim} \frac{V_i(n)}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{V_i(\infty)^{<\infty}}{n} = 0.$$

Se P for ~~transitório~~ recorrente, seja $H_i = \{$tempo de chegada a i.

Então $(X_{H_i+n})_{n \geq 0} = CM(\delta_i, P)$ independente de $X_0, X_1, \dots, X_{H_i-1}$.

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Logo, $\left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = i\} - \frac{1}{n}\sum 1\{X_{H_i+k}\} \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=(n-H_i)^+}^{n-1} 1\{X_k = i\}$.

$$\leq \frac{H_i}{n} \quad \therefore \lim |\dots - \dots| = 0.$$

Logo, suficiente fazer $\lambda = \delta_i$.

Fazendo $\lambda = \delta_i$, seja $t_i^{(0)} = 0$ e para $r \geq 1$:

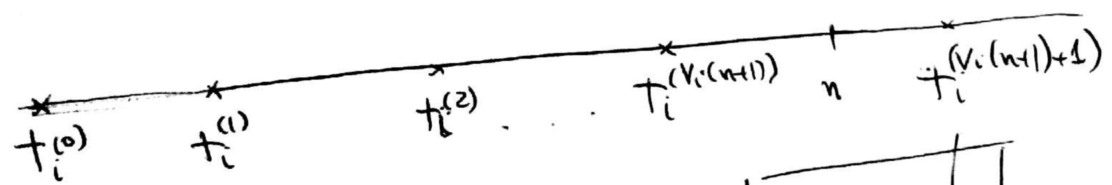
$$t_i^{(r)} = \inf\{ n \geq t_i^{(r-1)} : X_n = i \}$$

.. tempos das sucessivas visitas a i.

Seja $S_i^{(r)} = t_i^{(r)} - t_i^{(r-1)}$, $r \geq 1$.

$(S_i^{(1)}, S_i^{(2)}, \dots)$ são iid.

$S^{(1)} = t_i$; $E(S_i^{(1)}) = E(t_i) = m_i$.



≥ 1.

$$\frac{V_i(n+1)}{V_i(n)} \cdot \frac{t_i^{V_i(n+1)}}{V_i(n+1)} \leq \frac{n}{V_i(n)} \leq \underbrace{\boxed{\frac{t_i^{(V_i(n+1)+1)}}{V_i(n+1)+1}}}_{\to m_i} \cdot \underbrace{\frac{V_i(n+1)+1}{V_i(n)}}_{\to 1}.$$

Note que $V_i(n) \xrightarrow{q.c.} \infty$

$$\square = \frac{1}{V_i(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{V_i(n+1)} S_i^{(i)} \xrightarrow[n \to \infty]{} m_i .$$

$$\therefore \frac{n}{V_i(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} m_i .$$

$$\Longrightarrow \frac{V_i(m)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} \frac{1}{m_i}, \quad m_i = E_i(t_i)$$

$\square$.

Aula - Processos Estocásticos

Dem. (b) Escrevamos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{i\in S} f(i)\, V_i(n) = \sum_{i\in S} f(i)\, \frac{V_i(n)}{n} \quad (1).$$

Então

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) - \bar{f}\right| \overset{(1)}{=} \left|\sum_{i\in S} f(i)\left[\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right]\right|$$

$$\leq \sum_{i\in S}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| |f(i)| \leq C\sum_{i\in S}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right|$$

$\sup_{i\in S}|f(i)|$ ..

$$= \sum_{i\in F}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + \underbrace{\sum_{i\in F^c}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right|}_{\leq \sum_{i\in F^c}\left(\frac{V_i(n)}{n} + \pi_i\right) (*)}, \text{ onde}$$

$F \subset S$ qualquer.

$$(*) = \sum_{i\in F^c} \frac{V_i(n)}{n} + \sum_{i\in F^c}\pi_i = \sum_{i\in F^c}\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right) + \sum_{i\in F^c}\pi_i + \sum_{i\in F^c}\pi_i.$$

Note que

$$\sum_{i\in f^c}\left(\frac{V_i}{n}-\pi_i\right) = -\sum_{i\in f}\left(\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right) \text{ Mas,}$$

$$\left|-\sum_{i\in f}\ \cdots\ \right| \le \sum_{i\in f}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| .$$

Do raciocínio acima, vem que:

$$\sum_{i\in S}\left(\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right) \le 2\sum_{i\in f}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right| + 2\sum_{i\in f^c}\pi_i$$

Dado $\varepsilon>0$, podemos escolher $f\subset S$ finito t.q. $\sum_{i\in f^c}\pi_i < \varepsilon/2$.

Isto segue do fato que π é uma dist. de prob. Concluímos que

$$\overline{\lim_{n\uparrow\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)-\bar{f}\right| \le C\left[\overline{\lim}\ \frac{1}{n}\overset{\to 0}{\sum_{i\in f}}\left|\frac{V_i(n)}{n}-\pi_i\right|+\varepsilon\right]$$

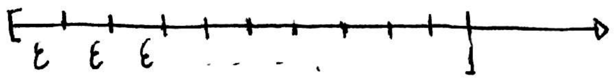
$$\le c\varepsilon .$$

Scanned by CamScanner

Como ε é arbitrário, o resultado segue.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

S : espaço de estados



$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$; CM em S com tempos em $\varepsilon\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $P^{(\varepsilon)}$: MT $= \left(P^{(\varepsilon)}_{ij}\right)_{i,j\in S}$.

λ: dist. inicial.

$$P(X_1 = \cdot\,) = \lambda\left[P^{(\varepsilon)}\right]^{1/\varepsilon}$$

$t\in\varepsilon\mathbb{N}$ $\quad t = n\varepsilon$

$$P(X_t = \cdot\,) = \lambda\left[P^{(\varepsilon)}\right]^{t/\varepsilon}.$$

$$\left[P^{(\varepsilon)}\right]^{1/\varepsilon} = \Big[I + \underbrace{(-I + P^{(\varepsilon)})}_{=\ \varepsilon Q\ \text{(suposição p/ alguma matriz } Q = (q_{i,j})_{i,j\in S})}\Big]^{1/\varepsilon}$$

④

$$(I - \varepsilon Q)^{1/\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} e^{-Q}.$$

Obs.: Dada uma matriz A finita

$$e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n \text{ (vide apêndice do cap. 2 do livro).}$$

c/ as propriedades:

- Se A e B comutarem: $(AB = BA)$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.
- Se A for diagonalizável: $A = UDU^{-1}$, onde U é matriz inversível, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$.

Neste caso, $e^A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (UDU^{-1})^n = U \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} D^n \right) U^{-1}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} D^n = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_m^n}{n!} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$\therefore \quad e^{A} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_m} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

$$P(X_t = \cdot) \cong \lambda \left[\left(I - Q\varepsilon \right)^{1/\varepsilon} \right]^{t} \cong \left(e^{+Q} \right)^{t} = e^{+tQ}$$

Neste caso, temos

$$P(X_t = \cdot) = \lambda e^{tQ}, \quad t \in [0, \infty).$$

Teo. 1: Suponha que $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ seja uma matriz com S finito. Fazendo $P(t) = e^{tQ}$, então $(P(t), t \geq 0)$ temos as seguintes prop.:

(i) $P(s+t) = P(t)P(s)$, $\forall s,t \geq 0$ (Prop. de semigrupo).

(ii) $P(\cdot)$ é a única solução das "eqs. avançadas":

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)Q, \quad t \geq 0.$$

$$P(0) = I.$$

(iii) " " eqs' atrasadas

$$\frac{d}{dt} P(t) = QP(t).$$

$$P(0) = I.$$

(iv) Para $K \geq 0$,

$$\frac{d^K}{dt^K} P(t) = Q^K.$$

<u>Dem.</u>: (i) $P(s+t) = e^{(t+s)Q} = e^{tQ+sQ} \overset{\boxed{\text{pois } tQ \text{ e } sQ \text{ comutam}}}{=} e^{tQ} e^{sQ} = P(t)P(s) = P(s)P(t)$

(ii) $\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} e^{tQ} = \frac{d}{dt} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} Q^n \overset{\text{Apêndice cap. 2}}{=} Q \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} Q^{n-1}$

$= Q e^{tQ} = Q P(t).$

(iii) Similar

(iv) Dif. K vezes

$$\frac{d^2 P(t)}{dt^2} = Q \frac{d}{dt} P(t) = Q^2 P(t)$$

$$\therefore \frac{d^K P(t)}{dt^K} = Q^K \cdot P(t).$$

$$\Big|_{t=0} = Q^K$$

■

Se quisermos que

$$P(t) = e^{tQ} \text{ seja estocástica}$$

- $q_{ij} \geq 0, \; \forall i \neq j.$
- $-q_{ii} \geq 0, \; \forall i.$ — $\varepsilon Q = (P^{(\varepsilon)} - I)$.
- $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \;, \; \forall i \in S.$

$$\Rightarrow q_i := -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \; i \in S.$$

Def.: Uma matriz $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ satisfazendo (1), (2) e (3) acima e ainda $q_i < \infty \; \forall i \in S$, é dita uma matriz-Q.

Teo 2: Uma matriz Q é uma matriz-Q sse: $P(t) = e^{tQ}$ for estocástica para todo $t \geq 0$.

Aula - Processos Estocásticos

Teorema: Se S for finito e $Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$, então Q é uma matriz Q sse:

$$P(t) = e^{tQ} \text{ for estocástica p/ todo } t \geq 0.$$

Dem.: $(\Longleftarrow)$ $P(t) = I + tQ + o(t)$

$$e^{tQ} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n Q^n = I + tQ + o(t)$$

$$\frac{o(t)}{t} \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0.$$

$P_{ij}(t) \geq 0, \forall i \neq j \in S \Longleftrightarrow q_{ij} \geq 0, \forall i \neq j, t > 0$ pequeno
$i, j \in S$.

Note agora que

$$P(t) = [P(t/n)]^n \Rightarrow P(t) \geq 0 \; \forall t \Longleftrightarrow P(t) \geq 0 \; \forall t > 0 \text{ pequeno.}$$

Agora, suponhamos que

$$\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$$

tomando $\frac{d}{dt}$: $0 = \frac{d}{dt} \sum_{j \in S} P_{ij}(t) = \sum_{j \in S} \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \overset{\text{usando } \frac{d}{dt^k} P(t)\big|_{t=0} = Q^k,\ k \geq 0.}{=} \sum_{j \in S} q_{ij}$ ✓

Reciprocamente, supondo Q uma matriz-Q:

$$\sum_{j\in S} P_{ij}(t) = \sum_{j\in S}\left(e^{tQ}\right)_{ij} = \sum_{j\in S}\left[I_{ij} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}t^n (Q^n)_{ij}\right]$$

$$= \sum_{j\in S} I_{ij} + \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\sum_{j\in S}(Q^n)_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{l\in S}\sum_{j\in S}}\,(Q^{n-1})_{il}\, q_{lj}$$

Descrição discreta: vs Descrição Contínua:

$$P(X_n = \cdot\,) = \mu P^n \qquad\qquad P(t) = e^{tQ}$$

$$P(X_t = \cdot\,) = \lambda P(t).$$

Uma descrição completa de uma cadeia de Markov em tempo contínuo (CMTC). Espaço de estados S, enumerável (finito).

$$(X_t)_{t\in[0,\infty)} \qquad [X_t : [0,\infty) \to S]$$

As distribuições finito-dimensionais de $(X_t)_{t\geq 0}$. Dados $0\leq t_1 < t_2 \ldots < t_n < \infty$ e $i_1,\ldots,i_n \in S$ e μ distribuição em S e Q uma matriz-Q.

$$P(X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_n}=i_n)=(\mu P(t_1))_{i_1}\,P_{i_1 i_2}(t_2-t_1)\times\dots\times P_{i_{n-1} i_n}(t_n-t_{n-1}),$$

$$P(t)=e^{tQ}.$$

Obs.: $\Omega=\{X:[0,\infty)\to S\}$ $\mathcal{F}$: σ-Álgebra gerada pelos cilindros

Muitas vezes considera-se

$\Omega'=\{X:[0,\infty)\to S:$ contínuas à direita e com limites à esquerda$\}$

Exs.: $Q=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$

$$\det(xI-Q)=x(x+2)(x+4).$$

$$Q=U\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}U^{-1}.$$

$$e^{tQ}=U\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{-2t}&0\\0&0&e^{-4t}\end{pmatrix}U^{-1}$$

$$P_{11}(t)=(e^{tQ})_{11}.$$

$$= a + b e^{-2t} + c e^{-4t}$$

Por (c) acima:

$$\begin{cases} 1 = P_{11}(0) = a+b+c \\ -2 = P'_{11}(0) = -2b-4c \\ 7 = P''_{11}(0) = 4b+16 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear: $c = 3/8$ $b = 1/4$ $a = 3/8$.

$$\therefore P_{11}(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{3}{8} e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Ex. 2: $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & & 0 \\ \vdots & & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & \lambda \\ & \cdots & & 0 & -\lambda \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$ parâmetro

• $S = \mathbb{N}$

Eqs. Avançadas:

$$P'(t) = e^{Qt} Q$$

Obs.: Como Q é triangular superior, Q^n tem a mesma propriedade, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow P_{ij}(t) = 0$ se $i > j$.

$0 \leq i \leq N-1$:

$$P'_{ii}(t) = \lambda P_{ii-1}(t) - \lambda P_{ii}(t), \quad t > 0.$$

$0 \leq i < j \leq N-1$:

$$P'_{ij}(t) = \lambda P_{ij-1}(t) - \lambda P_{ij}(t), \quad t \geq 0.$$

$$[P'_{ij}(t) + \lambda P_{ij}(t)] e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} P_{ij-1}(t)$$

$$[\underbrace{e^{\lambda t} P_{ij}(t)}_{\hat{P}_{ij}(t)}]' = \lambda \underbrace{e^{\lambda t} P_{ij-1}}_{\hat{P}_{ij-1}}(t)$$

Seja $\tilde{P}(t) = \hat{P}(t/\lambda)$

$$\Rightarrow \tilde{P}'_{ij}(t) = \tilde{P}_{ij-1}(t)$$

$$\tilde{P}_{ii}(t) \equiv 1$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{ii+1}(t) = t \; ; \quad P_{i,i+1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow P_{i,i+2}(t) = \frac{t^2}{2}; \quad P_{i,i+2}(0) = 0.$$

$$\tilde{P}_{ij}(t) = \frac{t^{j-i}}{(j-i)} \Rightarrow P_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \quad j = i, \dots, N-1$$

$1 \leq i \leq N-1$.

Note que

$$P_{NN}(t) = 1$$

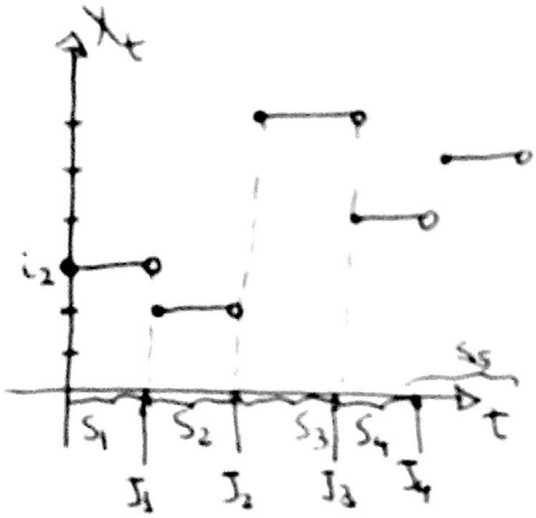
$$P_{iN}(t) = 1 - \sum_{j=i}^{N-1} P_{ij}(t) \ , \quad 0 \leq i \leq N-1 .$$

Obs.: $P_{i\cdot}(t)$ é uma dist. de Poisson(λt) truncada em N.

O processo (X_t) é o PP(λ) absorvido em N.

Aula - Processos Estocásticos

Processos Markovianos de Salto:



Dois ingredientes: (1) $S_1, S_2, \ldots$ tempos de visita

$J_1, J_2, \ldots, J_n = J_{n-1} + S_n$ (tempos de salto)

(2) $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ destinos dos saltos

(Y_0: estado inicial)

$$X_t = Y_n, \; J_{n-1} \leq t < J_n \text{ para algum } n \geq 1 \; (J_0 = 0).$$

Resumidamente, os dois ingredientes são:

- $S_1, S_2, \ldots$
- $Y_0, Y_1, \ldots$

temos três tipos de situações:

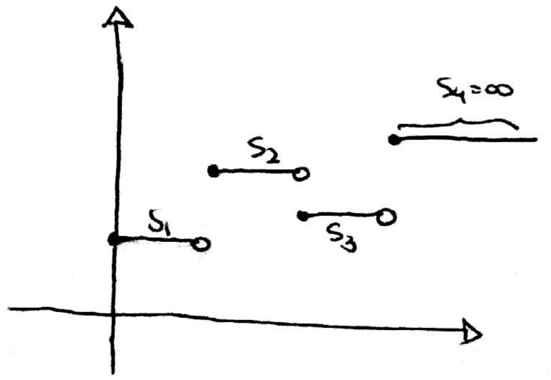
(1) • $J_n \nearrow \infty$ qdo. $n \uparrow \infty$.

b) • $S_i = \infty$ para algum i.

a) • $S_i < \infty$ para todo i. (figura anterior)

(2) $\lim_{n\to\infty} J_n \overset{=\xi}{<} \infty$

Caso 1b):

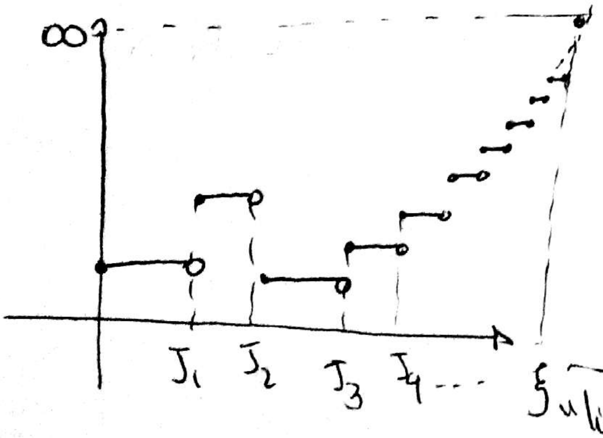


Seja $i^* = \min\{i : S_i = \infty\}$

$X_t = Y_n$, se $J_{n-1} \leq t < J_n$ para algum $n < i^*$

$X_t = Y_{i^*}$, se $t \geq J_{i^*-1}$.

Caso 2)



Neste caso, a def. funciona para $t<\xi$? E para $t \geq \xi$?

Solução. adicionar um pto. a S, digamos ∞, i.e.,

$X_t = \infty$, $t \geq \xi$

$(X_t)_{t\geq 0}$ processo mínimo!

Receita para construção de um PMS:

- $(Y_n)_{n\geq 0}$: cadeia de saltos

  CM em tempo discreto

- Dada $(Y_n)_{n\geq 0}$: $S_1, S_2, \dots$ exponenciais independentes.

Distribuição Exponencial:

$$T \sim Exp(\lambda) \text{ se } f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \begin{cases} \lambda > 0 \text{ é um parâmetro.} \\ t > 0 \end{cases}$$

- $$P(T>t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_{\lambda t}^\infty e^{-r} dr = 0 - (-e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Obs: $\lambda = 0 \Rightarrow P(T = +\infty) = 1$.

- $$E(T) = \int_0^\infty P(T>t)\,dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda t)} \lambda\, dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

- $$E(e^{-T}) = \int_0^\infty e^{-t} f_T(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+1} \int_0^\infty (\lambda+1) e^{-(\lambda+1)t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Teo. 1 (Falta de memória): Dada uma v.a. $T \geq 0$, T apresenta falta de memória (i.e., $P(T > t+s \mid T > s) \overset{(*)}{=} P(T > t)$, $\forall t, s \geq 0$) sse $T \sim Exp(\lambda)$ para algum $\lambda > 0$.

Dem.: $(\Longleftarrow)$ $(*)$ $P(T > t+s) = P(T > t)\, P(T > s) = e^{-\lambda(t+s)} = P(T > t)\, P(T > s)$

$(\Longrightarrow)$ Dado $n \geq 1$ inteiro:

$$P(T > n) = P(T > n-1)\, P(T > 1)$$
$$= P(T > n-2)\, P(T > 2)$$
$$\vdots$$
$$= [P(T > 1)]^n \qquad (1)$$

Mas,

$$P(T > 1) = P\left(T > 1 - \tfrac{1}{n}\right) P\left(T > \tfrac{1}{n}\right) = P\left(T > 1 - \tfrac{2}{n}\right) P\left(T > \tfrac{1}{n}\right)^2 = \ldots$$
$$= \left[P\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow P\left(T > \tfrac{1}{n}\right) = \left(P(T > 1)\right)^{1/n} \qquad (2)$$

Dado um $t \in \mathbb{Q}$: $t = \frac{r}{n}$; $r, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$P\left(T > \tfrac{r}{n}\right) = P\left(T > \tfrac{r-1}{n}\right) P\left(T > \tfrac{1}{n}\right) \overset{\text{argumento como em (1)}}{=} \ldots = \left[P\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^r \overset{(2)}{=} \left[P(T > 1)\right]^{r/n} \qquad (3)$$

Fazendo $\lambda = -\log P(T > 1) \Rightarrow P(T > 1) = e^{-\lambda}$

De (3):

$$P(T>t) = e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{Q}$$

Dado $t \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, tomemos $(q_n), (q_n')$ em $\mathbb{Q}$ tq $\forall n$

$q_1 < q_2 < \dots < q_n < t < q_n' < q_{n-1}' < \dots < q_1'$ $\forall n$, temos:

$$\underset{e^{-\lambda q_n'}}{\underset{\parallel}{P(T>q_n')}} \leq P(T>t) \leq \underset{e^{-\lambda q_n}}{\underset{\parallel}{P(T>q_n)}}$$

$$\therefore \underset{e^{-\lambda t}}{\underset{\parallel}{\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda q_n}}} \leq P(T>t) \leq \underset{e^{-\lambda t}}{\underset{\parallel}{\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda q_n'}}}$$

$$\Longrightarrow P(T>t) = e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0$$

$\blacksquare$

Teo. 2: Se $T_1, T_2, \dots$ indep. tq. $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ e seja $S = \sum_{i=1}^{\infty} T_i$

$$P(S<\infty) = 1 \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$$

Dem.: ($\Leftarrow$) óbvio

$$(\Rightarrow)\ E(e^{-S}) = E\left(e^{-\sum_{i=1}^{\infty} t_i}\right) = E\left(\lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} t_i}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-t_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{-t_i}) \longrightarrow \prod_{i=1} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)}$$

$\Rightarrow$ Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.

Se $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty \Rightarrow E(e^{-S}) = 0 \Leftrightarrow P(e^{-S} = 0) = 1 \Leftrightarrow P(S=\infty) = 1$ ◻

<u>Teo. 3</u>: $t_1, t_2, \ldots$ indep., $t_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Suponha que $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$. Seja $T = \inf_{1\le i\le\infty} t_i$, então: o ínfimo é atingido em um único K c/prob. 1 e é independente de T. Além disso,

$$T \sim Exp(\lambda),\ P(K=i) = \frac{\lambda_i}{\lambda},\ i = 1, 2, \ldots$$

Dem.: • $P(t_i = t_j$ para algum $i \neq j) = 0$ pois t_i's são contínuas e independentes.

$$P(T > t \mid K = i) = P(t_j > t_i > t,\ \underset{i\neq j}{j = 1, 2, \ldots}) = \int_t^{\infty} \underbrace{f_{t_i}(s)}_{\lambda_i e^{-\lambda_i s}}\ \underbrace{P(t_j > s, j\neq i)}_{\prod_{j\neq i} e^{-\lambda_j s}} ds$$

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda}}_{\text{dist. marg. de } K}\ \underbrace{e^{-\lambda T}}_{\text{marginal de } T}$$

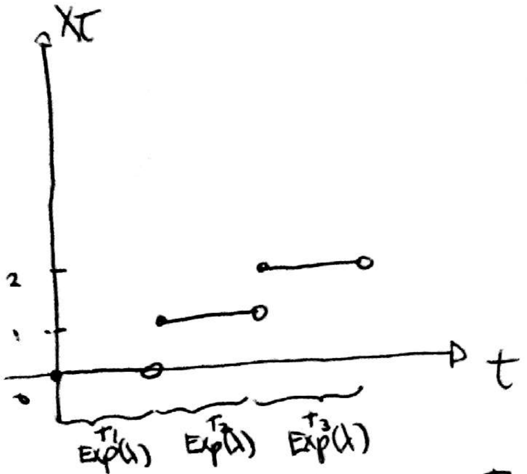
teo. 4: T, S indep., $T \sim Exp(\lambda)$, $S \sim Exp(\mu)$, então:

$$\lambda P(S \le T \le S+t) = \mu P(T \le S \le T+t)$$

$$l.e. = \lambda \int_0^t ds\, \mu e^{-\mu s} \underbrace{P(T > t-s)}_{e^{-\lambda(t-s)}} = \underbrace{\lambda\mu \int_0^t ds\, e^{-\mu s} e^{-\lambda(t-s)}}_{\text{simétrico em } (\lambda,\mu)} = l.d.$$

Processo de Poisson:

- Cadeia de Saltos $(Y_n)_{n\ge 0}$, $Y_n = n$, $\forall n \ge 0$.



mudança de notação! S passou a ser T !

$(T_n)_{n\ge 1}$ iid $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ é parâmetro.

Def.: Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$: tempos de salto.

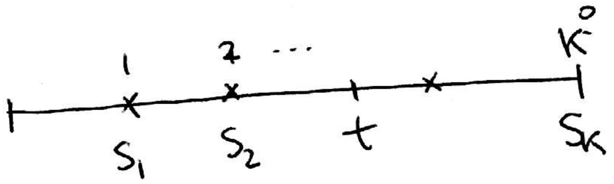
N_t = nº de saltos até o tempo $t = \max\{n \ge 0 : S_n \le t\}$

Vamos explicitar a dependência de X_τ em $t_1, t_2, \dots$

$$N_t = \Phi(t; t_1, t_2, \dots).$$

Teo. 1: Para todo $t>0$ fixo: $N_t \sim P(\lambda t)$.

Obs: $N_t < K \iff S_K > t$



• $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \sim Gama(n,\lambda)$ $\quad f_{S_n}(t) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

Dado $K \geq 0$:

$$P(N_t < K+1) = P(S_{K+1} > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^K}{K!}\,ds =$$

$$= \int_{\lambda t}^\infty e^{-r}\frac{r^K}{K!}\,dr = \frac{1}{K!} f_K(\lambda t);$$ onde $f_K(t) = \displaystyle\int_t^\infty \underbrace{e^{-v}}_{dv}\,\underbrace{v^K}_{u}\,dv$

$\underset{\text{partes}}{\overset{\text{por}}{=}}$ $$-r^n e^{-r}\Big|_{t}^{\infty} + K \underbrace{\int_t^\infty e^{-r} r^{K-1}\,dr}_{f_{K-1}(t)}$$

$$= t^K e^{-t} + K f_{K-1}(t)$$

$$\therefore \quad P(N_t < K+1) = \frac{(\lambda t)^K e^{-\lambda t}}{K!} + P(N_t < K).$$

$$\Rightarrow P(N_t = K) = P(N_t < K+1) - P(N_t < K) = \frac{(\lambda t)^K e^{-\lambda t}}{K!} \overset{N_t}{\sim} \text{Poisson}(\lambda t)$$

$\blacksquare$

(Aula Estocásticos 13/10/2016)

Lema 1 $t>0$. Seja $I_t = \min\{n \geq 0 : S_n > t\} =$

$$\left.\begin{array}{l} T_1^{(t)} = S_{I_t} - t \\ T_i^{(t)} = T_{I_t+i-1}, \quad i \geq 2. \end{array}\right\} \text{Tempos dos saltos do } (N_s)_{s\geq 0}$$

Então $N_t, T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots$ são indep.; $T_1^{(t)}, \dots \sim T_1, T_2$

Dem: $\forall k \geq 0, l \geq 1$: $P(\{N_t = k\}, T_1^{(t)} > t_1, \dots, T_l^{(t)} > t_l)$

$$= P(S_k \leq t, S_{k+1} > t, S_{k+1} - t > t_1, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+l} > t_l)$$

$$= \int_0^t f_{S_k}(s) P(T_{k+1} > t_1 + t - s, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+l} > t_l) \, ds$$

$$= \int_0^t f_{S_k}(s) \underbrace{P(T_{k+1} > t_1 + t - s)}_{P(T_{k+1} > t - s) P(T_1 > t_1)} \prod_{j=2}^{l} P(T_{k+j} > t_j) \, ds$$

(Aula estocásticos 13/10/2016)

Lema 1: $t>0$. Seja $I_t = \min\{n \geq 0 : S_n > t\} = N_t + 1$

$$\left.\begin{array}{l} T_1^{(t)} = S_{I_t} - t \\ T_i^{(t)} = T_{I_t + i - 1}, \quad i \geq 2. \end{array}\right\} \text{Tempos de saltos do } (N_s)_{s\geq 0} \text{ após } t.$$

Então $N_t, T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots$ são indep.; $T_1^{(t)}, \dots \sim T_1, T_2,$

Dem: $\forall k \geq 0, l \geq 1 : P[\{N_t = k\}, T_1^{(t)} > t_1, \dots, T_l^{(t)} > t_l)$

$$= P(S_k \leq t, S_{k+1} > t, S_{k+1} - t > t_1, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+l} > t_l)$$

$$= \int_0^t f_{S_k}(s) P(T_{k+1} > t_1 + t - s, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+l} > t_l) \, ds$$

$$= \int_0^t f_{S_k}(s) \underbrace{P(T_{k+1} > t_1 + t - s)}_{P(T_{k+1} > t - s) P(T_1 > t_1)} \prod_{j=2}^{l} P(T_{k+j} > t_j) \, ds$$

!

| 1ª aMostra de estatística ime | usp

$$A = P(T_1 > t_1, \ldots, T_l > t_l) \underbrace{\int_0^t f_{S_k}(s)\, P(T_{k+1} > t-s)}\, ds$$

$$P(S_k \leq t < S_{k+1}) = P(N_t = k)$$

$$= P(N_t = k) \prod_{j=1}^{l} \left(P(T_j > t_j)\right)$$

Corolário: $(N_t)_{t \geq 0}$ é Markov. $(0 < t_1, \ldots < t_n < t < t')$

$$P(N_{t'} = j \mid N_t = i, N_{t_n} = i_n, \ldots, N_{t_1} = i_1) =$$

$$= P(N_{t'} - N_t = j - i \mid N_t = i, \ldots) \overset{TDO}{=} P(N_{t'-t} = j - i) = P(N_{t'} = j \mid N_t = i)$$

Teo 3: Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo ~~[illegible]~~ crescente, contínuo à direita e tq $X_0 = 0$. Seja $\lambda < \infty$. As 3 afirmações valem:

a) $(X_t) \sim PP(\lambda)$

b) (X_t) tem saltos indep e quando $h \downarrow 0$, $h = o(1)$

i) $P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

ii) $P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h)$

c) (X_t) tem saltos iid e estacionários $X_t \sim P(\lambda t), \forall t > 0$.

Dem: $a \to c$ Teo 1 e 2.

$\boxed{3}$

k≥ avançados;

$$\lim_{h\to 0} = \left\{ \frac{d}{dt} P(X_t = k) = -\lambda P(X_t = k) + \lambda P(X_t = k-1) \right.$$

Segue que $P(X_t = k) = \frac{\lambda t}{k!} e^{-\lambda t}$ é solução. ▣

<u>Teo 4</u>: Suponha que (X_t) e (Y_t) sejam dois processos indep.

$(X_t) \sim PP(\lambda)$, $(Y_t) \sim PP(\mu)$

Seja $Z_t = X_t + Y_t$, $t \geq 0 \Rightarrow (Z_t) \sim PP(\lambda + \mu)$.

<u>Dem</u>: Dadas $0 < t_1 < \ldots < t_k$

$$(Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}) = \begin{matrix} (X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \\ - (Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) \end{matrix}$$

5

$c \to b$: $P(X_{t+h} - X_t = 0) = P(X_h = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$

$P(X_{t+h} - X_t = 1) = P(X_h = 1) = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$

$c \to a$ Seja (N_t) o processo definido como em (c)

Pelos Teos 1 e 2, (N_t) tem as mesmas dist. finito dimensionais do que (X_t). Isto é, p/ toda escolha $0 < t_1 < \dots < t_k$,

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \sim (N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$ $\square$

$b \to c$. Obter sistema de EDO's.

$$P(X_{t+h} = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X_{t+h} = j \mid X_t = k-j)\, P(X_t = k-j) \cdot$$

$$= (1 - \lambda h + o(h))\, P(X_t = k) + (\lambda h + o(h))\, P(X_t = k-1) + o(h) \cdot ($$

$$\Rightarrow \frac{P(X_{t+h}=k) - P(X_t = k)}{h} = -\lambda P(X_t = k) + \lambda P(X_t = k-1) + \frac{o(h)}{h} \quad \boxed{4}$$

Para $A \subset \mathbb{R}^n$

$$P(\underbrace{X_t = n}_{J_n < t < J_{n+1}}, (J_1, \dots, J_n) \in A) = \int_{A \subset \mathbb{R}^n} \lambda^n \, dt_1 \dots dt_n \overbrace{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t_{n+1}} \, dt_{n+1}}^{e^{-\lambda t}} \times \mathbb{1}\{t_1 < \dots < t_n < t\}$$

$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{n!} \underbrace{\int_A dt_1 \dots dt_n \, \mathbb{1}\{t_1 < \dots < t_n < t\} \cdot \frac{n!}{t^n}}_{(Z_1^{(1)}, \dots, Z_n^{(n)})}$$

$$Z_{t_2-t_1} = X_{t_2} - X_{t_1} + Y_{t_2} - Y_{t_1} \sim \text{Poisson}((\lambda+\mu)(t_2-t_1))$$

TEO 5. Se $(X_t) \sim PP(\lambda)$, então dado que $X_t = n$, temos que os tempos de salto $(J_1, \dots, J_n) \sim (Z_1^{(1)}, \dots, Z_n^{(n)})$ estatísticas de ordem de $(Z_1, \dots, Z_n)$ iid Unif$(0,t)$

DEM. (S_n) tempo inter-saltos são iid Exp(λ), $J_i = \sum_{j=1}^{i} S_j$

$$f_{S_1 \dots S_n}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\right)}$$

$$\Rightarrow f_{T_1, \dots, T_{n+1}}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}}, \quad 0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$$

Aula - Processos Estocásticos

Teo. 1: Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ $((X_t)_{t\in T} \sim PP(\lambda))$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ v'as iid tq.

$$P(Y_n = K) = p_K, \quad K = 0, 1, 2, \ldots$$

$p_K \geq 0$, $\sum_{K\geq 0} p_K = 1$.

Seja $X_t^{(K)} = \sum_{i=1}^{X_t} 1\{Y_i = K\}$. Então $(X_t^{(K)})_{t\geq 0}$, $K = 0, 1, 2, \ldots$ são PP indep. com taxas λp_K, respectivam.e.

Dem.: Notação $\underset{\sim}{n}_i = (n_i^{(1)}, \ldots, n_i^{(K)})$ (s.p.g. $p_1 + \cdots + p_K = 1$).

$i = 1, \ldots, \ell$ (tempos).

$$n_i = \sum_{j=1}^{K} n_i^{(j)}.$$

$$\underset{\sim}{X}_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(K)}).$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{K} X_t^{(j)}$$

$$\underset{\sim}{Y}_n^{(m)} = \sum_{j=m+1}^{m+n} (1\{Y_i = 1\}, \ldots, 1\{Y_i = K\}) \sim M(n; p_1, \ldots, p_K)$$

Scanned by CamScanner

$$\cancel{P(\underset{\sim}{X}_{t_1} = \underset{\sim}{n}_1, \ldots, \underset{\sim}{X}_{t_\ell} = n_\ell)}$$

$$P(\underset{\sim}{X}_{t_1} = n_1,\ \underset{\sim}{X}_{t_2} - \underset{\sim}{X}_{t_1} = n_2, \ldots, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = n_\ell) =$$

$$= P(X_{t_1} = n_1,\ X_{t_2} - X_{t_1} = n_2, \ldots, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = n_\ell,\ \underset{\sim}{Y}^{0}_{n_1} = \underset{\sim}{n}_1;\ \underset{\sim}{Y}^{n_1}_{n_2} = \underset{\sim}{n}_2, \ldots, \underset{\sim}{Y}^{n_{\ell-1}}_{n_\ell} = n_\ell)$$

$$= P(X_{t_1} = n_1) \cdots P(X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = n_\ell) \times P(\underset{\sim}{Y}^{0}_{n_1} = \underset{\sim}{n}_1) \times \cdots \times P(Y^{n_\ell}_{n_\ell} = \underset{\sim}{n}_\ell)$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^{n_1}}{n_1!} \times \cdots \times \frac{e^{-\lambda(t_\ell - t_{\ell-1})} (\lambda (t_\ell - t_{\ell-1}))^{n_\ell}}{n_\ell!} \times$$

$$\times \frac{n_1!}{n_1^{(1)}! \cdots n_1^{(K)}!} p_1^{n_1^{(1)}} \cdots p_K^{n_1^{(K)}} \cdots \frac{n_\ell!}{n_{\ell_1}! \cdots n_{\ell K}!} p_1^{n_\ell^{(1)}} \cdots p_K^{n_\ell^{(K)}}$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{K} e^{-\lambda p_j t_1} \frac{(\lambda p_j t_1)^{n_1^{(j)}}}{(n_1^{(j)})!} \right] \times \cdots \left[\prod_{j=1}^{K} e^{-\lambda (t_\ell - t_{\ell-1}) p_j} \frac{[\lambda p_j (t_\ell - t_{\ell-1})]^{n_\ell^{(j)}}}{n_\ell^{(j)}!} \right]$$

$$= \prod_{j=1}^{K} \underbrace{\prod_{i=1}^{\ell} e^{-\lambda p_j (t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda (t_i - t_{i-1})]^{n_i^{(j)}}}{n_i^{(j)}!}}_{P(X^{(j)}_{t_1} = n^{(j)}_1, \ldots, X^{(j)}_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = n_\ell^{(j)})}$$

Logo, $(X_t^{(j)})_{t \geq 0} \sim PP(\lambda p_j)$ e a fatoração em j diz que $(X_t^{(j)})$, $j = 1, \ldots, K$ são independentes.

Processos de Nascimento:

$S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Cadeia de saltos: $P_{i,i+1} = 1$

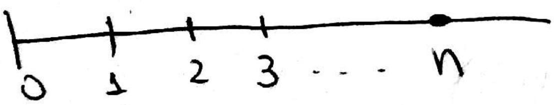
tempo de permanência em $i \in \mathbb{N}$, $\exp(q_i)$, onde $0 \leq \underbrace{q_i}_{\text{parâmetros}} < \infty$, $i = 0, 1, \dots$

Dado que $X_0 = i$, então $Y_n = n+i$, $n \geq 0$ e os tempos de salto $S_1, \dots, S_n, \dots$ indep.

$$S_n \sim Exp(q_{n+i})$$

Exs. 1: (1) $PP(\lambda)$ é um processo de nascimento (PN) onde $q_i = \lambda$.

(2) PN simples ou linear: cada indivíduo de uma população produz descendente com taxa λ.



Dado $X_t = n$, o tempo até $n+1$: $Exp(n\lambda)$

$(X_t)_{t \geq 0}$ $\quad PN(q_n = n\lambda,\ n \geq 0)$.

Vamos calcular o valor esperado de X_t sob P_1:

$$E_1(X_t)$$

Seja τ: tempo até o 1º filho:

$$E_1(X_t) = E_1(X_t, \tau < t) + \underset{\substack{P(\tau > t)\\ = e^{-\lambda t}}}{E_1(X_t, \tau \geq t)}$$

$\overset{\shortparallel}{\mu(t)}$

$$= e^{-\lambda t} + \int_0^t \underset{\boxed{\lambda e^{-\lambda s}}}{f_\tau(s)}\, ds\, \underbrace{E_1(X_t | \tau = s)}_{E_2[X_{t-s}]}$$

$$\underbrace{E_2[X_{t-s}]}_{2E_1(X_{t-s})}.$$

Eq. integral p/ μ:

$$\mu(t) = e^{-\lambda t} + 2\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \mu(t-s)\, ds$$

$$\Rightarrow \mu(t) e^{\lambda t} = 1 + 2\lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \mu(\overset{s'}{\overline{t-s}})\, ds = 1 + 2\lambda \int_0^t e^{\lambda s'} \mu(s')\, ds'$$

$r(t) = 1 + 2\lambda \int_0^t r(s)\, ds$. Diferenciando em t,

$r'(t) = 2\lambda r(t) \Rightarrow r(t) = \text{const.}\, e^{2\lambda t}$ $\therefore$ $\mu(t) = \text{const}\, e^{\lambda t}$ $\therefore \mu(0) = \text{const} = 1$.

$\therefore E_1(X_t) = e^{\lambda t},\ t \geq 0$.

Explosão: Seja $J_n = \sum_{i=1}^n S_i$ e $\zeta = \lim_{n \nearrow \infty} J_n$

Teorema: Seja (X_t) com PN c/ taxas $q_i, i \geq 0$ tq. $X_0 = 0$.

- Se $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty$ então $P(\xi < \infty) = 1$

- Se $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} = \infty$ então $P(\xi < \infty) = 0$ ($\xi = \infty$ q.c.)

Dem.: aplicação imediata do teo. 2.3.2

Prop. de Markov: pode ser estabelecida como no caso do PP.

Expressões p/ $P_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$ podem ser obtidas como no caso do PP, escrevendo as equações avançadas p/

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 & & 0 \\ & -q_1 & q_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -q_n \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = P(t)\,Q, \quad P(0) = I.$$

$$\begin{cases} P'_{i0}(t) = -q_0 P_{i0}(t); \; P_{i0}(0) = \delta_{i0} \\ P'_{ij}(t) = q_{j-1} P_{ij-1}(t) - q_j P_{ij}(t), \; P_{ij}(0) = \delta_{ij} \end{cases}$$

$$P_{00}(t) = e^{-q_0 t}, \quad t \geq 0.$$

$$P_{01}'(t) = q_0 \underbrace{P_{00}(t)}_{e^{-q_0 t}} - q_1 P_{01}(t) \Rightarrow \left[P_{01}(t) e^{(q_0+q_1)t}\right]' = q_0 e^{(q_1-q_0)t}.$$

$$\Rightarrow P_{01}(t) \overset{q_1 \neq q_0}{=} \frac{q_0}{q_1-q_0} \cdot \left(e^{-q_0 t} - e^{-q_1 t}\right), \quad t \geq 0.$$

$$P_{02}'(t) = q_1 P_{01}(t) - q_2 P_{02}(t) \Rightarrow \dots \overset{q_2 \neq q_1 \neq q_0}{\Rightarrow} P_{02}(t) = \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \times$$

$$\left[\frac{1}{q_2-q_0}\left(e^{-q_0 t} - e^{-q_2 t}\right) - \frac{1}{q_2-q_1}\left(e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}\right)\right].$$

Caracterização equivalente do PN:

Teorema (2): Seja (X_t) um processo não decrescente cont. à direita em $\bar{N} = N \cup \{\infty\}$. Seja $q_0, q_1, \dots \geq 0$. As cond. a seguir são equivalentes:

(a) $(X_t)_{t \geq 0}$ é um PN$(q_0, q_1, \dots)$ (como def. acima)

(b) $(X_t)_{t \geq 0}$ tem inc. independentes e uniformemente em t.

$$P(X_{t+h} = i \mid X_t = i) = 1 - q_i h + o(h)$$

$$P(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i) = q_i h + o(h).$$

(c) (X_t) tem incr. independentes e:

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) = p_{ij}(t)$$

obtidas como única solução das eqs. avançadas acima.

Processo Markoviano de Saltos:

Seja S um conjunto enumerável e $Q = \{q_{ij},\ i,j \in S\}$ uma matriz-Q:

(i) $0 \leq -q_{ii} = q_i < \infty$

(ii) $q_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i,j \in S \\ i \neq j \end{array}$.

(iii) $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$.

Obs.: $q_i = \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij}$.

Seja $$\Pi_{ij} = \begin{cases} \dfrac{q_{ij}}{q_i}, & q_i \neq 0,\ i \neq j. \\ 0, & q_i = 0,\ i \neq j. \end{cases}$$

e $$\Pi_{ii} = \begin{cases} 0, & q_i \neq 0 \\ 1, & q_i = 0. \end{cases}$$

Obs.: $\Pi = (\Pi_{ij})_{i,j \in S}$ é uma matriz estocástica.

Def.: $(X_t)_{t\geq 0}$ será dito um PMS se sua cadeia de saltos $(Y_n)_{n\geq 0}$ for uma $CM(\mu, \Pi)$, onde μ é uma dist. inicial (em S) de (Y_n).

Dado $(Y_n)_n$ os tempos entre saltos $S_1, S_2, \dots$ são v.as independentes,

$$S_{n+1} \sim Exp(q(Y_n)), \ n\geq 0.$$

Há 3 casos:

1) Se $S_n < \infty \ \forall n\geq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \infty$ então $X_t = Y_n$, se $J_n \leq t \leq J_{n+1}$

2) Se $S_n = \infty$ p/ algum $n \in \mathbb{N}$, seja $n^* = \min\{n\geq 0 : S_n = \infty\}$.

$X_t = Y_n$, $J_n \leq t \leq J_{n+1}$ p/ algum $n < n^*$.

~~$\neq/\infty$~~

3) $S_n < \infty \ \forall n$, $J_n \nearrow \zeta < \infty \ \forall n \nearrow \infty$.

$X_t = Y_n$, $J_n < t \leq J_{n+1}$

$= \infty$, $t \geq \zeta$

Dizemos que $(X_t)_{t\geq 0}$ é um P.M.S. (μ, Q).

Aula - Processos Estocásticos

Processos Markovianos de Salto:

(Temporalmente homogêneo).

$Q :=$ matriz-Q

$\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in S}$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{q_i}, & i \neq j, \ q_i \neq 0 \\ 0, & i \neq j, \ q_i = 0. \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0, & q_i \neq 0 \\ 1, & q_i = 0. \end{cases}$$

(Y_n) $CM(\mu, \Pi)$

$(T_n)_{n \geq 1}$ iid $Exp(1)$.

Dada (Y_n):

$$S_{n+1} = \frac{T_{n+1}}{q(Y_n)}, \quad n \geq 0$$

$(X_t)_{t \geq 0}$: CMTC construída a partir de: $(Y_n)_{n \geq 1}$ e $(S_n)_{n \geq 1}$.

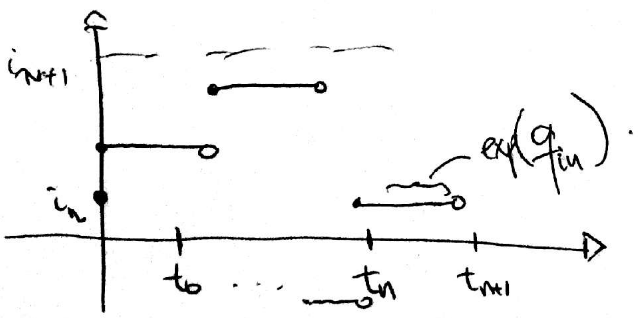
Notação: $(X_t) \sim PMS(\mu, Q)$.

Exs.: (1) $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ & -\lambda & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\lambda \quad \lambda \end{pmatrix}$ $\quad PP(\lambda)$.

(2) $Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 & & \\ & -q_1 & q_1 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ $\quad PN(q_0, q_1, \dots)$

(X_t) é markoviano: segue da falta de memória

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n).$$



Scanned by CamScanner

2 construções equivalentes:

(1) $\{T_n^j\}_{n\geq 1, j\in S}$ ... iid Exp(1)

Dado que $Y_n = i$, $n \geq 0$, faça

$$S_{n+1}^j = \frac{T_{n+1}^j}{q_{ij}}, \; i \neq j \sim Exp(q_{ij})$$

$$S_{n+1} = \inf_{j\neq i} S_{n+1}^j$$

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j, & \text{se } S_{n+1}^j = S_{n+1} \\ i, & \text{se } S_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

(2) Sejam $\{N_t^{ij}, t \geq 0\}$ $PP(q_{ij})$, $i \neq j$ indep.

Dado Y_0 e $J_0 = 0$ e $n \geq 0$:

$$J_{n+1} = \inf\{t > J_n : N_t \neq N_{J_n} \text{ p/ algum } j \neq Y_n\}$$

$$Y_{n+1} = \begin{cases} j \,, & \text{se } J_{n+1} < \infty \text{ e } N_{J_{n+1}} \neq N_{J_n}. \\ i \,, & \text{se } J_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

Explosão:

Teo. 1: Seja $(X_t) \sim PMQ(\lambda; Q)$. Então (X_t) não apresenta explosão se:

(i) $\sup_{i \in S} q_i < \infty$ (em particular se $|S| < \infty$)

(ii) $X_0 = i$ e i for recorrente p/ (Y_n).

Dem.: (i) $J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{q(Y_{i-1})} \geq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} t_i \nearrow \infty$, $n \nearrow \infty$, onde $q = \sup q_i < \infty$. ∎

Obs.: PN linear: $q_{n\,n+1} = n\lambda = -q_{nn}$ $(\lambda > 0) \longrightarrow$ não explode q.c.

(ii) Nessas condições, $\overset{q.c.}{\text{existe}}$ $N_1, N_2, \ldots$

$Y_{N_j} = i$, $j = 1, 2, \ldots$

Logo, $\lim_{n \to \infty} J_n \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{t_{N_j}}{\underbrace{q(Y_{N_j})}_{= q_i}} = \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{\infty} t_{N_j} = \infty$ q.c. ∎

Def.: Dizemos que uma matriz Q é explosiva se o PMS associado satisfizer $P_i(\xi < \infty) > 0$ p/ algum $i \in S$, onde $\xi = \lim_{n\to\infty} S_n$; do contrário dizemos que Q é não-explosiva.

Teo. 2: Seja (X_t) um PMS associado a uma Q e $\xi =$ o tempo de explosão. Fixado $\theta > 0$, seja:

$$z_i = E_i(e^{-\theta\xi}).$$ Então, $(z_i, i \in S)$ satisfaz

(1) $|z_i| \leq 1$

(2) $Qz = \theta z$.

Além disto, se $\tilde{z}$ tb. satisfizer (i) e (ii) então $\tilde{z}_i \leq z_i$, $i \in S$

Dem.: (1) é óbvio.

(2) condicionando em T, tempo de 1º salto.

$$z_i = E[e^{-\theta\xi}] \Rightarrow \sum_{j\neq i} \int_0^\infty dt\, q_i e^{-q_i t}\, \pi_{ij}\, e^{-\theta t} E_j(e^{-\theta\xi})$$

$$= q_i \cdot \sum_{j\neq i} \Pi_{ij}\, \gamma_j \int_0^\infty dt\, e^{-(q_i+\theta)t} = \frac{1}{q_i+\theta} \sum_{j\neq i} q_{ij} z_j = z_i$$

$$\Rightarrow (q_i+\theta) z_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} z_j \overset{=}{\Rightarrow} (Qz)_i$$

■

Maximalidade: Notem que o mesmo raciocínio:

$$E_i\left(e^{-\theta J_{n+1}}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{(q_i+\theta)} \sum_{j\neq i} q_{ij}\, E\left(e^{-\theta J_n}\right).$$

Se $\tilde{z} = (\tilde{z}_i, i\in S)$ satisfaz (i) e (ii):

$\tilde{z}_i \leq 1 = E_i\left(e^{-\theta J_0}\right)$, $i\in S$. Supondo indutivamente que

$$\tilde{z}_i \overset{(2)}{\leq} E_i\left(e^{-\theta J_n}\right)$$

$$E_i\left(e^{-\theta J_{n+1}}\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\geq}} \frac{1}{q_i+\theta} \underbrace{\sum_{j\neq i} q_{ij}\, \tilde{z}_i}_{(Q\tilde{z})_i + q_i \tilde{z}_i \overset{(ii)}{=} \theta \tilde{z}_i + q_i \tilde{z}_i} = \tilde{z}_i$$

$$\tilde{z}_i \leq E_i\left(e^{-\theta J_n}\right) \quad \forall n$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \ldots = z_i$$

■

Corolário: Para cada $\theta > 0$, temos a seguinte equivalência:

(i) Q é não-explosiva

(ii) $Qz = \theta z$ e $|z_i| \leq 1 \ \forall i \Rightarrow z_i \equiv 0$.

Dem.: Se (i) ocorrer: então $P_i(\xi < \infty) = 0 \ \forall i \in S \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_i = E_i(e^{-\theta\xi}) = 0 \ \forall i$$

Se $Q\tilde{z} = \theta \tilde{z}$ e $|\tilde{z}_i| \leq 1$

$\overset{\text{teo.2}}{\Longrightarrow} \tilde{z}_i \leq z_i = 0$, $\forall i$

$\Rightarrow -\tilde{z}_i \leq z_i = 0$, $\forall i$ $\Rightarrow \tilde{z}_i = 0$.

(ii) Pelo teo. 2,

$z_i = E_i(e^{-\theta\xi})$ satisfaz (i) e (ii) $\Rightarrow z_i = 0 \Rightarrow P_i(\xi = \infty) = 1$.

$\blacksquare$

$P_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$.

Teorema: Seja (X_t) um processo contínuo à direita com valores em S finito.

Seja Q uma matriz-Q em S c/ matriz de transição Π.

Então as 3 condições são equivalentes:

(a) Dado $X_0=i$, a cadeia de saltos de (X_t) - (Y_n) é uma $Gm(\delta_i, \Pi)$ e para cada $n \geq 1$ e $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ os tempos de saltos $S_1, \dots, S_n$ são exp independentes c/ taxas $q_{Y_0}, \dots, q_{Y_{n-1}}$.

(b) para todo $t, h > 0$, condicionalmente de $X_t = i$

X_{t+h} é indep. de $(X_s, s \leq t)$ e qdo $h \downarrow 0$,

$$P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = \delta_{ij} + q_{ij} h + o(h).$$

(c) para todo $n \geq 0$ e tempos $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1}$ e estados $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$:

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = P_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

$\{P_{ij}(t), t \geq 0\}$ a única solução das equações avançadas:

$$P'(t) = P(t) Q,$$
$$P(0) = I,$$

Dem.: (a $\Rightarrow$ b)

$$P_i(X_h = i) \geq P_i(S_i > h) = e^{-q_i h} = 1 - q_i h + o(h). \quad (3)$$

$$j \neq i: \; P_i(X_h = j) \geq P_i(S_1 < h,\, Y_1 = j,\, S_2 > h) = (1 - e^{-q_i h})\, \Pi_{ij}\, e^{-q_2 h}$$

$$= (1 - e^{-q_i h})\, \Pi_{ij}\, e^{-q_2 h} = \frac{1 - e^{-q_i h}}{q_i h} \times q_{ij}\, h\, [(1 - q_2 h + o(h))]$$

$$= q_{ij} h + o(h) \quad (4)$$

$$1 = \sum_j p_{ij}(h) \overset{(3,4)}{\geq} \sum_j [\delta_{ij} + q_{ij} h + o(h)] = 1 + o(h).$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Fazemos $p_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$. Então, para todo $t, h \geq 0$, p/ $h \downarrow 0$,

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} \underbrace{P_i(X_t = k)}_{P_{ik}(t)}\, \underbrace{P(X_{t+h} = j \mid X_t = k)}_{\delta_{kj} + q_{kj} h + o(h)} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\, [\delta_{kj} + q_{kj} h + o(h)]$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in S} q_{kj}\, P_{ik}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h \downarrow 0}: \; p'_{ij}(t) = [P(t)Q]_{ij} \quad \therefore \; P'(t) = P(t)Q$$

$(c \Rightarrow a)$

Como no caso do P.P. A única solução $P'(t) = P(t)Q$, $P(0) = I$ são as distribuições de uma $PMS(\cdot, Q) \Rightarrow$ dist. finito dimensionais corretas.

(Isto $\oplus$ a prop de Markov embutidas em (c) nos produzem todas as dist. finito-dimensionais $\Rightarrow$ caracterizando a dist. do processo).

Obs.: As condições infinitesimais em (b) podem ser obtidas matricialmente obtendo:

$$P(s,t) = (P_{ij}(t-s))$$

$$P(t, t+h) = I + Qh + o(h)$$

$$P(0,t) = P(0, \tfrac{t}{n}) P(\tfrac{t}{n}, \tfrac{2t}{n}) \cdots P((n-1)\tfrac{t}{n}, t)$$

$$= \left[I + Q\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{Qt}.$$

Processos Estacionários

coleções de v.a's def no mesmo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Seja $\xi_1, \xi_2, \ldots$ um processo estocástico chama-se estacionário,

se para cada $n, m \in \mathbb{Z}^+$,

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \boxed{\overset{\mathcal{D}}{=}} (\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_{m+n}).$$

duas coisas tem distribuições iguais.

Nossa atenção é sobre o caso quando a coleção é indexada por $\mathbb{Z}$.

Exemplo 1: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ iid com $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}, \forall i$.

Que este processo é estacionário é óbvio.

Quem é $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ neste caso?

Não foi dada. Tentaremos construir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas nele, da forma tq. elas sejam independentes e que cada uma satisfaça $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Entenda: Se tal processo existir, então ele é estacionário

Exemplo 2: Cadeia de Markov com espaço de estados $\{0,1\}$ iniciada na sua medida estacionária.

Formalmente, $\xi_1, \xi_2, \dots$ t.q.

$\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \pi_0$; $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \pi_1$, $\pi = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ era

$\pi_0 = \dfrac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{00}}$; $\pi_1 = \dfrac{1 - p_{00}}{2 - p_{11} - p_{00}}$. O processo é Markov e sua m.t. é π.

$$\xi_K = i \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{K-1} = \begin{cases} 0 & \text{c.p. } p_{00} \text{ se } \xi_{K-1} = 0 \text{ e } p_{10} \text{ se } \xi_{K-1} = 1 \\ 1 & \text{c.p. prob. } p_{01} \text{ se } \xi_{K-1} = 0 \text{ e } p_{11} \text{ se } \xi_{K-1} = 1 \end{cases}$$

Se este processo existir então ele é ergódico. Ideia:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \overset{d}{=} (\xi_{m+1}, \dots, \xi_{m+n})$$

Um caso trágico: $p_{00} = 1$ e $p_{11} = 1$. Neste caso $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

qq. $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$ é invariante.

Outro caso trágico:

0, 1, 0, 1, 0, ...

1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

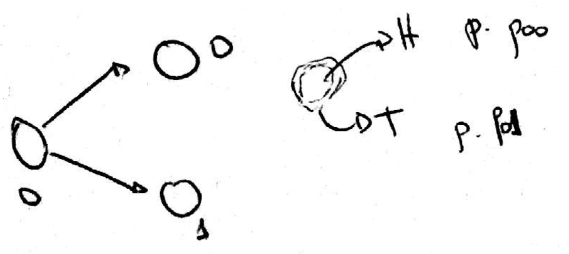
$p_{00} = 0$ e $p_{11} = 0$.

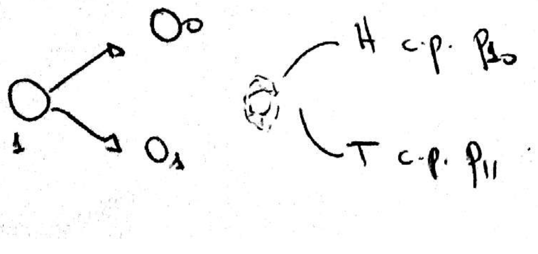
Neste caso: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{3}, & \mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}(\xi_2 = 1) = \frac{1}{3}, & \mathbb{P}(\xi_2 = 0) = \frac{2}{3} \end{cases}$

Se começar com qq. coisa diferente de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o processo não converge à medida alguma.

Este processo tem uma medida estacionária, mas não converge à esta, se começar de qq. outra medida.

Não sei como construir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde vive o processo de Markov.





A ideia que pode estar errada é construir Ω onde em cada instante 2,3,... lançam-se duas moedas.

Mas o processo vai usar só aquela, que seja necessário devido ao valor de ξ_1. Não sei como executar isto formalmente.

Se for executável as moedas definiriam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e, após esta definição, eu definiria $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$ da maneira t.q. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ seja a desejada cadeia de Markov.

Podemos pensar que $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$

$$\vec{\xi}(\omega) = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$$

Por alguma razão considero $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+})$.

Quero construir $\mathbb{P}_{\vec{\xi}}$ a medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+})$ induzida pela $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$$
$$\mathcal{F} \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+})$$
$$\mathbb{P} \to \mathbb{P}_{\xi}.$$

Tomo conjunto cilíndrico $A = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ tq. $b_1 = a_1, \dots, b_k = a_k\}$.

$\mathbb{P}_{\xi}(A_{a_1, a_2, \dots, a_k}) \stackrel{def.}{=} \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = a_1, \dots, \xi_k = a_k)$

Posso repetir isto p/ qq. conjunto cilíndrico, por exemplo

$$B = (b_1, \mathbb{R}, b_3, b_4, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \dots)$$

$P_{\vec{\xi}}(B) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = b_1, \xi_3(\omega) = b_3, \xi_7(\omega) = b_7\})$

$P_{\vec{\xi}}$ é a extensão à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+})$ da medida na álgebra dos conjuntos cilíndricos.

Como $\vec{\xi}$ era processo estacionário, então, por exemplo,

$P_{\vec{\xi}}((a_1, a_2, a_3, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \dots)) = P_{\vec{\xi}}((\mathbb{R}, a_1, a_2, a_3, \dots))$

$P_{\vec{\xi}}(B) = P_{\vec{\xi}}((\mathbb{R}, b_1, \mathbb{R}, b_3, b_4, \dots))$

$P_{\vec{\xi}}(A_{a_1, a_2, \dots, a_k}) \stackrel{def.}{=} P\{\omega \in \Omega : \xi_1(\omega) = a_1, \dots, \xi_k(\omega) = a_k\}$

A formalização desta propriedade de $\mathbb{P}_{\vec{\xi}}$ (via graças à estacionariedade) é pelo seguinte caminho:

$$T: \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+}$$

$$T((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$$

$$\mathbb{P}_{\vec{\xi}}(A) = \mathbb{P}_{\vec{\xi}}(T^{-1}A), \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+})$$

Caracterizando o PMS para S infinito. Sabemos que, da aula passada,

S finito: $P_i(X_t=j) = (e^{Qt})_{ij}$

S infinito: ?

Teo. 1: Seja Q uma matriz-Q. Então a equação atrasada tem uma solução mínima não-negativa $P(t)$, $t \geq 0$. Esta solução é um semigrupo de matrizes:

$$P(t+s) = P(t)P(s), \quad s,t \geq 0.$$

Teo 2: Seja (X_t) um processo mínimo e cont. à direita com valores em S. Seja Q uma matriz-Q em S e Π a matriz de saltos correspondente. Então são equivalentes

(a) $(X_t) \sim PMS(\mu, Q)$

(b) $\forall n \geq 0$, e tempos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ e estados $i_0, \dots, i_{n+1}$.

②

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0) = P_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n);$$

onde $P(\cdot)$ é a solução mínima das eqs. avançadas.

Dem. dos teoremas 1 e 2: 1º passo:

Seja $(X_t) \sim PMS(\mu, Q)$ (mínimo).

Seja $P_{ij}(t) = P_i(X_t = j)$

$$P_{ij}(t) = P_i(X_t = j \mid J_1 > t) P_i(J_1 > t) + \int_0^t f_{J_1}(s) ds \sum_{k \neq i} \Pi_{ik} P_{kj}(t-s)$$

$$= \delta_{ij} \cdot e^{-q_i t} + \int_0^t ds \, e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t-s). \quad ①$$

$(\times e^{q_i t})$

$$\Rightarrow \quad e^{q_i t} P_{ij}(t) = \delta_{ij} + \int_0^t ds \, e^{q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(s) \quad ②$$

Diferenciando:

$$q_i e^{q_i t} P_{ij}(t) + e^{q_i t} P'_{ij}(t) = e^{q_i t} \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) = e^{q_i t} P'_{ij}(t)$$

$$\Rightarrow P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t) \quad ③$$

(3)

2º passo: O mesmo argumento acima (cond. em J_1 e usar PM)

$$P_i(X_t = j \,;\, J_{n+1} \leq t) = \delta_{ij}\, e^{-q_i(t)} + \int_0^t ds\, e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik}\, P(X_{t-s} = j, J_n \leq t-s)$$

(4)

Seja $\tilde{P}_{ij}(t)$, $i,j \in S$ uma solução não negativa das eq. atrasadas.

Obs.: $\tilde{P}_{ij}(t) \geq 0 = P_i(X_t = j, J_0 < t)$. Vamos supor indutivamente que

$$\tilde{P}_{ij}(t) \geq P_i(X_t = j, J_n < t) \quad (5)$$

(2) Se $\tilde{P}$ satisfaz as eqs. atrasadas na forma diferencial $\Longrightarrow$ tb. satisfazem na forma integral.

Além disso, se

$$\tilde{P}_{ij}(t) = \delta_{ij}\, e^{-q_i t} + \int_0^t ds\, e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik}\, \tilde{P}_{kj}(t-s) \quad (6)$$

Subst. (5) em (6):

$$\tilde{P}_{ij}(t) \geq \delta_{ij}\, e^{-q_i t} + \int_0^t ds\, e^{-q_i s} \sum_{k \neq i} q_{ik}\, P(X_t = j, J_n \leq t)$$

$$= P_i(X_t = j, J_{n+1} < t) \Longrightarrow (5) \text{ vale p/ todo } n$$

$\therefore$ tomando $\lim\limits_{n\to\infty}$ em (5):

$$\tilde{P}_{ij}(t) \geq \underbrace{P_i(X_t=j, t>\zeta) = P_i(X_\tau = j)}$$

minimalidade de (X_τ)

<u>3º Passo</u>: A prop. de semigrupo segue da PM:

$$P_{ij}(t+s) = P_i(X_{t+s}=j) = \sum_{k\in S} \underbrace{P_i(X_{t+s}=j \mid X_t = k)}_{P_k(X_s=j)} P_i(X_t=k)$$

$$= [P(t)P(s)]_{ij}$$

$$\Longrightarrow P(t+s) = P(t)P(s)$$

$\square$ <u>teo. 1</u>.

4º Passo (Prova teo. 2):

(a) $\Rightarrow$ (b) como acabamos de ver

(b) $\Rightarrow$ (a) Se um processo satisfaz (b), então tem as mesmas distribuições finito-dimensionais do que o PMS(μ, Q).

Obs: Qdo Q for não explosivo, então as equações atrasadas tem solução única.

Teo 5: A solução mínima das eq. atrasadas é também solução mínima das eq. avançadas.

Ver livro!

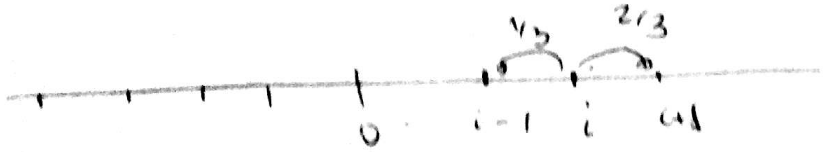
Exemplos de processos não-mínimos:

(1) $PN(q_0, q_1, \ldots)$ explosivo $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty \right)$

$X_\zeta = 0$ (processo volta à origem após explosões)

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_0 & & \\ & -q_1 & q_1 & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(2)



$q_i = 2^{|i|}$ $\qquad X_\zeta = \begin{cases} 0, & \text{se } \lim_{t \uparrow \zeta} X_t = +\infty \\ Z, & \text{se } \qquad < \infty \end{cases}$ $\quad Z \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$.

(3) Ver lista 4 → q. 4.

Estrutura de Classes:

Seja (X_t) um PMS (mínimo), i.e., uma CM gerada por Q.

Dizemos que i atinge j $(i \to j)$ se:

$$P_i\left[(X_t = j) \text{ para algum } t \geq 0\right] > 0.$$

i e j se comunicam $(i \leftrightarrow j)$ se

$i \to j$ e $j \to i$ temos as classes de comunicação; classe fechada, estado absorvente, irredutibilidade...

Teo. 1: Para estados $i \neq j$, são equivalentes:

(i) $i \to j$

(ii) $i \to j$ na cadeia de saltos.

(iii) $q_{i_0 i_1}, \ldots, q_{i_{n-1} i_n} > 0$ p/ alguma $i_0 = i, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n = j$.

(iv) $p_{ij}(t) > 0, \forall t > 0$

(v) $p_{ij}(t) > 0$ p/ algum $t > 0$.

Dem. (iv) ⇒ (v) ⇒ (i) ⇒ (ii).

(ii) ⇒ (iii): $\exists\, i_0 = i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j$

$$\Pi_{i_0,i_1} \cdots \Pi_{i_{n-1},i_n} > 0.$$

$$\Rightarrow q_{i_0 i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} > 0 \quad (q_{i_0}, \dots, q_{i_n} > 0).$$

(iii) ⇒ (iv): Se $q_{ij} > 0 \Rightarrow$

$$P_{ij}(t) = P_i(X_t = j) \geq P_i(S_1 < t,\ X_{S_1} = j,\ \cancel{S_2} > t)$$

$$= \left(1 - e^{-q_i t}\right) \Pi_{ij}\, e^{-q_2 t} > 0.$$

Dado o caminho $i_0, \dots, i_n$

$$P_i(X_t = j) = P_{ij}(t)$$

$$= P_{i_0 i_1}\left(\tfrac{t}{n}\right) P_{i_1 i_2}\left(\tfrac{t}{n}\right) \times \cdots P_{i_{n-1} i_n}\left(\tfrac{t}{n}\right) > 0$$

Aula - Processos Estocásticos

Tempos de chegada e probabilidades de absorção:

$(X_t) \sim CM(\mu, Q)$.

O tempo de chegada a um subconjunto $A \subset S$ é a v.a:

$$\begin{cases} D^A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}. \\ h_i^A = P_i(D^A < \infty). \end{cases}$$

Para a cadeia de saltos:

$H^A =$ tempo de chegada.

Então,

$$D^A = \sum_{i=1}^{H^A} S_i(Y_{i-1}). \quad \left(\sum_{i=1}^{0} = 0\right).$$

Notem que

$\{D^A = \infty\} = \{H^A = \infty\}$. Neste evento:

$D^A = J_{H^A}$.

Seja $K_i^A = E_i(D^A)$

Teo. 2 $h^A = (h_i^A)$ é a solução mínima não-negativa das equações

$h_i^A = 1$, se $i \in A$

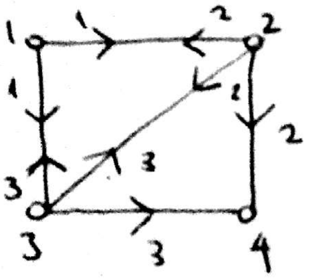
$\sum q_{ij} h_j^A = 0$, se $i \notin A$

→ Segue do resultado p/ a cadeia de saltos (Note que (ii) $\Longleftrightarrow$

$$q_i h_i^A = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} q_{ij} h_j^A, \text{ se } q_i = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{h_i^A = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \pi_{ij} h_j^A} \quad \text{(Veja teorema 1.3.2.)}$$

Ex.:



$A = \{4\}$, $K_i := K_i^{\{4\}}$, $i = 1, \dots, 4$

$$\begin{cases} K_4 = 0 \\ K_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} K_2 + \frac{1}{2} K_3 \\ K_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} K_1 + \frac{1}{3} K_3 \\ K_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} K_1 + \frac{1}{3} K_2 \end{cases}$$

Teo. 3: Suponha que $q_i > 0$ $\forall i \notin A$. Então $(K_i^A)_{i \in S}$ ~~satisfaz~~ é a solução mínima não-negativa de

(i) $K_i^A = 0$, $i \in A$ (1).

(ii) $\sum q_{ij} K_j^A = 1$, $i \notin A$ (2)

Dem: (i) é óbvio

(ii) Se $i \notin A$

$$K_i^A = E_i(D^A) = E_i(D^A - S_1) + \underbrace{E_i(S_1)}_{1/q_i}$$

$$= E\left[E_i(D^A - J_1 \mid X_{J_1}) \right]$$

$$= \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \underbrace{\Pi_{ij}}_{\frac{q_{ij}}{q_i}} \underbrace{E_j(D^A)}_{K_j^A}$$

$$\xrightarrow{\times q_i} \quad q_i K_i^A = 1 + \sum_{j \neq i} q_{ij} K_j^A$$

Minimalidade: Suponha que (y_i) satisfaça (i), (ii), então com $y_i \geq 0$, $\forall i \in S$:

Se $i \notin A$:

$$y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \notin A} \Pi_{ij}\, y_j = \overbrace{\frac{1}{q_i}}^{E_i(S_1)} + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} \Pi_{ij} \left[\frac{1}{q_j} + \sum_{k \notin A} \Pi_{jk}\, y_k \right]$$

$$= E_i(S_1) + \sum_{j \notin A} \Pi_{ij} E_j(S_1) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} \Pi_{ij} \Pi_{jk}\, y_k$$

$$= E_i(S_2;\ H^A \geq 2) + E_i(S_1;\ H^A \geq 1) + \dots + E_i(S_n;\ H^A \geq n)$$

$$+ \sum_{j_1 \notin A} \dots \sum_{j_n \notin A} \Pi_{ij_2} \cdots \Pi_{j_n j_{n+1}}\, y_{n+1}$$

$\therefore$ como $y_i \geq 0$, $\forall i$

$$y_i \geq \sum_{i=1}^{n} E_i(S_n; H^A \geq n) = E_i\left(\sum_{i=1}^{H^A} S_n\right) = E_i(D^A) = K_i^A.$$

Recorrência e Transitoriedade

$(X_t) \sim CM(\mu, Q)$ em S:

Dizemos que $i \in S$ é recorrente se:

$P_i(\{t \geq 0 : X_t = i\}$ é ilimitado$) = 1$ e transitório se:

$P_i(\{t \geq 0 : X_t = i \quad \ldots \quad) = 0$:

Obs: Se (X_t) puder explodir a partir de i, então i não pode ser recorrente.

Teo. 1: Vale o seguinte:

(i) se i for recorrente p/ $(Y_n)_{n \geq 0}$, então i é recorrente para (X_t).

(ii) " transitório p/ (Y_n), então i transitório para (X_t).

(iii) cada estado i é recorrente ou transitório.

(iv) recorrência e Transitoriedade são prop. de classe

Perdi demonstração :C

Critérios de recorrência e transitoriedade:

Seja $t_i = \inf\{t > J_1 : X_t = i\}$ tempo de 1ª passagem p/ i

Teo. 2: Vale a seguinte dicotomia:

(i) Se $q_i = 0$ ou $P_i(T_i < \infty) = 1$, então i é recorrente e $\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \infty$

(ii) Se $q_i > 0$ ou $P_i(t_i < \infty) < 1$, então i é transitório e $\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt < \infty$

Dem.: (i) é óbvio se $q_i = 0$. Suponha então $q_i > 0$ e seja N_i = 1º retorno de (Y_n) a i. Então

$$\{N_i < \infty\} \supseteq \{\underbrace{t_i}_{\sum_{k=1}^{N} S_k} < \infty\} \Rightarrow P_i(N_i < \infty) = 1.$$

Vamos ver que i é recorrente na cadeia de saltos:

Condição na cadeia de saltos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pi_{ii}^{(n)} < \infty, \text{ onde } \Pi_{ii}^{(n)} = (\Pi^n)_{ii}.$$

Agora $$\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = E_i \int_0^\infty 1\{X_t = i\}\,dt = E_i \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} 1\{Y_n = i\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E_i(S_{n+1} \mid Y_n = i)}_{\frac{1}{q_i}} \overbrace{P_i(Y_n = i)}^{\Pi_{ii}^{(n)}} = \frac{1}{q_i} \sum_{n \geq 0} \Pi_{ii}^{(n)} = \infty$$

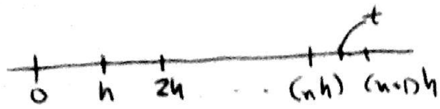
Teo 3: Se $h>0$ for fixo (arbitrário) e fazendo $Z_n = X_{nh}$,

$n=0,1,2,\dots$

(i) se i for recorrente p/ (X_t), então é recorrente para (Z_n)

(ii) transitório Transitório

Dem. (ii) é óbvio.



(i) $P_{ii}(\lfloor t/h \rfloor h + h) \geq P_i(X_t = i, \text{ tempo do 1º salto a partir de } t \text{ é} > t+h)$

$= P_{ii}(t)\, e^{-q_i h}$

$\Rightarrow P_{ii}(t) \leq e^{q_i h} P_{ii}(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h + h)$

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt \leq e^{q_i h} \int_0^\infty P_{ii}(\quad)\,dt = e^{q_i h} \sum_{n \geq 0} \int_{nh}^{nh+h} \overbrace{P_{ii}(\lfloor t/h \rfloor h + h)}^{P_{ii}(nh)}\,dt$$

$$= h e^{q_i h} \sum_{n \geq 0} \underbrace{P_{ii}(nh)}_{P_i(Z_n = i)}$$

Como o lado esquerdo é finito por hipótese,

$\sum_{n \geq 0} P_i(Z_n = i) = \infty \Rightarrow i$ é recorrente (pela cond. de recorrência p/ CM discretas).

Aula - Processos Estocásticos

Tempo de parada (Caso geral):

Uma v.a. $T \geq 0$ é dita um tempo de parada p/ $(X_t)_{t\geq 0}$ se o evento $\{T \leq t\}$ depender apenas de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$, para todo $t \geq 0$.

Prop. de Markov forte: Seja (X_t) um $PMS(\mu, Q)$ e seja T um t.p. p/ $(X_t)_{t\geq 0}$. ~~depender apenas de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ para todo~~

Então, condicional a $\{T \leq t\}$ e $X_T = i$,

$$(X_{T+t})_{t\geq 0} \sim PMS(\delta, Q)$$

independente de

$$(X_s)_{0\leq s\leq t}$$

Vimos que as noções de atingimento, comunicação, irredutibilidade e recorrência

são válidas na cadeia em tempo contínuo $\Leftrightarrow$ válidas p/ cadeia de saltos

Distribuições invariantes

Def.: Seja Q uma matriz-Q. Dizemos que uma medida $\lambda = (\lambda_i, i \in S)$

é invariante p/ Q se

$$\lambda Q = 0 .$$

Teo 1: Seja Q uma matriz-Q e Π a matriz de saltos associada a Q.

Então, são equivalentes:

(i) λ é invariante p/ Q

(ii) $\mu \Pi = \mu$, $\mu_i = \lambda_i q_i$ (μ é invariante p/ Π)

Dem: Note que

$$q_i (\Pi_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}, \ \forall i,j \in S$$

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{i \in S} \mu_i (\Pi_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_{i \in S} \lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j$$

Teorema 2: Suponha Q irredutível e recorrente. Então Q tem uma única medida invariante, a menos de múltiplos escalares.

Dem: Excluindo o caso trivial em que $S = \{i\}$, a irredutibilidade $\Rightarrow q_i > 0, \forall i \in S$.

Os resultados acima: Π é irredutível e recorrente $\Rightarrow$ Π é uma medida invariante μ que é única a menos de mult. escalares $\Rightarrow \lambda_i = \frac{\mu_i}{q_i}$ é invariante para Q.

Lembremos que i é recorrente se $q_i = 0$ ou $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$.

Se $q_i = 0$ ou $E_i(T_i) < \infty$, dizemos que i é recorrente positivo.

($\Rightarrow$ i é recorrente nulo se for recorrente mas não positivo).

Teorema 3: Seja Q irredutível. Então são equivalentes:

(i) todo estado é recorrente positivo.

(ii) Existe um estado i . . .

(iii) Q é não-explosiva e tem uma dist. invariante.

Além disso se (iii) for válida $\lambda_i = \frac{1}{q_i m_i}$

Dem.: Excluindo o caso trivial $S=\{i\}$, $q_i>0, \forall i\in S$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : óbvio!

Defina, para $i\in S$, $\mu^{i} = \{\mu_j^i,\ j\in S\}$, $\mu_j^i = \mathbb{E}_i\left(\int_0^{t_i\wedge\zeta} 1\{X_s=j\}\,ds\right)$

$$\sum_{j\in S}\mu_j^i = \underset{(*)}{\mathbb{E}_i(t_i\wedge\zeta)}<\infty \text{ (aplicando o teorema de Fubini).}$$

Seja N_i : tempo de 1ª passagem por i na cadeia de saltos.

$$\int_0^{T_i\wedge\zeta}\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{\sim Exp(q_j)}{S_{n+1}}\, 1\{Y_n=j,\ n<N_i\}$$

$$\mathbb{E}_i(\_\_\_) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}(S_{n+1}\mid Y_n=j)}_{1/q_j} P_i(Y_n=j,\ n<N_i)$$

$$= \frac{1}{q_j}\,\mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1\{Y_n=j,\ n<N_i\}\right]$$

$$= \frac{1}{q_j}\,\mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{N_i-1} 1\{Y_n=j\}\right] = \frac{\gamma_j^i}{q_j}.$$

Supondo (ii), i é recorrente. Pelo teorema 1.7.5, (γ^i) é invariante p/ Π (Como Q é irredutível e recorrente $\Rightarrow Q$ é recorrente $\Rightarrow \Pi$ é recorrente e irredutível)

Como $\mathbb{H}$ é recorrente $\Rightarrow Q$ é não-explosiva $\xRightarrow{\text{teo.1}}$ μ^i é inv p/ Q.

e μ^i é finita $\therefore \lambda = \frac{\mu^i}{m_i}$ é uma dist. de probabilidades inv p/ Q.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seja λ uma dist. inv p/Q. Seja $i : \lambda_i > 0$ e seja

$$\nu_j = \frac{\lambda_j q_j}{\lambda_i q_i} \quad \text{e} \quad \nu_i = 1.$$

Então 1.7.6., implica que: $\nu_j \geq \gamma_j^i$:

$$\therefore \quad m_i = \mathbb{E}_i[T_i] = \sum_{j \in S} \mu_j = \frac{1}{q_i} \sum_{j \in S} \gamma_j^i \overset{(**)}{\leq} \frac{1}{q_i} \sum_{j \in S} \nu_j$$

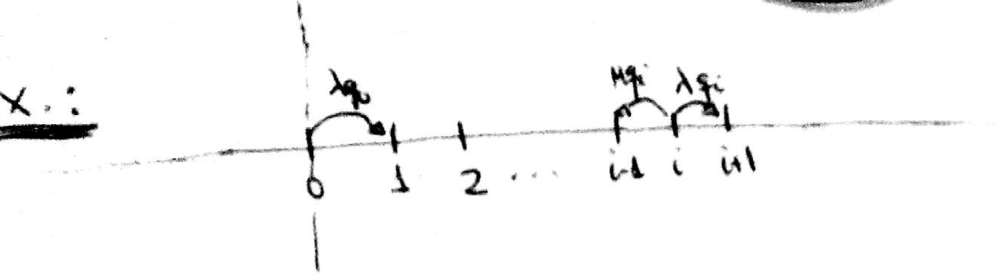
$$\leq \frac{1}{\lambda_i q_i} \sum_{j \in S} \lambda_j \underset{(***)}{<} \infty.$$

$\Rightarrow i$ é recorr. positivo $\Rightarrow i$ é recorrente $\Rightarrow \mathbb{H}$ é recorr. $\Rightarrow$

igualdade em (**) $\Rightarrow$ igualdade em (***) $\rightarrow \lambda_i = \frac{1}{m_i q_i}$.

$\blacksquare$

Ex.:



• $q_i > 0$, $i \neq 0$, $\mu \in (0,1)$ e $\lambda = 1-\mu$.

A cadeia de saltos: passeio aleatório simples em $\mathbb{N}$ (c/ reflexão na origem) é recorrente positivo sse $\lambda < \mu$.

Podemos verificar, resolvendo as equações de equilíbrio detalhado,

MAS, ~~adotando $q_i = 2^i$~~,

$$\cancel{\pi_i} = \quad v_i = q_i^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$$ é inv. p/ Q e será

finita se $1 < \frac{\lambda}{\mu} < 2$, $q_i = 2^i$

$$\tilde{\gamma}_\ell = \frac{v_\ell}{\sum_{i \in \mathbb{N}} v_i}$$ é uma dist. inv. p/ Q.

Note que nesse caso Q é explosivo (uma das condições em (iii) não é satisfeita).