Sistemas Complexos — Exercícios # 2

1. Este problema é a respeito do lema sobre grafos que usado na prova de unicidade do cluster infinito.

   Seja G um grafo conexo com conjunto de sítios V e conjunto de elos E. Um sítio x em V será chamado um *ponto triplo* para G se

   i) existirem apenas três elos de V tocando x e

   ii) o grafo G$\setminus\{x\}$, em que x é removido de V e os três elos tocando em x são removidos de E, tem exatamente três componentes conexos. (Denotaremos os conjuntos de sítios destes três componentes $E_1(x), E_2(x), E_3(x)$ e os chamaremos de ramos.)

   a. Suponha que G seja um grafo conexo e que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam pontos triplos distintos para G. Mostre que para algum i dois dos três ramos em x_i, digamos $E_2(x_i)$ e $E_3(x_i)$ não contêm nenhum dos outros pontos triplos $(\{x_1, \ldots, x_n\}\setminus\{x_i\})$.[Sugestão: indução em n]

   b. Considere o grafo G' obtido de G e $x_1, \ldots, x_n$ do item anterior removendo-se todos os sítios de $E_3(x_i)$ e todos os elos tocando estes sítios. Mostre que $\{x_1, \ldots, x_n\}\setminus\{x_i\}$ são pontos triplos para G'.

   c. Suponha que G seja um grafo conexo e que $x_1, \ldots, x_n$ sejam pontos triplos distintos de G. Entre os 3n ramos,

   $$E_1(x_1), E_2(x_1), E_3(x_1), E_1(x_2), \ldots, E_3(x_n),$$

   mostre que se pode achar pelo menos n+2 ramos *disjuntos.*

2. Seja $\mathbb{E}$ um subconjunto *finito* de $\mathbb{E}^d$. Seja $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}}$. o espaço amostral de configurações de elos (fechados e abertos) de $\mathbb{E}$ e seja P_p a medida de probabilidade correspondente a percolação de elos independentes em $\mathbb{E}$ com $p \in (0,1)$ a probabilidade de cada elo e estar aberto $(\omega(e) = 1)$.

   (a) suponha que $g(\omega)$ seja uma função positiva em Ω e seja P'_p a medida de probabilidade em Ω definida por

   $$P'_p(A) = \frac{\sum_{\omega\in A} g(\omega) P_p(\{\omega\})}{\sum_{\omega\in\Omega} g(\omega) P_p(\{\omega\})}.$$

Use a desigualdade de FKG para mostrar que se g for crescente, então para todo evento crescente A, $P'_p(A) \geq P_p(A)$.

(b) Seja $q \in (1, \infty)$ e suponha que $g(\omega) = q^{N(\omega)}$, onde $N(\omega)$ é o número de clusters abertos distintos (usando os elos abertos de $\mathbb{E}$ e os sítios dos elos de $\mathbb{E}$) determinados por ω. [Note que $g(\omega)$ é função decrescente e não crescente de ω; mesmo assim faz-se a seguinte questão.] Seja P'_p definida como na parte (a) usando esta g. Ache $\tilde{p} = \tilde{p}(p, q)$ satisfazendo $\tilde{p} \to 1$ quando $p \to 1$ e

$$P'_p(A) \geq P_{\tilde{p}}(A)$$

para todo evento crescente A.

[Sugestão: tente expressar

$$P'_p(A) = \sum_{\omega \in A} \tilde{g}(\omega) P_{\tilde{p}}(\{\omega\}) / \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{g}(\omega) P_{\tilde{p}}(\{\omega\})$$

para algum $\tilde{g}$ que ao contrário de g seja crescente.]

3. **Percolação por Invasão.** Considere uma família $\{Z_e,\ e \in \mathbb{E}^d\}$ de v.a.'s i.i.d. Uniformes em $[0, 1]$ e defina a seguinte sequência crescente de subconjuntos aleatórios de $\mathbb{Z}^d$. Antes, uma definição. Dado um subconjunto qualquer, U, de $\mathbb{Z}^d$, vamos definir o conjunto de *elos da fronteira de U* como

$$\partial \mathbb{E}_U = \{e = (x, z) \in \mathbb{E}^d : x \in U, z \notin U\}.$$

Agora, seja V_0=$\{\mathbf{0}\}$ e, para $n \geq 0$, seja e_n o elo que minimiza Z_e em $\partial \mathbb{E}_{V_n}$. Então, $e_n = (\xi_n, \zeta_n)$, com $\xi_n \in V_n$ e $\zeta_n \notin V_n$. Façamos $V_{n+1} = V_n \cup \{\zeta_n\}$.

O modelo assim obtido é chamado de Percolação por Invasão, pois $\{V_n,\ n \geq 0\}$ pode ser vista como a sequência de sítios *invadidos* (p. ex. , por um fluido), a partir da origem, por elos de *menor resistência* (menor Z_e).

Este modelo tem interesse próprio (e bibliografia, veja a seção 10.6 em *Percolation*, de G. Grimmett, 1a. ed.). Mas há uma questão em seu contexto que se relaciona ao problema da continuidade de $\theta(p)$ em p_c no modelo de percolação usual, formulada a seguir como um exercício.

Seja $V_\infty = \bigcup_{n\geq 0} V_n$ o conjunto de todos os sítios eventualmente invadidos. Mostre que

$$\liminf_{|x|\to\infty} P(x \in V_\infty) = 0 \Rightarrow \theta(p_c) = 0.$$

Sugestão: Observe que uma vez que a invasão atinge um aglomerado infinito de elos p-abertos (isto é, elos $e \in \mathbb{E}^d$ tais que $Z_e < p$), ela não o deixa mais.

4. Faça a verificação recomendada no ponto $4'$ do slide 13 do conjunto de slides sobre o modelo de Ising, isto é, mostre que o limite em $(\star)$ não depende da particular sequência crescente (Λ_n).