a) Resolva a inequação $|x+1| < |2x-1|$

b). Dê o domínio e esboce o gráfico de $g(x) = |x-1| / (x-1)$.

- Esboce o gráfico de $h(x) = |x^2-1|$
- Determine o domínio e esboce o gráfico de $f(x) = \cotg(x)$.

c) Determine os limites

i. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}$

iii. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

iv. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x}$

v. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$

vi. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$

vii) $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{1/x}$

d) Encontre as inversas de

i. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

ii. $f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

e) i. Determine, pela definição, $(e^x)'$ e $(\ln x)'$ e $(\operatorname{sen} x)'$. (pg 149-150)

ii. Derive $f(x) = (x^2 + \cotg x^2)^3$, $g(x) = x^{2x}$ e $h(x) =$

iii. $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ e $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, pg. 189-190

iv) Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$. Tbm estude o comport da função!

f) i) $\int_{-1}^{1} x^3 (x^2+3)^{10} \, dx$ Em casa, tente 12.2: 7 e 9

ii) $\int_{0}^{\pi/3} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$

iii) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x \, dx$

iv) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ (pg 355)

v) $\int \sqrt{4-9x^2} \, dx$ Talvez tentar 9.h (Fazer o 9)

vi) $\int \sqrt{4+9x^2} \, dx$

vii) $\int \sqrt{9x^2-4} \, dx$

viii) $\int \sqrt{1-\cos x} \, dx$ pg 366

-3

ix) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+1} \, dx$ xii) $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} \, dx$

x) $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2-2x-3} \, dx$

xi) $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} \, dx$

a) • Para $x \leq -1$;

$$|x+1| \leq |2x-1| \Leftrightarrow -(x+1) \leq -(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow -x-1 \leq -2x+1$$

$$\Leftrightarrow -x+2x-1-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \checkmark$$

• Para $-1 \leq x \leq 1/2$;

$$|x+1| \leq |2x-1| \Leftrightarrow x+1 \leq -(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leq -2x+1$$

$$\Leftrightarrow x+2x+1-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

• Para $x \geq 1/2$;

$$|x+1| \leq |2x-1| \Leftrightarrow x+1 \leq 2x-1$$

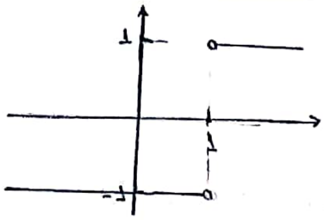
$$\Leftrightarrow x-2x+1+1 \leq 0$$

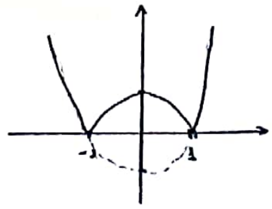
$$\Leftrightarrow -x+2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

Logo, o conjunto solução é dado por $\{x \in \mathbb{R} ; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$.

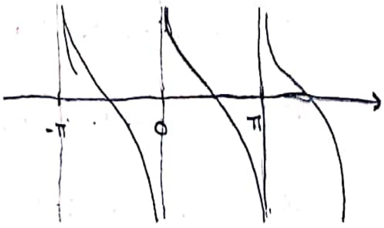
b). $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$





. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$



c. i) $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{10})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 5} \frac{x+5-10}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{10})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(\sqrt{x+5}-\sqrt{10})}(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{\cancel{(\sqrt{x+5}-\sqrt{10})}(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ //

ii. Primeiramente, note que

$$x^3-5x^2+8x-4 = (x-2)(x^2-3x+2) \quad \text{e}$$

$$x^4-5x-6 = (x-2)(x^3+2x^2+4x+3)$$

logo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+4x+3} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2-3x+2}{\lim_{x\to 2} x^3+2x^2+4x+3} = \frac{0}{27} = 0.$$

iii. 0 iv. 0 v. $-\infty$ vi. $+\infty$ vii) $u = \frac{1}{2x}$, $\displaystyle \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u} = \lim_{u\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{2}$

$= e^2$

iv. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{x\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}} - \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x + 1}$

$= 1 - 1 = 0.$

d) i. $y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow xy - x = y + 1$

$\Leftrightarrow y - xy = -(x+1)$

$\Leftrightarrow y(1-x) = -(x+1)$

$\Leftrightarrow y = (x+1)/(x-1)$

$\therefore f^{-1}(x) = f(x)$

ii. $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^{2y} - 2x e^{y} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{y} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

$\overset{\dots}{\Rightarrow} y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

e) i. 1. e 2. triviais.

3. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \overset{*}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} h/2 \cos(x + h/2)}{h} = \cos(x)$

$* \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + h/2 + h/2) - \operatorname{sen}(x + h/2 - h/2)$

$= \operatorname{sen}(x+h/2)\cos(h/2) + \operatorname{sen}(h/2)\cos(x+h/2) - \left[\operatorname{sen}(x+h/2)\cos\frac{h}{2} - \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(\frac{x+h}{2}\right)\right]$

$= 2\operatorname{sen}(h/2)\cos(x + h/2)$

ii. regra da cadeia.

iv). pg. 260.

iii. pgs 189 e 190

f) i) f. impar $\Rightarrow 0$ (R+ l. cos e ax)

ii) $u = \cos x$

iii) $u = \operatorname{sen}^2 x$; $w = 1 - u$

iv) $u = \operatorname{artg} x$ e $dv = dx$ pg. 355

v) $x = 2/3 \operatorname{sen} u$ $(\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u)$

vi) $x = 2/3 \sec u$ $(\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u - 1)$

vii) $x = 2/3 \operatorname{tg} u$ $(\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u)$

viii) $\cos x = \cos(x/2 + x/2) = \dots$

ix) $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \dfrac{5x}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \dfrac{5x}{(x-1)^2}$, $u = x - 1$ 12.5 - 11

12.5 - 07

x) $1 + \dfrac{x+4}{(x-3)(x+1)} = \dots$

xi) $\dfrac{2x+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

xii) pg 381

O foco é o estudo de funções de uma variável real à valores reais, lembrando que, de modo informal, uma função

$$f : A \to B$$

é uma regra que associa a cada $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$. $A = D_f$ é dito domínio da f e B seu contradomínio

Para tal, é fundamental

0. Algebra elementar
1. Inequações
2. Esboço de gráficos
3. Limites
4. Continuidade
5. Inversas
6. Derivadas
7. Integrais

0. • $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

- $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} x + a^{n-1})$
- $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
- $(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i$

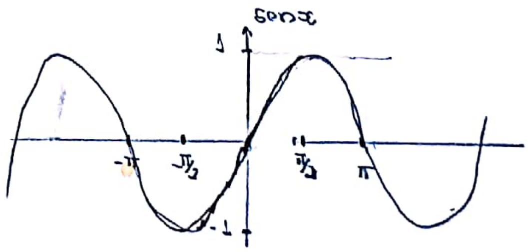
1. • $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ e $|x| > r \Leftrightarrow x > r$ ou $x < -r$

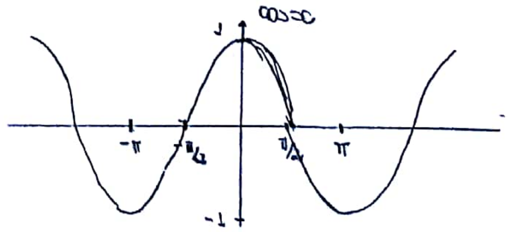
- $|x-p| < r \Leftrightarrow p-r < x < p+r$
- $|x|^2 = x^2$

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $a^n / a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^{-n} = 1/a^n$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$

- $y = \log_b x$ é equivalente à $x = b^y$ (qdo $b = e$, denotamos $\log_e x := \ln x$)
- $\log_b b = 1$
- $\log_b 1 = 0$, $\ln 1 = 0$
- $\log_b (b^r) = r$, $\ln e^r = r$
- $\log_b x^r = r \log_b x$, $\ln x^r = r \ln x$
- $\log_b x^r = r \log_b x$
- $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
- $\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N$
- $\log_a M = \dfrac{\ln M}{\ln a}$

- $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
- $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$
- $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$





1. Deve buscar, qdo possível, um conjunto de soluções para uma desigualdade

$$f(x) \leq k \quad \text{ou} \quad f(x) \geq k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Para tal, basta realizar as devidas manip. algébricas e realizar o estudo de sinal de uma devida função.

• Exemplo. Resolva $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 5$.

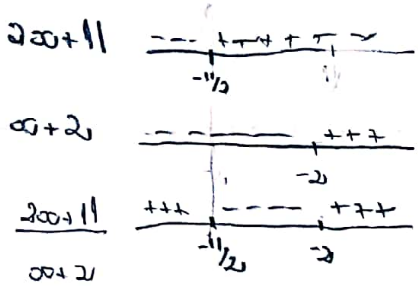
Basta ver que, para $x \neq -2$,

$$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{5(x+2)}{(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1-5x-10}{x+2} \geq 0$$

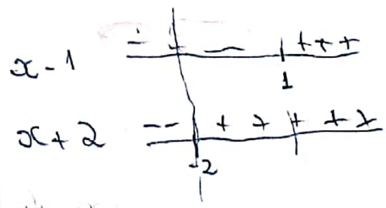
$$\Leftrightarrow \frac{-2x-11}{x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+11}{x+2} \leq 0$$



Logo, $\{x \in \mathbb{R} : -11/2 \leq x < -2\}$ é o cjto das soluções da inequação dada.

Exemplo: Resolva $|x-1| - |x+2| > x$.



Nesse caso, precisamos eliminar os módulos.

. Para $x < -2$,

$$-(x-1) - (-x-2) > x \Leftrightarrow$$

$$-\cancel{x}+1+\cancel{x}+2 > x \Leftrightarrow 3 > x \checkmark$$

. Para $-2 \leq x < 1$,

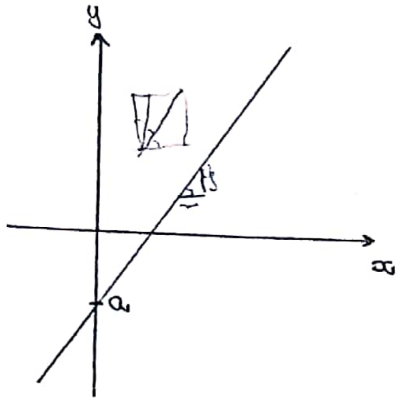
$$-(x-1) - (x+2) > x \Leftrightarrow -2x-1 > x \Leftrightarrow -3x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}.$$

. Para $x \geq 1$,

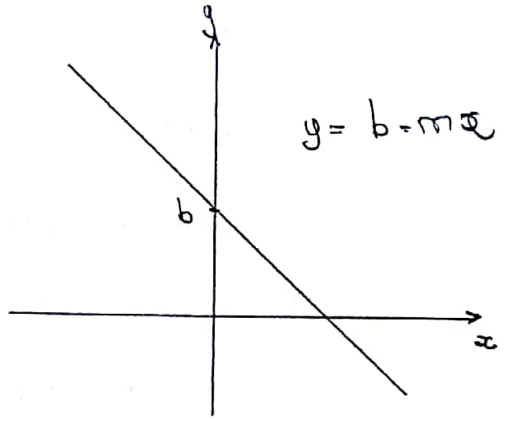
$$x-1-(x+2) > x \Leftrightarrow -3 > x \times$$

Logo, $\{x \in \mathbb{R} : x < -1/3\}$ é o cjto das soluções da ineq. dada.

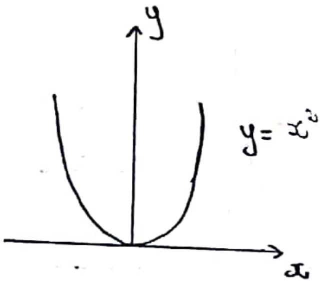
2. Esboço de Gráficos



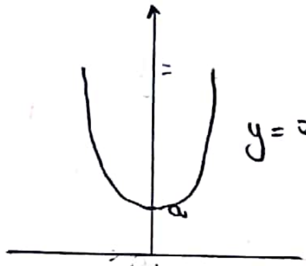
$y = a + mx$?



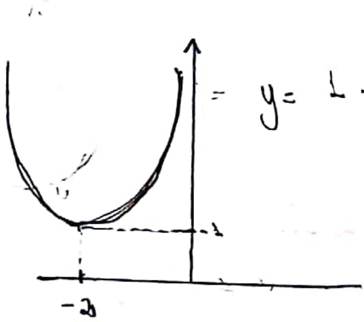
$y = b - mx$



$y = x^2$



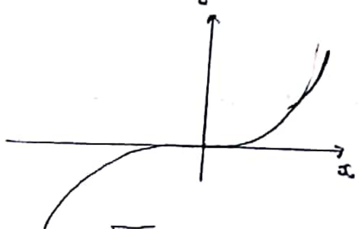
$y = x^2 + a$

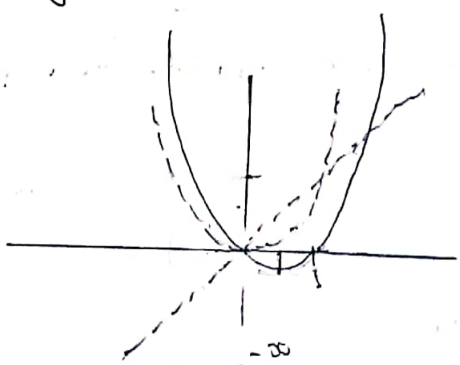


$y = 1 + (x+2)^2$

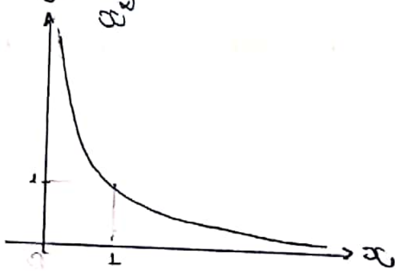
Esboce o gráfico de $y = x^2 - x$.

$y = x^3$

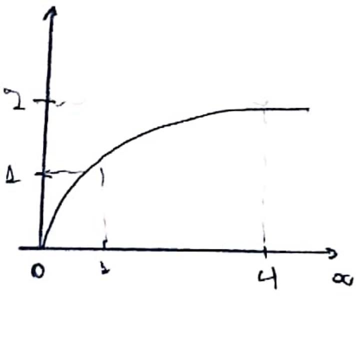




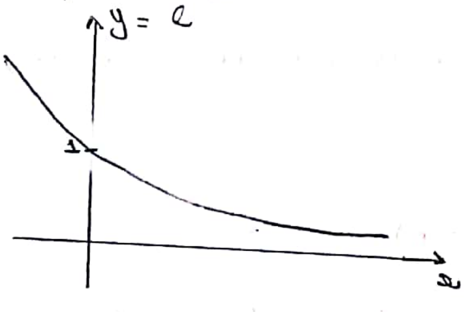
$y = \frac{1}{x^2}$, $x > 1$



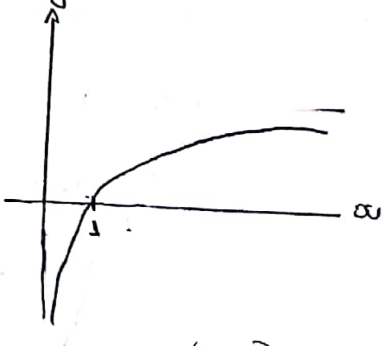
$y = \sqrt{x}$



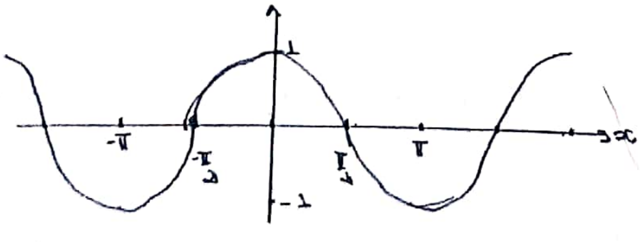
$y = e^{-x}$



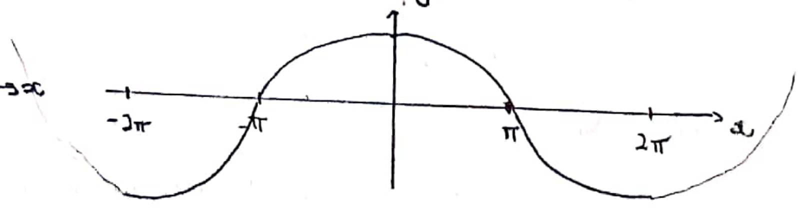
$y = \ln(x)$

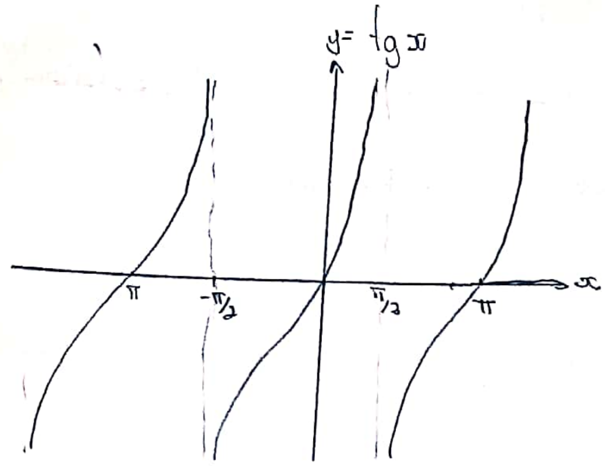


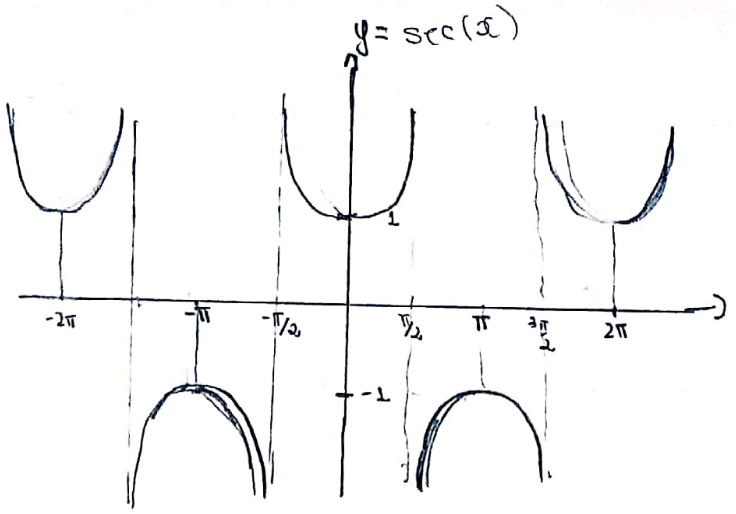
$y = \cos x$



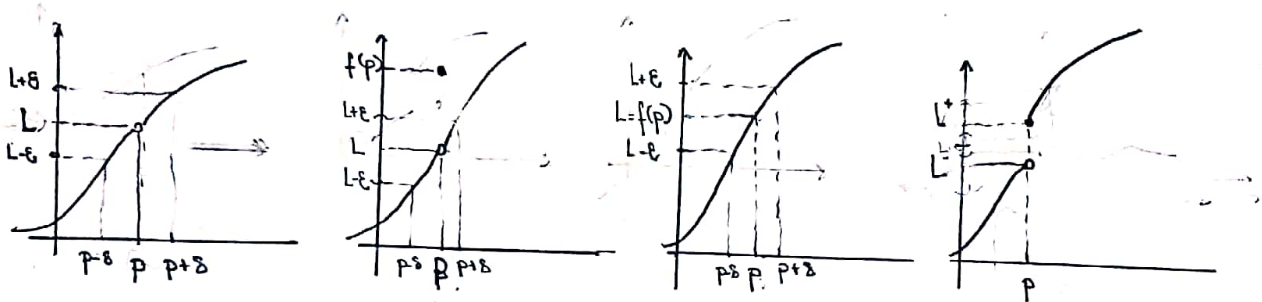
$y = \cos(2x)$







3-4. Limites e Continuidade



a) b) c) d)

Def: Dizemos que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.q.

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

"Podemos tornar $f(x)$ tão próximo quanto quisermos de L ao tomar x suficientemente próximo de p, sem que $x = p$."

Nas situações a), b) e c), o $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Em d), o limite não existe. No entanto, existem os limites laterais L^- e L^+.

Def: $\lim_{x \to p^-} f(x) = L^- \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon \end{cases}$

$\lim_{x \to p^+} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q.} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon \end{cases}$

"Podemos tornar $f(x)$ tão próx. de L^- (L^+) ao tomar x suf. próx. de p com $x < p$ ($x > p$) e $x \neq p$."

Quando o limite L existe, resulta que $L^- = L^+ = L$. Ademais, quando $L^+ = L^- = L = f(p)$, que é o caso da situação c), temos que f é contínua em p.

Def: f é contínua em p se $\forall \varepsilon > 0$ dado, $\exists \delta > 0$ (δ dependendo de ε), t.q., $\forall x \in D_f$,

$$p-\delta < x < p+\delta \Rightarrow f(p)-\varepsilon < f(x) < f(x)+\varepsilon.$$
$$\Updownarrow$$
$$0 \leq |x-p| < \delta$$

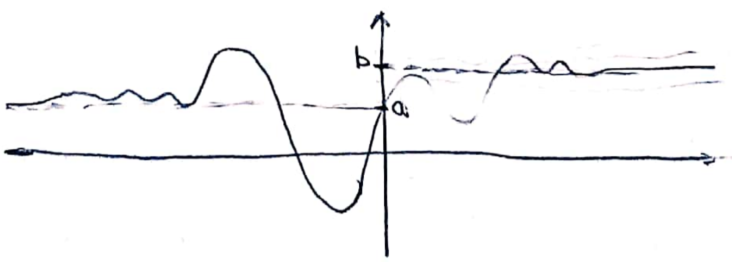
" $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ (dep. de ε) t.q. $f(x) \in \,]f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon[$ qdo x percorre $]p-\delta, p+\delta[$, $x \in D_f$.

★ Limites no infinito

Def: Seja f uma função e suponhamos que exista a t.q. $]a,+\infty[\subset D_f$ ($]-\infty,a[\subset D_f$).
Definimos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{com } \delta > a, \text{ t.q.} \\ x > \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \end{cases}$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{com } -\delta < a, \text{ t.q.} \\ x < -\delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \end{cases} \right)$$

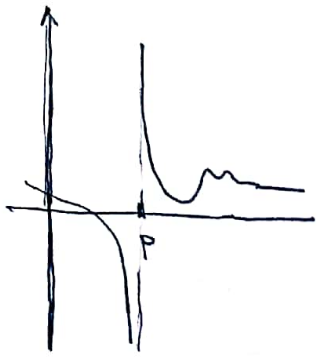


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

- Limites Infinitos

"Def": $\lim_{x \to p^+} f(x) = \pm\infty$ se podemos fazer $f(x)$ arbitrar. grande (positivo/negativo)
(p^-)
x próximo suficiente de p pela direita (esquerda)



- Limites Fundamentais

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ 2. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

- Propriedades: Suponha que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem e $c \in \mathbb{R}$, então

i. $\lim_{x \to p} [c f(x)] = c \lim_{x \to p} f(x)$

ii. $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

iii. $\lim_{x \to p} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

iv. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}$, dado $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

v. $\lim_{x \to p} h(f(x)) = h\left(\lim_{x \to p} f(x)\right)$
onde h é t.q. $\operatorname{Im} f \subset D_h$ e contínua

vi. Teo. Confronto: Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, p/ $x \approx p$, em $\lim_{x \to a} f(x)$.
e $\lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$ existe então
$\lim_{x \to p} f(x) = L.$

Exemplos:

- $\lim_{x \to 0} e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^1$ (e^x é contínua)
- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+6}{x} = \frac{8}{2} = 4$ (Fatorar e cancelar)

(Racionalizar Num/Den.)

- $\lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 81} = \lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x^2 - 81} \cdot \frac{3 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \to 9} \frac{9 - x}{(x^2 - 81)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 9} \frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})} = -\frac{1}{18 \cdot 6} = -\frac{1}{108}$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-4}{5x-2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3 - 4/x^2\right)}{\cancel{x^2}\left(5/x - 2\right)} = \frac{3}{2}$ (Razão de polin. no inf.)

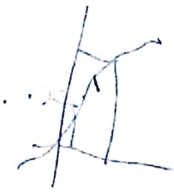
• Regra de L'Hospital: Se $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $= \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, então

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

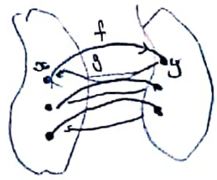
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

• Derivada de função inversa: $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))\, (f^{-1})'(x) = 1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$



5. Função Inversa



• f é injetora se, quaisquer que sejam s e t em D_f,

$s \neq t \Rightarrow f(s) \neq f(t)$

• Se f é injetora com $\mathrm{Im}\, f = B$, podemos considerar g definida em B dada por

$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \quad \therefore g := f^{-1}$

"g desfaz o que feito por f e vice-versa: $g(f(x)) = x$ e $f(g(x)) = x$."

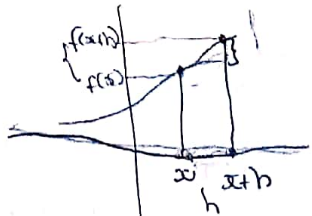
Ex: x^2 e $\sqrt{x}$, p/ $x > 0$; e^x e $\ln x$, p/ $x > 0$;

Ache a inversa de $f(x) = 1/x$.

$y = 1/x \qquad x = 1/y \Rightarrow 1/x = y.$

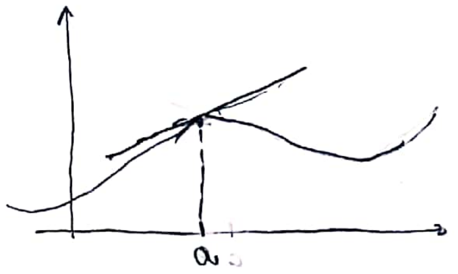
$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1/x$. De fato $f(f(x)) = 1/f(x) = 1/(1/x) = x$

6. Derivadas



$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O valor de $f'(\cdot)$ em $a \in D_f$ é repres. por $f'(x)\big|_{x=a}$



$m = f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em $x=a$

• Prop. Básicas

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis (a deriv. existe), c e n reais,

1. $(cf)'(x) = c\,f'(x)$

2. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Regra do Produto)

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ - (Regra do Quociente)

5. $\dfrac{d}{dx} c = 0$; 6. $\dfrac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\, g'(x)$ (Regra da cadeia)

• Algumas:

• $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

• $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

• $(\tan x)' = \sec^2 x$

• $\sec'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$

• $(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

• $(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

• $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\, e^{f(x)}$

• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

. Derivados de ordem n, $n \in \mathbb{N}_+$: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

• Crescente / Decrescente - Concav. p/ cima / p/ baixo

• Pontos Críticos : $x = c$ é um pto crítico de $f(x)$

se : i. $f'(c) = 0$ ii $f'(c)$ não existe

• Crescente / Decrescente

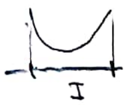
i. $f'(x) > 0$ p/ x no intervalo I ⇒ $f(\cdot)$ é crescente em I

ii. $f'(x) < 0$ p/ " " " " ⇒ " " decrescente " "

iii. $f'(x) = 0$ " " " " " ⇒ " " constante " "

• Concavidade p/ cima / p/ baixo

i. $f''(x) > 0$, p/ x no interv. I ⇒ $f(x)$ é concâva p/ cima em I



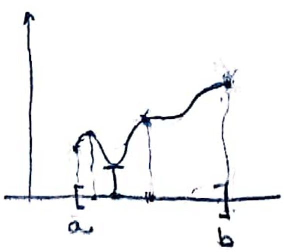
ii. $f''(x) < 0$ " " " " " ⇒ " " " p/ baixo em I

• Ptos de inflexão (onde muda-se a concavidade)

$x = c$ é um pto de inflexão de $f(x)$ se sua concavidade muda em $x = c$.

• $f''(c) = 0$ ⇒ c é pto de inflexão.

• Máximos e mínimos globais



1. Encontrar todos os pontos críticos de f

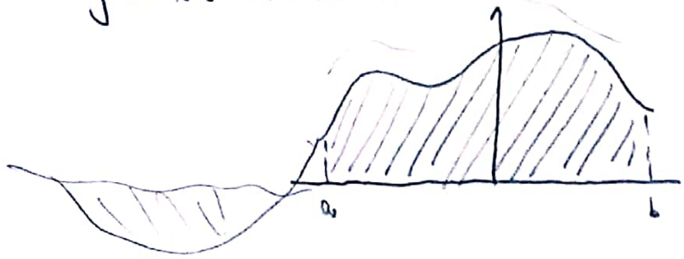
2. Usar a concavidade no ponto p/ decidir do máximo ou mínimo local

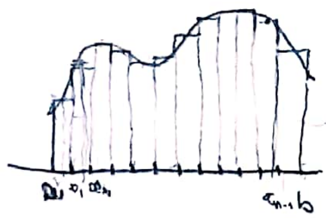
$[a, x_0, x_0, b$

3. Evaluar $f(x)$ nestes pontos e nos extremos a e b

4. O pto de máximo / Mínimo global será o qual retornar o maior / menor valor pela f.

7. Integral de Riemann





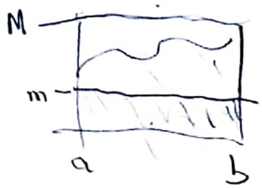
$\sum_{i=0}^{n} f(c_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$ - soma de Riemann

$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

Def: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, dizemos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a,b]$.

Integral indefinida: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ Ex: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$



- Propriedades
  - $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
  - $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
  - $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
  - $\overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{F(b)-F(a) = -(F(a)-F(b))} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ c \in \mathbb{R}$
  - Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
  - $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
  - Se $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,b]$, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

- Integrais Comuns
  - $\int k\,dx = kx + C$
  - $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
  - $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$
  - $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$
  - $\int e^u\,du = e^u + C$
  - $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
  - $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
  - $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$
  - $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

Ver pág 336 Guidorizzi

$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

Técnicas padrões de integração

$\int x \sec(x)\,dx$

$dv = \sec x\,dx \quad w = x \Rightarrow dw = dx \qquad \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}}{\cos} \quad \frac{1+\operatorname{sen}}{\cos}$

$v = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \qquad -\int \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)\,dx$

$x\ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - \int \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)dx$

$w = \cos x \quad du = -\operatorname{sen} x\,dx$

$-\int \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{w}\right)du$

$\cos^2(x) = \sqrt{1-\cos^2}$

- Substituição: Queremos

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx,$$

Fazemos $u = g(x) \Leftrightarrow du = g'(x)\,dx$ e

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- Por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

LIATE (log, alg, trig, exp)

$(uv)' = u'v + uv'$

$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$

$uv - \int v\,du = \int u\,dv$

* Trig. Substituições: Se na integral aparece

- $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$
- $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$
- $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$

$1+\sqrt{1-u^2} = w$

$(w-1)^2 = 1-u^2$

$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right)$

$\int (w-1)\ln($

Recomenda-se a substituição

- $x = \frac{a}{b}\operatorname{sen}\theta$
- $x = \frac{a}{b}\sec\theta$
- $x = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \qquad \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1 \qquad \sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$

- Frações parcial.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, $P(x)$ um polinômio de grau menor que $Q(x)$.

Procura-se representar $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{m_1(x)} + \frac{A_2}{m_2(x)} + \dots + \frac{A_n}{m_n(x)}$ em $m_1(x) \dots m_n(x) = Q(x)$

Limites Fundamentais

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Existe $r > 0$, t.q.

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \,, \quad p/\ 0 < x < r \Rightarrow$$

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \,, \quad p/\ 0 < x < r \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Por outro lado,

$$-r < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < r \Rightarrow \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$ (Form. do taylor)

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x} = \ln a$ (Forma + rápida: L'Hospital)

Logaritmo

1. $\log_a \alpha\beta = \log_a \alpha + \log_a \beta$

2. $\log_a \alpha^{\beta} = \beta \log_a \alpha$

3. $\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta$

1. Seja $x = \log_a \alpha \Rightarrow \alpha = a^x$ e $y = \log_a \beta \Rightarrow \beta = a^y$. Logo

$$\alpha\beta = a^x . a^y = a^{x+y} \Rightarrow x+y = \log_a \alpha\beta$$

2. $$\left.\begin{array}{l} x = \log_a \alpha^{\beta} \Rightarrow \alpha^{\beta} = a^x \Leftrightarrow \\ y = \log_a \alpha \Rightarrow \alpha = a^y \Rightarrow \alpha^{\beta} = a^{\beta y} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta y = x \text{, i.e., } \beta \log_a \alpha = \log_a \alpha^{\beta}.$$

3. Segue de i e ii.

Trigonometria Básica

1. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a\cos b - \operatorname{sen}b\cos a$

2. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

(Geometric proof on youtube)

De 2.,

$$\cos(t-t) = \cos 0 = 1 = \cos t\cos t + \operatorname{sen}t\operatorname{sen}t \Rightarrow \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

- f é dita uma função par se, para todo x,

$$f(-x) = f(x);$$

e é dita ímpar se para todo x

$$f(-x) = -f(x).$$

- $\operatorname{sen}x$ é ímpar
- $\cos x$ é par

(Decorre de 1 e 2)

Tbm de 1. e 2. segue que

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}(-b) \qquad (3)$$

$$= \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$$

e

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a-(-b)) = \operatorname{sen}a\cos(-b) - \operatorname{sen}(-b)\cos a \qquad (4)$$

$$= \operatorname{sen}a\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos a$$

Fazendo $a = x = b$ em 3 e 4, temos

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad \text{e} \qquad (5)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x \qquad (6)$$

Como sabemos,

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Daí, de 5 segue que

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$= 2\cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad (7)$$

Além disso, de 5, segue tbm que

$$\cos 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x. \quad (8)$$

Outras relações

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}$$. De fato, $$\frac{2\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{\frac{2\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2}}{\frac{\cos^2 x/2 + \operatorname{sen}^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = \frac{2\operatorname{sen} x/2}{\frac{1}{\cos x/2}}$$

$$= 2\operatorname{sen} x/2 \cos x/2 = \operatorname{sen}(x/2 + x/2) = \operatorname{sen}(x).$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}.$$ Basta seguir os mesmos passos.