MAE5703 – Modelos Probabilísticos Discretos e suas Aplicações

Prof. Fábio Machado – 1º sem – 2013

Bibliografia essencial:

1. S. M. Ross, Introduction to Probability Models, 10th ed., 2010.
2. S. M. Ross, Simulation, 5th ed., 2013.
3. G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker, Probability and Random Processes, 3rd ed., 2005.
4. R.N. Bhattacharya, E.C. Waymire, Stochastic Processes with Applications, 1990.
5. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 3rd ed, V1, 1968.
6. R. Durrett, Essentials of Stochastic Processes, 2nd ed, 2012.

Avaliações:

- **P1 - 24/setembro**
- **P2 - 18/novembro**
- **Série de listas de exercícios ao longo do semestre**

Nota final = 15% média das listas de exercícios + 85% média das provas

Horário das aulas: segunda-feira 10h – 12h
quarta-feira 10h – 12h

Sala : 243A - IME

Web page: http://www.ime.usp.br/~fmachado/MAE5703

Modelos Probabilísticos Discretos

E Suas Aplicações

Aula 01 - 12/08/2013 Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Dica:

$$\left| \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} - a \right| < c \cdot e^{-M(t)}$$

↳ provar que $\frac{\lambda(t)}{M(t)}$ converge para $a = \frac{\lambda}{\mu}$ à uma velocidade satisfatória

Modelo de Propagação de Informação

Random Walk System On Complete Graphs

Bull Braz. Math. Soc, 37 (4) 2006

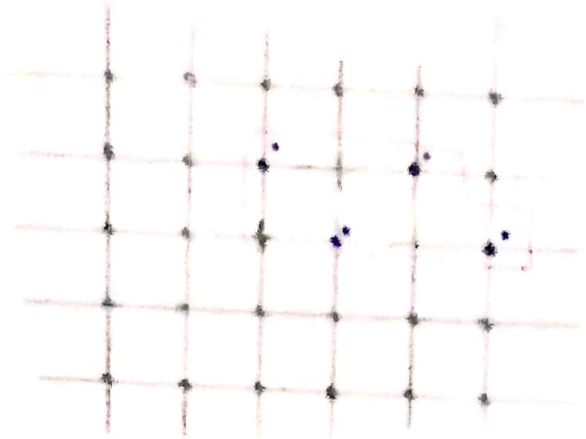
Oswaldo Alves
Elcio Lebensztayn
Maurício Martinez
Fábio Machado

- Mostrar o processo de propagação de uma informação (ou vírus ...)

→ os indivíduos estão dispostos em um grafo completo ($\mathbb{Z}^d$)

→ Fixado um indivíduo, a propagação (tempo de prop. = ∞)

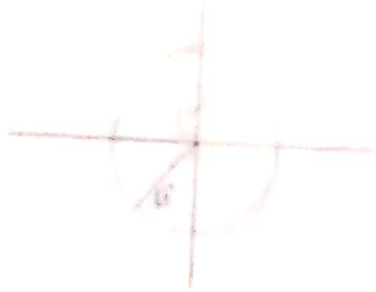
→ Omissão (nenhuma regra)



• Ativo

• Inativo

B_t



Cada indivíduo expande de acordo com a $\sqrt{t}$

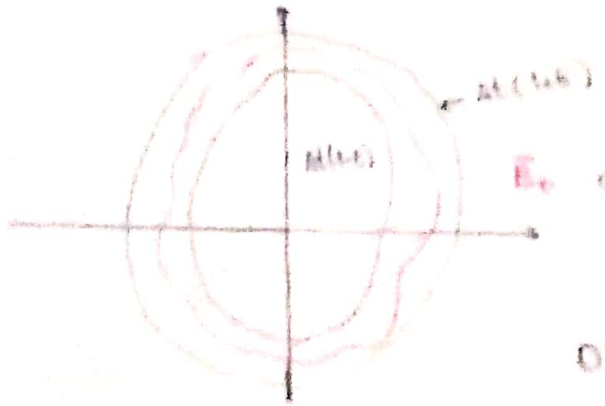
Quanto ao todo

$\exists A \ \forall \varepsilon > 0$

$\exists t_0$ t.q. $\forall t > t_0$

$A t_0 (1-\varepsilon) \subset B_t \subset A t (1+\varepsilon)$

Homogeneização



B_t cresce linearmente em t

Obs: Somamos coisas que crescem em função de $\sqrt{t}$ e obtemos algo que cresce linearmente em t

Conclusão: Tentar provar que A não é uma circunferência.

Mostrar que o crescimento em cada direção é distinto!

1º método: Simulação

Apareciam "conglomerados" que ficavam em torno de si mesmos!

Só as bordas contribuíam para a propagação (igual o fogo).

Idéia: Tirar os conglomerados que, após K iterações, não sai de si mesmo. Ou seja, fazer uma restrição na omissão!

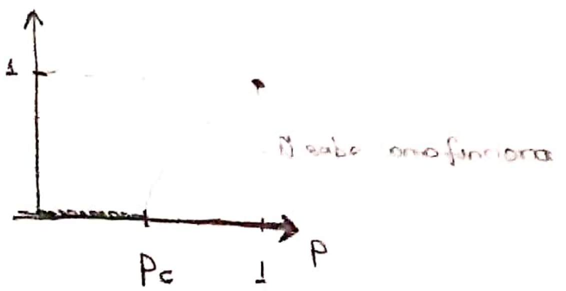
↑ Regra Não-Markoviana

Omissão - K → visitou K caras que já "sabiam".

$L \sim G(1-p)$ → Regra Markoviana

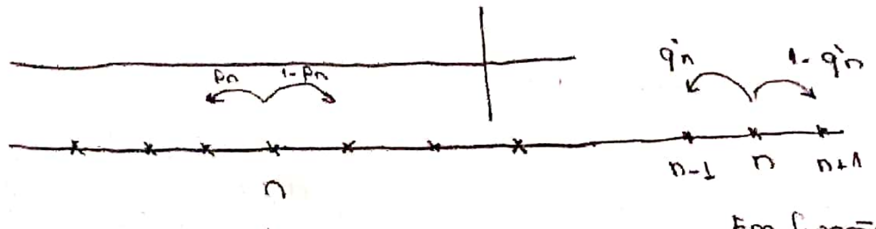
↓

tempo de vida de cada indivíduo



Agora, imaginemos que cada indivíduo tem sua peculiaridade (p se altera)

Para d=1, obtemos resultados.

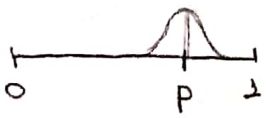


Cada indivíduo, depois de visitado tem sua propagação.

Em função do local onde está o indivíduo

O que chegar em n, irá para n-1 com prob. q_n e $1-q_n$, para n+1.

No caso da omissão - K_n, pode-se encontrar a distribuição da proporção de indivíduos visitados



↳ obtido pelo T.C.L.

Obs: Resultados obtidos considerando que depois que o indivíduo "morre", ele não passa mais a informação.

Definição:

- Grafo: K_n
- $L \sim G(1-p)$
- $C_n(p)$: Conjunto de vértices de K_n visitados por um indivíduo ativo.

$$1 \leq |C_n(p)| \leq \underset{\text{tamanho do grafo}}{\underset{\downarrow}{n}}$$

- Cobertura:

$$\alpha_n(p) = \frac{|C_n(p)|}{n} \rightarrow \text{prop. de ind. visitados.}$$

- Parâmetro Crítico:

$$p_c = \sup\{p : \lim_{n\to\infty} \alpha_n(p) \Rightarrow 0\}$$

↓ Conv. em distribuição

Teorema:

$$p_c = \frac{1}{2}$$

Idéia da prova:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Mostrar que se } p \leq 1/2, \\ \forall \varepsilon > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\alpha_n(p) \geq \varepsilon) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_c \geq \frac{1}{2} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \text{Se } p > 1/2, \\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(p) > 0 \ \exists \quad \text{t.q. } \forall n \\ \delta = \delta(p) > 0 \\ \mathbb{P}(\alpha_n(p) \geq \varepsilon) \geq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow p_c \leq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow p_c = \frac{1}{2}$$

* modelo de Galton-Watson (modelo de filhos...)

Obs: A construção acima considera antes, um limite em t (com $t \to \infty$).

Modelos Probabilísticos Discretos e Suas Aplicações

Fábio Prates Machado

Aula 02 - 14/08/2013

Processo Estocástico:

Lista de v.a. indexadas por I.

$$\{X_\lambda : \lambda \in I\} \in \bigcup_{\lambda \in I} S_\lambda = S \begin{cases} \text{Espaço de} \\ \text{estados} \end{cases}$$

$$X_\lambda \in \overset{\text{muitas vezes}}{S_\lambda = S} \text{, ou seja, } P(X_\lambda \in S_\lambda^c) = 0$$

↑ Assume valores em S

Passeios Aleatórios

$$X_i \sim \bar{B}(p) \begin{cases} +1 & \text{com prob. } p \\ -1 & \text{" " } 1-p \end{cases} \quad \text{independentes.}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{com prob. } p \\ 0 & \text{" " } 1-p \end{cases} \qquad - S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_0 \equiv 0$$

↑ Passeio aleatório

$S_i = \{0,1\}$

simples em $\mathbb{Z}$

$p = 1/2$ simétrico

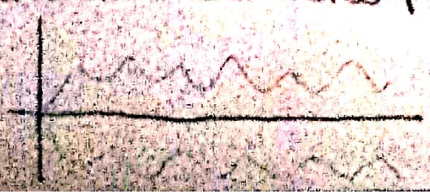
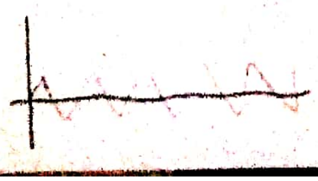
$S_n \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$

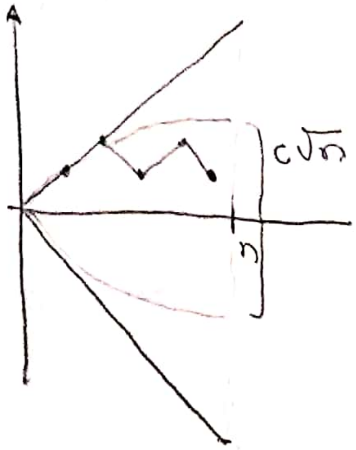
Se n é par: $-2, 0, 2, \dots$

Se n é ímpar: $-3, -1, 1, 3$

$\{S_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{Z}$

Interessante: Considerando $p = 1/2$ (passeio simétrico)

 e não 

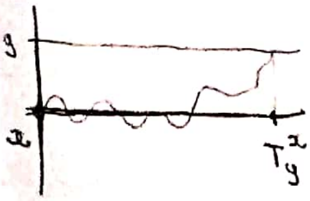


$\Rightarrow$ Tem um abordagem que chama isso de cálculo de probabi-lidades. Fixamos n e fazemos cálculos.

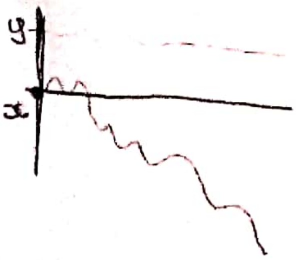
$$\mathbb{P}(S_n = -n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{n} \{X_r = 1\}\right) = (1-p)^n$$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

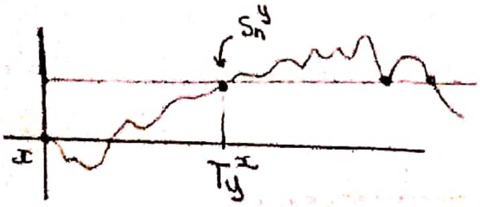
$$T_y^x = \min\{n \geq 0 : S_n^x = y\}$$



$$P(T_y^x < \infty) = \begin{cases} 1 & * \\ < 1 \end{cases}$$



(*) Com prob. 1, o processo toca na faixa y.

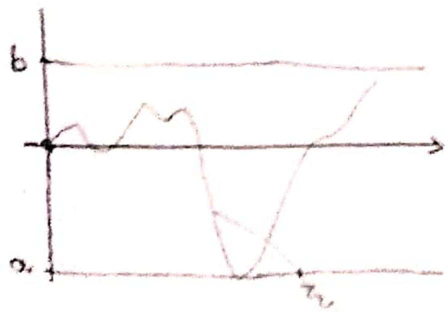


$$\underbrace{P(S_n^x = y \text{ inf. vezes}) = 1}_{\text{Processo Recorrente}} \Leftrightarrow p = 1/2$$

se $p \neq 1/2 \Rightarrow$ Processo Transiente

Prova: Bhattacharya

Ideia: Problema da Ruína do Jogador



Você ganha R\$ a

Adversário R\$ b

Você ganha a partida i $\{X_i = 1\}$

c.c. $\{X_i = -1\}$

. Você ganhar o jogo:

$$T_b^0 < T_a^0$$

. Perder

$$T_b^0 > T_a^0$$

. É possível

$$T_b^0 = T_a^0 = \infty ?$$

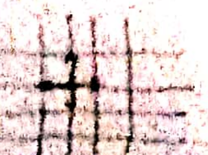
Se o adv. tivesse fortuna infinita, nunca ganharia. No entanto, se $p > 1/2$, poderia jogar infinitamente $\Rightarrow$ Processo transiente

Passeios Aleatórios em $\mathbb{Z}^d$

$d = 1$

Recorrente $\Leftrightarrow$ $p = 1/2$

$d = 2$



$X_i \in \{(-1,0), (0,-1), (1,0), (0,1)\}$ $\quad p(X_i = x) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } x \in S_1 \Rightarrow \text{simétrico} \\ 0 & \end{cases}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\{S_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{Z}^2$

Recorrente $\Leftrightarrow$ $p(x) = 1/4$

- d qualquer

$|S_i| = 2d$

$P(X_1 = x) = \begin{cases} 1/2d, & \text{se } x \in S_1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ → caso simétrico

- $d \geq 3$

Transiente!

(Bien-Aymé) Galton-Watson

$\mathbb{P}(Y=k)=p_k$

$m=\sum k p_k$

Se $m>1$, o sistema sobrevive

RNA | HIV   Influenza.

Model

Continuos time model

μ: measure supp $\subset [0,+\infty)$

$x\in[0,1]$

Single individual

$\bullet \longrightarrow \lambda$ from μ

Birth: λ

Death: 1

New ind.

ou mantém o mesmo λ com prob. $1-r$

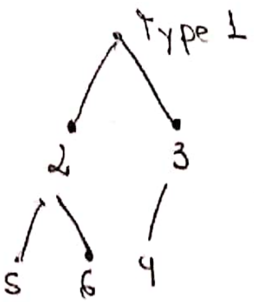
ou toma um novo λ a partir de μ

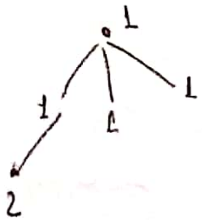
Prop. O processo sobrevive $\Leftrightarrow$ (I) ou (II) valem:

(I) Um tipo fixo sobrevive p/ sempre

(II) A árvore dos tipos é infinita

Árvore de Tipos:





Se (I) e (II) ñ valem,

$\Rightarrow$ árvore de tipos é finita.

X_t: # type 1 ind. at time t

Y_t: # types that have appeared from type 1 by time t.

↳ mutações a partir do tipo 1

$$E(X_t|\lambda) = e^{[\lambda(1-r)-1]t}$$

$$E(Y_{t+h} - Y_t | \lambda, r) = \lambda r h E(X_t|\lambda) + o(h)$$

mean-offspring of tree of types $= E(Y_\infty) = \iint_0^\infty \lambda r e^{(\lambda(1-r)-1)s}\, ds\, d\mu(\lambda)$

$$= m(r)$$

Caso particular:

$\mu \sim \mathcal{U}[0,a]$

Se $0 < a \leq 1$ o processo dies out $\forall r \in [0,1]$

Se $a = 2$, o proc. sobrevive $\forall r \in [0,1)$ e não para $r = 1$.

Se $1 < a < 2$

Se $r < 1 - \frac{1}{a}$, então (I) $\Rightarrow$ survives

$\exists r_c \in (1 - \frac{1}{a}, 1) \Rightarrow$ (II) holds para $1 - \frac{1}{a} < r < r_c$

$r \geq r_c \Rightarrow$ dies.

BULLETIN
BRAZILIAN
MATHEMATICAL
SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 37(4), 571-580

Random walks systems on complete graphs

Oswaldo S.M. Alves, Elcio Lebensztayn,
Fábio P. Machado and Mauricio Z. Martinez

Abstract. We study two versions of random walks systems on complete graphs. In the first one, the random walks have geometrically distributed lifetimes so we define and identify a non-trivial critical parameter related to the proportion of visited vertices before the process dies out. In the second version, the lifetimes depend on the past of the process in a non-Markovian setup. For that version, we present results obtained from computational analysis, simulations and a mean field approximation. These three approaches match.

Keywords: random walks, complete graphs, mean field approximation.

Mathematical subject classification: 60K35, 60J05, 60J85.

1 Introduction

We study two versions of a model of discrete-time random walk systems on finite graphs. This model, known as frog model, has been considered on infinite graphs, in particular hypercubic lattices and homogeneous trees, for which results as shape theorem and phase transition have been proved. See for instance [2], [3], [4] and the references therein.

Our interest in this paper is to study the behavior of this model on complete graphs. The basic form of the model is described as follows. At time zero there is one active particle in a fixed vertex of the graph. That particle performs a random walk up to the time it dies. In all other vertices there are inactive particles. At each step of the process, active particles disappear with probability $(1-p)$ or survive with probability p, independently of each other. When an active particle survives, it jumps to a neighboring vertex randomly chosen. If an active particle hits a sleeping one, the latter is activated and starts to perform a random walk independently of everything else.

Received 26 April 2006.

Modelos Probabilísticos Discretos E Suas Aplicações

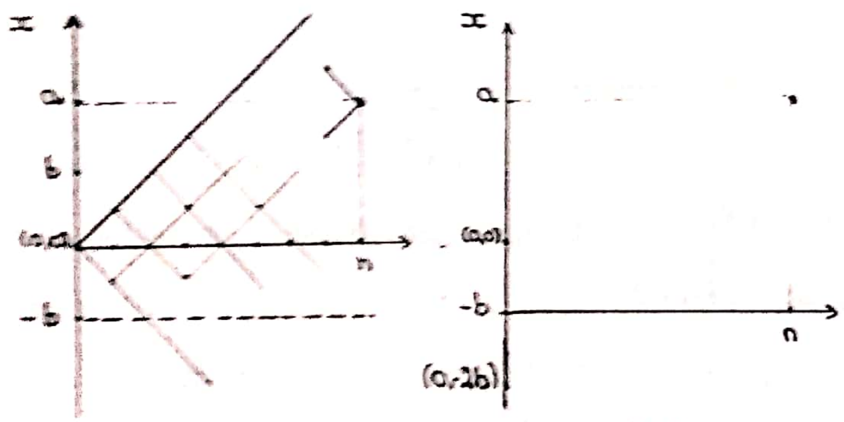
Lista 1.

Aluno: Maicon Aparecido Pinheiro

1.

a) Se $a > 0$ e $b > 0$, o número de caminhos $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ tais que $s_1 > -b, \dots, s_{n-1} > -b, s_n = a$ é igual à $N_{n,a} - N_{n,a+2b}$.

Façamos em um primeiro passo a interpretação geométrica do problema:



(a) (b)

Com auxílio da figura acima, notamos pelo gráfico (a) que o número de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) de forma que $s_1 > -b, \dots, s_{n-1} > -b, s_n = a$ é dado por

$$N_1 - N_2, \text{ com}$$

N_1 = número total de caminhos de $(0,0)$ à (n,a);

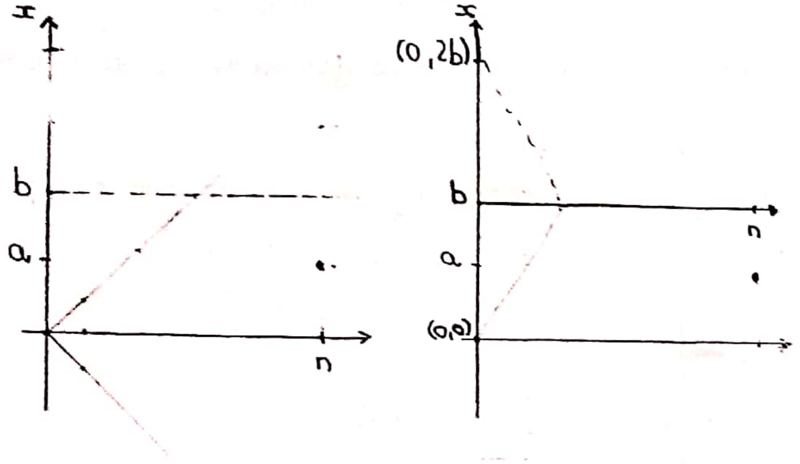
N_2 = número de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) que tocam ou cruzam à reta $x = -b$.

Sabemos que $N_1 = N_{n,a}$. O problema está em descobrir N_2, e para tal vejamos o gráfico (b). Pelo Princípio da Reflexão, temos que o número de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) que cruzam a reta $x = -b$ é igual ao núme o total de caminhos de $(0,-2b)$ à (n,a); que é, por sua vez, equivale ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(n,a+2b)$.

Logo, o número de caminhos $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ tais que $s_1 > -b, s_2 > -b, \dots, s_{n-1} > -b$, $s_n = a$, com $a > 0$ e $b > 0$ é igual à

$$N_{n,a} - N_{n,a+2b}$$ ∎

2) Se $b > a > 0$ então há $N_{n,a} - N_{n,2b-a}$ caminhos satisfazendo as condições $s_1 < b, \dots, s_{n-1} < b, s_n = a$.



(a) (b)

Usando o mesmo raciocínio do item 1.a. anterior, temos que o nº de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) tais que $s_1 < b, \dots, s_{n-1} < b, s_n = a$ é igual à

$$N_1' - N_2', \text{ com}$$

N_1' = nº total de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) e;

N_2' = nº de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) que tocam ou cruzam a reta $x=b$

Sabemos que $N_1' = N_{n,a}$. Por outro lado, temos que N_2' é, pelo Princípio da reflexão, igual ao número de caminhos de $(0,2b)$ à (n,a); que é, por sua vez, igual ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(n,a-2b)$, que é $N_{n,a-2b}$. Mas $N_{n,a-2b} = N_{n,2b-a}$, que implica que $N_1' - N_2' = N_{n,a} - N_{n,2b-a}$.

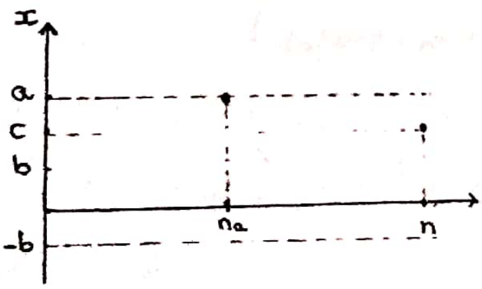
Obs: Tanto no item (a) quanto no item (b) utilizamos o fato de que o nº de caminhos de $(0,0)$ à (n,a) é igual ao número de caminhos de $(0,k)$ à $(n,a+k)$. Provar isso é simples: basta verificar a relação um-a-um entre os caminhos do primeiro e segundo caso.

No item (b), obtemos $N_{n,a-2b} = N_{n,a+2b}$, pois

$$N_{n,a-2b} = \binom{n}{\frac{n+a-2b}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n+a-2b}{2}\right)!\left(\frac{n+2b-a}{2}\right)!} = \binom{n}{\frac{n+2b-a}{2}} = N_{n,2b-a}$$

o que na verdade é consequência de que o número de caminhos de $(0,0)$ à $(n, a-2b)$ é equivalente ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(n, 2b-a)$.

c. Seja $a > c > 0$ e $b > 0$. O número de caminhos que tocam a linha $x=a$ e, em seguida, leva ao ponto (n,c) sem ter tocado a linha $x=-b$ é igual à $N_{n,2a-c} - N_{n,2a+2b+c}$. (Note que isto inclui os caminhos que tocam a linha $x=-b$ antes da linha $x=a$.)



Seja $n_a = n_0(a)$ um inteiro positivo representando o primeiro momento em que o caminho $(x_1,\dots,x_n)$ visita a ordenada a, ou seja,

$$n_a = \min\{n \in \mathbb{N};\ x_n = a\}.$$

Pelo que já sabemos, o número de caminhos de $(0,0)$ à (n_a, a) é dado por $N_{n_a,a}$. Uma vez em (n_a,a) teremos M caminhos até o ponto (n,c), que não tocam a reta $x=-b$. Descoberto M, teremos pelo princípio da multiplicação que o número de caminhos de $(0,0)$ à (n,c) satisfazendo as restrições do enunciado é igual à

$$N_{n_a,a}\cdot M \qquad (*)$$

Mas M pode ser escrito como

$$M = N_1^* - N_2^* \quad , \text{com}$$

N_1^* = nº de caminhos de (n_a, a) à (n, c), que é igual ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(n - n_a, c - a) = N_{n-n_a, c-a}$;

N_2^* = nº de caminhos de (n_a, a) à (n, c) que não tocam ou cruzam a reta $x = -b$, que é igual ao número de caminhos de $(n_a, a+b)$ à $(n, c+b)$ que não cruzam ou tocam à reta $x = 0$, que é igual - pelo Princípio da Reflexão - ao nº total de caminhos de $(n_a, -a-b)$ à $(n, c+b)$, que é igual ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(n - n_a, c + a + 2b) = N_{n-n_a, c+a+2b}$.

Logo, o nº de caminhos em questão é dado por

$$N_{n_a, a} \cdot \left(N_{n-n_a, c-a} - N_{n-n_a, c+a+2b} \right) =$$

$$= N_{n_a, a} \left(N_{n-n_a, a-c} - N_{n-n_a, c+a+2b} \right) =$$

$$= N_{n_a, a} N_{n-n_a, a-c} - N_{n_a, a} N_{n-n_a, c+a+2b} \overset{(*)}{=}$$

$$= N_{n, 2a-c} - N_{n, 2a+2b+c} \,//$$

m $(*)$ usamos o fato de que o número de caminhos de $(0,0)$ à (n', d) ezes o número de caminhos de $(m-n', e)$ é igual ao número de caminhos de $(0,0)$ à $(m', d+e)$.

1. A partir do lema 3.1 conclua (sem cálculos) que

$$u_0 u_{2n} + u_2 u_{2n-2} + \dots + u_{2n} u_0 = 1$$

Basta notarmos que

$u_{2k} u_{2n-2k}$ é a probabilidade de que o caminho de tamanho $2n$ tenha um último retorno à origem no tempo $2k$.

Já que $u_{2k} u_{2n-2k} = P(S_{2k}=0)\, P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-2k} \neq 0) =$

$= P(S_{2k}=0)\, P(S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$

Note que $u_0 u_{2n}$ representa a probabilidade do caminho não retornar à origem. Sendo então

A_k = evento representando os caminhos de tamanhos $2n$ que tem seu últimos retorno à origem no tempo $2k$

Temos que

$A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$ = todos os caminhos possíveis $\xRightarrow{\text{aplicando prob.}}$

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = 1 \Rightarrow u_0 u_{2n} + u_2 u_{2n-2} + \dots + u_{2n} u_0 = 1 \qquad \square$$

2. Mostre que

$$u_{2n} = (-1)^n \binom{-1/2}{n} \quad \text{e} \quad f_{2n} = (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n}$$

Sabemos que

$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$ e $f_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n+1}$, sai

que

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n} = \frac{1}{(2n-1)} \frac{2n!}{n!\,n!} 2^{-2n} = \frac{2n\,\cancel{(2n-1)}\,(2n-2)!}{\cancel{(2n-1)}\,n\,(n-1)!\,(n-1)!\,n} 2^{-2n} = \frac{(2n-2)!}{n\,(n-1)!\,(n-1)!} \cdot 2^{-2n+1}$$

$$= \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-n+1}$$

E agora, pelos resultados dos métodos de contagem, temos que

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = (-1)^n \binom{-1/2}{n} \quad e \quad f_{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} 2^{-2n+1} = (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n} \quad \blacksquare$$

*S: As relações acima foram tomadas como hipóteses.

Modelos Probabilísticos Discretos e Suas Aplicações

Lista 2.

Aluno: Maicon Aparecido Pinheiro

1.17 Market research suggest that in a five year period 8% of people wit cable television will get rid of it, and 26% of those without it will sig up for it. Compare the predictions of the Markov chain model with the following data on the fraction of people with cable TV: 56.4% em 1990, 63,4% in 1995, and 68,0% in 2000. What is the long run fractio of people with cable TV?

1.30. The liberal town of Ithaca has a "free bikes for the people pro You can pick up bikes at the library (L), the coffee shop (C) or the cooperative grocery store (G). The director of the program has deter ned that bikes move around according to the following Markov chair

	L	C	G
L	0,5	0,2	0,3
C	0,4	0,5	0,1
G	0,25	0,25	0,5

On Sunday there are an equal number of bikes at each place.
(a) What fraction of the bikes are at the three locations on Tuesday?
(b) on the next Sunday?
(c) In the long run what fraction are at the three locations?

1.41. Reflecting random walk on the line. Consider the points ...2, 3, ... be marked on a straight line. Let X_n be a Markov chain that moves to the right with probability 2/3 and to the left with probability 1/3 but subject this time to the rule that if X_n tries to go to the left from 1 or to the right from 4 it stay put. Find

(a) the transition probability for the chain, and

(b) the limiting amount of time the chain spends at each site.

1.44. Landscape dynamics. To make a crude model of a forest we might introduce states 0 = grass, 1 = bushes, 2 = small trees, 3 = large trees, ande write down a transition matrix like the following:

	0	1	2	3
0	1/2	1/2	0	0
1	1/24	7/8	1/12	0
2	1/36	0	8/9	1/12
3	1/8	0	0	7/8

The idea behind this matrix is that if left undisturbed a grassy are will see bushes grow, then small trees, which of course grow into large trees. However, disturbances such as tree falls or fires can reset the system to state 0. Find the limiting fraction of land in each of the states.

1.46. Bernoulli-Laplace model of diffusion. Consider two urns each of which contains m balls; b of these 2m balls are black, and the remaining 2m-b are white. We say that the system is in state i if the first urn contains i black balls and m-i while balls while the second contains b-i black balls and m-b+i white balls. Each trial consists of choosing a ball at random from each urn and exchanging the two. Let X_n be the state of the system

fter n exchanges have been made. X_n is a Markov chain.
(a) Compute its transition probability.
(b) Verify that the stationary distribution is given by

$$\pi(i) = \binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i} \Big/ \binom{2m}{m}$$

1.52. Wright-Fisher model. Consider the chain described in Example 1.9.

$$p(x,y) = \binom{N}{y} (p_x)^y (1-p_x)^{N-y}$$

where $p_x = (1-u)x/N + v(N-x)/N$.
a) Show that if $u, v > 0$, then $\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$, where π is the uni
stationary distribution. There is no known formula for $\pi(y)$, but you car
b) compute the mean $v = \sum_y y\pi(y) = \lim_{n\to\infty} E_x X_n$.

1.53. Ehrenfest chain. Consider the Ehrenfest chain, Example 1.2, with transition probability $p(i,i+1) = (N-i)/N$, and $p(i,i-1) = i/N$ for $0 \le i \le$
Let $\mu_n = E_x X_n$.
a) Show that $\mu_{n+1} = 1 + (1-2/N)\mu_n$.
b) Use this and induction to conclude that

$$\mu_n = \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n (x - N/2)$$

From this we see that the μ_n converges exponentially rapidly to the equilibrium value of $N/2$ with the error at time n being $(1-2/N)^n(x-N/$

1.70. General birth and death chains. The state space is $\{0,1,2,\ldots\}$ and th transition probability has

$$p(x, x+1) = p_x$$

$$p(x, x-1) = q_x \quad \text{para } x > 0$$

$$p(x, x) = r_x \quad \text{para } x \geq 0$$

while the other $p(x,y) = 0$. Let $V_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}$ be the time of the first visit to y and let $h_N(x) = P_x(V_N < V_0)$. By considering what happens on the first step, we can write

$$h_N(x) = p_x h_N(x+1) + r_x h_N(x) + q_x h_N(x-1)$$

Set $h_N(1) = C_N$ and solve this equation to conclude that 0 is recurrent if and only if $\sum_{y=1}^{\infty} \prod_{x=1}^{y-1} q_x / p_x = \infty$ where by convention $\prod_{x=1}^{0} = 1$.

1.72. Consider the Markov Chain with state space $\{0, 1, 2, \ldots\}$ and transition probability

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m+2}\right), \quad \text{para } m \geq 0$$

$$p(m, m-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right), \quad \text{para } m \geq 1$$

and $p(0,0) = 1 - p(0,1) = 3/4$. Find the stationary distribution π.

Soluções.

1.17.

Temos aqui uma cadeia de Markov

$$\{X_n\}_{n \geq 0} \text{ em } S = \{0, 1\}$$

onde 0 em S representa a não posse da TV à cabo e 1, em contrapartida representa a posse da TV à cabo.

Pelos dados do problema, temos que a matriz de probabilidades de transição associada à esta cadeia é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}92 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{pmatrix} \end{array}$$

Estamos interessados na fração ao longo do processo de pessoas com TV à cabo ou seja, queremos determinar π_1, a segunda componente do vetor π que representa a distribuição estacionária. Para tal, seja

$$\pi = (\pi_0, \pi_1)$$

tal que

$$\pi = \pi \mathbb{P} \Leftrightarrow$$

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}92 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}08\pi_0 + 0{,}74\pi_1 \\ \pi_1 = 0{,}92\pi_0 + 0{,}26\pi_1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0{,}92\pi_0 - 0{,}74\pi_1 = 0 \\ 0{,}92\pi_0 - 0{,}74\pi_1 = 0 \end{cases} \sim$$

condição

$$\begin{cases} 0{,}92\pi_0 - 0{,}74\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \overset{L_2 - 0{,}92L_1}{\sim} \begin{cases} 0{,}92\pi_0 - 0{,}74\pi_1 = 0 \\ (0{,}92 + 0{,}74)\pi_1 = 0{,}92 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 = \frac{0{,}92}{0{,}92 + 0{,}74} \quad \text{e} \quad \pi_0 = \frac{0{,}74}{0{,}92 + 0{,}74}$$

Ou seja, $\pi_1 = 0{,}55422 = 55{,}42\%$ é a proporção de pessoas que têm TV ao longo do processo. Comparando este valor com os ocorridos em 2000, temos que nos três anos a porcentagem era maior do que esperado, sendo a diferença mais significativa nos anos 1995 e 2000

1.30.

$(X_n)_{n \geq 0}$ em $S = \{0, 1, 2\}$ uma Cadeia de Markov
$\phantom{(X_n)_{n \geq 0}}$ L C G

Nesse caso,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 2 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{array}$$

No domingo* (específico),

$$\pi_{domingo^*} = (1/3, 1/3, 1/3)$$

a) Pelas equações de Chapmann-Kolgomorov, temos que a fração de bicicletas em cada um dos três lugares na terça-feira* seguinte ao domingo* será dada por

$$\pi_{terça^*} = \pi_{domingo^*} \mathbb{P}^2 =$$

$$= (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 0{,}405 & 0{,}275 & 0{,}32 \\ 0{,}425 & 0{,}355 & 0{,}22 \\ 0{,}35 & 0{,}3 & 0{,}35 \end{pmatrix} = (0{,}3933, 0{,}31, 0{,}2967).$$

b) Usando o mesmo raciocínio, no próximo domingo (domingo**) as frações serão dadas pelas componentes do vetor

$$\pi_{domingo^{**}} = \pi_{domingo^*} \mathbb{P}^7 = \pi_{terça^*} \mathbb{P}^5 = \pi_{terça} \mathbb{P}^2 \mathbb{P}^2 \mathbb{P} =$$

$$= (0{,}3933,\ 0.31,\ 0{,}2967)\begin{pmatrix} 0{,}392787 & 0{,}3058468 & 0{,}2985602 \\ 0{,}39591 & 0{,}307055 & 0{,}296185 \\ 0{,}39375 & 0{,}30721 & 0{,}29834 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}394040852,\ 0{,}306625803,\ 0{,}299333345) \text{ "}$$

---

c) Devemos então encontrar a distribuição estacionária π. Como sabemos,

$$\pi = \pi P \quad e \quad \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \Rightarrow$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}5\pi_0 + 0{,}4\pi_1 + 0{,}25\pi_2 \\ \pi_1 = 0{,}2\pi_0 + 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 \\ \pi_2 = 0{,}3\pi_0 + 0{,}1\pi_1 + 0{,}5\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0{,}5\pi_0 - 0{,}4\pi_1 - 0{,}25\pi_2 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 0{,}2\pi_0 - 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 = 0 \\ 0{,}3\pi_0 + 0{,}1\pi_1 - 0{,}5\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} 0{,}5\pi_0 - 0{,}4\pi_1 - 0{,}25\pi_2 = 0 & L_1 \leftrightarrows L_3 \\ 0{,}2\pi_0 - 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + \\ 0{,}2\pi_0 - 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 = 0 \\ 0{,}5\pi_0 - 0{,}4\pi_1 - 0{,}25\pi_2 = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 & (1) \\ 0{,}2\pi_0 - 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 = 0 & (2) \\ 0{,}7\pi_0 - 0{,}9\pi_1 + 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) $\pi_0 = 1 - \pi_1 - \pi_2$

Sub. em (3) $0{,}7 - 0{,}7\pi_1 - 0{,}7\pi_2 - 0{,}9\pi_1 = 0 \Rightarrow$

$\pi_1 = 0{,}7(1 - \pi_2)/(0{,}7 + 0{,}9)$

Sub em (2).

$$0{,}2(1-\pi_1-\pi_2) - 0{,}5\pi_1 + 0{,}25\pi_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$0{,}2 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{(0{,}7+0{,}9)} + \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{(0{,}7+0{,}9)}\pi_2 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{(0{,}7+0{,}9)} + \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{(0{,}7+0{,}9)}\pi_2 + 0{,}25\pi_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\pi_2 = \frac{\left[(0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}7)/(0{,}7+0{,}9) - 0{,}2\right]}{\left[0{,}25 + \frac{(0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}7)}{(0{,}7+0{,}9)}\right]} \Leftrightarrow$$

$$\pi_2 = \frac{0{,}10625}{0{,}55625} = 0{,}191011236 \Rightarrow$$

$$\pi_1 = 0{,}353932584 \Rightarrow$$

$$\pi_0 = 0{,}455056179$$

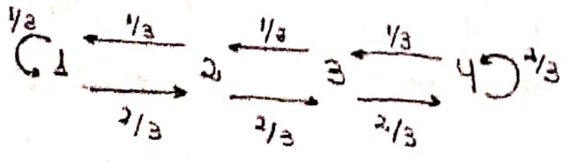
Isto é,

$$\pi = (0{,}455056179, 0{,}353932584, 0{,}191011236)$$

significando que ao longo do processo,

45,51% das bicicletas estarão na biblioteca
35,39% " " " na cafeteria
19,10% " " " na loja de doces.

1.41.



Logo, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S=\{1,2,3,4\}$ é um cadeia de Markov.

a) Algebricamente, temos então que

$$p(i,j) = \begin{cases} 1/3, & i=j=1; \\ 1/3, & j=i-1 \text{ e } 1<i\leq 4; \\ 2/3, & j=i+1 \text{ e } 1\leq i<4; \\ 2/3, & j=i=4; \end{cases}$$

Devemos encontrar a distribuição estacionária π. De,

$$\pi = \pi \mathbb{P} \quad e \quad \sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1 \quad , \text{ temos}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\pi_1 = \pi_1 + \pi_2 \\ 3\pi_2 = 2\pi_1 + 0 + \pi_3 \\ 3\pi_3 = 0 + 2\pi_2 + 0 + \pi_4 \\ 3\pi_4 = 2\pi_3 + 2\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2\pi_1 - \pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 3\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ 2\pi_2 - 3\pi_3 + \pi_4 = 0 \\ 2\pi_3 - \pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \quad L_3 \sim L_3 - (L_2 + L_4 - L \quad \sim$$

$$2\pi_1 - 8\pi_2 + 3\pi_3 - \pi_4$$

$$\begin{cases} 2\pi_1 - \pi_2 = 0 & (1) \Rightarrow \pi_1 = 1/2\,\pi_2 \,; \\ 2\pi_1 - 3\pi_2 + \pi_3 = 0 & (2) \Rightarrow \pi_3 = 2\pi_2 \,; \\ 2\pi_3 - \pi_4 = 0 & (3) \Rightarrow \pi_4 = 4\pi_2 \,; \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 & (4) \Rightarrow 15/2\,\pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{2}{15} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_4 = \frac{8}{15}, \quad \pi_3 = \frac{4}{15} \quad e \quad \pi_1 = \frac{1}{15}.$$

Logo, $\pi = (1/15, 2/15, 4/15, 8/15)$. Ou seja,

1/15 do tempo o processo estará no estado 1
2/15 " " " " " " 2
4/15 " " " " " " 3
" " " " " " 4

1.44.

Devemos encontrar a distribuição estacionária deste processo (π). Sab... que será tal que

$$\pi = \pi P \quad e \quad \sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1 \Rightarrow$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/24 & 7/8 & 1/12 & 0 \\ 1/36 & 0 & 8/9 & 1/12 \\ 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{pmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad e \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 72\pi_0 = 36\pi_0 + 3\pi_1 + 2\pi_2 + 9\pi_3 \\ 8\pi_1 = 4\pi_0 + 7\pi_1 \\ 36\pi_2 = 3\pi_1 + 32\pi_2 \\ 24\pi_3 = 2\pi_2 + 21\pi_3 \\ \pi_0 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 36\pi_0 - 3\pi_1 - 2\pi_2 - 9\pi_3 = 0 \\ 4\pi_0 - \pi_1 = 0 \\ 3\pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ 2\pi_2 - 3\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ 36\pi_0 - 3\pi_1 - 2\pi_2 - 9\pi_3 = 0 \\ 4\pi_0 - \pi_1 = 0 \\ 3\pi_1 - 4\pi_2 = 0 \\ 2\pi_2 - 3\pi_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 \sim L_2 - 9L_3 - 2L_4 - 3L_5 - \quad \sim \begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 & (1) \\ 4\pi_0 - \pi_1 = 0 & (2) \\ 3\pi_1 - 4\pi_2 = 0 & (3) \\ 2\pi_2 - 3\pi_3 = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

De (4),

$\pi_2 = \frac{3}{2}\pi_3$, que com (3) implica em $\pi_1 = 2\pi_3$, que com (2) implica em

$\pi_0 = 1/2\,\pi_3$. Por (1) segue que

$$\left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} + 1\right)\pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\pi_0 = \frac{1}{10}, \quad \pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{10} \quad e \quad \pi_3 = \frac{1}{5}$$

Ou seja,

$$\pi = \left(1/10,\ 2/5,\ 3/10,\ 1/5 \right)$$

Do ponto de vista prático temos que nesse processo natural

$1/10$	do	tempo	teremos	grama
$2/5$	"	"	"	arbustos
$3/10$	"	"	"	pequenas árvores
$1/5$	"	"	"	grandes árvores.

1.46.

Temos duas urnas

i pretas $\qquad\qquad$ $b-i$ pretas

$m-i$ brancos $\qquad\qquad$ $m-b+i$ brancas

Definiu-se a cadeia de Markov

$$\{X_n\}_{n\geq 1} \text{ em } S = \{\max\{0, b-m\}, \ldots, \min\{b, m\}\}$$

com X_n representando o nº de bolas pretas na urna 1 após n mudanças.

a) Temos que computar as probabilidades de transição. Para tal, definamos

$$B_1 = \begin{cases} 0, & \text{se a escolhida da urna 1 é branca;} \\ 1, & \text{" " " " " é preta.} \end{cases}$$

e

$$B_2 = \begin{cases} 0, & \text{se a escolhida da urna 2 é branca;} \\ 1, & \text{" " " " " 2 é preta.} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} p(i,i+1) = \mathbb{P}(B_1=0, B_2=1) = \dfrac{(m-i)}{m} \cdot \dfrac{(b-i)}{m} \\ p(i,i-1) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=0) = \dfrac{i}{m} \dfrac{(m-b+i)}{m} \quad , \text{ para } i \in S \\ p(i,i) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=1) + \mathbb{P}(B_1=0, B_2=0) = \\ \quad = \dfrac{i}{m} \dfrac{(b-i)}{m} + \dfrac{(m-i)}{m} \dfrac{(m-b+i)}{m} = \dfrac{i(b-i)+(m-i)(m-b+i)}{m^2} \end{cases}$$

Para uma melhor organicação, sejam

$$r = \min\{m, b\}$$

$$l = \max\{0, b-m\}$$

Segue então que

$$p(i,i+1) = p_i \quad \text{para } i < r$$

$$p(i,i-1) = q_i \quad \text{para } i > l$$

$$p(i,i) = 1 - p_i - q_i \quad \text{para } l \leq x \leq r.$$

onde

$$p_i = \frac{(m-i)(b-i)}{m^2} \quad e \quad q_i = \frac{i(m-b+i)}{m^2}$$

O que é similar à uma cadeia de morte e nascimentos.

Uma forma de verificar que

$$\pi(i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}}$$

é a distribuição estacionária é verificar que

$$\pi(i)\, p(i,i+1) = \pi(i+1)\, p(i+1,i)$$

supondo que π também satisfaz a condição de balanceamento.
E, de acordo com nossa configuração,

$$\pi(i)\, p(i,i+1) = \pi(i)\, p_i = \frac{\binom{b}{i}\binom{2m-b}{m-i}}{\binom{2m}{m}} \; \frac{(m-i)(b-i)}{m^2} =$$

$$= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \cdot \frac{1}{m^2} \; \frac{b!}{i!\,(b-i)!} \; \frac{(2m-b)!}{(m-i)!\,(2m-b-(m-i))!} \cdot (m-i)\,(b-i) =$$

$$= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \; \frac{1}{m^2} \; \frac{b!}{i!\,(b-i-1)!} \; \frac{(2m-b)!}{(m-i-1)!\,(2m-b-(m-i))!} =$$

$$= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \; \frac{1}{m^2} \; \frac{b!}{i!\,(b-(i+1))!} \cdot \frac{(i+1)}{(i+1)} \cdot \frac{(2m-b)!}{(m-(i+1))!\,(2m-b-(m-i))!} \cdot \frac{(2m-b-(m-(i+1}{(2m-b-(m-(i+1}$$

$$= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \; \frac{1}{m^2} \; \frac{b!}{(i+1)!\,(b-(i+1))!} \cdot \frac{(2m-b)!}{(m-(i+1))!\,(2m-b-(m-(i+1)))!} \; (i+1)\,(2m-b-(m-i-1)$$

$$= \frac{1}{\binom{2m}{m}} \; \frac{1}{m^2} \; \binom{b}{i+1}\binom{2m-b}{m-(i+1)} \; (i+1)(2m-b-m+i+1) =$$

$$= \frac{\binom{b}{i+1}\binom{2m-b}{m-(i+1)}}{\binom{2m}{m}} \; \frac{(i+1)\,(m-b+i+1)}{m^2} = \pi(i+1)\,.\,q_{i+1} = \pi(i+1)\, p(i+1,i)$$

Logo, verificamos que ela é a distribuição estacionária. Ademais disso, tambi

Obs: Tentei encontrá-la sem usar a expressão dada mas não consegui. Usei os resultados

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}, \text{ já que é uma cadeia irredutível},$$

$$p^n(j,i) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \pi(i), \text{ já que a mesma é periódica;}$$

e as equações de balanceamento implicando em

$$\pi(l+i) = \pi(l) \cdot \frac{p_{l+i-1} \cdot p_{l+i-2} \cdots p_{l+1} p_l}{q_{l+i} \cdot q_{l+i-1} \cdots q_{l+2} q_{l+1}}$$

1.52.

1) Notemos que

$$p(i,i) > 0 \quad \forall i \in S$$

o que implica, pelo Lema 1.17, que i tem período 1 $\forall i \in S$. Assim, por definição, a cadeia em estudo é aperiódica.

Ademais, dados $i,j \in S$, $\exists\, n,m > 0$ tais que

$$p^n(i,j) > 0 \quad e \quad p^m(j,i) > 0, \quad \forall i,j \in S,$$

ou seja, os estados da cadeia se comunicam. Assim, por definição, a cadeia é irredutível.

Como a mesma é irredutível e aperiódica, pelo Teorema da Convergência 1.19, segue que

$$\lim_{n\to\infty} p^n(x,y) = \pi(y)$$

Além disso, a cadeia, por completa é fechada $\overset{\text{Teorema 1.7}}{\Longrightarrow}$ todos os estados são recorrentes $\overset{\text{Teorema 1.22}}{\Longrightarrow}$,

$$\pi(y) = \frac{1}{E_y T_y}, \quad \Rightarrow \pi \text{ é única}$$

Obs:

Supondo que

- $i > j$

$$\overset{n}{p}(i,j) > \overset{n-(i-j)}{\underbrace{p(i,i)}_{>0}} \underbrace{p(i,i-1)}_{>0} \underbrace{p(i-1,i-2)}_{>0} \dots \underbrace{p(j+1,j)}_{>0} > 0 \Rightarrow$$

$\exists n$ tal que $p^n(i,j) > 0$ como anunciado anteriormente.

Se $i < j$, pensaríamos da mesma forma, só que com os valores dos est dos não-decrescentes ao longo da seq. de comparação.

Analogamente, pode-se mostrar que $\exists m \geq 0$ t.q. $\overset{m}{p}(j,i) > 0$.

b) Devemos computar a média

$$v = \sum_y y\pi(y) = \lim_{n\to\infty} E_x X_n$$

onde

$$E_x X_n = E[X_n \mid X_0 = x].$$

Devemos recordar que

$$X_n / X_{n-1} = x_{n-1} \sim \text{Binomial}(N, p_{x_{n-1}}) \Rightarrow$$

$$E[X_n / X_{n-1} = x_{n-1}] = N p_{x_{n-1}} = N\left[\frac{(1-w)}{N} x_{n-1} + \frac{v}{N}(N - x_{n-1})\right] =$$

$$= (1-w)x_{n-1} + vN - v x_{n-1} =$$

$$= (1-w-v)x_{n-1} + vN$$

Logo,

$$E[X_n / X_{n-1}] = (1-w-v) X_{n-1} + vN$$

Como temos um modelo discreto com número finito de possíveis valo...
X_n podemos computar

$$E[X_n] = E[E[X_n/X_{n-1}]] = (1-w-v)E[X_{n-1}] + vN$$

Usando essa relação de recorrência chegamos à

$$\begin{aligned}
\underset{x}{E}[X_n] &= (1-w-v)\left[(1-w-v)E[X_{n-2}] + vN\right] + vN = \\
&= (1-w-v)^2 E[X_{n-2}] + (1-w-v)vN + vN = \\
&= (1-w-v)^2\left[(1-w-v)E[X_{n-3}] + vN\right] + vN(2-w-v) = \\
&= (1-w-v)^3 E[X_{n-3}] + vN(1-w-v)^2 + (1-w-v)N + vN = \\
&= (1-w-v)^n E[X_0] + vN\left[1 + (1-w-v) + (1-w-v)^2 + \dots + (1-w-v)^n\right] = \\
&= (1-w-v)^n . x + vN\left[1 + (1-w-v) + (1-w-v)^2 + \dots + (1-w-v)^n\right]
\end{aligned}$$

Como w e v são probabililidades, segue que $|1-w-v| \leq 1$.

Quando $|1-w-v| < 1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} E_x[X_n] = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{(1-w-v)^n}_{\to 0} x + vN\left[1 + (1-w-v) + (1-w-v)^2 + \dots\right]\right] =$$

$$= vN\left[\frac{1}{1-(1-w-v)}\right] = \frac{vN}{w+v} = \frac{v}{w+v}N.$$

- Agora, se $w = v = 1$, teríamos o cenário em que todos os alelos mutam e $p_x = \frac{N-x}{N}$, de tal modo que

$$E[X_n] = E[E[\underbrace{X_n/X_{n-1}}_{\sim \text{Binomial}\left(N, \frac{N-X_{n-1}}{N}\right)}]] = E[N - X_{n-1}] = N - EX_{n-1} = N - [N - EX_{n-2}] =$$

$$= N - N + EX_{n-2} = EX_{n-2} = N - EX_{n-3} = \cancel{N} - \cancel{N} + EX_{n-4} = \begin{cases} N - EX_0, & \text{se n ímpar} \\ EX_0, & \text{se n é par} \end{cases}$$

Ou seja, sendo $w = v = 1$

$$E[X_n] = \begin{cases} N - E[X_0] & \text{, se } n \text{ é impar} \\ E[X_0] & \text{, se } n \text{ é par} \end{cases}$$

E assim,

$$E_x[X_n] = \begin{cases} N - x & \text{, se } n \text{ é impar} \\ x & \text{, se } n \text{ é par} \end{cases}$$

o que implica na não existência de $\lim_{n\to\infty} E_x X_n$, para $w = v = 1$.

1.53.

a) Basta notar que

$$E[X_{n+1} / X_n = x_n] = (x_n+1)\, p_{x_n, x_n+1} + (x_n - 1)\, p_{x_n, x_n-1} =$$

$$= (x_n+1)\frac{(N - x_n)}{N} + (x_n - 1)\frac{x_n}{N} = (x_n+1)\left(1 - \frac{x_n}{N}\right) + (x_n-1)\frac{x_n}{N} =$$

$$= x_n + 1 - \frac{x_n^2}{N} - \frac{x_n}{N} + \frac{x_n^2}{N} - \frac{x_n}{N} = 1 + x_n - \frac{2}{N}x_n = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)x_n.$$

E, portanto,

$$E X_{n+1} = E[E[X_{n+1}/X_n]] = E\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)X_n\right] = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)EX_n$$

Considerando que $X_0 = x$, a estrutura acima se mantém, e teriamos

$$E_x X_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) E_x X_n \overset{\text{Df}}{\Leftrightarrow}$$

$$\mu_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\mu_n$$

PS: Podemos usar $EY = E[E(Y/X)]$ pois ambas as esperanças são finitas e estão bem definid b)

Pela relação anterior, temos que

$$\mu_{n+1} = 1 + (1-2/N)\mu_n$$

Similarmente, teremos

$$\mu_n = 1 + (1-2/N)\mu_{n-1} =$$

$$= 1 + (1-2/N)\left[1 + (1-2/N)\mu_{n-2}\right] = 1 + \left(1-\frac{2}{N}\right) + \left(1-\frac{2}{N}\right)^2 \mu_{n-2} =$$

$$= 1 + \left(1-\frac{2}{N}\right) + \left(1-\frac{2}{N}\right)^2\left(1 + (1-2/N)\mu_{n-3}\right) =$$

$$= 1 + \left(1-\frac{2}{N}\right) + \left(1-\frac{2}{N}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{N}\right)^3 \mu_{n-3} =$$

$$= \left[1 + \left(1-\frac{2}{N}\right) + \left(1-\frac{2}{N}\right)^2 + \dots + \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\right] + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n \mu_0 =$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^n}{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n x = \frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n\left(x - \frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{N}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2/N} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n\left(x - \frac{1}{2/N}\right) = \frac{N}{2} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n (x - N/2).$$

Ou seja,

$$\mu_n = \frac{N}{2} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^n (x - N/2)$$

ra provar que a última vale para todo n, usamos indução finita.

- Para $n=1$

$$\mu_1 = \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\left(x - \frac{N}{2}\right) =$$

$$= \frac{N}{2} + x - \frac{N}{2} - \frac{2x}{N} + 1 =$$

$$= x - \frac{x}{N} - \frac{x}{N} + 1 = x - \frac{x^2}{N} + 1 - \frac{x}{N} + \frac{x^2}{N} - \frac{x}{N} =$$

$$= (x+1)(1 - x/N) + (x-1)(x/N) =$$

$$= (x+1)\, p_{x,x+1} + (x-1)\, p_{x,x-1} = E[X_1 / X_0 = x] \quad \checkmark$$

- Supondo que vale para n, verificaremos para n+1

$$\mu_{n+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\mu_n =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)\left[\frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n\left(x - \frac{N}{2}\right)\right] =$$

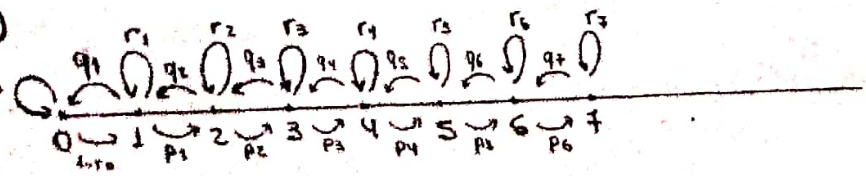
$$= 1 + \left(\frac{N-2}{\cancel{N}}\right)\frac{\cancel{N}}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1}\left(x - \frac{N}{2}\right) =$$

$$= \cancel{1} + \frac{N}{2} - \cancel{1} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1}\left(x - \frac{N}{2}\right) =$$

$$= \frac{N}{2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1}\left(x - \frac{N}{2}\right)$$

Logo, vale para todo n.

1.70



Definimos

$V_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}$ o tempo até a primeira visita à y.

$h_N(x) = P_x(V_N < V_0)$.

Olhando para o primeiro passo,

$$h_N(x) = p_x h_N(x+1) + r_x h_N(x) + q_x h_N(x-1)$$

Reajustando os termos, temos

$$h_N(x) - r_x h_N(x) = p_x h_N(x+1) + q_x h_N(x-1) \Leftrightarrow \qquad x > 0$$
$$(p_x + q_x) h_N(x) = p_x h_N(x+1) + q_x h_N(x-1) \Leftrightarrow$$
$$p_x(h_N(x+1) - h_N(x)) = q_x (h_N(x) - h_N(x-1)) \Leftrightarrow$$

$$h_N(x+1) - h_N(x) = \frac{q_x}{p_x}[h_N(x) - h_N(x-1)]$$

com $h(0) = 0$, pois $P(V_N < V_0 / X_0 = 0) = P(V_N < 0 / X_0 = 0) = 0$.
Sendo $h(1) = c_N$, segue que $h(1) - h(0) = c_N$ e assim,

$$h_N(x+1) - h_N(x) = c_N \prod_{i=1}^{x} \frac{q_i}{p_i}$$

Sabemos também que $h_N(N) = 1$. Logo,

$$1 = h_N(N) - h_N(0) = \sum_{y=1}^{N-1} c_N \prod_{i=1}^{x} \frac{q_i}{p_i} \Rightarrow c_N = \frac{1}{\sum_{y=1}^{N-1} \prod_{x=1}^{y-1} \frac{q_x}{p_x}}$$

E,

$$h(x) = h(x) - h(0) = \sum_{y=1}^{x} c_N \prod_{x=1}^{y-1} \frac{q_x}{p_x}$$

antendo x fixo e fazendo N tender ao infinito, teremos que

$$h(x) = P_x(V_N < V_0) = 0 \Leftrightarrow C_N = \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} \prod_{x=1}^{y-1} \frac{p_x}{q_x} = \infty$$

Nessas condições, teríamos $h(x) = 0 \Rightarrow P_x(V_0 < \infty) = 1$, fazendo com que o estado 0 seja recorrente. Logo, 0 é recorrente se, e somente se,

$$\sum_{y=1}^{\infty} \prod_{x=1}^{y-1} \frac{p_x}{q_x} = \infty \qquad \square$$

1.72.

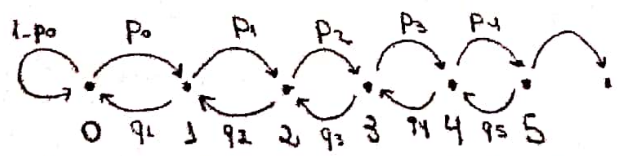
Para simplicidade, seja

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) = p_m \quad , \text{ para } m \geq 0$$

$$p(m, m-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right) = q_m \quad , \text{ para } m \geq 1$$

e $p(0,0) = 1 - p_0$

Pictorialmente, temos



Esta é uma cadeia de Nascimento e morte, então podemos resolver para a dist. estacionária usando as equações de balanceamento detalhado:

4

$$\pi(m)\, p_m = q_{m+1}\, \pi(m+1) \qquad \text{quando } m \geq 0 \Rightarrow$$

$$\pi(m+1) = \frac{p_m}{q_{m+1}}\, \pi(m).$$

Declarando $\pi(0) = c$, segue que

$$\pi(m) = c \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}}$$

Sendo que deveriamos ter

$$\sum_{m \in S} \pi(m) = 1 \qquad \text{segue que}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}} = 1 \iff c = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}}} = \pi(0)$$

e assim,

$$\pi(m) = \pi(0) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}} = \pi(0) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{i+2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{i+1+2}\right)} = \pi(0) \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{i+1}{i+2}\right)\left(\frac{i+4}{i+3}\right)$$

De fato, em função disso, poderiamos estudar quando tal distribuição seria [illegible]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{p_i}{q_{i+1}} < \infty \Longrightarrow \qquad \text{cadeia recorrente positiva}$$

* Ao substituir p_i, q_i pelos seus reais valores, para este exercício, poderíamos simplificar ainda mais, mas não consegui a tempo

1. Suppose that coin 1 has probability 0.7 of coming up heads, and coin 2 has probability 0.6 of coming up heads. If the coin flipped today comes up heads, then we select coin 1 to flip tomorrow, and if it comes up tails, then we select coin 2 to flip tomorrow. If the coin initially flipped is equally likely to be coin 1 or coin 2, then what is the probability that the coin flipped on the third day after the initial flip is coin 1?

2. In Exercise 1, if today's flip lands heads, what is the expected number of additional flips needed until the pattern T, T, H, T, H, T, T occurs?
   1 1 0 1 0 1 1

3. Let $X_i, i \geq 1$ be independent random variables with $p_j = P[X = j], j \geq 1$. If $p_j = \frac{j}{10}, j = 1, 2, 3, 4$, find the expected time and the variance of the number of variables that need be observed until the pattern $1, 2, 3, 1, 2$ occurs.

4. A coin that comes up heads with probability 0.6 is continually flipped. Find the expected number of flips until either the sequencev T, H, H, T or the sequence T, T, T occurs, and find the probability that T, T, T occurs first.

5. A coin that comes up heads with probability p is continually flipped until the pattern T, T, H appears. (That is, you stop flipping when the most recent flip lands heads, and the two immediately preceding it lands tails.) Let X denote the number of flips made, and find $E[X]$.

6. Find the expected number of flips of a coin, which comes up heads with probability p, necessary to obtain the pattern H, T, HH, T, H, T, H.

7. An unfair coin is flipped repeatedly, where $P[H] = p = 1 - q$. Let X be the number of flips until HTH first appears, and Y the number of flips until either H, T, H or T, H, T appears. Show that $E[s^X] = (p^2qp^3)/(1 - s + pqs^2 - pq^2s^3)$ and find $E[s^Y]$.

8. Here is a martingale approach to the question of determining the mean number of tosses of a coin before the first appearance of the sequence H, H, H. A large casino contains infinitely many gamblers $G_1, G_2, \ldots$, each with an initial fortune of \$1. A croupier tosses a coin repeatedly. For each n, gambler G_n bets as follows. Just before the nth toss he stakes his \$1 on the event that the nth toss shows head. The game is assumed fair, so that he receives a total of $\$p^{-1}$ if he wins, where p is the probability of heads. If he wins this gamble, then he *repeatedly* stakes his entire current fortune on heads, at the same odds as his first gamble. At the first subsequent tail he loses his fortune and leaves the cassino, penniless. Let S_N be the cassino's profit(losses count negative) after the nth loss. Show that S_n is a martingale. Let N be the number of tosses before the first appearence of H, H, H; show that N is a stopping time and hence find $E[N]$. Now adopt this scheme to calculate the mean time to the first appearence of the sequence H, T, H.

Modelos Probabilísticos Discretos e Suas Aplicações

Lista 3.

Aluno: Maicon Aparecido Pinheiro

1. Suppose that coin 1 has probability 0.7 of coming up heads, and coin 2 has probability 0.6 of coming up heads. If the coin flipped today comes up heads, then we select coin 1 to flip tomorrow, and if it comes up tails, then we select coin 2 to flip tomorrow. If the coin initially flipped is equally likely to be coin 1 or coin 2, then what is the probability that the coin flipped on the third day after the initial flip is coin 1?

Seja

X_n: v.a. representando o número da moeda que foi usada no n-ésimo lançamento.

Temos que

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = \begin{cases} 0{,}7 & i = j = 1 \\ 0{,}6 & i = 2,\ j = 1 \\ 0{,}3 & i = 1,\ j = 2 \\ 0{,}4 & i = j = 2 \end{cases}$$

Daí, percebemos a dependência de X_n apenas por meio de X_{n-1}, de tal modo que

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ em $S = \{1, 2\}$ é uma cadeia de Markov

Temos, pelo enunciado, que

$$\pi_0 = (1/2, 1/2)$$

e estamos interessados em $\pi_3(1)$. Pelos resultados já conhecidos, temos

$$\pi_3 = \pi_0 P^3 \quad , \text{ onde}$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assim,

$$\pi_1 = [1/2, 1/2] \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,65 , 0,35]$$

$$\pi_2 = [0,65 , 0,35] \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,665 , 0,335]$$

3. finalmente,

$$\pi_3 = [0,665 , 0,335] \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,6665 , 0,3335]$$

E assim, $P(X_3 = 1) = \pi_3(1) = 0,6665$, ou seja, a probabilidade de que a moeda lançada no terceiro dia após o lançamento inicial seja a moeda 1 é de 0,6665.

2. In Exercise 1, if today's flip lands heads, what is the expected number of additional flips needed until the pattern T, T, H, T, H, T, T occurs?

Para tal, sejam

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{se o resultado do n-ésimo lançamento foi cara} \\ 1, & \text{se o " " " " foi coroa.} \end{cases}$$

É fácil ver que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ em $S = \{0,1\}$ é uma cadeia de Markov, cuja matriz de transição de probabilidades é dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Como se trata de uma cadeia irredutível de dois estados, temos que

$$\pi = \left(\frac{0,6}{0,6+0,3} , \frac{0,3}{0,6+0,3} \right) = (2/3, 1/3)$$ é a distribuição

estacionária da cadeia.

gora, começando no estado 0, estamos interessados em determinar o núme esperado de transições até o padrão 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1 (que equivale à T, T, H, T, H, T, T) ocorrer. Isto é, com

$$N(1,1,0,1,0,1,1) = \min\{n \geq 7 : X_{n-6} = 1, X_{n-5} = 1, X_{n-4} = 0, \dots, X_n = 1\}$$

desejamos calcular

$$E[N(1,1,0,1,0,1,1) / X_0 = 0]$$

Para tal, seja $\mu(0,1)$ o nº médio de transições para a cadeia entrar no estado 1, dado que o estado inicial é 0. Temos que

$$\mu(0,1) = 1 + \sum_{j \neq 1} P_{0,j}\, \mu(j,1) =$$
$$= 1 + P_{0,0}\, \mu(0,1) \Rightarrow$$
$$\mu(0,1) = \frac{1}{1 - P_{0,0}} = \frac{1}{0,3}$$

E, similarmente, $\mu(1,0) = 1/0.6$.

Agora, para a cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ associamos uma outra cadeia de Markov correspondente, à qual nos referiremos como a 7-cadeia, cujo estad[o] [em] qualquer tempo é a sequência dos 7 mais recentes estados da cadeia, X_n. Seja $\pi(1,1,0,1,0,1,1)$ a probabilidade estacionária do estado $(1,1,0,1,0,1,1)$. P[or] construção temos que

$$\pi(1,1,0,1,0,1,1) = \pi_1\, P_{1,1}\, P_{1,0}\, P_{0,1}\, P_{1,0}\, P_{0,1}\, P_{1,1} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0,4 \; 0,6 \; 0,3 \cdot 0,6 \; 0,3 \; 0,4$$

Ademais, uma vez que o número médio de transições entre sucessivas visitas d[a] 7-cadeia ao estado 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1 é o inverso da prob. estacionária dest[e] estado, temos que

$E[$ nº de transições entre visitas ao estado $1, 1, 0, 1, 0, 1, 1] =$

$$= \frac{1}{1/2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4}$$

Seja agora $A(i_1, i_2, \dots, i_m)$ o número adicional de transições necessárias até o padrão aparecer, dado que as primeiras m transições da cadeia foram tais que $X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m$.

Consideremos agora se o padrão em questão possui "ciclos", onde dizemos que o padrão $i_1, i_2, \dots, i_k$ tem um ciclo de tamanho j, $j < k$, se a sequência dos seus j finais elementos é a mesma dos seus j primeiros elementos. Isto é, este tem um ciclo de tamanho j se

$$(i_{k-j+1}, \dots, i_k) = (i_1, \dots, i_j), \quad j < k$$

No nosso caso, o padrão é $1, 1, 0, 1, 0, 1, 1$, de modo que o mesmo tem um ciclo de tamanho 2 já que $(1, 1) = (1, 1)$.

Para computarmos o que desejamos, precisamos em primeiro passo entender o resultados para uma situação em que não ocorresse "ciclos".

Caso sem "ciclos": O padrão $i_1, i_2, \dots, i_k$ não tem "ciclos". Por não existir ciclos,

$$E[N(i_1, i_2, \dots, i_k) / X_0 = i_k] = \frac{1}{\pi(i_1, \dots, i_k)}$$, como havíamos provado anteriormente

e, também pelo fato do tempo até o padrão ocorrer ser igual ao tempo até a cadeia entrar o estado i_1 mais um tempo adicional, podemos escrever

$$E[N(i_1, i_2, \dots, i_k) / X_0 = i_k] = \mu(i_k, i_1) + E[A(i_1)]$$

Das duas últimas, temos

$$E[A(i_1)] = \frac{1}{\pi(i_1, \dots, i_k)} - \mu(i_k, i_1)$$

Usando o fato de que

$$E[N(i_1, i_2, \ldots, i_k)/X_0 = r] = \mu(r, i_1) + E[A(i_1)]$$, segue que

$$E[N(i_1, i_2, \ldots, i_k)/X_0 = r] = \mu(r, i_1) + \frac{1}{\pi(i_1, \ldots, i_k)} - \mu(i_k, i_1)$$

onde

$$\pi(i_1, \ldots, i_k) = \pi_{i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{k-1}, i_k}$$

• Caso com "ciclo" (Nossa situação). Suponha que o padrão tem "ciclo" e seja seu maior ciclo de tamanho s. Neste caso o número de transições entre sucessivas visitas da k-cadeia ao estado $i_1, i_2, \ldots, i_k$ é igual ao número adicional de transições da cadeia original até o padrão aparecer dado que a mesma já fez s transições e os resultados $X_1 = i_1, \ldots, X_s = i_s$. Portanto, segue que

$$E[A(i_1, \ldots, i_s)] = \frac{1}{\pi(i_1, \ldots, i_k)}$$

Mas como

$$N(i_1, i_2, \ldots, i_k) = N(i_1, \ldots, i_s) + A(i_1, \ldots, i_s)$$

temos

$$E[N(i_1, i_2, \ldots, i_k)/X_0 = r] = E[N(i_1, i_2, \ldots, i_s)/X_0 = r] + \frac{1}{\pi(i_1, \ldots, i_k)}$$

Podemos assim continuar o mesmo procedimento no padrão $i_1, \ldots, i_s$, continuando a fazê-lo até um que não tenha "ciclos", e aplicar o Caso 1.

Assim, no nosso caso

$$E[N(1,1,0,1,0,1,1)/X_0 = 0] = E[N(1,1)/X_0 = 0] + E[A(1,1)] =$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{1/3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \; 0{,}3 \cdot 0{,}6 \; 0{,}3 \cdot 0{,}4} = 578{,}7$$ e

$$I = E[N(1,1)/X_0=h] = \mu(0,1) + \frac{1}{\pi_1 p_{1,1}} - \mu(1,1)$$

$$= \frac{1}{.3} + \frac{1}{1/3 \cdot .04} = \frac{10}{3} + \frac{30}{4} = \frac{40+90}{12} = \frac{130}{12} = \frac{13}{1.2} = 10.8$$

Logo,

$$E[N(1,1,0,1,0,1,1)/X_0=0] = 589,5$$

é o nº médio de lançamentos adicionais até se obter a sequência T,T,H,T,H,T,T.

3. Let X_i, $i \geq 1$ be independent random variables with $p_j = P[X=j]$, $j \geq 1$. If $p_j = j/10$, $j = 1,2,3,4$, find the expected time and the variance of the number of variables that need be observed until the pattern 1,2,3,1,2 occurs.

Seja T o número de variáveis que serão observadas até o padrão aparecer pela primeira vez. Também, seja T^∞ o número de observações necessárias até o padrão aparecer pela próxima vez dado que ele apareceu.

Seja

$$\underbrace{p = p_1^2 p_2^2 p_3}_{\text{probabilidade do padrão}} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right) = \frac{12}{100000}$$

Temos que

$$p^{-1} = E[T^\infty] = E[T] - E[\underbrace{T_{1,2}}_{\text{"ciclo" do padrão}}]$$

$$= E[T] - (p_1 p_2)^{-1} = E[T] - (2/100)^{-1}$$

Portanto, $E[T] = p^{-1} + (p_1 p_2)^{-1} = \frac{100000}{12} + 50 = 8383,333.$

Agora, desde que $E[I(5)I(8)] = (.1)^3 (.2)^3 (.3)^2$, obtemos que

$$Var(T^{\infty}) = (1/p)^2 - 9/p + 2(1/p)^3 (.1)^3 (.2)^3 (.3)^2 =$$
$$= 6,961943 \times 10^7$$

Também,

$$Var(T_{1,2}) = (.02)^{-2} - 3(.02)^{-1} = 2350$$

e portanto,

$$Var(T) = Var(T_{1,2}) + Var(T^{\infty}) \approx 6.96 \times 10^7$$

PS: Nessa resolução, fiz os passos de maneira direta, já que as explicações detalhadas do porque das passagens são apresentadas na seção 7.9.1. Caso 2 do livro Introduction to Probability Models. Usamos o Caso 2 devido a existência do "ciclo" no padrão 1, 2, 3, 1, 2.

4. A coin that comes up heads with probability 0.6 is continually flipped. Find the expected number of flips until either the sequence T, H, H, T or the sequence T, T, T occurs, and find the probability that T, T, T occurs firs

T, H, H, T   T T T

Agora, temos 2 padrões, A(1) e A(2) e estamos interessados no numero médio até um destes padrões ocorrer, assim como a probabilidade de que A(2) ocorrer primeiro.

Para determinar as quantidades de interesse, seja T(i) o tempo até o padrão A(i) ocorrer, i = 1, 2, e seja T(i, j) o tempo adicional, começando com a ocorrência do padrão A(i), até o padrão A(j) ocorrer, i ≠ j. Vamos começar computando o valor esperado destas v.a.

No nosso caso,

$$E[T(1)] = E[T_T] + E[T_{T,H,H,T}] = \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4} =$$

$$= \frac{10}{4} + \frac{10000}{576} = 19,86$$

$$E[T(2)] = E[T_{T,T,T}] + E[T_{T,T}] + E[T_T] =$$

$$= \frac{1000}{64} + \frac{100}{16} + \frac{10}{4} = \frac{1000+400+160}{64} = \frac{1560}{64} = 24,375$$

e

$E[T(2,1)] = E[T(1)] - E[T_T] = 19,8611 - 2,5 = 17,3611.$

$E[T(1,2)] = E[T(2)] - E[T_T] = 24,375 - 2,5 = 21,875$

Seja agora

$$M = \min_i T(i)$$

e seja

$$P(i) = P\{M = T(i)\}, \quad i = 1,2$$

isto é, $P(i)$ é a probabilidade do padrão $A(i)$ ser o primeiro padrão a ocorrer.

Agora, para cada j derivamos uma equação que $E[T(j)]$ satisfaz, como segue:

$$E[T(j)] = E[M] + E[T(j) - M] =$$
$$= E[M] + \sum_{i \neq j} E[T(i,j)]\, P(i), \qquad j = 1,2.$$

Daí, segue

$j=1 \qquad 19,861 = E[M] + 17,361\, P(2)$

$j=2 \qquad 24,375 = E[M] + 21,875\, P(1)$

sabemos tbm que

$$1 = P(1) + P(2)$$

Assim, resolvendo o sistema acima, temos

$$P(2) \approx 0,4425 \qquad e \qquad E[M] \approx 12,18$$

probabilidade de T,T,T ocorrer primeiro

tempo médio p/ a ocorrência do padrão T,H,H,T ou T,T,T.

3. A coin that come up heads with probability p is continually flipped unt the pattern T, T, H appears. (That is, you stop flipping when the most recent flip lands heads, and the two immediately preceding it lands tails.) Let X denote the number of flips made, and find $E[X]$.

Seja então $\xi_1, \xi_2, \ldots$ uma sequência de v.a. discretas independentes e idênticamente distribuídas de modo que

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & \text{com prob. } p \\ 1, & \text{com prob. } 1-p = q. \end{cases} \quad , \forall i$$

No nosso caso, $E[X]$ denota o número médio de variáveis aleatórias ξ_i que precisamos observar para obter a configuração $1, 1, 0 =$ "T, T, H".
Nesse, a configuração não possui "odds", então devemos notar que $X = j+3$ se e só se a configuração não ocorra dentro dos primeiros j valores, e os próximos 3 valores são $1,1,0$. Isto é,

$$X = j+3 \Leftrightarrow \{X > j, (\xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \xi_{j+3}) = (1,1,0)\}$$

Daí, segue que

$$P(X=j+3) = P\{X>j\} P\{(\xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \xi_{j+3}) = (1,1,0)\} =$$
$$= P(X>j)\, p^*$$

onde

$$p^* = q \cdot q \cdot p = (1-p)^2 p$$

Somando ambos os lados da última equação sob todos os j, segue que

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} P\{X=j+3\} = p^* \sum_{j=0}^{\infty} P(X>j) = p^* E[X]$$

E assim, concluímos que

$$E[X] = \frac{1}{p^*} = 1/[(1-p)^2 p] = [(1-p)^2 p]^{-1}.$$

* comecei a usar a palavra configuração ao invés de padrão, por questão estética.

5. Find the expected number of flips of a coin, which comes up heads with probability p, necessary to obtain the pattern H, T, H, H, T, H, T, H

Consideremos novamente a construção usada no exercício 5.

Agora, $E[X]$ denota o número médio de v.a. ξ_i's que precisamos ...ar até obter a configuração $0,1,0,0,1,0,1,0$ = "H, T, H, H, T, H, T, H". O detalhe agora é que a configuração em questão possui "ciclos".

Seja então $P=(0,1,0,0,1,0,1,0)$ a configuração de interesse e $P_y=(0,1,0,0,1,0,1,0,y)$, uma tal que não possui ciclos. Seja X_y o tempo até a configuração P_y aparecer. Como P_y não possui ciclos, segue do exercício 5 que

$$E[X_y] = \frac{1}{P^* p_y} = \frac{1}{[p^5(1-p)^3]p_y}$$

Dado que o novo padrão ocorre somente depois do original ocorrer, temos que

$$X_y = X + A$$

onde X é o tempo até que o padrão $P=(0,1,0,0,1,0,1,0)$ ocorrer, e A é o tempo adicional após a ocorrência da configuração P até P_y ocorrer. Também seja $E[X_y / i_1, \ldots, i_r]$ o tempo adicional esperado após o tempo r até o padrão P_y aparecer dado que os primeiros r valores são $i_1, \ldots, i_r$. Condicionando em ξ, temos que

$$E[A / \xi = i] = \begin{cases} 1 + E[X_y / 0,1,0,0] & , i=0 \\ 1 + E[X_y / 0,1] & , i=1 \\ 1 & , i=y \\ 1 + E[X_y] & , i \neq 0,1,y \end{cases}$$

Portanto,

$$E[X_y] = E[X] + E[A] =$$
$$= E[X] + 1 + E[X_y/0,1,0,0]p_0 + E[X_y/0,1]p_1 + E[X_y](1-p_0-p_1-p_y)$$
(*)

Mas

$$E[X_y] = E[X(0,1,0,0)] + E[X_y/0,1,0,0] \Rightarrow$$
$$E[X_y/0,1,0,0] = E[X_y] - E[X(0,1,0,0)]$$

e similarmente, temos

$$E[X_y/0,1] = E[X_y] - E[X(0,1)]$$

substituindo as últimas duas relações em (*), temos

$$p_y E[X_y] = E[X] + 1 - p_1 E[X(0,1)] - p_0 E[X(0,1,0,0)]$$

Nos levando à

$$E[X] = p_y E[X_y] + p_1 E[X(0,1)] + p_0 E[X(0,1,0,0)] - 1$$
$$= \frac{1}{p^*} + (1-p)\cdot\frac{1}{p(1-p)} + p\cdot \underset{*}{E[X(0,1,0,0)]} - 1$$
$$= \frac{1}{p^3(1-p)^2} + \frac{1}{p} + p\cdot E[\underset{*}{\underline{X(0,1,0,0)}}] - 1$$

Aplicamos o método novamente para $P' = (0,1,0,0)^t$, já que o mesmo tem ciclos. Nesse caso, teremos,

$$E[X(0,1,0,0)] = \frac{1}{p^2(1-p)} + p_1 E[X(0,1)] + p_0 E[X(0)] - 1 =$$
$$= \frac{1}{p^2(1-p)} + (1-p)\frac{1}{p(1-p)} + p\frac{1}{p} - 1$$
$$= \frac{1}{p^2(1-p)} + \frac{1}{p}$$

Daí,

$$E[X] = \frac{1}{p^5(1-p)^3} + \frac{1}{p} + p\left(\frac{1}{p^3(1-p)} + \frac{1}{p}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{p^5(1-p)^3} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2(1-p)} + 1 - 1 =$$

$$= \frac{1}{p^5(1-p)^3} + \frac{1}{p^2(1-p)} + \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1 + p^3(1-p)^2 + p^4(1-p)^3}{p^5(1-p)^3} \quad //$$

7) An unfair coin is flipped repeatdly, where $P[H] = p = 1-q$. Let X be he number of flips until HTH first appears, and Y the number of flips until either H, T, H or T, H, T appears. Show that

$$E[s^X] = \frac{(p^2 q s^3)}{(1 - s + pqs^2 - pq^2 s^3)}$$

and find $E[s^Y]$.

Considerando que o evento HTH não aparece nos n primeiros lançamentos então aparece nos próximos três, encontramos que

$$P(X > n)\, p^2 q = P(X = n+1)\, pq + P(X = n+3)$$

pois,

$$\{X > n, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}) = (0, 1, 0)\} = \{X > n, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}) = (0,1,0), \xi_n = 0\} \cup$$
$$\{X > n, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}) = (0,1,0), \xi_n = 1\} =$$

$$= A \cup [\{X > n, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}) = (0,1,0), \xi_{n} = 1, \xi_{n-1} = 0\} \cup \{X > n, (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}) = (0,1,0), \xi_n = 1, \ldots]$$

$$= A \cup B \cup C$$

Assim,

$$P(X>n)p^2q = P(A)+P(B)+P(C) =$$
$$= p\,P\{X=n+3\} + P\{X=n+1\}qp + q\,P\{X=n+3\} =$$
$$= P\{X=n+1\}qp + P\{X=n+3\}$$

Multiplicando ambos os lados por s^{n+3} e somamos em todos os n para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)\,p^2q\,s^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n+1)pq\,s^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n+3)\,s^{n+3} \Leftrightarrow$$

$$p^2qs^3 \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)s^n = pqs^2 \sum_{n=1} P(X=n)\,s^n + \underbrace{\sum_{n=3} P(X=n)s^n}_{E[s^X]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-E(s^X)}{1-s}\,p^2qs^3 = pqs^2\,E(s^X) + E(s^X) \Leftrightarrow$$

$$p^2qs^3 - p^2qs^3\,E(s^X) = E(s^X)\left[(1+pqs^2)(1-s)\right] \Leftrightarrow$$

$$E(s^X)\left[1-s+pqs^2-pqs^3+p^2qs^3\right] = p^2qs^3 \Leftrightarrow$$

$$E[s^X] = \frac{p^2qs^3}{[1-s+pqs^2-\underbrace{(1-p)}_{q}pqs^3]} \Leftrightarrow$$

$$E[s^X] = \frac{p^2qs^3}{[1-s+pqs^2-pq^2s^3]} \quad //$$

Seja agora Z o tempo até que a configuração THT aparece primeiro, então $Y=\min\{X,Z\}$. Temos agora que

$$P(Y>n)p^2q = P(X=Y=n+1)pq + P(X=Y=n+3) + P(Z=Y=n+2)p$$
$$P(Y>n)q^2p = P(Z=Y=n+1)pq + P(Z=Y=n+3) + P(X=Y=n+2)q$$
$$P(Y>n)(p^2+q^2) = P(Y=n+1)pq + P(Y=n+3) + pP(\text{[illegible]}$$

Multiplicando ambos os lados s^{n+1} e somando em todos os n, segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y>n)s^{n+1}(p^2+q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n+1)pq s^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n+3)s^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(p P(Y=n+2)s^{n+1} + (q-p)P(\dots\right.$$

$$s(p^2+q^2)\frac{1-E[s^Y]}{1-s} = pq\,\mathbb{E}(s^Y) + s^{-2}\mathbb{E}(s^Y) + ps^{-1}\mathbb{E}(s^Y) + (q-p)s^{-1}\mathbb{E}(s^X) \Leftrightarrow$$

$$s(p^2+q^2) - s(p^2+q^2)E[s^Y] + (p-q)s^{-1}\mathbb{E}(s^X) = E(s^Y)\left[(pq+s^{-2}+ps^{-1})(1-s)\right] \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}[s^Y]\left(pq - pqs + s^{-2} - s^{-1} + ps^{-1} - ps^{-2} + s(p^2+q^2)\right) = s(p^2+q^2) + (p-q)s^{-1}E(s^X) \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}[s^Y] = \frac{s(p^2+q^2) + (p-q)s^{-1}\mathbb{E}[s^X]}{(pq - pqs + s^{-2} - s^{-1} + ps^{-1} - ps^{-2} + s(p^2+q^2))} \quad //$$

3. Here is a martingale approach to the question of determining the mean number of tosses of a coin before the first appearence of the sequence H, H, H. A large casino contains infinitely many gamblers $G_1, G_2, \dots$, each with an initial fortune \$1. A croupier tosses a coin repeatedly. For each n, gambler G_n bets as follows. Just before the n-th toss he stakes his \$1 on the event that the nth toss show head. The game is assumed fair, so that he receives a total of $\$p^{-1}$ if he wins, where p is the probability of heads. If he wins his gamble, then he repeatedly stakes his entire current fourtune on heads, at the same odds as his first gamble. At the first subsequent tail he loses his fortune and leaves the cassino, penniless. Let S_N be the cassino's profit (losses count negative) after the nth loss. Show that S_N is a martingale. Let N be the number of tosses before the first appearence of H, H, H; show that N is a stopping time and hence find $\mathbb{E}[N]$. Now adopt this scheme to calculate the mean time to the first appearence of the sequence H, T, H.

Desde que o jogo é justo, $E(S_{n+1}|S_n) = S_n$. Também, $|S_n| \leq 1+2+\dots+n = \infty$. Portanto S_n é um martingal. A ocorrência do evento $\{N=n\}$ depende apenas das saídas dos lançamentos da moeda até (inclusive) o mesmo, portanto N é um tempo de parada.

Uma coroa aparece no tempo $N-3$, seguido de três caras. Portanto os jogadores $G_1, G_2, \dots, G_{N-3}$ perderam seu capital inicial no tempo N, enquanto G_{N-i} tiveram $i+1$ rodadas de sucesso para $0 \leq i \leq 2$. Portanto, $S_N = N - (p^{-1} + p^{-2} + p^{-3})$, depois de alguns cálculos. É fácil checar que N satisfaz as condições do "optional stopping theorem", e segue que $E(S_N) = E(S_0) = 0$, o que é o mesmo que dizer que $E[N] = p^{-1} + p^{-2} + p^{-3}$.

Para o caso HTH, basta reprogramar as ações dos jogadores como segue. Se eles vencem em suas primeiras apostas, eles apostam sua fortuna atual em coroas, voltando depois à cara. Nesse caso, $S_N = N - (p^{-1} + p^{-2}q^{-1})$, onde $q = 1-p$, portanto $E[N] = p^{-1} + p^{-2}q^{-1}$.

PS: A resolução deste exercício foi construída com auxílio da resolução desse mesmo exercício disposta no livro "One Thousand Exercises in Probability", por G. Grimmett e D. Stirzaker".