Estamos interessados no estudo de certas características (variáveis) de uma dada população.

- variáveis
  - Qualitativas
    - Nominal: gênero, cor dos olhos
    - Ordinal: classe social, grau de inst..
  - Quantitativas
    - Discretas: nº de filhos, nº de TV's.
    - Contínuas: peso, altura

Para o entendimento de uma v., observamos um ~~amostra~~ conj. de vari (amostra)

$$x = \{ x_1, \dots, x_n \}$$

Caso essas sejam contínuas, podemos computar

- Medidas de ~~t~~endência central

  - $\bar{x} = \sum x_i / n$

  - mediana: $Md(x)$: o valor que ocupa a pos. central dos dados ordenados

  - moda: $Mo(x)$: vlr + freq.

Percentil. de ordem $p \cdot 100\%$, $p \in (0,1)$ é o valor de um cjto de dados ordenados que ocupa a posição $p \times (n+1)$.
- $p_{0,50} = Md(x)$
- p_{e}.

- Medidas de ~~dispersão~~ variabilidade: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = DM(x)$

$$Var(x) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - n\bar{x}^2$$

Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$x + k = \{x_1 + k, x_2 + k, \dots, x_n + k\} \text{ e}$$

$$x \cdot k = \{x_1 \cdot k, x_2 \cdot k, \dots, x_n \cdot k\}$$

Daí

$$Me(x+k) = Me(x) + k \qquad Me(xk) = k\,Med(x)$$

$$Var(x+k) = Var(x) \qquad Var(kx) = k^2 Var(x).$$

- Qdo muitos dados, usual o agrupamento (às vezes tbm pelo ind. em classes)

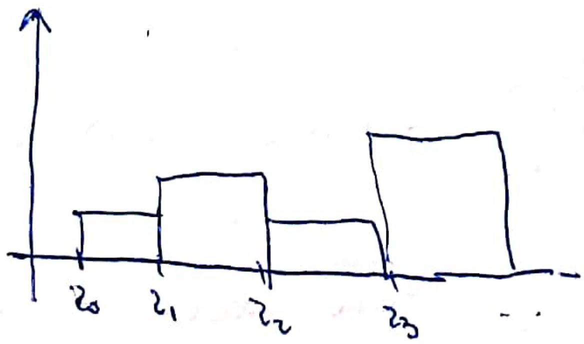
Classes	Tabul.	N_i	s_i	$f_i = N_i/n$	F_i
$z_0 \vdash z_1$	□ T	6	$z_0+z_1/2$	N_1/n	N_1/n
$z_1 \vdash z_2$	□ ⊦	5	$z_1+z_2/2$		$N_1/n + N_2/n$
$z_3 \vdash z_4$	...	⋮	$z_1+z_3/2$		...
⋮	...				
$z_{r-1} \vdash z_r$	...		$z_r+z_{r-1}/2$		1
		n			

N_i = freq. absoluta da classe i

s_i = pto médio " " "

f_i : freq. rel. da " " "

F = freq. acumulada



- $media(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i \cdot s_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} f_i s_i$

Classes	N_i	s_i	f_i
0 ⊢ 5	360	2,5	0,606
5 ⊢ 10	165	7,5	0,278
10 ⊢ 15	47	12,5	0,079
15 ⊢ 20	17	17,5	0,029
20 ⊢ 25	5	22,5	0,008
	594	~~1,000~~	1,000

Class	N_i	s_i	f_i	h_i
0 ⊢ 2	194	1	0,327	$h_i = f_i / \Delta_i = 0{,}327/2$
2 ⊢ 4	115	3	0,194	⋮
4 ⊢ 6	100	5	0,168	
6 ⊢ 8	70	7	0,118	
8 ⊢ 12	75	10	0,126	
12 ⊢ 25	40	18,5	0,067	
	594		1	

$$\bar{x}^* = \frac{n_1 s_1 + \dots + n_r s_r}{n} = f_1 s_1 + \dots + f_r s_r = \sum f_i s_i$$

$$s^{*2} = \frac{n_1 (s_1 - \bar{x}^*)^2 + \dots + n_k (s_k - \bar{x}^*)}{n} = \sum_{i=1}^{r} f_i (x_i^* - \bar{x}^*)^2$$

$$s^* = \sqrt{s^{*2}}$$

$$moda(x) = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} d$$

l: limit inf da classe modal

Δ_1: dif. entre a freq. da classe modal e da class. im. anterior

Δ_2: .. - - - - .. posterior

d: amplitude da classe modal.

~~Mediana~~ Posic. da classe mediana: $p = \frac{n+1}{2}$ → classe mediana (ver freq. acumula)

$$Md(x) = l_{inf} + \left(\frac{n/2 - F_{ac\,ant.}}{N_i}\right) d$$

freq. ante

$$Q_1 = lim_i + \left(\frac{n/4 - F_{ac.ant}}{N_i}\right) d$$

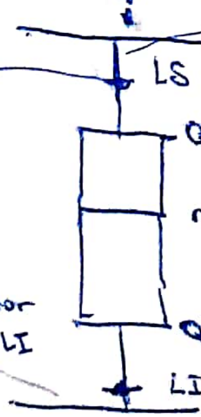
$$Q_3 = lim + \left(\frac{3n/4 - F_{ac.a}}{N_i}\right) d$$

, Box-Plot: É um tipo de gráfio p/ descrever a dist. dos dados que é construido com Q_1, Q_3, mediana e valores extremos

no caso deles, LS é o bigode

$LS = Q_3 + 1{,}5\, DQ$ $= Q_3 - Q_1$

máx. maior valor menor que LS



Q_3

med

Q_1

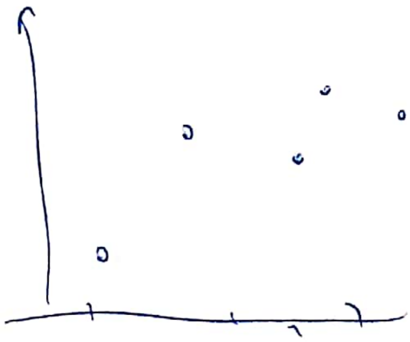
minimo. menor valor maior que LI

$LI = Q_1 - 1{,}5\, DQ$ $= Q_3 - Q_1$

Diag. de Dispersão:

representado dos val. observados de duas (ou mais) v. quantitativas num mesmo gráfico. Um dos obj. é verificar exis. de poss. relaç. funcional entre variáveis em estudo

- idade vs altura
- tempo de estudo e nota na prova



X	3	7	2	1,5	12
Y	4,5	6,5	3,7	4	9,3

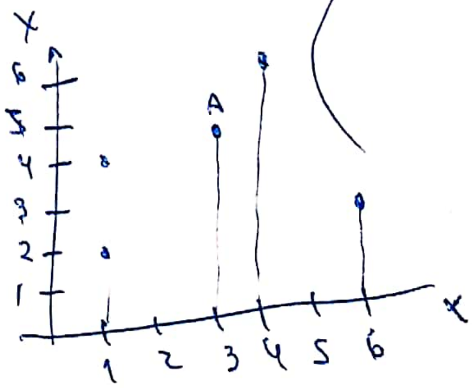
$\bar{X} = 5,1$, $\bar{Y} = 5,6$, $\sum x_i^2 = 208,25$

$\sum y_i^2 = 178,68$

$\sum x_i y_i = 184$

- Exemplo aula X: anos experiência Y: vendas

	X	Y
A	3	5
B	1	2
C	4	6
D	6	3
E	1	4



$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\, DP(X)\, DP(Y)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n\, DP(X)\, DP(Y)}$$

1. Revisão de Prob.

- Método p/ quantificar o quão plausível é a ocorrência de algum acontecimento

Def: Um experimento é aleatório se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente os resultados.

Def: Denominamos espaço amostral o conj. de todos os resultados possíveis de um exp. aleat., e denot. por Ω.

Def: $A \subset \Omega$ é chamado evento.

Em geral, associamos prob. aos eventos de interesse. Sendo assim, precisamos antes de mais nada construir um cjto que contenha os eventos de interesse. É suficiente pensar em tal como uma subcol. $\mathcal{F}$ de todos os subcjtos de Ω. Esta subcoleção deve ter algumas prop.

Def: Uma col. $\mathcal{F}$ de subcjtos de Ω é dita σ-álg. se satisfaz as seg. cond.

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$

c) Se $A_1, A_2, \dots$ em $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Agora, para cada $A \in \mathcal{F}$, vamos associar $P(A)$, o qual ind. a prob. de A ocorrer.

6. O evento em questão ocorrerá com a máq do direita se ela for a selecionada na escolha $2n-k+1$, e nas $2n-k$ escolhas anteriores ela aparecer n vezes (em qqer ordem), e a da esq. $n-k$ vezes. A prob. disto é pois

$$\binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k+1)}$$

Como isso tbm pode oc. com a do esquerda, por simetria, a prob. desej. é

$$2\binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k+1)} = \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)}, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

* Os demais são fáceis!!!

- Reunião às 15hs
- Aula às 20hs

Def: Dado um esp. amost. Ω e uma σ-álg. $\mathcal{F}$, uma med. de prob é uma função $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ t.q.

i. $\mathbb{P}(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{F}$

ii. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Ex: Dado honesto

$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

$$A \in \mathcal{F} \to \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$$

i) $\frac{|A|}{6} \geq 0$ pois $|A| \geq 0$

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6} = \frac{6}{6} = 1$

iii) $|A_1 \cup \ldots A_n \cup \ldots|$

$= \sum |A_i| \Rightarrow$

$\mathbb{P}(\cup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)$

Propriedades da Prob:

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \to \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

3. $A, B \in \mathcal{F}$, com $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

4. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$

5. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

6. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

6.1. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Em geral

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\} \\ |I| = i}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)$$

Def: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um esp. Sejam A e B ev. em $\mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(B)>0$. A prob. cond. de A dado B é def por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Da def. segue

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)$$

Mais geral, temos o dito Regra do Produto:

$$\mathbb{P}(A_1\cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$$

Teo. Prob. Total: Sejam $A_1, \dots A_n$ ev. disj. em Ω, dados em $\mathcal{F}$, tais que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\mathbb{P}(A_i)>0\ \forall i$. Então

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i).$$

Teo. de Bayes: Sejam $A_1, \dots, A_n$ e B eventos em $\mathcal{F}$, com $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$, $\mathbb{P}(A_i)>0\ \forall i$, $\mathbb{P}(B)>0$ e $B\subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Então

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}$$

Independência: $A_1, A_2, \dots, A_n$ são independentes se

$\forall B\subseteq\{1,\dots,n\}$, $|B|\geq 2$, $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in B} A_j) = \prod_{j\in B}\mathbb{P}(A_j)$ — nº de igual a serem verificados: $2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1}$

Indep. condicional: $A_1 \dots A_n$ são cond. ind. dado B se p/ toda subcol. $A_{i_1}, \dots A_{i_k}$, $1\leq k\leq n$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|B) = \mathbb{P}(A_{i_1}|B)\dots\mathbb{P}(A_{i_k}|B)$$

Para caracterizar a distrib. de uma v.a. X basta determinar sua f.d.a.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

__Def:__ Uma v.a. X é contínua se F_X é contínua.

De modo equiv., X tem dist. contínua se $\mathbb{P}(X = x) = 0 \;\; \forall x \in \operatorname{Im} X$.

Em particular, são úteis p/ modelar variáveis que tomam val. em interv. da reta, variáveis que podem, a princípio, var. q. podem ser aferidos em ~~qq~~ grau de precisão: comprimento, área, volume, distância, tempo, massa e peso, carga, tensão, corrente, velocidade, ...

__Def:__ X é absolutamente contínua se $\exists\, f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.q.

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\, ds$$

Ex:

$F_X(t) = (1 - e^{-t})\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$

Nesse caso,

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x).$$

$f(x)$ é dita função densidade da v.a. X.

Analog.

Seja X um v.a. cont.

__Def:__ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é dita uma função densidade de prob. de X se

a) $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \operatorname{Im} X$

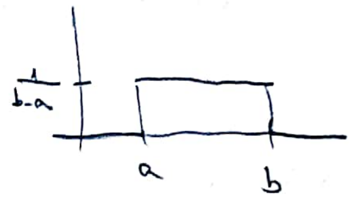
b) $\int_{\operatorname{Im} X} f(x)\, dx = 1$

c) $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$ p/ $A \subseteq \operatorname{Im} X$.

1. Uniforme

X é dist. segundo o modelo uniforme no intervalo (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ se sua densidade é dada por

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(t)$$

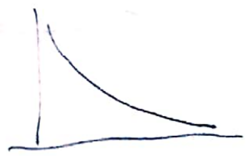


Notação: $X \sim U(a,b)$. Resulta que $\mathbb{E}X = \frac{b+a}{2}$, $\operatorname{Var} X = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2. Exponencial

X é dist. segundo o mod. exponencial de parâmetros $\lambda > 0$ se sua densidade é dada por

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$



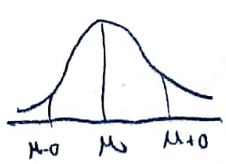
$\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $\operatorname{Var} X = 1/\lambda^2$. Notação: $X \sim Exp(\lambda)$

Obs: Falta de memória $\mathbb{P}(T > t+s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$

3. Normal.

Diz que X é dist. seg. o mod. normal de parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ se

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(a)$$



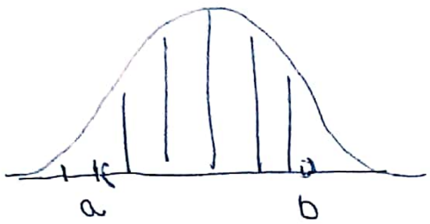
$\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim Bin(n, p)$

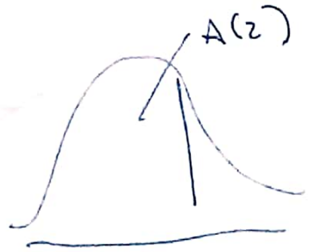
$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(a - 1/2 \leq Y \leq b + 1/2\right)$$

$$= P\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$



$$P(X = a) \approx P\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{a - 1/2 - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{a + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$



2 - 40 pontos são escolhidos, indi e ao acaso do intervalo $[0,1]$. Seja X o nº de pontos que pertencem a $[0,c]$, $0 < c < 1$. Determine $P(X = 3)$ e $P(X \leq 17)$.

II. O temp, em minutos é T com

$$f(t) = \frac{1}{3} e^{-1/3 t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

$$P(T \leq 1 / T \leq 2) = \frac{P(T \leq 1, T \leq 2)}{P(T \leq 2)} = \frac{P(T \leq 1)}{P(T \leq 2)} = \frac{1 - e^{-1/3}}{1 - e^{-2/3}}$$

Se $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{(Normal padrão)}$$

Basta ver que $P(Z \le t) = P(X \le \mu + t\sigma)$. Daí

$$f_Z(t) = f_X(\mu + t\sigma) \times \sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{((\mu+t\sigma)-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot \sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t).$$

Diz-se que Z tem dist. normal padrão

4. Gama: $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

$$f_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Casos Particulares

$a = 1 \Rightarrow f_X(t) = be^{-bt} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t)$ expon.

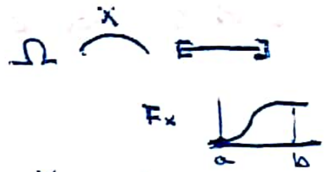
$EX = \alpha/\beta \quad \text{Var}\, X = \alpha/\beta^2.$

* Aproximação da Binomial pela normal

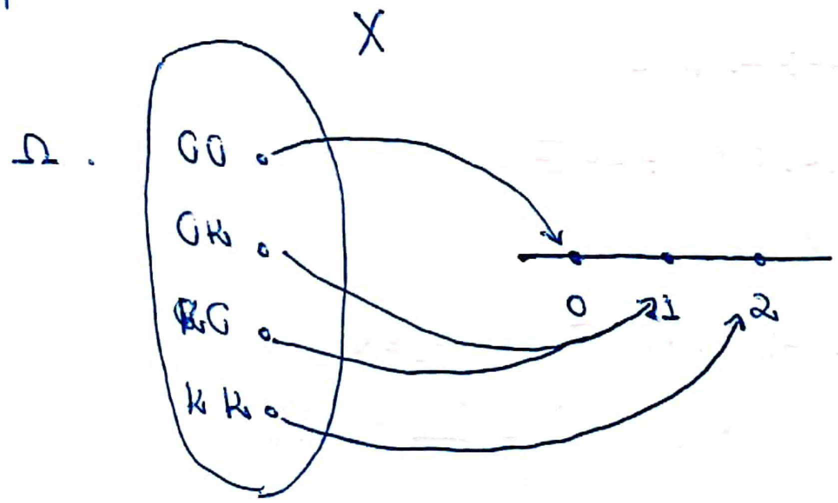
Por vezes, nosso interesse está numa medida associada ao experimento aleat.

Def: Uma variável aleatória X em um esp. de prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q.

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$



Exemplo:



X: nº de coroas

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{CC\}) =$

$\mathbb{P}(X=1) = \quad \cdots \quad =$

$\mathbb{P}(X=2) = \quad =$

$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j \leq k} \mathbb{P}(X=j)$

x	0	1	2
$p_X(x)$	pq	$p(1-q) + (1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Nesse caso, X assume os valores em $\{0,1,2\}$, um cjto enumerável (mais do que isso, finito).

Def: As variáveis aleatórias que assumem valores em um cjto finito ou infinito enumerável são chamadas de <u>discretas</u> e aquelas que assumem valores em um inter. da reta são chamadas <u>contínuas</u>.

- Uma vez que as v.a. dependem do ~~resultado aleatório~~ mod. prob., há uma descrição em termos de prob. dos val. assumidos pela mesma. Para tal,

- Como usual, começamos com um experimento aleatório modelado por uma medida de probabilidade em um dado espaço amostral Ω. De modo mais preciso, associamos à um experimento aleatório um modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lembrando que

  - Ω (esp. amostral) é o cjto de todos os res. possíveis;
  - $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de eventos de Ω;
  - $\mathbb{P}$ é uma probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$, i.e.,

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$$
$$A \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}(A)$$

tal que a) $\mathbb{P}(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{F}$

b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

c) $A_1, A_2, \dots$ em $\mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

<u>Exemplo</u>: Lança-se duas moedas de maneira ind. A primeira resulta em cara com prob. p e a segunda com prob. q, $0 < p < 1$ e $0 < q < 1$.

Nesse caso,

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{C, K\}, \ i = 1, 2\};$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \ \text{e}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega} \mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$$

com $\mathbb{P}_1(\omega_1) = \begin{cases} p, & \text{se } \omega_1 = C \\ 1-p, & \text{se } \omega_1 = K \end{cases}$ e $\mathbb{P}_2(\omega_2) = \begin{cases} q, & \text{se } \omega_2 = C \\ 1-q, & \text{se } \omega_2 = K \end{cases}$

Def: A função dist. acumulada da v.a. X é a função

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}),\ x \in \mathbb{R}$$

Obs: • X é contínua se sua f.d.a é contínua.

• A v.a. X é discreta se assume valores em um cjto finito ou enumerável $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. A função

$$p(x) = P(X = x) \text{ é chamada f. de prob. de } X$$

• A v.a. X é (absol.) contínua se existe uma função $f_X(x) \geq 0$ t.q.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

e é dita função densidade de probab. de X. Nesse caso

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

Def: A esperança (média, valor esperado) de uma v.a. X é def. por

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x P(X = x)\ , & \text{se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\ , & \text{se } X \text{ é contí. com dens. } f. \end{cases}$$

▷ P/ que função à valores reais g : $Y=g(X)$

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_x g(x) \mathbb{P}(X=x), & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx, & X \text{ cont. c/ dens. } f \end{cases}$$

▷ $\operatorname{Var} X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$.

Principais modelos discretos

1. Uniforme.

X é dist. seg. o mod. UNIFORME em $\mathcal{X}_X = \{x_1, \dots, x_k\}$ se tem f.p dada por

$$f_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{k}, \text{ para } i = 1, \dots, k$$

$X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_k\})$. (Dado)

2. Bernoulli

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $0 \leq p \leq 1$ se tem f. de prob. dada por

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

X é a função indicadora da ocorr. de sucesso em um ensaio de Bernoulli

3. Binomial

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $n \geq 1$ e $0 \leq p \leq 1$ se

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \{0, \dots, n\}$$

Obs: Seleciona-se n bolas ao acaso e com reposição de uma urna com N > n bolas, M vermelhas e N-M brancas. Se X o nº de bolas verm. na am. X ∼ Bin (n, M/N). E se forem sem reposição

4. Hipergeométrica

X ∼ HG (N, M, n) se

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{x}} \quad , x \in \{\max(0, n-N+M), \dots, \min(n, M)\}$$

5. Geométrica

X ∼ Geo (p) se

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1}\, p \quad , x \in \{1, 2, \dots\}$$

" Nº de ensaios até o primeiro sucesso "

6. Binomial Negativa

X ∼ BN (r, p) se

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}\, p^r \quad , x \in \{r, r+1, \dots\}$$

7. Poisson

X ∼ Poi (λ) se

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} \quad , x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

" contagem de eventos raros "

(Aula 22)

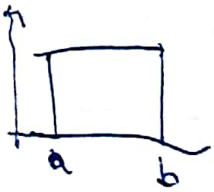
$X \sim$ Modelo	$f_X(x)$	$E(X)$	$Var(X)$
1. $\mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$	$1/n$	$\sum x_i/n$	$\sum x_i^2/n - (\sum x_i/n)^2$
2. Bernoulli (p)	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
3. Binomial (n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
4. Hiperg (N, M, n)	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$n\frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
5. Geom (p)	$(1-p)^{x-1} p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
6. BN (r,p)	$\binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r} p^r$	r/p	$r(1-p)/p^2$
7. Poisson (λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	λ	λ

Principais Modelos em Tempo Contínuo.

1. Uniforme

$X \sim \mathcal{U}(a,b)$ sse $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ se

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(t)$$



$EX = \frac{b+a}{2}$

$Var X = \frac{(b-a)^2}{12}$

2. Exponencial

$X \sim Exp(\lambda)$ se $\lambda > 0$, se

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

$EX = 1/\lambda$, $Var X = 1/\lambda^2$

Obs: Falta de memória:

$$P(T > t+s \mid T > t) = P(T > s)$$

3. Normal

~~Diz-se que X tem~~ dist. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, se

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) \qquad EX = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{(Normal padrão)}$$

• Basta ver que $P(Z < t) = P(X < \mu + t\sigma)$ Daí

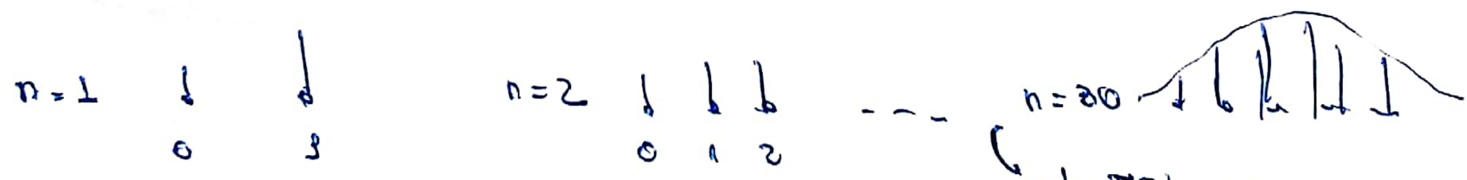
$$f_Z(t) = f_X(\mu + t\sigma) \times \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(t)$$

4. Gama. $X \sim Gama(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ se

$$f_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \qquad \text{se } \alpha = 1,\ X \sim Exp(\beta)$$

$EX = \alpha/\beta$, $Var X = \alpha/\beta^2$

Aprox. da Binomial pela Normal



pelo TCL uma vez que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$