2ª, 4-3-2013

MAE-5712: Percolação

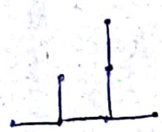
Conectividade em redes aleatórias

$\underbrace{\text{redes aleatórias}}$

↓

subrede de uma rede (grafo) regular não-aleatória

Alguns elos removidos



. . .

Para cada elo e de E, lançamos uma moeda de forma indep. p/ decidir se e será mantido ou removido

Moeda: prob. cara $= p \in (0,1)$

↳ no elo e: lançamento der cara ⇒ mantém o elo e

lançamento der coroa ⇒ removemos o elo e

Rede/grafo (~~inicial~~ finito) ~~fora~~ inicial: retângulo $m \times n$ em $\mathbb{Z}^2$

$G = (V, E)$ → conectado

↓

vértices/sítios $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : |x_1| \leq n, |x_2| \leq m\}$

$\|x\| = |x_1| + |x_2|$

$x = (x_1, x_2)$

elos/arestas $\{e = (x,y),\ x, y \in V : \|x-y\|_1 = 1\}$

Após o sorteio: $G' = (V', E')$ → subgrafo aleatório de G.

$E' = \{$elos de E que são mantidos após o sorteio$\}$

$\cdot y$

x

$\rightarrow$ prob. subjacente

$P_p(x \leftrightarrow y)$

$\downarrow$

x e y conectados em G'

$m = n = 2$

Com m, n finitos

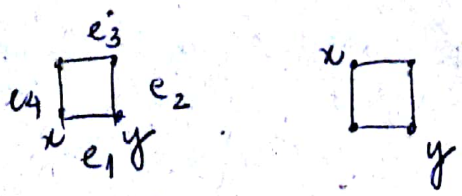
$P_p(x \leftrightarrow y)$ é um polinômio em p

Dado um evento qualquer A,

$\cancel{A}$ $\equiv$ {conf's de elos abertos / fechados onde A se realiza}

$m = n = 2$

$A_i = \{e_i$ está aberto$\}$

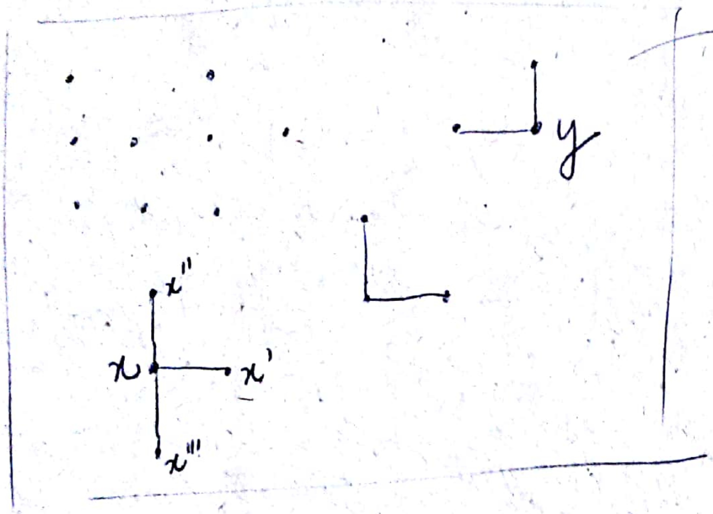


$$P(x \leftrightarrow y) = P\left(A_1 \cup \{A_2 \cap A_3 \cap A_4\}\right)$$

Em vez do evento $\{x \leftrightarrow y\}$, vamos considerar o aglomerado da origem.

Após o sorteio, G' não é necessariamente conectado. por elos presentes/abertos

V fica particionado em componentes conexas.

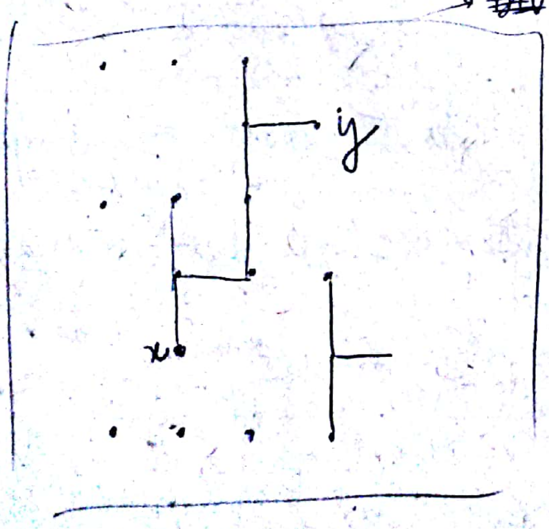


Diversos componentes unitários

aglomerado/cluster

Dado $x \in V$, seja C_x o componente conexo de G' contendo x.

No exemplo, $C_x = \{x, x', x'', x'''\}$



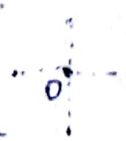
Nesta configuração, $C_x \ni y$.

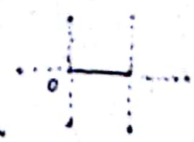
$C_0 = C =$ aglomerado da origem

$|C| =$ tamanho do aglomerado de origem

$|C_x|$: distr. não depende de x (no sist. c/ $m = n = \infty$).

$|C|$ = uma variável aleatória com valores inteiros positivos.

$P_p(|C|=1) = P_p\Big($  $\Big) = (1-p)^4$

$P_p(|C|=2) = P_p\Big($  e + 4 possibilidades$\Big) =$

$= 4p(1-p)^6$

$P_p(|C|=k)$ pode ser calculado para k não muito grande

Interesse na situação em que m, n grandes, k grande

Vamos considerar, de início, o modelo em que

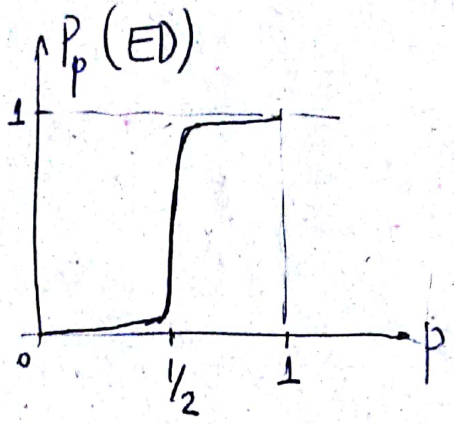
$m=n=\infty$ $\to$ modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$.

$\to$ mais genericamente, em $\mathbb{Z}^d$.

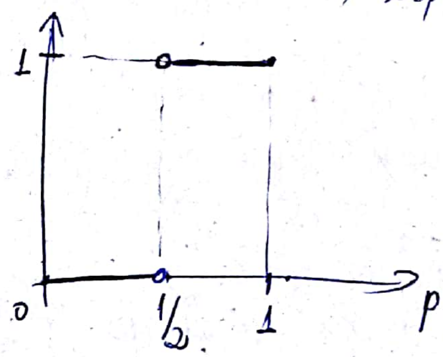
Outros eventos de interesse:

$\{0 \leftrightarrow$ fronteira do sistema$\}$

$ED = \{$algum sítio x do lado direito da fronteira está conectado a algum sítio y do lado ~~direito~~ esquerdo da fronteira$\}$

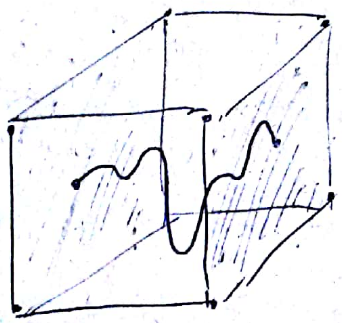


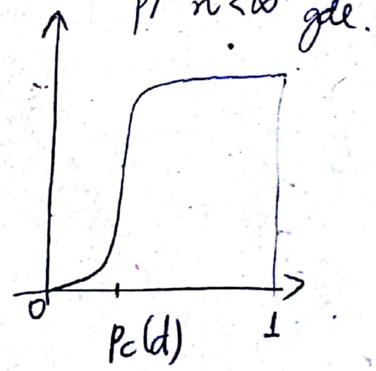
Dado $m, n \to \infty$, esperamos

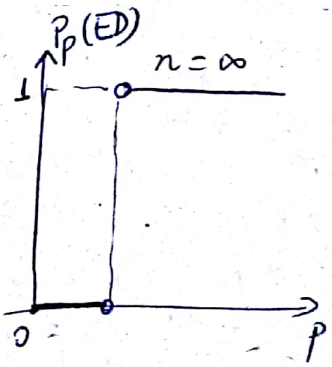


↳ parâmetro crítico

Em $\mathbb{Z}^3$







No modelo em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, existe um ponto crítico

$$p_c = p_c(d)$$

Se $p < p_c$, não há conectividade de longo alcance/ aglomerados finitos.

Se $p > p_c$, há conectividade de longo alcance (aparecem aglomerados infinitos).

↳ Transição de fase

$p_c(d=2) = 1/2$

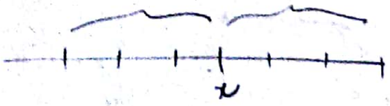
$p_c(d) \searrow$ em d

$p_c(d) \geq \dfrac{1}{2d-1}$

$p_c(d) \sim \dfrac{1}{2d}$ qdo. $d \to \infty$.

Modelo de percolação de elos independentes em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$.

Γ X^- = à esq. elos abertos à direita $= X^+$



$$|C_x| = \underbrace{X^+ + X^-}_{\text{geom. }(p)\text{ indep.}} + 1 < \infty \text{ c/ prob. } 1 \text{ se } p<1$$

Trivial $\rfloor$

$G = \mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$

$\mathbb{E}^d = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}^d : \|x-y\|_1 = 1\}$

... elos vizinhos mais próximos de $\mathbb{Z}^d$

Considere $\{X_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ v.a.'s i.i.d. com $X_e \sim ber(p)$,

$$\mathbb{P}(X_e = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_e = 0) = 1-p$$

em que $p \in [0,1]$ é um parâmetro do modelo.

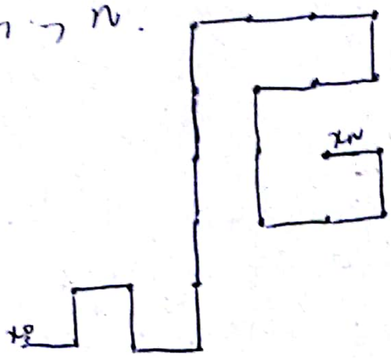
Vamos denotar por P_p a prob. subjacente.

Dado $e \in \mathbb{E}^d$, e está aberto/presente/ocupado se $X_e = 1$.

fechado/ausente/vazio $X_e = 0$

Caminhos:

Uma sequência de sítios ~~vizinhos próximos~~ $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ todos distintos e tais que $\|x_i - x_{i-1}\|_1 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.



Um caminho aberto é um caminho cujos elos $e_1, \dots, e_n$, $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathbb{E}^d$ estão abertos ($X_{e_i} = 1$, $i = 1, \dots, n$).

Um caminho infinito $x_0, x_1, x_2, \dots$ sítios distintos de $\mathbb{Z}^d$ tais que $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in \mathbb{E}^d$, $i = 1, 2, \dots$

Podemos falar em caminhos abertos infinitos.

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $x \leftrightarrow y$: x e y estão conectados por um caminho aberto se existir um caminho aberto ~~de~~ $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$. [Convenção: $x \leftrightarrow x$]

aglomerado (aberto) de x

Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$

A relação $\leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^d$, e $\mathbb{Z}^d$ é particionado por $\leftrightarrow$ em classes de equiv. $\equiv$ componentes conexos do sistema $\equiv$ aglomerados.

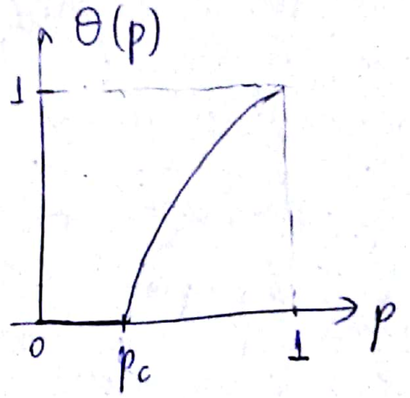
Interesse inicial na distr. de $|C|$, $C \equiv C_0$.

Obs.: $|C_x| \overset{d}{=} |C|$ $\forall x \in \mathbb{Z}^d$

Os valores possíveis de $|C|$ são $1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Seja $\theta : [0,1] \to [0,1]$

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$$



Prova-se / espera-se que o gráfico de θ seja semelhante ao esboçado acima em $d \geq 2$.

Podemos provar

Teorema 1: em $d \geq 2$, existe $p_c \in (0,1)$ tal que, se $p < p_c$, $\theta(p) = 0$; se $p > p_c$, $\theta(p) > 0$. ($= p_c(d)$).

2ª, 11-3-2013

Broadbent & Hammersley (57)

Propriedade de $\theta(p)$: monotonicidade

Configurações do modelo

$$\Omega = \{0, 1\}^{E^d}$$

- Notas de aula
- Geoffrey Grimmett: Percolation
www.ime.usp.br/~brenato

exercícios e seminários

$\omega \in \Omega$:

$$\omega = (\omega_e,\ e \in \mathbb{E}^d)$$

$\downarrow$

0 ou 1

$\mathcal{E}$ = eventos = σ-álgebra de subconjuntos de Ω gerados pelos cilindros

cilindro = $A \subset \Omega$ tal que A depende somente de um conjunto fixo finito de elos

Ex.: $\{C_0 = \infty\}$ não é cilíndrico

$\{0 \leftrightarrow \partial S_n\} = \bigcup_{y \in \partial S_n} \{0 \leftrightarrow y\}$ ← é cilíndrico

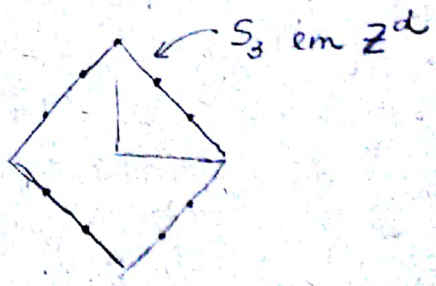
(borda)

S_n = esfera de raio n = $\{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$

∂S_n = ――――――――― $= n$

Note:

$$\{C_0 = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$$



P_p = prob. produto tal que

$$P_p = (\omega|_E = \xi) = \prod_{e \in E} p^{\xi_e} (1-p)^{1-\xi_e} \quad \text{onde}$$

$E \subset \mathbb{E}^d$ é finito e $\xi : E \to \{0,1\}$ $(\xi \in \{0,1\}^E)$

Def. 1) Uma função

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

é crescente (não-decrescente) se, dados $\omega, \omega' \in \Omega$ tais que $\omega \leq \omega'$ (isto é, $\omega_e \leq \omega'_e$, $\forall e \in \mathbb{E}^d$), então $X(\omega) \leq X(\omega')$.

Ex. 1) $\mathbb{1}\{|C_0| = \infty\}$ → evento crescente

Se $\omega \in \{|C_0| = \infty\}$ e se $\omega' \geq \omega \Rightarrow \omega' \in \{|C_0| = \infty\}$

Def. 2) Um evento $A \in \mathcal{E}$ é crescente se $\mathbb{1}_A$ for crescente.

Ex. 2) $|C_0|$ é crescente

Funções e eventos decrescentes.

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ é decrescente se $-X$ for crescente.

$A \in \mathcal{E}$ é decrescente se A^c for crescente.

Ex. $\{|C| < \infty\}$ é decrescente

$x, y \in \mathbb{Z}^d$: $\{x \leftrightarrow y\}$ é decrescente.

→ Não há conexão aberta entre x e y.

Exs. $\{3 \leq |C| \leq 5\}$ não é crescente nem decrescente

Proposição: dada uma v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ crescente ~~integrável~~ limitada, então a função $f(p) = E_p(X)$ é crescente.

→ valor esperado c/ rel. a P_p.

[se $X = \mathbb{1}\{|C| = \infty\}$

$E_p(X) = \theta(p)$.]

Dem.: considere a família de variáveis $\{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ i.i.d. uniforme

$Z_e \sim \mathcal{U}([0,1])$ ... modelo padrão

Dizemos que um elo $e \in \mathbb{E}^d$ (no modelo padrão) está

p-aberto se $Z_e < p$

p-fechado se $Z_e \geq p$.

Obs.: 1) Os elos p-abertos constituem uma realização do modelo de percolação com parâmetro p.

2) Seja $\eta_p = (\eta_p(e), e \in \mathbb{E}^d)$ em que $\eta_p(e) = \mathbb{1}\{Z_e < p\}$

[η_p é uma realização de $(\Omega, \mathcal{E}, P_p)$ e $p' > p$.

Então, $\eta_{p'} \geq \eta_p$.]

Mas

$$E_p(X) = \mathbb{E}(X(\eta_p)) \leq \mathbb{E}(X(\eta_{p'})) = E_{p'}(X)$$

Caso particular

$\theta(p)$ é crescente

Teorema 1: Em $d \geq 2$, $\exists\, p_c \in (0,1)$:

$\theta_p = 0$ se $p < p_c$

$\theta_p > 0$ se $p < p_c$

(Existência de transição de fase não-trivial)

Dada a monotonicidade em p, é suficiente mostrar que

$$\theta(p) = 0 \text{ se } p \sim 0$$
$$> 0 \text{ se } p \sim 1$$

Proposição 2: se $p < \dfrac{1}{2d-1}$, então $\theta(p) = 0$.

Proposição 3: se $p > \dfrac{2}{3}$, então $\theta(p) > 0$ (em $d \geq 2$)

Obs.:

plano coordenado horizontal em $\mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}^2$

$|C_0| = \infty$ no hiperplano desconectado ~~inicialmente~~ verticalmente

$\Rightarrow$ —— no espaço conectado

$\theta(p) = \theta(p, d)$

Se $d' > d$, então $\theta(p, d') \geq \theta(p, d)$

A última obs. permite restringir a dimensão da prop. 3 a $d = 2$.

Dem. da prop. 2: $\ulcorner C = C_0 \lrcorner$

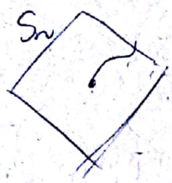
Note que $\{|C| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$

$\supset \{0 \leftrightarrow \partial S_{n+1}\}$

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = \lim_{n\to\infty} P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n)$$

$\{0 \leftrightarrow \partial S_n\} \subset \{$existe um caminho aberto começando na origem e de $\underbrace{\text{comprimento}}_{\text{em nº de elos}} \geq n\} =$

$$= \bigcup_{\substack{\text{caminhos } \gamma \\ \text{começando na origem} \\ \text{e de comprimento } n}} \{\gamma \text{ está aberto}\}$$



$$P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n) \leq \sum_{\substack{\gamma:\, \gamma \text{ começ. em } 0 \\ e\ |\gamma| = n}} \overbrace{P_p(\gamma \text{ está aberto})}^{p^n} = p^n \underbrace{\sigma(n)}_{\text{nº de caminhos distintos começando na origem e de comprimento } n} \quad (1)$$

nº de p/ 1º passo: $2d$

2º — : $\leq 2d-1$

$$\sigma(n) \leq 2d\,(2d-1)^{n-1} \quad (2)$$

$$\therefore P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n) \overset{(1,2)}{\leq} \frac{2d}{2d-1}\left[p(2d-1)\right]^n$$

Se $p < \frac{1}{2d-1}$, então $\theta(p) = \lim_{n\to\infty} P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n)$

$= 0$ $\square$ Prop. 2

Obs.: 1) comparação c/ mod. na árvore homogênea de grau 2d

2) pode-se mostrar que $\sigma(d) = \lim_{n\to\infty} [\sigma(n)]^{1/n}$

Se $p < 1/\sigma$, então $\theta(p) = 0$. $\sigma \leq 2d-1$

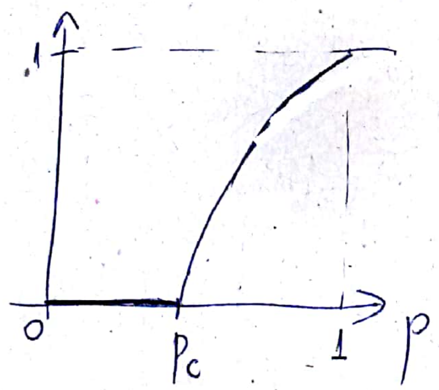
4ª, 13-3-2013

$\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$

Teorema 1. (existência de T.F.)

Em $d \geq 2$, existe $p_c \in (0,1)$:

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c \end{cases}$$



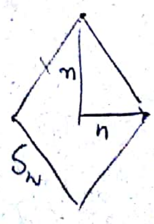
Obs.: ① $\theta: [0,1] \to [0,1]$ é contínua à direita

→ segue de

$$\theta(p) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{P_p(0 \leftrightarrow \overbrace{\partial S_n}^{\text{cilíndrico}})}_{\text{poli}(p) \,=\, \theta_n(p)}$$

$\searrow$ em n

$\nearrow$ em p



θ é um limite decrescente de funções contínuas crescentes

$\Rightarrow$ continuidade à direita de θ.

② Mais adiante:

$\theta(p)$ é contínua à esquerda em $(p_c, 1]$

por ① e ② $\Rightarrow$ θ é contínua em $(p_c, 1]$

A questão de continuidade de θ em $[0, 1]$ reduz-se à continuidade em p_c $\Leftrightarrow$ $\theta(p) > 0$?
$\quad\quad = 0$

Proposição 2 (da aula passada)

Se $p < \dfrac{1}{2d-1}$, então $\theta(p) = 0$.

$$\Rightarrow p_c \geq \frac{1}{2d-1}$$

Proposição 3: se $p > 2/3$, então $\theta(p) > 0$.

Dem.: pela monotonicidade em d, basta considerar o caso bidimensional.

$\mathbb{L}^2$

Lista #1 no site

Autodualidade de $\mathbb{L}^2$

Rede dual de $\mathbb{L}^2$

$$\mathbb{L}^2_* = (\mathbb{Z}^2_*, \mathbb{E}^2_*)$$

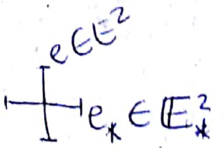
$$\mathbb{Z}^2_* = \mathbb{Z}^2 + \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \left\{ \left(x + 1/2,\ y + \tfrac{1}{2}\right),\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

$\mathbb{E}^2_*$ = elos vizinhos mais próximos de $\mathbb{Z}^2_*$.

Obs: isomorfo a $\mathbb{L}^2$.

Relação 1:1 entre $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^2_*$



para cada $e \in \mathbb{E}^2$.

Seja e^* o elo secante de $\mathbb{E}^2_*$.

A partir do modelo de percolação em $\mathbb{L}^2$, vamos definir um modelo de perc. em $\mathbb{L}^2_*$:

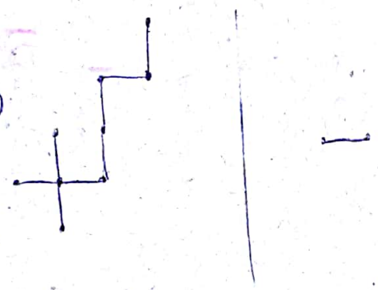
$e_* \in \mathbb{E}^2_*$ estará aberto/fechado se $e \in \mathbb{E}^2$ estiver fechado/aberto.

Do modelo em $\mathbb{L}^2$ com densidade p, obtemos um modelo em $\mathbb{L}^2_*$ com densidade $1-p$.

Fato geométrico

Dado um conjunto conexo (através de caminhos em $\mathbb{Z}^2$) finito B em $\mathbb{Z}^2$, ...

conexo



não conexo

⌈ $A \subset \mathbb{Z}^2$ é conexo se, dados $x, y \in A$, então existe um caminho de $\mathbb{Z}^2$ ligando x a y passando apenas por sítios de A. ⌋

... então

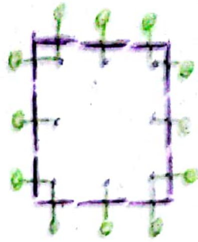
⌈ fronteira ~~de sítios~~ externa (de sítios) de B

$$\bar{\partial} B = \{ y \in \mathbb{Z}^2 : y \notin B, \text{ existe um sítio } x \in B \text{ vizinho mais próximo de } y \text{ e existe um caminho } \infty \text{ começando em } y \text{ que não passa por pontos de } B \}$$

fronteira externa de elos de B

$$\bar{\partial}_E B = \{ (x, y) : y \in \bar{\partial} B \text{ e } x \notin B \text{ é um sítio viz. + próx. do } y \}$$

Seja $\bar{\partial}^*_E B = \{e_* : e \in \bar{\partial}_E B\}$



— fronteira externa

• fronteira interna de sítios

— $\bar{\partial}^*_E B$

<u>Fato</u>: os elos de $\bar{\partial}^*_E B$ formam um circuito em torno de B.

[um circuito é um conjunto de sítios $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$ tais que $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ são caminhos.]

<u>Dem</u>. <u>prop</u>. 3:

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = 1 - P_p(|C| < \infty)$$

Primeiro mostraremos que

$$P_p(|C| < \infty) < 1 \text{ se } p \sim 1.$$

Pelo fato geométrico acima,

$\{|C| < \infty\} \subset \{$a conf. em $\mathbb{L}^2$ está cercada por um circuito <u>aberto</u> em $\mathbb{L}^2_*\}$

↳ pois os elos de $\bar{\partial}_E C$ estão todos fechados, — de $\bar{\partial}^*_E C$ — abertos.

$$P_p(|C|<\infty) \leq P_{1-p}(\text{existe um circuito aberto em torno da origem})$$

$$= P_{1-p}\Big(\bigcup_{\substack{\text{circuitos}\\ \gamma \ni 0}} \{\gamma \text{ está aberto}\}\Big)$$

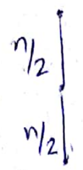
$$\leq \sum_{\substack{\text{circuitos}\\ \gamma \ni 0}} P(\gamma \text{ está aberto}) =$$

$$= \sum_{n\geq 4} \sum_{\substack{\gamma \ni 0\\ |\gamma|=n}} \underbrace{P_{1-p}(\gamma \text{ está aberto})}_{(1-p)^n}$$

$$= \sum_{n\geq 4} (1-p)^n \, \sigma(n), \qquad (1)$$

$\sigma(n)$ = # de circuitos distintos em torno de 0^* de compr. n

Como γ tem comprimento n e circunda 0,



existe pelo menos um ponto do segmento acima por onde passa um elo de γ...

Há n possibilidades para o posicionamento de elo. A partir ~~da~~ daí, há no máximo 3 possibilidades p/ o posicionamento de cada um dos $n-2$ elos seguintes. Não há liberdade para o último passo.

$$\sigma(n) \leq n\, 3^{n-2} \qquad (2)$$

De (1) e (2):

$$1-\theta(p) \leq \frac{1}{9} \sum_{n\geq 4} n\,[3(1-p)]^n = \psi(p)$$

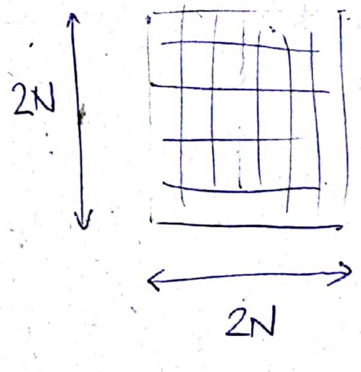
Se $p > 2/3$, então $\psi(p) < \infty$. é contínua em $(\frac{2}{3}, 1]$ e $\psi(1) = 0$. Logo, existe $p_0 < 1$ tal que $\psi(p) < 1$ se $p \in [p_0, 1]$.

$\therefore \theta(p) > 0$ se $p \in [p_0, 1]$.

Para mostrar que $\theta(p) > 0$ se $p > 2/3$, raciocinemos da seguinte forma:

para $N \geq 1$, seja

$$Q_N = \{-N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N\}^2$$



Seja

$A_N = \{$todos os elos de Q_N estão abertos$\}$

$B_N = \{$existe um circuito aberto em $\mathbb{L}^2_*$ em torno de $Q_N\}$

Obs.:

1) Em B_N^c existe um caminho aberto em $\mathbb{L}^2$ começando em ∂Q_N.

2) A_N e B_N dependem de cjtos. ~~de~~ disjuntos de elos e logo

são independentes.

3) Em $A_N \cap B_N^c \subset \{|C| = \infty\}$

$$\theta(p) \geq P_p(A_N \cap B_N^c) = \underbrace{P_p(A_N)}_{>0, \forall N} \underbrace{P_p(B_N^c)}_{>0}$$

$$P_p(B_N) \leq \frac{1}{9} \sum_{n \geq 8N} n\,[3(1-p)]^n = \psi_N(p)$$

Dado $p > \frac{2}{3}$, $\exists N: \psi_N(p) < 1 \therefore \sigma(p) > 0$ ▯

Obs.: 1) O argumento p/ a proposição 3 é uma "versão" do chamado "Argumento de Peierls"

(Ising)

2) Na prop. 2: $\theta(p) = 0$ se $p < \frac{1}{2d-1}$

— 3: $\theta(p) > 0$ se $p > 2/3$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2d-1} \leq p_c \leq \frac{2}{3}$$

Em $d=2$, $\frac{1}{3} \leq p_c \leq \frac{2}{3}$ $\quad (p_c = 1/2)$

$\sigma(n)$ = # de caminhos começando em 0 e de comp. n.

$\sigma(n)^{1/n} \longrightarrow \sigma$

$\sigma(2) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Obs. se $p > p_c$, $P_p(|C| = \infty) > 0$

Teorema 2

Seja $A = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|C_x| = \infty\} = \{$existe um aglom. ∞ em ~~[illegible]~~ algum lugar$\}$

Se $\theta(p) = 0$ (em particular, se $p < p_c$), então

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \overbrace{P_p(|C_x| = \infty)}^{\theta(p)} = 0$$

Se $\theta(p) > 0$?

Obs.: A é um evento caudal, isto é, A não depende dos "status" dos elos em nenhum subconjunto finito de elos.

Lei 0-1 de Kolmogorov: se A é caudal, é indep. de qualquer evento cilíndrico.

Como $A \in \mathcal{E} = \sigma\{\text{cilindros}\}$ $\Rightarrow$ A é indep. de si próprio

$$P_p(A \cap A) = P_p(A)\, P_p(A)$$

$$P_p(A) \qquad P_p^2(A)$$

~~Seja~~ $P_p(A) = 0$ ~~ou~~ 1

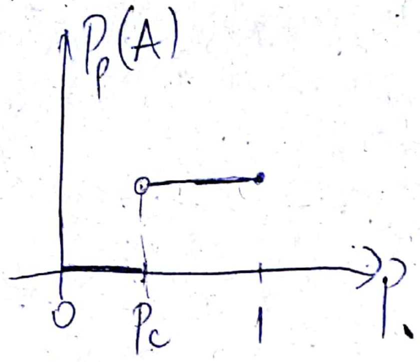
$\therefore$ A é trivial.

Voltando a A,

$P_p(A) \geq P_p(|C| = \infty) = \theta(p)$ se $\theta(p) > 0 \Rightarrow P_p(A) > 0 \Rightarrow \boxed{P_p(A) = 1}$

Teorema 2:

$$P_p(\text{haver um agl. infinito em algum lugar}) = \begin{cases} 0 \text{ se } \theta(p) = 0 \\ 1 \text{ se } \theta(p) > 0 \end{cases}$$



2ª, 18-3-2013

3 fases do modelo de percolação

Fase subcrítica $(p < p_c)$ $(\theta_p = 0)$
" supercrítica $(p > p_c)$ $(\theta_p > 0)$
" crítica $(p = p_c)$ (?)

Def. Função de conectividade: dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$

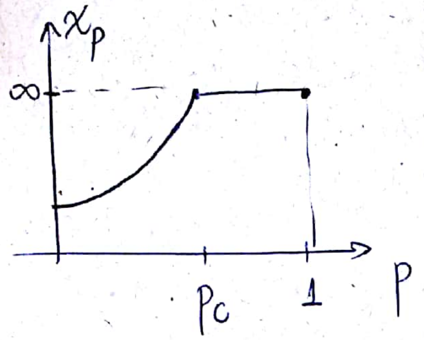
$$\tau_p(x,y) = P_p(x \leftrightarrow y)$$ (fç de correlação entre 2 pts)

$$\chi_p = E_p(|C|) \ldots \text{ suscetibilidade}$$

Observe que $|C| = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}\{0 \leftrightarrow y\}$

$$\therefore \chi_p = E_p(|C|) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_p(0 \leftrightarrow y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \tau_p(0,y)$$

2) Fase subcrítica



Obs.: dos argumentos usados na dem da prop. 2, temos que $\chi_p < \infty$ p/ $p < \frac{1}{2d-1}$

$\ulcorner$ $P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n) \leq \text{constante} \times [p(2d-1)]^n$

~~$\chi_p = \sum n \, P(|C| = n)$~~

$$\chi_p = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P_p(0 \leftrightarrow y) = \sum_{n \geq 1} \overbrace{\sum_{y \in \partial S_n} P_p(0 \leftrightarrow y)}^{\leq P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n)}$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} \underbrace{|\partial S_n|}_{\leq \text{const.} n} \underbrace{P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n)}_{\leq \text{const.} \times [p(2d-1)]^n} < \infty \quad \checkmark$$

$\lrcorner$

$\to \chi_p < \infty$ em $p < p_c$? Sim.

$\ulcorner$Obs.: o argumento acima mostra que

$$\tau_p(0,y) \leq \text{const.} \times e^{-b\|y\|} \quad \text{para } p < \frac{1}{2d-1}$$

$$P_p(|C|=k) \leq \text{const.} \times e^{-b' k^{\frac{d}{d+1}}},$$

Em $p < p_c$,

... $\tau_p(0,y) \leq \text{const.} \times e^{-b\|y\|}$? (sim)

... $P_p(|C|=k) \leq \text{const.} \cdot e^{-b'k}$? (sim) $\Rightarrow$ unicidade do pto. crít.

... $\chi_p \uparrow \infty$ qdo. $p \uparrow p_c$? (sim) $(\chi_p < \infty, \forall p < p_c)$

Fase supercrítica $(p > p_c)$

$\theta(p) > 0 \Rightarrow \exists$ aglomerado ∞ em algum lugar quase certamente

Quantos? Exatal 1.

$\chi_p = \infty$; $\tau_p(0,y) \not\xrightarrow[\|y\|\uparrow\infty]{} 0$

(não decai)

Modificação de χ e τ:

$\tau_p^f(x,y) = P_p(x \leftrightarrow y, |C_x| < \infty)$ conectividade finita

$\chi_p^f(|C|) = E_p(|C|, |C| < \infty)$

$\chi_p^f < \infty$ em $p < p_c$? (sim)

$\tau_p^f(0,y) \leq \text{const.} \times e^{-b''\|y\|}$? (sim)

$P_p(|C| = k) \leq const. \cdot e^{-b'''k}$? (Não)

↳ (De fato, $\geq const. \cdot e^{-b''' k^{\frac{d-1}{d}}}$)

Densidade de sítios em aglomerados infinitos

Dado $Q_N = \{-N, N+1, \ldots, N-1, N\}^d$ (caixa de lado 2N)

$$\frac{1}{|Q_N|} \sum_{x \in Q_N} \mathbb{1}\{|C_x| = \infty\} \xrightarrow[N \to \infty]{q.c.} \theta(p)$$

↳ Teorema Ergódico

Fase crítica

$\chi_{p_c} = \infty$? (sim)

$\theta(p_c) = 0$ (? provado em $d=2$ e d grande)

$P_p(|C| = k) \approx \frac{const.}{k^{1/\delta}}$ → ex. de expoente crítico, $k \to \infty$

$\chi_p \approx \frac{1}{(p_c - p)^{\gamma}}$, $p \uparrow p_c$

$\chi^f_p \approx \frac{1}{(p - p_c)^{\gamma}}$, $p \downarrow p_c$

$\theta(p) \approx (p - p_c)^{\beta}$, $p \downarrow p_c$

Existência e o valor de γ, β e δ são provados apenas em d grande; em $d=2$, o modelo de sítios na rede triangular (Smirnov)

Universalidade e dependência dimensional

Considere quatro modelos de percolação distintos com a mesma dimensionalidade.

Modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$: ——— $p_c = 1/2$

" " sítios em $\mathbb{Z}^2$ ——— $p_c \approx 0{,}59$

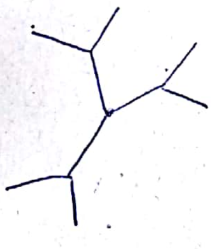
" " elos em Δ ——— $p_c = 2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{18}$

" " sítios em Δ ——— $p_c = 1/2$

Espera-se que os expoentes críticos sejam ~~todos~~ iguais.
Em geral, ~~espera~~ os expoentes críticos deviam depender da dimensão.

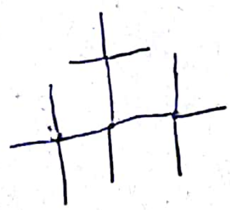
Rede de Bethe

Modelo com grau 3:



$p_c = 1/2$

" " " 4:



$p_c = 1/3$

Mas: $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 2$ não varia c/o grau.

<u>Teorema</u> (Hara-Slade): Considere o modelo de percol. de elos indep. em $\mathbb{Z}^d$. Para $\underline{d}$ suficientemente grande ($d \geq 19$), os expoentes críticos são os mesmos da rede de Bethe.

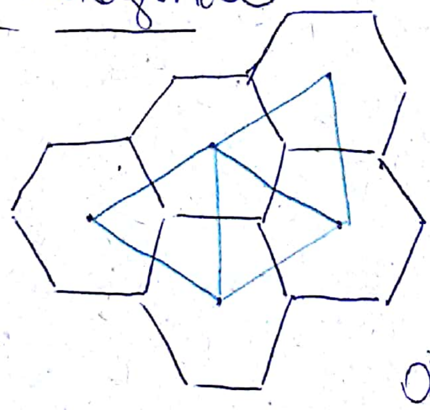
⌈ Na literatura de Física Teórica, há argumentos q/ sugerem a validade do Teorema H-S. p/ $d \geq 6$

"dimensão crítica superior" ⌋

Pequena lista de variações do modelo de percolação

Outro modelo numa rede bidimensional:

<u>Rede Hexagonal</u>



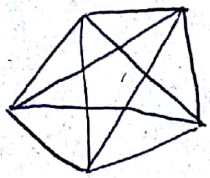
"Honeycomb"
colmeia

<u>Obs.</u>: dual à rede triangular

Outra variação:

<u>Grafo aleatório de Erdös-Rényi</u>

K_n = grafo completo c/ $\underline{n}$ vértices



Cada um dos $\binom{n}{2}$ elos está aberto (resp. fechado) com prob. p_n (resp. $1-p_n$)

Seja $p_n = \frac{x}{n}$. C_n = aglomerado do 1º ponto.

Então, pode-se mostrar que

$$p_k(x) = \lim_{n\to\infty} P_{\frac{x}{n}}\left(|C_n| = k\right)$$

Teorema (E.R.) $\exists\, x_c \in (0,\infty)$

$$\sum_{k\geq 1} p_k(x) = 1 \quad \text{se } x < x_c$$ (Todos os aglomerados do modelo são "pequenos") → no máx da ordem de $\log n$

$$< 1 \quad \text{se } x > x_c$$ (Existe um aglomerado de tam. $\theta(x)\, n$)

Seja $\theta(x) = 1 - \sum_{k\geq 1} p_k(x)$

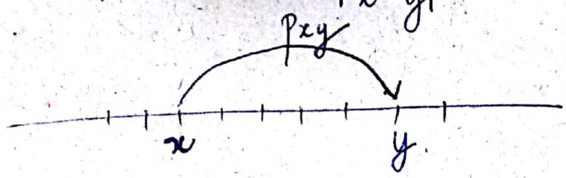
Modelos de percolação em $\mathbb{Z}$ com elos de longo alcance.

$$G = (\mathbb{Z}, \tilde{E})$$

$$\tilde{E} = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{Z}\}$$

$$P((x,y) \text{ estar aberto}) = p(x,y)$$

$$p(x,y) = 1 - e^{-\frac{\beta}{|x-y|^s}}, \quad \underline{s>0}$$
$$\simeq \frac{\beta}{|x-y|^s},$$



Teorema (Aizermann, Newman, Schulman)

Se $s>2$, então $P(|C|=\infty)=0$ para todo β

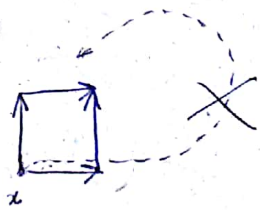
Se $s \leq 2$, então existe um β_c tal que,

... se $\beta < \beta_c$, então $P(|C|=\infty)=0$

... se $\beta > \beta_c$, então $P(|C|=\infty)>0$

Modelo de elos orientados

$(\mathbb{Z}^2, \vec{\mathbb{E}}^2)$



Caminhos orientados $\ulcorner \vec{\theta}(p_c) = 0 \lrcorner$

Modelo de sítios e elos

$G = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$ $\quad G' = \left\{ \begin{array}{l} \text{sítios abertos, elos abertos} \\ \text{conectando sítios abertos} \end{array} \right\}$

$\mathbb{P}(\text{elo aberto}) = p \quad \mathbb{P}(\text{sítio aberto}) = r$

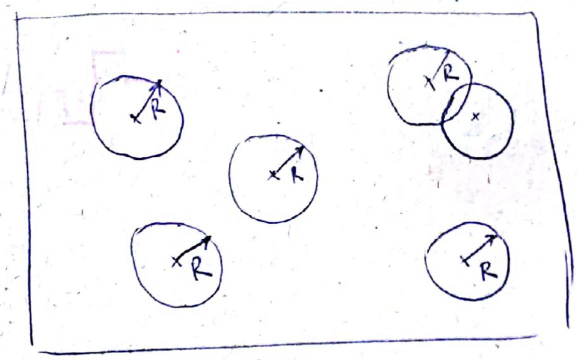
Outros tipos de modelo

Superfícies aleatórias

P. ex.: mod. dual ao modelo de elos = em $\mathbb{Z}^3$

Percolação contínua em $\mathbb{R}^d$ (Booleana)

→ em $\mathbb{R}^2$



λ = intensidade do PP Poisson

R = raio das circunf. (pode ser aleatório)

$R < R_c$: os componentes são finitos

$R > R_c$: existe um componente ∞

invariante por rotações

4ª, 20-3-2013

Outras variantes do modelo de percolação (de elos em $\mathbb{Z}^d$)

1) Percolação de 1ª passagem

$\{T_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ v.a.'s i.i.d não-negativas

↳ tempo de passagem por cada elo

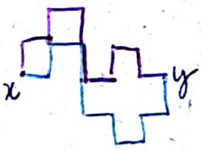
Dado um caminho γ,

$$T_\gamma = \sum_{e \in \gamma} T_e$$

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$T_{xy} = \min_{\gamma : x \overset{\gamma}{\leftrightarrow} y}$$

↳ γ liga x a y



Dado $t \geq 0$,

$B_t = \{y \in \mathbb{Z}^d : T_{0y} \leq t\}$ → sítios atingidos a partir da origem até o tempo t

Obs.: B_t é conexo.

Não é necessariamente "simplesmente conexo" (Pode ter "buraco"!)

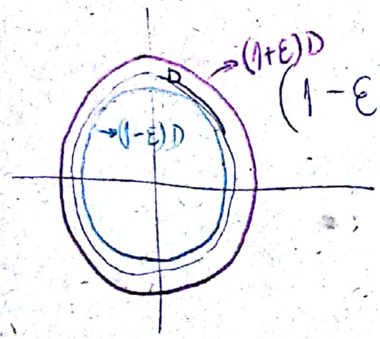
Qual é a forma assintótica de B_t?

É conveniente tomar $\overline{B_t} = B_t + [-1/2, 1/2]^d$

<u>Teorema 1</u> (Cox - Durrett): <u>(Teorema da Forma)</u>

Sob certas condições sobre os momentos de T_e ($E[T_e] < \infty$ é suficiente, mas não necessária):

1) ou existe um conjunto determinístico $D \subset \mathbb{R}^d$ compacto, conexo, convexo e de interior não-vazio tal que, para todo $\varepsilon > 0$,



$$(1-\varepsilon) D \subset \frac{1}{t} \bar{B}_t \subset (1+\varepsilon) D$$

para todo t suficientemente grande quase certamente

2) ou, para todo $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto,

$$\frac{1}{t} \bar{B}_t \supset K$$

para todo t suficientemente grande " "

<u>Teorema 2</u> (Kesten):

Nas condições do Teorema 1, ... o caso 2 acontece se e só se

$$\mathbb{P}(T_e = 0) \geq p_c = p_c(d, \text{elos})$$

Ex. (próxima lista):

Mostre a implicação ($\Leftarrow$) quando $\mathbb{P}(T_e = 0) > p_c$.

$D = D$ (distr. dos T_e)

Percolação por Invasão

$\{T_e,\ e \in \mathbb{E}^d\}$ v.a.'s i.i.d. uniformes em $[0,1]$.

$V_0 = \{0\}$

$\vdots$

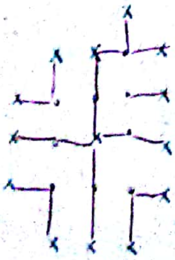
No n-ésimo passo, $n \geq 1$,

$$V_n = V_{n-1} \cup \{y_n\},$$

em que

$$y_n \in \bar{\partial} V_{n-1} = \{y \in \mathbb{Z}^d \setminus V_{n-1} : \text{existe } x \in V_{n-1} \text{ tal que } (x,y) \in \mathbb{E}^d\}$$

e y_n é tal que $T_{(x_n, y_n)} = \min\limits_{e \in \bar{\partial}_E V_{n-1}} T_e$ p/ algum $x_n \in V_{n-1}$



$$\bar{\partial}_E V_{n-1} = \{(x,y) \in \mathbb{E}^d : y \in \bar{\partial} V_{n-1},\ x \in V_{n-1}\}$$

$V_n \subset V_{n+1}, \forall n$

Seja $V_\infty = \bigcup_{n \geq 1} V_n$. Dado $x \in \mathbb{Z}^d$

Seja $T(x) = \mathbb{P}(x \in V_\infty)$

Proposição: se $\lim_{\|x\| \uparrow \infty} T(x) = 0$, então $\theta(p_c) = 0$.

De volta ao modelo de percolação de elos independentes em $\mathbb{Z}^d$

Algumas ferramentas

1) Desigualdade de Harris - FKG

Proposição 1: Sejam A e B eventos crescentes de $\mathcal{E}$. Então, $\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B)$. Em outras palavras, $\mathbb{P}_p(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$.

A mesma desigualdade é válida para pares de eventos decrescentes.

Se $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 2$ forem crescentes, então

$$\mathbb{P}_p(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \mathbb{P}_p(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

2) Sejam X e Y v.a.'s crescentes (e limitadas). Então,

$$E_p(XY) \geq E_p(X) E_p(Y)$$

Dados 2 eventos crescentes A e B, seja

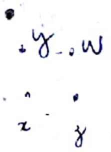
interseção disjunta

$A \circ B = \{\omega$: existem dois subconjuntos disjuntos de elos abertos $E_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $E_2 = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ tais que

E_1 garante o acontecimento de A
E_2 " " " " B $\}$

$A \circ B$ = "A e B ocorrem disjuntamente"

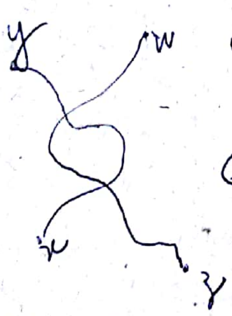
Dados $x, y, z, w \in \mathbb{Z}^d$,



$A = \{x \leftrightarrow y\}$ $\quad$ $B = \{w \leftrightarrow z\}$

$\{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\} = \{\omega$: em ω existem 2 caminhos abertos de elos disjuntos tais que

- o 1º caminho liga x a y, e
- o 2º " " w a z $\}$.



$\in \{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\}$

$\notin \{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\}$

Desigualdade de BK:

Dados dois eventos crescentes A e B, que dependem de um cjto finito de ~~dos~~ elos.

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A)\,\mathbb{P}_p(B)$$

Uma aplicação da desigualdade FKG

Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}^d$.

$$\{x \leftrightarrow z\} \supset \{x \leftrightarrow y\} \cap \{y \leftrightarrow z\}$$

$$\tau_p(x,z) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow z) \geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y \text{ e } y \leftrightarrow z)$$

$$\overset{FKG}{\geq} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)\,\mathbb{P}_p(y \leftrightarrow z) = \tau_p(x,y)\,\tau_p(y,z).$$

Seja $f(n) = \tau_p\big((0,-,0), (n,-,0,0)\big)$

A desigualdade $\tau_p(\overset{(0,0)}{x}, \overset{(n+m,0)}{z}) \geq \tau_p(x, \overset{(n,0)}{y})\,\tau_p(\underset{(0,0)}{\overset{(n,0)}{y}}, \underset{(m,0)}{\overset{(n+m,0)}{z}})$

$$f(n+m) \geq f(n)\,f(m)$$

$$\therefore \log f(n+m) \geq \log f(n) + \log f(m)$$

$$-\log f(n+m) \leq -\log f(n) - \log f(m) \qquad (*)$$

Seja $\psi = -\log f$

(*) nos diz que $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é subaditiva.

Ou seja, $\psi(n+m) \leq \psi(n) + \psi(m)$

Do teorema limite para sequências subaditivas:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} \text{ existe } \left(= \inf_{n\geq 1} \frac{\psi(n)}{n} \right) < \infty$$

Em termos de τ_p, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\tau(\underline{0}, (n, \underline{0})) \leq \text{const. } e^{-(\lambda - \varepsilon)n}$$

p/ todo n suficientem.te gde

2ª, 1º - 4 - 2013

Desigualdades

1) Desigualdade FKG

A, B eventos crescentes

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\,\mathbb{P}_p(B)$$

$$\mathbb{P}_p(A|B) \geq \mathbb{P}_p(A)$$

LISTA 2 - ENTREGA DIA 22/4

2) Desigualdade BK

A, B eventos crescentes (dependentes de um conjunto fixo finito de elos)

(Dem. nas notas qdo. A, B são do tipo $\{x \leftrightarrow y\}$

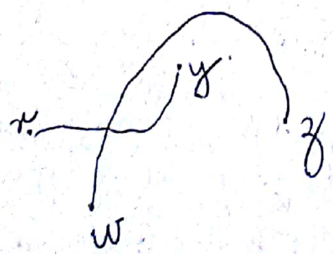
Em geral: livro do Grimmett)

interseção disjunta $\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A)\,\mathbb{P}_p(B)$

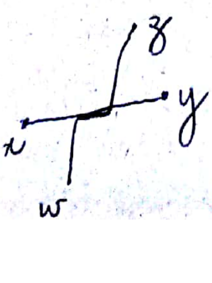
$\{\omega \in \Omega:$ em ω existem dois caminhos abertos de elos disjuntos tais que o 1º caminho garante a ocorrência de A e o segundo garante a ocorrência de B$\}$

<u>Ex.:</u> $\{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\}$

$= \{\omega:$ em ω existem dois caminhos abertos de elos disjuntos, um ligando x a y e outro ligando w a $z\}$



$\in \{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\}$



$\notin \{x \leftrightarrow y\} \circ \{w \leftrightarrow z\}$

· Na aula passada;

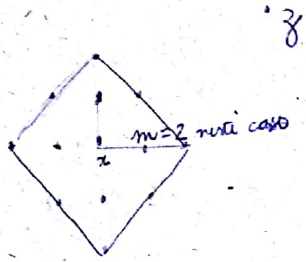
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \tau_p(0,(n,0)) \geq 0$ (usando a ≠ FKG)

Aplicação da desigualdade de BK:

Desigualdade de Hammersley (-Lieb-Simon)

Seja $B_m(x)$ = bola de raio m em torno de x ($x \in \mathbb{Z}^d$, $m \geq 0$)

$$= \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y\| \leq m\}$$



$$\partial B_m(x) = \text{fronteira de } B_m(x)$$

$$= \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y - x\| = m\}$$

Suponha $z \in \mathbb{Z}^d \notin B_m(x)$ e $y_0 \in \partial B_m(x)$.

FKG:

$$\tau_p(x,z) \geq \tau_p(x,y_0)\,\tau_p(y_0,z)$$

$$\lceil \{x \leftrightarrow z\} \supset \{x \leftrightarrow y_0\} \cap \{y_0 \leftrightarrow z\} \rfloor$$

Proposição (≠ HLS):

$$\tau_p(x,z) \leq \sum_{y \in \partial B_m(x)} \tau_p(x,y)\,\tau_p(y,z)$$

Dem.: Nas condições da proposição, para que $x \leftrightarrow z$, é necessário haver um sítio $y \in \partial B_m(x)$ e ~~2~~ caminhos abertos de elos disjuntos, um conectando x a y e outro conectando y a z.

Em símbolos:

$$\{x \leftrightarrow z\} \subset \bigcup_{y \in \partial B_m(x)} \left(\{x \leftrightarrow y\} \circ \{y \leftrightarrow z\} \right)$$

$$\therefore \tau_p(x, z) \leq \sum_{y \in \partial B_m(x)} P_p\left(\{x \leftrightarrow y\} \circ \{y \leftrightarrow z\} \right)$$

$$\overset{BK}{\leq} \sum_{y \in B_m(x)} P_p(\{x \leftrightarrow y\})\, \mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow z\}) \qquad \square$$

Aplicação da Desigualdade de HLS

Teorema: Suponha que $\chi_p = \underbrace{E_p(|C|)}_{<\infty}$

Lembre que $\chi_p = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \tau_p(0, y)$ (*)

Então, existem $K < \infty$ e $\sigma > 0$ tais que

$$\tau_p(0, y) \leq K e^{-\sigma \|y\|}$$

Dem.: usando (*)

$$\chi_p = \sum_{n \geq 0} \overbrace{\sum_{y \in \partial B_n} \tau_p(0, y)}^{=: Q_n} = \sum_{n \geq 0} Q_n < \infty$$

$\llcorner B_n(0)$

Usando a hipótese, temos que $Q_n \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0$.

Então, existe m tal que $Q_m < 1$.

Seja $T_k = \sup_{y : \|y\| \geq k} \tau_p(0, y)$. Queremos mostrar que

$$T_k \leq K e^{-\sigma k}$$

Sejam $k \geq m$ e $z : \|z\| \geq k$. Então, por HLS,

$$\tau_p(0, z) \leq \sum_{y \in \partial B_m} \tau_p(0, y) \tau_p(y, z) \stackrel{\text{invar. por transl.}}{=}$$

$$= \tau_p(0, z-y) \leq T_{k-m}$$

Note que $\|z-y\| \geq k-m$

Logo,

$$\tau_p(0, z) \leq \sum_{y \in \partial B_m} \tau(0, y) T_{k-m}$$

$$\sup_{z : \|z\| \geq k} \tau_p(0, z) = Q_m T_{k-m} \quad (1)$$

se $k \geq 2m$

$$\therefore T_k \leq Q_m T_{k-m} \leq Q_m^2 T_{k-2m}$$

Iterando

$$\leq \cdots \leq Q_m^{\overbrace{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor}^{\geq \frac{k}{m} - 1}} \underbrace{T_{k - \lfloor \frac{k}{m} \rfloor m}}_{\leq 1}$$

$$\leq \underbrace{Q_m^{-1}}_{K} \underbrace{\left[Q_m^{1/m} \right]}_{e^{-\sigma}}{}^{k} \qquad \sigma = -\frac{1}{m} \log Q_m > 0$$

$\square$

Fórmula de Russo

Def.: 1) Dados $\omega \in \Omega = \{0,1\}^{E^d}$ e um elo $e_0 \in E^d$, seja $\omega' \in \Omega$ tal que $\omega'_f = \omega_f, \forall f \in E^d \setminus \{e_0\}$, $\omega'_{e_0} = 1 - \omega_{e_0}$.

ω' é a configuração ω trocada apenas em e_0.

2) Dados um evento A qualquer $(A \in \mathcal{E})$, $\omega \in \Omega$, e um elo $e \in E^d$, dizemos que $\underline{\underline{e}}$ é pivotal p/ a ocorrência de A (em ω) se:

1. $\omega \in A$ e $\omega' \notin A$ <u>ou</u>
2. $\omega \notin A$ e $\omega' \in A$

<u>Obs.</u>: $\underline{\underline{e}}$ é pivotal para A (em ω) se o status de $\underline{\underline{e}}$ for crucial para a ocorrência ou não de A.

Dados um evento A e um elo e, seja o evento

$\{e \text{ é pivotal para } A\}$

$= \{\omega \in \Omega : e \text{ é pivotal para } A \text{ em } \omega\}$

Dado $A \in \mathcal{E}$:

<u>Obs.</u>: o evento $\{e \text{ é pivotal para } A\}$ não depende de ω_e.

Teorema 2 (~~Teorema~~ Fórmula de Russo)

Seja A um evento crescente dependendo apenas de um conjunto fixo finito de elos. Então,

$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(A) = \sum_{e\in\mathbb{E}^d}\mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal p/ } A) = \mathbb{E}_p\big(N(A)\big),$$

em que $N(A)$ = o nº de elos pivotais para A em $\mathbb{E}^d$.

Exemplo: o elo e é pivotal para o evento $\{x\leftrightarrow y\}$ e fechado e $\omega_e=0$ significa que não há caminhos abertos ligando x a y em ω, mas passa a haver se abrirmos e.

Obs.: Usando a Fórmula de Russo neste exemplo e depois BK leva à seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dp}\chi_p \leq 2d\,\chi_p^2 \quad \text{se } p<p_c,$$

o que pode ser usado para mostrar que

$$\chi_p \geq \frac{\text{const.}}{p-p_c} \quad \text{qdo } p\uparrow p_c,$$

o que produz uma desigualdade para um expoente crítico $\gamma\geq 1$.

Argumento não-rigoroso:

$$\chi_p = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}_p(0\leftrightarrow y)$$

$$\frac{d}{dp}\chi_p \text{ “}=\text{” } \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(0\leftrightarrow y) \text{ “}=\text{”}$$

$$\text{“}=\text{” } \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\sum_{e\in E^d} \mathbb{P}_p(\underbrace{e \text{ é pivotal para } \{x\leftrightarrow y\}})$$

$\subset$ {existem caminhos abertos de elos disjuntos, um ligando 0 a x e outro ligando z a y}

$$\overset{BK}{\leq} \text{const.} \sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\sum_{e\in E^d} \mathbb{P}_p(0\leftrightarrow x)\,\mathbb{P}_p(y\leftrightarrow z) \quad \to \chi_p$$

$$= \text{const. } \chi_p \underbrace{\sum_{\substack{e\in E^d\\(x,z)}} \mathbb{P}_p(0\leftrightarrow x)} \leq \text{const.}\cdot 2d\,\chi_p^2.$$

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z:\|z-x\|=1} \mathbb{P}_p(0\leftrightarrow x) = 2d\,\chi_p$$

4ª, 3-4-2013

Próximo tópico:

Fase subcrítica

(Aula passada): Se $\chi_p<\infty$ (logo, fase subcrítica — ou crítica, mas sabemos que não é o caso), então

$$\tau_p(0,y) \leq K e^{-\sigma\|y\|}, \quad K<\infty, \quad \sigma>0 \quad \forall y$$

Aula de hoje: Se $\chi_p < \infty$

$$\mathbb{P}_p(|C| \geq n) \leq C e^{-\lambda n}, \quad C > 0, \ \lambda > 0, \ \forall n. \qquad (2)$$

A partir de (1), só podemos concluir o seguinte:

De $|C| \leq (\underbrace{\text{raio de } C}_{\max\{\|y\| :\, y \in C\}})^d$,

$$\mathbb{P}_p(|C| \geq n) \leq \mathbb{P}_p(\underbrace{\text{raio de } C \geq n^{1/d}}_{\substack{\cap \\ 0 \leftrightarrow \partial S_{n^{1/d}}}})$$

$$\leq \sum_{y \in \partial S_{n^{1/d}}} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow y) \overset{(1)}{\leq} K e^{-\sigma n^{1/d}} \, \text{cte}.\, n^{1/d}$$

$$\leq \text{cte}.\, e^{-\sigma' n^{1/d}}, \qquad \sigma > \sigma' > 0.$$

Algo mais precisa ser feito para obter (2).

(Em mais algumas aulas.)

Se $p < p_c$, então $\chi_p < \infty$.

⌈De fato, mostraremos que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial S_n) \leq K e^{-\sigma n}$, $\forall n$,

em que $K < \infty$, $\sigma > 0$ são constantes. ⌋

Fase supercrítica $(p_c, 1]$

(Aula de hoje / que vem)

Se $p > p_c(S)$, um ponto crítico a ser definido $\geq p_c$, <1 em $d \geq 3$

$$\tau_p^f(0, y) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow y, |C| < \infty) \leq C e^{-\lambda \|y\|}$$

[Em $d = 2$, $p_c(S) = p_c$, mas o resultado vale para $p > p_c$.]

Como se prova no exercício 3 da lista 2,

$$\mathbb{P}_p(\infty > |C| \geq n) \geq K e^{-\sigma n^{\frac{d-1}{d}}}, \quad \forall n$$

$K < \infty$, $\sigma > 0$ são const.

Ao contrário do que acontece na fase subcrítica, não há decaimento exponencial da cauda da distr. cond de $|C|$ dado que $|C| < \infty$.

(Em algumas aulas / próxima aula)

Se $\theta(p) > 0$, então existe, quase certamente, apenas 1 aglomerado infinito na configuração do modelo de percolação.

Fase crítica ($p = p_c$)

Em $d=2$, $p_c = 1/2$ e $\theta(p_c) = 0$.

(Vamos fazer)

Discussão de um método para provar que $\theta(p_c) = 0$ em $d \geq 2$ renormalização. (De fato, não implementado. Variantes dinâmicas foram implementadas com sucesso em semiespaços de $\mathbb{Z}^d$)

Voltando à fase subcrítica

Teorema 1: se $\chi_p < \infty$, então

$$\mathbb{P}_p(|C| \geq n) \leq Ce^{-\lambda n}, \quad \forall n$$

em que $K < \infty$ e $\lambda > 0$ são constantes.

Esboço da prova

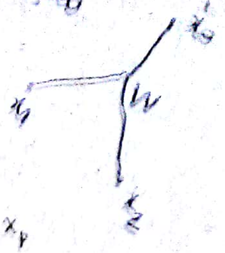
Seja $\tau_p(x,y,z) = \mathbb{P}_p(x, y \text{ e } z \text{ no mesmo aglom}) =$

$$= \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y,\ x \leftrightarrow z)$$

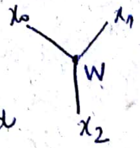
No exercício 2 da lista 2, será provado que

$$E_p(|C|^2) = \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^d} \tau_p(0, x_1, x_2)$$

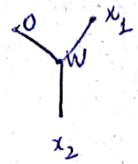
$$\tau_p(x_0,x_1,x_2) \leq \overbrace{\sum_{w\in\mathbb{Z}^d} \tau_p(w,x_0)\,\tau_p(w,x_1)\,\tau_p(w,x_2)}^{\text{Notação}}$$



desig. BK

$$= \sum_{w\in\mathbb{Z}^d}$$ 

Somar em x_2, x_1 e w: gera χ_p, $+1\ \chi_p$, $+1\ \chi_p$

$$\therefore\ E_p(|C|^2) \leq \sum_{x_1,x_2,w}$$ 

$$E_p(|C|^2) \leq \chi_p^3$$

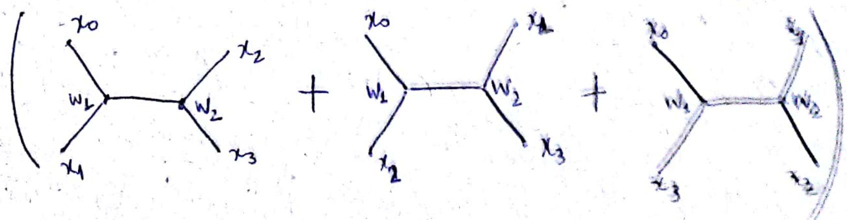
Queremos obter cotas para os momentos de ordem $n\geq 2$ de $|C|$ em termos de χ_p.

1º passo:

$$E(|C|^n) \overset{\text{trivial}}{=} \sum_{x_1,\dots,x_n\in\mathbb{Z}^d} \tau_p(0,x_1,\dots,x_n)$$

Em seguida, usa-se BK e ~~passo~~ fatos gráficos para grafos do tipo "esqueleto" para obter o seguinte

p. ex, $n=3$: $\quad \tau_p(x_0,x_1,x_2,x_3) \leq$

$$\leq \sum_{w_1,w_2}$$ 

$$E_p(|C|^3) \leq \sum_{x_1,x_2,x_3}\ \sum_{w_1,w_2}$$ 

$$= 3\,\chi_p^5$$

Em geral,

$$E_p(|C|^n) \leq \overset{\text{termo de contagem dos variantes dos grafos}}{N_{n+1}}\, \chi_p^{2n-1} \qquad (3)$$

$N_3 = 1, \quad N_4 = 3$

$$N_{n+1} = (2n-3)\, N_n, \quad n \geq 3$$

$$= \dots = (2n-3)(2n-5)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} \overset{\text{pode-se mostrar}}{=} E(Z^{2n-2}), \text{ em que } Z \sim N(0,1) \qquad (4)$$

~~Logo,~~ Consideramos agora, para $t > 0$,

$$E_p\left(|C| e^{t|C|}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} E\left(|C|^{n+1}\right)$$

$$\overset{(3,4)}{\leq} \chi_p + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} N_{n+2}\, \chi_p^{2n+1} =$$

$$= \chi_p \underbrace{\left[1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(t\chi_p^2)^n}{n!} E(Z^{2n})\right]}$$

$$= \chi_p \underbrace{E\left(e^{t\chi_p^2 Z^2}\right)}$$

$$\|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t\chi_p^2 z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{2} - t\chi_p^2\right) z^2}$$

A integral é $<\infty$ se $t\chi_p^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow t < \frac{1}{2\chi_p^2}$

Como $\chi_p < \infty$, a integral é $<\infty$ se $0 < t < \frac{1}{2\chi_p^2}$

Tomando da forma acima:

$$\mathbb{P}_p(|C| \geq n) = E_p(\mathbb{1}\{|C| \geq n\}) \leq E_p\left(\frac{|C|}{n} e^{t(|C|-n)}\right)$$

$$= \frac{e^{-tn}}{n} \overbrace{\underbrace{E_p(|C| e^{t|C|})}_{<\infty}}^{K}$$

Decaimento exponencial da função de conectividade finita na fase supercrítica

Def.:

2ª, 8-4-2013

Fase supercrítica

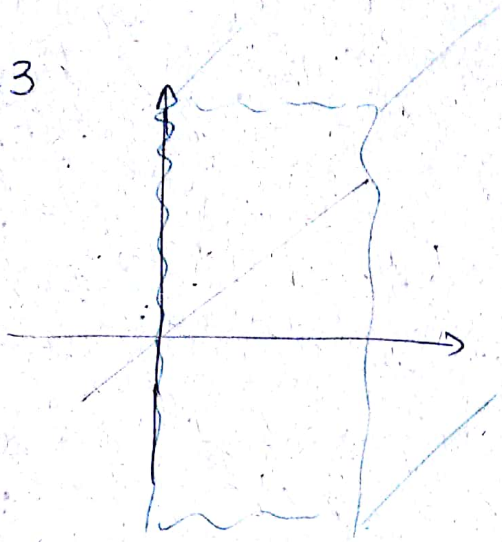
- Aula de hoje

1) Decaimento exponencial da conectividade ($p > p_c(S)$)

2) Unicidade do aglomerado infinito

<u>Def.:</u> $\overset{\text{slab}}{S_k} = \{0, 1, \ldots, k-1\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$, $k \geq 1$

$d=3$



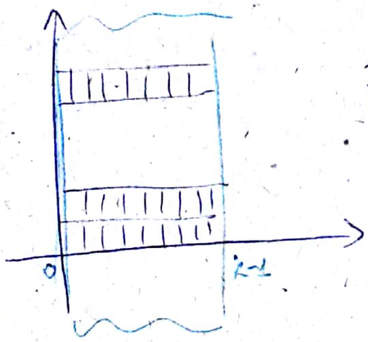
$p_c(S_k)$ = parâmetro crítico do modelo de percolação em S_k

$p_c = p_c(S_k) = \inf\{p \geq 0 : P_p(|C| = \infty) > 0\}$

$\Rightarrow p_c(S) = \lim_{k\to\infty} p_c(S_k)$ existe

<u>Obs.:</u> 1) $p_c(\mathbb{Z}^d) \leq p_c(S_k) \leq p_c(S_{k-1}) \leq p_c(\mathbb{Z}^{d-1})$, $\forall k \geq 2$

2) ~~$\forall k$~~ Em $d=2$: $p_c(S_k) = 1$, $\forall k \geq 1$



F_i: todos os elos verticais da i-ésima linha estão fechados $(k-1)$

$i \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} \{F_i \cap F_{i-1}\}\right) = 1$

$|C| < \infty$ neste evento

Podemos mostrar que $p_c(S) \approx p_c(\mathbb{Z}^d)$ se $d \geq 3$

Em $d \geq 3$,

$0 < p_c(\mathbb{Z}^d) \leq p_c(S) \leq p_c(\mathbb{Z}^{d-1}) < 1$

<u>Teorema 1</u>: Em $d \geq 3$, se $p_c > p_c(S)$, então

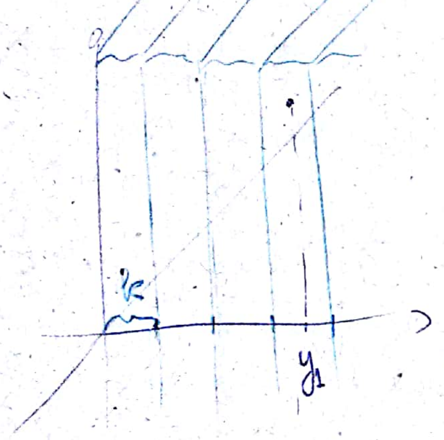
$\tau_p^t(0, y) \leq K e^{-\sigma\|y\|}$, $\forall y$, em que $K < \infty$, $\sigma > 0$ são const.

Obs.: resultado continua válido em $d=2$ se substituirmos $p_c(S)$ por $p_c(\mathbb{Z}^2)$.

Dem.: Vamos supor (sem perda de generalidade) que ~~y fixado~~ $y=(y_1,\dots,y_d)$ fixado é tal que

$$y_1 = \max\{|y_1|,\dots,|y_d|\} \equiv \|y\|$$

Como $p_c > p_c(S)$, então existe k tal que $\boxed{p_c > p_c(S_k)}$



Basta mostrar que

$$\tau_p^t(0,y) \leq \delta^{\lfloor y_1/k \rfloor} \qquad (*)$$

para algum $0<\delta<1$.

(O resultado segue tomando $K=\delta^{-1}$, $\sigma = -\frac{1}{k}\log\delta$)

Vamos mostrar $(*)$ com

$$\delta = P_p(|C|<\infty \text{ no modelo de percolação em } S_k) < 1,$$

pois $p > p_c(S_k)$

Consideremos o modelo de Percolação por invasão, em que Z_e, $e\in\mathbb{E}^d$, são v.a.'s que indicam a dificuldade de invadir o elo e; e seja o modelo de percolação com elos p-abertos inversos

$\tau_p^f(0,y) = \mathbb{P}\big($ y ser atingido pela invasão em algum tempo $T<\infty$; até T, todos os elos e invadidos têm $Z_e < p$; e, depois de T, algum elo e tem $Z_e \geq p\big)$

Sejam $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_\ell$; $\ell = \lceil y_1/k \rceil$, as placas entre a origem e y. Se a invasão atinge y num tempo finito T, então ela primeiro atinge $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_\ell$ (pela 1ª vez) nos tempos $T_1 < \ldots < T_\ell < \infty$, em vértices $\underbrace{X_1, \ldots, X_\ell}$ (X_1 = origem; $T_1 = 0$).

↳ Na fronteira esquerda das respectivas placas ($X_1 \in \tilde{S}_1, \ldots, X_\ell \in \tilde{S}_\ell$)

Vamos imaginar que, em T_i, colorimos de vermelho todos os elos p-abertos ($Z_e < p$) de $\tilde{S}_i$.

Obs: O evento em que estamos interessados não ocorre se X_i pertencer a um aglomerado infinito de elos vermelhos em $\tilde{S}_i$ para algum $i \leq \ell - 1$.

Seja A_i o evento de que X_i não pertence ao aglomerado infinito vermelho em $\tilde{S}_i$.

Logo,

$$\tau_p^f(0,y) \leq \mathbb{P}\big(\text{cada } \tilde{S}_i \text{ é atingido no tempo } T_i<\infty \text{ \& } A_i \text{ ocorre}, \; i=1,\dots,\ell-1\big) =$$

$$= \overset{\leq \delta}{\mathbb{P}(A_1)}\,\overbrace{\mathbb{P}(T_2<\infty \mid A_1)}^{\leq 1}\,\overbrace{\mathbb{P}(A_2 \mid T_2<\infty, A_1)}^{=\mathbb{P}(A_1)=\delta} \times \cdots$$

$$\cdots \times \underbrace{\mathbb{P}(T_{\ell-1}<\infty \mid A_2,\dots,A_{\ell-2}, T_2<\infty,\dots,T_{\ell-2}<\infty)}_{\leq 1}.$$

$$\times \underbrace{\mathbb{P}(A_{\ell-1} \mid \text{——})}_{=\mathbb{P}(A_1)=\delta} \leq \delta^{\ell-1} = \delta^{\lfloor y_1/\ell \rfloor}$$

✓ □

Unicidade do aglomerado infinito (quando $\theta(p)>0$)

$P_p(\underbrace{\text{haver um aglomerado infinito em algum lugar}}) = 1.$

(se $\theta(p)>0$)

$$\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \{|C_x|=\infty\}$$

(é caudal (não depende de um nº finito de elos); logo, $\mathbb{P}(\text{——})=0$ ou 1, e sabemos que é >0)

Seja $\eta: \Omega \to \{0,1,2,\dots,\infty\}$.

$\eta(\omega) = \#\{\text{aglomerados infinitos em } \omega\}$

Teorema 2: ~~com prob 1, ou η~~ se $\theta(p)>0$, então $P_p(\eta = 1) = 1$.

Dem.:

Passo 0

A v.a. η é P_p-trivial (no sentido de que existe uma constante $k = k_p$ tal que $P_p(\eta = k_p) = 1$). Isso segue de 2 fatos:

1) η é invariante por translações.

⌈ ~~Seja~~ Dado um sítio $x \in \mathbb{Z}^d$, $\tau_x : \Omega \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}^d} \Omega$ tal que

$$(\tau_x(\omega))_e = \omega_{e+x}, \quad e+x = (w+x, z+x)$$
$$e = (w, z). \quad ⌋$$

$$\eta \circ \tau_x = \eta, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

2) Por uma conhecida Lei 0-1, dizendo que v.a.'s invariantes por translações em espaços produto invariantes por translações, são triviais como $(\Omega, \mathcal{E}, P_p)$

$\ulcorner$ $A \in \mathcal{E}$ é invariante por translações toda vez que, $\omega \in A$, então $\tau_x \omega \in A$, $\forall x$

$$\Updownarrow$$

$$\tau_x A = \{\tau_x \omega, \omega \in A\} = A, \ \forall x \quad \lrcorner$$

~~Passo 1~~: Do passo 0, para concluir, precisamos mostrar que, Se $\theta(p) > 0$, então $k_p = 1$.

Passo 1 (aula de hoje): vamos mostrar que, se $\theta(p) > 0$, então k_p não pode ser 2 ou 3 ou 4 ou ... ou qualquer valor finito ≥ 2.

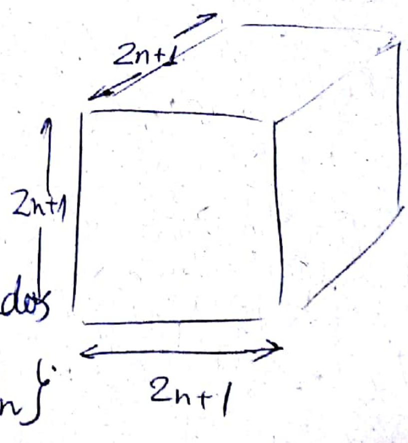
Aula que vem: Passo 2: se $\theta(p) > 0$, então $P_p(\eta \geq 3) = 0$.

Dem. do passo 1:

Suponha que $2 \leq k < \infty$.

Seja $Q_n = \{-n, \dots, n\}^d$

Seja $A_n = \{\omega$: todos os aglomerados infinitos de ω tocam em $\partial Q_n\}$



Obs.: $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \uparrow$ e $A_n \cap \{\eta = k_p\} \uparrow \{\eta = k_p\}$

(estamos usando que $k_p < \infty$)

$$\therefore P_p(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Seja n_0: $P_p(A_{n_0}) > 0$.

Obs.: A_n só depende de elos externos a Q_n, $\forall n$.

Seja $B_{n_0} = \{$todos os elos interiores e das faces de Q_n estão abertos$\}$

1) A_{n_0} e B_{n_0} são independentes.

2) Em $A_{n_0} \cap B_{n_0}$, $\eta = 1$.

Por 1), 2), $P_p(\eta = 1) \geq P_p(A_{n_0} \cap B_{n_0}) = \underbrace{P_p(A_{n_0}) P_p(B_{n_0})}_{>0}$

Pela trivialidade de η, $P_p(\eta = 1) = 1$ e, logo, $k_p = 1$.

Na aula que vem, vamos mostrar que $P_p(\eta \geq 3) = 0$.

4ª, 10-4-2013

Unicidade do aglomerado infinito na fase supercrítica

Teorema: Se $\theta(p) > 0$, então

$$P_p(\text{haver apenas 1 aglomerado infinito}) = 1$$

$\eta : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$;
$\eta(\omega) = \#$ aglomerados infinitos disjuntos em ω

$$P_p(\eta = 1) = 1 \text{ se } \theta(p) > 0$$

Vimos na aula passada que η é invariante por transl.

$\rightarrow$ Lei 0-1 $\rightarrow$ η é P_p-trivial, e, ∴, $\exists k = k_p$ tal que

$$P_p(\eta = k_p) = 1$$

Obs.: o que provaremos: que

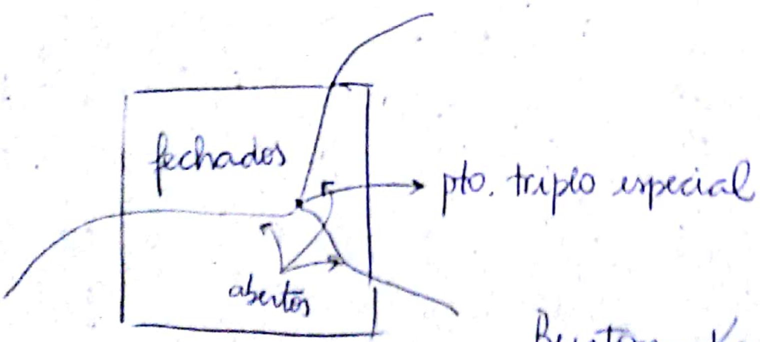
$$k_p = 0 \text{ se } \theta(p) = 0$$
$$= 1 \text{ se } \theta(p) > 0$$

Além disso, vimos um argumento mostrando que

$k_p = 0, 1$ ou ∞ $\rightarrow$ descartando $k_p = 2, 3, \ldots$

Aula de hoje: vamos descartar que $k_p \geq 3$

(Aizermann, Kesten, Newman)



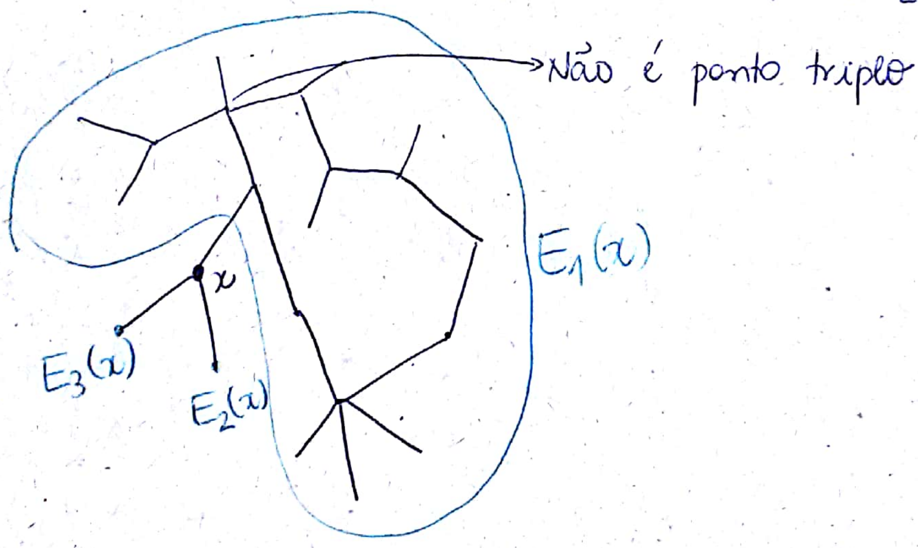
Burton-Keane

LISTA 3 DISPONÍVEL NO SITE

Proposição: $P_p(k_p \geq 3) = 0$

Preliminares da prova:

Def: Dado um grafo $G = (V, E)$ (vértices V, elos E) conexo, dizemos que um ponto $x \in V$ é dito um **ponto triplo** se houver exat. 3 elos de E incidentes em x e o grafo obtido de G removendo x e os elos de E incidentes a x, isto é, fazendo $G' = \{V', E'\}$, em que $V' = V \setminus \{x\}$ e $E' = E \setminus \{$elos de E incidentes em $x\}$, contiver exatamente três componentes conexos, ditos ramos de x e denotados $E_1(x)$, $E_2(x)$ e $E_3(x)$. ex.:



Fato sobre pontos triplos (ex. lista #3):

Suponha que $x_1, \ldots, x_n$ sejam pontos distintos de G. Então, dos $3n$ ramos de $x_1, \ldots, x_n$, a saber

$$E_1(x_1),\ E_2(x_1),\ E_3(x_1)$$
$$E_1(x_2),\ E_2(x_2),\ E_3(x_2)$$
$$\vdots$$
$$E_1(x_n),\ E_2(x_n),\ E_3(x_n),$$

podemos encontrar $n+2$ ramos disjuntos.

Prova da proposição: Vamos supor $k_p \geq 3$.

Seja $F_n = \{$pelo menos 3 aglomerados infinitos disjuntos atingem $Q_{n-1}\}$

$[Q_n = \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}^d]$

Obs: $F_n \subset F_{n+1}$

Então $F_n \uparrow \{\eta \geq 3\}$

$\therefore P_p(F_n) \longrightarrow P_p(\eta \geq 3) = 1$

Logo, existe n_0 tal que $P_p(F_{n_0}) > 0$.

Obs: F_n depende apenas de elos exteriores a Q_{n-1}.

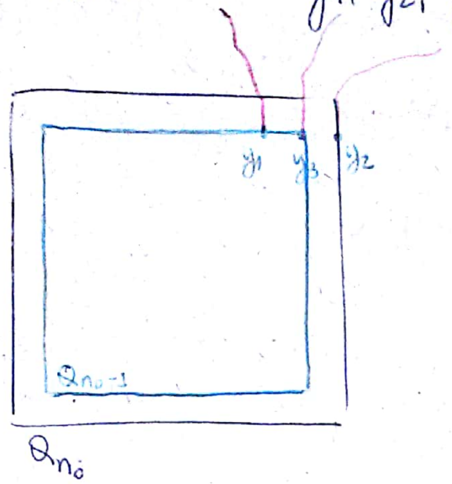
Sejam y_1, y_2, y_3 pontos distintos no interior das faces de Q_{n_0}.

Vamos definir $F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) = \{$usando apenas elos exteriores a Q_{n_0} ou das faces de Q_{n_0}, existem 3 caminhos infinitos disjuntos tocando y_1, y_2, y_3, respectivamente$\}$

Observe que

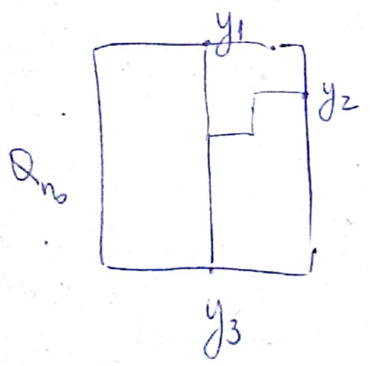
$$F_{n_0} \subset \bigcup_{\substack{y_1, y_2, y_3 \\ \text{pts. distintos do interior} \\ \text{das faces de } Q_{n_0}}} F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$$

Como $P_p(F_n) > 0$, então $P_p(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) > 0$ para alguma escolha de y_1, y_2, y_3.



Podemos agora escolher em Q_{n_0-1} um sítio x tal que existem 3 caminhos de elos disjuntos no interior de Q_{n_0} conectando x a, respect//, y_1, y_2, y_3.

Escolhido x, seja $F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3, x) = \{$os 3 caminhos mencionados ~~conectan~~ conectando x a y_1, y_2, y_3 estão abertos, e todos os demais elos do interior de Q_{n_0} estão fechados$\}$.



Obs: $P_p(F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3, x)) > 0$, e $F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3, x)$ e $F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)$ são independentes, e, na intersecção

$$F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_{n_0}(y_1, y_2, y_3, x)$$

2ª, 15-4-2013

Na aula passada, vimos que, se $\theta(p)>0$, então $\mathbb{P}_p$(haver exatamente um aglomerado infinito) $= 1$ (Teorema da Unicidade)

Corolários:

1) Não-decaimento de $\tau_p(x,y)$

$$\tau_p(x,y) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y) \geq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y,\ |C_x| = |C_y| = \infty)$$

Teor. Unicidade

$$\overset{}{=} \mathbb{P}_p(|C_x| = \infty,\ |C_y| = \infty)$$

$$\overset{FKG}{\geq} \mathbb{P}_p(|C_x| = \infty)\, \mathbb{P}_p(|C_y| = \infty) = [\theta(p)]^2$$

$\therefore$ Na fase supercrítica,

$$\tau_p(x,y) \geq \delta > 0 \quad p/\ \forall\, x, y$$

2) $\theta(p)$ é contínua à esquerda em $(p_c, 1]$

Basta demonstrar que

$$\lim_{p' \uparrow p} \theta(p') = \theta(p), \text{ para } p \in (p_c, 1)$$

Modelo padrão

$$\lim_{p'\uparrow p} \left[\theta(p) - \theta(p')\right] = \mathbb{P}(|C_p| = \infty) - \lim_{p'\uparrow p} \mathbb{P}(|C_{p'}| = \infty) =$$

$C_p \supset C_{p'}$

$$= \mathbb{P}\Big(\{|C_p| = \infty\} \setminus \bigcup_{p'<p} \{|C_{p'}| = \infty\}\Big) =$$

$\subset \{|C_p| = \infty\}$

Se $p' < p'' \Rightarrow C_{p'} \subset C_{p''} \Rightarrow \{|C_{p'}| = \infty\} \uparrow \bigcup_{p'<p} \{|C_{p'}| = \infty\}$

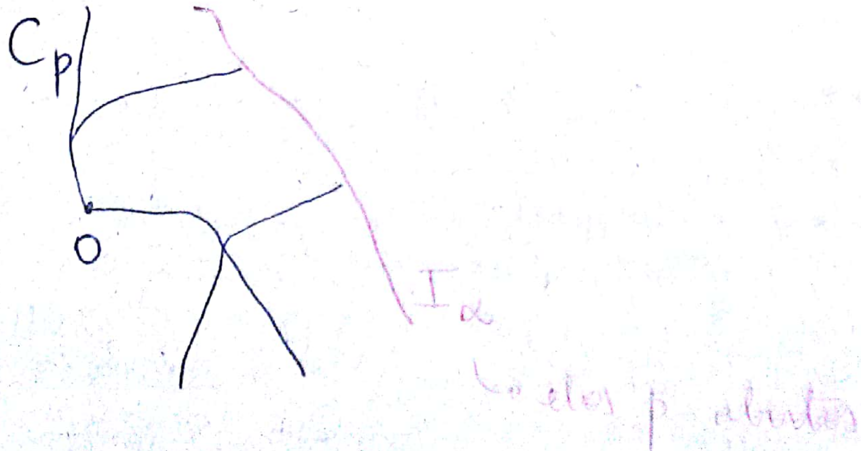
$$= \mathbb{P}\big(|C_p| = \infty,\ |C_{p'}| < \infty,\ \forall p' < p\big)$$ qdo $p' \uparrow p$

Vamos mostrar que este evento tem $\mathbb{P}$-prob. 0

Vamos mostrar que, se $|C_p| = \infty$, então $\mathbb{P}$-quase certamente existe $\pi < p$ tal que $|C_\pi| = \infty$.

Como $p > p_c$, existe α tal que $p_c < \alpha < p$

Como $\alpha > p_c$, então quase certamente existe um aglomerado ∞ I_α α-aberto em algum lugar



Pela unicidade do aglomerado infinito quase certamente p-aberto, $I_\alpha \subset C_p$.

Então, $I_\alpha \subset C_p$, existe um caminho (finito) γ, p-aberto, ligando 0 a I_α.

Seja $\mu = \max_{l \in \gamma} Z_l < p$, e tomemos $\mu < \pi < p$ também satisfazendo $\pi \geq \alpha$.

$$\therefore |C_\pi| = \infty.$$

$\square$

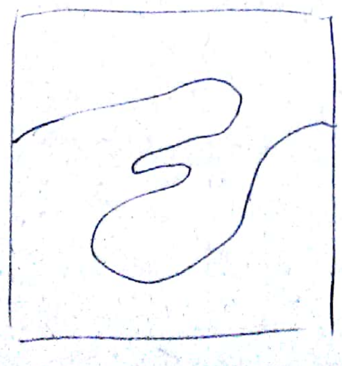
Obs.: Está estabelecido que $\theta(p)$ é contínua em $(p_c, 1]$.

3) Seja

$F_1 \Leftrightarrow F_2$ por dentro de Q_n

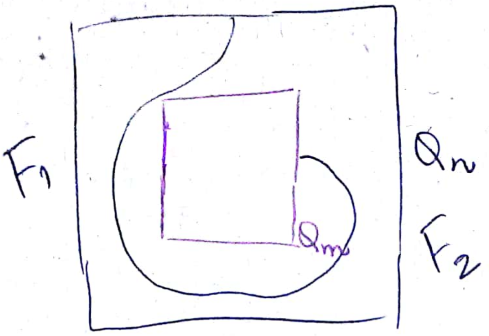
$ED_n = \{$existe um cruzamento aberto da esquerda para a direita em $Q_n\}$

em que $Q_n = \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}^d$

$ED_n = \Big\{$  $\Big\}$

Corolário 3: $P_p(ED_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 1$ se $\theta(p) > 0$.

Dem.: Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $m \geq 1$ tal que



$P_p(B_m) > 1 - \varepsilon$, (1) em que

$B_m = \{$existe um caminho aberto infinito aberto a partir de $Q_m\}$

Obs.: 1) $Q_m \subset Q_{m+1}$ e $\bigcup_{m \geq 1} B_m = \{$existe um agl. $\infty\}$

Logo, a escolha de $\underline{m}$ está bem definida.

2) Em B_m, existe caminho infinito ligando Q_m à fronteira de Q_n, $\forall n \geq m$.

Sejam $F_1, F_2, \ldots, F_{2d}$ as faces de ∂Q_m.
(F_1: dir., F_2: esq.)

De (1), $P_p\Big(\overbrace{Q_m \leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{2d} F_i}^{B_m \subset}\Big) \underset{(2)}{\geq} 1 - \varepsilon$ → por dentro de Q_n

$= \bigcup_{i=1}^{2d} \underbrace{\{Q_m \leftrightarrow F_i\}}_{C_{m,i}}$

no sentido de "evento crescente"

$C_{m,i}$ crescente para todo i e têm todos a mesma probabilidade (por causa da invar. por rotações de $90°$ do modelo).

$$1 - P_p\left(\bigcup_{i=1}^{2d} C_{m,i}\right) = P_p\left(\bigcap_{i=1}^{2d} C_{m,i}^c\right) \geq \prod_{i=1}^{2d} P_p\left(C_{m,i}^c\right)$$

$$= \left[1 - P_p(C_{m,1})\right]^{2d}$$

Obtivemos a desigualdade

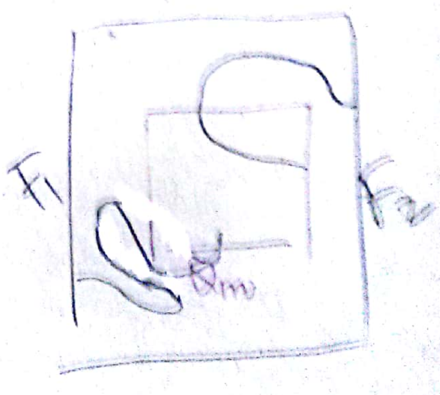
$$\left[1 - P_p(C_{m,1})\right]^{2d} \leq 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{2d} C_{m,i}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - P(C_{m,1}) \leq \left[1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{2d} C_{m,i}\right)\right]^{\frac{1}{2d}}$$

$$\Rightarrow P_p(C_{m,1}) \geq 1 - \left[1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{2d} C_{m,i}\right)\right]^{\frac{1}{2d}}$$

$\therefore$ de (2):

$$P_p(C_{m,1}) \geq 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2d}}$$



Por FKG,

$$P_p(C_{m,1} \cap C_{m,2}) \geq \left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2d}}\right)^2$$

Seja $A_{m,n} = \{$existem 2 caminhos abertos disjuntos de Q_m a $\partial Q_n\}$

$A_{m,n} \supset A_{m,n+1}$

$A_{m,n} \downarrow A_{m,\infty} = \{$há 2 aglomerados infinitos disjuntos tocando em $Q_m\}$

$\therefore P_p(A_{m,n}) \downarrow 0$ qdo $n \uparrow \infty$.

Finalmente: em $C_{m,1} \cap C_{m,2} \setminus A_{m,n} \subset ED_n$.

$P_p(ED_n) \geq P(C_{m,1} \cap C_{m,2}) - P(A_{m,n})$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P_p(ED_n) \underset{(4)}{\overset{(3)}{\geq}} (1 - \varepsilon^{\frac{1}{2d}})^2.$$

Como ε é arbitrário, temos o resultado que

$\lim_{n\to\infty} P_p(ED_n) = 1$.

<u>De volta à fase subcrítica</u>

<u>Teorema 2</u>: Seja $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$, $S_n = \{x : \|x\| \leq n\}$

Se $p < p_c$, então

$$P_p(A_n) \leq K e^{-\sigma n}, \quad \forall n \geq 1$$

em que $K < \infty$, $\sigma > 0$ são constantes.

Obs: $P_p(A_n) \geq \underbrace{P_p(0 \leftrightarrow x)}_{= \tau_p(0,x)}$ p/ $x \in \partial S_n$,

o que nos dá o decaimento exponencial da função de conectividade.

Segue também que

$$E_p(|C|) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \tau_p(0,x) < \infty$$

$\Rightarrow$ existem $K' < \infty$, $\sigma' > 0$

$$P_p(|C| \geq n) \leq K' e^{-\sigma' n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Preliminares de dem. do teo. 2:

Uso da fórmula de Russo

F.R.: Dado um evento crescente, dependendo de um conjunto finito de elos, então to

$$\frac{1}{p} P_p(\underbrace{e \text{ está aberto}}_{A \text{ ocorre}}, e \text{ é pivotal p/} A)$$

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \sum_{e \in E^d} \boxed{P_p(e \text{ é pivotal para } A)} =$$

$$= E_p(N(A)).$$

nº de elos pivotais p/$\bar{A}$.

Indep. entre status de e e pivotalidade de e

Finalmente:

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \frac{1}{p} \sum_{e \in E^d} P_p(A, e \text{ é pivotal p/} A) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{e \in E^d} P_p(e \text{ é pivotal p/} A \mid A)\, P_p(A).$$

Logo,

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = \frac{P_p(A)}{p} \overbrace{\sum_{e \in E^d} P_p(e \text{ é pivotal p/} A \mid A)}^{E_p(N(A) \mid A)}$$

$$\therefore \frac{d}{dp} \log P_p(A) = \frac{1}{p} E_p(N(A) \mid A)$$

Dados $0 < p_1 < p_2 \leq 1$,

$$\log P_{p_1}(A) - \log P_{p_2}(A) = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A) \mid A)\, dp$$

Exponenciando,

$$P_{p_1}(A) = P_{p_2}(A)\, e^{-\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A)\,dp}$$

$$\leq P_{p_2}(A)\, e^{-\int_{p_1}^{p_2} E_p(N(A)|A)\,dp}$$

Logo, $p < p' < p_c$,

$$P_p(A_n) \leq e^{-\int_p^{p'} E_p(N(A_n)|A_n)\,dp} \qquad \frac{d}{dp} P_p(A)$$

4ª, 17-4-2013

Decaimento exponencial em $p < p_c$

Seja $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$

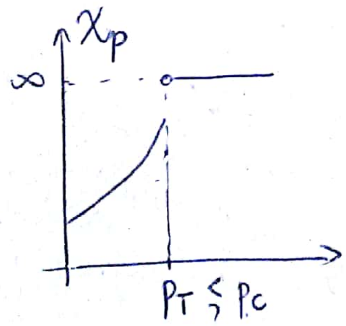
Teorema: se $p < p_c$, então

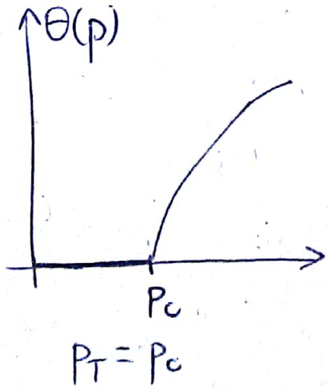
$$P_p(A_n) \leq K e^{-\sigma n}, \quad \forall n \geq 1,$$

em que $K < \infty$ e $\sigma > 0$ são constantes.

$\sigma = \sigma(p)$

MENSHIKOV ('86), AIZENMAN & BARSKY ('87)





<u>Dem.</u>: Seja $g_p(n) = P_p(A_n)$.

1º <u>passo</u>: Como visto na aula passada, da fórm. de Russo, obtemos:

para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, $\quad g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp\left\{-\int_\alpha^\beta E_p(\underbrace{N(A_n)}_{\text{nº de elos pivotais p/ } A_n}|A_n)\, dp\right\}$ (0)

2º <u>passo</u>: Comparação de $N(A_n)|A_n$ à soma de v.a.'s i.i.d.

Note que $E_p(N(A_n)|A_n) = \sum_{k \geq 1} P_p(N(A) \geq k | A_n)$

Seja M o raio do aglomerado da origem, i.e.,

$$M = \max\{k : A_k \text{ ocorre}\} = \max\{\|x\|, x \in C\}$$

Vamos mostrar adiante que

$$P_p(N(A_n) \geq k | A_n) \geq P.((1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \leq n), \tag{1}$$

em que $M_1, M_2, \ldots$ são v.a.'s i.i.d., $M_i \sim M$.

De (1), concluiremos que

$$E_p(N(A_n)|A_n) \geq \sum_{k \geq 1} P((1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \leq n)$$

$$\geq \frac{n}{E_p(1+M \wedge n)} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} g_p(i)} - 1 \tag{2}$$

Substituindo (2) em (0),

$$g_\alpha(n) \leq g_\beta(n) \exp\left\{(\beta-\alpha) - (\beta-\alpha)\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} g_\beta(i)}\right\} \tag{3}$$

3º <u>passo</u>: (3) é uma relação satisfeita por uma família de funções $\{g_p(n), p \in [0,1], n \geq 1\}$ com certas propriedades de monotonicidade:

$g_p(n) \uparrow$ qdo. $p \uparrow$ e $\downarrow$ qdo. $n \uparrow$

Adicionando a esta relação e propriedades a condição de que $g_p(n) \to 0$ quando $n \to \infty$ se $p < p_c$ permite provar o seguinte resul.:

→ vide apêndice das notas

Lema: se $p < p_c$, então existe uma constante $\delta = \delta(p) < \infty$ tal que

$$g_p(n) \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (3) $(p < p' < p_c)$:

$$g_p(n) \leq g_{p'}(n)\, e^{(p'-p)}\, e^{-\frac{p'-p}{\delta}\sqrt{n}} \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} g_{p'}(n) = \overset{=\Delta=}{\Delta(p')} < \infty \quad (5)$$

[Neste caso, note que $\sum_{i=1}^{n} g_p(i) \leq \overbrace{\delta\ \text{const.}}^{\delta'} \sqrt{n}$]

Substituindo (5) em (3):

$$g_p(n) \leq K e^{-\sigma n}, \quad K = e^{(p'-p)}, \quad \sigma = \frac{p'-p}{\Delta}$$

De volta ao passo (2):

1) Comparação

$$P_p(N(A_n) \geq k \mid A_n) \overset{(1)}{\geq} P\big((1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \leq n\big)$$

De (1), segue que

$$E_p(N(A_n) \mid A_n) \overset{(*)}{\geq} \frac{n}{E_p(1 + M \wedge n)} - 1$$

M = raio de C

$M_1, M_2, \ldots$ i.i.d. $\sim M$

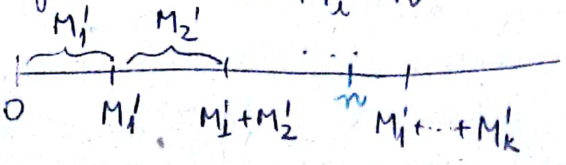
$\wedge$ = mínimo

Vamos mostrar que $(1) \Rightarrow (*)$

$$E_p(N(A_n) \mid A_n) \overset{(1)}{\geq} \sum_{k \geq 1} P\big((1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \geq n\big)$$

Vamos mostrar que o lado direito de (1) é $\geq$ o lado direito de $(*)$.

Seja $M_i' = 1 + M_i \wedge n$



$K = 1 +$ o nº de renovações até o instante n.

Em outras palavras,

$$K = \min\{k : M_1' + \cdots + M_k' > n\}$$

Obs.: 1) K é um tempo de parada p/ $M_1', M_2', \ldots$ no sentido de que o evento $\{K > \ell\}$ depende apenas de $M_1', \ldots, M_\ell'$.

2) $P\left((1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \leq n\right) = P\left(M_1' + \cdots + M_k' \leq n\right) =$

$= P(K \geq k+1)$

$\therefore$ lado direito de (1) $= \sum_{k \geq 1} P(K-1 \geq k) = E(K-1) = E(K) - 1$ (6)

Pela Identidade de Wald

$$E(\underbrace{M_1' + \cdots + M_K'}_{\geq n}) = E(K)\,E(M')$$

$$\Rightarrow E(K) \geq \frac{n}{E_p(M')} \qquad (7)$$

Substituindo (7) em (6): $E_p\left(N(A_n) | A_n\right) \geq \dfrac{n}{E(1+M_{1n})} - 1$.

Para aula que vem:

$$P_p(N(A_n) \geq k \mid A_n) \geq P_p(M_1' + \cdots + M_k' \leq n)$$

2ª, 22-4-2013

Prova do Teorema ⌈Se $p < p_c$, então $P_p(0 \leftrightarrow \partial S_n) \leq K e^{-\sigma n}$⌋

Ficou faltando mostrar o seguinte:

$$P_p\left(N(A_n) \geq k \middle| A_n\right) \geq P\left[(1+M_1) + \cdots + (1+M_k) \leq n\right] \qquad (1)$$

em que $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$

$N(A_n) = \#$ elos pivotais p/ A_n

$M_1, M_2, \dots$ i.i.d. $\sim M =$ raio de C

$= \max\{k : A_k \text{ ocorre}\}$

$= \max\{\|x\|, x \in C\}$

$$P_p(A_n) \leq P_{p'}(A_n)\, e^{-\int_p^{p'} E_p(N(A_n)|A_n)\, dp} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} P_{p'}(A_i)}$$

Aula de hoje mostrar (1).

Para descrever o argumento, sejam

$e_1, e_2, \dots, e_{\underset{N(A_n)}{\overset{}{m}}}$ na ordem em que são percorridos por qualquer caminho da origem até ∂S_n.

Desigualdade BK

$P(A \circ B) \leq P(A)P(B)$

eventos

Seja $e_i = (x_i, y_i)$ com x_i atingido antes que y_i, $i = 1, \dots, m$.

Obs: Note que pode acontecer $y_i = x_{i+1}$.

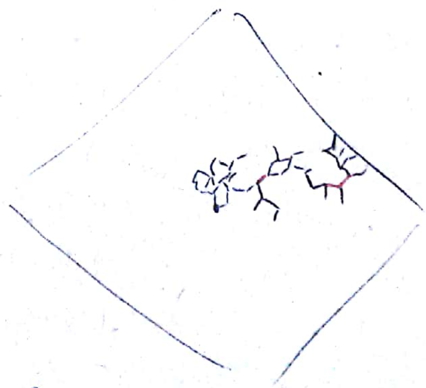
Sejam $\rho_1 = \|x_1\|$ $(= \|0, x_1\|)$

$\rho_2 = \|y_1, x_2\|$

$\vdots$

$\rho_m = \|y_{m-1}, y_m\|$

$\rho_i = \infty$ se $i > m$



Obs. Sobre os elos pivotais: aglomerados de elos abertos = salsichas.

(No exemplo acima, $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 = \rho_4 = 0.$)

Se $(\rho_1+1)+\cdots+(\rho_k+1)\leq n$, então $N(A_n)\geq k$. (2)

De (2), $P_p(N(A_n)\geq k\,|\,A_n) \geq P((\rho_1+1)+\cdots+(\rho_k+1)\leq n\,|\,A_n)$

$$= P(\rho_1+\cdots+\rho_k \leq n-k\,|\,A_n)$$

Para provar (1), basta mostrar que

$$P_p(\rho_1+\cdots+\rho_k \leq n-k\,|\,A_n) \geq P(M_1+\cdots+M_k \leq n-k) \quad (3)$$

$$\forall k\leq n.$$

Versão "condicional" de (3):

$$P_p(\rho_k \geq r_k\,|\,\rho_1=r_1,\ldots,\rho_{k-1}=r_{k-1},A_n) \geq P(M\leq r_k) \quad (3')$$

$\forall r_1,\ldots,r_k:\ r_1+\cdots+r_k \leq n-k$.

Lema 1: (3') $\to$ (3)

Dem:

$$P_p(\rho_1+\cdots+\rho_k \leq n-k\,|\,A_n)$$

$$= \sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}} P_p\Big(\rho_k \leq \overbrace{n-k-\sum_{i=1}^{k-1} r_i}^{=r_k}\,\Big|\,\rho_1=r_1,\ldots,\rho_{k-1}=r_{k-1},A_n\Big) \times P_p(\text{———}\,|\,A_n)$$

$$\overset{(3')}{\geq} \sum_{r_1,\ldots,r_{k-1}} P\Big(M_k \leq n-k-\sum_{i=1}^{k-1} r_i\Big)\, P_p(\text{———}\,|\,A_n)$$

$$= P(\rho_1+\cdots+\rho_{k-1}+M_k \leq n-k\,|\,A_n)$$

$$= \sum_{r_1,\ldots,r_{k-2},r_k} P\Big(\rho_{k-1} \leq n-k-\sum_{i=1}^{k-2} r_i - r_k\,\Big|\,\rho_1=r_1,\ldots,\rho_{k-2}=r_{k-2},\cancel{M_k=r_k},A_n\Big) \times P(\text{———}\,|\,A_n)$$

$$\overset{(3')}{=} \sum P(M_{k-1} \leq \text{——}) \, P(\text{——} \mid A_n)$$

$$= P(\rho_1 + \cdots + \rho_{k-2} + M_{k-1} + M_k \leq n-k \mid A_n)$$

$$= \cdots \overset{(3')}{\geq} P(\rho_1 + \cdots + \rho_{k-3} + M_{k-2} + M_{k-1} + M_k \leq n-k \mid A_n) = \cdots$$

$$\cdots \geq P(M_1 + \cdots + M_k \leq n-k) \quad \checkmark$$

$\square$ Lema

Para concluir, basta mostrar (3').

$$\ulcorner \; P(\rho_k \leq r_k \mid \underbrace{\rho_1 = r_1, \ldots, \rho_{k-1} = r_{k-1}}_{B}, A_n) \geq P(M \leq r_k) \quad (3')$$

$\forall r_1, \ldots, r_k$
$r_1 + \cdots + r_k \leq n-k \; \lrcorner$

<u>Lema</u> 2 : (3') é válida.

Basta mostrar que

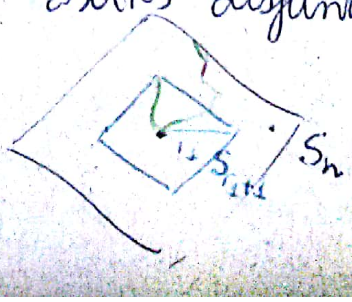
$$P_p(\rho_k \leq r_k, B, A_n) \leq P(M \leq r_k) \, P(B, A_n)$$

$$\Leftrightarrow P_p(\rho_k > r_k, B, A_n) \leq P(M > r_k) \, P(B, A_n) \quad (4)$$

Caso $k=1$, (4) torna-se

$$P_p(\rho_1 > r_1, A_n) \leq P(M > r_1) \cdot P_p(A_n) \quad (4.1)$$

Em $\rho_1 > r_1$, existem 2 caminhos abertos disjuntos ligando a origem a ∂S_{r_1+1}.



Logo, em $\{\rho_1 > r_1\} \cap A_n$, existem 2 caminhos abertos disjuntos, um ligando a origem a ∂S_{r_1+1} e outro ligando a origem a ∂S_n.

Portanto, $\{\rho_1 > r_1\} \cap A_n \subset \{0 \leftrightarrow \partial S_{r_1+1}\} \circ \{0 \leftrightarrow \partial S_n\}$

$$\therefore P_p(\rho_1 > r_1, A_n) \leq P(\{\sim\} \circ \{\sim\})$$

$$\overset{BK}{\leq} P(\underbrace{0 \leftrightarrow \partial S_{r_1+1}}_{\substack{A_{r_1+1} \\ \shortparallel \\ \{M > r_1\}}}) \, P(\underbrace{0 \leftrightarrow \partial S_n}_{A_n})$$

$\square$ 4.1

Vamos escrever

$$B = \dot{\bigcup_{\Gamma}} B_\Gamma = \text{partição de } B \text{ sobre configurações}$$

detalhadas das salsichas de raios $\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$.

Então, $(4) \Leftrightarrow \sum_{\Gamma} P(\rho_k > r_k, B_\Gamma, A_n)$

$$\leq \sum_{\Gamma} P(M > r_k) \, P(B_\Gamma, A_n)$$

Vamos mostrar que, $\forall \Gamma$,

$$P(\rho_k > r_k, A_n | B_\Gamma) \leq P(M > r_k) \, P(A_n | B_\Gamma)$$

↳ Neste evento, temos 2 caminhos abertos disjuntos ligando y_{k-1} a $\partial S(y_{k-1}, r_k+1)$ sem usar os elos das salsichas anteriores.

Então, em $\{\rho_k > r_k, A_n\}$ existem 2 caminhos abertos disjuntos, um ligando y_{k-1} a $\partial S(y_{k-1}, r_k+1)$ e outro ligando y_{k-1} a ∂S_n, ambos sem usar os elos das salsichas anteriores.

Portanto, $\{\rho_k > r_k, A_n\} \subset$

$$\{\{y_{k-1} \overset{(*)}{\longleftrightarrow} \partial S(y_{k-1}, r_{k+1})\} \circ \{y_{k-1} \overset{(*)}{\longleftrightarrow} \partial S_n\}$$

$\overset{(*)}{\longleftrightarrow}$ = conexão sem usar elos revelados de B_r.

Podemos usar BK com $P(\cdot \mid B_r)$ e obter

$$P(\rho_k > r_k, A_n \mid B_r) \leq P(y_{k-1} \overset{(*)}{\longleftrightarrow} \partial S(y_{k-1}, r_k+1) \mid B_r)$$
$$P(y_{n-1} \overset{(*)}{\longleftrightarrow} \partial S_n \mid B_r) \leq P(A_n \mid B_r) \quad \square$$

$$\leq \underbrace{P(0 \longleftrightarrow \partial S_{r_k+1})}_{P(M > r_k)}$$

4ª, 24-4-2013

<u>Última aula</u>:

Se $p < p_c$, $P_p(x \longleftrightarrow y) \leq K e^{-\sigma \|x-y\|}$, $\forall x, y$

$K < \infty$, $\sigma = \sigma(p) > 0$ ctes.

Corolário 1: Seja

$ED_n = \{$Há um caminho aberto em $Q_n = \{-n, \dots, n\}^d$ ligando as faces esquerda e direita$\}$

Se $p < p_c$, então $P_p(ED_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Dem.: $ED_n \subset \bigcup_{\substack{x \in F_e \\ y \in F_d}} \{x \leftrightarrow y\}$

faces direita e esquerda de Q_n.

$$P_p(ED_n) \leq \sum_{\substack{x\in F_e \\ y \in F_d}} P_p(x \leftrightarrow y) \leq K \sum_{\substack{x\in F_e \\ y \in F_d}} e^{-\sigma \|x-y\|}$$

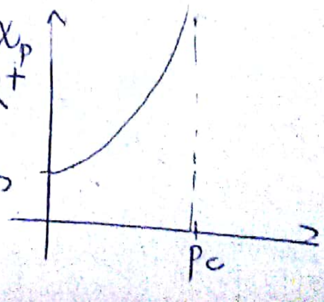
$$\leq K e^{-\sigma 2n} \underbrace{\# \{(x,y) : x \in F_e,\ y \in F_d\}}_{\leq\, cte.\ (n^{2d-1})^2} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0,$$

pois $\sigma > 0$ $\square$

Corolário 2:

⌜ $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é analítica num ponto $p \in \mathring{I}$ se a série de Taylor de f em torno de p é convergente. ⌟

Seja $\chi_p = E_p(|C|)$. Então, $\chi : [0, p_c) \to \mathbb{R}^+$ é suave (tem as derivadas em todos os pontos de $[0, p_c)$)



<u>Dem</u>: $\chi_p = E_p(|C|) = \sum_{n\geq 1} n \, P_p(|C|=n)$

$$P_p(|C|=n) = \sum_{m,b} a_{n,m,b} \, p^m (1-p)^b$$

→ nº de animais de rede com n sítios, m elos e b elos de fronteira

animal de rede: qualquer componente conexo finito de $\mathbb{Z}^d$ contendo a origem

<u>Obs.</u>: $a_{n,m,b} \neq 0$ só se $n-1 \leq m \leq dn$, $b \leq 2dn$. (*)

De (*),

$$1 \geq \sum_{m,b} a_{n,m,b} \, p^m (1-p)^b \geq p^{dn} (1-p)^{2dn} \sum_{n,b} a_{n,m,b}$$

$$\therefore \sum_{m,b} a_{n,m,b} \leq \left\{ \left[\frac{1}{p(1-p)^2} \right]^d \right\}^n, \ \forall p \in [0,1]$$

$$\leq \min \{ \text{——} \}^n$$

$$= \left\{ \left[\frac{1}{\max_{p\in[0,1]} p(1-p)^2} \right]^d \right\}^n \leq (7^d)^n$$

Em $p=0$, vamos mostrar analiticidade complexa.

Seja

$$K(z) = \sum_{n\geq 1} n \sum_{m,b} a_{n,m,b} \, z^m (1-z)^b$$

formalmente

Queremos mostrar que $K(z)$ está bem definida e é analítica numa vizinhança da origem no plano complexo.

Basta estabelecer a convergência uniforme da série formal de $K(z)$.

⌈ Existe uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}$ tal que

$$K_{N,M}(z) = \sum_{n=M}^{N} n \sum_{n,b} a_{n,m,b}\, z^{m} (1-z)^{b} \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0 \quad \text{uniformemente em } V. \rfloor$$

Vamos tomar inicialmente $|z|<1$

$$|K_{N,M}(z)| \leq \sum_{n=M}^{N} n \sum_{m,b} a_{n,m,b} |z|^{m} (1+|z|)^{b}$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} n\, 4^{dn} |z|^{n-1} \boxed{\sum_{m,b} a_{n,m,b}}_{\leq 7^{dn}}$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} n\,(28^{d})^{n} |z|^{n-1} \leq 28^{d} \sum_{n=M}^{N} n\,(28^{d}|z|)^{n-1}$$

uniformemente em $|z| \leq c < \frac{1}{28^{d}}$ $\xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$

a)

Do Teorema de Vitali, $K(z)$ converge e é analítica complexa em $|z|<c$.

$\therefore K(p)$ é analítica real em $p=0$.

Em $p \in (0, p_c)$, diferenciando formalmente a série

$$\frac{d^{k}}{dp^{k}} \chi_p = \sum_{n} n \sum_{m,b} a_{n,m,b} \boxed{\frac{d^{k}}{dp^{k}} p^{m} (1-p)^{b}} \qquad \boxed{a_s = \frac{a!}{s!}}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} m_r\, b_{k-r}\, p^{m-r} (-1)^{k-r} \times (1-p)^{b-(k-r)}$$

Scanned by CamScanner

Basta mostrar que a série formal é uniformemente convergente numa vizinhança de p.

$$(*) = \left| \sum_{n=M}^{N} n \sum_{m,b} a_{n,m,b} \sum_{r=0}^{k} \sim\sim \right|$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} n \sum_{m,b} a_{n,m,b} \underbrace{\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{m}{p}\right)^{r} \left(\frac{b}{1-p}\right)^{k-r}}_{\downarrow} \boxed{p^{m}(1-p)^{b}}$$

$$\left(\frac{m}{p} + \frac{b}{1-p}\right)^{k} \leq \left(\frac{d}{p} + \frac{2d}{1-p}\right)^{k} n^{k}$$

$$\leq \left(\frac{d}{p} + \frac{2d}{1-p}\right)^{k} \sum_{n=M}^{N} n^{k+1} \boxed{\sum_{m,b} a_{n,m,b}\, p^{m}(1-p)^{b}} = P_p(|C|=n)$$

$$(*) \leq \left(\frac{d}{p} + \frac{2d}{1-p}\right)^{k} \underbrace{\sum_{n=M}^{N} n^{k+1} P_p(|C|=n)}_{\leq K e^{-\sigma(p) n^{1/d}}}$$

$\xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0$ uniformemente em $p \in [a,b] \subset (0,p_c)$

2ª, 29-4-2013

<u>Modelo em 2 dimensões: ponto crítico</u>

$\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ é autodual

$\mathbb{L}^2_* = (\mathbb{Z}^2_*, \mathbb{E}^2_*) \to$ isomorfo a $\mathbb{L}^2$

$\mathbb{Z}^2_* = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\mathbb{E}^2_*$ = elos vizinhos mais próximos de $\mathbb{Z}^2_*$.

Rel 1:1 entre $\mathbb{E}^2$ e $\mathbb{E}^2_*$: para cada elo de $\mathbb{E}^2$, associamos $e_* \in \mathbb{E}^2_*$: e_* é secante a e.

<u>Fato</u> (<u>geométrico</u>): Dado um aglomerado finito C de $\mathbb{Z}^2$, sejam $\bar{\partial}_{ext} C$ a fronteira externa de elos de C e $\bar{\partial}^*_{ext} C =$
$= \{ e_* : e \in \bar{\partial}_{ext} C \}$, então os elos de $\bar{\partial}^*_{ext} C$ formam um circuito em torno de C.

<u>Teorema</u>: Em $d=2$, $p_c = 1/2$ e $\theta(p_c) = 0$ (Kesten, 1982).

A prova consiste em provar 2 proposições:

<u>Proposição 1</u>: $\theta(1/2) = 0$ (Harris, 196?)

<u>Corolário</u>: $p_c \geq 1/2$

<u>Proposição 2</u>: $p_c \leq 1/2$.

Para a dem. de ambas as proposições, consideramos o modelo dual: (mod de percolação em $\mathbb{L}^2_*$).

<u>e_* está aberto sse. e estiver fechado</u>.

Obs.: o modelo dual correspondente ao modelo primal c/ densidade p é um modelo primal com densidade $1-p$.

Dem. da prop. 1. (Zhang)

Truque da raiz quadrada:

Dados $A_1, \dots, A_m$ eventos crescentes de mesma prob, então

$$P(A_1) \geq 1 - \left[1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\right]^{1/m} \qquad (1)$$

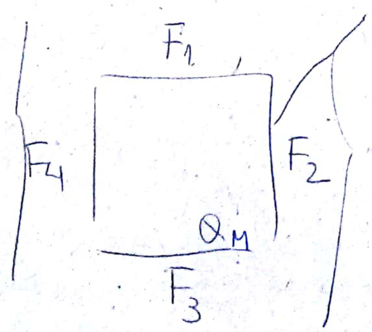
Dem.:

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1} A_i^c\right) \overset{FKG}{\geq} \left[\mathbb{P}(A_i^c)\right]^m$$

$$\Rightarrow \left[1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i^{(M)}\right)\right]^{1/m} \geq 1 - \mathbb{P}(A_1)$$

Seja $Q_M = \{0, \dots, M\}^2$ e sejam F_1, F_2, F_3, F_4 as faces de Q_M. Seja $A_i^{(M)} = \{$existe um aglomerado infinito tocando em F_i sem usar elos (internos) de $Q_M\}$

$A_2 =$



$Q_M^* = \{0, \dots, M-1\}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

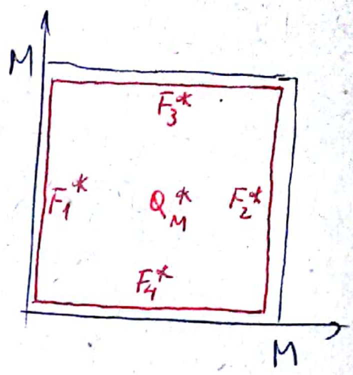
$F_i^* =$ faces de Q_M^*

$A_{*(i)}^{(M)} = \{$existe um agl. infinito tocando em F_i^* sem usar elos de $Q_M^*\}$

Vamos supor $\theta(1/2) > 0$.

Dado $\varepsilon>0$, existe $M_0 = M_0(\varepsilon)$ tal que

$$P_{1/2}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i^{(M)}\right) \geq 1-\varepsilon \quad , \forall M \geq M_0 - 1 \qquad (2)$$



$$\therefore P_{1/2}(A_i) \overset{(1,2)}{\geq} 1-\varepsilon^{1/4}$$

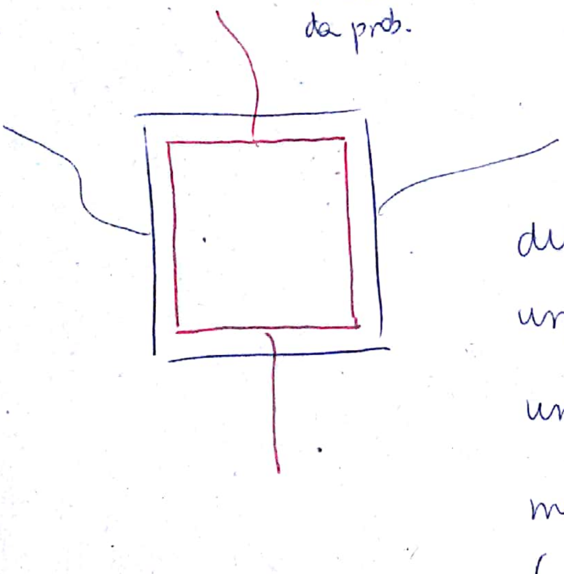
$$\therefore \exists M_0 : P_{1/2}(A_i) \geq \frac{7}{8}, \ \forall M \geq M_0$$

$$P_{1/2}(A_1), \ P_{1/2}(A_2) \geq \frac{7}{8}$$

$$\therefore P_{1/2}\left(A_*^{(M_0)}(i) \geq 7/8\right), \quad i=3,4$$

$$\therefore P_{1/2}\left(A_1^{(M_0)} \cap A_2^{(M_0)} \cap A_*^{(M_0)}(3) \cap A_*^{(M_0)}(4)\right)$$

$$\underset{\text{subadit. da prob.}}{\overset{(3,4)}{\geq}} \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \qquad (5)$$



Como caminhos primais e duais não podem se cruzar, por um lado, e, por outro, há apenas um aglomerado ∞ (c/ prob. 1) no modelo primal, existe uma conexão (c/ prob. 1) entre os 2 caminhos ∞s envolvidos em A_1 e A_2. ~~Pelo mesmo motivo~~ Concluímos que os aglomerados infinitos duais envolvidos em $A_*(3)$ e $A_*(4)$ são disjuntos, evento que tem prob. 0.

$\therefore A_1 \cap A_2 \cap A_{k}(3) \cap A_k(4)$ tem prob. 0, em contradição com (5), o que mostra que $\theta(1/2) = 0$

$\square$ prop. 1

<u>Dem. da prop. 2</u>

Vamos supor que $p_c > 1/2$ e obter uma contra-dição.

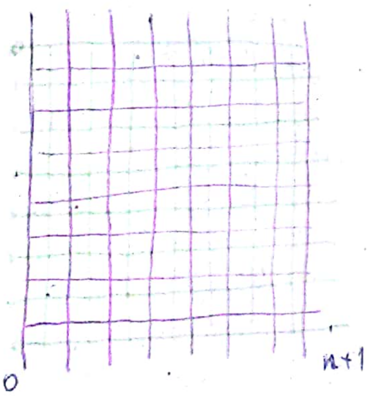
<u>Fato</u>: Seja

$\Lambda_n = \{0, 1, \dots, n+1\} \times \{0, \dots, n\}$

$S_n = \{\Lambda_n, \text{ elos verdes}\}$

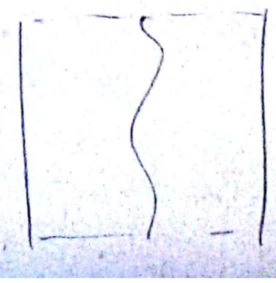
$\Lambda_n^* = \{0, \dots, n\} \times \{-1, \dots, n\} + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$S_n^* = \{\Lambda_n^*, \text{ elos vermelhos}\}$



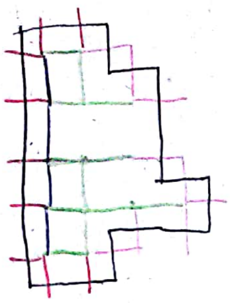
Seja $A_n = \{$no modelo de perc. primal em S_n, existe um caminho aberto ligando o lado direito ao lado esquerdo$\}$

$A_n^* = \{$ —— dual — S_n^* — lado de cima ao lado de baixo$\}$

$A_n = \Big\{$  $\Big\}$ $A_n^* = \Big\{$  $\Big\}$

Obs. 1: $A_n \cap A_n^* = \emptyset$ (6) {não pode haver cruzamento de caminhos dual e primal}

Obs. 2: $A_n^* = A_n^c$, pois, em A_n^c, (7)



existe um circuito em $\mathbb{L}_*^2$ em torno do aglomerado do lado esquerdo do modelo em S_n. Observe que, neste circuito, existe um cruzamento de cima a baixo de elos abertos de S_n^* que garante a ocorrência de A_n^*.

$\therefore A_n^c \subset A_n^*$, o que, por (6), implica $=$.

Note que $P_{1/2}(A_n) = P_{1/2}(A_n^*)$

$$\Rightarrow P_{1/2}(A_n) = P_{1/2}(A_n^*) = 1/2, \ \forall n \quad \square$$

De volta à prova da prop. 2, suponha que $p_c > \frac{1}{2}$

Neste caso, $1/2$ está na fase subcrítica e, logo, temos decaimento exponencial de conectividade.

$$P_{1/2}(A_n) \leq P_{1/2}\Big(\bigcup_{\substack{x \in \text{l.d. de } A_n \\ y \in \text{l.e. de } A_n}} \{x \leftrightarrow y\}\Big)$$

$$\leq \sum_{\substack{x \in \text{l.e.} \\ y \in \text{l.d.}}} \underbrace{P_{1/2}(x \leftrightarrow y)}_{Ke^{-\sigma n},\ \sigma > 0,\ K < \infty} \leq Ke^{-\sigma n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

<u>Obs.</u> $\mathbb{P}_p(A_n) \xrightarrow{(d=2)} \begin{cases} 0, & p < p_c = 1/2 \\ 1, & p > p_c \end{cases}$

2ª, 6-5-2013

Temas

Modelo Bidimensional

1. Teorema de Russo-Seymour-Welsh

2. Decaimento polinomial de correlações (no pto. crítico)

3. Decaimento exponencial da conectividade na fase supercrítica

4. Decaimento exponencial da conectividade na fase supercrítica (??)

5. Percolação de 1ª passagem (Teorema da forma)

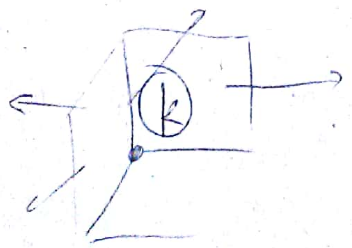
Grimmett, Kesten

6. Continuidade do ponto crítico em semiespaços

Barsky-Grimmett-Newman

(Grimmett-Marstrand)

7. $p_c(\mathbb{Z}^3) \overset{=}{\leq} p_c(\infty) \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$



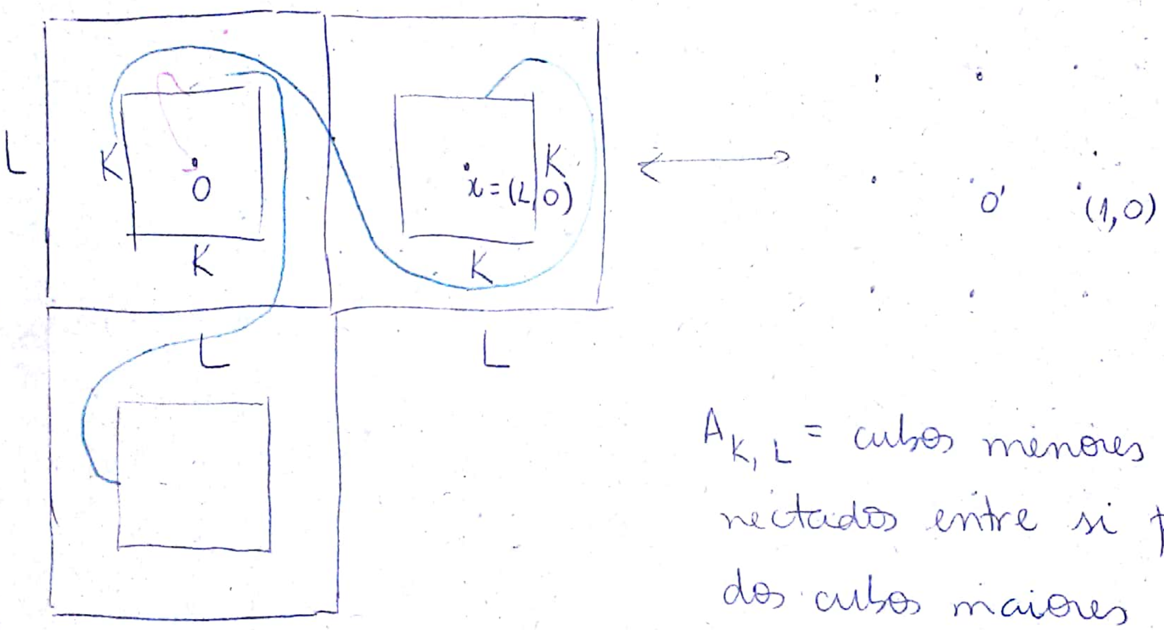
$\lim_{k\to\infty} p_c(k) = p_c(\infty)$

Uma ideia para provar que θ é contínua em p_c:

<u>Renormalização</u>

<u>Ideia geral</u>: uni<u>versalidade</u>

- Renormalização "estática" ($\mathbb{Z}^d$, p ex., $d=3$)



$A_{K,L}$ = cubos menores estão conectados entre si por dentro dos cubos maiores

Para garantir a ~~[illegible]~~ interconectividade, vamos considerar

$$\tilde{A}_{K,L} = A_{K,L} \cap B^{(1)}_{K,L} \cap B^{(2)}_{K,L}$$

$B^{(i)}_{K,L} = \{$sempre que 2 sítios do 1º cubo menor estiverem conectados à fronteira do respectivo cubo menor, eles estarão conectados entre si$\}$

Scanned by CamScanner

Seja o seguinte modelo de percolação "renormalizado" em $\mathbb{Z}^d$ $(\mathbb{L}^d)$: o elo e "renormalizado" está aberto se o respectivo $\tilde{A}_{K,L}$ ocorre

→ o modelo é 1-dependente.

Proposição 1: Seja $R_{K,L} = P_p(\tilde{A}_{K,L})$. Existe λ^* tal que, se (para algum K, L) $R_{K,L} > \lambda^*$, então $\theta(p) > 0$.

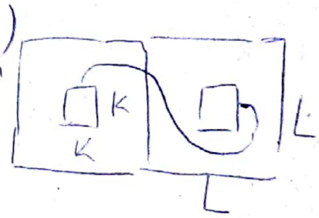
Dem. $(d \geq 3)$

Lembrando o Argumento de Peierls.

$$P(|C|<\infty) \leq \sum_{\substack{\text{caminhos} \\ \ni 0}} P(\text{caminho fechado})$$

Proposição 2 (conjectura): Se $\theta(p) > 0$, então

$$\sup_K \liminf_{L\to\infty} P_p(A_{K,L}) = 1 \quad (1)$$



↓

Ainda não demonstrada.

Teorema: Supondo verdadeira a proposição 2, então $\theta(p_c) = 0$.

Dem: Se (1) valer, então (1) vale também para $\tilde{A}_{K,L}$, pois $\tilde{A}_{K,L} = A_{K,L} \cap B_{K,L}^{(1)} \cap B_{K,L}^{(2)}$, e a validade segue de $P_p(B_{K,L}^{(1)}) \longrightarrow 1$, pois, senão, haveria prob. positiva de haver 2 aglomerados infinitos disjuntos

Concluímos que...

Se $\mathbb{P}(1)$ for verdadeiro, então dado λ^* da prop. 1, ~~existem~~ K e L tais que $R_{K,L}^{(p)} > \lambda^*$. Mas $R_{K,L}(p)$, K e L fixos, é uma função contínua de p e, logo, existe $\varepsilon > 0$: $R_{K,L}(p-\varepsilon) > \lambda^*$.

$R_{K,L} = R_{K,L}(p) = \mathbb{P}_p(\tilde{A}_{K,L})$

$\therefore$ Pela prop. 1, $\theta(p-\varepsilon) > 0$.

Conclusão: sempre que $\theta(p) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\theta(p-\varepsilon) > 0 \Rightarrow \theta(p_c) = 0$. $\square$

4ª, 8-5-2013

1. Estimativas caudais na fase supercrítica CA
2. Teorema RSW I
3. Desigualdade em leis de potência B
4. Aglomerado infinito incipiente M
5. Renormalização dinâmica em semiespaços A
6. Percolação de 1ª passagem (Teorema da Forma) C

Modelo de Potts

$\downarrow$

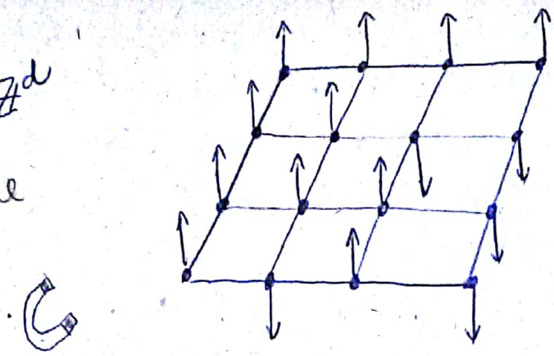
Modelo de spins

$\downarrow$

Modelo de sítios

$\mathbb{Z}^d$

barra de ferro



Modelo de Ising

$\Omega_\Lambda = \{-1, +1\}^\Lambda$

$\sigma \in \Omega_\Lambda$ é uma conf. de spins em Λ.

Modelo de Potts

$\Omega_\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}^\Lambda$, $q \in \mathbb{N}$ ≥ 2

($q = 2$: Modelo de Ising)

Lenz - Ising (1920 ?)

β = inverso da temperatura $= \dfrac{1}{kT}$

$d = 1$: não há magnetização espontânea qualquer que seja $0 < \beta < \infty$.

Ising: $d \geq 2$ vale o mesmo (!)

Peierls + Onsager: em $d \geq 2$

existe $\beta_c \in (0, \infty)$

→ há magnetização esp. se $\beta > \beta_c$ (Transição

→ não há - - - $\beta < \beta_c$ de fase)

Relação com o modelo de percolação

Modelo de aglomerados aleatórios
(Random Cluster Model)
↳ Livros do Grimmett
↳ Modelo de percolação dependente (p, q) ≥ 2
$q=1$: mod. indep.

Cronograma:

1) Apresentação do modelo de Potts
2) Relação com modelo de percolação dependente
→ Mod. Aglomerados Aleatórios
3) Propriedades → Existência do modelo infinito/ transição de fase
4) "Ler" os resultados do modelo de percolação como resultados do mod. de spins

Modelo de Potts (finito)

$\xi \in \Omega = \Omega_{\mathbb{Z}^d} = \{1, \dots, q\}^{\mathbb{Z}^d}$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$

$\Omega_\Lambda = \{1, \dots, q\}^\Lambda$

μ_Λ^ξ: medida de prob. em Ω_Λ c/ condição de fronteira ξ.

Medida de Gibbs (em volume finito)
com condição de fronteira ξ

Hamiltoniana

$$H_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda) = -\sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x,y\in\Lambda}} J_{xy}\left(\delta_{\sigma_x\sigma_y} - 1\right)$$

cte. de acoplamento entre x e y

$\delta_{\sigma_x\sigma_y} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_x = \sigma_y \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\sigma = \sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda$

elo entre vizinhos mais próximos

$$-\sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x\in\Lambda \\ y\notin\Lambda}} J_{xy}\left(\delta_{\sigma_x\xi_y} - 1\right)$$

Vamos focar em modelos ferromagnéticos
($J_{xy} \geq 0, \ \forall x,y$)

$$\mu_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda)}}{Z_\Lambda^\xi}$$

em que $Z_\Lambda^\xi = \sum_{\sigma_\Lambda\in\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda)}$ é a normalização.

Caso livre:

$$\mu_\Lambda(\sigma_\Lambda) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda)}}{Z_\Lambda}$$

Magnetização: $\mu_\Lambda^\xi(\sigma_0=1)$

$(J_{xy} \equiv J > 0)$: $\mu_\Lambda(\sigma_0 = 1) = \frac{1}{q}$

$\mu_\Lambda^{\xi=1}(\sigma_0=1) > \frac{1}{q}$

$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sim\!\sim > \frac{1}{q}$ ← magnetização

$= \frac{1}{q}$

2ª, 13-5-2013

Modelo de Potts c/ q spins

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \ (d \geq 2)$ $\quad \Omega_\Lambda = \{1, \dots, q\}^\Lambda$ $\quad \xi \in \Omega_{\mathbb{Z}^d} =: \Omega$

$\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda$: $H_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda) = \underbrace{- \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ x,y \in \Lambda}} J_{xy} [\delta(\sigma_x, \sigma_y) - 1]}_{:= H_\Lambda(\sigma_\Lambda)} - \sum_{\substack{\langle x,y \rangle: \\ x \in \Lambda, \\ y \notin \Lambda}} J_{xy} [\delta(\sigma_x, \xi_y) - 1]$

cte. de acoplamento. >0: ferromagnético

Modelo de Gibbs (no volume Λ)

$\mu_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda)}}{Z_\Lambda^\xi}$ → normalização

descreve sistema em equilíbrio térmico

Volume infinito

fronteira constante ≡ 1 ← $(\xi \equiv 1, \ \xi = \emptyset)$ → condição de fronteira livre

Limite termodinâmico:

limite sobre sequências $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ dado $\Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda'| < \infty$, existe n_0: $\Lambda_n \supset \Lambda'$ p/ $n \geq n_0$

$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^\xi(\sigma_\Lambda)$

→ valor esperado de f sob μ_Λ^1

Teorema (Limite termodinâmico):

→ valor esperado sob μ^1

$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^1(f) = \mu^1(f)$ existe. (1)

⌈No seguinte sentido: dada $f: \Omega \to \mathbb{R}$ cilíndrica, [isto é, tal que existe $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$: $f(\sigma) = f(\sigma_\Lambda \eta_{\Lambda^c})$ para todo $\eta_{\Lambda^c} \in \Omega_{\Lambda^c}$], (1) é válida⌋

Obs.: vale também no caso livre.

Teorema 2 (Transição de fase).

⌈Magnetização em volume finito:

$$m_\Lambda^1(\beta) = \frac{q}{q-1}\left\{\mu_\Lambda^1(\sigma_0 = 1) - \frac{1}{q}\right\}$$

Volume infinito:

$$m^1(\beta) = \frac{q}{q-1}\left(\mu^1(\sigma_0 = 1) - \frac{1}{q}\right)$$ ⌋

Em $d \geq 2$, $J_{xy} \equiv J > 0$, existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tal que, se $\beta < \beta_c$, $m^1(\beta) = 0$; se $\beta > \beta_c$, $m^1(\beta) > 0$

Demonstração dos 2 resultados seguirá da relação com modelo de percolação.

Fator de Gibbs

Representação FK (Fortuin-Kasteleyn) do modelo de Potts

$\sigma \in \Omega_\Lambda = \{1, \dots, q\}^\Lambda$

$$e^{-\beta H_\Lambda^1(\sigma_\Lambda)} = e^{\sum_{\langle x,y\rangle \subset \Lambda} \beta J_{xy}(\delta(\sigma_x, \sigma_y) - 1) + \sum_{\substack{\langle x,y\rangle\, x\in\Lambda, \\ y \notin \Lambda}} \beta J_{xy}[\delta(\sigma_x, 1) - 1]}$$

$$= \prod_{\langle x,y\rangle} \boxed{e^{\beta J_{xy}(\delta(\sigma_x,\sigma_y) - 1)}}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{(1 - e^{-\beta J_{xy}})}_{= p_{xy}} \overbrace{\delta(\sigma_x, \sigma_y)}^{\delta_{xy}(\sigma)} + e^{-\beta J_{xy}}$$

$$= \prod_{\langle x,y\rangle} \{q_{xy} + p_{xy}\,\delta_{xy}(\sigma)\}$$

$$= \sum_{\eta \in \{0,1\}^{E_\Lambda}} \prod_{\substack{e = \langle x,y\rangle \\ \eta_e = 0}} q_{xy} \prod_{e: \eta_e = 1} p_{xy}\,\delta_{xy}(\sigma)$$

$\mathcal{E}_\Lambda$ $\quad E_\Lambda = \underline{\ \ }_{e_1} \dots \underline{\ \ }_{e_N}$, $N = |E_\Lambda|$

está vazio/fechado

está ocupado/aberto

$$= \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} \prod_{e:\eta_e=0} q_{xy} \prod_{e:\eta_e=1} p_{xy} \cdot \prod_{e:\eta_e=1} \delta_{xy}(\sigma)$$

$P_\Lambda(\eta_e=1) = p_{xy}$

$P_\Lambda(\eta_e=0) = q_{xy}$

$\forall e \in E_\Lambda$

$P_\Lambda(\eta_\Lambda)$: medida de prob. em $\mathcal{E}_\Lambda$

$$= \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} P_\Lambda(\eta_\Lambda) \boxed{\prod_{e:\eta_e=1} \delta_{xy}(\sigma_\Lambda)} \quad (2)$$

$\mathbb{1}\{$spins constantes em cada aglomerado de $\eta\}$

$= \mathbb{1}\{$spin constante em agl. de η que não toca na fronteira$\}$ $\cdot$ $\mathbb{1}\{$spins dos aglomerados que tocam na fronteira $\equiv 1\}$

Normalização:

$$Z'_\Lambda = \sum_{\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-\beta H^1_\Lambda(\sigma_\Lambda)} \overset{(2)}{=} \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} P_\Lambda(\eta_\Lambda) \sum_{\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda} \overbrace{\prod_{e:\eta_e=1} \delta_{xy}(\sigma)}^{1\ 1}$$

$$\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \cdots = \sum_{\sigma_{c_1} \in \Omega_{c_1}} \cdots \sum_{\sigma_{c_k} \in \Omega_{c_k}} 1 = \sum_{\sigma_{c_1} \in \Omega_{c_1}} \mathbb{1}\{\sigma_{c_1} \equiv \text{cte}\} = q$$

$$\sum_{\sigma_{c_k} \in \Omega_{c_k}} \mathbb{1}\{\sigma_{c_k} \equiv \text{cte.}\} = q$$

$$\underbrace{\sum_{\sigma_{c'_1} \in \Omega_{c'_1}} \cdots \sum_{\sigma_{c'_{k'}} \in \Omega_{c'_{k'}}} 1'}_{= 1} \qquad = q^k \qquad k = k(\eta) = \#\text{ agl. int. de } \eta$$

Medida de Gibbs

$$\mu^1_\Lambda(\sigma_\Lambda) = \frac{\sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} q^k P_\Lambda(\eta) \left\{ \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{q} \mathbb{1}\{\sigma_{c_i} \equiv \text{cte.}\} \right\} \prod_{i'=1}^{k'} \mathbb{1}\{\sigma_{c'_{i'}} \equiv 1\}}{}$$

$$= \frac{\sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} P_\Lambda(\eta)\, q^{k(\eta)}\, R_\Lambda(\sigma|\eta)}{\sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} P_\Lambda(\eta)\, q^{k(\eta)}}$$

Para cada $\eta \in \mathcal{E}_\Lambda$, $R(\cdot|\eta)$ é uma prob. em Ω_Λ que atribui spins a Λ da seguinte maneira: de maneira independente para cada aglomerado, $R(\cdot|\eta)$ atribui spin cte. $\equiv i$ p/ C_i c/ prob. $\frac{1}{q}$ $i=1,\dots,k$, cte. $\equiv 1$ p/ $C'_{i'}$, $i'=1,\dots,k'$.

Podemos finalmente escrever

$$\mu_\Lambda^2(\sigma_\Lambda) = \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} \rho_\Lambda(\eta) R_\Lambda(\sigma_\Lambda | \eta)$$

em que

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{P_\Lambda(\eta)\, q^{k(\eta)}}{Z_\Lambda^*}$$

é uma prob. sobre $\mathcal{E}_\Lambda$

→ modelo de percolação

→ modelo de aglomerados aleatórios

Obs: 1) É um modelo de percolação dependente

2) Faz sentido p/ todo $q > 0$.

3) $q = 1$ corresponde ao modelo de perc. indep. em $\mathcal{E}_\Lambda$.

4ª, 15-5-2013

Modelo de Aglomerados Aleatórios

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$

E_Λ = {elos + próximos c/ pelo menos 1 extremidade em Λ}

Prob. em $\mathcal{E}_\Lambda = \{0, 1\}^{E_\Lambda}$

0: fechado, 1: aberto

Seja $\eta_\Lambda \in \mathcal{E}_\Lambda$.

$$\rho_\Lambda(\eta_\Lambda) = \rho_\Lambda^{p,q}(\eta_\Lambda) = \frac{P_p(\eta_\Lambda)\, q^{k(\eta_\Lambda)}}{Z_\Lambda}$$

$P_p(\cdot)$ = medida produto em $\mathcal{E}_\Lambda$ c/ marginais Bin(p)

$q > 0$ $\quad p, q$: parâmetros

$k(\eta_\Lambda) = \#$ agl. de η que não tocam a fronteira

<u>Obs:</u> 1) o caso $q = 1$ corresponde ao modelo de percolação independente;

2) $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, corresponde ao modelo de elos q/ entra na representação FK do modelo de Potts c/ condição de fronteira 1 homogêneo ($J_{xy} \equiv J$), $p = 1 - e^{-\beta J}$

3) os elos são dependentes (a não ser qdo. $q = 1$)

<u>Medidas FKG</u>

~~Uma medida ν em $\mathcal{E}_\Lambda$ é dita FKG se, para toda $f: \mathcal{E}_\Lambda \to \mathbb{R}$ crescente~~

Dadas 2 medidas de prob. μ e ν em $\mathcal{E}_\Lambda$, dizemos que μ <u>domina</u> ν (no sentido de FKG) se

valores esperados de f sob μ e ν respect.

$\mu(f) \geq \nu(f)$ para todo $f: \mathcal{E}_\Lambda \to \mathbb{R}$ crescente

<u>Not.:</u> $\mu \succ \nu$

<u>Teorema</u> 1 (Desigualdade de Holley): Se μ e ν forem probabilidades em $\mathcal{E}_\Lambda$, então, se $\mu(\eta \vee \eta')\,\nu(\eta \wedge \eta') \geq \mu(\eta)\,\nu(\eta')$, $\forall \eta, \eta' \in \mathcal{E}_\Lambda$, então $\mu \succ \nu$. (2)

Modelo de Potts (objetivos):

$\rightarrow$ limite termodinâmico

$\rightarrow$ Transição de fase

Monotonicidade

Comparações entre os modelos de agl. aleatórios

Em que: $\eta \vee \eta' \in \mathcal{E}_\Lambda$ e $(\eta \vee \eta')_e = \max\{\eta_e, \eta'_e\}$

$(\eta \wedge \eta')_e = \min\{\eta_e, \eta'_e\}$, $\forall e \in E_\Lambda$

Corolário: Se a prob. μ em $\mathcal{E}_\Lambda$ satisfizer

$$\mu(\eta \vee \eta')\,\mu(\eta \wedge \eta') \geq \mu(\eta)\,\mu(\eta'), \quad (3)$$

então μ é uma medida FKG. ↳ Quando $\mu = \mathbb{P}_p$, tem-se a =

⌈ Def: Uma prob. μ em $\mathcal{E}_\Lambda$ é dita FKG se

$\mu(fg) \geq \mu(f)\,\mu(g)$ (1) para ~~todo~~ par de funções $f, g : \mathcal{E}_\Lambda \to \mathbb{R}$ crescentes. ⌋

Obs: 1) Medidas-produto satisfazem (1) e (2).

Dem. do Corolário:

Sejam $f, g : \mathcal{E}_\Lambda \to \mathbb{R}$ crescentes, e suponhamos, s.p.g, que $g > 0$.

Sejam $$\nu_1(\eta) = \frac{g(\eta)\,\mu(\eta)}{\sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} g(\eta)\,\mu(\eta)}$$ → Norm.

$$\nu_2(\eta) = \mu(\eta)$$

(2) segue de (1) para $\mu = \nu_1$ e $\nu = \nu_2$ (usando a desig. Holley)

$$\frac{g(\eta\vee\eta')\,\mu(\eta\vee\eta')}{\cancel{\text{Norm}}} \times \mu(\eta\wedge\eta') \geq \frac{g(\eta)\,\mu(\eta\vee\eta')}{\cancel{\text{Norm}}}\,\mu(\eta\wedge\eta')$$

$$\frac{g(\eta)\,\mu(\eta)}{\cancel{\text{Norm}}} \times \mu(\eta) \quad (3)$$

Te<u>orema 2</u>: O Modelo de Aglomerados Aleatórios é FKG se $q \geq 1$.

<u>Dem.</u> vamos verificar (3) para $\rho_\Lambda^{p,q}$, o que é equivalente a

$$q^{k(\eta\vee\eta')}\, q^{k(\eta\wedge\eta')} \geq q^{k(\eta)}\, q^{k(\eta')} \quad \Big| \; \rho_\Lambda(\eta) = q^{k(\eta)} P_p(\eta) / \text{Norm}$$

$$\overset{(q\geq 1)}{\Longleftrightarrow} k(\eta\vee\eta') + k(\eta\wedge\eta') \geq k(\eta) + k(\eta') \qquad (4)$$

Sejam

$\zeta = \eta$, $\zeta' = \eta\wedge\eta' \leq \eta$

$\eta\vee\zeta' = \zeta = \eta$

$\eta\wedge\eta' = \zeta'$

(4) é equivalente a

$$k(\eta\vee\eta') + k(\zeta') \geq k(\eta) + k(\underset{\zeta'\vee\eta'}{\eta'})$$

$$\Leftrightarrow k(\eta\vee\eta') - k(\eta) \geq k(\zeta'\vee\eta') - k(\zeta') \qquad (5)$$

(5) p/ ~~todo~~ $\eta, \eta' \in \mathcal{E}_\Lambda$ é equiv. a pedir

$h(\eta, \omega) := k(\eta\vee\omega) - k(\omega)$ seja crescente c/o fç. de η p/ todo ω

Em símbolos, fixado $\omega \in \mathcal{E}_\Lambda$,

$$h(\cdot, \omega) = k(\cdot \vee \omega) - k(\cdot) : \mathcal{E}_\Lambda \to \mathbb{R}$$

Vamos verificar (5) por indução na qtde. de elos de ω.

1) Vale trivialmente p/ $\omega \equiv 0$.

2) Se $|\omega| = 1$, então

$$k(\eta \vee \omega) - k(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{se o elo a mais não fizer diferença} \\ -1 & \text{se o elo a mais de } \omega \text{ ou aumentar 2 aglomerados internos de } \eta \text{ entre si ou se ligar um agl. de } \eta \text{ à fronteira.} \end{cases}$$

- Vamos supor que a monotonicidade vale p/ $|\omega| \leq n-1$ □ ✓ $|\omega| = 1$ e seja $|\omega_n| = n$. Então, $\omega_n = \omega_{n-1} \vee \omega_1$ em que $|\omega_{n-1}| = n-1$ e $|\omega_1| = 1$.

Então,

$$k(\eta \vee \omega_n) - k(\eta) = k((\eta \vee \omega_{n-1}) \vee \omega_1) - k(\eta \vee \omega_{n-1}) + k(\eta \vee \omega_{n-1}) - k(\eta)$$

= soma de 2 funções da forma $h(\cdot, \omega)$ c/ $|\omega| \leq n-1$.

A hipótese de indução $\Rightarrow$ as 2 funções são crescentes $\Rightarrow$ a soma é crescente $\Rightarrow$ o passo de indução está completo. □

2ª, 20-5-13

Modelo de Potts / Modelo de Aglom. Aleatórios

$\downarrow$

$\neq$s comp.

$\rightarrow$ limite termodinâmico

$\rightarrow$ transição de fase

Desigualdades de Comparação (MAA)

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$

parâmetros: $q > 0$; $\underline{p} = (p_e \in [0,1], e \in E_\Lambda)$ elos de Λ (ind. elos de fronteira)

$\eta_\Lambda \in \{0,1\}^{E_\Lambda} = \mathcal{E}_\Lambda$

$\rho_{\Lambda,\underline{p},q}(\eta_\Lambda) = P(\eta_\Lambda)\, q^{k(\eta_\Lambda)} / \text{Norm.}$

$\hookrightarrow$ medida produto em $\mathcal{E}_\Lambda$ c/ $P(\eta_e = 1) = p_e$

$k(\eta_\Lambda) = \#$ aglomerados de η_Λ que não tocam na fronteira externa de $\Lambda = \bar{\partial}\Lambda =$
$= \{x \in \mathbb{Z}^d : x \notin \Lambda$ mas existe $y \in \Lambda$: $\langle x, y\rangle \in E_\Lambda\}$

Teorema 1: (desigualdades de comparação)

a) Se $q' \geq q$, $q' \geq 1$ e $p'_e \leq p_e$, $\forall e \in E_\Lambda \Rightarrow \rho_{\Lambda,\underline{p}',q'} \leq \rho_{\Lambda,\underline{p},q}$

b) Se $q' \geq q$, $q' \geq 1$ e $\dfrac{p'_e}{q'(1-p'_e)} \geq \dfrac{p_e}{q(1-p_e)} \Rightarrow \rho_{\Lambda,\underline{p}',q'} \geq \rho_{\Lambda,\underline{p},q}$

<u>Dem</u>: Segue dos fatos:

i) $k(\eta)$ é decrescente

ii) $k(\eta) + |\eta|$ é crescente.

iii) $\rho_{\Lambda, \underline{p}, q}$ é FKG

(Como no ex. 2 da lista 3)

Limite Termodinâmico

<u>Teorema 2</u>: (Limite termodinamico p/ o MAA)

Se $q \geq 1$, $\underline{p} = (p_e, e \in E^d)$

Existe uma (única) medida de probabilidade $\rho_{\underline{p}, q}$ em $\left(\{0,1\}^{E^d}, \sigma\text{-álgebra gerada pelos cilindros}\right)$ tal que

$$\rho_{\underline{p}, q} = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \rho_{\Lambda, \underline{p}, q}$$

isto é, dadas uma função cilíndrica $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e uma sequência $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ tal que $|\Lambda_n| < \infty$, $\forall n \geq 1$, e dado $\Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda'| < \infty$, existe $n_0 = n_0(n')$ tal que $\Lambda' \subset \Lambda_n$, $\forall n \geq n_0$, temos que

$$\rho_{\underline{p}, q}(f) = \lim_{n \to \infty} \rho_{\Lambda_n, \underline{p}, q}(f)$$

Dem.: É suficiente considerar funções f crescentes, p. ex.

$$f(\eta) = \prod_{\ell \in E} \eta_\ell, \quad E \subset \mathbb{E}^d, \; |E| < \infty$$

Basta tomar $\Lambda_n \nearrow$ (isto é, $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$, $\forall n$)

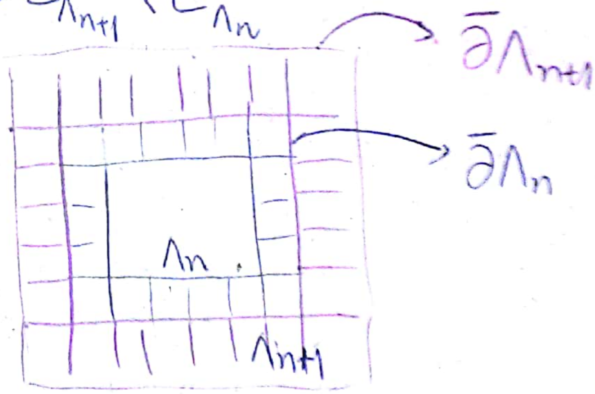
Vamos mostrar que

$$P_{\Lambda_n, p, q}(f) \leq P_{\Lambda_{n+1}, p, q}(f). \quad (1)$$

Mas $P_{\Lambda_n, p, q} = P_{\Lambda_{n+1}, p', q}$, em que

$$p'_e = \begin{cases} p_e & \text{se } e \in E_{\Lambda_n} \\ 1 & \text{se } e \in E_{\Lambda_{n+1}} \setminus E_{\Lambda_n} \end{cases}$$

Como $p'_e \geq p_e$, $\forall e$,
a desig. de comp. (a) $\Rightarrow$ (1)



$\therefore$ o limite existe
$n \to \infty$

Vamos agora mostrar que o limite não depende da sequência. Sejam $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ e $(\Lambda'_n)_{n\geq 1}$ duas sequências.

Dado Λ_n, existe n' tal que $\Lambda'_m \supset \Lambda_n$, $\forall m \geq n'$

Portanto,

$$P_{\Lambda'_m}(f) \geq P_{\Lambda_n}(f), \; \forall m \geq n'$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \lim_{m\uparrow\infty} \rho_{\Lambda'_m}(f) \geq \rho_{\Lambda_n}(f), \forall n \Rightarrow \lim_{m\uparrow\infty} \rho_{\Lambda'_m}(f) \geq \lim_{n\uparrow\infty} \rho_{\Lambda_n}(f)$$

e a desigualdade inversa segue da troca de papéis no argumento acima.

Obs. $\rho_{\mathbb{P},1}$ = mod. de perc. indep.

Transição de fase (no MAA)

Vamos considerar o caso homogêneo $\mathbb{P} \equiv p \in [0,1]$.

Sejam $\theta^q(p) = \rho_{p,q}(|C| = \infty)$ e

$p_c^q = \inf\{0 \leq p \leq 1 : \theta^q(p) > 0\}$

Obs.: desigualdades de comparação valem no vol. ∞

$\Rightarrow \theta^q(\cdot) \uparrow$ (p/ $q \geq 1$)

Teorema 3: Se $d \geq 2$, $q \geq 1$, então $p_c^q \in (0,1)$.

Obs.: $p_c^1 = p_c$ do mod indep. (já vimos que $\in (0,1)$).

Dem.: Como $\{|C| = \infty\}$ é crescente, segue das desigualdades de comparação que

a') $\theta^q(p) = \rho_{p,q}(|C| = \infty) \leq \rho_{p,1}(|C| = \infty) = \theta(p) < 1$.

b') $\theta^q(p) = \rho_{p,q}(|C| = \infty) \geq \rho_{\tilde{p},1}(|C| = \infty) \overset{(3)}{=} \theta^q(\tilde{p}) \Rightarrow p_c^q \geq p_c > 0$

em que $\tilde{p}$ é tal que $\dfrac{\tilde{p}}{q(1-\tilde{p})} = \dfrac{p}{1-p}$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(p) = \frac{p}{p+q(1-p)} \nearrow \text{em } p$$

$\tilde{p}(1) = 1$

Se p for $\tilde{p} > p_c \Rightarrow \theta^q(p) > 0$ (2)

$$\tilde{p}(p) > p_c \Rightarrow p > \tilde{p}^{-1}(p_c)$$

$$\tilde{p}^{-1}(p_c) = \frac{q\,p_c}{1+(q-1)p_c} < 1$$

$$\therefore p_c^q \leq \frac{q\,p_c}{1+(q-1)p_c} \qquad (4)$$

(3), (4) $\Rightarrow$ $\boxtimes$

4ª, 22-5-2013

Modelo de Potts

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$

$\sigma \in \Omega_\Lambda = \{1, \dots, q\}^\Lambda$

$$H^1_\Lambda(\sigma_\Lambda) = -\sum_{\langle x,y\rangle \in E_\Lambda} J_{xy}\left(\delta_{\sigma_x,\sigma_y} - 1\right)$$

elos da fronteira inclusos (spins na fronteira $\equiv 1$)

Modelo de Gibbs

$$\mu^1_\Lambda(\sigma_\Lambda) = e^{-\beta H^1_\Lambda(\sigma_\Lambda)} / \text{Norm.}$$

De agora em diante, $J_{xy} \geq 0$, $\forall \langle x,y\rangle$.

Teorema 1: (Limite termodinâmico)

$\forall \beta \geq 0$, existe uma medida de prob. μ^1 em $\Omega = \Omega_{\mathbb{Z}^d}$ tal que $\mu^1(f) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu^1_\Lambda(f)$, $\forall f: \Omega \to \mathbb{R}$ cilíndrica.

Teorema 2: (Transição de fase no modelo homogêneo $\to J_{xy} \equiv J > 0$)

Em $d \geq 2$, existe $\beta_c \in (0, \infty)$ tal que, se $\beta < \beta_c$, então não há magnetização espontânea; se $\beta > \beta_c$, então há magnetização espontânea.

Def.: $$m^1(\beta) = \frac{q}{q-1}\left[\mu^1\{\sigma_0 = 1\} - \frac{1}{q}\right]$$

É a magnetização de μ^1.

Quando $m^1(\beta) = 0$ (> 0), dizemos que não há (há) magnetização espontânea no modelo.

Representação FK do modelo de Potts

Seja $\varphi_{\Lambda,p,q}$ o MAA homogêneo no volume Λ (em $\mathcal{E}_\Lambda = \{0,1\}^{E_\Lambda}$) com os parâmetros $p = 1 - e^{-\beta J}$, β, J e q dados no modelo de Potts. Então,

$$\mu^1_\Lambda(\sigma_\Lambda) = \underbrace{\rho_\Lambda}_{\rho_{\Lambda,p,q}}[R_\Lambda(\sigma|\cdot)],$$

$R_\Lambda(\sigma|\cdot) : \mathcal{E}_\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$

$R_\Lambda(\sigma|\eta)$ = medida que atribui spin uniforme em $\{1, \dots, q\}$ nos aglomerados de η_Λ e atribui spin 1 aos aglomerados que tocam na fronteira

Dem. Teorema 1:

Tomemos uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cilíndrica. Seja A o suporte de f

$$\mu^1_\Lambda(f) \overset{FK}{=} \rho_\Lambda(R_\Lambda(f|\cdot)) = \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} R_\Lambda(f|\eta_\Lambda)\rho_\Lambda(\eta_\Lambda)$$

Fixemos $\Lambda' \subset \Lambda$. Podemos escrever

$$\mu^1_\Lambda(f) = \sum_{\eta \in \mathcal{E}_\Lambda} R_{\Lambda'}(f|\eta_{\Lambda'})\rho_\Lambda(\eta_\Lambda) + \text{erro} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

Obs.: Note que $R_{\Lambda'}(f|\eta_{\Lambda'})$ é uma função cilíndrica

Logo,

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathrm{I} \underset{MAA}{\overset{LT}{=}} \rho_{\underset{\text{vol.}\infty}{\Lambda}}(R_{\Lambda'}(f|\eta_{\Lambda'}))$$

e

$$\lim_{\Lambda' \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathrm{I} = \rho(R(f|\cdot))$$

$$\ulcorner R_{\Lambda'}(\cdot|\eta_{\Lambda'}) \xrightarrow[\Lambda' \uparrow \mathbb{Z}^d]{} R(\cdot|\eta) \quad \eta \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}^d}$$

$R(\cdot|\eta)$ atribui spin uniforme em $\{1, \dots, q\}$ nos aglo-

Scanned by CamScanner

merados finitos de η, e atribui spin 1 nos aglomerados infinitos.

1) erro (Suponha $A \subset \Lambda' \subset \Lambda$)

$$|\text{erro}| \leq \sum_{\eta_\Lambda} \left| R_\Lambda(f|\eta_\Lambda) - R_{\Lambda'}(f|\eta_{\Lambda'}) \right| \rho_\Lambda(\eta_\Lambda)$$

$$\leq \sum_{\eta_\Lambda} \|f\|_\infty \mathbb{1}\Big\{ \bigcup_{x \in A} \{x \leftrightarrow \partial\Lambda', x \not\leftrightarrow \partial V\}\Big\} \rho_\Lambda(\eta_\Lambda)$$

$$= \cancel{|A|}\, \|f\|_\infty \sum_{x \in A} \underbrace{\rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda'; x \not\leftrightarrow \partial V)}_{= \text{III}}$$

$$\text{III} = \rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda') - \rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda) \qquad (1)$$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda') \overset{LT}{\underset{MAA}{=}} \rho(x \leftrightarrow \partial\Lambda')$$

$$\lim_{\Lambda' \uparrow \mathbb{Z}^d} \sim\sim\sim = \rho(|C| = \infty) \qquad (2)$$

Seja $\Lambda \subset \Lambda''$

$$\rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda) \geq \rho_{\Lambda''}(x \leftrightarrow \partial\Lambda)$$

$$\therefore \rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda) \geq \rho(x \leftrightarrow \partial\Lambda).$$

$$\rightarrow \liminf_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \rho_\Lambda(x \leftrightarrow \partial\Lambda) \geq \rho(|C_x| = \infty) \qquad (3)$$

$\therefore$ Subst. (2) e (3) em (1): $\lim_{\Lambda' \uparrow \mathbb{Z}^d} \limsup_{\Lambda \uparrow \infty} \text{III} = 0$ $\quad$ $\lim \text{III} \leq 0$

Conclusão

$$\mu^1_\Lambda(f) \xrightarrow[\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d]{} \rho\,[R(f|\cdot)]$$ → Representação FK de μ^1 em termos de ρ.

o que define uma medida em $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}^d}$ de forma única.

$\square$ Teo.

Dem: Teorema 2:

$$m^1(\beta) \doteq \frac{q}{q-1}\left\{\mu^1(\sigma_0 = 1) - \frac{1}{q}\right\}$$

$$\mu^1(\sigma_0 = 1) \overset{FK}{=} \rho\,(R(\sigma_0 = 1|\cdot))$$

Dado $\eta \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}^d}$: $R\,(\sigma_0 = 1|\eta) =$

$$= 1 \times \underbrace{\rho\,(|C_0| = \infty)}_{\theta^q(p)} + \frac{1}{q}\underbrace{\rho\,(|C_0| < \infty)}_{1-\theta^q(p)}$$

$$= \frac{q-1}{q}\,\theta^q(p) + \frac{1}{q}$$

$$m^1(\beta) = \theta^q(p)$$

Vamos lembrar que $p =' 1 - e^{-\beta J}$, $J > 0$ fixo!

Pelo resultado do TTF do modelo de AA, existe $p_c^q > 0$ tal que, se $p = 1 - e^{-\beta J} < p_c^q$, então $m^1(\beta) = 0$

se $p = 1 - e^{-\beta J} > p_c^q$, então $m^1(\beta) > 0$

$$\beta < -\frac{1}{J}\log(1 - p_c^q) =: \beta_c$$

$$\beta > \beta_c$$

10 - Carlos Alberto. → Decaillo exp. fase supercr.

12 - Ivan - RSW

14 - Bruno - Leis de Potência 10h - 12h (B5)

17 - Manuel - Agl. Incipiente

19 - Carolina - 1ª passagem

21 - Alejandro