

# Sistema de Partículas Interageentes

Aula 01

04/08/2015

- Aula começará na hora que forem querer.
- Cobrir os principais modelos e mostrar principais propriedades

[www.vision.ime.usp.br/~neves](http://www.vision.ime.usp.br/~neves)

- Liggett.pdf
- modelo do volante
- explosão
- Ising
- Contato

Conversa Segunda -Feira 16:00 hs Prof. Jordão

Ref.

Durret.

Lectures on Prob. Theory

Harris, cart gráfica

Interacting Particle Systems

Ligget → versão scando

Cont. Time Markov Process

análise função  
gal

Functional Analysis for Prob. and stochastic Process

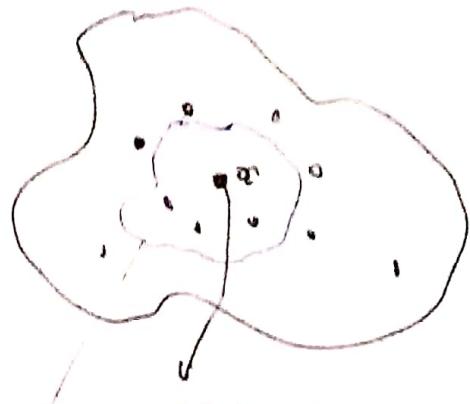
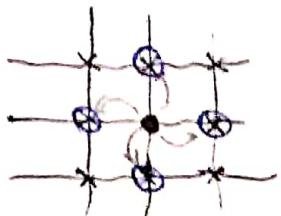
Téoria Análise Funcional

- Compreender o processo, mo.

Sistema Markoviano de Partículas e Aplicações

$$\{0,1\}^{\Lambda}$$

Processo em  $S = \{0,1\}^{\Lambda}$ ,  $\Delta = \mathbb{Z}^d$   
 ↑  
 espaço  
 de estados



Vizinhança de  $x$ . Ocorre a mudança em função da vizinhança

Exemplos:

## 1. Modelo de Ising

Prop.

Tempo contínuo.

Taxa:

$c(x, \eta)$ : taxa de troca de spin no sitio  $x$  quando a config. é  $\eta$ .

$\eta \in \{0,1\}^{\Lambda}$  Diferença "spin flip" → aperosso troca por vez.

E corre mais de uma hora.

2) Exclusão: partículas saltando em  $\Delta (\mathbb{Z}^d)$ ,  $\eta \in \{0,1\}^{\Lambda}$



limite hidrodinâmico

fluido excludente formar uma estrutura sólida (chocante) - Navier-Stokes

partícula part.

partícula part.

Dualidade.

Autoduas  $\rightarrow$  olhar pra trás ou pra frente da mesma razão.

Sistema estacionário e forma do equilíbrio.

### 3. Contato: "Propagação de uma doença"



$I \rightarrow 0$  taxa

do tempo é o cura.

$\eta(x) \Rightarrow$  "gripado"

$\eta(x) = 0 \Rightarrow$  "sadio"

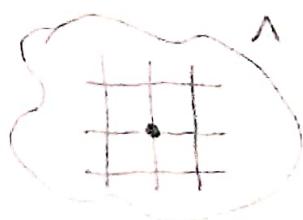
$0 \rightarrow I$  taxa  $\propto$  # vizinhos gripados

para gripe de alguém



↓ depende de d em  $\mathbb{Z}^d$

### 4. Volante



$\eta(x) = 1$  "a favor"

$\eta(x) = 0$  "contra" inerte

term consenso  $\beta = 1/2$

não term. crit.  $\beta/3$

taxas

Se  $\beta < \beta_c$  entropia negativa

Lembando

Processo de Markov num esp. enumerável

9

Processo de salto

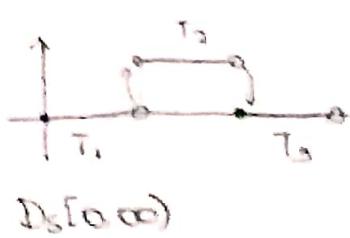
tempo

Esp. de estados enumerável

fazendo isso, temos uma medida  $\mu$  no espaço de trajetórias

$D_S[0, \infty)$  = "conj. de funções de  $[0, \infty)$  em  $S$  contínua à direita e com limite à esquerda" - cadlag

Exemplo.  $S = \{0, 1\}$



$$\text{ind} \begin{cases} T_1 \sim \exp(\lambda) \\ T_2 \sim \exp(\lambda) \\ T_3 \sim \exp(\lambda) \end{cases}$$

Processo de Difusão + comprimento de saltos



$\mu$  - prob em  $S$  - T medidas e funções em  $S$   
f = função em  $S$  -

$$S(t) f(x) = E^x f(X_t)$$

Exemplo

$N_t \sim NPPP(\lambda)$

Resposta

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k \geq 0$$

$\star$   $\rightarrow$   $P(N_t = k) = e^{-\lambda} \lambda^k \frac{\lambda^{t-k}}{(t-k)!}$   $\rightarrow$  convolution matrix  $P$   
 $\rightarrow$   $P_{t,x,y}$

$\{X_t\}_{t \geq 0}$  em  $S \cap \Omega_1, \{N_t\}$

$$S(t) f(x) = E^x f(X_t) = \sum_{y \in S} P_t(x, y) f(y)$$

verificar que

$$\text{a)} P_t(x, y) = e^{-t} \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} P_k(x, y)$$

b) Terminar o conta \*

$$\sum_{y \in S} e^{-t} \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} P_k(x, y)$$

$$P_t = e^{tQ} \text{ onde } Q = P - \mathbb{1}_S \mathbb{1}_S^\top \text{ diagonal de 1}$$

$P_t$  : matriz  $\{P_t(x, y)\}_{x, y \in S}$

(K=1)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & \mu \end{bmatrix} \quad P_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}, \quad Q = U^{-1}DU$$

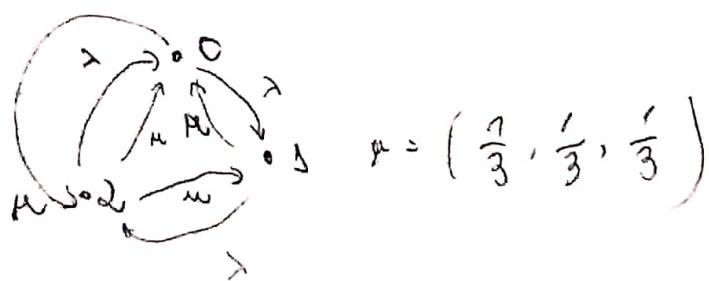
c) determine  $P_t$  no caso K=1

$$P_t = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-t(\mu+\lambda)} & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-t(\mu+\lambda)} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\mu+\lambda} \end{array} \right].$$

$$\mu_0 S(t) \rightarrow \mu \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$$

- K=2



Exemplo. Processo Poisson Composto

$X_1, X_2, \dots, X_n$  d.

Nt ~ PPP( $\lambda$ )

$$Y_t = \sum_{n=0}^{N_t} X_n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \text{ onde } S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Ex.  $X_n = \begin{cases} +1 & \text{prob } p \\ -1 & \text{prob } 1-p \end{cases}$   $\rightarrow$  Passo aleatório em  $\mathbb{Z}$

$\sim \sim \sim$

$$S(t) f(x) = E^x f(Y_t)$$

$$L f(x) = E^x f(x + X_1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x+y) F(dy) \quad \text{onde } F \text{ é a dist. de } X_1$$

no exemplo ant.,

$$L f(x) = p f(x+1) + (1-p) f(x-1)$$

$$L^n f(x) = E^x [f(x + \sum_{i=1}^n X_i)]$$

ou

$$S(t) f(x) = E^x f(Y_t) =$$

$$= E^x f(x + \sum_{n \geq 1} S_n \mathbb{1}_{\{N_t=n\}})$$

$$= E^x [E f(x + \sum_{n \geq 1} S_n \mathbb{1}_{\{N_t=n\}}) / N_t]$$

$$E^x f(x + \sum_{n \geq 1} S_n \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} / N_t) = E^x f(x + S_m) = L^m f(x)$$

$$\sum_{m \geq 0} L^m f(x) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = e^{-\lambda t} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda t L)^m}{m!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t L}$$

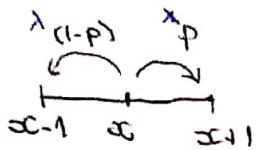
$$= e^{\lambda t (L - 1)}$$

Matriz de taxas  $\rightarrow (L - I)$  = operador

$$Qf(x) = \lambda(L-\lambda)f(x) = \lambda \int (f(x+y) - f(x)) F(dy)$$

No ex.

$$Qf(x) > \lambda [pf(x+1) + (1-p)f(x-1) - f(x)]$$



Browniano com drift



$$p=\frac{1}{2} \quad Qf(x) = n^2 \lambda \left[ \frac{f(x+1/n) - f(x-1/n) - 2f(x)}{n^2} \right]$$



Laplaceano  
↓ converge

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\cdot)$$

derivada primeira é o gerador do proc. com translações.

$$S(t+s) = S(t)S(s)$$

$$S(t) = e^{t\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\frac{\partial}{\partial x})^n}{n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + t\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$$

Gerador

$$\Rightarrow S = \{0, 1\}^\Lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-n}$$

resolvente

$$c(x, \eta) = \text{taxo...}$$

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in \Lambda} c(x, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]$$

$$\eta^x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } y \neq x \\ 1 - \eta(x) & \text{se } x = y \end{cases}$$

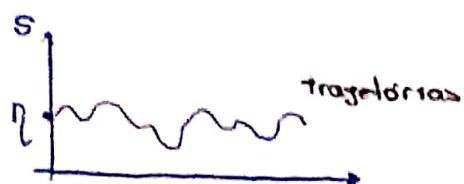
# Sistema de Partículas Interagentes (SIPS)

Aula 02

11/03

## Introdução

Obs: SIPS são processos de Markov "diferentes" dos processos usuais



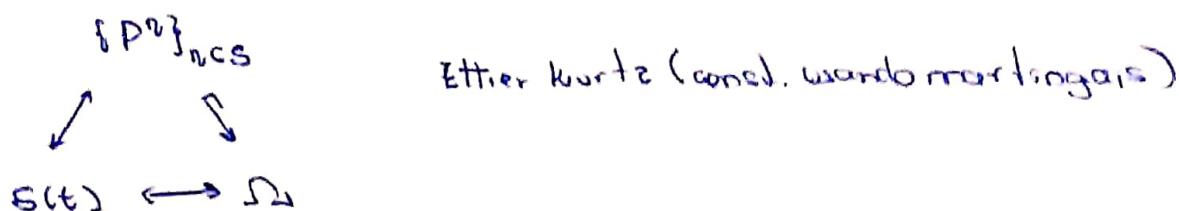
## Processo Estocástico

$\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é o espaço de medidas de prob. sec. 5. cap 1

em  $D_S[0, \infty) = \text{"conjunto de trajetórias"}$  (cadlag)

$s(t)$

$\Omega$  gerador



$(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço de prob.

$\Omega = D_S[0, \infty) = \text{funções de } S \text{ em } \mathbb{R} \text{ continuas à direita e com limite à esquerda}$

$\mathcal{F} = \underline{\text{sigma-algebra}}$  menor  $\sigma$ -álgebra tal que  $w(t) \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0$ .

$\mathcal{F}_t = \text{menor } \sigma\text{-álgebra tal que } w(s) \in \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$ .

compacto, localmente compacto

Topologia, uma vez que é b.o. compacto.

## Processo de Markov

( $\Omega, \mathcal{F}$ )     $S$ : espaço compacto

$C(S)$ : funções contínuas em  $S$   
 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

Norma:  $\|f\| = \sup_{\eta \in S} |f(\eta)|$

$(C(S), \|\cdot\|)$ : Espaço de Banach

Definição. Processo de Markov

$\{P^t\}_{t \geq 0}$  em  $\Omega = D_S[0, \infty)$

satisfazendo

a)  $P^t(\omega; \omega(0) = \eta) = \delta_{\eta}, \eta \in S$

b) Dado  $\eta \in S$  e  $f \in C(S)$ , então (Propriedade Feller)

$S(t)f \in C(S)$   $(S(t)f: S \rightarrow \mathbb{R})$

*mesmo um pouquinho com  $\eta$  não deverei alterar  $f$*

c)

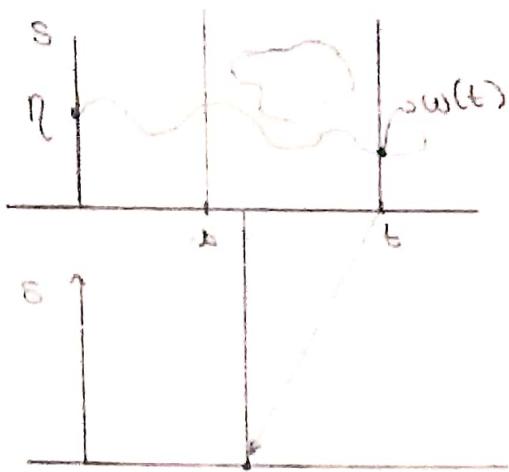
(Propriedade de Markov)

$Y \in \mathcal{F}$  ( $Y: S_L \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável em  $\mathcal{F}$ )

e

$G_b =$  "shift de  $b$  para a esquerda"





$$(\Theta_s w)(t-s)$$

$$(\Theta_s w)(s) = w(s+s)$$

C)

$$E^{\theta} (Y \circ \Theta_s / \mathcal{F}_s) = E^{\eta} (Y \circ \Theta_s / \mathcal{F}_s) = E^{\eta_s} [Y].$$

Marcou + Homogeneidade

Definição. Semigrupo (Probabilístico)

$$\{S(t)\}_{t \geq 0}.$$

Família de operadores

$$S(t) : C(S) \rightarrow C(S)$$

Definido por

$$(S(t)f)(\eta) = E^{\eta} f(\eta_t)$$

Satisfazendo

a)  $S(0)f = f \quad \forall f \in C(S)$  Propriedade 1  $\Rightarrow$  demonstrar

b) "Strong continuity" Dem. Cont. direta e a)

$$S(t)f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f \quad \forall f \in C(S),$$

"evolução matemática contínua"

c) Propriedade do semigrupo

$$S(s+t)f = S(s)S(t)f$$

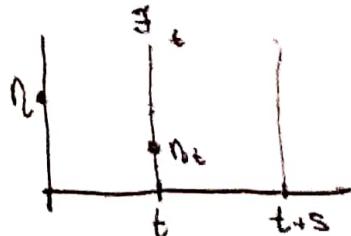
d)  $f \geq 0 \Rightarrow S(t)f \geq 0$

e)  $S(t)I = I$

Obs. I = função constante igual a 1.

Demonstração de c).

$$\begin{aligned} S(s+t)f(\eta) &= E^{\eta} f(\eta_{t+s}) = \\ &= E^{\eta} [E^{\eta} [f(\eta_{t+s}) | \mathcal{F}_t]] \\ &\times E^{\eta} [E^{\eta_t} f(\eta_s)] \\ &= E^{\eta} [(S(s)f)(\eta_s)] \\ &= S(t)[S(s)f](\eta) = S(t)S(s)f(\eta) \end{aligned}$$



Seja  $\mathbb{P}$ : círculo de medidas de prob. em  $S$  com topologia da convergência fraca

$$\mu_n \rightarrow \mu \Leftrightarrow \int f d\mu_n \xrightarrow{\text{máx}} \int f d\mu, \forall f \in C(S)$$

Obs.  $S$  é compacto.

Definição: Dada  $\mu \in \mathbb{P}$  e um processo de Markov  $\{P^t\}_{t \geq 0}$ ,

$$P^\mu = \int P^t \mu(d\eta_t)$$

$$E^\mu f(\eta_t) = \int_S E^t f(\eta_t) \mu(d\eta_t)$$

$$= \int S(t) f(\eta) \mu(d\eta)$$

$$= \int S(t) f d\mu$$

Defino  $\mu S(t)$  da seguinte forma

"dist. no tempo t começando do  $\mu$ "

$$f \in C(S)$$

Espaço de Hilbert  
Ricz

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t) f d\mu$$

$$f \in C(S)$$

$$\mu \in \mathbb{P}$$

$$\mu \cdot f = \langle \mu f \rangle = \int f d\mu$$

$$\langle \mu | S(t) f \rangle = \int S(t) f d\mu$$

$$\langle \mu S(t) | f \rangle = \int f d[\mu S(t)]$$

$$= \int S(t) f d\mu$$

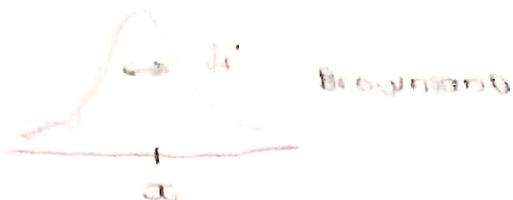
Padões das elas  
com o produto  
escalar de cumbres

OBS

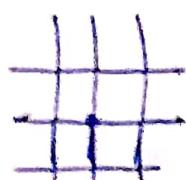
5)  $\mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$S(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy, \quad t > 0$$

$$= f(x)$$



2) Sistema de Partículas

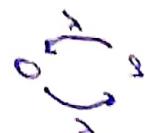


$$\Delta = \mathbb{Z}^d$$

$$S: \{0,1\}^\Delta$$

(muito trivial) partículas sem interações

O valor em cada sitio uma cadeia do markov de dois estados



se  $\mu_0 \sim \text{Bernoulli}(p)$  independ.

$\mu_t \sim \text{Bernoulli}(\mu_t)$  indep. mas  $\mu_0$  e  $\mu_t$  são singulares se  $t \neq 0$

Pergunta natural. O que acontece com  $\mu_t = \mu S(t)$ ,  $\mu \in \mathbb{P}$



Definição:  $\mu$  é dita invariante se

$$\mu = \mu \circ S(t), t > 0$$

Obs:  $\mu$  é invariante  $\Leftrightarrow \int f d\mu = \int S(t)f d\mu, \forall t, f \in C(S)$

Seja  $\mathcal{J} \subset \mathbb{P}$ , o conjunto das medidas invariantes.

Do fato de  $\mathbb{P}$  ser compacto,  $|\mathcal{J}| \geq 1$ . (ponto fixo)

Obs: Se  $\mu \in \mathbb{P}$  e  $\exists$

$$v = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \circ S(t)$$

então  $v \in \mathcal{J}$ .

Dem: Suponha  $v = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu \circ S(t)$ ,

$$\begin{aligned}\int S(s) f d\nu &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s) f [\mu \circ S(t)] d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s) \delta(t) f d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(s+t) f d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int S(t) f d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int f d[\mu \circ S(t)] \\ &= \int f d\nu\end{aligned}$$

□

Obs: Médias no tempo

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mu S(t) \rightarrow v \in J$$



$$v \in J$$

I

Definição. O processo de Markov é dito ergódico se  $J = \{v\}$  (única)

$$\text{e } \mu S(t) \rightarrow v \quad \forall \mu \in \mathbb{P}.$$

II

Perguntar: Existe sistema não-ergódico com  $|J| = 1$ ?



2014, sim!

Annals Applied Process

A

# Sistema de Partículas Interagentes

Aula 03

13/10/03

Espaço de traj. em  $S$  (num sistema Markoviano de partículas,  $S=\{0,1\}^d$ )

$\Omega \subseteq [0, \infty)$

$\eta: \Omega \rightarrow S$



$\{\mathbb{P}^\eta\}_{\eta \in \Omega}$  é a família de medidas em  $S$

semigrupo  $S(t) = e^{t\Delta}$  atua em  $C(S)$  (funções contínuas em  $S$ )

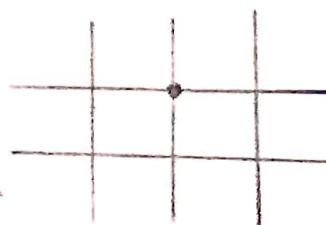
atua em  $\mathbb{P}$ , conj. de med. de prob. em  $S$

gerador  $\Delta$

(operador em  $C(S)$ )

Alguns resultados sobre o Modelo de Contacto

$\cdot S=\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$



$x \in \mathbb{Z}^d$

+

$\eta(x) \in \{0,1\}$

$\eta(x)=1$ , "agripado"

$\eta(x)=0$ , "solto"

Traços locais

Se  $\eta(x)=1 \rightarrow$  troca para  $\eta(x)=0$  com taxa 1

Se  $\eta(x)=0 \rightarrow$  troca para  $\eta(x)=1$  com taxa  $\lambda_x$  \* vizinhos 1

• Se  $\eta \in S$  são elementos de  $S$  (são configurações)

$c(\eta, \xi) = 0$  se  $\eta$  e  $\xi$  diferem em mais de um "sitio"  
"spin flip". só um sitio troca por vez.

Se  $\exists \alpha \in \mathbb{Z}^d$  tal que

$$\xi = \eta^\alpha, \quad c(\eta, \xi) = c(\alpha, \eta_0)$$

Lembrando que  $\eta^\alpha$  denota a configuração tal que

$$\eta^\alpha(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } \alpha \neq y \\ 1 - \eta(x) & \text{se } \alpha = y \end{cases}$$

No modelo de contato

$$c(\alpha, \eta) = \eta(\alpha) + \lambda(1 - \eta(\alpha)) \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d, \\ |y - \alpha| = 1}} \eta(y)$$

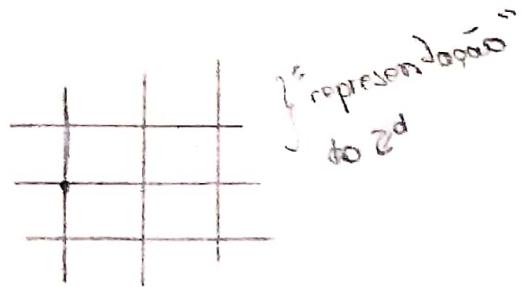
Obs: Se  $f \in C(S)$

$$\Delta f(\eta) = \sum_{\xi \in S} c(\eta, \xi) f(\xi)$$

$$= \sum_{\xi \neq \eta} c(\eta, \xi) f(\xi) + c(\eta, \eta) f(\eta)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c(\alpha, \eta) f(\eta^\alpha) - \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c(\alpha, \eta) f(\eta)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c(\alpha, \eta) [f(\eta^\alpha) - f(\eta)]$$



$$\text{---} \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \text{---} \quad Z^d$$

Config. inicial =  $\eta_0$  é tal que

$$\eta_0(0) = 1 \quad \text{e} \quad \eta_0(x) = 0, \forall x \neq 0$$

$\{\eta_t\}_{t \geq 0}$  Processo Estocástico

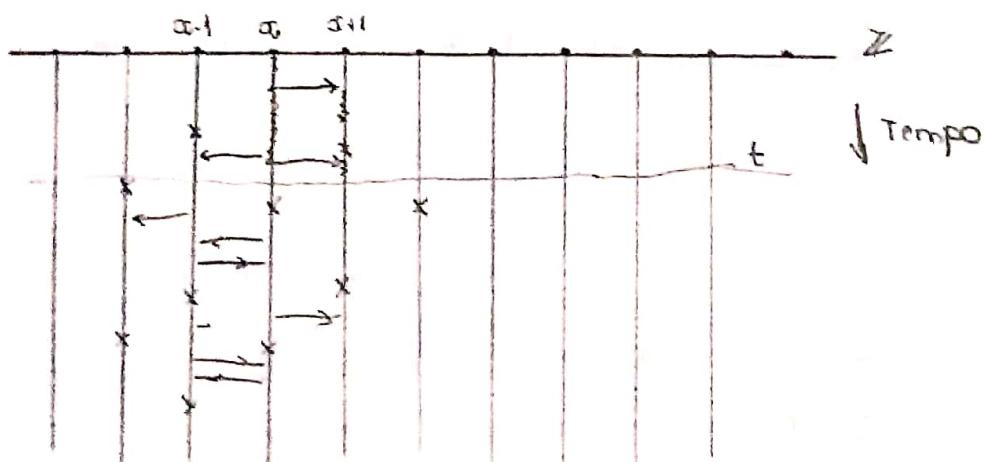
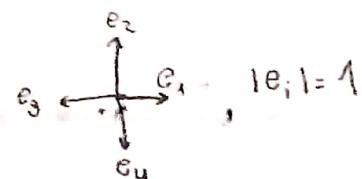


### Construção Gráfica

para cada  $x \in Z^d$  associa processos de Poisson independentes

1. "Cruzes"  $N_x(t)$  com taxa  $\lambda$

2. Infecção: para cada direção de  $Z^d$  associa  $N_{x,x+e_i}$  com taxa  $\lambda$   
 $e_i \in Z^d$  direções de  $Z^d$ ,  $|e_i| = 1$ .



Exercício: a construção "realiza" as tarefas do contato

Obs:

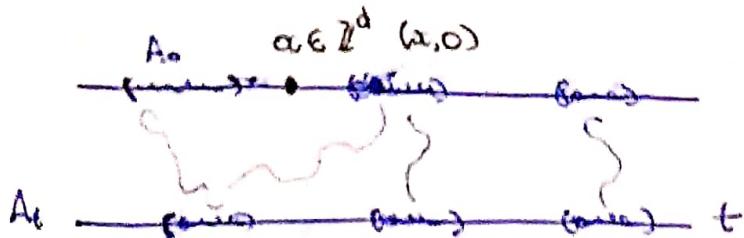
$$\eta_{\text{ES}} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

$$\Rightarrow A \subset \mathbb{Z}^d \quad A \subset \mathbb{Z}^d : \begin{aligned} \eta(x) &= 1 \text{ em } A \\ \eta(x) &= 0 \text{ em } A^c \end{aligned}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta(x) = 1\}$$

Dado  $\eta_0$  (ou  $A_0$ ) determino  $\eta_t(A_t)$

Dada a construção gráfica



Def. "trajetórias abertas em  $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$  de  $(x, 0)$  até  $(y, t)$ " é  
uma sequência

$$(x, 0) \equiv (x_0, t_0), (x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n) = (y, t)$$

a)  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$

b)  $|x_k - x_{k+1}| = 1 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

c)  $N_{x_k}(t_k, t_{k+1}) = C, \quad \forall k = 0, \dots, n-1$

"seus cruzes nos trechos verticais"

d)  $t_n \in N_{x_{n-1}, \omega_n} =$  (salto do processo  $N_{x_{n-1}, \omega_n}$ )

$N_t \sim PPP(\lambda)$

$x \in N_t$  se  $\exists i$  é um evento contado por  $N_t$

Def:  $\eta_0 \rightarrow \eta_t$  dada a realização

$\eta_t : \eta_t(y) = 1 \Leftrightarrow \exists$  alguma trajetória aberta entre  $(x, 0)$ , para algum  $x \in \mathbb{Z}^d$ , e  $(y, t)$ , com  $\eta(x) = 1\}$

Exercício.

1. Atividade (Aditividade)

Seja  $A_t^A = \{y \in \mathbb{Z}^d : \text{existe trajetória aberta de } (x, 0), x \in A, \text{ até } (y, t)\}$

$A_t^{\text{grifados}} \cdot \text{conf. no inst. } t$  começando de  $A$ .

$$A_t^{A \cup B} = A_t^A \cup A_t^B$$

Probabilidade da Sobrevivência (da grife) começando com apenas um indivíduo grifado

$\{A_t\}_{t \geq 0}$  processo do Modelo de contato com  $A_0 = \{0\}$  "é o origem de  $\mathbb{Z}^d$  infectado"

Seja

$$p_{\lambda}^d(t) = P(A_t \neq \emptyset)$$

$$p_{\lambda}^d = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{\lambda}^d(t)$$

$$\lambda_c^d = \sup \{ \lambda : p_{\lambda}^d = 0 \} \in [0, \infty]$$

Ex.  $p_{\lambda}^d$  é não decrescente em  $\lambda$

$$p_{\lambda}^d \leq (\lambda - \lambda_c)^{\beta}$$

Fazemos informalmente  
abom disse (Intuição)  
classe de  
equações com  
catenacidade

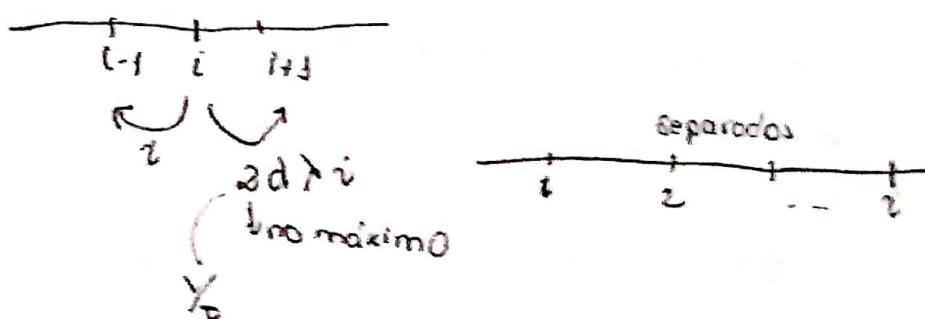
Lemma:  $\lambda_c^d > 0$  ( $\lambda_c^d > 1/d$ )

Dem: Considere

$|A_t| = \# \text{ de indivíduos gripados no instante } t$

$$X_t = |A_t| \in \mathbb{N}$$

"A cadeia de imunização não é um proc. de renovação pois há uma competição no espaço, de modo que um não pode infectar o que já está infectado — não só por ser um filhote onde outro já pôs"



$$P(X_t \leq Y_t, \forall t) = 1.$$

# Sistema de Partículas Interagentes

Modelo de Contato

Até 04

18/03

$$\mathbb{Z} \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

$\rightarrow$  taxa 1

$0 \rightarrow 1$  taxa  $\lambda \rightarrow$  marcas 1's

$c(x, \eta) =$  taxa com que  $\eta$  muda quando a conf. é  $\eta$

$$c(x, \eta) = q(x) + \lambda(1 - q(x)) \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |x-y|=1}} q_y(\eta)$$

Construção Gráfica

Processo comecando da configuração  $\eta_0$  dada por  $\eta_0(x) = (0, 0, \dots)$

$$\eta_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \text{ e } s \in A \\ 0 & \text{c. o.} \end{cases}$$

$$\rho_x^1 = P \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \eta_t(z) = 0 \right)$$

Obs: Notações:

$$\{\eta_t\}_{t \geq 0}, \eta \in S \quad \text{dado } q \in S$$

$$\{A_t\}_{t \geq 0}, A \subset \mathbb{Z}^d \quad A = \{x : q(x) = 1\}$$

Obs 2: taxas para  $A_t$

$A_t$ : processo com  $S =$  classe de subconjuntos de  $\mathbb{Z}^d$  (fronteira)

$c(A, B) =$  taxa de salto de  $A \in \mathbb{Z}^d$  p/  $B \subset \mathbb{Z}^d$  (fronteira)



$$c(A, B) = 0 \quad \text{se} \quad |A \setminus B| > 1 \text{ ou} \\ |B \setminus A| > 2$$

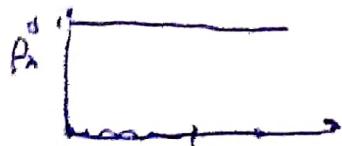
$A \Rightarrow A \cup \{\infty\} \quad \dots \quad \lambda \# \text{vizinhos de } \infty$   
 $\infty \notin A \quad \text{dentro de } A$

$$A \Rightarrow A \setminus \{\infty\} \quad \dots \quad |A|$$

$\infty \in A$

$$\rho_\lambda^d = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_\lambda^d(t)$$

•  $\rho_\lambda^d$  monotono em  $\lambda$   
 $\text{Se } \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \rho_{\lambda_1}^d \leq \rho_{\lambda_2}^d$  (barreira 0)



$$\lambda_c^d = \sup \{ \lambda : \rho_\lambda^d = 0 \}$$

Lema:  $\lambda_c^d \geq 1/2d$ .

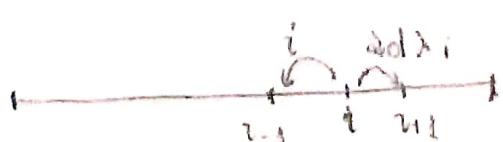
Demo:

"Construa graficamente  $A_t$ "  
"compro" (Acoplamento 0)

$|A_t| = \# \text{ de infec. no instante } t$

" $A_t, t \in \mathbb{N}_0$ "

$\gamma_t$  processo de Nasce e Morre.



(\*) Acoplamento entre  $A_t$  e  $\gamma_t$  tal que

$$P(|A_t| \leq \gamma_t, A_t) = 1.$$

Ex.



toda vez que espirra, avança  $\gamma_t$

... " .. alguma fico seco, diminui  $\gamma_t$

(\*) Para  $\lambda$  'pequeno',  $\gamma_t$  é eventualmente zero com prob. 1

Mais precisamente

$$P(\gamma_t = 0, \text{ para algum } t) = 1, \text{ se } \lambda \leq 1/2d$$

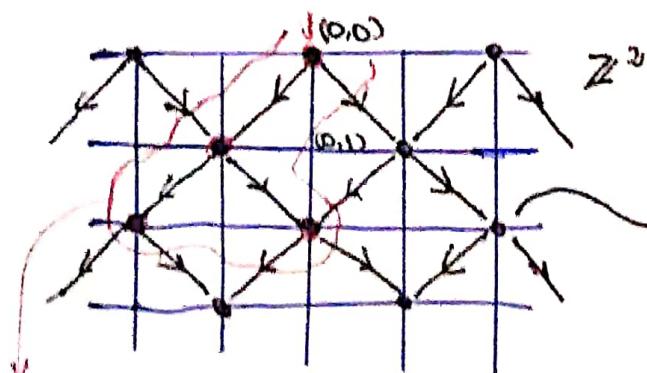
Obs. se  $N(t)$  é um proc. Nô-Morte,

$$\text{se } \sum_n \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} < \infty$$

Lema:  $\lambda_0^d \leq \infty, \forall d \geq 3$

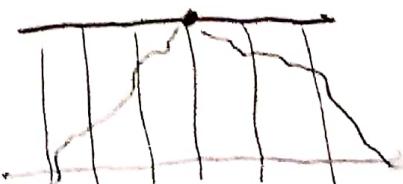
Basta mostrar  $\forall d \geq 3$

Antes: Modelo de Percolação Orientada



região  
metida

torneira aberta  
com prob. p  
fechada com 1-p



Comexo com  $\mathbb{Z}^2$ .

Em cada sitio da subrede par,

$$\mathbb{Z}_{\text{par}}^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1, x_2 \text{ é par}\}$$

para cada  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2$ , associa

$$X_{\boldsymbol{x}} \in \{0, 1\} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{fachada} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{Bernoulli}(p) \end{matrix}$$

independentes

$$\{X_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2} \text{ i.i.d.}$$

Definição: Dado  $\boldsymbol{x}$  e  $\boldsymbol{y}$  de  $\mathbb{Z}_{\text{par}}^2$  digo que há um caminho aberto de  $\boldsymbol{x}$  até  $\boldsymbol{y}$ , dado a coleção  $\{X_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2}$ , se existe uma sequência

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{y}$$

tal que

1.  $x_i$  e  $x_{i+1}$  são viz. seguindo a direção correta

$$x_i = (a_i, b_i); x_{i+1} = (c_i, d_i)$$

então

$$|c_i - a_i| = 1$$

$$d_i = b_i + 1 \quad \forall i = 0, \dots, K-1$$

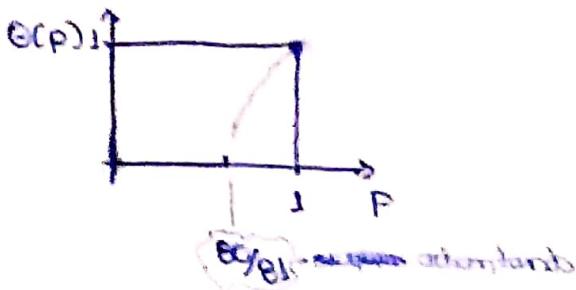
2.  $X_{x_i} = 1$  para todo  $i = 0, \dots, K$ .

Dada a coleção:  $\{X_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2}$ , defino

"Região molhada pela origem"

$$C_0 = \{y \in \mathbb{Z}_{par}^2 : \exists \text{ caminho aberto de } \underline{0} \text{ até } y\}$$

$$\Theta(p) = P(|C_0| = \infty)$$



$$p_c = \sup \{p : \Theta(p) = 0\}$$

$$\text{Lema: } p_c \geq 0 \quad (p_c \geq 1/2)$$

Demonstração: "Comparar com um proc. de ramificação"

Seja  $Z \in N$  \* de descend. com  $q_N = P(Z=k)$ ,  $\mu_k = E(Z)$

Suponha  $Z_1^1, Z_2^1, Z_3^1$   
 $Z_1^2, Z_2^2, \dots$

$\{Z_i^n\}_{i=1}^{\infty}$  i.i.d. com dist. de  $Z$

$$X_0 = 1$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i^n$$

eventualmente  $\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = 0\}$

$$\rho = P(X_n = 0, \forall n)$$

$$\star q_0 \geq 0 \quad (\text{se } q_0 = 0 \Rightarrow \rho = 0)$$

$$E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} | X_n]] =$$

$$\overbrace{E}$$

$$E[X_{n+1} | X_n = k] = E\left[\sum_{i=1}^k Z_i^n\right] = k\mu$$

$$= \mu E[X_n] = \mu^{n+1}.$$

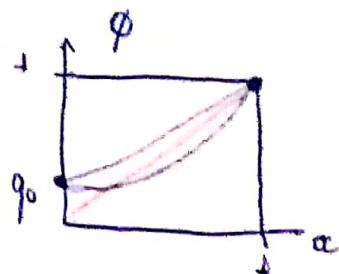
eventualmente

$$\begin{aligned} p &= P(X_0 = 0, \underset{\cancel{X_1=k}}{\cancel{X_1=k}}) = \\ &= \sum_k P(X_0 = 0, \underset{X_1=k}{\cancel{X_1=k}}) q_k \\ &= \sum_k p^k q_k \end{aligned}$$

$\phi = \Phi(p)$   
 $\downarrow$   
 ponto fixo da função  
 geradora de  $Z$ .

$$p = P(\cup_{n \geq 1} \{X_n = 0\})$$

$$P(\cup_{n \geq 1} \{X_n = 0\} / X_1 = k) = p^e_{\text{int.}}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = q_0$$

$$\phi'(x) = \sum_{k \geq 2} k x^{k-1} q_k \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$\phi''(x) = \sum_{k \geq 2} \underbrace{k(k-1)}_{\geq 0} \underbrace{x^{k-2}}_{\geq 0} \underbrace{q_k}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \phi'' \text{ é convexa}$$

$\phi'(1) = \mu \rightarrow$  a derivada com que chegar em 1 deve ser maior que a da identidade (2)

$\mu \leq L$  só uma solução,  $\forall \gamma$

$\mu > L$  2 soluções

$$f_{n+1} = \emptyset (f_n)$$

seq. conv.

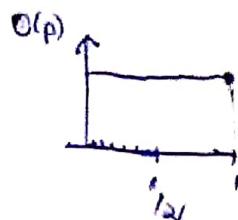


Fora Fora Lagão

$$Z \in \{0, 1, 2\}$$

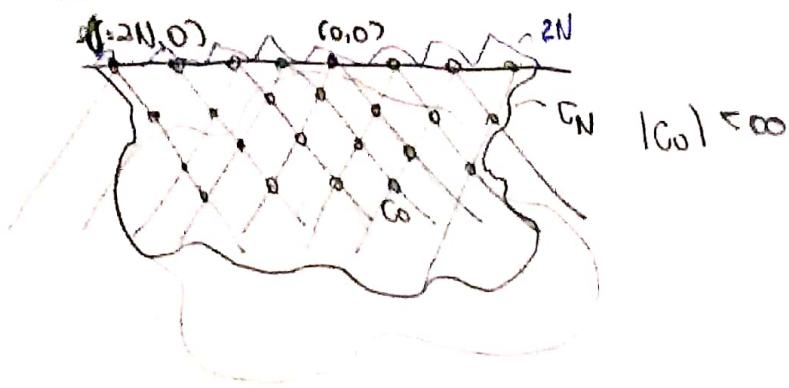
$$P(Z=k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}$$

$$EZ = 2p = \mu \leq 1 \Rightarrow p \leq \frac{1}{2}$$



Lema:  $p_c < 1$  ( $p_c \leq \frac{8c}{81}$ )

Dem: "Peierls"



Defino

$C_N$  = "Região markada por  $(-2N, 0), (-2N+2, 0), \dots, (0, 0)$ " ( $N \in \mathbb{N}$  fixo)

$$C_N = \bigcup_{k=0}^{2N} C_{(-2k, 0)}$$

$$P(|C_N| < \infty) \leq \sum_{k=0}^{2N} P(\text{exists } \gamma : |\gamma| = k)$$

$$\leq \sum_{k>2N} P(\gamma : |\gamma| = k)$$

$$|C_N| < \infty \Leftrightarrow \bigcup_{k \geq 2} \{\gamma : |\gamma| = k\}$$

$P(\gamma : |\gamma| = k)$  = "Prob. de haver um contorno de lençol h" (15)

# Sistema de Partículas Interagentes

Aula 05

25/03/2015

• Contato

$$\lambda_c^d$$

Lemma:  $\lambda_c^d \geq 1/2d$

Def. Modelo de Percolação Orientada



Def: " $x \rightarrow y$ " : "Existe caminho aberto ligando  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{Z}_{par}^2$ "

→ Existe seq. de vizinhos próximos em  $\mathbb{Z}_{par}^2$ , de  $x$  até  $y$ , tal que todas as v.c. Bernoulli estão abertas (assumem o valor 1).

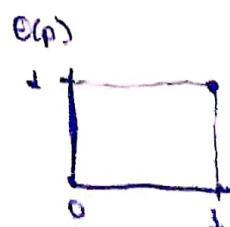
Dada a aleatoriedade (ou seja, fixada a configuração  $\{X_x\}_{x \in \mathbb{Z}_{par}^2}$ ) tenho a "variável aleatória"

"quenched" - fixed environment  
"annealed" - config

$$C(0) = C_0 = \{y \in \mathbb{Z}_{par}^2 : 0 \rightarrow y\}, \quad 0 = \text{origem de } \mathbb{Z}_{par}^2$$

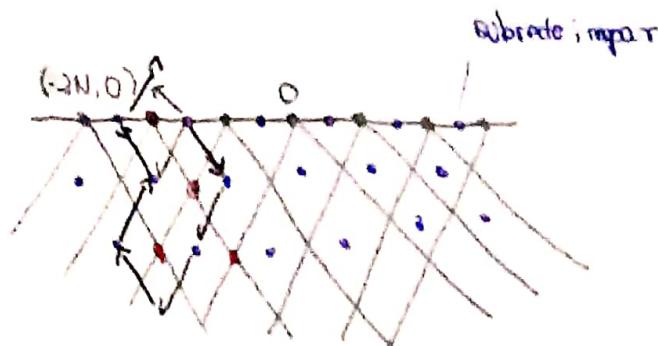
Dado  $p$ , defino  $\Theta(p) = P(|C_0| = \infty)$

$$p_c = \sup \{p : \Theta(p) = 0\}$$



Lemma:  $p_0 \in J$ .

Dem:



abrebre; impar

$$G(x) = G_\infty = \{y \in \mathbb{Z}_{\text{par}}^2 : x \rightarrow y\}$$

$$\text{Seja } G_N = \bigcup_{i=0}^N G_{\{(i-2i, 0)\}} \subset \mathbb{Z}_{\text{par}}^2$$

Se  $|G_N| < \infty$ , defino contorno de em  $\mathbb{Z}^2_{\text{impar}}$  "circulando  $G_N$ " de  $(0, -1)$  até  $(-2N, -1)$ .

$|\gamma|$  = comprimento do contorno

$$\{|G_N| < \infty\} = \bigcup_{\gamma} \{\text{existe o contorno } \gamma\}$$

$\Theta_N(p), D[G_N < \infty]$

Considere uma enumeração dos contornos

$$1 - \Theta_N(p) = P\left(\bigcup_{\gamma} \{\gamma\}\right) \leq \sum_n P(\gamma : |\gamma| = n)$$

ordenado em  $|\gamma|$   
e, em seguida, todos  
 $\gamma$  com cada comprimento

$$P(\gamma : |\gamma| = n)$$



x-fechado



$n_e = *$  passos para a esquerda

$n_d = *$  passos para a direita

$$n_e + n_d = n$$

$$n_e \geq n_d \Rightarrow n_e \geq \frac{n}{2}$$

$$P(\delta, |\gamma| \leq n) \leq \delta^n (1-p)^{\frac{n}{2}}$$

Obs: passo constar  
duas vezes o mesmo  
sitio fechado  
n passos  
 $n \geq \lceil n/2 \rceil$

Converge se

"Bootstrap Percolation"

$$\delta(1-p)^{1/4} < 1 \Leftrightarrow$$

$$(1-p) < \frac{1}{\delta^4} \Leftrightarrow$$

$$p > 1 - \frac{1}{\delta^4} = \frac{80}{81}.$$

Então  $\exists N_0$ : Se  $N > N_0$

$$\sum_{n \geq 0} [\delta(1-p)^{1/4}]^n < 1 - \varepsilon$$

$$1 - \Theta_N(p) < 1, \Theta_N(p) > 0 \text{ se } p > \frac{80}{81} \in N > N_0$$

$$\Theta_N(p) = P(|C_N| = \infty) > 0 \text{ se } p > \frac{80}{81} \in N > N_0$$

$$C_N = \bigcup_{i=0}^N C_{\{(i-2), 0\}}$$

$$P(|C_N| = \infty) \leq \sum_{i=0}^N P(|C_{\{(i-2), 0\}}| = \infty) = (N+1) P(|C_0| = \infty)$$

$$\Rightarrow P(|C_0| = \infty) \geq \frac{P(|C_0| = \infty)}{N+1} > 0, p > \frac{80}{81}$$

Voltando p/ o modelo de contato

Lema:  $\lambda_c^d < \infty$

Então

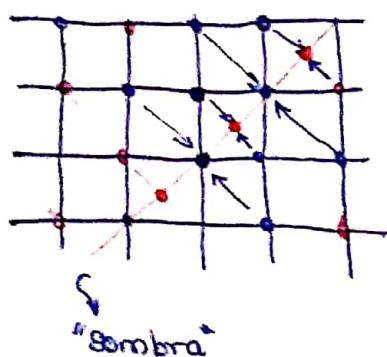
Lema:  $2d\lambda_c^d \leq \lambda_c^1 - \lambda_c$

Construo (acoplo) processos em  $\mathbb{Z}$  e em  $\mathbb{Z}^d$

$$\begin{matrix} 1 \\ d\lambda \\ \lambda \end{matrix}$$

"Sombra do  $d$ -dimensional  
seja maior que o  
unidimensional"

Def: Projeção  $\pi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$



$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^d x_i$$

"Processo  $d=1$  esteja contido na sombra do processo em  $\mathbb{Z}^d$ "

$$\begin{cases} \xi_t \text{ processo em } \mathbb{Z}^d, \xi_0 = \{0\}, 0 \in \mathbb{Z}^d \\ f_t = " " \mathbb{Z}^d, f_0 = \{0\}, 0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Quero acoplar de tal forma que

$$\pi_{t+} \in \pi(\xi_t)$$

Então: Se  $d\lambda \geq \lambda_c^1$

$\frac{1}{\lambda}$   
taxa  $\mathbb{Z}$

(modelo unidimensional sobrevive)

Então o modelo  $d$ -dimensional também sobrevive

$$\lambda > \lambda_c^d$$

$$d=1 \quad \lambda_c' \quad d$$

$$\lambda > \frac{\lambda_c'}{d} \Rightarrow \lambda > \lambda_c^d$$

$$\lambda_c^d \leq \frac{\lambda_c'}{d}$$

tema:  $d\lambda_c^d \leq \lambda_c'$

$\rightarrow 1 \rightarrow 10^0 \rightarrow$

Então basta mostrar  $\lambda_c' \leq \infty$ .

$\nearrow$  linear  
exponencial

# Sistema de Partículas Interagentes

Percolação Orientada:  $1/2 \leq p_0 \leq 80/81$

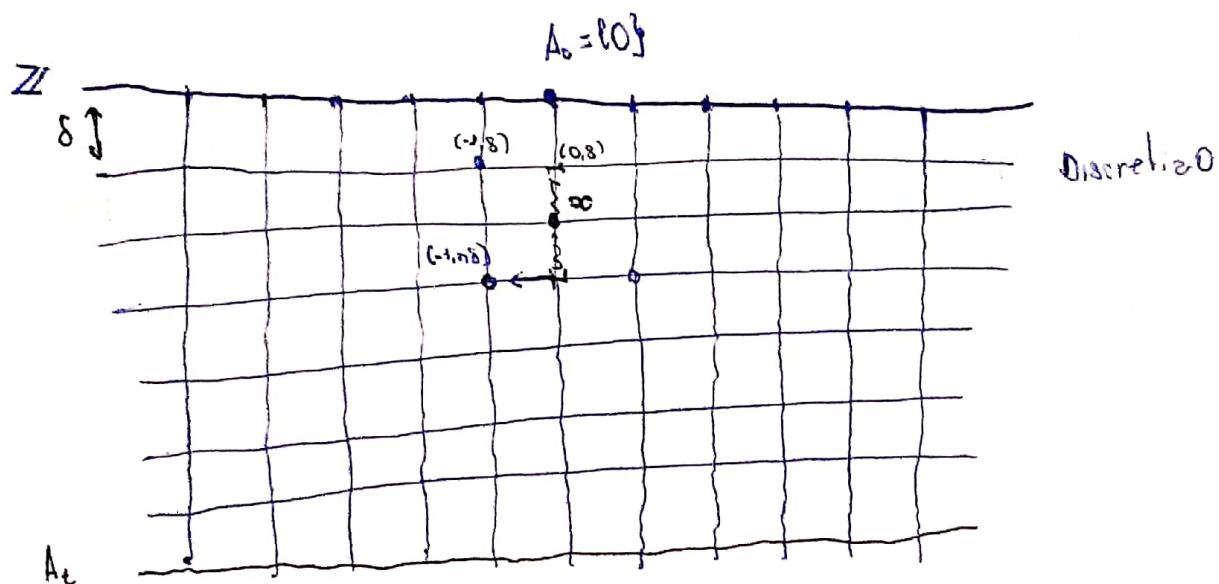
27/03

Contato.

Lemma:  $\lambda_c^+ < \infty$ . (basta provar que  $\lambda_c^- = \lambda_c^+ < \infty$ )

Aula 06

Demo: Comparação com a percolação orientada.



$$x = (n, k\delta), n \in \mathbb{Z}$$

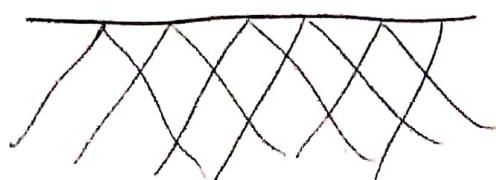
$$k \in \mathbb{N}$$

$$X_\infty = 1 \Leftrightarrow \bullet \quad \textcircled{1} \quad N_n[( (k-3)\delta, (k+3)\delta )] = 0$$

$$\textcircled{2} \quad N_n^+[( (k\delta, (k+1)\delta )] \nearrow 1$$

$$N_n^-[( (k\delta, (k+\delta)\delta )] \nearrow 1$$

caso contrário,  $X_\infty = 0$ .



$A_{k\delta}$  - estado do contalo no instante  $k\delta$

$B_{k\delta}$  - estado da percolação no instante  $k\delta$

$x \in A_{k\delta}$ ,

$x \in B_{k\delta} \Leftrightarrow \exists$  um caminho aberto em  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$  de  $0 = (0,0)$  até  $\infty$ .

$B_{k\delta} \subset A_{k\delta} \forall k \geq 0$

$\{B_{k\delta}\}_{k \geq 0}$  percolação orientada (independ.) percola se  $p > \underline{p}$

$$p = e^{-2\delta} (1 - e^{-\lambda\delta})^2$$

↑

$$P(N_x((k-1)\delta, (k+1)\delta) = 0), P(N_x((k\delta, (k+1)\delta) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda\delta}$$

$\lambda, \delta,$

$$p = p(\lambda, \delta)$$

$f(\lambda, \delta) = \delta_c(\lambda) = \delta$  que maximiza

$$p_{\max} = p(\lambda, \delta_c(\lambda)) \xrightarrow{\lambda \uparrow \infty} 1$$

$$\frac{d}{d\delta} p(\lambda, \delta) = 0 \Rightarrow \delta_c = \frac{1}{\lambda} \log(1+\lambda)$$

$$p(\lambda, \delta_c) = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+\frac{2}{\lambda}}} \xrightarrow{\lambda \uparrow \infty} 1$$

$\lambda_c =$  empírico 1,65

$\lambda_c =$  estimado 10,65.

## 1. Contato

1.1)  $\lambda_c^d > 0$

1.2) Perce. Orientada

1.3)  $\lambda_c^d \leq 0$

## 2. Processo de Markov

$$\{P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$   $S = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}$

gerador  $A$ .

$\mathbb{R}$

Determine o gerador dos semigrupos (e verifique que é um semigrupo)

1.  $S = \mathbb{R}$

$$S(t)f(x) = f(x + \beta t), \beta \in \mathbb{R}$$

2.  $S(t)f(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt)^k}{k!} f(x + k\mu), \lambda, \mu > 0$

3. Dado um semi.grupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , para definir

para definir Resolvente

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f(x) dt =$$

$$R_\lambda : C(S) \rightarrow C(S)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) f(x) dt = \int_0^\infty e^{-t(\lambda - \omega)} dt = \frac{1}{\lambda - \omega}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{S(t)} \quad \text{Prob const} \\
 & \downarrow \quad \downarrow \\
 & A \leftrightarrow P \quad \text{outro modo} \\
 & S(t) = e^{At} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
 & \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \\
 & \text{resolvente limitado} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega}{n}\right)^n
 \end{aligned}$$

O exercício é calcular  $R_x$  no caso mais simples na cadeia de 2 estados

$$\Omega = \begin{bmatrix} -P & P \\ -q & -q \end{bmatrix}$$

Calcule:

diretamente:  $(\lambda - \Omega)^{-1}$

pela fórmula:

Gerador de

$$S(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} f(y) dy$$

$\forall f \in C(S)$   $f(n)$

$$Sf = S(t)f(n) = E^t f(n+t)$$

$x_1 = x + Bt$

$$\Omega f = (S(t)f)' \Big|_{t=0} = \frac{S(t)f(n) - f(n)}{t}$$

$$\Omega f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \in D(\Omega) \text{ domínio de } \Omega \quad [f \text{ é contínua definida}]$$

No caso do Browniano,

$$S(t)f(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} [f(y) - f(x)] dy =$$

$$z = \frac{y-x}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} [f(x+z\sqrt{t}) - f(x)] dz \sqrt{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{[f(x+z\sqrt{t}) - f(x)]}{t} dz$$

$$f(x+z\sqrt{t}) = f(x) + f'(x)\sqrt{t} z + \frac{f''(x+\theta\sqrt{t}z)t z^2}{2}$$

$\exists \theta \in ]0, 1[$  s.t.  $\theta \in [0, 1]$

Teor. Valor Médio

$$* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{f'(x)\sqrt{t} z}{\sqrt{t}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} f''(x+\theta\sqrt{t}z) \frac{z^2}{2} dz$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} * = 0 + \frac{f''(x)}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \frac{z^2}{2} dz = 1$$

pg 16.

Dualidade (passos de leitorio)  $\begin{cases} \text{aberrante} \\ \text{rectangular} \\ \text{não aberrante} \end{cases}$

## Sistemas de Partículas Interagentes

Aula 07

Ising

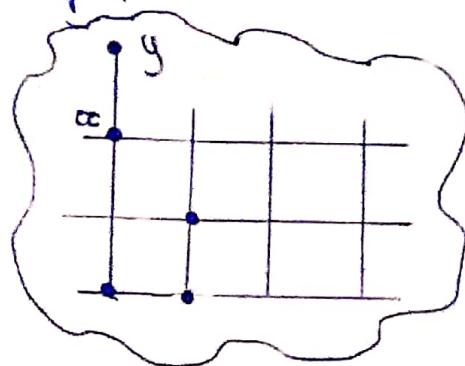
Modelo de Ising estocástico

Obs: vamos ilustrar algumas técnicas básicas

- acoplamento
- atratividade (dualidade)
- reversibilidade

] texto Liggett

Definição.

Espaço de estados  $S = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 
 $\eta \left| \begin{array}{l} \text{configurações} \\ \sigma \end{array} \right.$ 

$$\eta(x) = \begin{cases} +1 & \text{"spin"} \\ -1 & \end{cases}$$

Se  $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$  finito e  $\eta \in S$ 

$$H_\lambda(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{(x,y) \\ x \in \Delta}} \eta(x) \eta(y) - \frac{h}{2} \sum_{x \in \Delta} \eta(x)$$

vizinhos mais próximos:  $|x-y|=1$

Favorece qdo

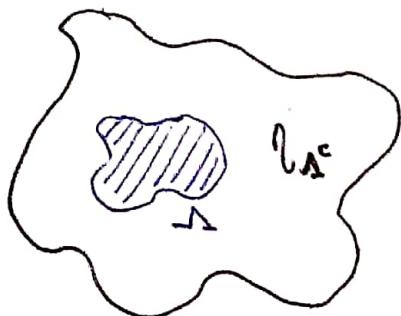
os spins fiquem = "Energia em  $\Delta$ " com condições de contorno  $\eta|_{\partial \Delta}$  iguais

Notação:

 $\eta \in \mathcal{E}$  estão em  $S$

$$(\eta_{\Lambda} \xi_{\Lambda^c})(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{se } x \in \Lambda \\ \xi(x) & \text{se } x \in \Lambda^c \end{cases}$$

## Medida de Gibbs



→ especificação (def. primeiros os prob. condicionais)  
 $\mu(\eta_{\Lambda} | \eta_{\Lambda^c})$  = prob. condicional de  $\eta_{\Lambda}$  dado  $\eta_{\Lambda^c}$  (conf. fora de  $\Lambda$ )

$$\mu(\eta_{\Lambda} | \eta_{\Lambda^c}) = \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}(\eta)}}{\text{Normalização}}$$

em que  $\eta = \eta_{\Lambda} \eta_{\Lambda^c}$   
 $\forall \Lambda \in \mathbb{Z}^d$  finito

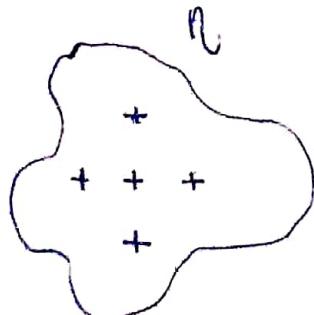
## O Modelo de Ising Estocástico

Sistema de spin com  $c(x, \eta)$  tal que

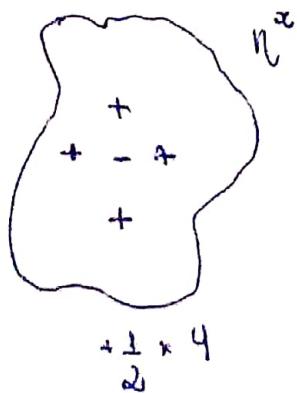
"auto da troca"

Notação:  $\Delta_{\infty} H(\eta) = "H(\eta^x) - H(\eta)"$

$$= \sum_{y: |x-y|=\Delta} \eta(x)\eta(y) + h\eta(x)$$



$$-\frac{1}{2} \times 4$$



$$+\frac{1}{2} \times 4$$

$$\Delta_{\infty} H(\eta) = - \Delta_{\infty} H(\eta^x)$$

$$\eta^x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } y \neq \infty \\ -\eta(\infty) & \text{se } \infty \neq y \end{cases}$$

Tomo  $c(\infty, \eta)$  tal que a dinâmica seja reversível com respeito a Gibbs

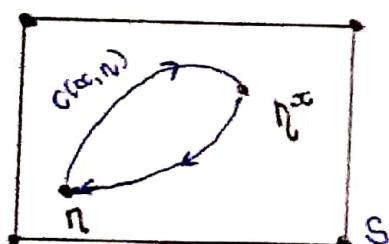
$$\Rightarrow c(\infty, \eta) e^{-\beta \Delta_\infty H(\eta)} = c(\infty, \eta^x) e^{-\beta \Delta_\infty H(\eta^x)}$$

$$c(\infty, \eta) e^{-\beta \Delta_\infty H(\eta)} = c(\infty, \eta^x) e^{\beta \Delta_\infty H(\eta)}$$

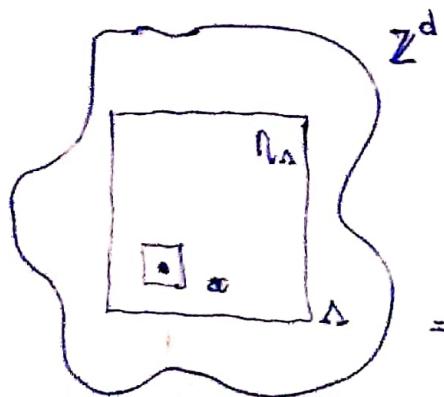
$$\Rightarrow \frac{c(\infty, \eta)}{c(\infty, \eta^x)} = e^{2\beta \Delta_\infty H(\eta)}$$

Obs: com essas destradas taxas, Gibbs é invariante (reversível).

Obs: Reversibilidade



$$\mu(n) c(\infty, \eta) = \mu(\eta^x) c(\infty, \eta^x)$$



$$\frac{c(\infty, \eta)}{c(\infty, \eta^x)} = \frac{\mu(\eta^x)}{\mu(n)}$$

$$= \frac{e^{-\beta H(\eta^x)}}{e^{-\beta H(\eta)}} = e^{-\beta [H(\eta^x) - H(\eta)]} = e^{-\beta \Delta_\infty H(\eta)}$$

Exemplos de taxas usuais:

### 3. Metropolis

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta_x H(\eta) \leq 0 \\ e^{-\beta \Delta_x H(\eta)} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$c(x, \eta) = e^{-\beta [\Delta_x H(\eta)]_+}, \quad [\alpha]_+ = \max\{\alpha, 0\}$$

### 4. "Heat-bath"

$$c(x, \eta) = \frac{1}{1 + e^{\beta \Delta_x H(\eta)}} \quad \text{Verifique!}$$

$$5. c(x, \eta) = e^{-\beta \Delta_x H(\eta)} \quad \text{Verifique!}$$

### Metastabilidade

#### Osc. contínuo

$\mathbb{Z}^3$  tem 2 medidas invariantes:  $\nu$  e  $\delta_0$

contato em  $\{1, \dots, N\}$   $\rightarrow$  só 3 medidas invariantes

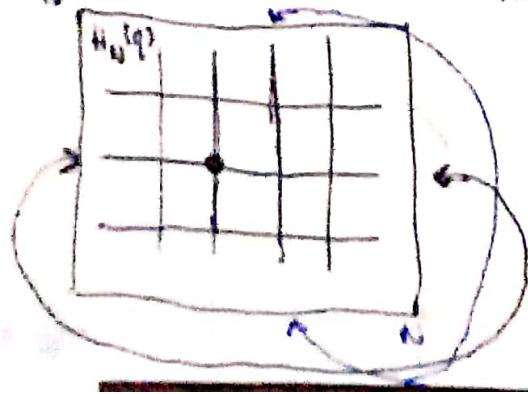
+ condições periódicas (conjunto finito de estados)

proc. rec. positivo

### Metastabilidade no modelo do Ising bidimensional

$\{\eta\}_{t=0}$  modelo de Ising estocástico

$N$  no toro bidimensional  $\{1, \dots, N\}^2$



$$H(\eta) = H_N(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{(x,y) \\ \text{em } T_N}} \eta(x)\eta(y) - h \sum_{x \in T_N} \eta(x)$$

$$c(x, \eta) = e^{-\beta [\Delta_\infty H(\eta)]_+}$$

dinâmica atrativa

Medida Invariante

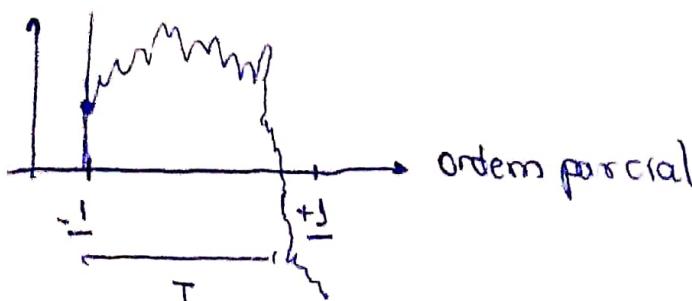
$$\mu(\eta) = \frac{e^{-\beta H(\eta)}}{Z}, \quad Z = \text{normalização}$$

$N$  grande,  $\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow \infty$

$$S = \{-1, +1\}^{T_N}$$

$$\eta \leq \xi \Leftrightarrow \eta(x) \leq \xi(x) \quad \forall x \in T_N$$

$$\begin{array}{ccc} -1 & \text{---} & +1 \\ & \text{---} & \\ & S & \end{array} \quad \begin{array}{l} -1(x) = -1 \quad \forall x \in T_N \\ +1(x) = +1 \quad \forall x \in T_N \end{array}$$

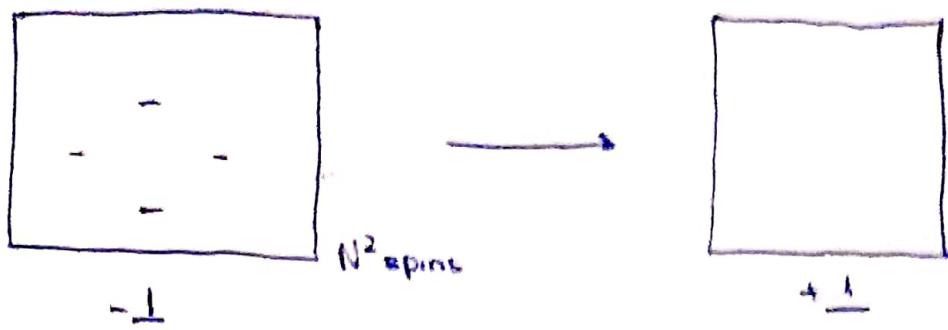


Seja  $\{\eta_t^n\}_{t \geq 0}$  o processo começando de  $\eta$

Defino  $T^h(A) := \inf\{t \geq 0 : \eta_t^n \in A\} \quad A \subset S_N$

$$T^{-\frac{1}{2}}(+1) = T$$

O comportamento depende de  $h$ .



$$\Delta \alpha H(-1) = 4 - h \leq 0$$

$h > 4$   
 $\hookrightarrow (2d)$

$$E(\tau) \approx \sum_{k=1}^{N^2} \frac{1}{K} \sim \log N$$

$$\frac{\tau}{E(\tau)} \rightarrow ? \text{ (Não é exponencial)}$$

Não tem metaestabilidade.



$$\Delta \alpha H(-1) = 4 - h > 0, \text{ se } h < 4$$

$$2 \leq h \leq 4$$

$$h > 2$$

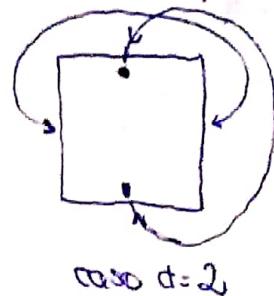
# Sistema de Partículas Interagentes

Aula 08

30/04

Modelo Ising Estocástico em vol. finito baixas temperaturas

$$\{\eta_t\}_{t \geq 0} \text{ em } S = \{-1, +1\}^{T_N}$$



$$T_N = \{1, 2, \dots, N\}^2 \text{ com cond. periódicas}$$

Energia

$$H(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{(x,y)} \eta(x)\eta(y) - \frac{h}{2} \sum_x \eta(x)$$

↑  
viz. próximas

Taxas

$$\omega(x, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } H(\eta^x) - H(\eta) \equiv \Delta_x H(\eta) \\ e^{-\beta \Delta_x H(\eta)} & \text{c.o.} \end{cases}$$

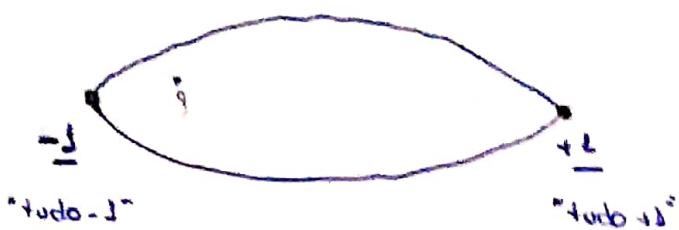
Medida Invariante (reversível)

$$\mu(\eta) = \frac{e^{-\beta H(\eta)}}{Z}, \quad Z = \sum_{S \in S} e^{-\beta H(S)} = \text{"f. partição"}$$

Exercício: Se  $\eta_1 \leq \eta_2$ ,  $\eta_t^n$  = proc começando de  $\eta$  acopla  $\eta_t^{n_1}$  e  $\eta_t^{n_2}$  tal que

$$P(\eta_t^{n_2} \leq \eta_t^{n_1}) = 1 \quad . \quad \text{Atratividade}$$

S



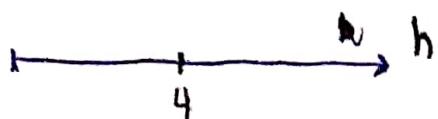
Tempo de parada.

$$T^L(A) = \inf \{t \geq 0 : r_{t,t}^n \in A\}$$

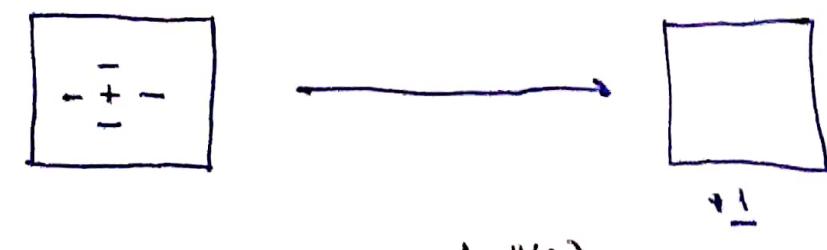
$$T^0(A)$$

$$T = T^{-1}(\{+1\})$$

Comportamento de  $T$ , com  $N$  fixo (grande) e  $h$  fixo (pequeno) no limite de baixas temperaturas ( $\beta = \frac{1}{kT}$  grande)



$$\Delta_{\infty} H(\eta)$$



$$-\underline{\quad}- \rightarrow -\underline{\quad}- \quad \Delta_{\infty} H(\eta)$$

$$4-h$$

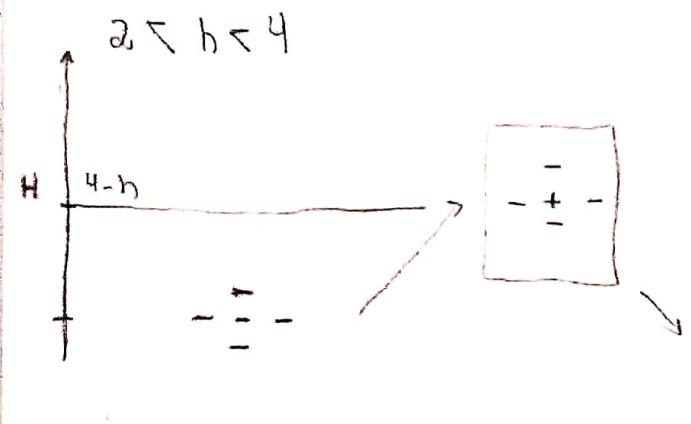
Se  $h > 4$ , seja  $X_t^{-1}$  processo com

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta(\infty) = -1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então:

$$P(\eta_t^{-1} = X_t^{-1}, t < e^{+\beta E}) \xrightarrow{\beta \downarrow \infty} 1$$

Obs:  $E \propto N \log N$ ,  $\epsilon > 0$  pequeno



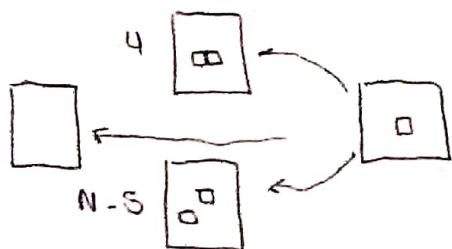
## Construção de $\Pi_{jt}$



- ## 1. PPP ( $N^2$ )

2. Escalho  $\propto ST_N$ , unif.

3. Trouver un  $\varepsilon$  pour la prob  
 $c(x, \eta_1)$



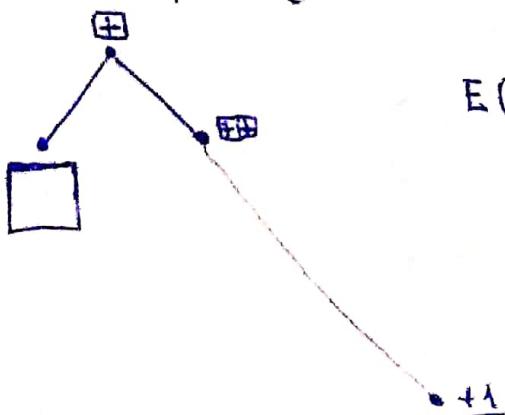
"Crescimento esférico que tem tréchos planos"

$a < b < 4$  "gota orifical" =

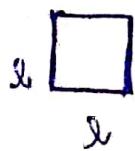
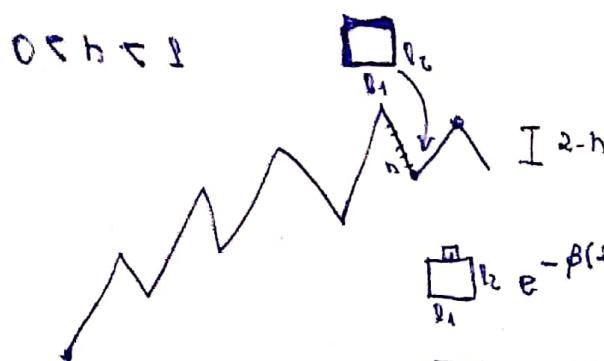
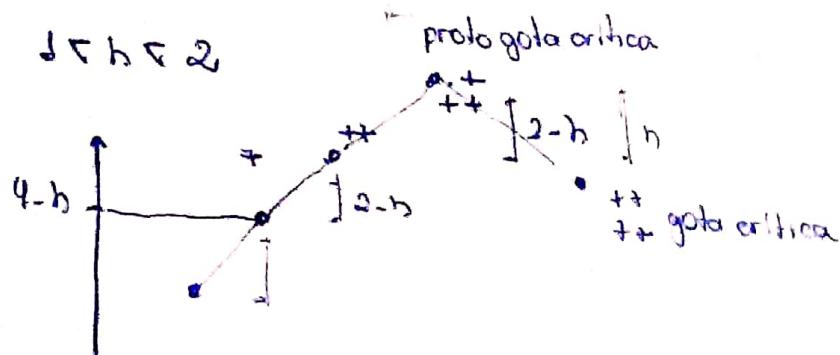


$r_{lt}^{(t)}$  cresce "monotóramente" até  $\pm 1$ .

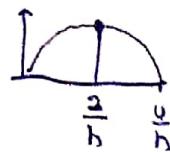
## proto gta critica



$$E(T) \cong e^{\beta(u-h)}$$



$$H(n) = 4\lambda - h\lambda^2 = \lambda(4-h)$$



$$\begin{aligned} L = \text{lado critico} &= \frac{L}{L-1} \frac{2}{h} L \\ &= \left[ \frac{2}{h} \right] \end{aligned}$$

S = espaço de configurações

RCS = "configurações retângulares"



GCS = "gota critica" onde  $L = \left[ \frac{2}{h} \right]$



PCS = "protogota critica"



Seja  $\eta \in \mathbb{R}$

Defina dois eventos

$G_\xi(\eta)$  = "gota cresce  $\varepsilon$ -regularmente"

= "cluster de + é sempre conexo"

$$T^{\varepsilon}(-\perp) \cap T = T^{\varepsilon}(+\perp), \\ T \subset e^{+\beta(z-h+\varepsilon)}$$

↓  
tempo de relaxação. Daí para dominio local e não pro  
min local.

$S_\xi(\eta)$  = "gota decrece  $\varepsilon$ -regularmente"

cluster de + é conexo até desaparecer

$$T^{\varepsilon}(-\perp) \cap T$$

$$T \subset e^{\beta((z-h)+\varepsilon)}$$

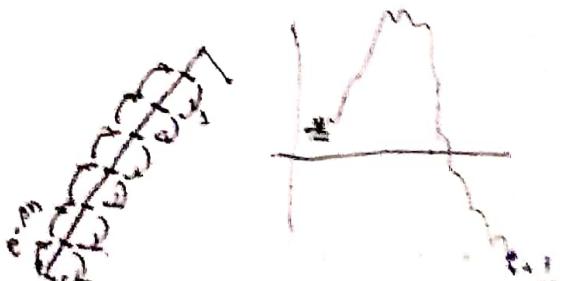
Teorema: Se  $\eta \in \mathbb{R}$  e defina  $\gamma(\eta) = \min\{2_1, 2_2\}$

a) Se  $\gamma(\eta) \leq L = \left[\frac{3}{h}\right]$  então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(S_\xi(\eta)) \rightarrow 1$$

Caso standard

$$\frac{z}{h} \notin \mathbb{Z}$$



Lemma: Seja  $X_t$  processo de Nascimento e morte com

$$q_{i,i+1} = \delta < 1 \quad \text{e} \quad i \geq 0$$

$$q_{i,i-1} = \gamma \quad , \quad i \geq 1$$

(medida m  $\mu(i) = (1-\delta)\delta^i, i \geq 0$ )

$$\Theta_\delta = \inf \{t \geq 0 : X_t^0 \in K\}$$

$$P\left(\frac{1}{\delta^{k-\varepsilon}} \leq \Theta_\delta \leq \frac{1}{\delta^{k+\varepsilon}}\right) \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 1$$

$$P(\Theta_\delta < \delta^{-k+\varepsilon}) \rightarrow 0$$

Considero  $X_t^u$  cadeia estacionária

$$P(\Theta_\delta < \delta^{-k+\varepsilon})$$

acoplamento básico entre  $X_t^0$  e  $X_t^u$  = "ind. até se cruzarem; depois segue juntas"

$$\underbrace{P(\Theta_\delta < \delta^{-k+\varepsilon})}_{A} = P(A, X_0^u = 0) + P(A, X_0^u \neq 0)$$

$$\leq P(X_0^u \neq 0) + P("Proc.  $X_t^u$  atinge K antes de  $\delta^{-k+\varepsilon}$ )$$

$$\leq 1 - (1-\delta)$$



$P(X_t^n \in K \text{ para algum } t \in \{\delta^{E_{12}}, 2\delta^{E_{12}}, \dots, [\delta^{-k+1}], \delta^{E_{12}}\})$

$$\frac{\delta^{-k+1}}{\delta^{E_{12}}} = \delta^{-k+1}$$

+  $P(\bigcup_{\delta} \delta^{-k+E}, X_t^n \in K \text{ para todo } t \in \dots)$

$$\leq \delta^k \cdot \delta^{-k+E} + (1 - e^{-\delta^{E/2}}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$P(\bigcup_{\delta} \delta^{-k-E}) \rightarrow 0$



$$P(\bigcup_{\delta} \delta^{-k}) \leq e^{-1} (1 - e^{-\delta/k})^k$$

↓  
nem um atendendo

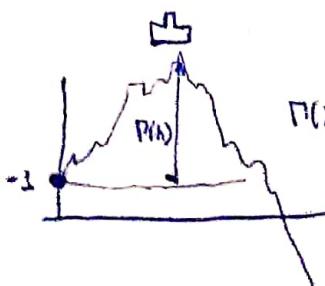
$$P(\bigcup_{\delta} \delta^{-k-E}) \leq (1 - e^{-1} (1 - e^{-\delta/k})^k)^{\delta^{-k-E}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

↓  
Exercício

Teorema:  $T = T^{-1} (+1)$

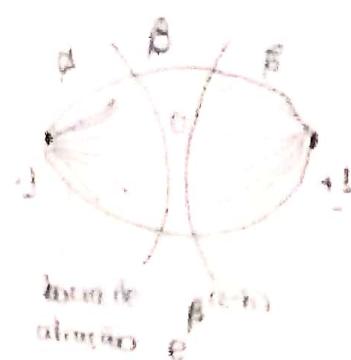
a)  $\perp \log E(T) \rightarrow \Gamma(h)$   
 $\beta$

b)  $\frac{1}{\beta} \log T \rightarrow \Gamma(h)$  em prob



c)  $\mathbb{I} \rightarrow TN \exp(1)$   
 $ET_{\text{piso}}$

História da curvatura e do  
 operador de



Obs: "Em 3d, gotas arredondadas mais complicadas"  
 "mais possibilidades"

# Sistema de Partículas Interagentes

Aula 09

18/04/2015

$$\mathcal{S} = \{\eta_0, \eta\}^N, \quad \mathbb{N} = \mathbb{Z}^d$$

$$\{\rho_\eta\}_{\eta \in \mathcal{S}}$$

$$D_\eta [0, \infty) \\ \xrightarrow{\text{proj.}}$$

$$\{\delta(t)\}_{t \geq 0}$$

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta_t) = e^{t\Delta} f(\eta)$$

"Gerador"

$$\Delta f(\eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f(\eta) - f(\eta)}{t}$$

$$\Delta f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{N}} c(x, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)]$$

$$\Delta f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}$$

$$S(t) = e^{t\Delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t\Delta}{n})^n$$

(1 - x\Delta)^{-1} resuelve

$$\mathcal{D} = \{f \in C(S) : \sum_x \Delta_f(x) < \infty\}, \text{ onde}$$

$$\Delta_f(x) = \sup_n |f(\eta^x) - f(\eta)| \xrightarrow[\substack{|x| \rightarrow \infty \\ f \in C(S)}} 0$$

Obs: em  $S$  com métrica

$$d(\eta, \xi) = \sum_x |\eta(x) - \xi(x)| \frac{1}{2^{|x|}}$$

$$\eta_n \rightarrow \xi$$

$$f \in C(S); \|f\| = \sup_{\eta \in S} |f(\eta)|$$

Exemplo:

$f \in C(S)$

$$f(\eta) = g(x)$$

$$f(\eta) = \sum_{x \in S} f(x) \frac{1}{\Delta(x)} \quad \eta_n \rightarrow \eta \Rightarrow f(\eta_n) \neq f(\eta)$$

$\exists f \notin C(S)$

$$f(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_n|} \sum_{x \in \Delta_n} f(x) =$$

$$f(\eta) = \mathbb{1}_{\{\eta \geq 1\}}$$

Ex:  $\eta = \frac{x}{n}$

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Delta_n = [-n, n] \\ 0 & \text{se } x \notin \Delta_n \end{cases}$$

Exercício:

a)  $f$  está def. em  $D$

b)  $D$  é denso em  $C(S)$

$f \in C(S)$  contínua  $f_n \in D$ ,  $f_n \rightarrow f$

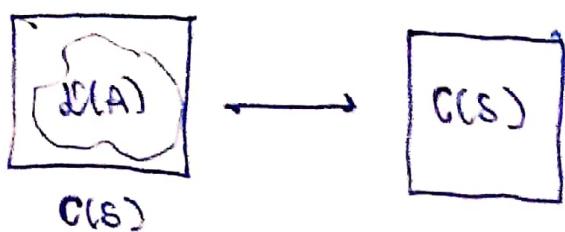
$(C(S), \| \cdot \|)$  espaço de Banach

Obs:  $\|f\| = \sup_n |f(\eta)|$

$D = \{f \in C(S) \mid \|f\| < \infty\}$

$\|f\| = \sum_{x \in S} \Delta_f(x)$

Definição: Um operador linear  $A$



é dito um gerador se

1.  $\mathbb{1} \in D(A)$  e  $A\mathbb{1} = 0$

2.  $D(A)$  é denso em  $C(S)$

3. Se  $f \in D(A)$ , e  $\lambda > 0$  tal que

$$g = f - \lambda Af = (\mathbb{1} - \lambda A)f$$

então

$$\min_{S \in S} f(S) \geq \min_{S \in S} g(S)$$

Dissipative operator

equivalente a

$$\|f\| \leq \|g\| \text{ para}$$

$$\min_{S \in S} g(S) \leq \min_{S \in S} f(S) \leq \max_S f(S) \leq \max_S g(S)$$

$$\min_{S \in S} -f(S) \geq \min_{S \in S} -g(S)$$

$$-\max_S f(S) \geq -\max_{S \in S} g(S)$$

$$\max_S f(S) \leq \max_S g(S)$$

Obs:  $S(t)f(\eta_0) = E^t f(\eta_t) = e^{t-\tau} f(\eta_0)$

seja  $\eta_0$  tal que

$$f(\eta_0) = \min_S f(S)$$



$$S(t)f(\eta_0) \equiv (1+t\Omega)f(\eta_0)$$

$$= f(\eta_0) + t\Omega f(\eta_0) \geq f(\eta_0)$$

$$\Rightarrow \Omega f(\eta_0) \geq 0$$

então  $g(\eta_0) = f(\eta_0) - \lambda \Omega f(\eta_0) \leq f(\eta_0) = \min_S f(S)$

$$\min_S g(S) \leq g(\eta_0) \leq \min_S f(S)$$

4.  $R(1-\lambda A) = C(S)$   
 $\uparrow$   
 contra-domínio

$$\boxed{ } \xrightarrow{1-\lambda A} \boxed{C}$$

Teorema de Hille-Yosida

Existe uma relação 1-a-1 entre geradores e semigrupos tal que

$$\Omega f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}, \quad f \in D(\Omega)$$

$$S(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t\Omega}{n}\right)^{-n} f, \quad f \in C(S)$$

Queremos verificar que

$\Omega$  definido em  $D$  por

$$\Omega f(\eta) = \sum_{\alpha \in \Lambda} c(\alpha, \eta) [f(\eta^*) - f(\eta)] \quad \text{é um gerador}$$

1. trivial

2. Exercício. (que é denso em  $C(S)$ )

3. OBS: Se  $\eta_0$  é tal que  $f(\eta_0) = \inf_S f(\xi)$ ,  $\nabla f(\eta_0) \neq 0$ . Trabalhar com isso na prova!

4.  $\mathbb{R}(1 - \lambda \Delta) = C(S)$ ,  $\lambda$  pequeno

cond. sobre as taxas



Sejam  $\xi \in M$  def. por

$$\xi = \inf_{\alpha, \eta} [c(\alpha, \eta) + c(\alpha, \eta^\alpha)] = \text{"taxa basal"}$$

$$r(x, w) = \sup_{\eta} |c(x, \eta^w) - c(x, \eta)| \quad \text{"influência de } w \text{ em } x\text{"}$$

$$S = \{\alpha, \eta\}^\Delta, \Delta = \mathbb{Z}^d$$

$$l_\Delta(\Delta) = \{ \text{funções de } \Delta \text{ em } \mathbb{R} \}$$

bonárias

$$\alpha: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{x \in \Delta} |\alpha(x)| < \infty$$

com norma

$$\alpha \in l_1(\Delta) \Rightarrow \|\alpha\| = \sum_{x \in \Delta} |\alpha(x)|$$

Em  $l_\Delta(S)$  definio operador  $\Gamma$

$$\Gamma \alpha(w) = \sum_{x \neq w} \alpha(x) r(x, w)$$

Exercício:  $\Gamma$  é limitado se

$$\sup_x \sum_{w \neq x} r(x, w) < \infty$$

$f \in C(S) \Leftrightarrow \Delta f \in L_1(S)$

$$\Delta f(\omega) = \sup_{\eta} |f(\eta^*) - f(\eta)|$$

$D = \{f \in C(S) : \|f\|_1 = \int_S \Delta f(\omega) < \infty\}$

- Mecânica estatística
- No início do século XX, por Ising



$$\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^2$$

Em cada ponto, azeite o sinal da ordem  
é com parâmetros de localização  
e é um e menor um.

Todas as possíveis configurações  $\Omega = \{-1, 1\}^{\Lambda_N}$

$$|\Omega| = 2^{|\Lambda_N|} = 2^{(2N+1)^2}$$

Para cada  $w \in \Omega$ , associe um peso:  $w \mapsto w(w)$ . Daí,

$$p(w) = \frac{w(w)}{\sum_{w \in \Omega} w(w)}$$

Como definir  $w(\cdot)$ .

$$\begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\sigma_x \sigma_y = \begin{cases} +1 & \text{se } (\sigma_x, \sigma_y) \text{ é par} \\ -1 & \text{se } (\sigma_x, \sigma_y) \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Como o interesse está em f. de gás de energia, tomamos

Energia, Hamiltoniano

$$\uparrow$$

$$H(w) = - \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma_x \sigma_y$$

$(x, y \in \Lambda_N)$

$$\begin{cases} -1, & \text{se } \sigma_x = \sigma_y \\ +1, & \text{se } \sigma_x \neq \sigma_y \end{cases}$$

Menor energia, menor peso. Logo

$$w \mapsto w(w) = e^{-\beta H(w)}$$

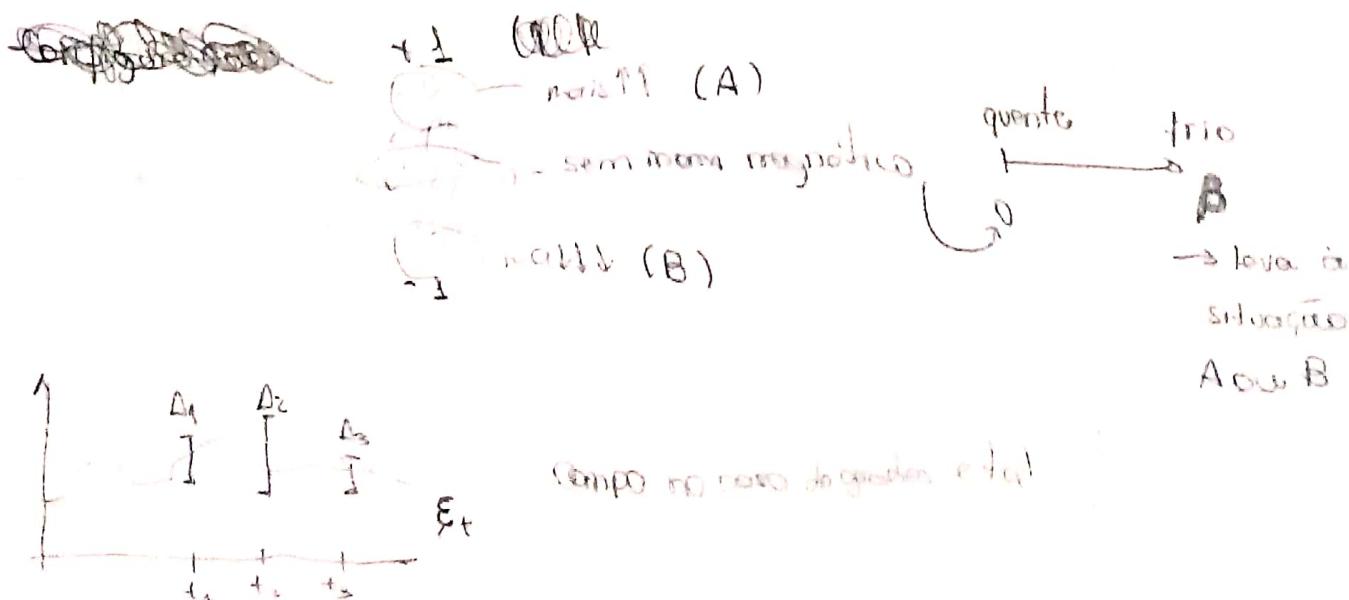
$$p(w) = \frac{w(w)}{\sum w(w)} = \frac{e^{-\beta H(w)}}{Z_{\text{AN}}} \leftarrow \text{funções de partitione}$$

Momento magnético. Surge quando todas as moléculas tiverem seus spin no mesmo sentido



$$M = \sum \alpha_w \begin{cases} +1 & \text{em média, todos na mesma direção} \\ -1 & \text{em direção contrária} \end{cases}$$

Existe transição de fase?



Expandido a grandeza ( $N \rightarrow \infty$ ), vemos claramente as duas medidas quando frio e muito qto quente

$\frac{+1}{+1}$  pode ser -1 por causa da cardinalidade, mas para este caso  
 $+1 \quad 0 \quad +1$  pode ser -1

$\bullet +1$

Processos, essa é o objeto principal.

$$P(\sigma_{\infty} = 1 / \bar{\sigma}_0) =$$

Seus que estão conseguem definir o campo.

$$1 - P(\sigma_{\infty} = -1 / \bar{\sigma}_0)$$

A m. estatística diz que sim, mas, podemos não ter ~~existe~~ uma única resposta.

### • Erdos-Renyi

A



$$G = (V, E)$$

$p > 0, p \in [0, 1] \Rightarrow$  Distribuição das vértices  
Trans. de fase

R<sup>2</sup>

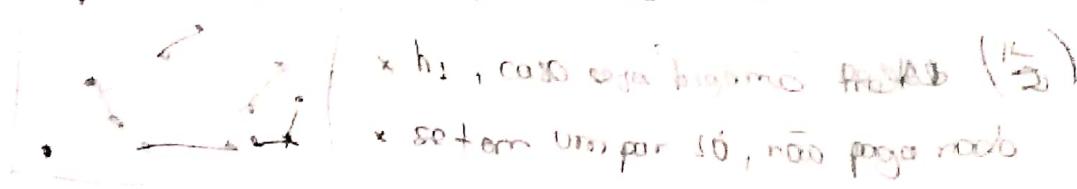
Mais indep. entre os pares

### • Motivo do Contato



$$L(e)$$

\*  $h_0$ , caso esteja sozinho



$$\times h_1, \text{ caso existam } 2 \text{ vizinhos } \binom{K}{2}$$

\* se tiver um par de 16, não paga nada

$$\star K \binom{K}{2} = \frac{K(K-1)}{2}$$

$$H(\omega) = \sum_e L(e) + \sum_s \phi_s(\omega)$$

- Não
- Desaparecem os fôlegos
  - Exág. de processos, resultados muito longos
  - faltam resultados, e algumas vezes



A  
Jue (Mas ha pendiente / Pendiente)

↓ punto

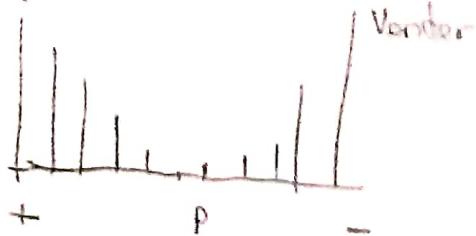


(Ha pendiente? Problema abierto)

R<sup>2</sup>

$$\exists \beta_c \ \forall \beta < \beta_c$$

Comparar



Allora, freq de pessoas

Gravitação Quântica

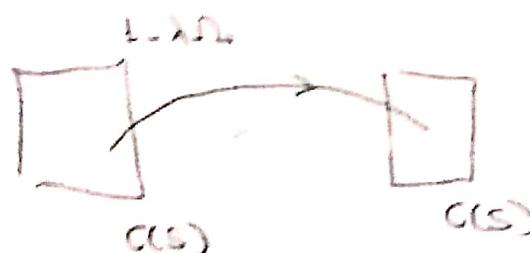
# Sistema de Partículas Interagentes

Aulas 11 - 22/04/2018

$$\mathbb{R}^{(0,1)}^N, \Delta = \mathbb{Z}^N$$

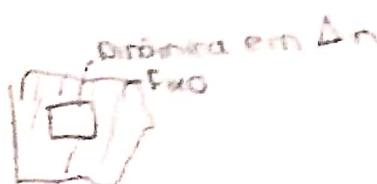
$$\{c(s)\}_{s \in \Omega}, \Omega \subset \mathbb{Z}^N, D = \{f \in C(S), \|f\|_1 \leq \sum_{s \in \Omega} |f(s)|\}$$

$$\Delta f(n) = \sum_{m \in \Omega_n} c(m,n) [f(m) - f(n)]$$



$$R(1 - \lambda_{s,s'}) = c(s)$$
$$(1 - \lambda_{s,s'})^{-1}$$

Definição.  $\delta = \inf_{x, q} (c(x,q) + c(x,q^2))$  "taxa basal"  
"ruído mínimo"



Ex:  $\delta = 0 \Leftrightarrow$  qd0

$$r(x,q) = \sup_q |c(x,q^+) - c(x,q^-)|$$

Estimativa  $1 - \lambda_{s,s'}$

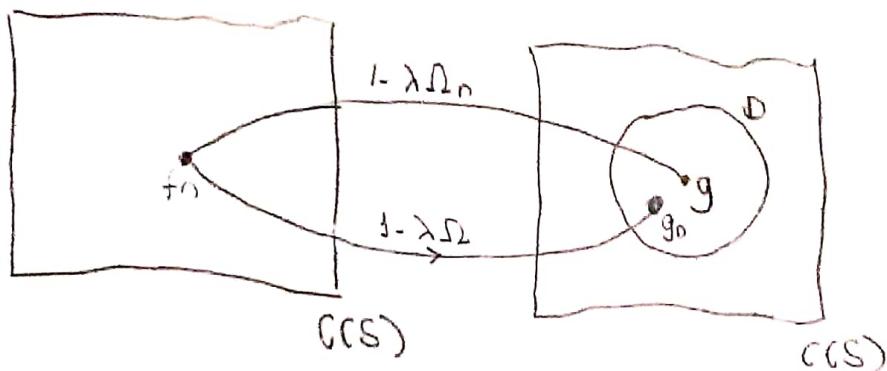
Aproxima  $\Omega$  por operadores e limitados (Lmite Termodinâmico)

$\Omega_n$ : "só permite traçar em  $A_n \setminus \Delta_n$ ,  $|A_n| < \infty$ "

$$\Omega_n f(n) = \sum_{x \in A_n} c(x, n) [f(n^*) - f(n)]$$

Como  $\Omega_n$  é limitado,

$$R(1-\lambda \Omega_n) = C(S), \forall \lambda, n$$



$$g \in D \quad \exists f_n \in C(S) \text{ s.t. } (1 - \lambda \Omega_n) f_n = g$$

$$\text{Defino } g_n = (1 - \lambda \Omega_n) f_n$$

Proposição:  $f \in C(S)$  e

$$c(x, \cdot) = 0 \Leftrightarrow x \notin A_n, |A_n| < \infty$$

se  $(1 - \lambda \Omega_n) f = g \in D, \lambda > 0$  e se

$$M = \sup \sum_{u \neq x} \varphi(x, u) < \infty$$

$$\text{então } \lambda M < 1 + \lambda \varepsilon$$

então

$$\Delta_f(x) = \sup_n |f(n^*) - f(n)|$$

$\Delta_f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$

temos

$$\Delta f \in [(\cup \lambda \in \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}]^{\mathbb{N}} \Delta g$$

onde  $\Gamma$  é um operador em

$\ell_1(\Lambda) = \{ \text{funções } \omega : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \text{ absolutamente continuas} \}$

$$\{\omega : \sum_{x \in \Lambda} |\omega(x)| < \infty\}$$

definido por

$$\Gamma \omega(u) = \sum_{x \in u} \omega(x) \delta(x, u) \quad \square$$

Dom:  $\Gamma$  é limitado e  $\|\Gamma\| = M$ .

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| &= \sup_{\omega \in \ell_1(\Lambda)} \frac{\|\Gamma \omega\|}{\|\omega\|} = \sup_{\omega} \frac{\sum_u \left| \sum_{x \in u} \omega(x) \delta(x, u) \right|}{\|\omega\|} \\ &\leq \sup_{\omega} \sum_u \frac{\sum_{x \in u} |\omega(x) \delta(x, u)|}{\|\omega\|} \leq M \end{aligned}$$

Obs.

$$[(1+\lambda\varepsilon)I - \Delta P]^{-1} \Delta g =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda\varepsilon - \Delta P} \Delta g$$

$$= \frac{1}{1+\lambda\varepsilon} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda M}} \right] \Delta g$$

$$= \frac{1}{1+\lambda\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\lambda\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right)^n \right] \Delta g$$

Bem def. pois

$$\left\| \frac{\lambda\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \Gamma \right\| \leq \frac{\lambda M}{\lambda\varepsilon} \leq 1$$

Pela hipótese de  $\lambda M < 1 + \lambda\varepsilon$

$$\Delta f \leq \left\| \frac{\lambda\varepsilon}{1+\lambda\varepsilon} \right\|^2 \Delta g$$

$$f - \lambda\varepsilon f = g$$

↓

$$f(\eta^*) - \lambda\varepsilon f(\eta) = g(\eta)$$

$$f(\eta) - \lambda \sum_x c(x, \eta) [f(\eta^*) - f(\eta)] = g_x$$

$$f(\eta^*) - \lambda \sum_x c(x, \eta^*) [f(\eta^*) - f(\eta^*)] = g(\eta^*)$$

$$\cdot f(n) - \lambda c(\omega, n) [f(\eta^a) - f(n)] \rightarrow \sum_{x \neq n} (c(x, n) f(\eta^x) - f(n)) = g(n)$$

$$\cdot f(\eta^u) - \lambda c(\omega, \eta^u) [f(\eta) - f(\eta^u)] - \lambda \sum_{x \neq u} [ \dots ] = g(\eta^u).$$

$$\Rightarrow [f(\eta^u) - f(n)] \{ 1 + \lambda [c(\omega, \eta^u) + c(u, \eta)] \}$$

$$= g(\eta^u) - g(n) + \lambda \sum_{x \neq u} [c(x, \eta^u) (f(\eta^{xu}) - f(\eta^u)) \\ - c(x, n) (f(n^x) - f(n))]$$

O conjunto

$$A = \{f(\eta^u) - f(n); \eta \in S\}, \text{ para cada } \omega \in f$$

Note que se  $\alpha \in A \Rightarrow -\alpha \in A$ . ( $A$  é simétrico)

Existe  $\eta^*$  tal que ("Porque é compacto e  $f$  é contínua")

$$f(\eta^u) - f(n) = \sup_{\xi} |f(\xi^u) - f(\xi)|$$

Então , para todos

$$f(\xi^u) - f(\xi) \leq f(\eta^u) - f(n)$$

considero  $\xi = \eta^*$

$$f(\eta^{ux}) - f(\eta^*) \leq f(\eta^u) - f(n)$$

$$f(\eta^{ux}) - f(n^u) \leq f(n^x) - f(n)$$

190,

$$g(\eta^u) \cdot g(\eta_v) \leq f(\eta^u) \cdot f(\eta_v)$$

$$\sup_{\eta} [f(\eta^u) \cdot f(\eta_v)] \{1 + \lambda(c(u, \eta^u) + c(u, \eta_v))\} \leq \sup_{\xi} |g(\xi^u) - g(\xi_v)|$$
$$+ \lambda \sum_{x \neq u} [f(\eta^x) \cdot f(\eta_v)],$$
$$\sup_{\eta} |c(x, \eta^u) - c(x, \eta_v)|$$
$$\Delta_f(u) \{1 + \lambda(c(u, \eta^u) + c(u, \eta_v))\} \leq \Delta g(u) + \lambda \sum_{x \neq u} \Delta_f(x) \Gamma(x, u).$$

Tornando infine

$$\{1 + \lambda \varepsilon\} \Delta f \leq \Delta g + \lambda \Gamma \Delta_f$$

$$\Delta_f \leq \frac{1}{1 + \lambda \varepsilon} \Delta g + \frac{\lambda}{1 + \lambda \varepsilon} \Gamma \Delta_f$$

$$\leq \frac{1}{1 + \lambda \varepsilon} \Delta g + \frac{\lambda}{1 + \lambda \varepsilon} \Gamma \left[ \frac{1}{1 + \lambda \varepsilon} \Delta g + \frac{\lambda}{1 + \lambda \varepsilon} \Gamma \Delta_f \right]$$

operando prodotti

$$\leq \frac{1}{1 + \lambda \varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \lambda \varepsilon} \Gamma \right)^n \Delta g + \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda \varepsilon} \Gamma \right)^{n+1} \Delta_f$$

$\downarrow_0$

$$\rightarrow [ \quad ]^{-1} \Delta_g$$

□

Def. Um operador linear  $\Delta$  é dito fechado se

$$\{(f, \Delta f) ; f \in D(\Delta)\} \subset C(S) \times C(S)$$

for um conjunto fechado.

Def: O fecho de um operador (se existir) é o operador fechado cujo "gráfico" é o fecho do gráfico do operador original.

Notação:  $\bar{\Delta}$

Observação. O fecho pode não ser um operador linear.

Ex:  $D(\Delta) = \{f \in C(S) ; f \text{ diferenciável na origem}\}$

$$S = [0, 1]$$

$$\exists f'(0)$$

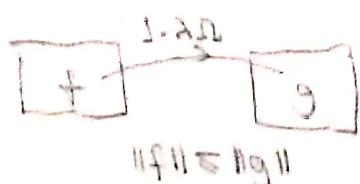
$f \in D(\Delta)$ ,  $\Delta f = f'(0)$  verificar

$$\begin{cases} f_n \rightarrow 0 \\ \Delta f_n \rightarrow ? \end{cases}$$

Devemos replicar se o fecho se  
verifica que o fecho é um operador

MAS, "os nossos" operadores tem

fecho crucial: "propriedade dissipativa"



Proposição. Suponha  $\Omega$  satisfazendo

(convexidade,

operadores elípticos)

a)  $D(\Delta)$  denso em  $L^2(\Omega)$

b)  $\Omega$  dissipativo

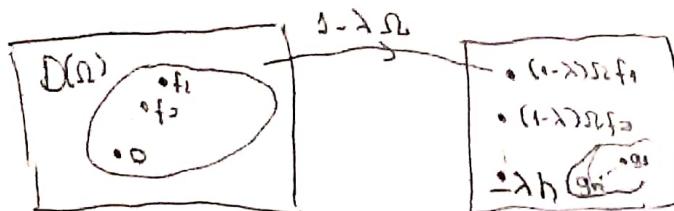
Se  $f - \lambda \Delta f = g$  então

$$\inf_{\eta} f(\eta) \geq \inf_{\eta} g(\eta)$$

$$\Leftrightarrow \|f\| \leq \|g\|$$

então  $\bar{\Pi}$  existe (é operador).

Dem. Seja  $f_n \in D(\Delta)$ ,  $f_n \rightarrow 0$  e defino  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f_n$



$$(1 - \lambda \Delta) f_n \rightarrow -\lambda h$$

Considere  $g_N \in D(\Delta)$  convergindo para  $h$ . ( $\exists g_N$  pois  $D$  é denso)

$$(1 - \lambda \Delta) g_N \rightarrow h - \lambda \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta g_N$$

$$-\lambda((1 - \lambda \Delta) g_N) \rightarrow -\lambda h$$

$$(1 - \lambda \Delta) f_n + \lambda(1 - \lambda \Delta) g_N = (1 - \lambda \Delta)(f_n + \lambda g_N)$$

Por dissipatividade,

$$\|(1-\lambda\Omega)(f_0 + \lambda g_K)\| \geq \|f_0 + \lambda g_K\|$$

$$\|f_0 - \lambda \Omega f_0 + \lambda g_K - \lambda^2 \Omega^2 g_K\| \geq \|f_0 + \lambda g_K\|$$

$$\|\lambda g_K - \lambda h - \lambda^2 \Omega^2 g_K\| \geq \|\lambda g_K\| \Leftrightarrow$$

$$\|g_K - h - \lambda \Omega g_K\| \geq \|g_K\|, \forall \lambda$$

$$\downarrow \lambda \rightarrow 0$$

$$\|g_K - h\| \geq \|g_K\|$$

$$\downarrow K \rightarrow \infty$$

$$0 \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \|g_K\| = \lim \|h\|$$

Logo,  $h = 0$ .

Teorema de existência para sistemas de Sist.

Suponha  $M < \infty$ , então  $\bar{\Omega}$  é um gerador

- (a)  $D(\bar{\Omega})$  é denso
- (b)  $\exists \zeta \in D(\bar{\Omega})$  s.t.  $\bar{\Omega}\zeta = 0$
- (c)  $\bar{\Omega}$  é dissipativo
- (d)  $R(1-\bar{\Omega}) = \{0\}$

Blém disso,

$$(S(t)f, f)$$

$$\Delta_{S(t)f} \leq e^{-\mu t} e^{\mu t} \Delta_f$$

$$\text{e}$$

$$f \in D \Rightarrow S(t)f \in D \text{ e } \|S(t)f\| \leq e^{(\mu-\epsilon)t} \|f\|$$

## Demo "Lema de Teorema do Fórmico"

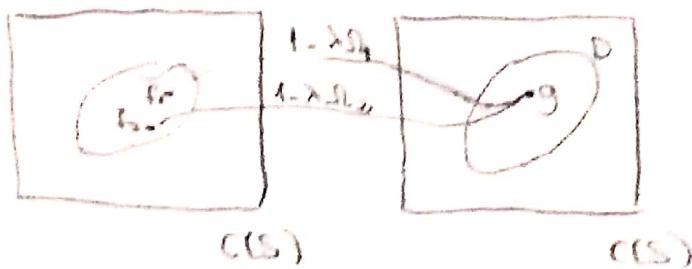
aparece no final

$$\Delta_n f(q) = \sum_{\alpha \in \Omega_n} c(\alpha, q) [f(q^\alpha) - f(q)]$$

onde  $\Delta_n^2 f$  é  $L_2$ -acaso

"As regras correm" "Crescimento das janelas no sentido de "folhas"  
Termos.

$$R(1 - \lambda \Omega_n) = C(S) \quad \forall n, \lambda$$



Então se D, defino f<sub>n</sub>

$$(1 - \lambda \Omega_n) f_n = g$$

Usa a proposição relevantes  $\Delta_f \in \Delta_g$  e assumindo que  
 $\lambda n \leq 1 + \lambda B$  Termos que

$$\Delta_f \in [-I]^{-1} \Delta_g$$

$\lambda$  pequeno  
 $\Rightarrow f_n \in D, \forall n$

Um ver que  $f_n \in D$ ,

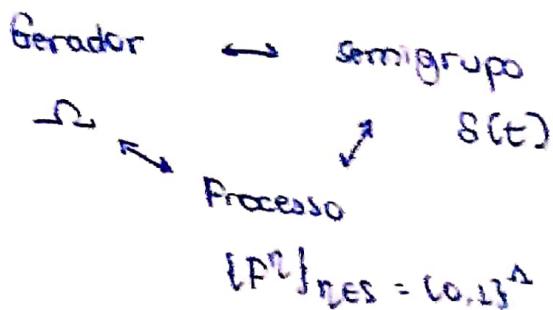
$$\text{Defino } g_n = (1 - \lambda \Omega_n) f_n.$$

Quero mostrar que  $g_n \rightarrow g$ , o que implica em  $g \in \overline{R(1 - \lambda \Omega)}$

$$D \subset \overline{R(1 - \lambda \Omega)} \quad \text{Agora, mostrando } g_n \rightarrow g$$

SPS

Aula 12,

29/04  
30/04 $M = \text{"força da interação"} < \infty$ 

1. Se  $M < \infty$ ,  $\cup \rightarrow S(t)$
2. Aplicações: se  $\epsilon > M \rightarrow$  ergódico

Teorema. Modelo Ising em  $d=L$  é ergódico para todo  $\beta > 0$ .

Dem:

~~desenvolvimento~~

$$S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$c(x, \eta) = e^{-\beta \sum_{x \sim y} [\eta(x)-1][\eta(y)-1]}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & \curvearrowleft & + & - & + \\ + & + & + & & + & - & + \end{array} \quad \text{com } e^{-2\beta}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & \curvearrowleft & + & + & + \\ + & - & + & & + & + & + \end{array} \quad \text{com } e^{2\beta}$$

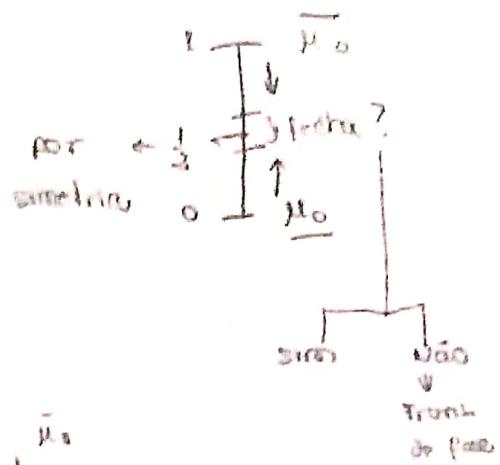
$\beta > 0 \Rightarrow$  ferromagnético  
atrativo

Modelo de Ising ferromagnético é atrativo

$$\text{Se } \bar{v}_0 = \delta_{\pm 1} \quad (+ve \Rightarrow 1^-) \quad , \quad \underline{v}_0 = \delta_0$$

$$\bar{\mu}_t = \bar{v}_0 S(t) \quad , \quad \underline{\mu}_t = \underline{v}_0 S(t)$$

valor esperado do sinal no infinito



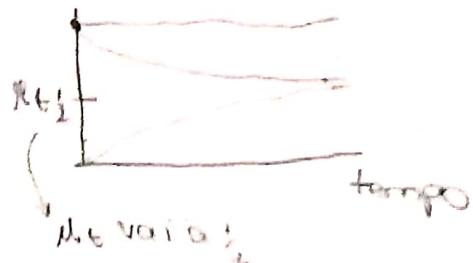
Outra forma:

$$S \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$$

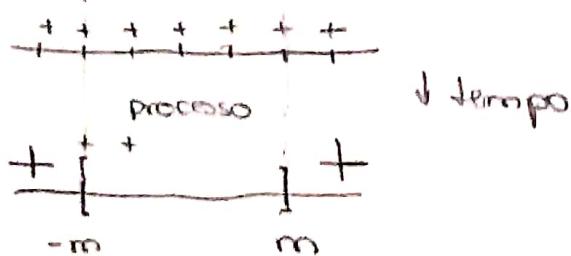
$$c(x, \eta) = e^{-\beta \sum_{i=0}^{x-1} \eta(i)}$$



$$\langle \mu_t f \rangle = E_{\mu_t}(\eta_{(0)})$$



$\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  processo Ising Estocástico d=1 com gasto de  $\eta_0 = \delta_{\frac{1}{2}}$



Definido processo  $\xi_t^m$ , com gasto de  $\delta_{\frac{1}{2}}$

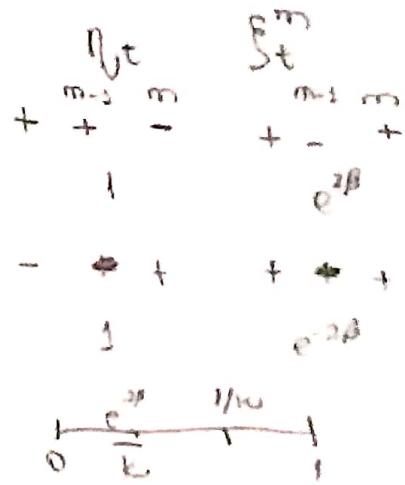
Definido: Processo  $\xi_t^m$ , processo auxiliar com lances

$$c_m(x, \eta) = \begin{cases} c(x, \eta) & \text{se } |x| \leq m \\ 0 & \text{se } |x| > m \text{ e } \eta(x) = 1 \\ k & \text{se } |x| > m \text{ e } \eta(x) = -1 \end{cases}$$

$$B = \max_{x, \eta} c(x, \eta) = e^{2\beta}$$

Por estratigide posso acoplar  $\eta_t \in \mathbb{S}_t^m$  tal que

$$P(\eta_t \leq \xi_t^m, \forall t \geq 0) = 1$$



Constr. graf para Ising

$$\eta_t \leq \xi_t^m \quad \forall t$$

o cadeia de Markov num espaço de estados finito ( $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d \times [0, T]}$ ) irredutivel

→ só tem uma medida invariante.

denote  $\mu_m$  essa medida (em  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ )

$$\delta_{\pm 1} S(t) \rightarrow \bar{v}$$

$$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{v} \in \mu_m \text{ e } \bar{v} \in L$$

$$\delta_{\pm 1} S_m(t) \rightarrow \mu_m$$

$\uparrow$   
semigrupo de  $\mathbb{S}_t^m$

$$\rho = \mathbb{E} \bar{v} \eta(0) = \mathbb{E} \bar{v} (\eta(0)) \geq 0$$





$$0 \leq p = \langle \bar{v} \eta(0) \rangle \geq \langle \mu_m \eta(0) \rangle$$

↓ m100  
0

$$\mu_m \{ \eta : \eta(k) = \xi(k) \} =$$

Caracterização de  $\mu_m$



Defino.  $\mu(\eta : \eta(k) = \xi(k)) = \frac{1}{2}$

• 2

$$\mu(\eta : \eta(x) = \xi(x), x = k, k+1) = \frac{e^{\beta \xi(k) \xi(k+1)}}{\text{Normalização}} = \frac{1}{2} \frac{e^{\beta \xi(k) \xi(k+1)}}{e^\beta + e^{-\beta}}$$

• 3

$$\text{Normalização} = \sum_{\xi(k) \xi(k+1)} e^{\beta \xi(k) \xi(k+1)} = 2(e^\beta + e^{-\beta})$$

$$\mu(\eta : \eta(x) = \xi(x), x = k, k+1, k+2) = \frac{e^{\beta \xi(k) \xi(k+1) + \beta \xi(k+1) \xi(k+2)}}{\text{Norm.}}$$

$$\begin{aligned} \text{Norm.} &= \sum_{\xi(k) \xi(k+1) \xi(k+2)} e^{\beta \xi(k) \xi(k+1) + \beta \xi(k+1) \xi(k+2)} = \\ &= (e^{2\beta} + 2 + e^{-2\beta}) \cdot 2 \Rightarrow = \frac{1}{2} \frac{e^{\beta \xi(k) \xi(k+1) + \beta \xi(k+1) \xi(k+2)}}{(e^\beta + e^{-\beta})^2} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{e^\beta + e^{-\beta}} \begin{bmatrix} e^\beta & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^\beta \end{bmatrix}$$

matriz de transferência

$$P(++) = \frac{e^\beta}{e^\beta + e^{-\beta}}$$

$$\mu(\eta: \eta(x) = g(x), k \leq x \leq l) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^k P(g(i), g(i+1))$$

Daf,

$$\mu_m = \mu \text{ cond } x \in \mathbb{Z} \text{ fora de } \{-m+1, \dots, m-1\}$$

$$\begin{aligned} \mu_m(\eta: \eta(x) = g(x), k \leq x \leq l) &= \frac{\overbrace{P^{k-m}(+, g(k)) \prod_{i=k}^{l-1} P(g(i), g(i+1)) P^{m-l}(g(l), +)}^{\text{1}}}{{\overbrace{P^{2m}(+, +)}}^{\text{2}}} \\ &\approx \frac{P^{k-m}(+, g(k)) \prod_{i=k}^{l-1} P(g(i), g(i+1)) P^{m-l}(g(l), +)}{P^{2m}(+, +)} \end{aligned}$$


Exercício. Mostre que  $\mu_m$  definida acima é invariante (reversível) para  $\{g^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{inv. } \sum_x \mu_m(\eta) c_m(x, \eta) = \sum_y \mu_m(\eta^y) c_m(y, \eta^y)$$

Mais fácil ver reversibilidade

$$\text{rev. } \mu_m(\eta) c(x, \eta) = \mu_m(\eta^x) c(x, \eta^x)$$



$$\bar{v} \leq \mu_m = \frac{\mu_m + \mu_m}{2}$$

$$P_{\text{2D}}^{\text{2D}} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{23} & \gamma_{24} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{de simétrica} \\ \downarrow \\ \langle \mu_1(0) \rangle = 0 \end{array}$$

Daí,

$$\delta_{\perp} S(t) \rightarrow \bar{v} \leq \mu_m \forall m$$

$$\bar{v} \leq \lim \mu_m = \mu$$

$$\bar{v} \leq \mu \quad (\Rightarrow \bar{v} = \mu)$$

$$\delta_{\perp} S(t) \rightarrow v \geq \underline{\mu_m} \rightarrow \mu$$

$$\mu \leq v \leq \bar{v} \leq \mu \Rightarrow v = \bar{v} = \mu \quad \square$$

Isso mostra que Ising unidimensional não tem horizonte de fase.

Isso pra vizinhança finita.

Pra vizinhança inf. com decimento fraco, existem trans. de fase.

$$H(n) = \sum_{xy} J_{xy} \eta(x) \eta(y), \text{ para ver } J_{xy} = \frac{1}{|x-y|}, \text{ sempre neg.}$$

sempre conc., sempre cont. de fase  
sempre cont. de fase

fraco se sempre negativo, depende da  
distância, uniforme todo o mundo

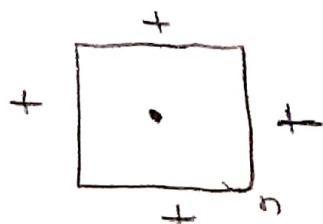
$$\beta = \frac{1}{kT} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{(mais não tem}\quad \text{(e o prefator é constante)}$$

## D=2. Modelo Ising Bidimensional Ferromagnético ( $\beta \neq 0$ )

Teorema: "existe transição de fase"

Sensibilidade a condições de contorno

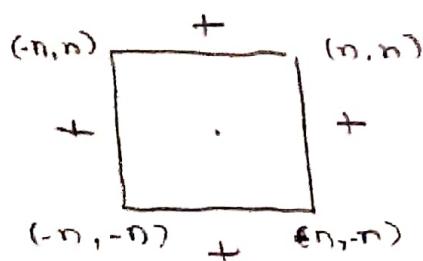
Dem.



$$\exists \beta_0, t, q_1$$

$\beta > \beta_0$  sensibilidade

Considero uma caixa  $\{-\tilde{n}, \dots, +\tilde{n}\}^2$



conecto com  $S_{t+1}$

$\eta_t$

$\eta_t^n$  com  $\delta$ 's conj.

$$\eta_t \leq \xi_t^n \quad \forall n$$

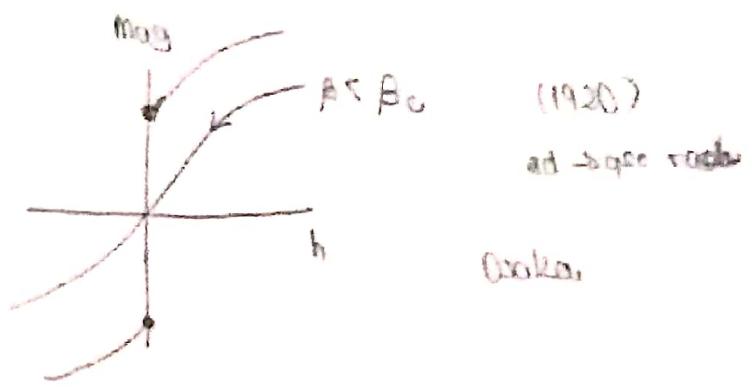
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\nabla \quad \mu_n$$

Quero mostrar que  $\exists \beta_0, t, q$  se  $\beta > \beta_0$

$$\langle \mu_n \eta(0) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

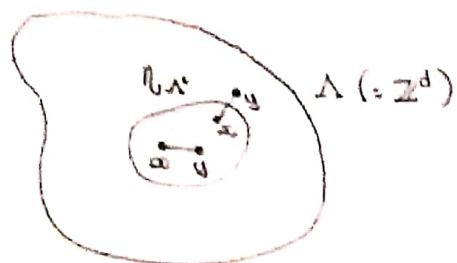
$\#_{\mu_n}(\eta(0) = -1) \geq 0$  uniformemente em  $n$  para  $\beta > \beta_0$   
 (Argumento de Pierls)



Ising Estocástico

Aula 13

D-1, Ergódico

(D-2), Não ergódico para  $\beta \neq \beta_c$   
(D-3)

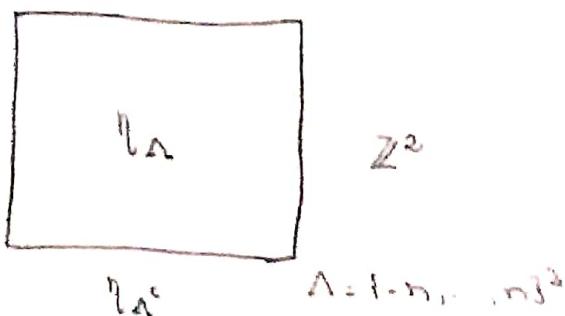
$$H_A(\eta) = \sum_{\substack{\text{couples} \\ x,y \\ x \in A}} J \eta(x) \eta(y) \quad J > 0$$

$$H_A(\eta_A / \eta_{A^c})$$

Taxas  $\mu(\cdot | \eta)$  tal que  $\mu(\cdot | \eta)$  satisfazendo

$$\mu(\eta_A / \eta_{A^c}) = \frac{e^{-\beta H_A(\eta)}}{\text{Norm.}}$$

(é reversível)

 $\mu^+ e \mu^-$  duas medidas diferentes para  $\beta \neq \beta_c$  e GibbsIdéia da prova: A maneira de ver a medida de Gibbs em  $\mathbb{Z}^d$  para temp. finita.

$$+\boxed{\eta_{\Lambda}^0} + \eta_{\Lambda^c} = + \frac{1}{n}$$

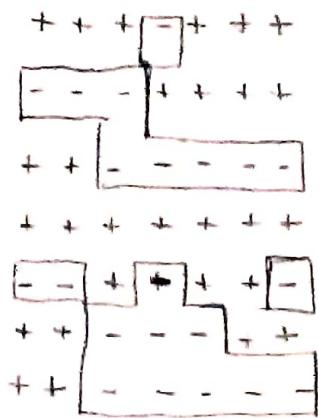
$\Delta n = l \cdot n = n^2$

Seja  $v_n = \mu (\eta_{\Lambda_n} + \eta_{\Lambda_n^c}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$  medida de Gibbs com condição de fronteira +.

Existência de mais

$$\leq v_n \mathbb{1}_{\{\eta(x)=+1\}} = P^{v_n}(\eta(x)=+1) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{uniforme em } n \text{ para } \beta > \beta_0)$$

Mapamento:  $\eta \leftrightarrow B(\eta)$  - conjunto de linhas (na rede dual  $\mathbb{Z}^2$ ) entre pares  $\eta(x) \neq \eta(y)$ ,  $(x, y)$



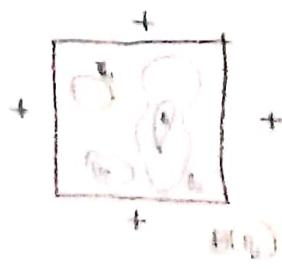
$B(\eta)$  = "conjunto de contornos"

$\delta_1, \delta_2$  - contornos

$$V_n = e^{-\beta |B(\eta)|} \quad \text{se } B(\eta) = \{\delta_i, i=1, \dots\},$$

$$v_n(\eta) = \frac{e^{-\beta |B(\eta)|}}{Z}$$

$$P^{v_n}(\eta(0)=+1)$$



$$P(\eta(x)=-1) \leq \xi \leq 1$$

P(E existe pelo menos um 0 ao redor da origem)

$B(\eta)$  é tal que

$$\nabla \sum_i P(\eta_i, \tau_i \in B(\eta_i))$$

$\eta_i$  é o menor contorno ao redor da origem

Fixo  $\beta$ ,

$$P(\eta \in B(\eta)) = \frac{\sum_{\eta \in B(\eta)} e^{-2\beta|B(\eta)|}}{\sum_{\eta} e^{-2\beta|B(\eta)|}}$$

~~Max~~

$$\{ \eta : \tau \in B(\eta) \} \rightarrow \tilde{\eta} = \begin{cases} \eta & \text{fora de } \tau \\ -\eta & \text{dentro de } \tau \text{ (inverso)} \end{cases}$$

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{fora de } \tau \\ -\eta(x) & \text{dentro de } \tau \end{cases}$$

$B(\tilde{\eta})$  não tem  $\tau$ , resto é igual

$$B(\tilde{\eta}) = B(\eta) \setminus \{\tau\}$$

$\Leftarrow$

$$P(\eta : \tau \in B(\eta)) = e^{-2\beta|\eta|} \frac{\sum_{\eta \in B(\eta)} e^{-2\beta|B(\eta)|}}{Z} \leq e^{-2\beta|\tau|}$$

$$P(\eta(0) = -1) \leq \sum_{\tau} e^{-2\beta|\tau|} = \sum_{K \geq 1} \sum_{\delta_1, \dots, \delta_K = \pm 1} e^{-2\beta K} = \sum_{K \geq 1} N(\tau, K) e^{-2\beta K}$$

$N(\tau, K)$  = # de contornos com  
tamanhos  $K$ .

$N(T, K) = \#$  de conformes con tamano  $K \leq K_3^T$

$$P(\gamma(0) = -1) \leq \sum_{K \geq 4} K_3^{-K} e^{-2\beta K} = \sum_{K \geq 4} K_3^{-K} e^{K(\log 3 - 2\beta)} \quad \text{p suf grande}$$

$$p = 3 e^{-2\beta} \approx e^{-2\beta}$$

Logo, T transação



## Modelo de Exclusão

$\{\eta_t\}_{t \geq 0}$  em  $S = \{0,1\}^\Lambda$ , tipicamente  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ , árvore (enumerável)

Suponha  $P$  a prob. de trans. em  $\Lambda$

$$(P)_{x,y} = P(x,y) \\ \downarrow \\ \text{irreductivel}$$



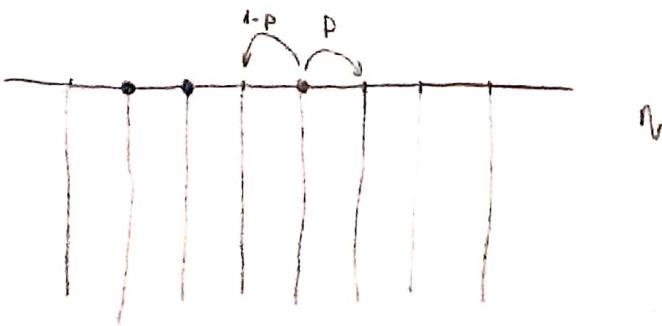
- 1)  $x \in \Lambda$ ,  $\overset{\text{para } p(x)=1}{\text{aguarda um tempo exponencial com taxa }} L$
- 2) Escolho para onde trocar conforme  $P$
- 3) A partícula em  $x$  salta para  $y$  apenas se este sitio estiver desocupado, "Exclusão de volume"

## • Possíveis restrições

$$\rightarrow P(x,y) = P(y,x) \quad (\text{simetria})$$

$$P(x,y) = P(0,y-x) \quad (\text{invariancia por translação})$$

Exemplo



$N$

$p=1/2$  simetria

$p \rightarrow \text{ASEP}$

$\downarrow$

ciclos -> engarrafamento

Gerador

$$\Sigma = \{0, 1\}^{\Delta}$$

$$\eta_t = S(t), \Omega$$

$$D = \{f \in C(S), \|f\| < \infty\}$$

Taxas.

$$q(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & \text{se } x \neq y \\ -\sum_{y \neq x} p(x, y) = -1 & \end{cases}$$

$$\Omega f(\eta) = \sum_{\substack{x, y \\ \eta(x)=x \\ \eta(y)=y}} p(x, y) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)]$$

onde  $\eta^{xy}(z) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } z=x \\ \eta(x) & \text{se } z=y \\ \eta(z) & \text{se } z \neq x, y \end{cases}$

$$\Omega f(\eta) = \sum_{\substack{x, y \\ \in \Delta}} [1 - \eta(y)] \eta(x) p(x, y) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)],$$

$$\text{Se } M = \sup_x \sum_{y \neq x} [p(x, y) + p(y, x)] < \infty$$

↓

Processo bem definido



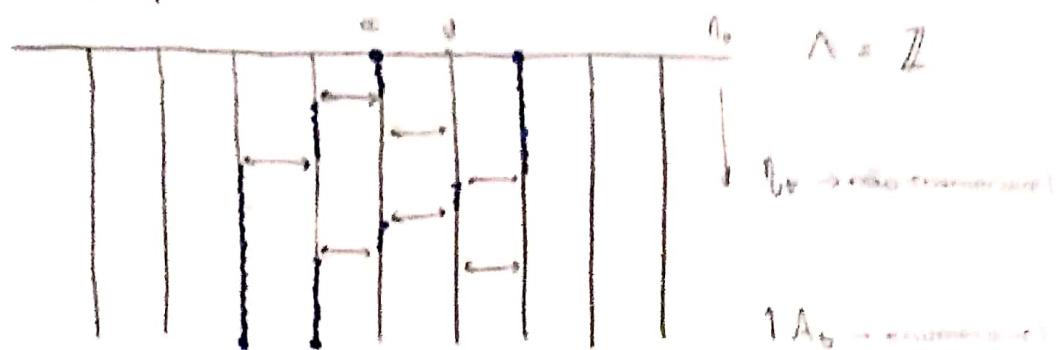
Hipóteses sobre  $\eta(x,y)$

• Sexo simétrico

$$P(x,y) = P(y,x)$$

Processo auto-dual

Construções gráficas no contínuo



Para cada  $(x,y) \in$  Processo de Poisson,

$\Leftrightarrow$  "Ato em  $x$  com taxa  $\lambda$ "

$$P^{\eta_t}(\eta_t \geq 1 \text{ em } A \subset \Lambda \text{ finito}) = P^{\eta_t}(\eta_t \geq 1 \text{ em } A_t)$$

$$\eta_t(x) = 1, \forall x \in A_t$$

Exercício: Verifique que exclusão condicional é auto-dual com respeito

$$H(\eta_t, A) = \{ \eta_t \geq 1 \text{ em } A \}$$

Exercício Mostre que

$v_P = \text{medida probabilística dominante } p \in \text{transiente}$

$$\text{Algumas } \begin{cases} \delta_1 + v_P = 0 & \forall p \in [0,1] \text{ se inf-med invariante} \\ \end{cases}$$

• med. permutáveis



med. com prob.

Teorema. Se  $P$  é simétrico

+ recorrência { } } }

então as medidas invariantes permutáveis são invariantes



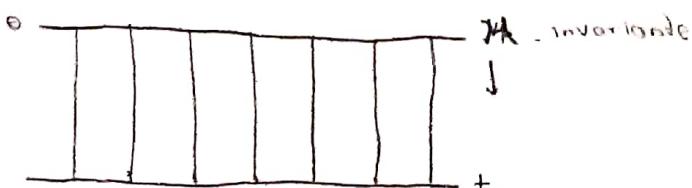
Obs. Por recorrência queremos dizer:

Se  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  e  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  são realizações independentes da mesma aleatoriedade com matriz de transição  $P$ ,

$$P(X_t = Y_t, \text{ para algum } t \geq 0) = 1$$

Ex. permutável  $\nu_p = p\mu_A + (1-p)\mu_B$ , onde  $\mu_A, \mu_B$  são produtóis

Dem.



Seja  $\mu \in L = \text{med. invariantes}$

Quero mostrar que  $\mu$  é permutável

Se  $A \subset \Lambda$  finito, defino

$$\begin{aligned} h(A) &= \text{"Prob. de ser } 1 \text{ em } A, \text{ com resp. a } \mu"} \\ &= \mu(\{\eta : \eta \in 1 \text{ em } A\}) \end{aligned}$$

Basta mostrar que  $h(A)$  só depende de  $A$  através de  $|A|$

Como  $\mu \in L$

$$h(A) = \mu(\{\eta : n \in 1 \text{ em } A\}) = \mu(S(t)) \ln(n \in 1 \text{ em } A)$$

$$h(A) = \mu(\eta : \eta \in A \text{ em } \Omega)$$

$$= \mu S(t)(\eta : \eta \in A \text{ em } \Omega)$$

$$= \int P^A(\eta_t \in A \text{ em } \Omega) \mu(d\eta)$$

dualidade

$$= \int P^B(\eta \in A_t \text{ em } \Omega_t) \mu(d\eta)$$

$$= \sum_{B \in \Lambda} P^B(A_t = B) h(B) \Rightarrow Eh(A_t)$$

Obs.  $\alpha$  é dita harmônica com respeito à  $P$  se

$$\alpha(x) = \sum_y p(x,y) \alpha(y)$$



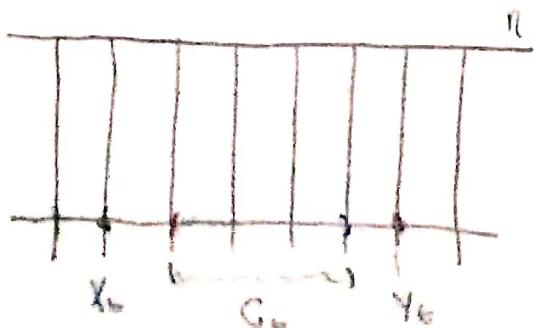
ou seja: média de  $\alpha$  nos vizinhos

$\therefore h$  é harmônica

Sejam  $A$  e  $B$  tal que  $|A| = |B| = n$  com  $|A \cap B| = n-1$

$$|h(A) - h(B)| = |Eh(A_t) - Eh(B_t)| \leq P(X_t \neq Y_t) \rightarrow 0 \text{ qd } t \rightarrow \infty$$

Idea: Supor  $A_t$  e  $B_t$  tal que  $A_t = B_t$  eventualmente



Se estiver, abrange  $x_t$  ou  $y_t$

"Suponha  $A_t \neq B_t$  logo  $A_t \neq B_t$  eventualmente"  
 $(C_t, X_t, Y_t)$

sempre existem vizinhos

$b_0$ ,  $b(a) \in b(b)$

$\mu \in L \text{ as } \mu \text{ is permutable}$

Antônio

• Glauber - Ising endocártico

↓ Escolheu taxas pra que tudo conver. p/ o equilíbrio  
↓ que era reversível.

• Supor umas quaisquer inv. tal que a medidas de Gibbs sejam reversíveis.

$$\mathbb{E} = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$$

$\sigma \in \mathbb{E}$  uma conf. de spins.

$$\sigma_R = \prod_{i \in R} \sigma_i, \forall R \subset \mathbb{Z} \text{ finito.}$$

Definimos uma interação  $\{J_R\}_{R \subset \mathbb{Z}}^{subconjunto \text{ finito}}$  de números reais. Diz-se, que  $\{J_R\}_{R \subset \mathbb{Z}}$  é invariante por translação se

$$J_R = J_{R+K}, \forall K \in \mathbb{Z}$$

$$R+K = \{j+K : j \in R\}.$$

Exemplo:  $\{J_R\}_{R \subset \mathbb{Z}}$  dada por

$$J_R(x) = \begin{cases} J \delta_{x,R}, & R = \{k, k+1\}, k \in \mathbb{Z} \\ h \delta_x, & R = \{k\} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

$J \in \mathbb{R}, h > 0.$

Dada a interação, a única medida de Gibbs (caso unidimensional)  $\mu$  em  $E$ , com dist. condicional finito dimensional é dada por

$$\mu(\omega_i = \omega_i, i \in \Lambda \mid \eta_j = \eta_j, j \in \Lambda^c) =$$

$$= \frac{e^{H_{\Lambda}^{J_R}(\omega | \eta)}}{Z_{\Lambda}(\eta)}$$

$Z_{\Lambda}(\eta) \rightarrow$  função de partição

$$\Lambda \subset \mathbb{Z}$$

$$H_{\Lambda}^{J_R}(\omega | \eta) = \exp \left\{ \sum_{R \subset \Lambda} J_R \omega_R + \sum_{\substack{R \cap \Lambda \neq \emptyset \\ R \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} J_R \omega_R \eta_{R \cap \Lambda^c} \right\}$$

As leis de "flip" do modelo é uma família  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  com

$c_k: E \rightarrow (0, \infty)$  satisfazendo

$$\begin{array}{l} \text{implíc. inv. por translações} \\ \uparrow \\ (*) \end{array} \quad c_k(\sigma) \underset{\substack{\sum_{R \ni k} J_R \sigma_R \\ = c_k(\sigma^k) e^{-\sum_{R \ni k} J_R \sigma_R}}}{=} c_k(\sigma^k)$$

onde  $\sigma^k$  é a configuração que concorda com  $\sigma$  exceto no sítio  $k$ , i.e., em  $k$   $(\sigma^k)_k = -\sigma_k$ .

Exemplo:

$$c_k: E \rightarrow (0, \infty)$$

$$\sigma \mapsto \frac{1}{2} (1 - \sigma_k \tanh \left( \sum_{R \ni k} J_R \sigma_R \right))$$

$$J_{\{k, k+1\}} \sigma_{k+1} + J_{\{k-1, k\}} \sigma_{k-1}$$

e considere  $\{J_R\}_{R \subset \mathbb{Z}}$  como no exemplo supondo  $h = 0 \in \mathbb{R}$ .

Neste caso,

$$c_k(\sigma) = \frac{1}{2} (1 - \sigma_k \tanh (\beta (\sigma_{k-1} + \sigma_{k+1}))) =$$

Na avla

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\tanh 2J}{2} \right] \sigma_K (\sigma_{K-1} + \sigma_{K+1})$$

$$c(K, \sigma) = c_K(\sigma)$$

↓

se é mais elegante de escrever a forma basal

Diz-se que  $c_K$ 's são invariantes por translação se

$$c_K(\sigma) = c_j(\tau) \text{ se } \sigma_i = \tau_{j-K+i} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \text{ e}$$

$$c_K(\sigma) = c_K(\omega) \text{ se } \sigma_i = \omega_i \quad \forall |K-i| \leq L < \infty$$

. Alcance finito  $\Rightarrow$  unicidade de  $\mu$ .

. reversibilidade  $\Rightarrow$  autoadjunto

Antônio

$$\mathbb{E} = \{-j, +j\}^{\mathbb{Z}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{J_R\}_{R \in \mathbb{Z}} \\ \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{array} \right\} \text{ interações}$$

taxas

com "range" finito e invariantes por translação

$$C(k, 0)$$

$$\Omega f(\sigma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\sigma) [f(\sigma^k) - f(\sigma)], \sigma \in \mathbb{E}, f \in \mathcal{F}$$

core para um gerador

$\mathcal{F} = \{f \text{ funções cilíndricas}\}, \mu \text{ medida estacionária}$

→ denso nas contínuas

$$\{S_t\}_{t \geq 0}$$

Teo:  $\{S_t\}$  pode ser estendido por continuidade para semigrupo em  $L^2(\mu)$ .  
Seu gerador  $\bar{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$  em  $L^2(\mu)$ , E  $\bar{\Omega}$  é auto-adjunto em  $L^2(\mu)$ .

$$L^2(\mu) = \{f : \int_{\mathbb{E}} |f|^2 d\mu < \infty\}.$$

$$\int f \circ g d\mu = \int g \circ f d\mu \quad \forall f, g \text{ (reversível} \Rightarrow \text{adjunto)}$$

Resumo:

- Pega taxas para tornar o modelo reversível.

Teo: São equivalentes

i.  $\|\bar{S}_t f - \langle f \rangle\|_2 \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^2, \langle f \rangle = \int_{\mathbb{E}} f d\mu$

ii. 0 é autovalor de  $\bar{\Omega}$

Etapas → convergência exponencial

iii.  $\mu \in \mathcal{G}_B = \{\text{medidas de Gibbs extremais}\}$

$$\|\bar{S}_t f - \langle f \rangle\|_2 \leq e^{-gap t} \cdot \|f - \langle f \rangle\|_2$$

$\overbrace{\phantom{e^{-gap t} \cdot \|f - \langle f \rangle\|_2}}$   
diferença entre  $\theta$  e o resto do espectro  
de  $\bar{\Omega}$

Teo: O Ising estocástico unidimensional com interações reais e taxas invertidas por translação e com "range" finito, a convergência uniforme é exponencialmente rápida, no sentido que

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log (\|\bar{S}_t f - \langle f \rangle\|_u) = \text{gap}_2.$$

Modelo do Volante  $\xrightarrow{\text{linear}} \xrightarrow{\text{relutante}}$

1. Teoremas Ergódicos
2. Propriedades das Medidas Invariantes
3. Aglomeração ("Clustering") em uma dimensão  $\times$
4. O Sistema finito  $\times$

Definição: O modelo do volante é um sistema de spins com taxas  $c(x, \eta)$  dadas por

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \sum_y p(x, y) \eta(y) & \text{se } \eta(x) = 0 \\ \sum_y p(x, y) [1 - \eta(y)] & \text{se } \eta(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$c(x, \eta) = \sum_y p(x, y) |\eta(x) - \eta(y)|.$$

em  $p(x, y) \geq 0$ ,  $x, y \in S$  e  $\sum_y p(x, y) = 1$ ,  $\forall x \in S$ .

$p(x, y)$  é t.q. a CM ou essas probas de trans. é irreductivel.

Interpretações:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Espera  $\text{Exp}(1)$

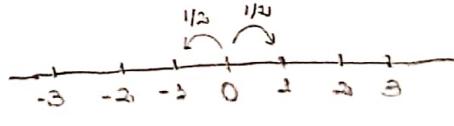
• Troca se divergir opinião o postor

③ Aglomeração em uma dimensão

$$S = \mathbb{Z}^1$$

$$p(x, x+1) = \frac{1}{2}, \quad p(x, x-1) = \frac{1}{2}$$

... n.o s.t. u + 10



Pelo Corolário 1.13,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \alpha \delta_1 + (1-\alpha) \delta_0$$

em que  $\alpha = \mu \{ \eta : \eta(\infty) = 1 \}$ .

Corolário 1.13. Suponha  $S = \mathbb{Z}^d$  e  $p(x, y) = p(0, y-x)$ .

a) Se  $X(t) - Y(t)$  for recorrente e  $\mu \neq \frac{1}{2}$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \alpha \delta_1 + (1-\alpha) \delta_0$$

$X(t)$  e  $Y(t)$  são cópias independentes da OM. cont. com probs. irreg.

$$p_t(x, y) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} p^{(n)}(x, y)$$

Aglomeração (outro artigo do Liggett)

$$P[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] \rightarrow 0 \text{ qdo } t \rightarrow \infty$$

Tamanho médio dos clusters:

$$C(n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\# \text{ cluster de } \eta \text{ em } [-n, n]}$$

$$\sum_{i=1}^K c_i = \frac{2n+1}{K}$$

Prop. 8.1.

$$C(\eta_t) = \frac{1}{P[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)]}$$

Nov.,  $S_0$  e  $S_1$  são dist. cond. triviais e é possível prod. outras.

## 1.2 Acoplamento

Def. conj. de 2 ev + proc. estocásticos em um comum esp. de prob.

É surpreendentemente uma poderosa ferramenta

• Acopl. para cadelas de Markov

$\{X_t, Y_t\}_{t \geq 0}$  BDC nos inteiros,  $\rightarrow$  só move pros próximos

Seja

$(X_t, Y_t)$  duas cópias da cadera que são acopladas no seg. sentido:

a.  $X_t$  e  $Y_t$  movem-se independentemente até o primeiro tempo  $T$  que  $X_T = Y_T$ , e

b.  $X_t$  e  $Y_t$  movem-se identicamente depois de  $T$ .

Este acoplamento tem a propriedade de que  $X_0 \leq Y_0 \Rightarrow X_t \leq Y_t$  para todo  $t \geq 0$ . Segue que se  $f$  é limitada crescente nos inteiros, então

$$\infty \rightarrow E^\infty f(X_t)$$

e outra vez func. crescente de  $\infty$ .

• Uma função  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  é dito harmônica para uma cadera markoviana se  $E^\infty f(X_t) = f(\infty)$  para todo  $\infty \in S$  e todo  $t \geq 0$ .

Uma versão alternativa  $\rightarrow$  conflito espacial. Duas regras controlam as áreas  $\{\alpha, \eta(\alpha)=0\}$  e  $\{\alpha+\eta(\alpha)=1\}$ . Uma mudança de  $\theta$  à  $t$  em  $\alpha$ , representa a inv. da sc pela seg. regras.

As distribs. triviais para o modelo do voltante são

$$\begin{array}{ll} \text{Se } & \alpha \in S_L \\ \downarrow & \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \eta \equiv 0 \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \eta \equiv 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{array} \right. \end{array}$$

Veremos que  $\exists$  relação fechada entre  $\exists$  não-trivial dist. estat. para o modelo do voltante e prop. de recorrência e funções harmônicas da cadeia de Markov com prob.  $p(x,y)$ .

### Ex. 3. O Processo de Exclusão

S enumerável ;  $p(x,y)$  transition prob. of CM em S

Agora temos assumimos que

$$\sup_y \sum_x p(x,y) < \infty$$

escolhido tal que a soma seja finita  
a maior prob. de saltar a y vinda de todos os lugares finita,

de modo a garantir que  $\pi_t$  é bem-def como um Proc. de Feller. As taxas de transição são dadas por

$$\eta \rightarrow \eta_{x,y} \text{ com taxa } p(x,y) \text{ se } \eta(x)=1, \eta(y)=0$$

Interpretação:

$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{livre} \\ 1, & \text{" ocupado} \end{cases}$  . Na evolução, a part. com a espera um tempo exponencial e, então, escolhe y com  $p(x,y)$

Se y é vazio, vai pra y ; se y está ocupado, muda aonde.

O gerador forma a sg. forma para f cilindricas

$$\Delta f(\eta) = \sum_{\eta(x)=1, \eta(y)=0} p(x,y) [f(\eta_{x,y}) - f(\eta)]$$

numeratio

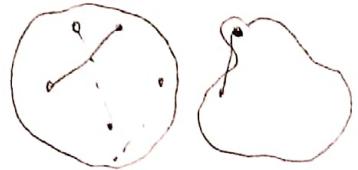
## I. Introdução

- Primeiro exposição da área de part. interagentes
- Processo de Feller contínuo  $\eta_t$  no espaço de conf. compacto  $\{0,1\}^S$ , semi-medi.
- Principais problemas
  - descrição da classe  $\mathcal{I}$  de dist. estacionárias do processo
  - teoremas limites para a dist. de  $\eta_t$  qdo  $t \rightarrow \infty$ .

Em geral, tudo que se pode dizer é que desde que  $\{0,1\}^S$  é compacto e o processo é de Feller,  $\mathcal{I}$  é sempre não vazio. O conjunto  $\mathcal{I}$  é convexo e vamos denotar seus pontos extremos por  $\mathcal{I}_e$ .

"Um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial real ou complexo é convexo qd todo seg. de reta ligando dois pontos de  $X$  está condido em  $X$ . Ou seja

$$\forall x, y \in X, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in X$$



Se  $X$  não é convexo, diz-se côncavo. O menor convexo que contém um subconjunto  $X$  designa-se por invólucro convexo de  $X$ .

- O processo  $\eta_t$  é usualmente descrito pelas taxas com qd trans. ocorrem.
- A relação precisa entre o processo e suas taxas é fornecida pelo gerador infinitesimal  $\mathcal{L}$  de  $\eta_t$

É tipicamente (ilimitado) operador definido em um apropriado subconjunto denso de  $C(\{0,1\}^S)$ ;  $\mathcal{L}$  é determinado por seus valores em funções cilíndricas, i.e., funções que dep. em finitely many coordenadas.

## 1º Operador:

Seja  $U, V$  dois espaços vetoriais. O operador mapeando  $U \rightarrow V$  é chamado operador, se  $V$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ .  $\therefore (A \in \mathcal{B} \text{ operador})$

$$\alpha(A+B)x = A\alpha x + Bx$$

$$\alpha(\lambda A)x = \lambda A\alpha x$$

para funções cilíndricas

$$\Omega f(\eta) = \sum_{\xi} c(\eta, \xi) [f(\xi) - f(\eta)]$$

Onde  $c(\eta, \xi)$  é a taxa  $\eta \rightarrow \xi$ . A dist. estac. é def. por  $\Omega$  de acordo com o que segue.

**Teorema 1:** Uma medida de prob.  $\mu$  em  $\{0,1\}^S$  é estacionária para o processo  $\eta_t$  se e só se

$$\int \Omega f d\mu = 0$$

para todas as funções cilíndricas em  $\{0,1\}^S$ .

Exemplos:

1.  $\eta \in \{0,1\}^S$  e  $x, y \in S$ ,  $\eta_x, \eta_{x,y} \in \{0,1\}^S$  são def. por

$$\eta_{ac}(w) = \begin{cases} w & \text{se } w \neq \infty \\ 1-w & \text{se } w=\infty \end{cases}$$

a representa a eletricidade da grade

$$\eta_{x,y}(w) = \begin{cases} w & \text{se } w \neq x, y \\ \eta(x) & \text{se } w=x \\ \eta(y) & \text{se } w=y \end{cases}$$

só muda em  $w$   $\eta_{x,y} = \eta_x$

trocando val. de  $x$  e  $y$

$\eta_{ac}$  é obtida de  $\eta$  mudando seu valor em  $\infty$ ,  $\eta_{x,y}$  permuta os valores de  $x$  e  $y$ .

## 1. Proc. Contato

S um grafo com vértices de grau limitado,  $\lambda > 0$  parâmetro.

$x \sim y \Rightarrow \infty$  e  $y$  conectados por uma ponte. Então, para cada  $x \in S$ ,

$$\eta_t \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{at rate } \begin{cases} 1 & \text{se } \eta_t(x) = 1, \\ \lambda |\{y \sim x : \eta_t(y) = 1\}| & \text{se } \eta_t(x) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Aqui,  $|\Lambda|$  denota a cardinalidade do círculo  $\Lambda$ . A interpretação é que se o sítio  $\eta_t(x)$  está infectado, enquanto os com  $\eta_t(x) = 0$  são saudáveis. Infectados recuperam-se em um tempo exponencial da taxa 1, enquanto saudáveis se infectam à uma taxa prop. ao número de vizinhos infectados. A única dist. est. trivial é  $\delta_0 = \frac{1}{|\Lambda|}, \forall x$  e a pseudociclosa degenerada em  $\eta \equiv 0$ .

1. Se  $S$  é finito, então  $\mathcal{I} = \{\delta_0\}$ , e  $\eta_t$  é eventualmente  $\equiv 0$  para qqer conf. inicial. (Finito, irredutível  $\Rightarrow$  unica medida invariante).

2. Se  $S = \mathbb{Z}^d$ , o grau dos inteiros d-dimensional, há um valor crítico  $\lambda(d) \in \left(\frac{1}{2d-1}, \frac{2}{d}\right)$  de modo que

- i.  $\lambda \leq \lambda(d) \Rightarrow \mathcal{I} = \{\delta_0\}$  e  $\eta_t \rightarrow \delta_0$  frac. para uma conf. inicial gen.
- ii.  $\lambda > \lambda(d) \Rightarrow \mathcal{I} = \{\delta_0, \nu\}$  para algum  $\nu \neq \delta_0$ , e  $\eta_t \rightarrow \nu$  frac. para qqer conf. inicial com infinitamente muitos pontos infectados.

Nota. Se  $d=1$ ,  $\lambda = \lambda(1) = \eta_0 \equiv 1$ , então  $\eta_t \rightarrow \delta_0$  frac., jaque com prob. pl todo  $x$ ,  $\eta_t(x) = 1$  para arbitrariamente grande - ver Teorema 3.10 do Cap. 6 do Liggett (BS) para a ultima declaração. (Valor  $\eta \equiv 0$  no valor critico)

Se  $S = T_d$  ( $d \geq 2$ ), a árvore em que cada vértice tem  $d+1$  vizinhos, então há dois valores críticos satisfazendo

$$\lambda_*(d) \leq \lambda_2(d) \quad \frac{1}{d+1} \leq \lambda_1(d) \leq \frac{1}{d-1} \quad \frac{1}{2\sqrt{d}} \leq \lambda_2(d) \leq \frac{1}{\sqrt{d}-1}$$

de modo que

- i.  $\lambda \leq \lambda_*(d) \Rightarrow I_c = \{\delta_0\}$  e  $\eta_t \rightarrow \delta_0$  fracamente para qqer conf. inicial
- ii.  $\lambda > \lambda_2(d)$ ,  $\Rightarrow I_c = \{\delta_0, v\}$  para algum  $v \neq \delta_0$ , e  $\eta_t \rightarrow v$  frac. pl qqer conf. inicial com infinitamente muitos sítios infectados.
- iii.  $\lambda_1(d) \leq \lambda \leq \lambda_2(d) \Rightarrow I_c$  é infinito.

No caso iii, a conf. inicial tem infinitamente muitos infectados, então

$$P^0(\eta_t \neq 0 \ \forall t \geq 0) > 0, \text{ mas } \forall t \in \mathbb{Z}, \\ P^0(\exists T \mid \eta_t(\infty) = 0 \ \forall t \geq T) = 1,$$

I.e., o ciclo de inf. não fica vazio (com prob. positiva), mas "vagaria no infinito" de modo que todo vértice é eventualmente saudável.

Provas (Parte I de Liggett)

Exemplo 2. linear voter model:

$S$ : conjunto enumerável ;  $p(x, y)$  prob. de transição de CM em  $S$ ,  
 $p(x, y) \geq 0 \quad \sum_y p(x, y) = 1$

Temos

$$\eta \rightarrow \eta(x \text{ com toxo.}) \sum_{y: \eta(y) \neq \eta(x)} p(x, y)$$

Interpretarão, vértices = indivíduos com opiniões 0 ou 1. Em tempo exponencial de toxo, o indivíduo  $x$  escolhe  $y$  com prob.  $p(x, y)$ , e adota sua opinião

SPI

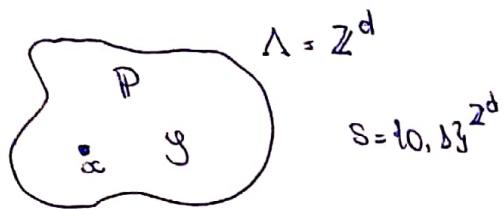
Aula 15.

22/05

10, 12 de junho - exercícios

26 - seminário

Exclusão



$$\Omega f(\eta) = \sum_{\{\eta(x)=y\}} p(x,y) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)] \quad (P)_{xy} = p(x,y)$$

P irredutível

Quando tenho medidas produtivas invariantes?

Seja  $\alpha : \Lambda \rightarrow (0,1)$

denoto por  $\gamma_\alpha$  a medida produtiva com este perfil,

$$\gamma_\alpha(\eta_i : \eta(x) = i) = \alpha(x)$$

Teorema. Seja  $\alpha : \Lambda \rightarrow (0,1)$  e

$$\pi(x) = \frac{\alpha(x)}{1 - \alpha(x)} \quad , \quad \left( \alpha(x) = \frac{\pi(x)}{1 + \pi(x)} \right)$$

(odd ratio)

Se

$$\sum_{\text{Sist}(y) = \text{Sist}(x)} [p(x,y) - p(y,x)] = 0$$

e

$$\pi(x) p(x,y) = \pi(y) p(y,x) \text{ se } \omega(x) \neq \omega(y)$$

Então  $\forall \epsilon \in \mathcal{L}$  (junto das med. invariantes)

Dem:

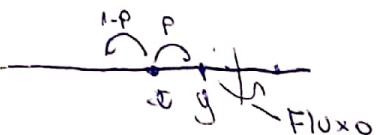
$$\int_{\Omega} f d\nu_x = 0 \quad \forall f \in D, \quad f \text{ cilindrica}$$

$\Downarrow$   
f gger

□

Exemplo

$\forall x$  com  $\omega \neq \text{cte}$



$$\begin{aligned} \text{corrente: } & J_p(1-p)p \\ \text{do fluxo: } & -J_p(1-p)(1-p) \\ & = (2p-1)p(1-p) \end{aligned}$$

$J_p$  = corrente ou fluxo através do elo

$$J_p = (2p-1)p(1-p)$$

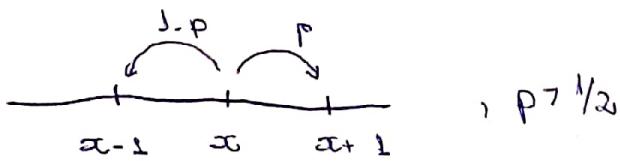
se  $x$  est. linear

$$\begin{aligned} V_p &= J_p \cdot p + (-J_p)(1-p) \\ &= 2p - 1 \end{aligned}$$

se restrição

$$\begin{aligned} V &= J_p(p) + (-J_p)(1-p) \\ &= (2p-1)(1-p). \end{aligned}$$

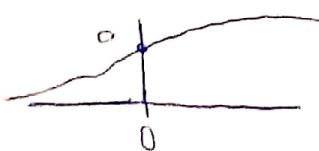
ASEP



Block measure: infestar de ocupador à direita para tornar reversível

$$\pi(x) = C \left(\frac{p}{q}\right)^x, \quad q = 1-p$$

$$\omega(x) = \frac{C p^x}{q^x + C p^x}$$

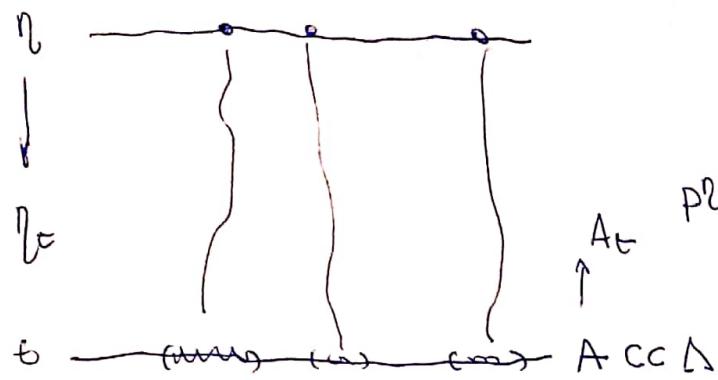


$p=1/2 \Rightarrow$

$V_A \Leftarrow$   
reversível

Exclusão simétrico:  $p(x,y) = p(y,x)$ ,  $\forall x,y$ .

Propriedade: Autodualidade



$$P^{\eta}(n_t = 1 \text{ em } A) = P^A(n = 1 \text{ em } A_t)$$

Ganho:

$A_t$  é cadeira de Markov.

Já verificamos:

$$\mu \in \mathcal{L} \Rightarrow \mu \text{ é permutável}$$

$$h(A) = \mu(\{x : n(x) = s \text{ em } A\})$$

Obs:



$$f \in C(S) \quad \mu \in P(S)$$

↓

do Bochner

↓ definir prod. interno

definir (aqui posso usar análisepectral...)

$$\langle \mu, f \rangle = E^\mu f = \int f d\mu$$

Invariante se

$$\langle \mu s(t), f \rangle = \langle \mu, s(t) f \rangle$$

$$s(t) f(n) = E^n f(n_t).$$

ii

## Relação entre f. harmônicas e med. invariantes.

Obs: Papel de funções harmônicas

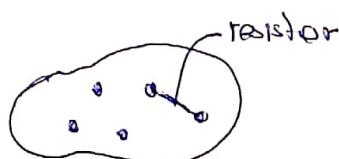
Def:  $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  é dita harmônica com respeito à uma cotação de Markov  $P$

Se

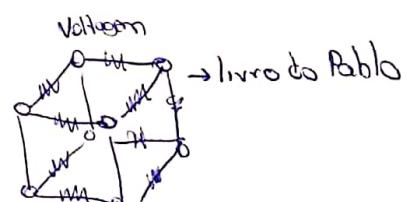
$$\alpha(x) = \sum_y p(x,y) \alpha(y)$$

$\alpha = \text{cte}$  é harmônica

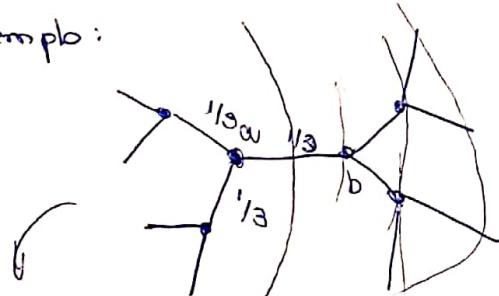
Fabio Ferraz Snell, (Teoria de Potencial)



voltagens em cada ponto seria  
 para a med. invariante  
 nela.



Answers



Grafo homogêneo (todos os grafos são equivalentes)

Fixo um nó, que seria uma raiz.

, pensar como um pass. ateatório simples em T

Seja  $X_0$  um possivel ókatorio em  $T_{\text{simétrico}}$

Seja  $C$ : "vértice do lado esquerdo do origem"

$$\alpha(x) = P(X_n \in C, i.o. | X_0 = x)$$

$\alpha$  é harmônicas

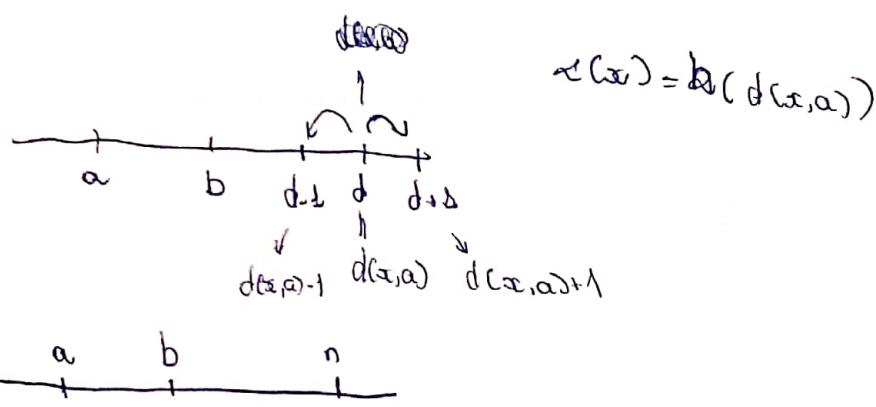
$d(x, \alpha)$  = distância de  $x$  à  $\alpha$

árvore + $\mathbb{Z}^2$
asse,
expon.
front.
asse,
linear
front.

se  $\alpha \notin C$ ,

$\alpha(x)$  só depende de  $d(x, \alpha) = d$

(acoplamento, simetria)



$$h(n) = \frac{1}{3} h(n-1) + \frac{2}{3} h(n+1), \quad n \neq 1.$$

e se  $\alpha \in C$

$$\alpha(x) = g(d(x, \alpha)) = \underbrace{h(-d(x, \alpha))}_{h \leq 0}$$

$$h(n) = \frac{2}{3} g(n-1) + \frac{1}{3} g(n+1), \quad n \leq 0$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} 2^{-d(x, \alpha)} & , \quad \text{se } \alpha \notin C \\ 1 - \frac{1}{3} 2^{-d(x, \alpha)} & , \quad \text{se } \alpha \in C \end{cases}$$

Liggett - Continuous Markov Process

$\alpha$  é harmônica. Isso dá uma Block's measure para a árvore.

## Aula 16

29/05

## Exclusão

$$p(x,y) \quad \Lambda = \mathbb{Z}^d$$

- caso geral:  $P$
- caso inv. transl.  $p(x,y) = p(0, y-x)$
- caso simétrico  $p(x,y) = p(y,x)$

Quando  $\nu_x$  produto com marginal

$\Leftrightarrow \Lambda \rightarrow [0,1]$  é invariante?

Teo. Se

1. Se  $P$  for duplamente estocástica,

$$\sum_y p(x,y) = 1$$

em  $\nu_x \in \mathbb{Z}$  com  $\omega = \text{cte.}$

2. Se existe  $\pi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$

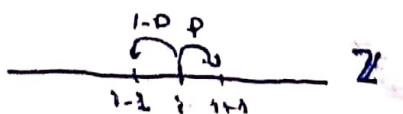
"Reversível":  $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$

então  $\nu_x \in \mathbb{Z}$  com

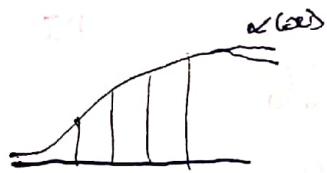
$$\omega(x) = \frac{\pi(x)}{1 + \pi(x)}$$

$$1 + \pi(x)$$

Exemplo: "Blocking measure"



$$\pi(x) = \sum \left( \frac{p}{q} \right)^i, \quad i \in \mathbb{N}$$



Exercício: B

Obs:  $v_\alpha$  se concentra em configurações satisfatórias



$$p^{1/2}$$

$$\sum_{x \in \Omega} \eta(x) < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{x \in \Omega} (1 - \eta(x)) < \infty$$

Passo decompor  $\sum = \{0,1\}^\mathbb{Z}$  em

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_n \quad \leftarrow v_\alpha \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_n \right) = 1$$

$$\sum_n = \{ \eta \in \sum : \sum_{x \in n} \eta(x) = \sum_{x \in n} (1 - \eta(x)) < \infty \}$$

salto não altera nodo

$\sum_n$  classes irreductíveis de  $\eta$

caso simétrico:  $p(x,y) = p(y,x)$

$v_\alpha$  produto  $\otimes L \Rightarrow \alpha = cte$

Def:  $H = \{ \alpha : \Lambda \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{y \neq x} p(x,y) \alpha(y) = \alpha(x) \}$   
 f. harmônicas

Obs: Suponha  $p(x,x) = 0$ .

Exclusão:

Teo. da Previdência então

$$\uparrow v_\alpha (\eta : \eta(\omega) = 1, \omega \in A) = \alpha(\omega)^{[A]}$$

a) Para  $\alpha \in \mathbb{N}$  e  $v_\alpha = \text{produto com marginal } \alpha$ .

$$\mu_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} v_\alpha S(t) \in \mathbb{L}$$

b)  $\mu_\alpha$  tem marginais  $\alpha$ .

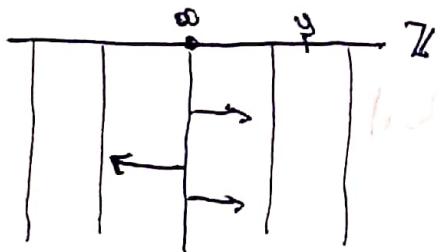
c) Se  $\mu_\alpha = v_\alpha \Rightarrow \alpha = \text{ote.}$

Demonstração:

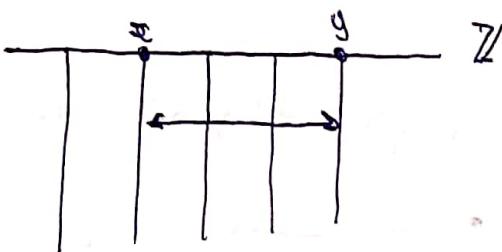
L: caso simétrico auto-dual

Construção gráfica.

Caso geral



Caso simétrico



Caso geral:

Para todo  $x \in \Lambda$  para cada  $y \in \Lambda$

Processo de setas de  $x \rightarrow y$  com taxa  $P(x,y)$

Caso simétrico:

para cada par  $(x,y)$  associado processo de Poisson ( $x \leftrightarrow y$ ) com taxa  $p(x,y)$



↑ Não explosivo = Proc. Feller.

Processo Explosivo

↑ não é o def. adiantado.

$$\int_{(\lambda - \omega)} f(x) = \int e^{-\lambda t} s(t) f(x) d\omega$$

em geral complexo

$$x \in H = \{x : x(x) = \sum_y p(x,y)x(y)\}$$

Tcc: vao prod. com  $x \in H$

a)  $\exists v_0 s(t) \rightarrow \mu_{v_0} \in I$

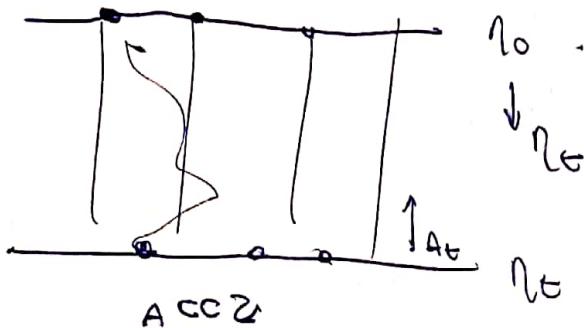
b) marg. de  $\mu_{v_0}$  é  $\infty$

$$\mu_{v_0}(\eta : \eta(x)=1) = x(x)$$

c)  $\mu_{v_0} = v_0 \Leftrightarrow x = \text{cte.}$

Dem.

Caso  $p(x,y) = p(y,x)$  execução é auto dual



$$P(r_t(x)=1, x \in A) =$$

$$P^A(r_0=1 \text{ em } A_t)$$

$\Delta_n$ : Operador de  $A_t$  para cada  $n = |A_t|$

$$\Delta_n f(A) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \notin A}} p(x,y) [f((A \setminus \{x\}) \cup \{y\}) - f(A)]$$



$$A \rightarrow (A \setminus \{x\}) \cup \{y\}$$

temos  $f(A) = \text{Prob. de todo } \beta \text{ em } A \text{ com resp. } 1 \alpha, \forall \alpha \in A$

$$f(A) = \prod_{\alpha \in A} \alpha(\alpha)$$

$$\Omega_n f(A) = \sum_{\substack{\alpha \in A \\ y \notin A}} q(\alpha, y) \left[ \prod_{\substack{\beta \in A \setminus \{\alpha\} \\ \beta \neq y}} \alpha(\beta) - \prod_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} \alpha(\beta) \right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A \\ y \notin A}} q(\alpha, y) \prod_{\beta \in A} \alpha(\beta) \left[ \frac{\alpha(y) - \alpha(\alpha)}{\alpha(\alpha)} \right]$$

$$\alpha \in H \Rightarrow \sum_y p(\alpha, y) \alpha(y) = \alpha(\alpha)$$

$$\sum_{y \neq \alpha} p(\alpha, y) = 1 \quad \left| \begin{array}{l} q(\alpha, y) = \text{taxa de } x \rightarrow y, \alpha \neq y \\ -1 \rightarrow \text{taxa de } q(x, x) \end{array} \right.$$

$$\Omega = P - \Pi$$

$$\sum_{y \in A} q(\alpha, y) \alpha(y) = 0 \quad \text{pois } \alpha \in H.$$

$$\sum_{y \in A} q(\alpha, y) \alpha(y) = - \sum_{y \in A} q(\alpha, y) \alpha(y)$$

$$= -f(A) \sum_{\substack{\alpha \in A \\ y \in A}} q(\alpha, y) \left[ \frac{\alpha(y) - \alpha(\alpha)}{\alpha(\alpha)} \right]$$

simetria:  $q(\alpha, y) = q(y, \alpha)$

$$\Omega_n f(A) = -f(A) \sum_{\substack{x \in A \\ y \in A}} q(x, y) \left[ \frac{\alpha(y) - \alpha(x)}{\alpha(x)} \right]$$

$$= -f(A) \sum_{\substack{x \in A \\ y \in A}} q(y, x) \left[ \frac{\alpha(x) - \alpha(y)}{\alpha(y)} \right]$$

simétrica

$$= -f(A) \sum_{\substack{x \in A \\ y \in A}} q(x, y) \left[ \frac{\alpha(x) - \alpha(y)}{\alpha(x)} \right]$$

$$\Omega_n f(A) = -\frac{f(A)}{2} \sum_{\substack{x \in A \\ y \in A}} q(x, y) \left[ \frac{\alpha(y) - \alpha(x)}{\alpha(x)} + \frac{\alpha(x) - \alpha(y)}{\alpha(y)} \right]$$

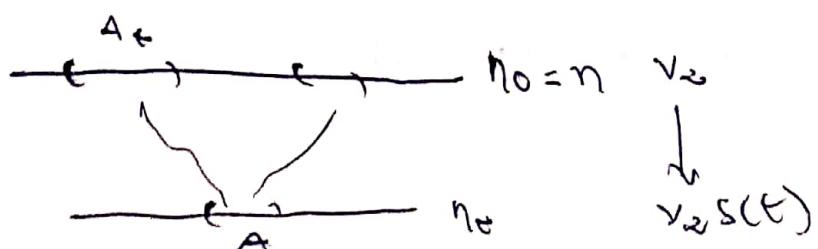
$$= -\frac{f(A)}{2} \sum_{\substack{x \in A \\ y \in A \\ x \neq y}} q(x, y) \left[ \frac{(\alpha(y) - \alpha(x))^2}{\alpha(x)\alpha(y)} \right] \leq 0$$

$$S(t) f(A) = E^A f(A_t), \quad |A| = n$$

$$\frac{d}{dt} S(t) f(A) = S(t) \Omega_n f(A) \leq 0$$

$$E^A f(A) = \int f(A) d\nu_A = f(A)$$

Existe o limite  $E^A f(A) = \text{prob. de } A_t \text{ estar totalmente ocupado em } t$

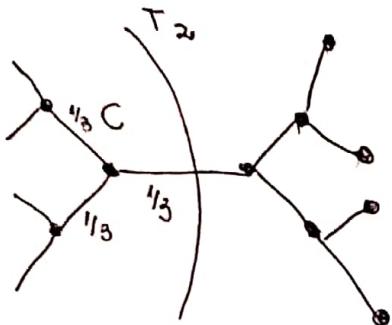


$$E^A f(A_t) = P(\eta: \eta \equiv t \text{ em } A_t) = P(\eta_t \equiv t \text{ em } A)$$

$$= \nu_\alpha S(t) (\eta: \eta \equiv t \text{ em } A)$$

$\rightarrow \mu_\alpha (\eta: \eta \equiv t \text{ em } A)$  com marg. e  
 $\downarrow$  prob. aula.

Exemplo:



Partícula marcada

$$\frac{P}{\underline{\hspace{1cm}}} \downarrow \frac{P}{\underline{\hspace{1cm}}}$$

$$v_t = (1-p)p - (1-p)(1-p) = (1-p)(2p-1)$$

## CONTACT INTERACTIONS ON A LATTICE<sup>1</sup>

BY T. E. HARRIS

University of Southern California

Let  $\{\xi_t\}$  be a Markov process whose values are subsets of  $Z_d$ , the  $d$ -dimensional integers. Put  $\xi_t(x) = 1$  if  $x \in \xi_t$  and 0 otherwise. The transition intensity for a change in  $\xi_t(x)$  depends on  $(\xi_t(y), y \text{ a neighbor of } x)$ . The chief concern is with "contact processes," where  $\xi_t(x)$  can change from 0 to 1 only if  $\xi_t(y) = 1$  for some  $y$  neighboring  $x$ . Let  $p_t(\xi) = \text{Prob} \{ \xi_t \neq \emptyset \mid \xi_0 = \xi \}$ . Under appropriate conditions,  $p_t$  is increasing, subadditive, or submodular in  $\xi$ . In the case of contact processes, conditions are giving implying that  $p_\infty(\xi) = 0$  for all finite  $\xi$ , or that the contrary is true. In other cases conditions for ergodicity are given.

**1. Introduction.** Let  $Z_d$  be the  $d$ -dimensional lattice of points ("vertices")  $x, y, z, \dots, x = (x^1, \dots, x^d)$ , where each  $x^i$  is an integer. Call  $x$  and  $y$  neighbors, and write  $x \sim y$ , if  $\sum_i |x^i - y^i| = 1$ ;  $x$  is a neighbor of  $E \subset Z_d$  (written  $x \sim E$ ) if  $x \notin E$  but  $x \sim y$  for some  $y \in E$ . Let  $E^+$  denote the union of  $E$  and its neighbors. Let  $\Sigma$  be the set of subsets of  $Z_d$  and  $\Sigma_0$  the set of finite subsets of  $Z_d$ . Each  $\xi \in \Sigma$  can be considered a map from  $Z_d$  into  $\{0, 1\}$ , with  $\xi(x) = 1$  if  $x \in \xi$  and  $\xi(x) = 0$  if  $x \notin \xi$ . If  $E \subset Z_d$ ,  $\xi(E)$  denotes the number of points of  $\xi$  in  $E$ . Let  $|\xi|$  be the number of points in  $\xi$ ,  $|\xi| \leq \infty$ . We often use notation such as  $\xi \cup x$  instead of  $\xi \cup \{x\}$ . Let  $N_x$  be the set of the  $2d$  neighbors of  $x$ .

We will consider a class of Markov processes  $\{\xi_t\}$  with state space  $\Sigma$ , whose precise definition is given in Section 2. Roughly speaking, if  $\xi_t = \xi$ , if  $\xi(x) = 0$  and if  $\xi(N_x) = k$ , there is a probability  $\lambda_k \Delta + o(\Delta)$  that  $\xi_{t+\Delta}(x) = 1$ , where  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2d}$  are given positive numbers. If  $\xi(x) = 1$ , the probability is  $\mu \Delta + o(\Delta)$  that  $\xi_{t+\Delta}(x) = 0$ ; the assumption that  $\mu$  does not depend on  $N_x$  might suit some applications ( $0 \rightarrow 1$  = infection and  $1 \rightarrow 0$  = recovery), but in any case seems to lead to mathematically nice classes of processes. A process  $\{\xi_t\}$  is a special case of the birth-death interactions treated by Spitzer (1971), Chapter 5, and of a broad class of interactions treated by Dobrushin (1971). It is also related to the "artificial neuron" networks discussed, e.g., by Vasil'ev (1969), (1970).

We will deal chiefly with *contact interactions*, where  $\lambda_0 = 0$ . If one thinks of a contact interaction as the spread of an infection or the growth of a population, then the more general case  $\lambda_0 > 0$  corresponds to spontaneous infection, or immigration. The case  $\lambda_0 = 0, \lambda_k = \lambda_1$  for  $k \geq 1$  seems like a continuous-time version of the neuron networks mentioned above, where however the process is  $1 - \xi_t(x)$  rather than  $\xi_t(x)$ .

Received October 10, 1973; revised December 27, 1973.

<sup>1</sup> This research was supported in part by National Science Foundation grant GP-24239.

AMS 1970 subject classification. Primary 60K35.

Key words and phrases. Contact, interaction, birth-death interaction, subadditivity, ergodicity.



## I. Introdução

- SPT começou ramo da prob. no final da década de 60.
- Muito do original impeto veio de F. Spitzer (EUA) e R.L. Dobrushin (URSS)
- Desde então, se desenv. rapidamente, estab. conexões com muitas outras áreas.
- Original motivação veio da mec. estadística. O obj. era ~~estender~~ e descrever e analisar model. estocást. para a evol. temporal de sistemas cuja medi. de equilíbrio são o clássico estado de Gibbs.  
Depois: redes neurais, cresc. de um tumor, propagação de uma infecção, e sistemas comportamentais, por exemplo.
- SPT representa um departamento natural da estabelecida Teoria de ~~Marcovianos~~ Processos de Markov.
- Um SPT típico consiste de ~~fazendo~~ um conjunto finito ou infinito enumerável de partículas interagentes que, na falta de interação, evoluem de acordo com os estados ind. de cadeias de Markov. Sobrepondo a essa dinâmica uma interação, a evol. de um particula individual não é mais Markoviana. O sistema como todo é, claro, Markoviano.  
No entanto, é um sistema grande e complexo que difere em muitos pontos dos proc. como o mov. Browniano em esp. Euclidianos que motivaram muito do desenv. da teoria de proc. de Markov.
- Dúvidas: "mutuamente singulares"?

### 3. Spin Systems

- SPI em que cada coordenada tem dois possíveis valores e apenas uma coordenada se altera em cada transição

O mecanismo de transição é especificado por uma função não-negativa

$$c(x, \eta), \quad x \in S \text{ e } \eta \in X = \{0, 1\}^S.$$

Esta representa a taxa com que a coordenada  $\eta(x)$  salta de 0 à 1 ou de 1 à 0 qdo o sistema está no estado  $\eta$ . Desta maneira o processo  $\eta_t$  com espaço de estados  $X$  satisfará

$$P^\eta [\eta_t(x) \neq \eta(x)] = c(x, \eta) + o(t)$$

qdo  $t \downarrow 0$  para cada  $x \in S$  e  $\eta \in X$ . A requisição de que apenas uma coordenada muda em cada transição pode ser descrita dizendo que

$$P^\eta [\eta_t(x) \neq \eta(x), \eta_t(y) \neq \eta(y)] = o(t)$$

qdo  $t \downarrow 0$  para todos  $x, y \in S$  com  $x \neq y$  e cada  $\eta \in X$ . A interação entre os sitios surge da dependência de  $c(x, \eta)$  por  $\eta$ .

## I. O Modelo Estocástico de Ising

- Introduzido por Glauber (1963)
- First studied in some generality by Dobroshin (1971 a,b).
- Processo de Markov com  $S = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$

Markov process in  $S = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ .

Each sites represents iron atoms, which are laid out on the d-dimensional integer lattice  $\mathbb{Z}^d$ , while the value  $\pm 1$  at a site represents the spin of the atom at that site.

- A configuration of spins  $\eta$  is then a point in  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$
- The dynamics of the evolution are specified by the requirement that a spin  $\eta(x)$  at  $x \in \mathbb{Z}^d$  flips to  $-\eta(x)$  at rate

$$e^{-\beta \sum_{y: |y-x|=1} \eta(x) \eta(y)},$$

onde  $\beta$  é um parâmetro não-negativo que representa o inverso da temp. do sistema. Note que a mudança é maior quando o spin em  $x$  é diferente dasqueles vizinhos.

- O sistema "prefere" config. em que os spins tendem a ficar alinhados um com os outros.  $\rightarrow$  essa monotonicidade é conhecida como ferromagnetismo.  
 ↴ em SPJ, tais sist. monot. são chamados de "atrativos"

- Claro  $\beta=0 \Rightarrow$  coordenadas independentes two-state MC, de modo que como vimos antes, o sist. tem sua única medida invariante the Bernoulli product  $\rightarrow e^{-\beta \cdot 1} \cdot 1^{\mathbb{Z}^d}$  with parameter  $1/2$ .

$$\gamma = [\beta_1, \beta_2]$$

- Pergunta que Ising é ergódico?

Resposta Capítulo IV

- É ergódico se  $\beta \neq 0$  e  $\beta < \frac{1}{2}$ .

Se  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\exists \beta_0$

$\beta < \beta_0$  ergódico

- $d \geq 3$  e  $\beta$  suficiente grande

$\exists$  infinitas medidas invariantes extremais

- O modelo do Votante

- Clifford e Sudbury (1973), Holley e Liggett (1975)

$s = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$   $\eta(x)$  change to  $1 - \eta(x)$  at rate

$$\frac{1}{2d} \sum_{y:|y-x|=1} I\{\eta(y) \neq \eta(x)\}$$

## O Processo de Contato

$$S = \mathbb{Z}^d$$

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & \text{se } \eta(x)=0, \\ 1 & \text{se } \eta(x)=1, \end{cases}$$

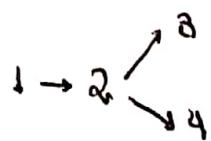
onde  $\lambda$  é um parâmetro não-negativo.

O processo de contato ~~depois~~ aparece independentemente na literatura física de alta-energia. Isto surgiu lá porque isto é equivalente ao reggeon spin model, que é por si só uma simplificação da teoria de campo reggeon.

Resultados acerca do processo de contato têm sido úteis no estudo de outros sistemas.

- É um dos SPJ mais simples que exibe transição de fase
- Vizinho mais próximo
- atrativo e auto-dual
- Muitos problemas permanecem abertos

A segunda seção contém os principais teoremas de convergência. O estudo preliminar das "fontes" em que ocorrem há a principal ferramenta usada na prova de aqueles teoremas. "Fontes" <sup>melhores</sup> fornecem meios de obter limites inferiores no valor crítico.



### 3. O Valor Crítico

$v_\lambda$  a medida invariante para o processo de contato unidimensional contínuo

$$v_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t S(t),$$

O limite existe pelo Teorema 2.3 do capítulo 3, desde que o processo de contato é atrativo. Definimos

$$\rho(\lambda) = v_\lambda \{ \eta : \eta(x) = 1 \},$$

que é independente de  $x \in \mathbb{Z}^1$ , uma vez que  $v_\lambda \in \mathcal{Y}$ .

## O Processo de Contato

Um sistema de spin onde

$$c(\infty, \eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & \text{se } \eta(\infty) = 0, \\ 1 & \text{se } \eta(\infty) = 1, \end{cases}$$

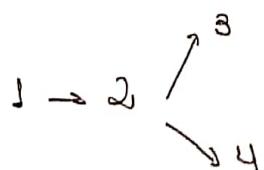
onde  $\lambda$  é um parâmetro não-negativo.

- É um dos mais simples SPI que exibe transição de fase.
- É atrativo e auto-dual (Técnicas do cap. 3 são aplicáveis)
- Intereração: vizinho mais próximo.
- Não é reversível

As primeiras 3 seções desse capítulo - caso unidimensional.

A teoria aqui é bast. completa, embora muitos problemas importantes continuem em aberto.

- Seção 1 - Obter um limite superior para  $\lambda$  (Límite inf. no Capítulo III)
- Seção 2 - Principais Teor. de Convergência. O estudo preliminar de (arestas, pontes) "edges" que ocorre nessa seção é a principal ferramenta usada pra provar tais teoremas.
- Seção 3 - Taxas de convergência



Para entender 2, ler 1.

## Processo de Contato

Um sistema de spin onde

$$\sigma(x, \eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{y \sim x, z \in \mathbb{Z}} \eta(y) & \text{se } \eta(x) = 0 \\ 1 & \text{se } \eta(x) = 1 \end{cases}$$

com  $\lambda > 0$ .

Se  $\lambda > \lambda_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_S(t) = \gamma \delta_0 + (1-\gamma) \delta_{\lambda}, \quad (2.1)$$

onde  $\gamma = \mu \{\eta : \eta \equiv 0\}$  e

$$\nu_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} S_1 S(t) \quad (\text{medida superior})$$

Sejam  $\eta_t^+$  e  $\eta_t^-$  as versões do processo de contato nos estados iniciais

$$\eta_0^+(\infty) = 1, \quad \text{se } e \text{ só se } \eta_0 = 0,$$

$$\eta_0^-(\infty) = 1, \quad \text{se } e \text{ só se } \eta_0 = 0.$$

A partir de agora, todas serão construídas no mesmo espaço.

Defino

$$l_t = \min \{x : \eta_t^+(x) = 1\} \quad \text{e}$$

$$r_t = \max \{x : \eta_t^-(x) = 1\}.$$

Note que  $l_0 = r_0 = 1$ .

Primerro Teo: Seja  $A_t$  o processo de contato com  $A_0 = \{0\}$  e  $\eta_t^+$  o processo de contato com  $\eta_0 \equiv 1$ . Então

$$(2.3) \quad \{A_t \neq \emptyset\} = \{\bar{l}_s \leq r_s \text{ para todo } s \leq t\} \quad \text{Teorema Subaditivo.}$$

Neste evento,

$$(2.4) \quad \eta_t^+(x) = \eta_t^-(x) = \eta_t(x) \quad \forall \bar{l}_t \leq x \leq r_t, \text{ e}$$

$$(2.5) \quad A_t = \{x : \bar{l}_t \leq x \leq r_t, \eta_t(x) = 1\}$$

Prova, representação gráfica.

A principal ideia por trás dos próximos resultados é que a sobrevivência do proc de contato deveria corresponder à  $r_t$  indo à  $+\infty$  e  $\bar{l}_t$  à  $-\infty$ .

Dai, gostaríamos de entender o comportamento assintótico de  $r_t$  e  $\bar{l}_t$  quando  $t \uparrow \infty$ .

Dai, a necessidade do teo. Subaditivo Ergódico.

2.2

2.6

2.19

2.21

2.24

2.27

2.28

# Processo de Contato: Teoremas de Convergência

Maicon Aparecido Pinheiro  
IME - USP

---

**Resumo:** Nestas páginas seguem alguns teoremas de convergência para o processo de contato unidimensional, bem como os lemas e teoremas necessários à suas respectivas demonstrações.

---

## Sumário

<b>1 O Processo de Contato</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorema de Convergência</b>	<b>1</b>
<b>3 Auxiliares</b>	<b>4</b>

## 1 O Processo de Contato

Um sistema de spin onde

$$c(x, \eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{|y-x|=1} \eta(y) & \text{se } \eta(x) = 0 \\ 1 & \text{se } \eta(x) = 1, \end{cases}$$

Se trata de um dos mais simples sistemas de partículas interageente que exibe transição de fase. As interações nesse modelo são regidas pela regra do vizinho mais próximo, tendo como propriedades principais a atratividade e auto-dualidade.

## 2 Teorema de Convergência

Se  $\lambda > \lambda_c$ , todas as medidas invariantes para o processo de contato unidimensional são combinações convexas de  $\delta_0$  e  $\nu_\lambda$ , pelo Teorema 3.4(4.1.5). Pelo Teorema 3.3(3.5.18),

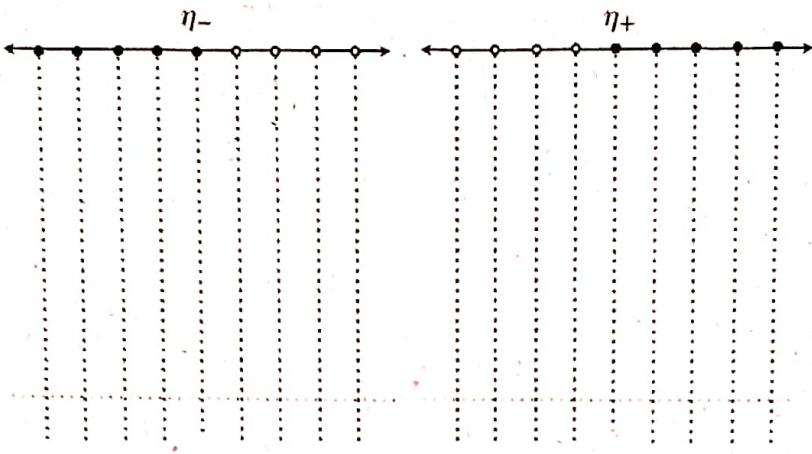
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \gamma \delta_0 + (1 - \gamma) \nu_\lambda, \quad (1)$$

onde  $\gamma = \mu\{\eta : \eta \equiv 0\}$ , dado que  $\mu \in \mathcal{S}$ . Esta seção é dedicada à prova de algo análogo à 1 para  $\mu$  arbitrária pertencente à  $\mathcal{P}$ .

Sejam  $\eta_t^+$  e  $\eta_t^-$  as versões do processo de contato com estados iniciais

$$\eta_0^+(x) = 1 \quad \text{se e somente se } x \geq 0, \text{ e}$$

$$\eta_0^-(x) = 1 \quad \text{se e somente se } x \leq 0.$$



Sempre que as várias cópias do processo de contato forem usadas a partir daqui, serão construídas simultaneamente em um espaço de probabilidade por meio da representação gráfica descrita na Seção 6 do Capítulo III. Defina

$$l_t = \min\{x : \eta_t^+(x) = 1\} \quad \text{e} \quad r_t = \max\{x : \eta_t^-(x) = 1\}, \quad (2)$$

de modo que  $l_0 = r_0 = 0$ .

**Teorema 2.1** (Teorema 6.2.2). *Seja  $A_t$  o processo de contato com  $A_0 = \{0\}$  e  $\eta_t$  o processo de contato com  $\eta_0 \equiv 1$ . Então*

$$\{A_t \neq \emptyset\} = \{l_s \leq r_s \text{ para todo } s \leq t\}. \quad (3)$$

Neste evento,

$$\begin{aligned} \eta_t(x) &= \eta_t^+(x) = \eta_t^-(x) \text{ para todo } l_t \leq x \leq r_t, \text{ e} \\ A_t &= \{x : l_t \leq x \leq r_t, \eta_t(x) = 1\}. \end{aligned}$$

**Ideia da Prova:** Checagem pela construção gráfica. □

A principal ideia por trás dos próximos resultados é que a sobrevivência do processo de contato deveria corresponder à  $r_t$  indo à  $+\infty$  e  $l_t$  à  $-\infty$ . Deste modo, gostaríamos de entender o comportamento assintótico de  $r_t$  e  $l_t$  quando  $t \uparrow \infty$ . Por simetria, o processo  $l_t$  tem a mesma lei que o processo  $-r_t$ . A análise de  $r_t$  é baseada no seguinte resultado geral, conhecido como Teorema Subaditivo Ergódico.

**Teorema 2.2** (Teorema Subaditivo Ergódico 6.2.6). *Suponha  $\{X_{m,n}, m \leq n\}$  variáveis aleatórias que satisfazem as seguintes propriedades:*

- a.  $X_{0,0} = 0$ ,  $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ , para  $0 \leq m \leq n$ .
- b.  $\{X_{(n-1)k+nk}, n \geq 1\}$  é um processo estacionário para cada  $k \geq 1$ .
- c.  $\{X_{m,m+k}, k \geq 0\} = \{X_{m+1,m+k+1}, k \geq 0\}$  em distribuição para cada  $m$ .
- d.  $EX_{0,1}^+ < \infty$ .

Seja  $\alpha_n = EX_{0,n} < \infty$ , que está bem definida por (a), (b), e (d). Então

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty, \infty], \text{ e}$$

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe q.c., com } -\infty \leq X_\infty < \infty$$

Ademais,  $E X_\infty = \alpha$ . Se  $\alpha > -\infty$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{X_{0,n}}{n} - X_\infty \right| = 0.$$

Se o processo estacionário em (b) é ergódico, então  $X_\infty = \alpha$  q.c.

**Ideia da Prova:** A prova será dada em 5 passos e utilizará, basicamente, das propriedades requeridas por hipótese e propriedades de  $\limsup$  e  $\liminf$ .  $\square$

Uma vez provado o Teorema Subaditivo Ergódico, segue:

**Teorema 2.3** (Teorema 6.2.19). *Seja  $\alpha_t = E r_t$ . Então*

a.  $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_t}{t} \in [-\infty, \infty)$ ,

b.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{t} = \alpha$  q.c., e

c. Se  $\alpha > -\infty$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left| \frac{r_t}{t} - \alpha \right| = 0.$$

**Ideia da Prova:** Considero, para  $0 \leq s < t$ ,

$$r_{s,t} = \max \{x \in \mathbb{Z} : \exists \text{ caminho aberto de } (y, s) \text{ à } (x, t), \text{ para algum } y \leq r_s\} - r_s \text{ e}$$

$$N_t = \max \{x \in \mathbb{Z} : \exists \text{ caminho aberto de } (y, 0) \text{ à } (x, t), \text{ para algum } y \leq 0\},$$

onde se desconsidera as mortes no processo. Daí,  $r_{0,t} = r_t$  e  $X_{m,n} = r_{m,n}$  satisfazem (a), (b) e (c) do Teorema 2.6, pela independência e propriedades estacionárias do Processo de Poisson que é usado na construção gráfica.

Para checar a suposição (d), veja que

$$r_t \leq N_t \text{ q.c.},$$

e  $N_t$  é um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ .  $\square$

Esse Teorema é um importante primeiro passo na prova de alguns teoremas básicos de convergência para o processo de contato. Em sua aplicação, no entanto, veremos que se  $\alpha > 0$  se  $\lambda > \lambda_c$ , uma vez que queremos usar o teorema para mostrar que  $r_t \rightarrow \infty$  q.c. neste caso. A partir daqui, considere

$$\alpha = \alpha(\lambda)$$

para indicar a dependência em  $\lambda$ . Para qualquer  $B \subset \mathbb{Z}$  contendo apenas finitamente muitos pontos, seja

$$r_t^B = \max \{x : \exists \text{ caminho desde } (y, 0) \text{ à } (x, t) \text{ para algum } y \in B\},$$

onde  $r_t^B = -\infty$  se não há tal caminho.

**Lema 2.1** (Lema 6.2.21). *Suponha  $B \subset A$ , onde  $A$  tem apenas finitamente muitos pontos, e seja  $C$  qualquer conjunto finito. Então,*

$$0 \leq r_t^{A \cup C} - r_t^A \leq r_t^{B \cup C} - r_t^B.$$

Em particular, para  $B \subset (-\infty, -1]$ ,

$$E \left( r_t^{B \cup \{0\}} - r_t^B \right) \geq E \left( r_t^{(-\infty, 0]} - r_t^{(-\infty, -1]} \right) = 1.$$

**Ideia da Prova.** Antes de mais nada, note que o lema indica que a alteração na posição de  $r_t$  se altera pouco quando se altera algo relativamente pequeno. Da definição, segue que

$$r_t^{A \cup D} = \max\{r_t^A, r_t^D\}$$

para qualquer  $A, D$ . Aplico tal propriedade aos pares  $\{A, C\}$ ,  $\{A, B\}$ , e  $\{B, C\}$  de modo a obter desigualdade que levarão ao resultado de interesse.  $\square$

**Teorema 2.4** (Teorema 6.2.24).

- a.  $\alpha_t(\lambda + \delta) \geq \alpha_t(\lambda) + \delta t$  para todo  $t \geq 0$  e  $\delta \geq 0$ .
- b.  $\alpha(\lambda + \delta) \geq \lambda + \delta$  para todo  $\delta \geq 0$ .

**Ideia da Prova:** A parte (b) segue da parte (a) com a Teorema 6.2.19. Para provar (a), devemos construir o processo de contato com parâmetros  $\lambda$  e  $\lambda + \delta$  no mesmo espaço de probabilidade usando uma representação gráfica comum. Uso das propriedades do Processo de Poisson e relações entre  $r_t^1$ (do processo de contato com taxa  $\lambda$ ) e  $r_t^2$ (do processo de contato com taxa  $\lambda + \delta$ ) para chegar a desigualdade. Ainda preciso entender alguns detalhes.  $\square$

**Teorema 2.5** (Teorema 6.2.27).

- a. Se  $\alpha(\lambda) < 0$ , então  $\rho(\lambda) = 0$ , de modo que  $\lambda \leq \lambda_c$ .
- b.  $\alpha(\lambda) \geq \lambda - \lambda_c$  para todo  $\lambda \geq \lambda_c$ .
- c.  $r_t \rightarrow \infty$  e  $l_t \rightarrow -\infty$  q.c se  $\lambda > \lambda_c$
- d. Se  $\lambda < \lambda_c$ , então  $\alpha(\lambda) < 0$

**Ideia da Prova:** Basicamente utilizará dos teoremas anteriores. A ser exposta em detalhes na apresentação final.  $\square$

**Teorema 2.6** (Teorema 6.2.28). Suponha  $\lambda > \lambda_c$ . Então para qualquer distribuição inicial  $\mu$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \gamma \delta_0 + (1 - \gamma) \nu_\lambda,$$

onde  $\gamma = \int P^\eta[\tau < \infty] \mu(d\eta)$  e  $\tau$  é o tempo até a primeira passagem pelo conjunto  $\emptyset$ .

### 3 Auxiliares

$X$  denota um espaço métrico compacto com estrutura mensurável dada pela  $\sigma$ -álgebra dos borelianos.

**Definição 3.1** (Definição 1.1.1). Um processo de Markov em  $X$  é uma coleção  $\{P^\eta, \eta \in X\}$  de medidas de probabilidade em  $D[0, \infty)$  indexadas por  $X$  com as seguintes propriedades:

- a.  $P^\eta[\zeta \in D[0, \infty) : \zeta_0 = \eta] = 1$  para todo  $\eta \in X$ .
- b. A função  $\eta \rightarrow P^\eta(A)$  de  $X$  em  $[0, 1]$  é mensurável para todo  $A \in \mathcal{F}$  (a menor  $\sigma$ -álgebra em  $D[0, \infty)$ ).
- c.  $P^\eta[\eta_{s+} \in A | \mathcal{F}_s] = P^{\eta_s}(A)$  q.c. ( $P^\eta$ ) para todo  $\eta \in X$  e  $A \in \mathcal{F}$ .

**Definição 3.2** (Definição 1.1.2). Um processo de Markov  $\{P^\eta, \eta \in X\}$  é dito um processo de Feller se  $S(t)f \in C(X)$  para todo  $t \geq 0$  e  $f \in C(X)$ .

**Proposição 3.1** (Proposição 1.1.3). Suponha  $\{P^\eta, \eta \in X\}$  é um processo de Feller ?? em  $X$ . Então a coleção de operadores lineares  $\{S(t), t \geq 0\}$  on  $C(X)$  tem as seguintes propriedades:

- a.  $S(0) = I$ , o operador identidade em  $C(X)$
- b. A função  $t \rightarrow S(t)$  de  $[0, \infty)$  em  $C(X)$  é contínua a direita para toda  $f \in C(X)$ .
- c.  $S(t+s)f = S(t)S(s)f$  para toda  $f \in C(X)$  e  $s, t \geq 0$ .
- d.  $S(t)1 = 1$  para todo  $t \geq 0$ .
- e.  $S(t)f \geq 0$  para toda  $f \in C(X)$  não negativa.

**Definição 3.3** (Definição 1.1.4). Uma família  $\{S(t), t \geq 0\}$  de operadores lineares em  $C(X)$  é chamada de um semigrupo de Markov se satisfaz as condições (a)-(e) da Proposição ??.

**Teorema 3.1** (Teorema 1.1.5). Suponha  $\{S(t) : t \geq 0\}$  um semigrupo de Markov ?? em  $C(X)$ . Então existe um único processo de Markov  $\{P^\eta, \eta \in X\}$  tal que

$$S(t)f(\eta) = E^\eta f(\eta_t)$$

para todo  $f \in C(X)$ ,  $\eta \in X$ , e  $t \geq 0$ .

**Definição 3.4** (Definição 2.3.1). Suponha que  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  são processos de Markov com espaços de estados  $X$  e  $Y$  respectivamente, e seja  $H(\eta, \zeta)$  uma função mensurável limitada em  $X \times Y$ . O processo  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  são ditos duais um ao outro com respeito à  $H$  se

$$E^\eta H(\eta_t, \zeta) = E^\zeta H(\eta, \zeta_t),$$

para todo  $\eta \in X$  e  $\zeta \in Y$ .

**Teorema 3.2** (Teorema 3.1.13). Sob a suposição de que

$$c(x, \eta) + c(x, \eta_x) > 0 \text{ sempre que } \eta(x-1) \neq \eta(x+1),$$

segue que  $\mathcal{I}_e = \{\underline{\nu}, \bar{\nu}\}$

**Teorema 3.3** (Teorema 3.5.18). Assuma que um sistema de spin é invariante sob translação em  $S + \mathbb{Z}^d$  e que a dualidade coalescente valha (isto é, assuma que as taxas são dadas por 4.3 onde  $c(x) = c > 0$  é constante,  $b(x) = 1$ , e  $p(x, A) = p(0, A - x)$ ). Suponha também que

$$p(x, A) = 0 \text{ sempre que } \infty \in A,$$

$$p(x, \emptyset) > 0 \text{ (lembre que isso não depende de } x\text{)},$$

$P^{\{x\}}[y \in A_t] > 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  de modo que  $y \geq x$  nas componentes e todo  $t \geq 0$ , e

$$P^A(\tau < \infty) < 1 \text{ para algum } A \in \mathcal{Y}.$$

Então para qualquer  $\mu \in \mathcal{S}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \alpha \delta_0 + (1 - \alpha) \nu,$$

onde  $\alpha = \mu\{\eta : \eta \equiv 0\}$  e  $\nu$  é a medida invariante.

**Teorema 3.4** (Teorema 4.1.5). Para qualquer  $\lambda \geq 0$ ,  $\mathcal{I}_e = \{\delta_0, \nu_\lambda\}$ .

*Demonstração.* Este é um caso especial do Teorema 3.2. Para checar a suposição no mesmo, simplesmente note que para o processo de contato,  $c(x, \eta) = 1$  se  $\eta(x) = 1$ , de modo que  $c(x, \eta) + c(x, \eta_x) \geq 1$  para todo  $\eta$  e  $x$ .  $\square$

$$\nu_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1 S(t)$$

$$\rho(\lambda) = \nu_\lambda\{\eta : \eta(x) = 1\}, \text{ que é independente de } x$$

## 2. Teorema de Convergência

Se  $\lambda > \lambda_c$ , todos os medidas invariantes para o processo de contato unidimensional são combinações convexas de  $\delta_0$  e  $v_\lambda$ , pelo Teorema 1.S. Pelo teorema S.18 do cap. III,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \gamma \delta_0 + (1-\gamma) v_\lambda, \quad (2.1)$$

onde  $\gamma = \mu \{ \eta : \eta \equiv 0 \}$ , dado que  $\mu \in \mathcal{S}$ . Esta seção é dedicada à prova de algo análogo à (2.1) para  $\mu$  arbitrária pertencente à  $\mathcal{P}$ .

A principal ferramenta aqui será a análise do edge processes correspondente a sistemas com configurações iniciais unilaterais. A utilidade destes sistemas podem ser vistas de um primeiro resultado, que os conecta com o sistema finito começando apenas com a origem infectada. O resultado depende do caráter da interação do vizinho mais próximo.

Segam  $\eta_t^+$  e  $\eta_t^-$  as versões do processo de contato com estados iniciais:

$$\eta_0^+(\infty) = 1 \text{ se e só se } \omega > 0, \text{ e}$$

$$\eta_0^-(\infty) = 1 \text{ se e só se } \omega \leq 0.$$

Sempre que as várias cópias do proc. de contato forem usadas a partir daqui, elas serão construídas simultaneamente em um espaço de probabilidade por meio da representação gráfica descrita na seção 6 do Capítulo III (pg. 172). Definir

$$l_t = \min \{\infty : \eta_t^+(x) = 1\} \text{ e}$$

$$r_t = \max \{\infty : \eta_t^-(x) = 1\},$$

de modo que  $l_0 = r_0 = 0$ .

**Teorema 2.2.** Seja  $A_t$  o processo de contato com

$$A_0 = \{0\},$$

e  $\eta_t$  o processo de contato com  $\eta_0 \equiv 1$ . Então

$$(2.3) \quad \{A_t \neq \emptyset\} = \{l_s \leq r_s \text{ para todos } s \leq t\}.$$

Neste evento,

$$(2.4) \quad \eta_t(x) = \eta_t^+(x) = \eta_t^-(x) \text{ para todo } l_t \leq x \leq r_t, \text{ e}$$

$$(2.5) \quad A_t = \{\infty : l_t \leq x \leq r_t, \eta_t(x) = 1\}$$

**Provar:** P/ provar o teorema, uma simples checagem na representação gráfica, nenhuma transição pode destruir as propriedades (2.3) e (2.4) e (2.5). As três valem trivialmente em  $t=0$ .

A principal ideia por trás dos próximos poucos resultados é que a sobrevivência do processo de contato deveria corresponder a  $r_t$  drifting to  $+\infty$  e  $\bar{r}_t$  à  $-\infty$ . Deste modo, gostaríamos de entender o comportamento assintótico de  $r_t$  e  $\bar{r}_t$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por simetria, o processo  $\bar{r}_t$  tem a mesma lei que o proc.  $-r_t$ . A análise de  $r_t$  é baseada no seg. res. geral, que é conhecido como Teorema Subadiativo Ergódico.

**Teorema 2.6.** Suponha  $\{X_{m,n}, m \leq n\}$  são v.a. que satisfazem as seguintes propriedades:

- $X_{0,0} = 0$ ,  $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ , para  $0 \leq m \leq n$ .
- $\{X_{(n-k)K, nk}, n \geq 1\}$  é um processo estacionário para cada  $K \geq 1$ .
- $\{X_{m, m+K}, K \geq 0\} = \{X_{m+1, m+K+1}, K \geq 0\}$  em dist., para cada  $m$ .
- $E X_{0,1}^+ < \infty$

Seja  $\alpha_n = E X_{0,n} < \infty$ , que está bem definida por (a), (b), e (d). Então

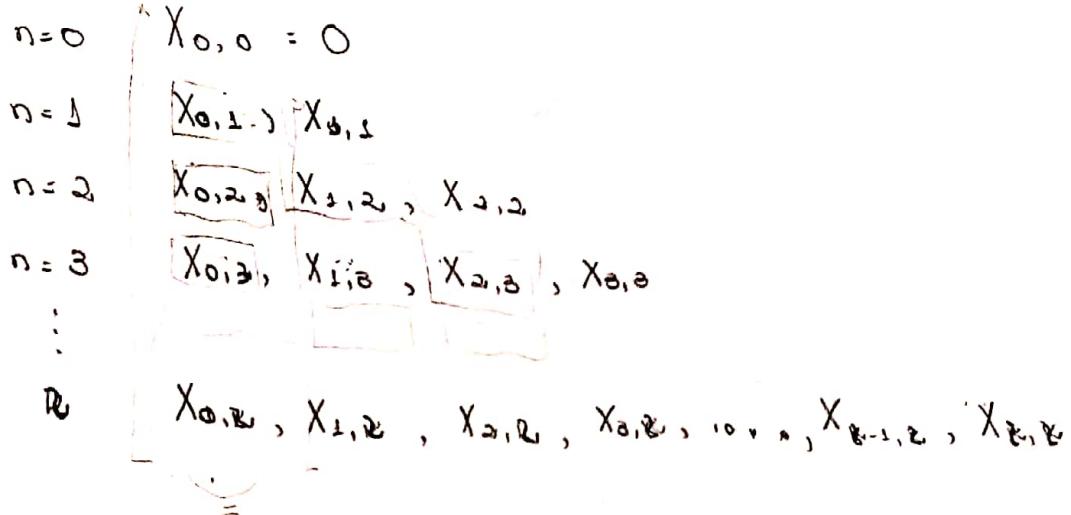
$$(2.7) \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty, \infty], \text{ e}$$

$$(2.8) \quad X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe q.e., com } -\infty \leq X_\infty \leq \infty$$

Ademais,  $E X_\infty = \alpha$ . Se  $\alpha > -\infty$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{X_{0,n}}{n} - X_\infty \right| = 0.$$

Se o processo estacionário em (b) é ergódico, então  $X_\infty = \alpha$ , q.e.



$K=1$

$\{X_{(n-1),n}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{X_{0,1}, X_{1,2}, X_{2,3}, X_{3,4}, \dots\}$  é estacionário

$K=2$

$\{X_{(n-1)2,2n}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{X_{0,2}, X_{2,4}, X_{4,6}, X_{6,8}, \dots\}$

Aumentar  $K$  enlonguece a altura dos callouts e a distância horizontal na triangulação.

**Definição.** O proc.  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ , tomando valores em  $\mathbb{R}$ , é chamado strongly stationary se as famílias

$$\{X(t_1), \dots, X(t_n)\} \text{ e } \{X(t_1+h), \dots, X(t_n+h)\}$$

tem a mesma dist. conj. para todo  $t_1, t_2, \dots, t_n$  e  $h \geq 0$ .

**Def.**  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  é chamado fricamente (ou de segunda ordem ou covariância) estacionário se, p/ todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$E(X(t_1)) = E(X(t_2)) \text{ e } \text{cov}(X(t_1), X(t_2)) = \text{cov}(X(t_1+h), X(t_2+h)),$$

médias constantes e  $c(t_1, t_2) = c(0, h)$ .

$\{c(0,m) : m \geq 0\} \rightarrow$  a função de cov. de um proc. discr. frac. estacionário.

Prova. A prova está quebrada em vários passos.

Passo 1.

Para provar (2.7), tomamos esperanças em ( $\omega$ ) e usamos (c) para obter

$$(2.9) \quad \alpha_{m+n} \leq \alpha_m + \alpha_n$$



Por a,  $\alpha_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{m,n}$

$$\text{Então } X_{0,m+n} \leq X_{0,m} + X_{m,n} \Leftrightarrow$$

Então  $\alpha_m + \alpha_n \leq \alpha_{m+n}$ ,  $\Rightarrow$  || dist.

$$X_{0,m+n} \leq X_{0,m} + X_{0,n} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{m+n} \leq \alpha_m + \alpha_n$$

Seja

$$\alpha = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \underline{\alpha}_n \in [-\infty, \infty).$$

Fixe um  $m \geq 1$  e faça  $n = km + l$ , onde  $0 \leq l < m$ . Por (2.9)

$$\begin{aligned} \alpha_{km} &\leq \underline{\alpha}_{km} \\ \alpha_n &\leq \underline{\alpha}_{km} + \alpha_l. \end{aligned}$$

Seja  $n \rightarrow \infty$ ,  $n/k \rightarrow m$ , de modo que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{\alpha_m}{m}$$

Vista vez que  $m$  é arbitrário,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \alpha$ ,

o que completa a prova do passo 1, uma vez que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \geq \alpha.$$

é automático.

Passo 2. Seja

$$\bar{X} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n) X_{0,n}.$$

Dai,  $r_{0,t} = r_t$  e  $X_{m,n} = r_{m,n}$  satisfaz (a), (b) e (c) da Teo. 2.6, pela independencia e propriedade estacionárias do processo de Poisson que é usado na construção gráfica.

Para checar suposição (d), veja que

$$r_t \leq N_t \text{ q.c.} \rightarrow$$

e  $N_t$  é um processo de Poisson

Esse teor. é uma importante primeiro passo na prova de algumas teor. básicos de convergência para o processo de contato. Em sua aplicação, no entanto, <sup>veremos</sup>, necessitaremos que  $\alpha(\lambda) \leq \lambda + \delta$ , uma vez que queremos usar o teor. para mostrar que  $r_t \rightarrow 0$  q.c. neste caso.

$\alpha = \alpha(\lambda)$  e  $\alpha_t = \alpha_t(\lambda)$  p/ indicar a dep. em  $\lambda$ . P/ qqr BCA finitely many

$r_t^B = \max\{\infty : \exists \text{ um caminho aberto de } (y, 0) \text{ a } (x, t) \text{ p/ alguma } y\}$   
onde  $r_t^B = \infty$  se não existe.

Lema 2.21. Suponha BCA, onde A tem apenas finitely many points, e seja C qqr csto finito. Então,

Adicionar algo pequeno afetará pouco

$$0 \leq r_t^{A \cup C} - r_t^A \leq r_t^{B \cup C} - r_t^B.$$

Em particular, para  $B \subset (-\infty, -\frac{1}{2}]$ ,

$$E(r_t^{B \cup [0, 1]} - r_t^B) \geq E(r_t^{(-\infty, 0]} - r_t^{(-\infty, -1]}) = 1$$

Teorema 2.24.

(a)  $\alpha_t(\lambda + \delta) \geq \alpha_t(\lambda) + \delta t$  para todo  $t \geq 0 \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$

(b)  $\alpha(\lambda + \delta) \geq \alpha(\lambda) + \delta$  para todo  $\delta \in \mathbb{R}$ . (Aqui  $-\infty + \delta = -\infty$ ).

Uma vez provado o Teorema Subadditivo Ergódico, devemos:

**Teorema 2.19.** Seja  $\alpha_t = E_{t+} \cdot E_{t-}$ . Então

$$a) \quad x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_t}{t} = \inf_{t > 0} \frac{x_t}{t} \in [-\infty, \infty),$$

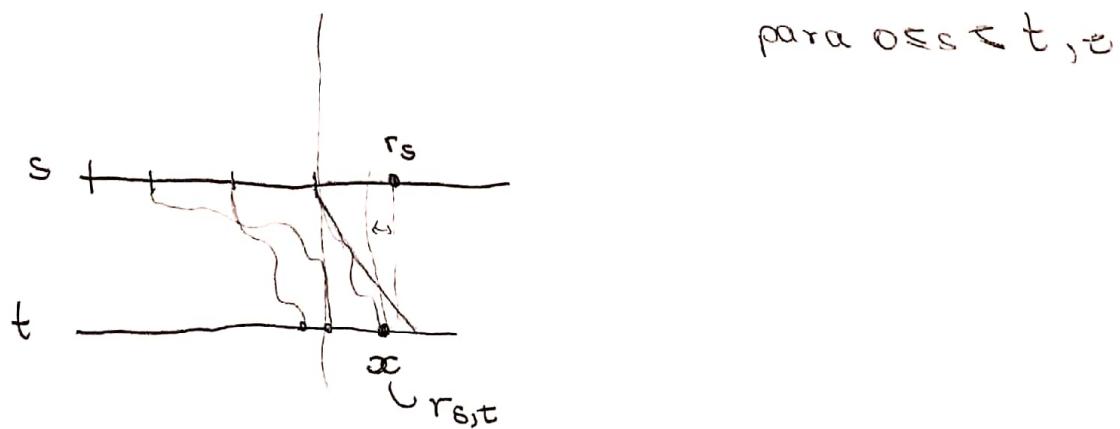
$$b) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{t} = \infty \text{ q.c., e}$$

6)  $\sec \alpha > -\infty$ , en  $\bar{\infty}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \frac{r_t}{t} - \alpha \right] = 0.$$

## Prova:

$r_{s,t} = \max \{ x \in \mathbb{Z} : \exists \text{ caminho aberto de } (y, s) \text{ à } (x, t),$   
 para algum  $y \leq r_s \}$  -  $r_s$



$N_t = \max \{ x \in \mathbb{Z} : \exists \text{ um caminho de } (y, 0) \text{ à } (x, t)$   
 |  
 só dos nascimentos para algum  $y \leq 0$ , onde  $\delta$ 's é ignorado na df.  
 do caminho\}.

$$\rho_\lambda(\lambda) = v_\lambda \{ \eta : \eta(\infty) = \lambda \}, \quad v_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_\lambda S(t)$$

Teorema 2.27.

- a) Se  $\alpha(\lambda) < 0$ , então  $\rho(\lambda) \leq 0$ , de modo que  $\lambda \leq \lambda_c$ .
- b)  $\alpha(\lambda) \geq \lambda - \lambda_c$  para todo  $\lambda \geq \lambda_c$ .
- c)  $r_t \rightarrow \infty$  e  $l_t \rightarrow -\infty$  q.c. se  $\lambda > \lambda_c$
- d) Se  $\lambda < \lambda_c$ , então  $\alpha(\lambda) < 0$

Teorema 2.28. Suponha  $\lambda > \lambda_c$ . Então para q. distribuição inicial  $\mu$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu S(t) = \gamma \delta_0 + (1-\gamma) v_\lambda,$$

onde  $\gamma = \int P^n[\tau \in \infty] \mu(d\eta)$  e  $\tau$  é um tempo até a primeira passagem pelo ~~vazio~~ (que ident. com  $\eta \leq 0$ ).

# Processo de Contato na Árvore $T^d$

Alejandro Roldan

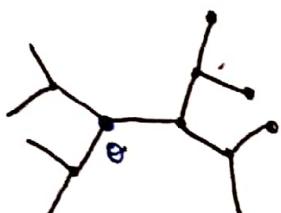
Pernantie (1992)

Schinazi - continuidade no valor crítico

"The Ants". Modelo de Colapso

Exemplo:

$T^2$ :



$T^d$ : cada sitio tem d vizinhos

$$\eta_t \in \{0,1\}^{T^d}$$

$$\eta_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{o sitio } x \text{ está inf.} \\ 0, & \text{" " " " sadio} \end{cases}$$

Se o proc. está na conf.  $\eta$  então o estado de um sitio  $x$  evolui

$$0 \rightarrow 1, \text{ taxa } \lambda \sum_{y \sim x} \eta(y)$$

$$1 \rightarrow 0, \text{ taxa } \lambda.$$

Notação:

$\eta_t^0$ : proc. começando com a raiz infectada e os demais saudos.

Definição 1.

Se  $P(\{\eta_t^0 \geq 1, \forall t \geq 0\}) > 0$ , o processo sobrevive, caso contrário o processo morre.

Definição 2.

Se  $P(\{\limsup \eta_t^0(\theta) = \infty\}) > 0$ , dizemos que o processo sobrevive fortemente.

↓  
"o sitio  $\infty$  é infectado um n° inf. de "vezes"

Definição 3. Dizemos que  $\eta_t^0$  sobrevive fracamente se o  $\eta_t^0$  sobrevive, mas não sobrevive fortemente.

Γ

i.e., sobrevive, mas  $\exists T$ : tempo finito (aleatório) t.q.  $\forall t \geq T$ ,  $\eta_t^0(\theta) = 0$ ,

Monotonicidade em  $\lambda$ .

$\lambda < \lambda' \Rightarrow$  É possível construir,  $\eta_t^{0,\lambda} \circ \eta_t^{0,\lambda'} \text{ t.q.}$

$$\eta_t^{0,\lambda} \leq \eta_t^{0,\lambda'}$$

Parâmetros críticos

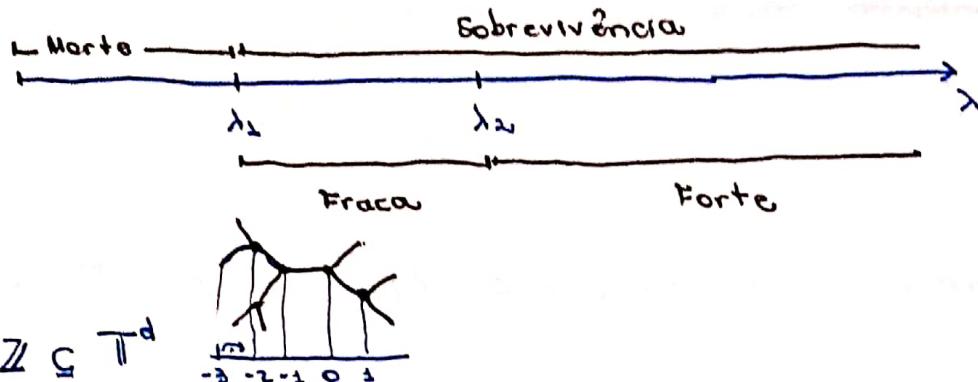
$$\lambda_1 := \inf \{\lambda : P(\eta_t^0 \geq 1, \forall t) > 0\}$$

$$\lambda_2 := \inf \{\lambda : P(\limsup \eta_t^0(\theta) = \infty) > 0\}$$

Obs:

$$\{ \limsup \eta_t^*(\theta) = 1 \} \subseteq \{ |\eta_t| \geq \forall t \}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2$$



$$\text{Obs: } \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{T}^d$$

Sabemos que  $\lambda_1(\mathbb{Z}) > 0$ , então  $\lambda_1 > 0$ .

Teorema.

$$\text{i)} \lambda_1 \leq \frac{1}{d-1}, \quad \text{ii)} \lambda_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{d}}$$

obs: Para  $d \geq 6$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  [ Vale p/ todo  $d \geq 2$  (Liggett (1996))]

obs:  $\lambda_2 < +\infty$  (Pemantle (1992))

obs: Quando  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , dizemos que o processo tem duas trans. de fase  
 $\rightarrow$  Para  $\mathbb{Z}^d$ :  $\lambda_1 = \lambda_2$

Prova.

. Uma prova no livro de Schinazi (mais natural)

i) ✓

ii) Acoplando com Branching random walk.

i.  $v_p(A_t) = p^{|A_t|}$ , para algum  $0 < p < 1$

Se  $\lambda > \frac{1}{d-1}$ , então para algum  $0 < p < 1$ ,

$E^*(v_p(A_t))$  é decrescente

↓ ~~Resumo das propriedades da função~~ limit. inf.

$E^*(v_p(A_\infty)) \leftarrow$

$1 > p^{|A|} = E^*(v_p(A_t)) \geq E^*(v_p(A_\infty))$ . Por contradição

mas:  ~~$v_p$  é contínua~~

↑ Contradict.

Prova.

ii. seja  $0 < p < 1$ , e definir

$v_p : \text{subconjtos finitos} \rightarrow (0,1]$

de  $\mathbb{T}^d$

$$A \longmapsto v_p(A) = p^{|A|}$$

$$\frac{d}{dt} E^*[v_p(A_t)] \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E^*[v_p(A_t) - v_p(A)]}{t} = *$$

Γ

$$p^{|A|} \rightarrow p^{|A|+1} \quad \text{taxa } \lambda_* = \#\{y \in \mathbb{T}^d : |y-x|=1, x \in A, y \in A\}$$

$$p^{|A|} \rightarrow p^{|A|-1}, \quad \text{taxa } |\Lambda|$$

7

$$* = (\rho^{|A|+1} - \rho^{|A|}) \lambda \in + (\rho^{|A|-2} - \rho^{|A|}) |A|$$

$$= [\rho^{-1}(A) - \lambda \in] (1-\rho) v_p(A) \quad (*)$$

Obs: Para  $A \subseteq T^d$ ,  $|A| < \infty$ , o número de elas incidentes a pontos de  $A$  (contando multiplicidade) é  $(d+1)|A|$ .

Obs: Existe no máximo  $|A| - 2$  elas com seus dois vértices em  $A$ .

∴

$$\begin{aligned} \in &\geq (d+1)|A| - 2(|A| - 2) \\ &= (d-1)|A| + 2 \end{aligned}$$

Assim, em  $(*)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}^A [v_p(A_t)] \Big|_{t=0} &\leq [\rho^{-1}|A| - \lambda(d-1)|A| - 2\lambda] (1-\rho) v_p(A) \\ &= \rho^{-1}|A| [1 - \lambda(d-1)\rho - 2\lambda\rho^{-1}|A|] (1-\rho) v_p(A) \\ &\leq \rho^{-1}|A| [1 - \lambda(d-1)\rho] (1-\rho) v_p(A) \end{aligned}$$

Se  $\rho \lambda(d-1) \geq 1$  então  $\frac{d}{dt} \mathbb{E}^A [v_p(A_t)] \Big|_{t=0} \leq 0$ .

∴  $\mathbb{E}^A [v_p(A_t)]$  é descrente em  $t$ .

Além disso,  $E^A[v_p(A_\infty)] \geq 0$

$$\therefore E^A[v_p(A_t)] \rightarrow E^A[v_p(A_\infty)] \leq E^A[v_p(A_0)] = p^{|A|} < \infty$$

Agora, se o proc. morre então  $E^A[v_p(A)] = 1$ .

Portanto, quando  $p\lambda(d-1) \geq 1$ , o processo não pode morrer.

Obs.  $\lambda(d-1) \neq 1$ , see,  $\exists p \in (0,1)$  t.q.  $p\lambda(d-1) \geq 1$

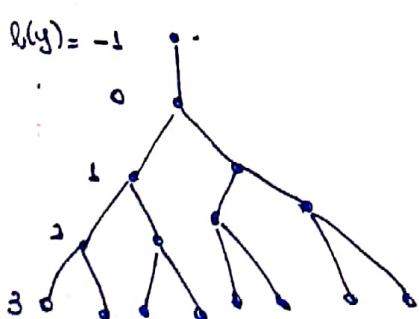
Se  $\lambda \geq \frac{1}{d-1} \Rightarrow$  proc. sobrevive.

∴

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{d-1}$$

ii)  $\lambda_2 \geq \frac{1}{2\sqrt{d}}$

Def.  $l: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{Z}$



$$l(y) = \begin{cases} l(x) - 1, & \text{p/1 um viz. de } x \\ l(x) + 1, & \text{p/1 os outros viz. de } x. \end{cases}$$

$l(x)$  pode ser pens. como o n° da geração de  $x$ .

## Intuitiva

$$\omega_p(A) = \sum_{x \in A} p^{l(x)}$$

Para  $p = \frac{1}{\sqrt{d}}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$ , tem-se

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}^A [\omega_p(A_t)]|_{t=0} \leq 0$$

$$\therefore M_t = \omega_p(A_t)$$

$\hookrightarrow$  supermartingal (positiva)

$$\therefore M_t \rightarrow M_\infty \text{ q.e.}$$

Mas se  $\{x \in A : l(x) > 0\}$  acontece, então  $M_t$  flutua em  $p^{l(x)}$  inf. vezes. Logo,  $p \geq \frac{1}{2\sqrt{d}}$ , não há sob. forte.

Prova: Para  $p > 0$ , defina

$$\omega_p(A) := \sum_{x \in A} p^{l(x)}$$

↓  
finito

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}^A [\omega_p(A_t)] \Big|_{t=0} &= \sum_{x \in A} \left[ \lambda \sum_{\substack{y \neq x \\ y \in A}} p^{l(y)} - p^{l(x)} \right] \\ &= \left( \lambda \sum_{x \in A} \sum_{\substack{y \neq x \\ y \in A}} p^{l(y)} \right) - \omega_p(A) \end{aligned}$$

Obs:

(amenable)

$$\sum_{y: l(y) = l(x) + 1} p^{l(y)} = \frac{p^{l(x)-1}}{d p^{l(x)-1}} + d \frac{p^{l(x)+1}}{p^{l(x)+1}} \quad \begin{aligned} l(x) > 0 &\leq p^{l(x)-1} + d p^{l(x)+1} \\ l(x) \leq 0 &\leq \dots + p^{l(x)} \end{aligned}$$

$$\sum_{x \in A} \sum_{y \in x} p^{l(y)} = p^{-1} \sum_{x \in A} p^{l(x)} + dp \sum_{x \in A} p^{l(x)}$$

$$\begin{cases} p^{-1} w_p(A) + dp w_p(A), \\ \cancel{\text{depois}} + \cancel{\text{antes}}, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} E^p [w_p(A_t)] \Big|_{t=0} \leq [\lambda (p^{-1} + dp) - 1] w_p(A) \quad (\star)$$

$$dp^{l(x)-1} \rightarrow p^{l(x)+1}$$

$$p^{l(x)-1} + dp^{l(x)+1}$$

Escolhendo  $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$  e  $p = \frac{1}{\sqrt{d}}$ , o lado direito de  $(\star)$  é zero.

$$\therefore \text{Para } \lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}} \text{ e } p = \frac{1}{\sqrt{d}} \rightarrow$$

$M_t = w_p(A_t)$  é supermartingal

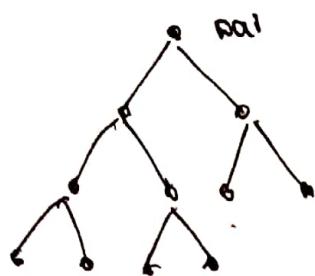
$\therefore M_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} M_\infty$

Observe que  $\{x \in A_t : \text{i.v.}\}$  acontece, então  $M_t$  flutua pelo menos

$p^{l(x)}$  i.v.. Portanto,  $P(x \in A_t \text{ i.v.}) = 0$  (pois  $M_t \rightarrow M_\infty$  q.c.),

$\therefore$  Para  $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{d}}$ , o proc. não sobr. fortemente.

Schminski



zo

$z_1 \in \{z_1, \dots, d\}$

:

Ramif. Sabre. se  $E(z) > 1 \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} d > 1 \Rightarrow \lambda > \frac{1}{d-1}.$$

:

# Aula 01, 04 de março

Considero a cadeia  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  em  $S = \{0, \dots, k\}$  onde os saltos ocorrem de acordo com  $N_t \sim PPP(\lambda)$  e a transição de estados se dá por uma matriz  $(P^*)_{xy}$ ,  $x, y \in S$ . Sabese que

$$S(t)f(x) = E^x f(X_t) = \sum_{y \in S} P_x(x, y) f(y), \text{ onde}$$

$P_t(x, y) = P(X_t=y | X_0=x)$ . Verifique que:

a)  $P_t(x, y) = e^{-t} \sum_{l \geq 0} \frac{t^l}{l!} P_l(x, y)$

Basta ver que

$$\begin{aligned} P(X_t=y | X_0=x) &= \frac{P(X_t=y, X_0=x)}{P(X_0=x)} \\ &= \frac{\sum_{l \geq 0} P(X_t=y, X_0=x, N_t=l)}{P(X_0=x)} \\ &= \sum_{l \geq 0} P(N_t=l) \frac{P(X_t=y, X_0=x, N_t=l)}{P(X_0=x)P(N_t=l)} \\ &= \sum_{l \geq 0} P(N_t=l) \frac{P(X_t=y, X_0=x, N_t=l)}{P(X_0=x, N_t=l)} \\ &= \sum_{l \geq 0} P(N_t=l) P(X_t=y / X_0=x, N_t=l) \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{t^l e^{-t}}{l!} P_l(x, y) \\ &= e^{-t} \sum_{l \geq 0} \frac{t^l}{l!} P_l(x, y), \end{aligned}$$

uma vez que  $N_t \sim Poisson(t)$ .

Ademais, uma vez que  $P_t(x,y) = (P^t)_{x,y}$ , segue que

$$P_t(x,y) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t P)^n}{n!} (x,y)$$

$$= e^{-t} (e^{t P})_{x,y}$$

Dai, de modo geral, segue que

$$\begin{aligned} P_t &= e^{-t} \cdot e^{t P} \\ &= e^{-t} \mathbb{I} \cdot e^{t P} \\ &= e^{-t} \mathbb{I} \cdot e^{t P} \\ &= e^{t Q} \quad , \text{ onde } Q = P - \mathbb{I}. \\ &\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ &\qquad\qquad\qquad \text{matriz geradora} \end{aligned}$$

b) Terminar a consta

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} e^{-t} \sum_{x \in S} \frac{t^2}{2!} P_2(x,y) f(y) &= \sum_{y \in S} e^{-t} (e^{t P})_{x,y} f(y) \\ &= \sum_{y \in S} e^{t Q}_{x,y} f(y) \end{aligned}$$

c) Determine  $P_t$  no caso  $K=1$ , em que  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$ .  
Basta ver que

$$Q = U D U^{-1}, \text{ onde } D = \begin{bmatrix} -(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}$$

Dai, segue que

$$Q^t = U D U^{-1} \xrightarrow{\mathbb{I}} U D U^{-1} \xrightarrow{\mathbb{I}} U D U^{-1} = U D^t U^{-1}$$

buses

Ademais  $Q^2(x,y) = (Q(x,y))^2$ . Logo

$$P_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U \begin{bmatrix} -(\mu+\lambda)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$= U \begin{bmatrix} e^{-(\lambda+\mu)t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^{-1}$$

Resulta que

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda+\mu & -1/\lambda+\mu \\ \mu/\lambda+\mu & \lambda/\lambda+\mu \end{bmatrix}$$

$$P_t = \begin{bmatrix} \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & 1 \\ -\mu e^{-(\lambda+\mu)t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda+\mu & -1/\lambda+\mu \\ \mu/\lambda+\mu & \lambda/\lambda+\mu \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{bmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mu_0 S(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

Aula 03, 13 de março

## Construção gráfica

Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  associa processos de Poisson independentes

1. "Cruzes"  $N_x(t)$  com taxa  $\lambda$

2. Infecção: para cada direção de  $\mathbb{Z}^d$ , associa  $N_{x+e_i}$  com taxa  $\lambda$  e  $e_i \in \mathbb{Z}^d$ , i.e.  $1 = 1$ .

Exercício. A construção acima realiza as taxas do contato.

Para o modelo de contato, sabe-se que

$$c(x, \eta) = \eta(x) + (1 - \eta(x)) \lambda \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x|=1}} \eta(y)$$

Por um lado, para  $x \in \mathbb{Z}^d$  t.q.  $\eta(x) = 1$ ,

$$\begin{aligned} P(\eta_{t+h} = \eta^x \mid \eta_t = \eta) &= P(N_x(h) = 1, N_y(h) = 0, N_{x+e_i}(h) = 0) + o(h) \\ &= P(N_x(h) = 1) \prod_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \neq x \\ \eta(y) = 1}} P(N_y(h) = 0) \prod_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ z \in \{x+e_i\} \\ \eta(z) = 1}} P(N_z(h) = 0) \\ &\quad + o(h) \\ &= h e^{-h} \prod_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ y \neq x \\ \eta(y) = 1}} e^{-h} \prod_{\substack{z \in \mathbb{Z}^d \\ z \in \{x+e_i\} \\ \eta(z) = 1}} e^{-\lambda h} + o(h) \\ &= h \left( 1 - h + \frac{h^2}{2} + \dots \right) \left( 1 + o(h) \right) \\ &= 1 \cdot h + o(h) \Rightarrow c(x, \eta) = 1, \text{ se } \eta(x) = 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $x \in \mathbb{Z}^d$  t.q.  $\eta(x) = 0$

$$\begin{aligned}
P(\eta_{t+h} = \eta^x \mid \eta_t = \eta) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} P(N_{y, y + e_1, \infty}(h) = 1, N_{3, 3 + e_1}(h) = 0, N_w(h) = 0) \\
&\quad \text{if } y - x = 1 \\
&\quad \eta(y) = 1 \\
&\quad + o(h) \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x|=1 \\ \eta(y)=1}} P(N_{y, y + e_1, \infty}(h) = 1) \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} P(N_{3, 3 + e_1}(h) = 0) \times \\
&\quad \lambda \begin{cases} 1 - \eta(z) & z \neq y \\ 1 - \eta(z) & z = y \end{cases} \\
&\quad \times \prod_{w \in \mathbb{Z}^d} P(N_w(h) = 0) + o(h) \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x|=1 \\ \eta(y)=1}} \lambda h e^{-\lambda h} \prod_{z \in A} e^{-\lambda h} \prod_{w \in B} e^{-\lambda h} + o(h) \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x|=1 \\ \eta(y)=1}} \lambda h \left(1 - e^{-\lambda h} + o(h)\right) \left(1 - e^{-\lambda h} + o(h)\right) \left(1 - h + o(h)\right) \\
&\quad + o(h) \\
&= \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^d \\ |y-x|=1 \\ \eta(y)=1}} \lambda h + o(h) \\
&= \lambda \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \eta(y) \cdot h \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$c(x, \eta) = \lambda \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \eta(y) \quad \text{se } \eta(x) = 0$$

$|y-x|=1$

Dai, segue, de modo geral, que

$$c(x, \eta) = \eta(x) + \lambda(1 - \eta(x)) \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \eta(y)$$

$|y-x|=1$

Exercício. Aditividade no processo de contato.

Seja  $A_t^A = \{y \in \mathbb{Z}^d : \exists \text{ traj. aberta de } (x, 0), x \in A \text{ até } (y, t)\}$

$A_t^A$ : "infetados no inst.  $t$  começando de  $A$ "

Mostra que  $A_t^{A \cup B} = A_t^A \cup A_t^B$ .

Por definição,

$A_t^{A \cup B} = \{y \in \mathbb{Z}^d : \exists \text{ traj. aberta de } (x, 0), x \in A \cup B \text{ até } (y, t)\}$

prop. conjuntos

$$= \{y \in \mathbb{Z}^d : \exists \text{ traj. aberta de } (x, 0), x \in A \text{ até } (y, t)\} \cup$$

$$\{y \in \mathbb{Z}^d : \exists \text{ traj. aberta de } (x, 0), x \in B \text{ até } (y, t)\}$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} A_t^A \cup A_t^B$$

# 1. O Valor Crítico

Seja  $\nu_\lambda$  a medida inv. para o processo de cont. unidimensional com parâmetro  $\lambda \geq 0$ :

$$\nu_\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_0 \delta(t)$$

O limite existe pelo Teorema 2.3 do Capítulo 3, uma vez que o processo de contato é atrativo.

Defina  $\rho(\lambda) = \nu_\lambda \{ \eta_t : \eta_t(\infty) = 1 \}$ , dens. de  $\eta$  com o sítio  $x$  infectado

que independente de  $x \in \mathbb{Z}^d$ , uma vez que  $\nu_\lambda \in \mathcal{Y}$ .  
inv. por translagão. Para cada  $w \in \Omega$  (alcatoridade fixada) pode-se exibir  $w$  (transladar a alcator.) tal que  $\eta(x) = \eta(y)$ ,  $y \neq x$ .

Pelo Corolário 2.4 do Cap. III, o processo é ergódico para um dado  $\lambda$  se e somente se  $\rho(\lambda) = 0$ . Pelo Corolário 1.7 do Capítulo III,

$$\downarrow \delta = \{\delta_0\}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \nu_{\lambda_1} \leq \nu_{\lambda_2}$$

Portanto,  $\mu(\lambda)$  é uma função não-decrescente de  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \sup \{ \lambda \geq 0 : \text{processo é ergódico} \} \\ &= \inf \{ \lambda \geq 0 : \rho(\lambda) > 0 \} \end{aligned}$$

## O Processo de Contato

Um sistema de spin onde

$$c(\alpha, \eta) = \begin{cases} \lambda \sum_{y \sim \alpha, y \neq \alpha} \eta(y) & \text{se } \eta(\alpha) = 0, \\ 1 & \text{se } \eta(\alpha) = 1, \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$ .

Interpretacão: propagação de uma doença contagiosa. Um indiv. em  $\alpha \in S$  está infectado se  $\eta(\alpha) = 1$  e saudável se  $\eta(\alpha) = 0$ . Os saudáveis são infectados à uma taxa que é proporcional ao número de viz. doentes. Os infectados se recuperam à uma taxa constante, que é normalizada em 1.

O processo de contato é atrativo e auto-dual, de modo que a maioria dos res. do cap. 3 são válidos. A interação é a do vizinho mais próximo. Não é reversível.

As três primeiras seções lidam com o caso unidimensional. O princ. obj. da primeira é obter um limite superior para o valor crítico  $\lambda_c$ . (lim. inf. dado no cap. 3). Além disso, um nº de resultados simples que serão usados depois.

A segunda seção contém os prin. teoremas de convergência. O estudo preliminar de "pontos" que ocorre lá é a principal ferramenta usada p/ provar destes teoremas.