31/08 Pasta 5

Nº cópias 5

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Lista de Exercícios 2 – 2º semestre de 2015 - Prof. Silvia L.P. Ferrari

1. Suponha que $X \sim U(0, \theta)$, $\theta > 0$.

   (a) Mostre que para que $g(\theta)$ seja estimável é necessário que $\theta g(\theta) \to 0$ quando $\theta \downarrow 0$

   (b) Mostre que, se g é derivável, então $\delta(X) = g(X) + Xg'(X)$ é um estimador não viesado de $g(\theta)$.

2. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam independentes e tenham distribuição de Poisson de média $\lambda > 0$. Use o Método 1 para encontrar o ENVVUM de $\Sigma X_i \sim Poi(n\lambda)$

   (a) λ^k para qualquer inteiro k positivo; $E(\delta(X)) = g(\theta) = \lambda^k$

   (b) $e^{-\lambda}$. $E(\delta(X)) = g(\lambda) = e^{-\lambda}$. $\sum \delta(x) \frac{(n\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum$ . .

3. Resolva o problema anterior (parte b) pelo Método 2 usando o fato de que um estimador não viciado de $e^{-\lambda}$ é: $\delta = 1$, se $X_1 = 0$, e $\delta = 0$, caso contrário.

4. Seja $\mathcal{X}$ o conjunto dos números naturais, i.e. $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e $A \subset \mathcal{X}$, não vazio. Suponha que X tem distribuição de Poisson de parâmetro λ truncada em A, ou seja, a distribuição de X coincide com a distribuição de Y condicional a que $Y \in A$, sendo que $Y \sim$ Poisson(λ).

   (a) Suponha que $A = \{0, 1, 2, \ldots, a\}$, em que a é um inteiro positivo. Mostre que λ não tem um estimador não viciado.

   (b) Suponha que $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Encontre o ENVVUM de λ.

   (c) Suponha que $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Encontre o ENVVUM de $e^{-\lambda}$. Critique o estimador encontrado.

5. Considere uma variável aleatória X com função de probabilidade dada por

$$f(x;\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{(1-|x|)} I_{\{-1,0,1\}}(x),$$

$L(\theta; x) = \left\{ \frac{1}{2}\theta(1-\theta)^{1-x} \right.$

   $\theta \in (0, 1)$. Considere a estatística $T = T(X) = 2I_{\{1\}}(X)$.

   (a) $|X|$ é uma estatística suficiente e completa? (justifique)

   (b) T é um estimador não viciado para θ? (justifique)

   (c) Encontre, se existir, um estimador não viciado de θ cuja variância seja uniformemente (em θ) menor que a de T.

   (d) Discuta a estimação por máxima verossimilhança para θ. Não existe.

6. Suponha que $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ sejam v.a's independentes tais que $X_i \sim N(\zeta, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, m$, e $Y_j \sim N(\eta, \sigma^2)$, para $j = 1, \ldots, n$.

   (a) Mostre que se $n = m = 1$, σ^2 não é estimável.

   (b) Suponha que $m \geq 2$, $n \geq 2$. Encontre o ENVVUM de σ^r, para $r > -2$.

   (c) Encontre o ENVVUM de $(\eta - \zeta)/\sigma$.

   Nota: Se $V \sim \chi^2_n$, então $E(V^{r/2}) = 2^{r/2}\Gamma((n+r)/2)/\Gamma(n/2)$, para $n > -r$.

7. Se T tem distribuição binomial $b(p, n)$ com $n > 3$, use o Método 1 para encontrar o ENVVUM de p^3.

8. Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\theta, 1)$, onde $\theta = 0$ ou 1. Considere estimadores de θ que assumam apenas os valores 0 e 1. Mostre que não existe nenhum estimador não viciado de θ.

9. **Proposição:** Sejam $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Omega\}$ uma família de distribuições e $\gamma = g(\theta) \in \mathcal{R}$ o estimando. Sempre uma das seguintes afirmações é verdadeira.

   i. Não existe nenhum estimador não viesado de γ.

   ii. Existe apenas um estimador não viesado de γ.

   iii. Existem infinitos estimadores não viesados de γ.

   Demos exemplos em sala de aula dos casos (i.) e (ii.) acima. Complete a demonstração.

10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $U(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$.

    (a) Mostre que a família de distribuições $\mathcal{P} = \{U(-\theta, \theta), \theta > 0\}$ é uma família de escala.

    (b) Mostre que $T = \max(|X_1|, \ldots, |X_n|)$ é uma estatística suficiente minimal para θ.

    (c) Encontre o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de θ.

11. (a) Mostre que se δ é um estimador inadmissível de $g(\theta)$ sob perda quadrática, então $a\delta + b$ é um estimador inadmissível de $ag(\theta) + b$; $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$.

    (b) Mostre que, se δ_i é estimador ENVVUM de $g_i(\theta)$, então $\sum_{i=1}^{k} c_i\delta_i$ é estimador ENVVUM de $\sum_{i=1}^{k} c_i g_i(\theta)$, em que $c_1, \ldots, c_n$ são constantes quaisquer.

12. Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuições $U(0, \theta)$ e $U(0, \theta')$, respectivamente. Se $n > 1$, determine o ENVVUM de θ/θ'.

13. Prove ou dê contra-exemplo. Seja X variável aleatória com distribuição P_θ pertencente a uma família de distribuições $\mathcal{P} = \{P_\theta,\ \theta \in \Omega\}$ e sejam $g_1(\theta)$ e $g_2(\theta)$ funções de θ a valores reais. Sejam $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ estimadores de $g_1(\theta)$ e $g_2(\theta)$ respectivamente, com $E(\delta_1(X)^2) < \infty$ e $E(\delta_2(X)^2) < \infty$. Se estes estimadores são não viciados de variância uniformemente mínima (ENVVUM) então $a\delta_1(X) + b\delta_2(X)$ tem variância finita e é ENVVUM de $ag_1(\theta) + bg_2(\theta)$. Aqui a e b são números reais fixados.

14. Seja X uma variável aleatória que toma os valores $-1, 0, 1, 2, 3$ com probabilidades $P(X = -1) = 2pq$ e $P(X = k) = p^k q^{3-k}$, para $k = 0, 1, 2, 3$.

    (a) Verifique que esta é uma distribuição de probabilidade.

    (b) Obtenha o estimador não viciado de variância localmente mínima (ENVVLM) em p_0 de

       i. p

       ii. pq

    e verifique, para cada caso, se o estimador é ENVVUM.

15. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(\theta_i, 1)$, para $i = 1, \ldots, n$. Seja $\omega = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2$. Obtenha o ENVVUM e o EMV de ω e compare seus erros quadráticos médios.

16. Prove o Teorema 1.11, p. 88, TPE.

17. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição discreta com função de probabilidade $f_{\theta,j}$, em que $\theta > 0$ e $j = 1, 2$; $f_{\theta,1}$ é a distribuição de Poisson de média θ e $f_{\theta,2}$ é a distribuição geométrica de parâmetro $\theta/(1+\theta)$, isto é,

$$f_{\theta.2}(x) = \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta}\right]\left[\frac{\theta}{1+\theta}\right]^x, \ x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Existe ENVVUM de θ? Justifique.

18. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com função densidade de probabilidade $f_\theta(x) = \theta/x^2$, se $x > \theta$ e $= 0$, se $x < \theta$; $\theta > 0$. Encontre un ENVVUM de $g(\theta)$ assumindo que $g(\theta)/\theta^n \to 0$ quando $\theta \to \infty$ e que g é diferenciável.

19. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $U(0, \theta)$. $\theta \in \Omega = (0, +\infty)$. Sabemos que $X_{(n)} = \text{maximo}(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa para θ.

   (a) Suponha que $k > -n$ e encontre o ENVVUM de θ^k
   (b) Encontre o EMV de θ^k e compare seu erro quadrático médio com a variância do ENVVUM.
   (c) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ supondo que o espaço paramétrico é $\Omega_0 = [1, +\infty)$.

20. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ n observações independentes de X, que tem função de probabilidade

$$f_N(x) = P_N(X = x) = \frac{a(x)}{C(N)}, \ x = 1, 2, \ldots, N,$$

em que N é inteiro positivo desconhecido, $a(x) > 0$, $C(N) = \sum_{x=1}^{N} a(x)$.

   (a) Mostre que $X_{(n)} = \text{maximo}(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa.
   (b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de N.

21. Se $X_1, \ldots, X_n$ são iid com distribuição $N(\zeta, \sigma^2)$, com σ conhecido, encontre o ENVVUM de ζ^2, ζ^3 e de ζ^4. Sugestão: Para calcular $E(\overline{X}^k)$, escreva $\overline{X} = Y + \zeta$, onde $Y \sim N(0, \sigma^2/n)$ e expanda $E[(Y + \zeta)^k]$.

22. Resolva o problema anterior admitindo que σ é desconhecido.

23. Dizemos que X tem distribuição exponencial de parâmetros a e b ($a \in \mathcal{R}$, $b > 0$), e escrevemos $X \sim E(a, b)$, se sua função densidade de probabilidade é

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b}\exp\left\{-\frac{x-a}{b}\right\} I_{[a,\infty)}(x). \quad X = U$$

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim E(\theta, \theta)$ em que $\theta > 0$ é desconhecido.

   (a) Mostrar que a classe de distribuições $\mathcal{P} = \{E(\theta, \theta), \theta > 0\}$ é uma família de escala.
   (b) Esboce a função de verossimilhança. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ. Este estimador é admissível sob perda quadrática?

24. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ n observações independentes de uma distribuição exponencial $E(a, b)$, $a \in (-\infty, 0]$ e $b > 0$ é conhecido.

   (a) Mostre que $X_{(1)} = \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} X_i$ é uma estatística suficiente, mas não é completa.

$X = \theta + \theta U$
$\theta(1+U)$

$U \sim \exp(1)$

(b) Encontre o ENVVUM de a.
Sugestão: Considere $g(X_{(1)}) = (cX_{(1)} + d)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})$, com c e d constantes. Mostre que $g(X_{(1)})$ é não correlacionado com os estimadores não viciados de zero.

25. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual simples de $X \sim \mathrm{E}(a, b)$. Mostre que $X_{(1)} = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} X_i$ e $\sum[X_i - X_{(1)}]$ são independentes e têm distribuições $\mathrm{E}(a, b/n)$ e $b\mathrm{Gama}(n-1, 1)$. Sugestão: Se $a = 0$ e $b = 1$, as variáveis $Y_i = (n - i + 1)[X_{(i)} - X_{(i-1)}]$, para $i = 2, \ldots, n$, são iid e têm distribuição $E(0, 1)$.

26. Suponha que X_i, para $i = 1, \ldots, n$, sejam v.a's com distribuição $\mathrm{N}(\alpha + \beta t_i, \sigma^2)$, onde α, β e σ^2 são desconhecidos, e os t's são constantes conhecidas não todas nulas. Encontre o ENVVUM de α e β.

27. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição discreta $P_{\theta,j}$, em que $\theta \in (0, 1)$, $j = 1, 2$, sendo $P_{\theta,1}$ a distribuição de Poisson com média θ e $P_{\theta,2}$ a distribuição de Bernoulli de parâmetro θ.

   (a) Mostre que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ não é uma estatística suficiente.

   (b) Encontre um ENVVUM de θ.

28. Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de média θ, i.e. com densidade $\theta^{-1}\exp(-z\theta^{-1})$, $z \geq 0$; $\theta > 0$. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ constantes positivas. Suponha que $Y_1, \ldots, Y_n$ sejam uma amostra observável que segue o modelo

$$Y_i = \beta x_i + Z_i, \; i = 1, \ldots, n,$$

em que $\beta > 0$, sendo β e θ desconhecidos.

   (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $(\widehat{\beta}, \widehat{\theta})$ de (β, θ).

   (b) $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\theta}$ são estimadores não viciados de β e de θ respectivamente?

   (c) Obtenha a distribuição, a média e a variância do estimador de máxima verossimilhança de β.

29. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam v.a's independentes com distribuição $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

   (a) Verifique se $\overline{X}/S$ e S, onde $\overline{X} = \sum X_i/n$ e $S^2 = \sum(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$, são independentes.

   (b) Obtenha o ENVVUM de e^{μ} com σ^2 conhecido. Sugestão: Mostrar que $E(e^{\overline{X}}) = \exp\{\sigma^2/(2n) + \mu\}$ usando a função geradora de momentos de $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ dada por $\mathrm{E}(e^{t\overline{X}}) = \exp\{\mu t + t^2\sigma^2/(2n)\}$.

   (c) Encontre um estimador não viciado de e^{μ} com σ^2 desconhecido. Ele é ENVVUM? Sugestão: Expandir $e^{-\sigma^2/(2n)}$ em série de potências e estimar termo a termo.

30. Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade

$$p_\theta(x) = \mathrm{P}_\theta(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = 0, 1, \ldots;$$

$\theta > 0$, $a(x) \geq 0$, $\sum_{x=0}^{\infty} a(x)\theta^x = C(\theta) < \infty$ (distribuição de série de potências).

   (a) Mostre que se $a(x) > 0$ para todo $x = 0, 1, \ldots$, então θ^r é estimável para qualquer r inteiro positivo e seu estimador não viciado de variância uniformemente mínima baseado em uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de observações independentes da distribuição de X é $\delta(T)$, sendo $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \ldots, r-1, \\ \frac{A(t-r,n)}{A(t,n)}, & t = r, r+1, \ldots, \end{cases}$$

onde $A(t, n)$ é o coeficiente de θ^t na expansão em série de $[C(\theta)]^n$.

(b) Se $X_1, \ldots, X_n$ são observações independentes da distribuição de Poisson de média θ, $\theta > 0$, utilize o resultado em (b) para encontrar o ENVVUM de θ^r, r inteiro positivo.

(c) Mostre que a distribuição de Poisson truncada à direita em b ($b \geq 1$, inteiro) e parâmetro θ é um caso especial da distribuição de série de potências. (Se X tem distribuição de Poisson truncada à direita em b e parâmetro θ, então $P_\theta(X = x) = P_\theta(Y = x | Y \leq b)$, $x = 0, 1, \ldots, b$, onde Y tem distribuição de Poisson de parâmetro θ.

(d) Mostre que se X é uma única observação de uma distribuição de Poisson truncada à direita em b ($b \geq 1$, inteiro), então θ não é estimável (equivalente ao Exercício 4). Esta afirmação contradiz à do item (b)? Por que?

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Lista de Exercícios 3 – 2º semestre de 2015 – Prof. Silvia L.P. Ferrari

1. Considere a distribuição exponencial de média θ e fdp $f(x;\lambda) = (1/\lambda)\exp(-x/\lambda)$, para $x > 0$ e $=0$, caso contrário. Encontre uma função de θ que define uma nova parametrização $\theta = h(\lambda)$ de tal forma que a informação de Fisher seja constante.

2. Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade
$$f_\theta(x) = \mathrm{P}_\theta(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = 0, 1, \ldots; \tag{1}$$
$a(x) \geq 0$ e $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^+$; $C(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a(x)\theta^x < \infty$ (distribuição de série de potências). Considere uma **amostra de uma única observação** de X. Obs.: Quando necessário você pode fazer alguma suposição sobre o espaço paramétrico.

   (a) Obtenha o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de estimadores não viciados de θ^r, r inteiro positivo.

   (b) Mostre que se $a(x) > 0$ para todo $x = 0, 1, \ldots$, então θ^r é estimável para qualquer r inteiro positivo e seu estimador não viciado de variância uniformemente mínima (ENVVUM) é
$$\delta_r(X) = \begin{cases} 0, & X = 0, \ldots, r-1, \\ \frac{a(X-r)}{a(X)}, & X = r, r+1, \ldots. \end{cases}$$

   (c) Dizemos que X tem distribuição binomial negativa com parâmetros p e m ($0 < p < 1$, m inteiro positivo) se sua função de probabilidade é
$$P_{p,m}(X = x) = \binom{m+x-1}{m-1} p^m (1-p)^x, \ x = 0, 1, \ldots$$
e escrevemos $X \sim BN(p, m)$. Admitindo que m é conhecido, obtenha o ENVVUM de p baseado em uma única observação de $X \sim BN(\theta, m)$ usando (b).

   (d) Considere agora uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de observações independentes da distribuição (1). Mostre que se $a(x) > 0$ para todo $x = 0, 1, \ldots$, então θ^r é estimável para qualquer r inteiro positivo e encontre seu ENVVUM.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de uma distribuição geométrica de parâmetro θ ($0 < \theta < 1$) com função de probabilidade
$$P_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots;$$
$\mathrm{E}_\theta(X) = (1-\theta)/\theta$ e $\mathrm{var}_\theta(X) = (1-\theta)/\theta^2$.
Encontre o limite inferior de Cramér-Rao (LICR) para variância de estimadores não viesados de $\mathrm{E}_\theta(X)$ e mostre que coincide com a variância de $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$.

4. Seja X uma variável aleatória com distribuição geométrica e função de probabilidade $P_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^x$, $x = 0, 1, \ldots$. Qual é a menor variância possível para um estimador não viciado de θ? Compare essa variância com o limite inferior de Cramér-Rao.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição de Pareto $\mathrm{P}(a, c)$ com densidade
$$f(x) = \frac{ac^a}{x^{a+1}}, \quad 0 < c \leq x, \ a > 0.$$

Pasta 05

Nº cópias 05

$$E_\theta\left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log P_\theta(x)\right) = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)}$$

ulna

(a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para c quando a é conhecido e o de a quando c é conhecido.

(b) Encontre o EMV $(\widehat{a}, \widehat{c})$ para (a, c) quando a e c são desconhecidos.

(c) Mostre que $\widehat{a}$ e $\widehat{c}$ são independentes, $\widehat{c} \sim \mathrm{P}(na, c)$ e $2na/\widehat{a} \sim \chi^2_{2(n-1)}$.
Sugestão: Mostre que se $X_i \sim \mathrm{P}(a, c)$, então, $V_i = a(\log X_i - \log c) \sim \mathrm{E}(0, 1)$. Considere as variáveis aleatórias $(n - i + 1)[V_{(i)} - V_{(i-1)}]$, para $i = 2, \ldots, n$.

(d) Encontre o viés de $\widehat{c}$. Comente.

6. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias iid com distribuição $\mathcal{U}(0, \theta)$, $\theta > 0$.

(a) Mostre que
$$\frac{d}{d\theta} \int_0^\theta x f_\theta(x) dx \neq \int_0^\theta x \frac{d}{d\theta} f_\theta(x) dx,$$
em que f_θ é a densidade de $X_{(n)}$, a maior estatística de ordem.

(b) Mostre que a desigualdade da informação não vale para o ENVVUM de θ.

7. Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias iid com distribuição $\mathrm{N}(\zeta, 1)$ com $\zeta > 0$. Mostre que a estimativa de máxima verossimilhança de ζ é a média amostral quando esta é positiva e não existe quando é negativa.

8. Seja X variável aleatória tomando os valores 0 e 1 com probabilidades $1 - p$ e p respectivamente; $1/3 \leq p \leq 2/3$.

(a) Encontre o EMV de p.

(b) Mostre que o erro quadrático médio do EMV é uniformemente maior do que o de $\delta(X) = 1/2$.

9. Suponha que X seja uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros p e n sendo n um inteiro positivo (fixado) e p um parâmetro desconhecido, $1/3 < p < 2/3$. Discuta o problema de estimação por máxima verossimilhança de p.

10. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ amostra aleatória da variável aleatória X que tem função densidade de probabilidade
$$f(x; a, \theta) = \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} I_{(a,\infty)}(x),$$
em que $a \in (0, 1]$ e $\theta > 0$.

(a) Supondo a conhecido, encontre a informação de Fisher para θ.

(b) Mostre que o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de a, quando θ é conhecido, é
$$\widehat{a} = I_{(1,+\infty)}(X_{(1)}) + \left(1 - \frac{1}{n\theta}\right) X_{(1)} I_{[0,1)}(X_{(1)}),$$
em que $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
Sugestão: Mostre que $X_{(1)}$ é uma estatística suficiente e caracterize a classe de estimadores não viesados do zero, que sejam funções de $X_{(1)}$.

11. Provar a Desigualdade da Informação no caso uniparamétrico (Teorema 5.10, TPE).

12. Mostre que se $\mathrm{E}(\delta) = g(\theta)$ e $\mathrm{var}(\delta)$ atinge o limite da desigualdade da informação, então,
$$\delta(x) = g(\theta) \pm \frac{g'(\theta)}{I(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \log p_\theta(x).$$

13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli com parâmetro $\theta \in (0,1)$.

    (a) Encontre o ENVVUM de $g(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X_1 + \ldots + X_m = k)$, onde m e k são fixados, $0 < m < n$, $0 \leq k \leq m$.

    (b) Encontre o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de estimadores não viciados de $g(\theta) = \mathrm{P}_\theta(X_1 + \ldots + X_m = k)$,

14. Seja $\mathcal{F}$ a classe das densidades de parâmetro θ ($\theta > 0$) com média $1/\theta$ e variância $1/\theta^2$ e que satisfazem as condições para a validade da desigualdade da informação.

    (a) Mostre que uma densidade que minimiza a informação de Fisher para θ na classe $\mathcal{F}$ é $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$. Sugestão: use a desigualdade da informação.

    (b) Considere a distribuição $\mathrm{N}(1/\theta, 1/\theta^2)$ e encontre o LICR (limite inferior de Cramér-Rao para variâncias de estimadores não viciados de $g(\theta)$). Compare-o com o correspondente LICR para a distribuição exponencial.

15. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

    (a) Encontre a matriz de informação (total) para (μ, σ^2). Mostre que os parâmetros μ e σ^2 são globalmente ortogonais no sentido de que os elementos de fora da diagonal principal dessa matriz são nulos.

    (b) Obtenha a matriz de covariância de $(\overline{X}_n, S_n^2)$, onde $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ e $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$, e compare com o limite da desigualdade da informação.

16. Considere uma família de escala com densidade $(1/\theta) f(x/\theta)$, $x \in (-\infty, \infty)$; $\theta > 0$.

    (a) Faça suposições adequadas e mostre que a quantidade de informação que uma única observação X contém sobre θ é
    $$\frac{1}{\theta^2} \int \left[\frac{x f'(x)}{f(x)} + 1 \right]^2 f(x) dx$$
    e que a informação que X contém sobre $\zeta = \log \theta$ é independente de θ.

    (b) Encontre a informação que X contém sobre θ e $\zeta = \log \theta$ se $f(x) = \exp(-x)$ (distribuição exponencial).

17. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes tais que $Y_i \sim \mathrm{Poisson}(\exp\{\alpha + x_i \beta\})$, $i = 1, \ldots, n$, onde $\alpha \in I\!R$ e $\beta \in I\!R$ são parâmetros desconhecidos, x_i são constantes conhecidas, não todas nulas e não todas iguais. Obtenha a matriz de informação (total) de Fisher para (α, β) e o limite inferior de Cramér-Rao para estimadores não viciados de α e de β.

18. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual simples de $X \sim \mathrm{Poisson}(\theta)$, $\theta \in [0, +\infty)$.

    (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $\exp(-3\theta)$.

    (b) Faça $n = 1$ na parte (a). Encontre a variância do estimador e compare-a com o limite inferior de Cramér-Rao.

    (c) Compare o estimador obtido em (b) com o ENVVUM. Qual dos dois você recomenda? Justifique.

19. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual simples de $X \sim \mathrm{N}(\zeta, \sigma^2)$. Seja $\theta = (\zeta, \sigma^2)$.

(a) Mostre que o ENVVUM e o EMV de ζ^2 são, respectivamente, $\delta_{1n} = \overline{X}^2 - S^2/n$ e $\delta_{2n} = \overline{X}^2$, onde $\overline{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ e $S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.

(b) Obtenha o viés do EMV e mostre que este pode ser escrito como $B(\theta)/n$, onde $B(\theta)$ não depende de n.

20. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid com densidade na família exponencial unidimensional como definida na Lista 1.

    (a) Mostre que a equação de verossimilhança se reduz a $\mathrm{E}_\eta[T(X_j)] = n^{-1}\sum_{i=1}^n T(X_i)$.

    (b) Mostre que a equação acima tem, no máximo, uma solução.

21. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra casual simples de uma distribuição de Weibull com densidade $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\exp\{-x^\theta\}$, $x > 0$, $\theta > 0$. Obtenha a equação de verossimilhança e mostre que esta tem uma única solução.

22. Mostre que uma função u satisfaz

$$u(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = u(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n)$ e todo a, se e somente se é uma função das diferenças $y_i = x_i - x_n$, para $i = 1, \ldots, n-1$, se $n \geq 2$; se $n = 1$, se e somente se é uma constante.

23. Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de n variáveis aleatórias independentes cada qual com densidade $f(x - \xi)$, $\xi \in \mathcal{R}$, e $f(x) = \exp\{-(x+1)\}$, $x \geq -1$.

    (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\delta(X)$ de ξ e verifique que é equivariante.

    (b) Encontre a distribuição de $n(\delta(X) - \xi)$. Mostre que $\delta(X)$ é um estimador viciado de ξ e obtenha seu risco sob perda quadrática.

    (c) Obtenha o estimador de Pitman de ξ (estimador equivariante de risco mínimo sob perda quadrática). Mostre que é não viciado e calcule seu risco. Mostre que o estimador $\delta(X)$ é inadmissível.

24. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com $X \sim \mathrm{N}(\theta, 1)$ e Y com densidade $\exp\{-(y - \theta)\}$, para $y > \theta$ e $= 0$, caso contrário. Determine o estimador equivariante de risco mínimo de θ baseado em (X, Y) sob perda quadrática.

25. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n;\ \tau > 0,$$

em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\mathbf{X})$, tal que $\delta(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, é equivariante por escala se $\delta(b\mathbf{x}) = b^r\delta(\mathbf{x})$, para todo $b > 0$ e todo $x \in \mathcal{R}^n$. Considere a função de perda $L(\tau, d) = [(d - \tau^r)/\tau^r]^2$.

    (a) Mostre que o risco $R(\tau, \delta(\mathbf{X}))$ de qualquer estimador equivariante por escala $\delta(\mathbf{X})$ é constante.

    (b) Seja $\delta_0(\mathbf{X})$ um estimador equivariante por escala. Mostre que um estimador $\delta(\mathbf{X})$ é equivariante por escala se e somente se $\delta(\mathbf{x}) = \delta_0(\mathbf{x})/v(\mathbf{x})$, em que $v(\mathbf{x})$ é tal que

$$v(c\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) > 0, \text{ para todo } c > 0 \text{ e todo } \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n. \tag{3}$$

Mostre ainda que, se $x_n \neq 0$ e $n > 1$, uma condição necessária e suficiente para que $v(\mathbf{x})$ satisfaça (2) é que exista uma função $w(\mathbf{y})$ tal que $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y})$ em que $\mathbf{y} = (x_1/|x_n|, \ldots, x_n/|x_n|)$.

(c) Seja $\delta_0(\mathbf{X})$ um estimador equivariante de risco finito. Mostre que o estimador equivariante de risco mínimo de τ^r é dado por

$$\delta^*(\mathbf{X}) = \delta_0(\mathbf{X}) \frac{\mathrm{E}_1[\delta_0(\mathbf{X})|\mathbf{Y}]}{\mathrm{E}_1[\delta_0^2(\mathbf{X})|\mathbf{Y}]},$$

em que $\mathbf{Y} = (X_1/|X_n|, \ldots, X_n/|X_n|)$.

(d) Considere a situação em que $(X_1, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória da distribuição $\mathrm{N}(0, \tau^2)$, $\tau > 0$. Encontre o estimador equivariante de risco mínimo de τ^2. Sugestão: usar o Teorema de Basu.

26. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n;\ \tau > 0,$$

em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\mathbf{X})$ é equivariante por escala se $\delta(b\mathbf{X}) = b^r \delta(\mathbf{X})$, para todo $b > 0$. Pode-se mostrar que o estimador de Pitman de τ^r, dado por $\delta^*(\mathbf{X})$ sendo

$$\delta^*(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n) dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n) dv},$$

é um estimador equivariante por escala de risco mínimo sob perda $[(d - \tau^r)/\tau^r]^2$.

(a) Mostre que, de fato, o estimador $\delta^*(\mathbf{X})$ é equivariante por escala.

(b) Obtenha o estimador $\delta^*(\mathbf{X})$ de τ^r para a situação em que $\mathbf{X}$ é uma amostra aleatória da distribuição exponencial de média $\tau > 0$.

(c) No contexto do item (b), encontre o estimador não viesado de risco mínimo de τ^r considerando a perda dada acima.

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Lista de Exercícios 4 – 2º semestre de 2015 – Prof. Silvia L.P. Ferrari

1. Suponha que, dado θ ($\theta > 0$), $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $U(0, \theta)$, $\theta > 0$. Considere uma distribuição a priori Pareto(α, γ) para θ com densidade

$$p(\theta) = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad 0 < \gamma < \theta, \quad \alpha > 0.$$

Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

2. Admita que, dado θ, $X_1, \ldots, X_n$ sejam i.i.d. e tenham distribuição de potência com função densidade de probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x); \ \theta > 0.$$

Suponha que, a priori, θ tem distribuição exponencial de parâmetro γ e função densidade de probabilidade $p(\theta) = \gamma \exp(-\theta\gamma) I_{(0,+\infty)}(\theta)$, sendo $\gamma > 0$ conhecido. Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

(6) 3. Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma distribuição $N(0, \sigma^2)$. Considere o problema de estimar σ^2 com a função de perda $L(\sigma^2, d) = (d/\sigma^2 - 1)^2 = (d - \sigma^2)^2/\sigma^4$. Considere uma distribuição a priori Gama(a, b) para $\theta = 1/(2\sigma^2)$ com densidade

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} \theta^{a-1} \exp\left\{-\frac{\theta}{b}\right\}; \ a > 0, \ b > 0.$$

Encontre o estimador de Bayes de σ^2.

4. Seja X **uma única observação** de uma distribuição $\mathrm{N}(\theta, 1)$ e considere a seguinte densidade a priori imprópria para θ: $\pi(\theta) = \exp\{\theta\}$. Considere perda quadrática. Encontre o estimador de Bayes generalizado de θ e mostre que não é nem admissível nem minimax.

5. Prove: Se um estimador equivariante por locação de risco mínimo é admissível, então ele é minimax.

6. Seja X **uma única observação** de uma distribuição $\mathrm{U}(0, \theta)$ e considere a seguinte densidade a priori para θ: $\pi(\theta) = 1/(1+\theta)^2$, $\theta > 0$.

   (a) Mostre que a densidade marginal de X é $q(x) = \log[(1+x)/x] - 1/(1+x)$, $x > 0$.

   (b) Mostre que o estimador de Bayes ($\delta(X)$) de θ sob perda $L(\theta, d) = |d - \theta|$ é solução de $q(\delta(X)) = q(X)/2$.

7) 7. Dizemos que X tem distribuição binomial negativa com parâmetros p e m ($0 < p < 1$, m inteiro positivo) se sua função de probabilidade é

$$P_{p,m}(X = x) = \binom{m+x-1}{m-1} p^m (1-p)^x, \ x = 0, 1, \ldots$$

e escrevemos $X \sim BN(p, m)$. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim BN(p, m)$ e admita que m é conhecido. Considere uma distribuição a priori Beta(α, β) para p. Encontre o estimador de Bayes de p sob perda quadrática.

(2) 8. Seja X **única observação** de uma variável aleatória com densidade $f(x;\theta) = 2x/\theta^2$, $0 < x < \theta$; $\theta > 0$. Considere para θ uma distribuição uniforme no intervalo unitário.

(a) Obtenha a função densidade de probabilidade a posteriori de θ.

(b) Encontre o estimador de Bayes com respeito à perda $\theta^2(d-\theta)^2$.

9. Seja $\widehat{\theta}$ um estimador não viciado de um parâmetro $\theta \in \mathcal{R}$. Seja $R(\theta, \widetilde{\theta})$ o risco do estimador $\widetilde{\theta}$ de θ.

(a) Sob perda quadrática, mostre que o estimador $\widehat{\theta} + c$, em que $c \neq 0$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \widetilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\widetilde{\theta}$ de θ. $\widetilde{\theta} = \widehat{\theta} + c$

(b) Sob perda quadrática, mostre que o estimador $c\widehat{\theta}$, em que $c \in (0,1)$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \widetilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\widetilde{\theta}$ de θ.

(c) Considere a função de perda $L(\theta, d) = (d-\theta)^2/\theta^2$, assumindo que $\theta \neq 0$. Mostre que o estimador $\widehat{\theta}$ não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \widetilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\widetilde{\theta}$ de θ. **Sugestão**: Obtenha o risco de $c\widehat{\theta}$ com $c = 1/(1+\zeta)$, em que $\zeta = \sup_\theta R(\theta, \widehat{\theta})$, e compare com o risco de $\widehat{\theta}$.

(3) 10. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuições P_ζ e Q_η respectivamente. Suponha que ζ e η são consideradas variáveis aleatórias independentes, reais, com distribuições Λ e Λ' respectivamente. Se, com perda quadrática, δ_Λ é o estimador de Bayes de ζ com base em X e $\delta_{\Lambda'}$ é o estimador de Bayes de η com base em Y,

(a) mostre que $\delta_{\Lambda'} - \delta_\Lambda$ é o estimador de Bayes de $\eta - \zeta$ com base em (X, Y).

(b) Se $\eta > 0$ e $\delta^*_{\Lambda'}$ é o estimador de Bayes de $1/\eta$ com base em Y, mostre que $\delta_\Lambda \cdot \delta^*_{\Lambda'}$ é o estimador de Bayes de ζ/η com base em (X, Y).

(4) 11. Seja X uma variável aleatória representando o tempo de vida de um sistema eletrônico, com função distribuição acumulada $F_\theta(x)$, $\theta \in \Omega$. Defina a confiabilidade do sistema por

$$R_\theta(\tau) = \mathrm{P}_\theta(X > \tau) = 1 - F_\theta(\tau), \ \tau > 0.$$

Considere n observações independentes $X_1, \ldots, X_n$ de X. Admita que, dado θ, X tem distribuição exponencial de parâmetro θ e função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x), \ x > 0; \ \theta > 0.$$

(a) Mostre que, neste caso, $R_\theta(\tau) = \exp\{-\tau\theta\}$.

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $R_\theta(\tau)$.

(c) Encontre o ENVVUM de $R_\theta(\tau)$.

(d) Mostre que o estimador de Bayes de $R_\theta(\tau)$ sob perda quadrática e função densidade a priori para θ

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\gamma^\nu \Gamma(\nu)} \theta^{\nu-1} \exp(-\theta/\gamma), \ \theta > 0,$$

é dado por

$$\left(1 + \frac{\tau}{\sum_{i=1}^n X_i + 1/\gamma}\right)^{-(n+\nu)}.$$

(8) 12. Suponha que X tenha distribuição binomial $b(\theta, n)$. Considere uma distribuição a priori $\mathrm{Beta}(a, b)$ com $a = b = 0$ (priori imprópria) e a perda quadrática. Considere estimadores δ que satisfazem $\delta(0) = 0$ e $\delta(n) = 1$. Mostre que o risco a posteriori é minimizado em $\delta(x) = x/n$. [Ver Exemplo 2.8, p. 238-239, TPE].

(9) 13. Suponha que, dados θ e σ^2, $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$. Admita que, a priori, $\tau = 1/(2\sigma^2)$ tem distribuição $\mathrm{Gama}(g, 1/\alpha)$ e θ, independente de τ, tem distribuição uniforme (imprópria) na reta.

(a) Mostre que a densidade conjunta a posteriori é proporcional a $\tau^{r+g-1}e^{-\tau[\alpha+z+n(\bar{x}-\theta)^2]}$ onde $z = \sum(x_i - \bar{x})^2$ e $r = n/2$.

(b) Mostre que distribuição a posteriori de τ é $\mathrm{Gama}(r + g - 1/2, 1/(\alpha + z))$.

(c) Mostre que se $\alpha = g = 0$, o estimador de Bayes (generalizado) de σ^2 é $Z/(n-3)$ para perda quadrática. Para a perda $(d - \sigma^2)^2/\sigma^4$, este estimador é $Z/(n+1)$.

(d) Mostre que a densidade a posteriori de θ é simétrica em relação a $\overline{X}$ e que o estimador de Bayes (generalizado) é $\overline{X}$.

(11) 14. Suponha que X tem distribuição $b(p, n)$ e considere o problema de estimar p com perda $(d-p)^2/[(p(1-p)]$. Obtenha o estimador minimax.

15. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli(p). Considere o problema de estimar p com perda quadrática. Mostre que $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ não é estimador mininax de p comparando seu risco com o do estimador aleatorizado $T(\mathbf{X})$ que é igual a $\overline{X}$ com probabilidade $n/(n+1)$ e $1/2$ com probabilidade $1/(n+1)$.

16. Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ amostras aleatórias independentes das distribuições $\mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $\mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente; aqui $\mu_x \in \mathcal{R}$, $\mu_y \in \mathcal{R}$, $\sigma_x^2 > 0$ e $\sigma_y^2 > 0$. Considere o problema de estimar $\Delta = \mu_y - \mu_x$ sob perda quadrática.

(a) Mostre que $\overline{Y} - \overline{X}$ é estimador minimax de Δ quando σ_x e σ_y são conhecidos; $\overline{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$ e $\overline{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(b) Mostre que $\overline{Y} - \overline{X}$ é estimador minimax de Δ quando $\sigma_x^2 \leq M_x$ e $\sigma_y^2 \leq M_y$, sendo $M_x > 0$ e $M_y > 0$ constantes conhecidas.

Sugestão: Use o seguinte resultado: Se, dado ξ, $Z_1, \ldots, Z_n$ são independentes e têm distribuição $\mathrm{N}(\xi, \sigma^2)$, e se a distribuição a priori para ξ é $\mathrm{N}(\zeta, b^2)$, então a distribuição a posteriori de ξ, dado que $Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n$, é normal de média $(n\bar{z}/\sigma^2 + \zeta/b^2)/(n/\sigma^2 + 1/b^2)$ e variância $(n/\sigma^2 + 1/b^2)^{-1}$, onde $\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i/n$.

17. Prove: Seja δ um estimador de Bayes (respectivamente NVVUM, minimax, admissível) de $g(\theta)$ sob perda quadrática. Então, $a\delta + b$ é um estimador de Bayes (respectivamente NVVUM, minimax, admissível) de $ag(\theta) + b$. Aqui, a e b são números reais.

Pasta 05 15/10

Nº cópias 03

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Lista de Exercícios 5 – 2º semestre de 2015 – Prof. Silvia Ferrari

1. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \theta^{-c} c x^{c-1} \exp\{-(x/\theta)^c\},\ x > 0;\ \theta > 0,\ c > 0;$$

em que c é conhecido.

   (a) Obtenha o teste uniformemente mais poderoso de $\mathrm{H}: \theta \le \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$ de nível α.

   (b) Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

   (c) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}': \theta \neq \theta_0$ de nível α.

   (d) Obtenha uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de uma estatística suficiente minimal e determine um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1,\ \theta > 0.$$

   (a) Obtenha um teste UMP de $\mathrm{H}_0: \theta \le \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $\mathrm{H}_1: \theta > \theta_0$ de nível α.

   (b) Obtenha um teste UMP de $\mathrm{H}_0: \theta \ge \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $\mathrm{H}_1: \theta < \theta_0$ de nível α.

   (c) Existe teste UMP de $\mathrm{H}_0: \theta = \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $\mathrm{H}_1: \theta \neq \theta_0$ de nível α? Justifique.

   (d) Encontre o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H}_0: \theta = \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $\mathrm{H}_1: \theta \neq \theta_0$ de nível α.

   (e) Encontre um limite inferior de confiança mais acurado com coeficente de confiança $1-\alpha$.

   (f) Encontre um limite superior de confiança mais acurado com coeficente de confiança $1-\alpha$.

   (g) Determine uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de uma estatística suficiente minimal e encontre um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

   (h) Suponha que, a priori, θ tem distribuição exponencial de parâmetro γ e função densidade de probabilidade $p(\theta) = \gamma \exp(-\theta\gamma) I_{(0,+\infty)}(\theta)$, sendo $\gamma > 0$ conhecido. Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

3. Considere uma família de locação com densidades $f_\theta(x) = g(x-\theta)$. Mostre que se g é duas vezes diferenciável e $d^2 \log g(x)/dx^2 \le 0$, para todo x, então as densidades têm razão de verossimilhanças monótona em x.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, 1)$. Considere o teste de $\mathrm{H}_0: \mu = 0$ versus $\mathrm{H}_1: \mu > 0$ que rejeita H_0 quando $\overline{X}_n > c$, onde $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. Qual deve ser o valor de c e o tamanho da amostra para que o teste tenha nível 0.05 e poder 0.99 quando $\mu = 1$?

5. Sejam X_i variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(d_i\theta, 1)$, $d_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Encontre um teste UMP de $\mathrm{H}: \theta \le \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$ de nível α.

6. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $U(0, \theta)$.

   (a) Mostre que, para testar $\mathrm{H}: \theta \le \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$, qualquer teste para o qual $\mathrm{E}_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha$, $\mathrm{E}_\theta(\phi(X)) \le \alpha$, para $\theta \le \theta_0$, e $\phi(x) = 1$ quando $\max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0$, é UMP de nível α. Sugestão: Use o Lema de Neyman Pearson, com $k = (\theta_0/\theta_1)^n$.

(b) Mostre que, para testar $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta \neq \theta_0$, o teste $\phi(x) = 1$ quando $\max(x_1, \ldots, x_n) > \theta_0$ ou $\max(x_1, \ldots, x_n) \leq \theta_0 \alpha^{1/n}$ e $\phi(x) = 0$, caso contrário, é UMP.
Sugestão: Considere separadamente 3 situações: (i) $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}_1: \theta = \theta_1 > \theta_0$; (ii) $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}_2: \theta = \theta_1$, $\theta_0\alpha^{1/n} < \theta_1 < \theta_0$; (iii) $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}_3: \theta = \theta_1 \leq \theta_0\alpha^{1/n}$.

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição de Pareto(β, γ) com densidade

$$f(x) = \frac{\beta\gamma^\beta}{x^{\beta+1}}, \quad 0 < \gamma < x, \quad \beta > 0.$$

Admita que γ é conhecido.

(a) Mostre que $Q = 2\sum \beta \log(X_i/\gamma) \sim \chi^2_{2n}$ e é, portanto, uma quantidade pivotal. Construa um intervalo de confiança para β com coeficiente de confiança $1-\alpha$ baseado em Q.

(b) Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para β com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(c) Obtenha o teste uniformemente mais poderoso de $\mathrm{H}: \beta \leq \beta_0$ contra $\mathrm{H}: \beta > \beta_0$ $(\beta_0 > 0)$ de nível $\alpha \in (0,1)$.

(d) Agora admita γ **é desconhecido** e β **é conhecido**. Encontre um teste mais poderoso de $\mathrm{H}: \gamma = \gamma_0$ contra $\mathrm{K}: \gamma = \gamma_1$, em que $\gamma_1 > \gamma_0$, de nível α.

8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tais que X_i tem distribuição exponencial de **média** $(\lambda\beta^i)^{-1}$; $\lambda > 0$, $\beta > 0$. Suponha que β é **conhecido**.

(a) Encontre um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado para λ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(b) Mostre que $\lambda \sum X_i \beta^i$ é uma quantidade pivotal.

(c) Construa um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança γ baseado na quantidade pivotal dada em (b).

(d) Suponha que, a priori, λ tem distribuição gama de parâmetros $a > 0$ e $b > 0$, e função densidade de probabilidade

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp\{-\frac{\lambda}{b}\}, \ \lambda > 0.$$

Encontre o estimador de Bayes de λ sob perda quadrática.

(e) No contexto do item (b), suponha que a é inteiro ($a \geq 1$) e obtenha um intervalo de credibilidade para λ da forma $(\widetilde{\lambda}, +\infty)$ com probabilidade $1-\alpha$.

9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathrm{U}(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$.

(a) Considere o teste ϕ tal que $\phi(x_1, \ldots, x_n) = 1$, se $\max(|x_1|, \ldots, |x_n|) > \theta_0$ e $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$, caso contrário. Mostre que ϕ é uniformemente mais poderoso (UMP) de nível α para testar $\mathrm{H}: \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$. Este teste é UMP para testar $\mathrm{H}^*: \theta \leq \theta_0$ contra $\mathrm{K}: \theta > \theta_0$? Justifique.

(b) Encontre a função de poder do teste ϕ.

10. Considere uma **única observação** de uma variável aleatória X.

(a) Use o Lema de Neyman-Pearson para encontar o teste mais poderoso de nível α de $\mathrm{H}: X \sim \mathrm{U}(0,1)$ contra $\mathrm{K}: X \sim \mathrm{Beta}(1, b)$, sendo $b > 1$ fixado. Se $\alpha = 0,05$ e se foi observado $x = 0,1$, qual é sua decisão? Qual é o nível descritivo (*p-value*) do teste?

(b) O teste obtido em (a) é uniformemente mais poderoso de $H : X \sim \mathrm{U}(0,1)$ contra $K' : X \sim \mathrm{Beta}(1,b)$, $b > 1$? Justifique.

(c) Existe teste uniformemente mais poderoso de $H : X \sim \mathrm{U}(0,1)$, contra $K'' : X \sim \mathrm{Beta}(1,b)$, $b \neq 1$? Justifique.

11. Seja X distribuída de acordo com P_θ, $\theta \in \Omega$, e seja T uma estatística suficiente para θ. Mostre que, se $\phi(X)$ é qualquer teste de hipótese sobre θ, então $\psi(T)$ dado por $\psi(t) = \mathrm{E}(\phi(X)|T = t)$ é um teste que depende apenas de T e sua função de poder é idêntica à de $\phi(X)$.

12. Sejam $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ observações independentes de distribuições normais de média μ_i e variância σ_i^2 para $i = 1, 2$; $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{R}$, $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$.

(a) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ versus $\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ de nível α $(0 < \alpha < 1)$ supondo que σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidos.

(b) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ versus $\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ de nível α.

(c) Suponha agora que as variâncias são desconhecidas mas iguais (isto é, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) e refaça a parte (a).

13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ amostras aleatórias de distribuições exponenciais de médias $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ respectivamente. Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $\mathrm{H}_0 : \mu = \lambda$ versus $\mathrm{H}_1 : \mu \neq \lambda$ de nível α $(0 < \alpha < 1)$.

$\hat{\lambda} = \bar{Y}$, $\hat{\mu} = \bar{X}$ $\quad \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$

$\lambda = \mu = \theta \quad \hat{\theta} = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$

Seja $\mathcal{D}_b(X) = \{ f_b : f$ é uma possível f.d. para a v.a $X \}$

Uma vez que $\mathcal{D}_b(X)$ é família de escalas, por definição, $\exists$ V.a. U com dada f.d. F t.q.

Estatística Avançada I,

$X = b \cdot U$, $b > 0$

Lista 1, 39 exercícios

o que garante que

1. Se a família de (possíveis) distribuições de uma v.a. X é uma família de escala, mostre que a família de (possíveis) distribuições de $\log X$ é uma família de locação.

Por definição, $\exists$ uma v.a. U com função distribuição F tal que

$$X = U \times b, \quad b > 0;$$

o que garante $P_X(X \leq x) = F(x/b)$, que para F fixo e $b > 0$ constitue uma família de ~~locação~~ escala.

Daí,

$$\log X = \log U + \log b \quad \cancel{\log U + (+\log b)}$$

Como $b > 0$, $+\log b \in \mathbb{R}$, o que faz com que

$$P(\log X \leq x) = P(\log U + \log b \leq x) =$$
$$= P(\log U \leq x - \log b) = F_U(x - \log b)$$

que por definição, constitui uma família de ~~locação~~ locação.

2. Seja U uma v.a. pos. e $X = bU^{1/c}$, $b > 0$ e $c > 0$.

a) Mostre que isso define uma família de grupo.

Por def., uma "família do grupo" de dist. é uma família obtida submetendo uma v.a. com uma dada dist. a um grupo de transformações.

No nosso caso, a v.a. em questão é dada por U.

Agora, basta mostrar que $X = bU^{1/c}$, $b>0, c>0$ é obtida a partir de U por meio de um grupo de transf. Para tal, considere a transformação

$$g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \qquad , b>0, c>0$$
$$u \mapsto g(u) = b\,u^{1/c}$$

Note que $X = g(U)$. Ademais, a coleção de todas as g's - $\mathcal{J}$ - constitui um grupo de transf., já que

- $g_1 \in \mathcal{J}$, $g_2 \in \mathcal{J}$, então

$$g_1 = b_1 u^{1/c_1}, \quad g_2 = b_2 u^{1/c_2} \Rightarrow$$

$g \circ f(x) :=$ $g(f(x))$

$$g_2 \circ g_1 = g_2(b_1 u^{1/c_1}) = b_2 (b_1 u^{1/c_1})^{1/c_2}$$
$$= \underbrace{b_2 b_1^{1/c_2}} u^{\frac{1}{c_1 c_2}}$$
$$= b_3 u^{1/c_3} \in \mathcal{J}$$

- Se $g \in \mathcal{J}$, i.e.

$$g = b u^{1/c}, \quad b>0, c>0,$$

então

$$g^{-1} = \left(\frac{u}{b}\right)^c = \left(\frac{1}{b}\right)^c u^c = b' u^{1/c'}, \quad b'>0, c'>0$$

de modo que $g^{-1} \in \mathcal{J}$.

b) Mostre que se $U \sim exp(1)$, então $X \sim$ Weibull com dens.

$$\frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-(x/b)^c}, \quad x>0$$

Se $U \sim exp(1)$, então $F(u) = 1 - e^{-u}$, $u>0$.
Assim,

b

$$P(X \leq x) = P(b\,U^{1/c} \leq x) =$$
$$= P(U^{1/c} \leq x/b)$$
$$= P(U \leq (x/b)^c).$$

Daí,

$$f_X(x) = f_U((x/b)^c)\,\frac{c}{b}\,x^{c-1}$$
$$= e^{-(x/b)^c}\,\frac{c}{b}\,x^{c-1}, \quad b>0 \text{ e } c>0$$

5. A partir das prop. da fam. exponencial (1) encontre as funções geradoras de momentos e de cumulantes, a média e o segundo, o terceiro e o quarto momento central das seg. distribuições.

• Gama (a,b); • Binomial (p,n); Poisson (λ) e Binomial Negativa (p,m).

De antemão, sabemos que cada uma das dadas acima pertencem à fam. exponencial. A fim de tornar a resolução mais completa, vamos encontrar a forma canônica para cada uma delas. A partir daí, usaremos resultado visto em aula para determinar as respectivas funções geradoras de momentos e de cumulantes, possibilitando assim a determinação da média e dos 2°, 3° e 4° mom. centrais.

• Gama (a,b). Dizemos que $X \sim$ Gama (a,b) se

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\,x^{a-1}\,e^{-bx}, \quad x>0$$
$$= \frac{1}{x}\exp\{-bx + a\log x + a\log b - \log\Gamma(a)\}$$

1 Uma vez que estamos interessados em obter a função geradora e cumulantes de $T(X) = X$, vamos considerar a fixo.

Nessas condições,

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-bx + a\log b} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad , \quad b > 0$$

Tomando $h(x) = x^{a-1}/\Gamma(a)$, $\eta = -b$, $T(x) = x$ e $A(\eta) = -a\log(-\eta)$, temos que

$$f_X(x) = h(x)\, e^{\eta T(x) - A(\eta)}$$

Daí,

$$\begin{aligned} K_X(w) &= A(\eta + w) - A(\eta) \\ &= -a\log(-\eta - w) + a\log(-\eta) \\ &= -a\log(b - w) + a\log(b) \\ &= -a\log\frac{b-w}{b} \\ &= \log\left(1 - \frac{w}{b}\right)^{-a} \quad , \quad 1 - \frac{w}{b} > 0 \Leftrightarrow w < b \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M_X(w) = \left(1 - \frac{w}{b}\right)^{-a} = \left(\frac{b}{b-w}\right)^{a} \quad , \quad w < b$$

Média: $$\frac{d}{dw} M_X(w)\Big|_{w=0} = a\left(\frac{b}{b-w}\right)^{a-1}\left(\frac{1}{(b-w)^2}\right)\Big|_{w=0} = \frac{a}{b^2}$$

Ademais, $$\frac{d}{dw^2} M_X(w)\Big|_{w=0} = a(a-1)\left(\frac{b}{b-w}\right)^{a-2}\left(\frac{1}{(b-w)^2}\right) + a\left(\frac{b}{b-w}\right)^{a-1}\left(\frac{2(b-w)}{(b-w)^4}\right)\Big|_{w=0}$$

1 . Binomial (p, n) , n fixo

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x},$$

$$= \binom{n}{x} e^{x \log p + (n-x)\log(1-p)}$$

$$= \binom{n}{x} e^{x(\log p - \log(1-p)) + n \log(1-p)}$$

$$= \binom{n}{x} e^{x \log\frac{p}{1-p} + n\log(1-p)}$$

$$\eta = \log p - \log(1-p)$$

$$\frac{p}{1-p} = e^{\eta}$$

$h(x) = \binom{n}{x}$, $\eta = \log\frac{p}{1-p}$ $\Rightarrow$ $\log(1-p) = -\log(1+e^{\eta})$, $T(x) = x$

$$p = (1-p)e^{\eta}$$

$$p + pe^{\eta} = e^{\eta}$$

$$p = \frac{e^{\eta}}{1+e^{\eta}}$$

$A(\eta) = n \log(1+e^{\eta})$, segue

$$P(X=x) = h(x)\, e^{T(x)\eta - A(\eta)}$$

$\therefore$

$$K_X(w) = A(\eta+w) - A(\eta)$$

$$= n\log(1+e^{\eta+w}) - n\log(1+e^{\eta})$$

$$= n \log\left(\frac{1+e^{\eta+w}}{1+e^{\eta}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1+e^{w}e^{\eta}}{1+e^{\eta}}\right)^{n}$$

$$= \log\left(\frac{1+pe^{w}/(1-p)}{1+p/(1-p)}\right)^{n} = \log\left(\frac{1-p+pe^{w}}{(1-p)+p}\right)^{n}$$

$$= \log(1-p+pe^{w})^{n}, \quad w>0$$

Daí,

$$M_X(w) = (1-p+pe^{w})^{n}, \quad w \in \mathbb{R}$$

c

7 . Poisson

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , \lambda > 0$$

$\therefore$

$$f_X(x) = \underbrace{\frac{1}{x!}}_{h(x)} e^{\overbrace{x}^{T(x)} \underbrace{\log\lambda}_{\eta} - \underbrace{\lambda}_{B(\lambda) \Rightarrow A(\eta) = e^{\eta}}} \quad , \lambda > 0$$

Daí,

$$\begin{aligned} K_X(w) &= A(\eta + w) - A(\eta) \\ &= e^{\eta + w} - e^{\eta} \\ &= e^{\eta}(e^{w} - 1) \\ &= \lambda(e^{w} - 1) \end{aligned}$$

e

$$M_X(w) = e^{K_X(w)} = e^{\lambda(e^{w} - 1)}$$

• Binomial Negativa (p, m) . m fixo

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{m + x - 1}{m - 1} p^m q^x \\ &= h(x)\, e^{\underbrace{m \log p}_{-m\log(1-e^{\eta}) = A(\eta)} + x \underbrace{\log(1-p)}_{\eta \Rightarrow p = 1 - e^{\eta}}} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} K_X(w) &= A(\eta + w) - A(\eta) \\ &= -m \log(1 - e^{\eta + w}) + m \log(1 - e^{\eta}) \\ &= -m \log\left(\frac{1 - e^{\eta + w}}{1 - e^{\eta}}\right) \\ &= \log\left(\frac{1 - e^{w} e^{\eta}}{1 - e^{\eta}}\right)^{-m} = \log\left(\frac{1 - (1-p)e^{w}}{p}\right)^{-m} \end{aligned}$$

f

23/08/2010

6. Seja $T(X) = (T_1(X), \ldots, T_s(X))'$ e considere a densidade (1).

a) Para $s=1$, mostre que $E_\theta[T(X)] = \dfrac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}$ e $var_\theta[T(X)] = \dfrac{B''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \dfrac{\eta''(\theta)B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3}$

$$p_\theta(x) = \exp\left[\sum_{i=1}^{s} \eta_i(\theta) T_i(x) - B(\theta)\right] h(x)$$

Para $s=1$,

$$p_\theta(x) = \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x)$$

Como $p_\theta(x)$ é uma densidade, tem-se que:

¿

teorema da convergência dominada

$$\int_{\mathcal{X}} \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x) = 1$$ $\mathcal{X}$ é espaço amostral

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int_{\mathcal{X}} \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x) = \frac{\partial}{\partial\theta} 1$$

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x) = 0$$

$$\int_{\mathcal{X}} \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \cdot [\eta'(\theta) T(x) - B'(\theta)] \, d\mu(x) = 0$$

$$\int_{\mathcal{X}} \eta'(\theta) T(x) \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x) - \int_{\mathcal{X}} B'(\theta) \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x) = 0$$

$$\eta'(\theta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x)}_{E_\theta(T(X))} = B'(\theta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}} \exp[\eta(\theta) T(x) - B(\theta)] h(x) \, d\mu(x)}_{1}$$

$$\eta'(\theta) \cdot E_\theta(T(X)) = B'(\theta) \cdot 1$$

$$\boxed{E_\theta[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}}$$

23/08/2010

$$E_\theta[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}$$

$$\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x)\, d\mu(x) = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x)\, d\mu(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}$$

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta} T(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x)\, d\mu(x) = \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x) \cdot [\eta'(\theta)T(x) - B'(\theta)]\, d\mu(x) = \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$\eta'(\theta)\int_{\mathcal{X}} [T(x)]^2 \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x)\, d\mu(x) - B'(\theta)\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]\, h(x)\, d\mu(x$$

$$= \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$\eta'(\theta)\, E[[T(X)]^2] - B'(\theta)\, E[T(X)] = \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$\eta'(\theta)\, E[(T(X))^2] - B'(\theta)\cdot\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} = \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$E[[T(X)]^2] = \frac{1}{\eta'(\theta)}\left[\frac{[B'(\theta)]^2}{\eta'(\theta)} + \frac{B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\eta'(\theta)}\left[\frac{\eta'(\theta)[B'(\theta)]^2 + B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}\right]$$

$$Var(T(X)) = E[[T(X)]^2] - [E\,T(X)]^2 = \frac{\eta'(\theta)[B'(\theta)]^2 + B''(\theta)\eta'(\theta) - B'(\theta)\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3} - \frac{[B'(\theta)]^2}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$\boxed{Var(T(X)) = \frac{B''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \frac{\eta''(\theta)B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3}}$$

28 / 08 / 2020

b) Para $s>1$, mostre que $E_\theta[T(X)] = J^{-1}\nabla B$, onde J é a matriz Jacobiana definida por $J = \left\{\frac{\partial \eta_j}{\partial \theta_i}\right\}$ e ∇B é o vetor gradiente $\nabla B = \left\{\frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_i}\right\}$

$$E_\theta[T(X)] = E\begin{bmatrix} T(X_1) \\ T(X_2) \\ \vdots \\ T(X_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(T(X_1)) \\ E(T(X_2)) \\ \vdots \\ E(T(X_n)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B'(\theta_1)}{\eta'(\theta_1)} \\ \frac{B'(\theta_2)}{\eta'(\theta_2)} \\ \vdots \\ \frac{B'(\theta_n)}{\eta'(\theta_n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta(\theta_1)}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta(\theta_1)} \\ \frac{\partial \beta(\theta_2)}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta(\theta_2)} \\ \vdots \\ \frac{\partial \beta(\theta_n)}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \theta_n}{\partial \eta(\theta_n)} \end{bmatrix}_{s\times 1} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta(\theta_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta(\theta_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \frac{\partial \theta_n}{\partial \eta(\theta_n)} \end{bmatrix}}_{s\times s} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta(\theta_1)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \beta(\theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \beta(\theta_n)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}}_{s\times 1} = J^{-1}\nabla B$$

$n = s$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$

$$M_X(u) = \left(\frac{1-(1-p)e^u}{p} \right)^{-m}$$

7. Considere a dist. da série de potências com função de prob.

$$f_\theta(x) = P_\theta(X=x) = \frac{a(x)\,\theta^x}{C(\theta)}, \quad x=0,1,\ldots;\ a(x)\geq 0,\ \theta > 0.$$

a) Mostre que essa dist. faz parte da fam. expon. unidimensional.

$$f_\theta(x) = a(x)\, e^{x \underbrace{\log\theta}_{\eta} - \overbrace{\log C(\theta)}^{A(\eta) = \log C(e^\eta)}} \quad \theta = e^\eta$$

b) Mostre que sua f. geradora é $M_X(u) = C$

$$\begin{aligned} K_X(u) &= A(\eta+u) - A(\eta) \\ &= \log C(e^{\eta+u}) - \log C(e^\eta) \\ &= \log \frac{C(e^{\eta+u})}{C(e^\eta)} = \log \frac{C(e^u \cdot \theta)}{C(\theta)} \end{aligned}$$

$$M_X(u) = \frac{C(\theta e^u)}{C(\theta)} \qquad \left(\frac{p}{\theta e^u}\right)^n \cdot \frac{\theta^n}{p^n} =$$

c) Binomial ~~for Cosn~~ $\quad M_X(u)$ $(1-p+pe^u)^n \quad \rightarrow \theta = \frac{p}{1-p},\ C(\theta) = (p/\theta)^n$

Binomial Negativa $\quad e^{\lambda(e^u-1)} \quad \rightarrow$

Poisson $\quad \left(\frac{p}{1-qe^u}\right)^m \quad \rightarrow$

7 d)

· Mesmas cond.,

$$M_X(w) = \frac{\cancel{+}\log(1-\theta e^{w})}{\cancel{+}\log(1-\theta)} = \frac{\log(1-\theta e^{w})}{\log(1-\theta)},$$

Daí,

$$E(X) = \frac{d}{dw} M_X(w) \Big|_{w=0} = -\frac{\theta e^{w}}{(1-\theta e^{w})\log(1-\theta)} \Big|_{w=0}$$

$$= \frac{\theta}{(1-\theta)\log(1-\theta)}$$

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dw^2} M_X(w) = \frac{-\theta e^{w}(1-\theta e^{w}) + \theta^2 e^{2w}\log(1-\theta)}{(1-\theta e^{w})^2\log(1-\theta)} \Big|_{w=0}$$

$$= \frac{-\theta(1-\theta) + \theta^2}{(1-\theta)^2\log(1-\theta)} =$$

$$= \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2\log(1-\theta)} - \frac{\theta}{(1-\theta)\log(1-\theta)}$$

$*$

Daí, $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = * - \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2(\log(1-\theta))^2}$

$$= \frac{1}{\log(1-\theta)}\left[\frac{\theta^2}{(1-\theta)^2}\left(1 - \frac{1}{\log(1-\theta)}\right) - \frac{\theta}{(1-\theta)}\right]$$

$$= \frac{\theta}{(1-\theta)\log(1-\theta)}\left[\frac{\theta}{1-\theta}\left(1 - \frac{1}{\log(1-\theta)}\right) - 1\right]_{h}$$

4.

$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Δ

$$e^{\left(\log \frac{1}{x}\right)} = e^{\log x^{-1}} = e^{-\log x}$$

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{s} \eta_i(\theta)\, T_i(x) - B(\theta) - \boxed{\log P_\theta(A)}\right\}$$

$\eta_{s+1}(\theta)\, T(x)$

$$P_\theta(A) = \int p_\theta(x)\, \mathbb{1}_A(x)\, dx$$

Uma vez que A é fixo

6. $X_i \sim \mathrm{Pois}(e^{\alpha+\beta t_i})$, $t_1, \dots, t_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\quad X \in \mathcal{X}^n$

$P(x_1, \dots, x_n \mid \lambda)$

8. $P(Y \leq y) = P(c \log X \leq y) = P(X \leq e^{y/c})$

$$f_Y(y) = f_X(e^{y/c})\, \frac{e^{y/c}}{c}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

$\log e^{y/c}\, \frac{1}{\beta}$

$$= \frac{e^{y/c}}{\Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha}\, c}\, e^{(\alpha-1)\frac{y}{c}}\, e^{-e^{y/c}/\beta}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

$e^{\frac{y}{c}} + \log \beta$

$c \in \mathbb{R}^*_+$,

$$\overset{c \text{ fixo}}{=} h(x)\, e^{\left\{-e^{y/c}\frac{1}{\beta} - \alpha \log \beta\right\}}$$

Há que supor c fixo!

$$\overset{c \text{ desc.}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{\left\{-e^{y/c}\frac{1}{\beta} + (\alpha-1)\frac{y}{c} - \alpha \log \beta\right\}}$$

11.

$$X = \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$$

$$Y \sim \text{Beta}\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi}, \frac{1}{2} - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad |\theta| \leq \pi$$

$$\frac{d}{dx} P(X \leq x) = P\left(\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \leq x\right) =$$

$$= P\left(\log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \leq \pi x\right)$$

$$= P\left(\frac{Y}{1-Y} \leq e^{\pi x}\right)$$

$$= \cancel{P\left(\frac{\frac{e^w}{1+e^w}}{\frac{1+e^w - e^w}{1+e^w}} \leq e^{\pi x}\right)}$$

$$= \cancel{P\left(e^w \leq e^{\pi x}\right)}$$

$$= \cancel{P(w \leq}$$

$$= P\left(Y \leq e^{\pi x}(1-Y)\right)$$

$$= P\left(Y \leq \frac{e^{\pi x}}{1+e^{\pi x}}\right)$$

$$\log \frac{Y}{1-Y} = W$$

$$\frac{Y}{1-Y} = e^W$$

$$Y = e^W - Ye^W$$

$$Y(1+e^W) = e^W$$

$$= \frac{e^W}{1+e^W}$$

$\downarrow$

$$f_X(x) = f_Y\left(\frac{e^{\pi x}}{1+e^{\pi x}}\right)\left(\frac{\pi e^{\pi x}(1+e^{\pi x}) - \pi e^{\pi x} e^{\pi x}}{1+e^{\pi x}}\right)$$

⋮

Est. Avançada I

13. $\{X_i\}_{i=1}^n$ i.i.d. tais que

$$P(X_i \leq x) = F_{i,\theta}(x) = x^{t_i\theta}, \quad x \in [0,1), \quad \theta > 0; \qquad (1)$$

com $t_1, \dots, t_n$ const. conhecidas. Encontre uma estatística suficiente minimal para θ.

De (1), segue que

$$f_{i,\theta}(x) = \theta t_i x^{\theta t_i - 1}, \quad x \in [0,1], \theta > 0$$

Daí

$$p_\theta(\underset{\sim}{x}) = \theta^n \prod_{i=1}^n t_i x_i^{t_i\theta - 1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i} \theta^n \prod_{i=1}^n t_i x_i^{\theta t_i} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\prod_{i=1}^n x_i} \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta t_i}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\prod_{i=1}^n x_i} e^{\sum_{i=1}^n \theta t_i \log(x_i) + n\theta} = h(x) e^{\theta \sum t_i \log x_i + n\theta}$$

Pelo critério da Fatoração, $T(X) = \sum_{i=1}^n t_i \log(X_i)$ é uma estatística suficiente para θ. Agora, dados x e y em $\mathcal{X}$, note que

$$p_\theta(x) = p_\theta(y) \Leftrightarrow \frac{\prod t_i}{\prod x_i} e^{\sum \theta t_i \log(x_i)} \cancel{e^{n\theta}} = \frac{\prod t_i}{\prod y_i} e^{\sum \theta t_i \log y_i} \cancel{e^{n\theta}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\prod x_i} e^{\sum \theta t_i \log(x_i)} = \frac{1}{\prod y_i} e^{\sum \theta t_i \log y_i}$$

$$\Leftrightarrow \theta \sum t_i \log(x_i) - \sum \log(x_i) = \theta \sum t_i \log y_i - \sum \log y_i$$

$$\overset{\text{ig. pol.}}{\Leftrightarrow} \sum t_i \log(x_i) = \sum t_i \log(y_i) \text{ e } \sum \log(x_i) = \sum \log y_i$$

Daí, $T(X) = \sum_{i=1}^n t_i \log X_i$ é uma estatística suf. minimal para θ.

15. $X \sim N(0, \theta)$; $|X|$ é suf p/ θ ?

A dist. condicional de $X | T=t$, $t > 0$ é t.q.

$$P(X=t / T=t) = P(X=-t / T=t) = 1/2, \quad \text{pois} \qquad (1)$$

- Para $t > 0$:

$$F_T(t) = P(|X| \leq t) = P(-t \leq X \leq t) = \Phi(t/\theta^{1/2}) - \Phi(-t/\theta^{1/2})$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \frac{1}{\theta^{1/2}} \phi(t/\theta^{1/2}) + \frac{1}{\theta^{1/2}} \phi(t/\theta^{1/2}) = \frac{2}{\theta^{1/2}} \phi\left(\frac{t}{\theta^{1/2}}\right)$$

e

$$f_T(t) . P(X=t | T=t) = \frac{1}{\theta^{1/2}} \phi\left(\frac{t}{\theta^{1/2}}\right)$$

$$f_T(t) P(X=-t | T=t) = \frac{1}{\theta^{1/2}} \phi\left(\frac{t}{\theta^{1/2}}\right)$$

$\Rightarrow \therefore f_X(t)$ é t.q. $X \sim N(0, \theta)$.

Daí, vale (1) e, portanto, da definição de estatística suf., segue o resultado.

17. $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ é suf. minimal p/ a fam de locação

$$p_\theta(x) = f(x_1-\theta) \cdots f(x_n-\theta),$$

qdo f é a densidade da Cauchy padrão; Diz-se que $Y \sim Cauchy(\theta, \gamma)$ se.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y).$$

Daí,

$$p_\theta(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \frac{1}{1+(x_1-\theta)^2} \cdots \frac{1}{1+(x_n-\theta)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(x_i-\theta)^2} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \log(1+(x_i-\theta)^2)}.$$

Daqui, segue que $X = (X_{(1)} \ldots X_{(n)})$ é suf. p/ θ. Ademais, uma vez

$$p_\theta(x) = p_\theta(y) \Leftrightarrow \sum \log(1+(x_i-\theta)^2) - \sum \log(1-(y_i-\theta)^2)$$

$$\Leftrightarrow x_{(1)} = y_{(1)}, \ldots, x_{(n)} = y_{(n)},$$

segue que $X = (X_{(1)} \ldots X_{(n)})$ é suf. minimal para θ.

19. $X = (X_1, \ldots, X_n)$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\theta}\right)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

Temos que

$$p_\theta(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i + n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i)$$

$$= e^{-n\theta} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} e^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_{(1)}),$$

pois $\prod \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow x_i > 0 \ \forall i \Leftrightarrow x_{(1)} > 0 \Leftrightarrow \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_{(1)}) = 1. \\ 0 \Leftrightarrow \text{algum } x_i < 0 \Leftrightarrow x_{(1)} < 0 \Leftrightarrow \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_{(1)}) = 0 \end{cases}$

Daí, pelo critério da fatoração, segue que

$$T(X) = (\bar{X}, X_{(1)}) \text{ é uma est. suf. para } \theta.$$

Ademais, para x e $y \in \mathfrak{X}$,

$$p_\theta(x) = p_\theta(y) \Leftrightarrow e^{-n\theta} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}} e^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_{(1)}) = e^{-n\theta} e^{-\frac{\sum y_i}{\theta}} e^n \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_{(1)})$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{\theta} n \bar{x}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x_{(1)}) = e^{-\frac{n}{\theta}\bar{Y}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y_{(1)})$$

$$\Leftrightarrow x_{(1)} = y_{(1)} \text{ e } \bar{X} = \bar{Y}, \text{ i.e.}$$

$$(\bar{x}, x_{(1)}) = (\bar{y}, y_{(1)})$$

Assim $(\bar{X}, X_{(1)})$ é suficiente minimal.

No entanto não é completa ...

21. $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ a.a. de $\mathcal{U}(\theta-1/2, \theta+1/2)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

a) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ suf. minimal

Note que

$$p_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\theta-1/2,\,\theta+1/2)}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta-1/2 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta+1/2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

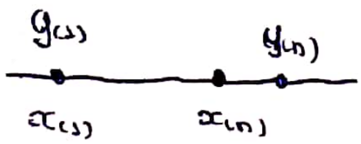
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\theta-1/2,\,\theta+1/2)}(x_{(1)}) \; \mathbb{I}_{(x_{(1)},\,\theta+1/2)}(x_{(n)})$$

Daí, pelo Crit. Fat., $(X_{(1)}, X_{(n)})$ é suficiente. Ademais,

$$p_\theta(x) = p_\theta(y) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\theta-1/2,\,\theta+1/2)}(x_{(1)}) \; \mathbb{I}_{(x_{(1)},\,\theta+1/2)}(x_{(n)}) \Leftrightarrow$$

$$(x_{(1)}, x_{(n)}) = (y_{(1)}, y_{(n)})$$

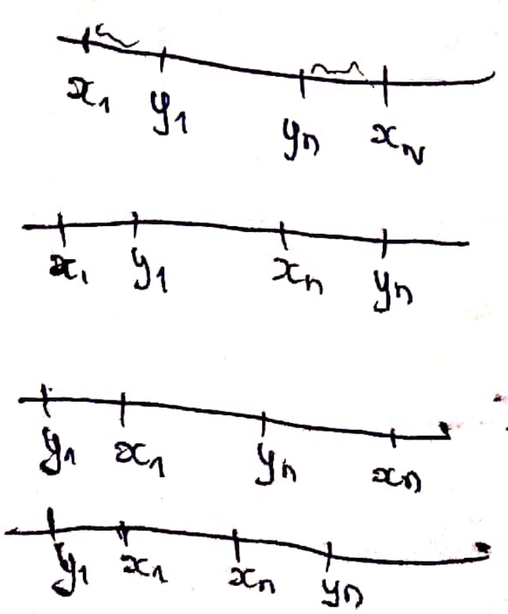
$\Rightarrow T(X) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ é suf. minimal.

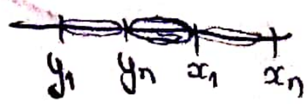


b) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ não é completa

$\max\{\max\{x_1, y_1\}, \min\{x_1, y_n\}\}$

$\min(x_{(n)}, y_{(1)})$;





23. $(X_i)_{i=1}^{n}$, $X_1 \sim Poi(\theta)$

Mostre que $\bar{X} = \sum X_i / n$ é suf. e completa sem usar prop. da fam. exp.

Basta ver que

$$P_\theta(x / T(x) = x) = \frac{P_\theta(x, T(x) = x)}{P_\theta(T(x) = x)} = \frac{P_\theta(x)}{P_\theta(T(x) = x)} =$$

$$= \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!} \cdot \frac{(n\sum x_i)!}{(n\theta)^{\sum x_i} e^{-n\theta}} = \frac{n \sum x_i}{n^{\sum x_i} \prod x_i!},$$

que não depende de θ. Agora, basta mostrar que é completa

25.

a) $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ fam. de dist.

$\forall A$ $\forall f_1 \in \mathcal{P}_0$ e $f_2 \in \mathcal{P}_2$

$$P(X_1 \in A) = 0 \Rightarrow P(X_2 \in A) = 0 ,$$

onde $X_i, i=1,2$ são t.q. $P(X_i \leq x) = f_i(x)$

$P_\theta(x \mid T(x))$ não dep de Θ, p/ todo X com f_X em $\mathcal{P}_0$.

$\boxed{9.8}$

MAE5834 - ESTATÍSTICA AVANÇADA I.

Lista de Exercícios 1 - Prof. Silvia Ferrari.

Alunos: Mario José Pacheco López - 9034981

Hugo Alberto Brango García - 9176006

IME-USP, 2º semestre de 2014.

Exercício 5. Considere a distribuição de série de potências com função de probabilidade

$$f_\theta(x) = P_\theta(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = 0, 1, \dots; \ a(x) \geq 0, \ \theta > 0$$

(a) Mostre que essa distribuição faz parte da família exponencial unidimensional.

Note que,

$$f_\theta(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)} = a(x)\theta^x [C(\theta)]^{-1} = a(x)\exp\{x\log\theta - \log C(\theta)\}$$

para $x = 0, 1, \dots$, $a(x) \geq 0$, $\theta > 0$ e $C(\theta) > 0$.

Logo, fazendo $T(x) = x$, $\eta(\theta) = \log\theta$, $B(\theta) = \log C(\theta)$ e $h(x) = a(x)$, temos que $f_\theta(x) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x)$, portanto a distribuição de série de potências faz parte da família exponencial unidimensional.

(b) Mostre que sua função geradora de momentos é $M_X(u) = C(\theta e^u)/C(\theta)$.

Para obter a função geradora de momentos da variable X, primeiro reescrevemos sua função de probabilidade na forma canônica, fazendo:

$$\eta = \log\theta \ (\Rightarrow \theta = e^\eta); \quad T(x) = x; \quad A(\eta) = \log(C(e^\eta))$$

Assim,

$$f_\theta(x) = \exp\{\eta T(x) - A(\eta)\}h(x), \quad x = 0, 1, \dots; \ h(x) \geq 0, \ \eta \in \mathbb{R}$$

portanto, pode ser obtida como

$$M_X(u) = M_T(u) = \frac{\exp\{A(\eta + u)\}}{\exp\{A(\eta)\}} = \frac{\exp\{\log C(e^{\eta+u})\}}{\exp\{\log C(e^\eta)\}} = \frac{C(e^{\eta+u})}{C(e^\eta)}$$

$$= \frac{C(e^\eta e^u)}{C(e^\eta)} = \frac{C(e^{\log\theta} e^u)}{C(e^{\log\theta})} = \frac{C(\theta e^u)}{C(\theta)}$$

$u = 0, 1, \dots$

(c) Mostre que as distribuições binomial, binomial negativa e Poisson são casos especiais da distribuição de série de potências e determine θ e $C(\theta)$.

Binomial:

Se $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$, então $p(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$; $0 < \pi < 1$.

Mas,

$$P(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{-x}(1-\pi)^n = \binom{n}{x}\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^x(1-\pi)^n = \binom{n}{x}\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^x \Big/ \left(1+\frac{\pi}{1-\pi}\right)^n$$

Note que, se $\frac{\pi}{1-\pi} = \theta$, fazendo $a(x) = \binom{n}{x}$ e $C(\theta) = (1+\theta)^n$, temos que

$$P(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad \text{para } x = 0, 1, \dots, n \text{ e } a(x) > 0.$$

Binomial negativa:

Se $X \sim BN(r, \pi)$, então $p(x) = \binom{x-1}{r-1}\pi^r(1-\pi)^{x-r}$, $x = r, r+1, \dots$, $0 < \pi < 1$.

Logo,

$$P(x) = \binom{x-1}{r-1}\pi^r(1-\pi)^{x-r} = \binom{x-1}{r-1}\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^r(1-\pi)^x = \binom{x-1}{r-1}(1-\pi)^x \Big/ \left(\frac{1}{1-\pi} - 1\right)^r$$

Assim, se $\theta = 1 - \pi$, $a(x) = \binom{x-1}{r-1}$ e $C(\theta) = \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^r$, temos que

$$P(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = r, r+1, \dots, \ a(x) > 0.$$

Poisson:

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$, $\lambda > 0$

Note que $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(x!)^{-1}\lambda^x}{e^\lambda}$

Assim, fazendo $\theta = \lambda$, $a(x) = (x!)^{-1}$ e $C(\theta) = e^\theta$, segue que

$$P(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \quad x = 0, 1, \dots, \ a(x) > 0$$

(d) Mostre que a distribuição série logarítmica, que é uma distribuição de potências com $a(x) = 1/x$ e $C(\theta) = -\log(1-\theta)$, $x = 1, 2, \dots$, $0 < \theta < 1$, tem função geradora de momentos $\log(1-\theta e^u)/\log(1-\theta)$ e determine $E(X)$ e $Var(X)$.

Se X tem distribuição série logarítmica, então sua função de probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \frac{a(x)\,\theta^x}{C(\theta)} = \frac{\theta^x}{-x\log(1-\theta)}, \quad x = 1, 2, \dots;\ 0 < \theta < 1.$$

Logo, pelo item (b), a função geradora de momentos é dada por

$$M_X(u) = \frac{C(\theta e^u)}{C(\theta)} = \frac{-\log(1-\theta e^u)}{-\log(1-\theta)} = \frac{\log(1-\theta e^u)}{\log(1-\theta)}, \quad u = 1, 2, \dots \quad 0 < \theta < 1$$

Assim,

$$\frac{d}{du}M_X(u) = \frac{\frac{-\theta e^u}{1-\theta e^u}}{\log(1-\theta)} = \frac{\theta e^u}{\log(1-\theta)\{\theta e^u - 1\}} = \frac{1}{\log(1-\theta)\{1-\theta^{-1}e^{-u}\}}$$

$$\frac{d^2}{du^2}M_X(u) = \frac{-\theta^{-1}e^{-u}}{\log(1-\theta)\{1-\theta^{-1}e^{-u}\}^2} = \frac{-\theta e^u}{\log(1-\theta)\{1-\theta e^u\}^2}$$

Logo, como $E(X) = \frac{d}{du}M_X(u)\Big|_{u=0}$ e $E(X^2) = \frac{d^2}{du^2}M_X(u)\Big|_{u=0}$, então

$$E_\theta(X) = \frac{-1}{\log(1-\theta)\{1-\theta^{-1}\}} = \frac{-\theta}{\log(1-\theta)\{\theta-1\}} \quad \text{e}$$

$$E_\theta(X^2) = \frac{-\theta}{\log(1-\theta)\{1-\theta\}^2} = \frac{-\theta}{\log(1-\theta)\{\theta-1\}^2}$$

Portanto,

$$Var_\theta(X) = E_\theta(X^2) - E_\theta^2(X) = \frac{-\theta}{\log(1-\theta)\{\theta-1\}^2} - \left[\frac{-\theta}{\log(1-\theta)\{\theta-1\}}\right]^2$$

$$= \frac{-\theta}{\log^2(1-\theta)\{\theta-1\}^2}\left\{\log(1-\theta) + \theta\right\}.$$

Note que, para $0 < \theta < 1$

$$-\theta \geq \log(1-\theta) \Rightarrow \log(1-\theta) + \theta \leq 0$$
$$\Rightarrow Var(X) \geq 0.$$

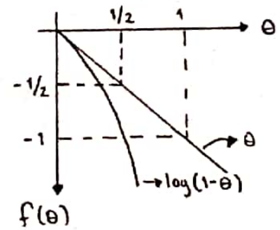
Justificação:

Seja $f(x) = e^{-x} - 1 + t$, f contínua em $(0,1)$. Pelo Teorema do valor médio, $\forall x \in (0,1)$, $\exists\, c_x \in (0,1)$; $f'(c_x) = (f(x) - f(0))/(x-0)$.

$\Rightarrow 1 - e^{-c_x} = (e^{-x} - 1 + x)/x \Rightarrow e^{-x} - 1 + x = x(1 - e^{-c_x}) > 0$

$\Rightarrow e^{-x} - 1 + x > 0 \Rightarrow e^{-x} > 1 - x \Rightarrow -x > \log(1-x)$, $x \in (0,1)$

Graficamente:



Exercício 8. Seja $T(X) = (T_1(X), \dots, T_s(X))'$ e considere a densidade

$$p_\theta(x) = \exp\left[\sum_{i=1}^{s} \eta_i(\theta) T_i(x) - B(\theta)\right] h(x)$$

(a) Para $s=1$, mostre que $E_\theta[T(X)] = B'(\theta)/\eta'(\theta)$ e $var_\theta[T(X)] = B''(\theta)/[\eta'(\theta)]^2 - \eta''(\theta)B'(\theta)/[\eta'(\theta)^3]$.

Note que, se $s=1$, $p_\theta(x) = \exp[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)]h(x)$ e dado que $p_\theta(x)$ é uma função densidade de probabilidade, então respeito a alguma medida μ,

$$\int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \frac{d}{d\theta} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x = 0 \quad \text{(sob condições de regularidade)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x) \left\{\frac{d\eta(\theta)}{d\theta} T(x) - \frac{dB(\theta)}{d\theta}\right\} d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta(\theta)}{d\theta} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} T(x) \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x}_{E_\theta(T(x))} -$$

$$\frac{dB(\theta)}{d\theta} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta(\theta)}{d\theta} E_\theta[T(x)] - \frac{dB(\theta)}{d\theta} = 0$$

Assim, seja $\eta'(\theta) = \dfrac{d\eta(\theta)}{d\theta}$ e $B'(\theta) = \dfrac{dB(\theta)}{d\theta}$, então

$$\eta'(\theta) E_\theta[T(x)] = B'(\theta) \Rightarrow E_\theta[T(x)] = B'(\theta)/\eta'(\theta).$$

Também, sob condições de regularidade

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \frac{d^2}{d\theta^2} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x)\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \frac{d}{d\theta}\left[\exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x) \{\eta'(\theta)T(x) - B'(\theta)\}\right] d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x) [\eta'(\theta)T(x) - B'(\theta)]^2 d_\mu x +$$

$$\int_{\mathcal{X}} \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\} h(x) [\eta''(\theta)T(x) - B''(\theta)]\, d_\mu x = 0$$

com $\eta''(\theta) = \dfrac{d^2\eta(\theta)}{d\theta}$ e $B''(\theta) = \dfrac{d^2 B(\theta)}{d\theta}$.

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} p_\theta(x) [\eta'(\theta)T(x) - B'(\theta)]^2 d_\mu x + \int_{\mathcal{X}} p_\theta(x) [\eta''(\theta)T(x) - B''(\theta)]\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow [\eta'(\theta)]^2 \underbrace{\int_{\mathcal{X}} [T(x)]^2 p_\theta(x)\, d_\mu x}_{E_\theta\{[T(x)]^2\}} - 2\eta'(\theta)B'(\theta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}} T(x)\, p_\theta(x)\, d_\mu x}_{E_\theta[T(x)]} +$$

$$[B'(\theta)]^2 \underbrace{\int_{\mathcal{X}} p_\theta(x)\, d_\mu x}_{1} + \eta''(\theta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}} T(x)\, p_\theta(x)\, d_\mu x}_{E_\theta[T(x)]} - B''(\theta) \underbrace{\int_{\mathcal{X}} p_\theta(x)\, d_\mu x}_{1} = 0$$

Assim,

$$[\eta'(\theta)]^2 E_\theta\{[T(x)]^2\} - 2\eta'(\theta)B'(\theta) E_\theta[T(x)] + [B'(\theta)]^2 + \eta''(\theta) E_\theta[T(x)] - B''(\theta) = 0$$

E substituindo $E_\theta[T(x)] = B'(\theta)/\eta'(\theta)$, temos

$$[\eta'(\theta)]^2 E_\theta\{[T(x)]^2\} - 2[B'(\theta)]^2 + [B'(\theta)]^2 + \eta''(\theta)B'(\theta)/\eta'(\theta) - B''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow [\eta'(\theta)]^2 E_\theta\{[T(x)]^2\} - [B'(\theta)]^2 + \eta''(\theta)B'(\theta)/\eta''(\theta) - B''(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow E_\theta\{[T(x)]^2\} = \frac{[B'(\theta)]^2 + B''(\theta) - \eta''(\theta)B'(\theta)/\eta''(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

Portanto,

$$Var_\theta[T(x)] = E_\theta[T(x)]^2 - [E_\theta[T(x)]]^2$$

$$= \frac{[B'(\theta)]^2 + B''(\theta) - \eta''(\theta)B'(\theta)/\eta'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \left[\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}\right]^2$$

$$= \frac{B''(\theta) - \eta''(\theta)B'(\theta)/\eta'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2}$$

$$= \frac{B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^2} - \frac{\eta''(\theta)B'(\theta)}{[\eta'(\theta)]^3}.$$

(b) Para $s>1$, mostre que $E_\theta[T(x)] = J^{-1}\nabla B$, onde J é a matriz Jacobiana definida por $J = \{\partial\eta_j/\partial\theta_i\}$ e ∇B é o vetor gradiente $\nabla B = \{\partial B(\theta)/\partial\theta_i\}$.

Seja $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \dots, \eta_s(\theta))$, $T(x) = (T_1(x), \dots, T_s(x))$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, então, sob condições de regularidade, para $j = 1, \dots, p$, respeito a alguma medida μ,

$$\int_{\mathcal{X}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\theta)T_i(x) - B(\theta)\right\} h(x)\, d_\mu x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta_j}\int_{\mathcal{X}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\theta)T_i(x) - B(\theta)\right\} h(x)\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\exp\left\{\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\theta)T_i(x) - B(\theta)\right\} h(x)\, d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{X}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\theta)T_i(x) - B(\theta)\right\} h(x)\left\{\overbrace{\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_j}}^{\text{finito}} T_i(x) - \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_j}\right\} d_\mu x = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_j}\underbrace{\int_{\mathcal{X}} T_i(x)\, P_\theta(x)\, d_\mu x}_{E_\theta(T_i(x))} - \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_j}\underbrace{\int_{\mathcal{X}} P_\theta(x)\, d_\mu x}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_j} E_\theta[T_i(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_j}, \text{ para } j = 1, \dots, p$$

Assim, temos o sistema

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_1} E_\theta[T_i(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_1} \\
\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_2} E_\theta[T_i(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_2} \\
\vdots \\
\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\eta_i(\theta)}{\partial\theta_p} E_\theta[T_i(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_p}
\end{array}\right\} \Rightarrow
\begin{array}{l}
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_1}E_\theta[T_1(x)] + \dots + \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_1}E_\theta[T_s(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_1} \\
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_2}E_\theta[T_1(x)] + \dots + \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_2}E_\theta[T_s(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_2} \\
\vdots \\
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_p}E_\theta[T_1(x)] + \dots + \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_p}E_\theta[T_s(x)] = \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_p}
\end{array}$$

O anterior pode ser escrito com matrizes como

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\eta_2(\theta)}{\partial\theta_1} & \dots & \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_1} \\
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_2} & \frac{\partial\eta_2(\theta)}{\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_2} \\
 & & \vdots & \\
\frac{\partial\eta_1(\theta)}{\partial\theta_p} & \frac{\partial\eta_2(\theta)}{\partial\theta_p} & \dots & \frac{\partial\eta_s(\theta)}{\partial\theta_p}
\end{bmatrix}}_{J}
\underbrace{\begin{bmatrix}
E_{\theta_1}[T_1(x)] \\ E_{\theta_2}[T_2(x)] \\ \vdots \\ E_{\theta_s}[T_s(x)]
\end{bmatrix}}_{E_\theta[T(x)]}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial B(\theta)}{\partial\theta_p}
\end{bmatrix}}_{\nabla B}$$

matriz $p\times s$

J^{-1} existe se J é quadrada. $(p=s)$

Assim, seja $J = \{\partial\eta_i(\theta)/\partial\theta_j\}_{j,i}$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, p$,

$\nabla B = \{\partial B(\theta)/\partial\theta_j\}$, $j = 1, \dots, p$ e

$E_\theta[T(x)] = \{E_\theta[T_i(x)]\}$, $i = 1, \dots, s$

Então, $J \cdot E_\theta[T(x)] = \nabla B \Rightarrow E_\theta[T(x)] = J^{-1}\nabla B.$

Exercício 11. Seja U uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo unitário e considere as variáveis $X = U^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

(a) Mostre que isso define uma família de grupo e determine a distribuição de X.

Temos que a v.a. U foi submetido ao grupo de transformações $X = g(u) = u^{\alpha}$.
Vamos verificar que a classe é fechado sob composição e inversão:

"fechada sob composição"

Seja $\mathcal{J}$ a classe de transformações 1-a-1 definidas por $\mathcal{J}$, e seja

$$g_1 = u^{\alpha_1}, \ \alpha_1 > 0 \quad \wedge \quad g_2 = u^{\alpha_2}, \ \alpha_2 > 0, \quad g_1 \text{ e } g_2 \in \mathcal{J}$$

Então,

$$g_2 \circ g_1 = g_2(g_1(u)) = g_2(u^{\alpha_1}) = (u^{\alpha_1})^{\alpha_2} = u^{\alpha_1\alpha_2} = u^{\alpha}$$

com $\alpha = \alpha_1\alpha_2 > 0$, então $g_2 \circ g_1 \in \mathcal{J}$.

"fechada sob inversão"

Seja $g \in \mathcal{J}$, então $g^{-1}(x) = x^{1/\alpha} = x^{\beta}$, com $\beta = 1/\alpha > 0$, portanto $g^{-1} \in \mathcal{J}$.

Assim, a classe de transformações é fechada sob composição e inversão, portanto $X = U^{\alpha}$, $\alpha > 0$, define uma família de grupo.

(b) Considere uma amostra aleatoria $(X_1, \dots, X_n)$ de X. Encontre uma estatística suficiente para α.

Dado que $U \sim U(0,1)$, então $f_U(u) = I_{(0,1)}(u)$, portanto, se $X_1 = U^{\alpha}$ então $U = X_1^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$ e

$$f_\alpha(x_1) = \frac{1}{\alpha} x_1^{1/\alpha - 1} I_{(0,1)}(x_1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1)} x_1^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-x_1)^{1-1}$$

$$\Rightarrow X_1 \sim \text{BETA}\left(\tfrac{1}{\alpha}, 1\right)$$

Logo,

$$f_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/\alpha - 1} I_{(0,1)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/\alpha - 1} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,1)}(x_i), \quad \alpha > 0.$$

Assim, fazendo $T(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, $g_\alpha(T(x)) = \frac{1}{\alpha^n}[T(x)]^{1/\alpha - 1}$ e $h(x) = \prod_{i=1}^{n} I_{(0,1)}(x_i)$

Então $f_\alpha(x)$ pode-se escrever como

$$f_\alpha(x) = g_\alpha(T(x))\, h(x), \quad \alpha > 0 \quad \text{q.c.}\ \mu.$$

portanto, pelo critério da fatoração $T(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente para α.

Exercício 17. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ amostra aleatória da distribuição $E(\theta,\theta)$, $\theta > 0$ é desconhecido, com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x-\theta}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(x).$$

Mostrar que $(\bar{x}, x_{(1)})$, onde $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ e $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$, é suficiente minimal mas não é completa.

Suficiência:

Para a amostra aleatória X,

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x_i-\theta}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(x_i) \quad , \quad \theta > 0$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i) \quad , \quad \theta > 0$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta} n\bar{x} + n\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i) \quad , \quad \theta > 0$$

$$= \frac{e^n}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{n\bar{x}}{\theta}\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i) \quad , \quad \theta > 0.$$

Mas, $\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\infty)}(x_i) = 1 \iff x_{(1)} \geq \theta$, então

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{n\bar{x}}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})\, e^n \quad \theta > 0$$

Logo, fazendo $T(x) = (\bar{x}, x_{(1)})$, $g_\theta(T(x)) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{n\bar{x}}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})$ e $h(x) = \exp(n)$, temos

$$f_\theta(x) = g_\theta(T(x))\, h(x) \quad , \quad \theta > 0 ;$$

Assim, pelo critério da fatoração $T(X) = (\bar{X}, X_{(1)})$ é uma estatística suficiente para θ.

Suficiência minimal.

Note que, para uma amostra aleatória y

$$f_\theta(y) = \frac{e^n}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{n\bar{y}}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(y_{(1)})$$

$$= \frac{e^n}{\theta^n} \exp\left\{-\frac{n\bar{x}}{\theta}\right\} \exp\left\{\frac{n\bar{x}}{\theta} - \frac{n\bar{y}}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) \frac{I_{[\theta,\infty)}(y_{(1)})}{I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})}$$

$$= f_\theta(x) \exp\left\{\frac{n}{\theta}(\bar{x}-\bar{y})\right\} \frac{I_{[\theta,\infty)}(y_{(1)})}{I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})} \quad (1)$$

Não fazer divisão por zero

Seja $D = \{ y \in \mathfrak{X} , f_\theta(y) = f_\theta(x) \cdot 1 , \forall \theta \in \Omega \}$

"$\Rightarrow$"

Suponhamos que $T(x) = T(y)$, isto é $\bar{x} = \bar{y}$ e $x_{(1)} = y_{(1)}$, segue de (1) que $f_\theta(y) = f_\theta(x) \cdot 1 \quad \forall \theta \in \Omega$, portanto $y \in D$.

"$\Leftarrow$"

Suponhamos que $y \in D$, isto é, para todo $\theta \in \Omega$ $f_\theta(y) = f_\theta(x) \cdot 1$ segue de (1) que

$$\exp\left\{\frac{n}{\theta}(\bar{x}-\bar{y})\right\} = 1 \quad e \quad I_{[\theta,\infty)}(y_{(1)}) = I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) \quad \forall \theta \in \Omega$$

e então*,

$$\bar{x} = \bar{y} \quad e \quad x_{(1)} = y_{(1)} \Rightarrow T(x) = T(y)$$

Portanto, $T(x) = (\bar{x}, X_{(1)})$ é uma estatística suficiente minimal para θ.

---

* Note que $I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) = I_{(-\infty, x_{(1)}]}(\theta) \quad \forall \theta \in \Omega$.

Também, se $x_{(1)} \neq y_{(1)}$ então $\exists \theta : y_{(1)} < \theta < x_{(1)}$ portanto $I_{(-\infty,\theta]}(y_{(1)}) = 0$ e $I_{(-\infty,\theta]}(x_{(1)}) = 1$, então se $I_{[\theta,\infty)}(y_{(1)}) = I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})$ então $x_{(1)} = y_{(1)}$. [se $\sim q \to \sim p \Rightarrow p \to q$].

completa:

Dado que, se $X \sim E(\theta,\theta)$ então para alguma medida μ

$$E_\theta(X) = \int_\theta^\infty x \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x-\theta}{\theta}\right\} d\mu x = \lim_{b\to\infty} \left\{ \left[-x\exp\left(-\frac{x-\theta}{\theta}\right)\right]_\theta^b + \int_\theta^b \exp\left\{-\frac{x-\theta}{\theta}\right\} d\mu x \right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\theta - b\exp\left(-\frac{b-\theta}{\theta}\right)\right\} + \lim_{b\to\infty}\left\{-\theta \exp\left(\cancel{-}\frac{x-\theta}{\theta}\right)\Big|_\theta^b\right\}$$

$$= \theta + \lim_{b\to\infty}\left\{\theta - \theta\exp\left(-\frac{b-\theta}{\theta}\right)\right\} = 2\theta$$

Assim, para a amostra aleatoria $E(\bar{X}) = 2\theta$.

Também,

$$f_{X_{(1)}}(y) = n\left[1-F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y) = n\left[1-\left(1-\exp\left\{-\frac{y-\theta}{\theta}\right\}\right)\right]^{n-1} \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{y-\theta}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(y)$$

$$= n\exp\left\{-(n-1)\frac{y-\theta}{\theta}\right\} \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{y-\theta}{\theta}\right\} I_{[\theta,\infty)}(y)$$

$$= \frac{1}{\theta/n}\exp\left\{-\frac{y-\theta}{\theta/n}\right\} I_{[\theta,\infty)}(y)$$

Portanto $X_{(1)} \sim E(\theta, \theta/n)$. Logo,

$$E_\theta(X_{(1)}) = \int_\theta^\infty \frac{y}{\theta/n}\exp\left\{-\frac{y-\theta}{\theta/n}\right\} dy = \lim_{b\to\infty}\left\{\theta - b\exp\left\{-\frac{b-\theta}{\theta/n}\right\}\right\} + \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{\theta}{n} - \frac{\theta}{n}\exp\left\{-\frac{b-\theta}{\theta/n}\right\}\right\}$$

$$= \theta\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Logo, tomando $g(T) = T_1 - \frac{2n}{n+1}T_2$, com $T_1 = \bar{x}$ e $T_2 = X_{(1)}$, então

$g(T) = \bar{x} - \frac{2n}{n+1} x_{(1)} \not\equiv 0$ e

$$E(g(T)) = 2\theta - \frac{2n}{n+1}\theta\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

Portanto, $T(x) = (\bar{X}, X_{(1)})$ não é uma estatística completa para θ.

Exercício 29. Suponha que $X_1, \dots, X_n$ sejam uma amostra aleatória de uma família de locação-escala com função distribuição $F((x-a)/b)$.

(a) Se b é conhecido, mostre que as diferenças $(X_1 - X_i)/b$, $i=2,\dots,n$ são ancilares.

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma a.a. de uma família de locação-escala, então para $a \in \mathbb{R}$ desconhecido e $b>0$ conhecido podemos escrever

$$X_i = a + b Z_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

em que Z_i é uma v.a com f.d.a. $F(\cdot)$ e f.d.p. $f(\cdot)$ que não depende de parâmetros desconhecidos e $Z_1, \dots, Z_n$ independentes.

Defina as estatísticas $Y_j = \phi_j(X) = \frac{X_1 - X_j}{b}$, $j = 2, \dots, n$, onde $X = X_1, \dots, X_n$.

Note que, os $\phi_j(x)$ são tais que

$$\phi_j(x) = \phi_j(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 - x_j}{b} = \frac{(x_1 - a) - (x_j - a)}{b}$$

$$= \phi_j(x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a) \quad , \quad j = 2, \dots, n$$

Assim, para $j = 2, \dots, n$

$$P(Y_j \le y) = P(\phi_j(X) \le y) = P(\phi_j(X_1, \dots, X_n) \le y) = P(\phi_j(X_1 - a, \dots, X_n - a) \le y)$$

$$= P\left(\frac{(X_1-a)-(X_j-a)}{b} \le y\right) = P\left(\frac{X_1-a}{b} - \frac{X_j-a}{b} \le y\right)$$

$$= P(Z_1 - Z_j \le y) \quad (1)$$

Logo, dado que Z_j, $j=2,\dots,n$ são independentes e sua distribuição não depende de a, por (1) as diferenças $(X_1 - X_i)/b$, $i=2,\dots,n$ com b conhecido, são ancilares.

(b) Se a é conhecido, mostre que as razões $(X_1 - a)/(X_i - a)$, $i=2,\dots,n$ são ancilares.

Neste caso, com a conhecido, seja $Y_j = \frac{X_1 - a}{X_j - a} = \frac{(X_1-a)/b}{(X_j-a)/b}$, $j=2,\dots,n$.

Logo,

$$P(Y_j \le y) = P\left(\frac{X_1-a}{X_j-a} \le y\right) = P\left(\frac{(X_1-a)/b}{(X_j-a)/b} \le y\right) = P\left(\frac{Z_1}{Z_j} \le y\right)$$

Assim, ao igual que em (a), dado que $X_j = a + b Z_j$ e Z_j, $i=1,2,\dots,n$, independentes, com distribuição padrão $F(\cdot)$, então a distribuição das razões Y_j, $j=2,3,\dots,n$, não depende de b quando a é conhecido. Portanto as razões Y_j são ancilares.

(c) Se a e b são desconhecidos, mostre que as quantidades $(X_1 - X_i)/(X_2 - X_i)$, $i=3,\dots,n$, são ancilares.

Novamente temos $X_j = a + b Z_j$, $j=1,\dots,n$, mas agora a e b são desconhecidos. Os Z_i, $i=1,\dots,n$, independentes, com distribuição que não depende de $\theta = (a,b)$.

Seja $Y_j = \phi_j(X) = \phi_j(X_1, \dots, X_n) = \frac{X_1 - X_j}{X_2 - X_j} = \dfrac{\frac{X_1-a}{b} - \frac{X_j-a}{b}}{\frac{X_2-a}{b} - \frac{X_j-a}{b}} = \phi\left(\frac{X_1-a}{b}, \dots, \frac{X_n-a}{b}\right)$

Para $j=3,\dots,n$.

Assim, para $j=3,\dots,n$,

$$P(Y_j \le y) = P(\phi_j(X) \le y) = P(\phi_j(X_1, \dots, X_n) \le y) = P\left(\phi_j\left(\frac{X_1-a}{b}, \dots, \frac{X_n-a}{b}\right) \le y\right)$$

$$= P(\phi_j(Z_1, \dots, Z_n) \le y)$$

Então, dada a independência de $Z_1, \dots, Z_n$ e que sua distribuição não depende de $\theta = (a,b)$, então, os $Y_j = (X_1 - X_i)/(X_2 - X_i)$, $i=3,\dots,n$, são ancilares.

Exercício 31. Assuma válidas as suposições do Critério do Fatoração. Seja A qualquer conjunto fixado do espaço amostral, P^*_θ a distribuição P_θ truncada sobre A e $\mathcal{P}^* = \{P^*_\theta, \theta \in \Omega\}$. Mostre que

(a) se T é suficiente para $\mathcal{P}$, é também suficiente para $\mathcal{P}^*$

Assumindo válidos as suposições do C.F., se $T(x)$ é uma estatística suficiente para $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$, então, existen funções g_θ e h tais que $P_\theta(x) = g_\theta(T(x))h(x)$.

Temos que A é qualquer conjunto fixado do espaço amostral, e P^*_θ a distribuição truncada sobre A, então

$$P^*_\theta(x) = \frac{P_\theta(x)}{P_\theta(A)} I_A(x) = P_\theta(x)\frac{1}{P_\theta(A)} I_A(x)$$

$$\Rightarrow P^*_\theta(x) = g_\theta(T(x))h(x)\frac{1}{P_\theta(A)} I_A(x)$$

$$= g^*_\theta(T(x))h^*(x)$$

com $g^*_\theta(T(x)) = g_\theta(T(x))/P_\theta(A)$ e $h^*(x) = h(x)I_A(x)$

Assim, pelo C.F., dado que existen funções g^*_θ e h^* tais que $P^*_\theta(x) = g^*_\theta(T(x))h^*(x)$, a estatística $T(x)$ é também suficiente para $\mathcal{P}^*_\theta$.

■

(b) Se T e completa para $\mathcal{P}$, é também completa para $\mathcal{P}^*$

Temos que provar que se $E_\theta[g(T(x))] = 0$ então $g(T(x))$ q.c.$\mathcal{P}^*$, $\forall\theta$ e qualquer função g da estatística T.

Seja g uma função qualquer e suponhamos que $E_\theta[g(T(x))]$, $\forall\theta\in\Omega$.

Se T é completa para $\mathcal{P}$, então $g(T(x)) = 0$ q.c.$\mathcal{P}$ e isto é equivalente com $P[g(T(x)) = 0] = 1 \Leftrightarrow P[g(T(x)) \neq 0] = 0$.

Assim,

$$\int_{\{w: g(T(w)) \neq 0\}} P_\theta(t)\,dt = 0$$

Logo,

$$0 \leq \int_{\{w:g(T(w))\neq 0\}} P^*_\theta(t)\,dt = \int_{\{w:g(T(w))\neq 0\}} \frac{P_\theta(t)}{P_\theta(A)} I_A(t)\,dt = \frac{1}{P_\theta(A)}\int_{A\cap\{w:g(T(w))\neq 0\}} P_\theta(t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{P_\theta(A)}\int_{\{w:g(T(w))\neq 0\}} P_\theta(t)\,dt = 0$$

Então,

$$\int_{\{w:g(T(w))\neq 0\}} P^*_\theta(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow P^*(g(T(x))\neq 0) = 0 \Leftrightarrow P^*(g(T(x)) = 0) = 1$$

$$\Leftrightarrow g(T(x)) = 0 \quad \text{q.c.}\mathcal{P}^*$$

Portanto, T é completa para $\mathcal{P}^*$.

$\boxed{9.9}$

Lista de Exercícios 2

MAE 5839 - ESTATÍSTICA AVANÇADA I

Prof. Dra. Silvia L. P. Ferrari

Alunos: Mario José Pacheco López - 9034481
Hugo Alberto Brango García - 9176006

IME - USP, 22/09/2014

④ Seja $\mathcal{X}$ o conjunto dos números naturais, i.e. $\mathcal{X} = \{0,1,2,\dots\}$, e $A \subset \mathcal{X}$, não vazio. Suponha que X tem distribuição de Poisson de parâmetro λ truncada em A, ou seja, a distribuição de X coincide com a distribuição de Y condicional a que $Y \in A$, sendo que $Y \sim Poisson(\lambda)$.

(a) Suponha que $A = \{0,1,2,\dots,a\}$, em que a é um enteiro positivo. Mostre que λ não tem um estimador não viciado.

Para $\mathcal{X} = \mathbb{N}$, $A = \{0,1,\dots,a\}$ e $Y \sim Poisson(\lambda)$, temos que a densidade de x é

$$P_\lambda(x) = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\sum_{y=0}^{a} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}} I_A(x)$$

Suponhamos que λ tem um estimador não viciado $\delta(x)$, isto é $E[\delta(X)] = \lambda$, vejamos que isto leva a uma contradição

$$E[\delta(X)] = \lambda \iff \sum_{x=0}^{a} \delta(x) P_\lambda(x) = \lambda$$

$$\iff \sum_{x=0}^{a} \delta(x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{y=0}^{a} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!}$$

$$\iff \frac{\delta(0)}{0!} = 0, \ \frac{\delta(1)}{1!} = \frac{1}{0!}, \ \frac{\delta(2)}{2!} = \frac{1}{1!}, \dots, \frac{\delta(a)}{a!} = \frac{1}{(a-1)!}, \ \frac{1}{a!} = 0$$

A última igualdade não é possível porque $\frac{1}{a!} > 0$, para todo $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Portanto λ não tem um estimador não viciado.

b) Supoha que $A = \{1,2,3,\dots\}$. Encontre o ENVVUM de λ

Vamos determinar $\delta(x)$ tal que $E[\delta(X)] = \lambda$, i.e., $\sum_{x=0}^{\infty} \delta(x) P_\lambda(x) = \lambda$, sendo

$$P_\lambda(x) = \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}{\sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}} \cdot I_A(x); \quad A = \{1,2,\dots\}$$

Assim,

$$E[\delta(X)] = \lambda \iff \sum_{x=1}^{\infty} \delta(x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y+1}}{y!}$$

$$\iff \frac{\delta(1)}{1!} = 0, \ \frac{\delta(2)}{2!} = \frac{1}{1!}, \ \frac{\delta(3)}{3!} = \frac{1}{2!}, \dots, \frac{\delta(K)}{K!} = \frac{1}{(K-1)!}, \dots$$

O estimador não viciado será $\delta(x) = \begin{cases} x, & se \ x \geq 2 \\ 0, & se \ x = 1 \end{cases}$

Vejamos que $\delta(x)$ é o ENVVUM para λ.

$$P_\lambda(x) = \exp\left[-\lambda + x\log\lambda + \lambda - \log\left(\sum_{y=1}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}\right)\right] \frac{I_A(x)}{x!}$$

$$= \exp\left[\log\lambda \cdot x - \log(e^\lambda - 1)\right] \cdot \frac{I_A(x)}{x!}$$

$$= \exp\left[\eta(\lambda)\delta(x) - b(\lambda)\right] h(x),$$

onde $\eta(\lambda) = \log\lambda$, $\delta(x) = x$, $b(\lambda) = \log(e^\lambda - 1)$ e $h(x) = \frac{I_A(x)}{x!}$

Como $\eta(\lambda) = \log \lambda$ está definido sobre o espaço paramétrico $\Omega = \{\lambda / \lambda > 0\}$ que contém rectângulos 1-dimensionais, então P_λ pertence a família exponencial ~~uni~~dimensional de posto completo, logo, $\delta(X) = X$ é suficiente completa e portanto é ENVVUM para λ.

(10) Sejam $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuições $U(0,\theta)$ e $U(0,\theta')$, respectivamente. Se $n > 1$, determine o ENVVUM de θ/θ'

Temos que $X_1, \ldots, X_m$ é uma amostra aleatória com $X \sim U(0,\theta)$

$$\Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i), \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\Rightarrow P_\theta(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\theta^m} \prod_{i=1}^{m} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^m} I_{(0,\theta)}(x_{(m)})$$

Pelo critério da factoração temos que $X_{(m)} = \max\{X_1, \ldots, X_m\} = T(X)$ é uma estatística suficiente para θ. Então

$$f_{X_{(m)}} = \frac{m}{\theta^m} x^{m-1} I_{(0,\theta)}(x_{(m)})$$

Agora, veamos que $T(X) = X_{(m)}$ é completa para θ.

$$\Rightarrow E[g(T)] = 0 \Rightarrow \int_0^\theta g(t) f_T(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^\theta g(t) \frac{1}{\theta^m} m\, t^{m-1}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(t) t^{m-1}\,dt = 0 \Rightarrow g(t) \equiv 0 \quad \forall\, \theta \in \Omega$$

Então $T(X) = X_{(m)}$ é uma estatística completa para θ.

Note que,

$$E[T] = \int_0^t t \frac{m}{\theta^m} t^{m-1}\,dt = \frac{m}{\theta^m} \int_0^\theta t^m\,dt = \frac{m}{\theta^m} \frac{t^{m+1}}{m+1}\Big|_0^\theta = \frac{m}{\theta^m} \frac{\theta^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}\theta$$

$$\Rightarrow E[T] = \frac{m}{m+1}\theta \Rightarrow E\left(\frac{m+1}{m} T\right) = \theta$$

Portanto, $\delta(X) = \frac{m+1}{m} X_{(m)}$ é o ENVVUM de θ, pois ele é não viciado e é função da estatística suficiente completa.

Assim mesmo, temos que para $Y_1, \ldots, Y_n$ iid com distribuição $Y \sim U(0,\theta')$ $T(Y) = Y_{(n)}$ é suficiente completa para θ'.

Também $E(Y_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta' \Rightarrow E\left(\frac{n+1}{n} Y_{(n)}\right) = \theta'$.

Assim. $\delta(Y) = \frac{n+1}{n} Y_{(n)}$ é o ENVVUM para θ'

Devemos calcular,

$$E\left(\frac{1}{Y_{(n)}}\right) = \int_0^{\theta'} \frac{1}{y} f_{Y_{(n)}}(y)\,dy = \int_0^{\theta'} \frac{1}{y} \frac{n}{\theta'^n} y^{n-1}\,dy = \frac{n}{\theta'^n} \int_0^{\theta'} y^{n-2}\,dy = \frac{n}{\theta'^n} \frac{y^{n-1}}{n-1}\Big|_0^{\theta'} = \frac{n}{\theta'^n} \frac{\theta'^{n-1}}{n-1} = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\theta'}$$

Portanto, considerando $\delta(X,Y) = \dfrac{\frac{m+1}{m} X_{(m)}}{\frac{n}{n-1} Y_{(n)}}$

$$E\left(\frac{m+1}{m} X_{(m)}\right) E\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1} Y_{(n)}}\right) = \frac{m+1}{m} E(X_{(m)}) \frac{1}{\frac{n}{n-1}} E\left(\frac{1}{Y_{(n)}}\right) = \frac{\cancel{m+1}}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m}}{\cancel{m+1}}\theta \; \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \frac{1}{\theta'} = \frac{\theta}{\theta'}$$

Como $\delta(X,Y)$ é função da estatística suficiente e completa então $\delta(X,Y)$ é o ENVVUM de θ/θ'

(11) Prove ou dê contra-exemplo. Seja X variável aleatoria com distribuição pertencente a uma família de distribuições $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ e sejam $g_1(\theta)$ e $g_2(\theta)$ funções de θ a valores reais. Sejam $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ estimadores de $g_1(\theta)$ e $g_2(\theta)$ respectivamente, com $E(\delta_1(X)^2)<\infty$ e $E(\delta_2(X)^2)<\infty$. Se estes estimadores são não viciados de variância uniformemente mínima (ENVVUM) então $a\delta_1(X) + b\delta_2(X)$ tem variância finita e é ENVVUM de $ag_1(\theta)+bg_2(\theta)$. Aqui a e b são números reais fixados.

Seja $\delta_1 = \delta_1(X)$ e $\delta_2 = \delta_2(X)$

Temos que δ_1 e δ_2 pertencem à classe dos estimadores δ com $E_\theta(\delta^2)<\infty$, Δ, para todo $\theta\in\Omega$, portanto $Var_\theta(\delta_1(X))<\infty$ e $Var_\theta(\delta_2(X))<\infty$.

Logo, seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os estimadores não viesados de cero que estão em Δ e seja $U = \delta_2 - g_2(\theta)$. Então $U\in\mathcal{U}$ e dado que δ_1 é UNVVUM

$$E_\theta(\delta_1 U) = 0 \Rightarrow E_\theta(\delta_1(\delta_2 - g_2(\theta))) = 0 \Rightarrow E_\theta(\delta_1\delta_2) - g_2(\theta)\underbrace{E_\theta(\delta_1)}_{g_1(\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow E_\theta(\delta_1\delta_2) = g_2(\theta)g_1(\theta) \quad , \forall \theta\in\Omega.$$

Assim, $Cov_\theta(\delta_1,\delta_2) = E_\theta(\delta_1\delta_2) - E_\theta(\delta_1)E_\theta(\delta_2) = g_1(\theta)g_2(\theta) - g_2(\theta)g_1(\theta) = 0$

logo,

$$Var_\theta(a\delta_1 + b\delta_2) = a^2 Var_\theta(\delta_1) + b^2 Var(\delta_2) - ab\underbrace{Cov_\theta(\delta_1,\delta_2)}_{0}$$
$$= a^2 \underbrace{Var_\theta(\delta_1)}_{<\infty} + b^2 \underbrace{Var(\delta_2)}_{<\infty}$$

e dado que a e b são números reais fixados e $Var_\theta(\delta_1)<\infty$ e $Var_\theta(\delta_2)<\infty$, então $Var_\theta(a\delta_1+b\delta_2)<\infty$. Assim, $a\delta_1(X)+b\delta_2(X)$ tem variância finita.

Por outro lado, seja $V\in\mathcal{U}$, então como δ_1 e δ_2 são ENVVUM, $\forall\theta\in\Omega$

$$E_\theta(\delta_1 V) = 0 \quad \text{e} \quad E_\theta(\delta_2 V) = 0$$

Portanto,

$$E_\theta[(a\delta_1 + b\delta_2)V] = a E_\theta[\delta_1 V] + b E_\theta[\delta_2 V]$$
$$= a\cdot 0 + b\cdot 0$$
$$= 0$$

assim, dada esta condição necessária e suficiente, o estimador $a\delta_1(X)+b\delta_2(X)$ com a e b números reais fixados é ENVVUM de $ag_1(\theta)+bg_2(\theta)$.

(15) Seja $(X_1,\dots,X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição discreta com função de probabilidade $f_{\theta,j}$, em que $\theta>0$ e $j=1,2$; $f_{\theta,1}$ é a distribuição de Poisson de média θ e $f_{\theta,2}$ é a distribuição geométrica de parâmetro $\theta/(1+\theta)$, isto é,

$$f_{\theta,2}(x)=\left[1-\frac{\theta}{1+\theta}\right]\left[\frac{\theta}{1+\theta}\right]^x,\quad x=0,1,2,\dots$$

Existe ENVVUM de θ? Justifique.

$X_1,X_2,\dots,X_n$ amostra aleatória de uma distribuição discreta com

$$f_{\theta,j}=\begin{cases}\dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, & \theta>0 \text{ e } j=1,\ x=0,1,2,\dots\\[2mm] \left(1-\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^x, & \theta>0 \text{ e } j=2,\ x=0,1,2,\dots\end{cases}$$

Se existe o ENVVUM ele deve ser igual para $j=1$ e $j=2$.

$\Rightarrow$ Para $j=1$, Sabemos que $\bar{X}$ é o ENVVUM para θ.

$\Rightarrow$ Para $j=2$, temos:

$$P_\theta(x)=\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_i}=\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_i}=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\sum x_i}$$

$$=\exp\left[-n\log(1+\theta)+\log\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\sum_{i=1}^n x_i\right]$$

$$=\exp\Big[\underbrace{\log\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)}_{\eta(\theta)}\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{T(x)}-n\log(1+\theta)\Big]\cdot\underbrace{1}_{h(x)}$$

Como o domínio de $\eta(\theta)=\log\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$ contém rectângulos abertos, então $T(X)=\sum_{i=1}^n x_i$ é suficiente e completa.

Temos que $p=\frac{1}{1+\theta}$ e $q=\frac{\theta}{1+\theta}$

$$\Rightarrow E(X)=\frac{q}{p}=\frac{\theta/(1+\theta)}{1/(1+\theta)}=\theta\quad\Rightarrow\quad E(\bar{X})=\theta$$

Assim, para $j=1$ e $j=2$, temos que $\bar{X}$ é o ENVVUM de θ. Portanto $\bar{X}$ é o ENVVUM de θ, $\forall j=1$ e $j=2$.

(17) Sejam $X_1, \dots, X_n$ n observações independentes de X, que tem função de probabilidade

$$f_N(x) = P_N(X=x) = \frac{a(x)}{C(N)}, \quad x = 1, 2, \dots, N,$$

em que N é inteiro positivo desconhecido, $a(x) > 0$, $C(N) = \sum_{x=1}^{N} a(x)$.

(a) Mostre que $X_{(n)} = \text{maximo}(X_1, \dots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa.

(b) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de N.

(a) Dada a f.p. de X, temos que se $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, então

Notação $[1,N]$ está errada, melhor $\{1,2,\dots,N\}$.

$$P_N(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P_N(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a(x_i)}{C(N)} I_{[1,N]}(x_i)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} a(x_i)}{[C(N)]^n} \cdot I_{[1,N]}(x_{(n)})$$

logo, se $g_N(x_{(n)}) = [C(N)]^{-1} I_{[1,N]}(x_{(n)})$ e $h(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} a(x_i)$, então, $X_{(n)}$ é uma estatística suficiente para N, pelo C.F.

Para que $X_{(n)}$ seja completa temos que mostrar que para qualquer função f de $X_{(n)}$ a valores reais $E_N[f(X_n)] = 0$, $\forall N \in \{1, 2, \dots\}$ então $f(X_{(n)}) = 0$, q.c.P.

De jeito, se $\forall N$

$$E_N[f(X_n)] = 0 \Rightarrow \sum_{y=0}^{N} f_{X_{(n)}}(y) f(y) = 0$$

Em que, $f_{X_{(n)}}(y) = n \left[\frac{C(y)}{C(N)}\right]^{n-1} \frac{a(y)}{C(N)}$, $y = 1, \dots, N$.

Como $a(y) > 0 \Rightarrow C(N) = \sum_{y=1}^{N} a(y) > 0$ e portanto $f_{X_{(n)}}(y) > 0$, $y = 1, \dots, N$.

Assim, se $E_N[f(y)] = 0$ $\forall N = \{1, 2, \dots\}$, então se

$N = 1$:

$$E_N[f(y)] = \underbrace{f_{X_{(n)}}(1)}_{>0} f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$N = 2$:

$$E_N[f(y)] = \underbrace{f_{X_{(n)}}(1) f(1)}_{=0} + \underbrace{f_{X_{(n)}}(2)}_{>0} f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$$

Assumindo que para $N = K > 2$, $E_K[f(y)] = 0 \Rightarrow f(y) = 0$ q.c.P. então, para $N = K+1$ temos que

$$E_N[f(y)] = \sum_{y=0}^{K+1} f_{X_{(n)}}(y) f(y) = \underbrace{\sum_{y=0}^{K} f_{X_{(n)}}(y) f(y)}_{=0} + \underbrace{f_{X_{(n)}}(K+1)}_{>0} f(K+1) = 0$$

$$\Rightarrow f(K+1) = 0$$

Portanto, $\forall N = \{1, 2, \dots\}$ $E_N[f(X_{(n)})] = 0 \Rightarrow f(X_{(n)}) = 0$, q.c.P. e assim $X_{(n)}$ é uma estatística completa para N.

(b) Dada a amostra $\underline{x}$ de tamanho n, a função de verossimilhança de N é

$$L(N) = \frac{\prod_{i=1}^{n} a(x_i)}{[C(N)]^n} I_{[1,N]}(x_{(n)})$$

função de N, então melhor escrever a indicadora como $I_{\{x_{(n)}, x_{(n)}+1, \dots\}}(N)$

mas, $I_{[1,N]}(x_{(n)})$ é um ou zero, e dada a amostra $\prod_{i=1}^{n} a(x_i)$ é fixado, assim maximizar $L(N)$ equivale à minimizar $C(N)$ e dado que $C(N)$ é crescente e $N \geq x_{(n)}$ o valor de maximiza $L(N)$ é $\hat{N} = x_{(n)}$. Portanto o estimador de maxima verossimilhança de N é $\hat{N} = x_{(n)}$.

$$I_{\{1,2,\dots,N\}}(x_{(n)}) = 1 \Leftrightarrow x_{(n)} \leq N \Leftrightarrow N \in \{x_{(n)}, x_{(n)}+1, \dots\}$$

$$\therefore I_{\{1,2,\dots,N\}}(x_{(n)}) = I_{\{x_{(n)}, x_{(n)}+1, \dots\}}(N).$$

(21) Sejam $X_1, \dots, X_n$ n observações independentes de uma distribuição exponencial $E(a,b)$, $a \in (-\infty, 0]$ e $b>0$ é conhecido

(a) Mostre que $X_{(1)} = \min_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i$ é uma estatística suficiente, mas não é completa.

$$f_a(x_i) = \frac{1}{b} \exp\left[-\frac{x_i - a}{b}\right] I_{[a,\infty)}(x_i)$$

$$\Rightarrow f_a(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{b^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - a}{b}\right] \prod_{i=1}^{n} I_{[a,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{b^n} \exp\left[-\frac{n\bar{x}}{b} + \frac{na}{b}\right] \prod_{i=1}^{n} I_{[a,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{b^n} \exp\left[\frac{na}{b}\right] I_{[a,\infty)}(x_{(1)}) \times \exp\left[-\frac{n\bar{x}}{b}\right]$$

$$= g_a(T(X))\, h(x_1, \dots, x_n)$$

onde $T(X) = X_{(1)}$, $g_a(T(X)) = \frac{1}{b^n} \exp\left[\frac{na}{b}\right] I_{[a,\infty)}(x_{(1)})$ e

$h(x_1, \dots, x_n) = \exp\left[-\frac{n\bar{x}}{b}\right]$. Logo, $X_{(1)}$ é uma estatística suficiente.

Agora, vamos mostrar que $X_{(1)}$ não é completa. Temos que se $T = X_{(1)}$, então

$$E_a[g(T)] = 0 \quad \forall a<0 \iff \frac{n}{b} \int_a^{\infty} g(t) \exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right] dt = 0 \quad \forall a<0$$

Escolhamos g como:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } a < t \le 0 \\ ct + d; & \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

Logo,

Por que?

$$E_a[g(T)] = 0 \quad \forall a<0 \iff \frac{n}{b} \int_0^{\infty} (ct+d) \exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right] dt = 0 \quad \forall a<0$$

$$\iff c \int_0^{\infty} t \cdot \exp\left[-\frac{n}{b} t\right] dt + d \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{n}{b} t\right] dt = 0$$

$$\iff \frac{b^2 c}{n^2} \Gamma(1) + \frac{bd}{n} = 0$$

$$\iff \frac{bc}{n} + d = 0$$

Consideremos $c = 1$ e $d = -\frac{b}{n}$. Então

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } a < t \le 0 \\ t - \frac{b}{n}; & \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

Note que $E_a[g(T)] = 0$, mas $g(T) \neq 0$ Portanto $X_{(1)}$ não é completa.

(b) Encontre o ENVVUM de a.

Sugestão: Considere $g(X_{(1)}) = (cX_{(1)}+d)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})$, com c e d constantes. Mostre que $g(X_{(1)})$ é não correlacionado com os estimadores não viciados de zero.

Vamos caracterizar os estimadores não viesados do zero. Temos que $\mathcal{U}(X_{(1)})$ é não viesado do zero se e só se $E[\mathcal{U}(X_{(1)})]=0$, $\forall a\in(-\infty,0]$,

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{b}\int_a^{\infty}\mathcal{U}(t)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt=0 \quad \forall a\in(-\infty,0]$$

Em particular, se $a=0$ temos que

$$\frac{n}{b}\int_0^{\infty}\mathcal{U}(t)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt=0$$

Se $a<0$, então

$$\frac{n}{b}\int_a^{0}\mathcal{U}(t)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt=\frac{n}{b}\int_a^{\infty}\mathcal{U}(t)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt-\frac{n}{b}\int_0^{\infty}\mathcal{U}(t)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt$$

$$=0$$

logo $\mathcal{U}(t)=0$ q.c $\forall t\in(-\infty,0]$, pois $\mathcal{U}(t)$ não pode depender do parâmetro a. Isto mostra que o único estimador não viciado de zero deve ser o estimador nulo para $t\in(-\infty,0]$.

Consideremos $g(X_{(1)})=(cX_{(1)}+d)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})$ e determinemos as constantes c e d de modo que $g(X_{(1)})$ seja não viciado para a, i.e, $E[g(X_{(1)})]=a$

$$E_a[(cX_{(1)}+d)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})]=a \quad \forall a<0 \iff \underbrace{\frac{n}{b}\int_a^{\infty}(ct+d)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt}_{*}=a$$

Fazendo, $u=ct+d \Rightarrow du=c\,dt$

$dv=\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt \Rightarrow v=-\frac{b}{n}\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]$ em $*$

Então,

$$E_a[(cX_{(1)}+d)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})]=a \quad \forall a<0 \iff$$

$$\frac{n}{b}\left\{\frac{b}{n}(ct+d)\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]\Big|_0^a+\frac{bc}{n}\int_a^{0}\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]dt\right\}=a$$

$$\iff$$

$$\frac{n}{b}\left\{\frac{b}{n}(ac+d)-\frac{bd}{n}\exp\left[\frac{na}{b}\right]+\frac{b^2c}{n^2}\exp\left[-\frac{n}{b}(t-a)\right]\Big|_0^a\right\}=a$$

$$\iff$$

$$ac+d-d\exp\left[\frac{na}{b}\right]+\frac{bc}{n}-\frac{bc}{n}\exp\left[\frac{na}{b}\right]=a$$

$$\iff$$

$$ac-\left(\frac{bc}{n}+d\right)\exp\left[\frac{na}{b}\right]+\left(\frac{bc}{n}+d\right)=a \iff c=1 \text{ e } \frac{bc}{n}+d=0 \Rightarrow d=-\frac{b}{n}$$

Portanto $g(X_{(1)})=\left(X_{(1)}-\frac{b}{n}\right)I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})$ é o estimador não viciado de a.

Para provar que $g(X_{(1)})$ é o ENVVUM mostraremos que ele é não correlacionado com os estimadores não viesados do zero, os quais são os $u(X_{(1)})$ tais que $u(X_{(1)})=0$, se $X_{(1)}<0$. Assim,

$$E[g(X_{(1)}) \times u(X_{(1)})] = E(0) = 0.$$

Portanto, $g(X_{(1)}) = \left(X_{(1)} - \frac{b}{n}\right) I_{(-\infty,0]}(X_{(1)})$ é o ENVVUM de a.

9.8

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Lista de Exercícios 3 - 2º semestre de 2014

Prof. Silvia L. P. Ferrari.

Alunos: Mario José Pacheco López - 9034481

Hugo Alberto Brango García - 9176006

IME - USP, 06/10/2014.

① Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade

$$f_\theta(x) = P_\theta(X=x) = \frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)}, \quad x=0,1,\dots; \qquad (1)$$

$a(x)\geq 0$ e $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^+$; $c(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} a(x)\theta^x < \infty$ (distribuição de série de potências). Considere uma amostra de uma única observação de X. Obs.: Quando necessário você pode fazer alguma suposição sobre o espaço paramétrico.

(a) Obtenha o limite inferior de Cramér-Rao para a variância de estimadores não viciados de θ^r, r inteiro positivo.

Seja $\delta(x)$ um estimador não viesado de $g(\theta)=\theta^r$, r inteiro positivo, então

$$Var_\theta(\delta) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

Seja $\theta \neq 0$.

$$\log f_\theta(x) = \log\left[\frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)}\right] = \log a(x) + x\log\theta - \log c(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(x) = \frac{x}{\theta} - \frac{c'(\theta)}{c(\theta)}, \qquad c'(\theta) = \frac{\partial c(\theta)}{\partial\theta}$$

mas, $c(\theta) = \sum_{x=0}^{+\infty} a(x)\theta^x < \infty \Rightarrow c'(\theta) = \sum_{x=0}^{+\infty} a(x)\, x\,\theta^{x-1}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x) = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{c''(\theta)c(\theta) - [c'(\theta)]^2}{[c(\theta)]^2}$$

$$= -\frac{x}{\theta^2} - \frac{c''(\theta)}{c(\theta)} + \frac{[c'(\theta)]^2}{[c(\theta)]^2}, \qquad c''(\theta) = \frac{\partial^2 c(\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$\Rightarrow I(\theta) = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_\theta(x)\right] = \frac{E(X)}{\theta^2} + \frac{c''(\theta)}{c(\theta)} - \left[\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}\right]^2$$

mas, $E_\theta(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x\,\frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)} = \frac{\theta}{c(\theta)}\sum_{x=0}^{+\infty} a(x)\,x\,\theta^{x-1} = \frac{\theta c'(\theta)}{c(\theta)}$

Então,

$$I(\theta) = \frac{c'(\theta)}{\theta c(\theta)} + \frac{c''(\theta)}{c(\theta)} - \left[\frac{c'(\theta)}{c(\theta)}\right]^2, \quad \theta \neq 0$$

mas,

$$\theta c'(\theta) = \sum_{x=0}^{+\infty} x a(x)\theta^x = c(\theta)E_\theta(X) \Rightarrow E_\theta(X) = \frac{\theta c'(\theta)}{c(\theta)} \text{ e}$$

$$\theta^2 c''(\theta) = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)a(x)\theta^x = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 a(x)\theta^x - \sum_{x=0}^{+\infty} x a(x)\theta^x = c(\theta)E(X^2) - c(\theta)E(X)$$

$$= c(\theta)[E_\theta(X^2) - E_\theta(X)] \Rightarrow [E_\theta(X^2) - E_\theta(X)] = \frac{\theta^2 c''(\theta)}{c(\theta)}$$

$$\Rightarrow I(\theta) = \frac{E_\theta(X)}{\theta^2} + \frac{E_\theta(X^2) - E_\theta(X)}{\theta^2} - \left[\frac{E_\theta(X)}{\theta}\right]^2 = \frac{1}{\theta^2}\left[E_\theta(X^2) - [E_\theta(X)]^2\right]$$

$$= \frac{1}{\theta^2} Var_\theta(X), \quad \theta \neq 0$$

logo, como $g'(\theta) = r\theta^{r-1}$, então o LICR é

$$Var_\theta(\delta(X)) \geq \frac{r^2\theta^{2(r-1)}}{\frac{1}{\theta^2}Var_\theta(X)} = \frac{r^2\theta^{r2}}{Var_\theta(X)}, \quad \theta \neq 0.$$

Em que,

$$Var_\theta(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2\frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)} - \left[\sum_{x=0}^{+\infty} x\frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)}\right]^2$$

(b) Mostre que se $a(x)>0$ para todo $x=0,1,\dots$ então θ^r é estimável para qualquer r inteiro positivo e seu estimador não viciado de variança uniformemente mínima (ENVVUM) é

$$\delta_r(x) = \begin{cases} 0, & x=0,\dots,r-1 \\ \frac{a(x-r)}{a(x)}, & x=r,r+1,\dots \end{cases}$$

Temos que, se $a(x)>0 \;\forall x=0,1,\dots$, então

$$E_\theta(\delta_r(X)) = \sum_{x=r}^{+\infty}\frac{a(x-r)}{a(x)}\frac{a(x)\theta^x}{c(\theta)} = \sum_{x=r}^{+\infty}\frac{a(x-r)\theta^x}{c(\theta)} = \sum_{y=0}^{+\infty}\frac{a(y)\theta^{y+r}}{c(\theta)} = \theta^r\overbrace{\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{a(y)\theta^y}{c(\theta)}}^{f_\theta(y)\;=\;1}$$

$$= \theta^r$$

$y = x-r \to y=0,1,\dots$; $x = y+r$

Seria interessante calcular $\delta_r(X)$.

então, $\delta_r(X)$ é não viciado para θ^r, portanto $g(\theta) = \theta^r$ é estimável, para qualquer r inteiro positivo.

Também,

$$f_\theta(x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)} = \exp\{x \log\theta - \log C(\theta)\}\, a(x) \quad , \quad \theta > 0$$

e se $a(x) > 0$, $\forall x = 0,1,\ldots$, então $f_\theta(x)$ pertence à família exponencial unidimensional, com $\eta(\theta) = \log\theta$, $T(x) = x$, $B(\theta) = \log C(\theta)$ e $h(x) = a(x)$, ou à família na forma canônica, com $\eta = \log(\theta)$ e $A(\eta) = \log C(e^\eta)$, e dado que nem T nem η satisfazem restrições lineares, e o espaço paramétrico para η contém intervalos então a distribuição $f_\theta(x)$ pertence à família exponencial canônica de posto completo, portanto $T(x) = x$ é uma estatística suficiente e completa para θ, e dado que $\delta_r(x)$ é função de $T(x)$ e é não viesado a estatística $\delta_r(x)$ é o ENVVUM para θ^r.

(c) Dizemos que X tem distribuição binomial negativa con parâmetros p e m ($0<p<1$, m inteiro positivo) se sua função de probabilidade é

$$P_{p,m}(X=x) = \binom{m+x-1}{m-1} p^m (1-p)^x \quad , \quad x = 0,1,\ldots$$

e escrevemos $X \sim BN(p,m)$. Admitindo que m é conhecido, obtenha o ENVVUM de p baseado em uma única observação de $X \sim BN(p,m)$ usando (b).

Se m é conhecido, dada uma a.a. de tamanho um de $BN(p,m)$, então

$$P_p(X=x) = \binom{m+x-1}{m-1} p^m (1-p)^x \quad , \; x = 0,1,\ldots \; , \; p \in (0,1) \; , \; m \text{ inteiro positivo.}$$

fazendo $\theta = 1-p$,

$$P_\theta(X=x) = \binom{m+x-1}{m-1}(1-\theta)^m \theta^x \quad , \quad x = 0,1,\ldots \quad \theta \in (0,1)$$

e dado que, para $y \neq 1$, $\frac{1}{(1-y)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{s-1} y^k$, s inteiro positivo,

então,

$$P_\theta(X=x) = \frac{\binom{m+x-1}{m-1}\theta^x}{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m+x-1}{m-1}\theta^x} = \frac{a(x)\theta^x}{\sum_{k=0}^{+\infty} a(x)\theta^x} = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)} \quad , \quad x = 0,1,\ldots, \; \theta \in (0,1)$$

em que $a(x) = \binom{m+x-1}{m-1} > 0$ e $C(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a(x)\theta^x < \infty$.

Assim, X tem distribuição de série de potências e o ENVVUM de θ é

Por (b) $\delta(x) = ?$ $\quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{a(x-1)}{a(x)}, & x = 1,2,\ldots \end{cases}$ $\rightarrow$ Calcular!

$a(x) = ?$

logo, dado que $p = 1-\theta$, seja $T(x) = 1 - \delta(x)$. Como $E(T(x)) = 1-\theta = p$ e $T(x)$ é também função de X, estatística suficiente completa, então $T(x)$ é o ENVVUM de p.

• Notar aqui que: $f_p(x) = \frac{a(x)(1-p)^x}{C(p)} = \exp\{x\log(1-p) - \log C(p)\}\, a(x)$ também pertence à família exponencial de posto completo, com ~~parâmetro natural~~ $\eta = \log(1-p)$, $T(x) = x$, $A(\eta) = \log C(1-e^\eta)$ e $h(x) = a(x)$, portanto X é suf. completa para p.

(d) Considere agora uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de observações independentes da distribuição (1). Mostre que se $a(x) > 0$ para todo $x = 0,1,\ldots$, então θ^r é estimável para qualquer r inteiro positivo e encontre seu ENVVUM.

Dada a a.a. da distribuição (1), temos que

$$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a(x_i)\theta^{x_i}}{C(\theta)} = \frac{\gamma_n(x)\,\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{[C(\theta)]^n}$$

$$= \exp\left\{(\log\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i - n\log C(\theta)\right\}\gamma_n(x) \quad , \quad \gamma_n(x) = \prod_{i=1}^{n} a(x_i)$$

Assim, $f_\theta(\underset{\sim}{x})$ pertence a família exponencial com $\eta(\theta) = \log\theta$, $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $B(\theta) = n\log C(\theta)$ e $h(\underset{\sim}{x}) = \gamma_n(\underset{\sim}{x})$. Alem disso, nem o parâmetro natural $\eta = \log\theta$ nem a estatística $T(\underset{\sim}{x})$ satisfazem restrições lineares, e o espaço paramétrico para η contém intervalos, então $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ é uma estatística suficiente completa para θ.

Por outro lado,

$$M_T(t) = E_\theta\left[e^{tT}\right] = E_\theta\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] = E_\theta\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tx_i}\right] \overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} E_\theta\left[e^{tx_i}\right] \overset{i.d}{=} \left[E\left(e^{tx_1}\right)\right]^n$$

$$= \left[\sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx}\frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}\right]^n = \frac{1}{[C(\theta)]^n}\left[\sum_{x=0}^{+\infty} a(x)(\theta e^t)^x\right]^n = \frac{[C(\theta e^t)]^n}{[C(\theta)]^n} \quad (1)$$

Tambem, seja $P_\theta(Y=y) = \dfrac{\gamma_n(y)\theta^y}{[C(\theta)]^n}$, $y = 0,1,\ldots$, com $\sum_{y=0}^{+\infty}\gamma_n(y)\theta^y = [C(\theta)]^n$

com $\gamma_n(y)$ o coeficiente de θ^y na expansão de serie de potencia de $[C(\theta)]^n$, então

$$M_Y(t) = E_\theta\left[e^{tY}\right] = \sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\gamma_n(y)(\theta e^t)^y}{[C(\theta)]^n} = \frac{[C(\theta e^t)]^n}{[C(\theta)]^n} \quad (2)$$

Assim, de (1) e (2), $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$, distribuição de series de potencias $(M_Y(t) = M_T(t))$

$$P_\theta(T=t) = \frac{\gamma_n(t)\theta^t}{[C(\theta)]^n} \quad , \quad t = 0,1,\ldots$$

Então, um estimador de θ^r é

$$\delta_r(T) = \begin{cases} 0, & T < r \\ \dfrac{\gamma_n(T-r)}{\gamma_n(T)}, & T \geq r \end{cases}$$

com,

$$E_\theta(\delta_r(T)) = \sum_{t=r}^{+\infty}\frac{\gamma_n(t-r)}{\gamma_n(t)}\frac{\gamma_n(t)\theta^t}{[C(\theta)]^n} \underset{y=t-r}{=} \sum_{y=0}^{+\infty}\frac{\gamma_n(y)\theta^{y+r}}{[C(\theta)]^n} = \theta^r\cancel{\sum_{y=0}^{+\infty}\overbrace{\frac{\gamma_n(y)\theta^{y}}{[C(\theta)]^n}}^{f_\theta(y)}}^{1} = \theta^r$$

Assim, temos que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ e $\delta_r(T)$ é não viesado para $g(\theta) = \theta^r$, $r = 1,2,\ldots$, por tanto $\delta_r(T)$ é ENVVUM de θ^r.

3) Suponha que $X_1,\dots,X_n$ sejam variáveis aleatórias iid com distribuição $\mathcal{U}(0,\theta)$, $\theta>0$.

(a) Mostre que

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^\theta x f_\theta(x)dx \neq \int_0^\theta x \frac{d}{d\theta} f_\theta(x)dx$$

em que f_θ é a densidade de $X_{(n)}$, a maior estatística de ordem.

Solução:

$X_{(n)} = \max\{x_1,\dots,x_n\}$

$P[X_{(n)}\le x] = P[X_1\le x,\dots,X_n\le x] = \prod_{i=1}^n P[X_i\le x] = \prod_{i=1}^n P[X_1\le x] = [F_{X_1}(x)]^n$ (1)

$F_{X_1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta}dx_1 = \frac{1}{\theta}x_1\Big|_0^x = \frac{x}{\theta} \Rightarrow F_{X_1}(x) = \frac{x}{\theta} I_{(0,\theta)}(x)$ (2)

Por (1) e (2) temos que: $F_{X_{(n)}}(x) = \frac{x^n}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x)$

$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \frac{dF_{X_{(n)}}(x)}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x) \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x)$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta x f_\theta(x)dx = \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{d}{d\theta}\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx = \frac{d}{d\theta}\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$

$= \frac{d}{d\theta}\frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{d}{d\theta}\frac{n}{n+1}\theta = \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta x f_\theta(x)dx = \frac{n}{n+1}$ (3)

• $\int_0^\theta x\frac{d}{d\theta}f_\theta(x)dx = \int_0^\theta x\left[\frac{d}{d\theta}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\right]dx = \int_0^\theta nx^n\left[\frac{d}{d\theta}\theta^{-n}\right]dx$

$= \int_0^\theta nx^n(-n)\theta^{-n-1}dx = -\frac{n^2}{\theta^{n+1}}\int_0^\theta x^n dx =$

$= -\frac{n^2}{\theta^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = -\frac{n^2}{\theta^{n+1}}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow \int_0^\theta x\frac{d}{d\theta}f_\theta(x)dx = -\frac{n^2}{n+1}$ (4)

Por (3) e (4) temos que:

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^\theta x f_\theta(x)dx \neq \int_0^\theta x \frac{d}{d\theta} f_\theta(x)dx$$

(b) Mostre que a desigualdade da informação vale para o ENVVUM de θ.

Nesse caso, $\delta(X) = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ é o ENVVUM de θ

• $f_{X_1}(x) = \frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x) \Rightarrow l(\theta) = \log f_{X_1}(x) = -\log\theta \Rightarrow \frac{dl(\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\theta}$

• $I(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial l(\theta)}{d\theta}\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2}$

$\Rightarrow I(\theta) = nI_1(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$ onde $I_1(\theta)$ é a informação sobre θ contida em X_1.

• $Var_\theta(\delta(X)) = \frac{(n+1)^2}{n^2}var(X_{(n)})$

Note que, $\frac{X_{(n)}}{\theta} \sim Beta(n,1) \Rightarrow Var(X_{(n)}) = \frac{(n)(1)\theta^2}{(n+1)^2(n+1+1)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$

Portanto

$$Var(\delta(x)) = \frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{n}{(n+1)^2}\cdot\frac{\theta}{(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \quad (6)$$

Supor que a desigualdade da informação de Fisher é verdadeira, em nesse caso, então por (5) e (6) temos

$$Var_\theta(\delta(X)) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{I(\theta)}, \text{ onde } g(\theta)=\theta$$

$$\iff \frac{\theta^2}{n(n+2)} \geq \frac{(1)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{n} \iff \frac{1}{n+2} \geq 1$$

$$\iff 1 \geq n+2 \quad (\rightarrow\leftarrow)$$

Assim, a desigualdade da informação não vale para o ENVVUM de θ.

$\boxed{\text{Justificação *}}$ $X \sim U(0,\theta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x)$ e $f_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x)$

Se $E_\theta[g(X_{(n)})]=0 \Rightarrow \int_0^\theta g(t)f_{X_{(n)}}(t)dt = \int_0^\theta g(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt = 0$

$$\Rightarrow \int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt = 0 \Rightarrow g(t)=0 \text{ q.c. } \forall \theta \in (0,\infty)$$

Assim, $X_{(n)}$ é uma estatística completa

• $f(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$

onde $\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) = 1 \iff 0 < x_i < \theta, \quad \forall i=1,\dots,n$

$\iff 0 < x_{(n)} < \theta$

$\iff I_{(0,\theta)}(x_{(n)}) = 1$

$\Rightarrow f(\underline{x}) = \frac{1}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x_{(n)}).1 = g_\theta(x_{(n)})h(x)$ sendo $g_\theta(x_{(n)}) = \frac{1}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x_{(n)})$ e $h(x)=1$

∴ Pelo critério da factoração temos que $X_{(n)}$ é uma estatística suficiente

• $E_\theta(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}\theta \Rightarrow E_\theta\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) = \theta$ $\quad \delta(x) = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

então $\boxed{\delta(x) = \frac{n+1}{\theta}X_{(n)}}$ é não viciado para θ.

X

portanto, $\boxed{\delta(x) = \frac{n+1}{\theta}X_{(n)}}$ é o ENVVUM de θ.

X ↳ $\delta(x)$ não pode depender de θ!

5) Seja $X=(X_1,\dots,X_n)$ amostra aleatória X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x;a,\theta)=\theta a^{\theta}x^{-(\theta+1)}I_{(a,\infty)}(x),$$

em que $a\in(0,1]$ e $\theta>0$.

(a) Supondo a conhecido, encontre a informação de Fisher para θ.

$$l(\theta)=\log f(x;a,\theta)=\log\theta+\theta\log a-(\theta+1)\log x$$
$$=\log\theta+\theta\log a-\theta\log x-\log x$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}+\log a-\log x \Rightarrow \frac{\partial^2\log(\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow I_1(\theta)=E_\theta\left[-\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2}\right]=\frac{1}{\theta^2}$$

$\Rightarrow I(\theta)=nI_1(\theta)=\frac{n}{\theta^2}$ onde $I_1(\theta)$ é a informação sobre θ contida em x_1.

$\therefore I(\theta)=\frac{n}{\theta^2}$ é a informação de Fisher para θ.

(b) Mostre que o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de a, quando θ é conhecido é

$$\hat{a}=I_{(1,\infty)}(X_{(1)})+\left(1-\frac{1}{n\theta}\right)X_{(1)}I_{[0,1)}(X_{(1)}),$$

em que $X_{(1)}=\min(X_1,\dots,X_n)$.

Sugestão: Mostre que $X_{(1)}$ é uma estatística suficiente e caracterize a classe de estimadores não viesados do zero, que sejam funções de $X_{(1)}$.

Vamos determinar a classe dos estimadores não viesados de zero, isto é

$$U=\{U,E(U)=0,\ E(U^2)<\infty,\ \theta\in\Omega\}$$

Note que,

$f(\underline{x})=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\theta^n a^{n\theta}\prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}I_{(a,\infty)}(x_i)$ onde $\prod_{i=1}^n I_{(a,\infty)}(x_i)=1 \iff a<x_i<\infty\ \forall i$

$\iff x_{(1)}>a\ \forall i \iff I_{(a,\infty)}(x_{(1)})$

$$\Rightarrow f(\underline{x})=\underbrace{\theta^n a^{n\theta}I_{(a,\infty)}(x_{(1)})}_{g_\theta(x_{(1)})}\underbrace{\prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}}_{h(x)}=g_\theta(x_{(1)})h(x)$$

Pelo critério da factoração $T(X)=X_{(1)}$ é uma estatística suficiente para a.

Agora, vamos encontrar a distribuição de $X_{(1)}$.

Temos que a distribuição para o j-ésimo estatístico de ordem é

$$f_{X_{(j)}}(x)=\frac{n!}{(n-1)!}f_X(x)[1-F_X(x)]^{n-1}\quad \text{para } j=1,\text{ então}$$

$$f_{X_{(1)}}(x)=nf_X(x)[1-F_X(x)]^{n-1}\qquad (1)$$

onde

$$F_X(x)=\int_a^x\theta a^\theta t^{-(\theta+1)}dt=\theta a^\theta\int_a^x t^{-\theta-1}dt=\theta a^\theta\left.\frac{t^{-\theta}}{-\theta}\right|_a^x=-a^\theta(x^{-\theta}-a^{-\theta})=1-a^\theta x^{-\theta},\quad \begin{matrix}\theta>0\\ a\in(0,1]\end{matrix}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x)=n\theta a^\theta x^{-(\theta+1)}[1-(1-a^\theta x^{-\theta})]^{n-1}\quad \text{por } (1)$$
$$=n\theta a^\theta x^{-(\theta+1)}(a^\theta x^{-\theta})^{n-1}$$
$$=n\theta a^{\theta+n\theta-\theta}x^{-\theta-1-n\theta+\theta}$$
$$=n\theta a^{n\theta}x^{-(n\theta+1)}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(1)}}(x)=n\theta a^{n\theta}x^{-(n\theta+1)},\quad a\in(0,1],\ \theta>0,\ x>a$$

Agora, vamos determinar U, resolvendo a equação $E[g(X_{(1)})]=0$.

$$0=E_a[g(X_{(1)})]=\int_a^{\infty} g(t)\, n\theta a^{n\theta}\, t^{-(n\theta+1)}\,dt = n\theta a^{n\theta}\int_a^{\infty} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt = 0.$$ Como $a\in(0,1]$ temos

$$0=\int_a^{1} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt + \int_1^{\infty} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt = 0 \quad \forall a\in(0,1]$$

Fazendo $a=1$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt=0 \Rightarrow \int_a^{1} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt = 0$

Portanto, a classe de estimadores não viesados do zero é dada por

$$\boxed{U=\left\{g(X_{(1)})=0 \text{ q.c em } (0,1) \text{ com } \int_1^{\infty} g(t)\, t^{-(n\theta+1)}\,dt=0\right\}} \quad (2)$$

Note que,

$$E_a(\hat{a}) = \int_1^{\infty} \frac{n\theta a^{n\theta}}{t^{n\theta+1}}\,dt + \left(1-\frac{1}{n\theta}\right)\int_a^{1} t\,\frac{n\theta a^{n\theta}}{t^{n\theta+1}}\,dt$$

$$= n\theta a^{n\theta}\int_1^{\infty} t^{-n\theta-1}\,dt + (n\theta-1)a^{n\theta}\int_a^{1} t^{-n\theta}\,dt$$

$$= \cancel{n\theta} a^{n\theta}\left.\frac{t^{-n\theta}}{-\cancel{n\theta}}\right|_1^{\infty} + (n\theta-1)a^{n\theta}\left.\frac{t^{-n\theta+1}}{-n\theta+1}\right|_a^{1} = a^{n\theta} - \frac{n\theta-1}{n\theta-1}a^{n\theta}\left[1-a^{-n\theta+1}\right]$$

$$= \cancel{a^{n\theta}} - \cancel{a^{n\theta}} - a^{n\theta}\, a^{-n\theta+1} = a$$

$\Rightarrow \hat{a}$ é não viesado para a.

Como $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)=0$, então

$$I(\theta)=E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)^2\right]-\left[E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)\right]^2 = Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)$$

Sabemos que:

$$\rho(Z,Y)\le 1 \Rightarrow \frac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{Var(Z)}\sqrt{Var(Y)}}\le 1$$

$$\Rightarrow Cov(Z,Y)\le\sqrt{Var(Z)}\sqrt{Var(Y)} \Rightarrow [Cov(Z,Y)]^2\le Var(Z)Var(Y)$$

Tomando, $Z=\delta(X)$ e $Y=\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(X)$, temos

$$Cov\left(\delta(x),\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)=E\left(\delta(x)\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)-E(\delta(x))\underbrace{E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)}_{0}$$

$$=E\left(\delta(x)\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)$$

$$=\int\delta(x)\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\,P_\theta(x)\,dx=\int\delta(x)\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}P_\theta(x)}{P_\theta(x)}P_\theta(x)\,dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\int\delta(x)P_\theta(x)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}E(\delta(x))$$

$$\Rightarrow Cov^2\left(\delta(x),\frac{\partial}{\partial\theta}\log P_\theta(x)\right)=\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E(\delta(x))\right]^2$$

Como,

$$E(g(X_{(1)}),\hat{a}) = E\left(g(X_{(1)})I_{(1,\infty)}(X_{(1)})\right)+\left(1-\frac{1}{n\theta}\right)E\left(X_{(1)}g(X_{(1)})I_{(0,1)}(X_{(1)})\right)$$

$$=\int_1^{\infty} g(t)f_{X_{(1)}}(t)\,dt+\left(1-\frac{1}{n\theta}\right)\underbrace{\int_a^{1} g(t)\,t\,f_{X_{(1)}}(t)\,dt}_{0}$$

$$=\int_1^{\infty} g(t)\cdot f_{X_{(1)}}(t)\,dt = 0 \quad \text{por } (2)$$

Como $\hat{a}$ é não viciado para a e $E[g(X_{(1)})\cdot\hat{a}]=0$, então $\hat{a}$ é o ENVVUM de a.

19) Seja $X=(X_1,\dots,X_n)$ um vetor de n variáveis aleatórias independentes cada qual com densidade $f(x-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, e $f(x)=\exp\{-(x+1)\}$, $x \geq -1$

(a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\delta(x)$ de ξ e verifique que é equivariante.

$$f(\underline{x}) = \exp\{-(x-\xi+1)\} I_{(\xi-1,\infty)}(x)$$

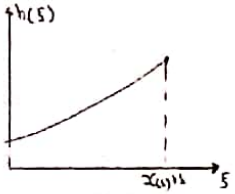
$$L(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \exp\{-(x_i-\xi+1)\} I_{(\xi-1,\infty)}(x_i) = \exp\{-n\bar{x}+n\xi-n\} \prod_{i=1}^{n} I_{(\xi-1,\infty)}(x_i)$$

onde,

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(\xi-1,\infty)}(x_i) = 1 \iff \xi-1 \leq x_i \ \forall i$$
$$\iff \xi \leq x_{(1)}+1$$
$$\iff I_{(-\infty,x_{(1)}+1)}(\xi)$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}) = \exp\{-(n\bar{x}+n)\} \exp\{n\xi\} I_{(-\infty,x_{(1)}+1)}(\xi)$$

Assim, $\delta(x)=x_{(1)}+1$ é EMV pois a função exponencial é crescente em $\mathbb{R}$.



• $\delta(x_1+a,\dots,x_n+a) = \min\{x_1+a,\dots,x_n+a\}+1 \quad \forall a$
$= \min\{x_1,\dots,x_n\}+1+a \quad \forall a$
$= \delta(x_1,\dots,x_n)+a \quad \forall a$

$\therefore$ O estimador de máxima verossimilhança $\delta(x)=x_{(1)}+1$ de ξ é equivariante

b) Encontre a distribuição de $n(\delta(X)-\xi)$. Mostre que $\delta(X)$ é um estimador viciado de ξ e obtenha seu risco sob perda quadrática.

Seja $Y=n(\delta(x)-\xi)$

$$F_Y(y)=P[Y\leq y] = P[n(\delta(x)-\xi)\leq y] = P\left[\delta(x) \leq \frac{y}{n}+\xi\right]$$
$$= P\left[x_{(1)}+1 \leq \frac{y}{n}+\xi\right] = P\left[x_{(1)} \leq \frac{y}{n}+\xi-1\right]$$
$$= 1-P\left[x_{(1)} > \frac{y}{n}+\xi-1\right] = 1-\left[P\left(x_1 > \frac{y}{n}+\xi-1\right)\right]^n$$
$$= 1-\left[1-P\left(x_1 \leq \frac{y}{n}+\xi-1\right)\right]^n$$

onde:

$$P\left(x_1 \leq \frac{y}{n}+\xi-1\right) = \int_{\xi-1}^{y/n+\xi-1} \exp\{-x+\xi-1\}dx$$

$u=-x+\xi-1$
$du=-dx$

$$= -\int_0^{-y/n} \exp\{u\}du = \int_{-y/n}^{0} \exp\{u\}du$$
$$= \exp\{u\}\Big|_{-y/n}^{0} = \exp\{0\}-\exp\{-y/n\}$$
$$= 1-\exp\{-y/n\}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = 1-\left[1-P\left(X_1 \leq \frac{y}{n}+\xi-1\right)\right]^n = 1-\left[1-1+\exp\{-y/n\}\right]^n$$
$$= 1-\left[\exp\{-y/n\}\right]^n$$

Portanto $F_Y(y) = 1 - \exp\{-y\}$ e $f_Y(y) = \exp\{-y\}$ (1)

Agora, $E_\xi(n(\delta(x)-\xi)) = 1$ pois $Y \sim \exp\{1\}$ por (1)

$\iff E(\delta(x)-\xi) = \frac{1}{n} \iff \boxed{E_\xi(\delta(x)) = \frac{1}{n} + \xi}$ (2)

• $Var_\xi(n(\delta(x)-\xi)) = 1$ por (1)

$\iff n^2 Var_\xi(\delta(x)-\xi) = 1 \iff Var_\xi(\delta(x)-\xi) = \frac{1}{n^2} \iff \boxed{Var_\xi(\delta(x)) = \frac{1}{n^2}}$ (3)

• $R(\xi, \delta(x)) = Var_\xi(\delta(x)) + [E_\xi(\delta(x)) - \xi]^2 = \frac{1}{n^2} + [\frac{1}{n} + \xi - \xi]^2$ Por (2) e (3)

$\Rightarrow \boxed{R(\xi, \delta(x)) = \frac{2}{n^2}}$

(c) obtenha o estimador de Pitman de ξ (estimador equivariante de risco mínimo sob perda quadrática). Mostre que é não viciado e calcule seu risco. Mostre que o estimador $\delta(x)$ é inadmissível.

$$\delta^*(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u f(x_1-u,\dots,x_n-u)\,du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1-u,\dots,x_n-u)\,du}$$ é o estimador de Pitman

Temos que, $f(x-u) = \exp\{-(n\bar{x}+n)\}\exp\{nu\} I_{(-\infty, x_{(1)}+1)}(u)$, então

• $$\int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} \exp\{-(n\bar{x}+n)\}\exp\{nu\}\,du = \exp\{-n\bar{x}-n\}\int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} \exp\{nu\}\,du$$

$z = nu$
$dz = n\,du$

$$= \exp\{-n\bar{x}-n\}\int_{-\infty}^{nx_{(1)}+n} \exp\{z\}\frac{dz}{n}$$

$$= \frac{\exp\{-n\bar{x}-n\}}{n}\left[\exp\{nx_{(1)}+n\} - 0\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} \exp\{-n\bar{x}-n+nu\}\,du = \frac{1}{n}\exp\{nx_{(1)}-n\bar{x}\} \quad (4)$$

• $$\int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} u\exp\{-n\bar{x}-n\}\exp\{nu\}\,du = \exp\{-n\bar{x}-n\}\int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} u\exp\{nu\}\,du$$

$z = nu$
$dz = n\,du$

$$= \exp\{-n\bar{x}-n\}\int_{-\infty}^{nx_{(1)}+n} \frac{z}{n}\exp(z)\frac{dz}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\exp\{-n\bar{x}-n\}\int_{-\infty}^{nx_{(1)}+n} z\exp(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{n^2}\exp\{-n\bar{x}-n\}\left[z\exp(z)\Big|_{-\infty}^{nx_{(1)}+n} - \int_{-\infty}^{nx_{(1)}+n}\exp(z)\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\exp\{-n\bar{x}-n\}\left[(nx_{(1)}+n)\exp\{nx_{(1)}+n\} - 0 - \exp\{nx_{(1)}+n\} + 0\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{x_{(1)}+1} u\exp\{-n\bar{x}-n+nu\}\,du = \frac{1}{n^2}\exp\{-n\bar{x}-n\}\exp\{nx_{(1)}+n\}\left[nx_{(1)}+n-1\right] \quad (5)$$

Por (4) e (5) temos que:

$$\delta^*(x) = \frac{\frac{1}{n^2}\exp\{-n\bar{x} - n x_{(1)}\}[n x_{(1)} + n - 1]}{\frac{1}{n}\exp\{-n\bar{x} - n x_{(1)}\}} = \frac{1}{n}\{n x_{(1)} + n - 1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^*(x) = x_{(1)} + 1 - \frac{1}{n}}$$

- $E(\delta^*(x)) = E\left(x_{(1)} + 1 - \frac{1}{n}\right) = E(x_{(1)}) + 1 - \frac{1}{n}$

Note que: $E(\delta(x)) = \frac{1}{n} + \xi$ por (2)

$$\Leftrightarrow E(x_{(1)} + 1) = \frac{1}{n} + \xi \Leftrightarrow E(x_{(1)}) = \frac{1}{n} + \xi - 1$$

$$\Rightarrow E(\delta^*(x)) = \cancel{\frac{1}{n}} + \xi \cancel{- 1} \cancel{+ 1} - \cancel{\frac{1}{n}} = \xi$$

$\therefore$ Assim, $\delta^*(x)$ é não viciado para ξ

- $R(\xi, \delta^*(x)) = Var(\delta^*(x))$ pois δ^* é não viciado

$$= Var\left(x_{(1)} + 1 - \frac{1}{n}\right) = Var(x_{(1)})$$

Porém: $Var(\delta(x)) = \frac{1}{n^2}$ por (3)

$$\Leftrightarrow Var(x_{(1)} + 1) = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow Var(x_{(1)}) = \frac{1}{n^2}$$

Assim,

$$\boxed{R(\xi, \delta^*(x)) = \frac{1}{n^2}}$$

- Como $R(\xi, \delta^*(x)) = \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} = R(\xi, \delta(x))$, então $\delta(x)$ é inadmissível.

(20) Seja $\mathcal{X}=(x_1,\dots,x_n)$ com função densidade de probabilidade

$$f_{\mathcal{X}}(x;\tau)=\frac{1}{\tau^n}f\left(\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}\right),\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \tau>0,$$

em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r\geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\mathcal{X})$, tal que $\delta(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, é equivariante por escala se $\delta(bx)=b^r\delta(x)$, para todo $b>0$ e todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Considere a função de perda $L(\tau,d)=[(d-\tau^r)/\tau^r]^2$.

(a) Mostre que o risco $R(\tau,\delta(x))$ de qualquer estimador equivariante por escala é constante.

Dada a função de perda $L(\tau,d)=[(d-\tau^r)/\tau^r]^2$, o Risco de $\delta(\mathcal{X})$ é

$$R(\tau,\delta(\mathcal{X}))=E_\tau\left\{\left[\frac{\delta(\mathcal{X})-\tau^r}{\tau^r}\right]^2\right\}=E_\tau\left\{\left[\frac{1}{\tau^r}\delta(\mathcal{X})-1\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\tau^{2r}}E\left[(\delta(\mathcal{X}))^2\right]-2\frac{1}{\tau^r}E_\tau\left[\delta(\mathcal{X})\right]+1,\quad \tau>0$$

mas,

$$E_\tau[\delta(\mathcal{X})]=\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x)\frac{1}{\tau^n}f\left(\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}\right)dx,\quad \tau>0$$

e fazendo $u_i=x_i/\tau \Rightarrow du_i=\frac{1}{\tau}dx_i \to du=dx/\tau^n$, então

$$E_\tau[\delta(\mathcal{X})]=\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u_1\tau,\dots,u_n\tau)f(u_1,\dots,u_n)\,du,\quad u=(u_1,\dots,u_n),\ \tau>0$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\delta(\tau u)f(u)\,du=\int_{\mathbb{R}^n}\tau^r\delta(u)f(u)\,du,\quad \tau>0$$

por hipótesis $\delta(bx)=b^r\delta(x)$, $\forall\, b>0$

$$=\tau^r\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u)f(u)\,du,\quad \tau>0.$$

e similarmente,

$$E_\tau\left\{[\delta(\mathcal{X})]^2\right\}=\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(x)]^2\frac{1}{\tau^n}f\left(\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}\right)dx,\quad \tau>0$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(u_1\tau,\dots,u_n\tau)]^2f(u)\,du,\quad \tau>0$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(\tau u)]^2f(u)\,du,\quad \tau>0$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}[\tau^r\delta(u)]^2f(u)\,du,\quad \tau>0$$

$$=\tau^{2r}\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(u)]^2f(u)\,du,\quad \tau>0$$

Assim

$$R(\tau,\delta(\mathcal{X}))=\frac{1}{\tau^{2r}}\tau^{2r}\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(u)]^2f(u)\,du-\frac{2}{\tau^r}\tau^r\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u)f(u)\,du+1$$

$$=\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}[\delta(u)]^2f(u)\,du-2\int_{\mathbb{R}^n}\delta(u)f(u)\,du}_{\text{não depende de }\tau}+1$$

Então o risco de qualquer estimador equivariante por escala sob a função de perda dada é constante (não depende de τ).

(b) Seja $\delta_0(\mathcal{X})$ um estimador equivariante por escala. Mostre que um estimador $\delta(\mathcal{X})$ é equivariante por escala se e somente se $\delta(x)=\delta_0(x)/v(x)$, em que $v(x)$ é tal que

$$v(cx)=v(x)>0,\quad \text{para todo } c>0 \text{ e todo } x\in\mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Mostre ainda que, se $x_n\neq 0$ e $n>1$, uma condição necessária e suficiente para que $v(x)$ satisfaça (3) é que exista uma função $w(y)$ tal que $v(x)=w(y)$ em que $y=\left(\frac{x_1}{|x_n|},\dots,\frac{x_n}{|x_n|}\right)$.

Temos que $\delta_0(\mathcal{X})$ é um estimador equivariante por escala, então para todo $b>0$, temos já $\delta_0(bX) = b^r \delta_0(X)$, $r \geq 1$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$, e $\delta_0(X) > 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^n$

"$\Rightarrow$"

Se $\delta(X)$ é equivariante por escala, então $\delta(bX) = b^r \delta(X)$, $\delta(X) > 0$ $\forall b>0$, $X \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \delta(X) = \frac{\delta(bX)}{b^r} = \frac{\delta(bX)}{b^r}\frac{\delta_0(X)}{\delta_0(X)} = \delta_0(X)\frac{\delta(bX)}{\delta_0(bX)}$$

$$\Rightarrow \delta(X) = \frac{\delta_0(X)}{v(bX)}, \quad \text{em que } v(bX) = \frac{\delta_0(bX)}{\delta(bX)} = \frac{b^r\delta(X)}{b^r\delta_0(X)} = \frac{\overbrace{\delta(X)}^{>0}}{\underbrace{\delta_0(X)}_{>0}} = v(X) > 0$$

$$\Rightarrow \delta(X) = \frac{\delta_0(X)}{v(X)}, \quad \text{em que } v(X) > 0 \text{ e } v(X) = v(bX), \ \forall X \in \mathbb{R}^n, \ b>0$$

"$\Leftarrow$"

se $\delta(X) = \dfrac{\delta_0(X)}{v(X)}$, $v(X) > 0$, $v(X) = v(bX)$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $b > 0$

$$\Rightarrow \delta(bX) = \frac{\delta_0(bX)}{v(bX)} = \frac{b^r\delta_0(X)}{v(X)} = b^r\delta(X) \Rightarrow \delta(bX) = b^r\delta(X), \ \forall X \in \mathbb{R}^n, b>0$$

Então $\delta(X)$ é equivariante por escala.

Ainda, se $x_n \neq 0$ e $n>1$ temos que:

"Suficiência"

se $v(x) = w(y) = w\left(\frac{x_1}{|x_n|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|}\right)$ e $v(cx) = v(cx_1, \dots, cx_n)$

$$\Rightarrow v(cx) = w\left(\frac{cx_1}{|cx_n|}, \dots, \frac{cx_n}{|cx_n|}\right), \quad c>0$$

$$= w\left(\frac{cx_1}{c|x_n|}, \dots, \frac{cx_n}{c|x_n|}\right), \quad c>0$$

$$= w\left(\frac{x_1}{|x_n|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|}\right)$$

$$= w(y)$$

$$= v(x)$$

Assim $v(x)$ satisfaz (3).

"Necessária"

Se $v(cx) = v(x)$, seja $v(x) = \tilde{w}(x)$, então $\forall b>0$,

$v\left(\frac{x}{b}\right) = \tilde{w}\left(\frac{x}{b}\right) \Rightarrow v(x) = \tilde{w}\left(\frac{x}{b}\right)$, dado que $c = 1/b$, $v\left(\frac{1}{b}x\right) = v(x)$,

fazendo logo $b = |x_n|$ temos que $v(x) = \tilde{w}(y)$, portanto o resultado segue com $w(y) = \tilde{w}(y)$.

(c) Seja $\delta_0(X)$ um estimador equivariante de risco finito. Mostre que o estimador equivariante de risco mínimo de τ^r é dado por

$$\delta^*(X) = \delta_0(X)\frac{E_1[\delta_0(X)|Y]}{E_1[\delta_0^2(X)|Y]},$$

em que $Y = (X_1/|X_n|, \dots, X_n/|X_n|)$.

se $\delta(X)$ é um estimador equivariante, então $\delta(X) = \dfrac{\delta_0(X)}{v(X)} = \dfrac{\delta_0(X)}{w(y)}$, em que $y = x/|x_n|$

logo,

$$R(\tau, \delta(X)) = E_1\left\{\left[\frac{\delta(X)-\tau^r}{\tau^r}\right]^2\right\} = E_1\left\{\left[\frac{\delta(X)}{\tau^r} - 1\right]^2\right\} = E_1\left\{[\delta(u)-1]^2\right\}$$

em que $u = \frac{1}{\tau}x$ e $\left(\frac{1}{\tau}\right)^r\delta(x) = \delta\left(\frac{1}{\tau}x\right) = \delta(u)$

$$\Rightarrow R(\tau, \delta(X)) = E_1\left\{[\delta(u)-1]^2\right\} = E_1\left\{\left[\frac{\delta_0(u)}{w(v)} - 1\right]^2\right\}$$

em que $v = \dfrac{u}{|v_n|} = \dfrac{x}{|x_n|} = y$

$$\Rightarrow R(\tau, \delta(X)) = E_1\left\{\left[\frac{\delta_0(u)}{w(y)} - 1\right]^2\right\} = \int E_1\left\{\left[\frac{\delta_0(u)}{w(y)} - 1\right]^2 \middle| y\right\} dP(y)$$

Esta integral é minimizada em $w(y)$, minimizando o integrando para cada y.

Assim, dado que

$$E_1\left\{\left[\frac{\delta_0(u)}{w(y)} - 1\right]^2 \Big| y\right\} = \frac{1}{[w(y)]^2} E_1\left\{[\delta_0(u) - w(y)]^2 \,|\, y\right\}$$

$$= \frac{1}{[w(y)]^2}\left\{E_1[(\delta_0(u))^2|y] - 2w(y)E_1(\delta_0(u)|y) + (w(y))^2\right\}$$

$$= \frac{1}{[w(y)]^2} E_1\left[(\delta_0(u))^2|y\right] - \frac{2}{w(y)}E_1(\delta_0(u)|y) + 1$$

$$= h(w(y)) = h(w).$$

Então,

$$h'(w) = -\frac{2}{w^3}E_1\left[(\delta_0(u))^2|y\right] + \frac{2}{w^2}E_1\left(\delta_0(u)|y\right)$$

e

$$h''(w) = \frac{6}{w^4}E_1\left[(\delta_0(u))^2|y\right] - \frac{4}{w^3}E_1\left(\delta_0(u)|y\right)$$

$$\Rightarrow h'(w)=0 \Rightarrow \frac{1}{w}E_1\left[(\delta_0(u))^2|y\right] - E_1\left(\delta_0(u)|y\right) = 0$$

$$\Rightarrow w^* = \frac{E_1[(\delta_0(u))^2|y]}{E_1(\delta_0(u)|y)} \quad (*)$$

$$\text{e } h''(w^*) = 6\frac{[E_1(\delta_0(u)|y)]^4}{[E_1[(\delta_0(u))^2|y]]^3} - 4\frac{[E_1(\delta_0(u)|y)]^4}{[E_1[(\delta_0(u))^2|y]]^3} > 0$$

Então, w^* em (*) minimiza o risco e dado que para uma estatística equivariante por escala $\delta^*(x)$, $\delta^*(x) = \frac{\delta_0(x)}{w^*(y)}$, então o estimador equivariante de risco mínimo de τ^r é dado por

$$\delta^*(x) = \frac{\delta_0 E_1[\delta_0(x)|y]}{E_1[(\delta_0(x))^2|y]}$$

(d) Considere a situação em que $(X_1,\dots,X_n)$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(0,\tau^2)$, $\tau>0$. Encontre o estimador equivariante de risco mínimo de τ^2. Sugestão: usar o Teorema de Basu.

Seja $T_0(X)=\sum_{i=1}^n X_i^2$, então $T_0(\tau x) = \sum_{i=1}^n (\tau x_i)^2 = \tau^2\sum_{i=1}^n x_i^2 = \tau^2 T_0(X)$ portanto $T_0(X)$ é invariante por escala $(r=2)$. Também, $T_0(X)=\sum_{i=1}^n X_i^2$ é uma estatística suficiente completa (visto em aula).

Dado que $Y = \frac{X}{|X_n|} = \left(\frac{X_1}{|X_n|},\dots,\frac{X_n}{|X_n|}\right) = \left(\frac{x_1/\tau}{|X_n|/\tau},\dots,\frac{X_n/\tau}{|X_n|/\tau}\right)$

$$= \left(\frac{z_1}{\sqrt{X_n^2/\tau^2}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{X_n^2/\tau^2}}\right) = (t_1,\dots,t_n)$$

com $z_i\sim N(0,1)$, $X_i^2/\tau^2 \sim \chi_1^2$ e $t_i\sim t_1$, $i=1,\dots,n-1$, e t_n uma v.a. degenerada com valores 1 ou -1. Assim a distribuição de Y não depende de τ^2 e portanto é ancilar. Assim, por Basu, T_0 e Y são independentes e então

$$\delta^*(x) = \frac{T_0(X)\,E_1[T_0(X)|Y]}{E_1[T_0^2(X)|Y]} = \frac{T_0(X)\,E_1[T_0(X)]}{E_1[T_0^2(X)]}$$

mas, $T_0(X)\sim\chi_n^2$, então

$$\delta^*(x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)n}{2n+n^2} = \frac{1}{2+n}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

(21) Seja $X=(X_1, \dots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_X(x;\tau)=\frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}\right), \quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ \tau>0,$$

em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r\geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(X)$ é equivariante por escala se $\delta(bX)=b^r\delta(X)$, para todo $b>0$. Pode-se mostrar que o estimador de Pitman de τ^r, dado por $\delta^*(x)$ sendo

$$\delta^*(x)=\frac{\int_0^{+\infty} v^{n+r-1} f(vx_1,\dots,vx_n)\,dv}{\int_0^{+\infty} v^{n+2r-1} f(vx_1,\dots,vx_n)\,dv},$$

é um estimador equivariante por escala de risco mínimo sob perda $[(d-\tau^r)/\tau^r]^2$.

(a) Mostre que, de fato, o estimador $\delta^*(x)$ é equivariante por escala.

fazendo $w=bv \Rightarrow dw=b\,dv$, então

$$\delta^*(bx)=\frac{\int_0^{+\infty}\left(\frac{w}{b}\right)^{n+r-1} f(wx_1,\dots,wx_n)\cancel{\frac{1}{b}}dw}{\int_0^{+\infty}\left(\frac{w}{b}\right)^{n+2r-1} f(wx_1,\dots,wx_n)\cancel{\frac{1}{b}}dw}$$

$$=\frac{b^{n+2r-1}}{b^{n+r-1}}\ \frac{\int_0^{+\infty} w^{n+r-1} f(wx_1,\dots,wx_n)\,dw}{\int_0^{+\infty} w^{n+2r-1} f(wx_1,\dots,wx_n)\,dw}$$

$$=b^r\delta^*(x)$$

Assim δ^* é equivariante por escala.

(b) Obtenha o estimador $\delta^*(x)$ de τ^r para a situação em que X é uma amostra aleatória da distribuição exponencial de média $\tau>0$.

se $X_i\sim Exp(\tau)$ então $f_{X_i}(x;\tau)=\frac{1}{\tau}\exp(-x/\tau)$, $x\in(0,+\infty)$, $\tau>0$.

Então,

$$f_X(x;\tau)=\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i;\tau)=\frac{1}{\tau^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^n x_i/\tau\right\}, \quad x\in(0,+\infty)^n$$

Assim, se

$$f\left(\frac{x_1}{\tau},\dots,\frac{x_n}{\tau}\right)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{\tau}\right\}, \quad x\in(0,+\infty)^n$$

Então, para o nosso caso

$$\int_0^{+\infty} v^{n+r-1} f(vx_1,\dots,vx_n)\,dv=\int_0^{+\infty} v^{n+r-1}\exp\left\{-\sum_{i=1}^n vx_i\right\}dv$$

$$=\int_0^{+\infty} v^{n+r-1}\exp(-cv)\,dv, \quad \text{com } c=\sum_{i=1}^n x_i$$

$$=\int_0^{+\infty} c^{-(r+n)} w^{n+r-1}\exp(-w)\,dw = c^{-(r+n)}\int_0^{+\infty} w^{n+r-1}\exp(-w)\,dw$$

$w=cv \Rightarrow dv=\frac{1}{c}dw$

mas, para uma constante k, inteiro positivo,

$$\int x^k e^{-x}dx=-e^{x}\left[\sum_{i=0}^{k}\frac{d^i(x^k)}{dx^i}\right]; \quad \frac{d^0(x^k)}{dx^0}=x^k; \quad \frac{d^k(x^k)}{dx^k}=k!$$

Então, fazendo $k=n+r-1$, temos que

$$\int_0^{+\infty} w^{n+r-1}e^{-w}\,dw=\left\{\underbrace{-e^{w}\left[\sum_{i=0}^{n+r-1}\frac{d^i(w^{n+r-1})}{dw^i}\right]}_{B}\right\}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=-e^{-w}(n+r-1)!\Big|_0^{+\infty}=(n+r-1)!$$

os termos em B são sempre como $-w^s e^{-w}\big|_0^{+\infty}$ e são zero quando $s\geq 1$, assim só o último termo é da forma $-k!e^{-w}\big|_0^{+\infty}\neq 0$, com k cte.

Então,

$$\int_0^{+\infty} v^{n+r-1} f(vx_1,\dots,vx_n)\,dv=c^{-(r+n)}(n+r-1)!$$

Similarmente,

$$\int_0^{+\infty} v^{n+2r-1} f(vx_1,\dots,vx_n)=c^{-(2r+n)}\int_0^{+\infty} w^{n+2r-1}\exp(-w)\,dw$$

$$=c^{-(2r+n)}(n+2r-1)!$$

Portanto,

$$\delta^*(x)=\frac{c^{-(r+n)}(n+r-1)!}{c^{-(2r+n)}(n+2r-1)!}=\frac{c^r(n+r-1)!}{(n+2r-1)!}=\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^r(n+r-1)!}{(n+2r-1)!}$$

é o estimador de τ^r.

(c) No contexto do item (b), encontre o estimador não viesado de risco mínimo de τ^r considerando a perda dada acima.

Dado que $X_i \sim Exp(\tau)$, $i=1,\ldots,n$, então $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, 1/\tau)$ e portanto

$$E_\tau(Y^r) = \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)(1/\tau)^r} = \frac{(n+r-1)!\,\tau^r}{(n-1)!}$$, r inteiro positivo, $r \geq 1$.

Assim,

$$E_\tau(\delta^*(X)) = \frac{(n+r-1)!}{(n+2r-1)!} E_\tau\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^r\right] = \frac{(n+r-1)!}{(n+2r-1)!}\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}\tau^r = \frac{[(n+r-1)!]^2\,\tau^r}{(n+2r-1)!\,(n-1)!}$$

Portanto um estimador não viesado para τ^r é

$$\delta^\Delta(X) = \frac{(n-1)!\,(n+2r-1)!}{[(n+r-1)!]^2}\,\delta^*(X)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n+r-1)!}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^r$$, $r \geq 1$, inteiro positivo

Assim, dado que $\delta^\Delta(X)$ é não viesado, é ~~de~~ risco constante e portanto é de risco mínimo.

$\boxed{9.9}$

MAE 5834 - ESTATÍSTICA AVANÇADA I

lista de Exercícios 4.

Prof. Silvia L. P. Ferrari

Alunos: Mario José Pacheco López - 9034481

Hugo A. Brango García - 9176006

USP-IME, 20/10/2014

⑥ Seja X única observação de uma variável aleatória com densidade $f(x;\theta) = 2x/\theta^2$, $0<x<\theta$; $\theta>0$. Considere para θ uma distribuição uniforme no intervalo unitário.

(a) obtenha a função densidade de probabilidade a posteriori de θ

Temos que a v.a. X tem distribuição $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta>0$, e que θ tem distribuição a priori $U(0,1)$, assim, $\pi(\theta) = I_{(0,1)}(\theta)$, portanto a distribuição a posteriori de θ é

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) f(x|\theta) = I_{(0,1)}(\theta)\frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$$

$$= \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,1)}(\theta) I_{(x,\infty)}(\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(x,1)}(\theta)$$

logo, dado que

$$\int_x^1 \frac{2x}{\theta^2}\,d\theta = -\frac{2x}{\theta}\Big|_x^1 = 2-2x = 2(1-x), \quad x\in(0,1)$$

então a f.d.p. a posteriori de θ é

$$\pi(\theta|x) = \frac{2x/\theta^2}{2(1-x)} I_{(x,1)}(\theta), \quad x\in(0,1)$$

$$\Rightarrow \pi(\theta|x) = \frac{x}{(1-x)\theta^2} I_{(x,1)}(\theta), \quad x\in(0,1)$$

(b) Encontre o estimador de Bayes com respeito à perda $\theta^2(d-\theta)^2$.

Dado que a função de perda $L(\theta,d) = \theta^2(d-\theta)^2$ tem a forma

$$L(\theta,d) = w(\theta)[d-g(\theta)]^2,$$

em que $w(\theta) = \theta^2 > 0$, p/ todo $\theta>0$ e $g(\theta)=\theta$, então o estimador de Bayes com respeito à perda dada é

$$\delta_A(x) = \frac{E[w(\Theta)g(\Theta)|X=x]}{E[w(\Theta)|X=x]}$$

em que $A \equiv U(0,1)$ e então,

$$\delta_A(x) = \frac{E[\Theta^2\Theta|X=x]}{E[\Theta^2|X=x]} = \frac{E[\Theta^3|X=x]}{E[\Theta^2|X=x]}$$

mas,

$$E[\Theta^3|X=x] = \int_x^1 \frac{x}{1-x}\frac{\theta^3}{\theta^2}\,d\theta = \int_x^1 \frac{x}{1-x}\theta\,d\theta = \frac{x}{1-x}\frac{\theta^2}{2}\Big|_x^1$$

$$= \frac{x}{1-x}\left\{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right\} = \frac{x}{1-x}\frac{1}{2}(1-x)(1+x) = \frac{x(1+x)}{2}, \quad x\in(0,1)$$

e

$$E[\Theta^2|X=x] = \int_x^1 \frac{x}{1-x}\frac{\theta^2}{\theta^2}\,d\theta = \int_x^1 \frac{x}{1-x}\,d\theta = \frac{x}{1-x}\theta\Big|_x^1 = \frac{x}{1-x}(1-x)$$

$$= x, \quad x\in(0,1)$$

Portanto, o estimador de Bayes com respeito à perda $\theta^2(d-\theta)^2$ é

$$\delta_A(x) = \frac{x(1+x)/2}{x} = \frac{1+x}{2}, \quad x\in(0,1)$$

$$\Rightarrow \delta_A(x) = \frac{1+x}{2}, \quad x\in(0,1).$$

① Seja $\hat{\theta}$ um estimador não viciado de um parâmetro $\theta \in \mathbb{R}$. Seja $R(\theta,\tilde{\theta})$ o risco do estimador $\tilde{\theta}$ de θ.

(a) Sob perda quadrática, mostre que o estimador $c\hat{\theta}$, em que $c \in (0,1)$ é uma constante conhecida, não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ.

Seja $L(\theta,\delta) = (\delta-\theta)^2$ a função de perda e $\tilde{\theta} = c\hat{\theta}$, $c \in (0,1)$ cte conhecida, então,

$$R(\theta,\tilde{\theta}) = E_\theta[(\tilde{\theta}-\theta)^2] = E_\theta[(c\hat{\theta}-\theta)^2] = E_\theta[(c\hat{\theta}-c\theta+c\theta-\theta)^2]$$

$$= c^2 E_\theta[(\hat{\theta}-\theta)^2] + 2c(c-1)\theta\, E_\theta[(\hat{\theta}-\theta)] + (c-1)^2\theta^2$$

$\hat{\theta}$ é não viciado

$$= c^2 E_\theta[(\hat{\theta}-\theta)^2] + (c-1)^2\theta^2$$

$$= c^2 R(\theta,\hat{\theta}) + (c-1)^2\theta^2$$

mas $\theta \in \mathbb{R}$, então

$$\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = \sup_\theta [c^2 R(\theta,\hat{\theta})] + \underbrace{\sup_\theta [(c-1)^2\theta^2]}_{\infty}$$

$$\Rightarrow \sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = +\infty$$

Portanto, o estimador $\tilde{\theta}$ é minimax de θ apenas se $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = +\infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ, dado que

$$\inf_\delta \sup_\theta R(\theta,\delta) = \sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta})$$

somente se $\sup_\theta R(\theta,\delta) = +\infty$ para todo estimador δ de θ.

(b) Considere a função de perda $L(\theta,d) = (d-\theta)^2/\theta^2$, assumindo que $\theta \neq 0$. Mostre que o estimador $\hat{\theta}$ não é estimador minimax de θ, a menos que $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ. Sugestão: obtenha o risco de $c\hat{\theta}$ com $c = 1/(1+\xi)$, em que $\xi = \sup_\theta R(\theta,\hat{\theta})$, e compare com o risco de $\hat{\theta}$.

Dada a função de perda,

$$R(\theta,\tilde{\theta}) = E_\theta\left[\frac{(\tilde{\theta}-\theta)^2}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2} E_\theta[(\tilde{\theta}-\theta)^2]$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\theta^2}\left[c^2 E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 + (c-1)^2\theta^2\right]$$

$$= c^2 E_\theta\left[\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\theta}\right] + (c-1)^2$$

$$= c^2 R(\theta,\hat{\theta}) + (c-1)^2$$

Agora, seja $\xi = \sup_\theta R(\theta,\hat{\theta})$ e $c = 1/(1+\xi)$, então

$$\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = c^2 \sup_\theta R(\theta,\hat{\theta}) + (c-1)^2$$

$$= c^2\xi + (c-1)^2$$

$$= \frac{\xi}{(1+\xi)^2} + \left(\frac{1}{1+\xi} - 1\right)^2$$

$$= \frac{\xi}{(1+\xi)^2} + \frac{\xi^2}{(1+\xi)^2}$$

$$= \frac{\xi(1+\xi)}{(1+\xi)^2}$$

$$= \frac{\xi}{1+\xi}$$

Assim, $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = \frac{\xi}{1+\xi} < \xi$, se $0 < \xi < \infty$, portanto a menos que $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\tilde{\theta}$ de θ, $\hat{\theta}$ não é minimax de θ dado que $\sup_\theta R(\theta,\tilde{\theta}) < \sup_\theta R(\theta,\hat{\theta})$.

(9) Seja X uma variável aleatória representando o tempo de vida de um sistema eletrônico, com função distribuição acumulada $F_\theta(x)$, $\theta \in \Omega$. Defina a confiabilidade do sistema por

$$R_\theta(\tau) = P_\theta(X > \tau) = 1 - F_\theta(\tau), \quad \tau > 0$$

considere n observações independentes $X_1, \dots, X_n$ de X. Admita que, dado θ, X tem distribuição exponencial de parâmetro θ e função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x), \quad x > 0; \theta > 0.$$

(a) Mostre que, neste caso, $R_\theta(\tau) = \exp(-\tau\theta)$.

Dado que

$$R_\theta(\tau) = P_\theta(X > \tau) = 1 - F_\theta(\tau) = 1 - \int_0^\tau \theta \exp(-\theta x)\, dx$$

$$= 1 - \left(-\exp(-\theta x)\right)\Big|_0^\tau = 1 - \left(1 - \exp(-\theta\tau)\right)$$

$$= \exp(-\theta\tau), \quad \tau > 0$$

então $R_\theta(\tau) = \exp(-\tau\theta)$, $\tau > 0$

(b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $R_\theta(\tau)$.

Fazendo $g(\theta) = R_\theta(\tau) = \exp\{-\tau\theta\}$, o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é dado por $g(\hat\theta)$, em que $\hat\theta$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ.

Notar que, a função de verossimilhança de θ é dada por

$$L(\theta;\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^n \theta \exp(-\theta x_i) = \theta^n \exp\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\}$$

$$= \theta^n \exp\{-n\theta\bar{x}\}$$

em que $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$; $\theta > 0$ e $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

logo, a função de log-verossimilhança é dada por

$$\ell(\theta;\underset{\sim}{x}) = \log L(\theta;\underset{\sim}{x}) = n\log\theta - n\theta\bar{x}$$

Assim,

$$\frac{\partial \ell(\theta;\underset{\sim}{x})}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - n\bar{x} \Rightarrow \frac{\partial \ell(\theta;\underset{\sim}{x})}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\hat\theta} - n\bar{x} = 0 \Rightarrow \hat\theta = \frac{1}{\bar{x}}$$

e dado que $\dfrac{\partial^2 \ell(\theta;\underset{\sim}{x})}{\partial\theta^2} = -\dfrac{n}{\theta^2} < 0$, para todo θ e portanto para $\theta = \hat\theta$,

então $\hat\theta = 1/\bar{x}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ e

$$g(\hat\theta) = R_{\hat\theta}(\tau) = \exp\{-\tau\hat\theta\} = \exp\{-\tau/\bar{x}\}$$

é o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = R_\theta(\tau)$.

(c) Encontre o ENVVUM de $R_\theta(\tau)$.

Dado que

$$f(\underset{\sim}{x};\theta) = \theta^n \exp\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\}, \quad x_i > 0, i = 1, \dots, n$$

$$= \exp\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i + n\log\theta\}, \quad x_i > 0, i = 1, \dots, n$$

então $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ pertence à família exponencial unidimensional, com $\eta(\theta) = -\theta$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, $B(\theta) = -n\log\theta$ e $h(\underset{\sim}{x}) = 1$. Também, $\Omega = \{\theta; \theta > 0\}$, então o domínio de $\eta(\theta)$ contém intervalos abertos de Ω e $\eta(\theta)$ nem $T(x)$ satisfazem restrições lineares, então $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ.

Logo, dado que $\delta(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > \tau \\ 0, & X_1 \leq \tau \end{cases}$ é tal que

$$E(\delta(\underset{\sim}{X})) = 1 \cdot P(X_1 > \tau) + 0 \cdot P(X_1 \leq \tau) = P(X_1 > \tau) = e^{-\theta\tau} = R_\theta(\tau)$$

então $\delta(\underset{\sim}{X})$ é um estimador não viciado de $R_\theta(\tau)$

Logo, dado que

$$\phi(t) = E_{\tilde{}}[S(X) \mid T=t] = P(X_1 > \tau \mid T=t) = P\left(\frac{X_1}{T} > \frac{\tau}{T} \mid T=t\right)$$

$$= P\left(\frac{X_1}{T} > \frac{\tau}{t}\right)$$

com $T = T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i > 0$, dado que $x_i > 0$, $i=1,\dots,n$.

Mas,

$$P\left(\frac{X_1}{T} > \frac{\tau}{t}\right) = P\left(\frac{X_1}{X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i} > \frac{\tau}{t}\right)$$

com $X_1 \sim Exp(\theta)$, $\sum_{i=2}^{n} X_i \sim Gama(n-1, \theta)$ e $\frac{X_1}{X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i} \sim Beta(1, n-1)$

Então, para $t > \tau$

$$\phi(t) = P\left(\frac{X_1}{T} > \frac{\tau}{t}\right) = \int_{\tau/t}^{1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)} (1-y)^{n-2} dy = (n-1)\int_{\tau/t}^{1} (1-y)^{n-2} dy$$

$$= -(n-1)\left[\frac{(1-y)^{n-1}}{n-1}\right]_{\tau/t}^{1} = \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-1}$$

Portanto, pelo teorema de Rao-Blackwell, $\phi(t) = (1 - \tau/t)^{n-1}$, $T > \tau$ é o ENVVUM de $R_\theta(\tau)$.

(d) Mostre que o estimador de Bayes de $R_\theta(\tau)$ sob perda quadrática e função densidade a priori para θ

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\gamma^\nu \Gamma(\nu)} \theta^{\nu-1} \exp(-\theta/\gamma), \quad \theta > 0$$

é dado por

$$\left(1 + \frac{\tau}{\sum_{i=1}^{n} x_i + 1/\gamma}\right)^{-(n+\nu)}$$

Dado que $f(\underset{\sim}{x} \mid \theta) = \theta^n \exp\{-n\theta\bar{x}\}$; $x_i > 0$, $i=1,2,\dots,n$ então, a distribuição posterior de θ é dada por

$$\pi(\theta \mid \underset{\sim}{x}) \propto f(\underset{\sim}{x} \mid \theta)\pi(\theta) \propto \theta^n e^{-n\theta\bar{x}} \theta^{\nu-1} e^{-\theta/\gamma} = \theta^{n+\nu-1} \exp\{-\theta(n\bar{x} + 1/\gamma)\}$$

Portanto, $\theta \mid \underset{\sim}{x} \sim Gama(n+\nu, n\bar{x} + 1/\gamma)$.

Logo, dado que $L(\theta, d) = (d - g(\theta))^2$, ou seja $w(\theta) = 1$ e $g(\theta) = R_\theta(\tau)$, então o estimador de Bayes de $R_\theta(\tau)$ é dado por

$$\delta_\Lambda(\underset{\sim}{x}) = E\left[R_\theta(\tau) \mid \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}\right]$$

mas,

$$E\left[R_\theta(\tau) \mid \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-\theta\tau} \frac{1}{\Gamma(n+\nu)} \left(\frac{\gamma n\bar{x}+1}{\gamma}\right)^{n+\nu} \theta^{n+\nu-1} \exp\left\{-\theta\left(\frac{\gamma n\bar{x}+1}{\gamma}\right)\right\} d\theta$$

$$= \frac{(\gamma n\bar{x}+1)^{n+\nu}}{\gamma^{n+\nu}} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{n+\nu-1}}{\Gamma(n+\nu)} \exp\left\{-\theta\left(\frac{\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau}{\gamma}\right)\right\} d\theta$$

$$= \frac{(\gamma n\bar{x}+1)^{n+\nu}}{\gamma^{n+\nu}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau}{\gamma}\right)^{n+\nu}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau}{\gamma}\right)^{n+\nu}}{\Gamma(n+\nu)} \theta^{n+\nu-1} \cdot \exp\left\{-\theta\left(\frac{\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau}{\gamma}\right)\right\} d\theta}_{Gama\left(n+\nu, \frac{\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau}{\gamma}\right)} = 1$$

$$= \frac{(\gamma n\bar{x}+1)^{n+\nu}}{(\gamma n\bar{x}+1+\gamma\tau)^{n+\nu}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma\tau}{\gamma n\bar{x}+1}\right)^{n+\nu}}$$

$$= \left(1 + \frac{\tau}{n\bar{x} + 1/\gamma}\right)^{-(n+\nu)} = \left(1 + \frac{\tau}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\gamma}}\right)^{-(n+\nu)}$$

Assim, o estimador de Bayes de $R_\theta(\tau)$, sob perda quadrática é

$$\delta_\Lambda(\underset{\sim}{x}) = \left(1 + \frac{\tau}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{\gamma}}\right)^{-(n+\nu)}$$

(12) Suponha que X tem distribuição $b(p,n)$ e considere o problema de estimar p com perda $(d-p)^2/[p(1-p)]$. Obtenha o estimador minimax.

Dada uma distribuição a priori $Beta(a,b)$ para p, a distribuição a posteriori de p é dada por

$$\pi(p|x) \propto f(x|p)\,\pi(p) \quad , \quad 0<p<1$$

Em que

$$f(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,\dots,n \quad , \quad 0 \le p \le 1 \quad ,$$

e

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \quad , \quad 0<p<1 \quad , \quad a,b>0$$

Assim,

$$\pi(p|x) \propto p^{x+a-1}(1-p)^{n+b-x-1} \quad , \quad 0<p<1$$

Portanto, $p|x \sim Beta(x+a, n+b-x)$.

Logo, sob perda $L(p,d) = \frac{1}{p(1-p)}(d-p)^2$, $w(p) = \frac{1}{p(1-p)}$, o estimador de Bayes de p é

$$\delta_\Lambda(x) = \frac{E[w(p)p|X=x]}{E[w(p)|X=x]} = \frac{E\left[\frac{1}{1-p}\,\middle|\,X=x\right]}{E\left[\frac{1}{p(1-p)}\,\middle|\,X=x\right]}$$

com $\Lambda \equiv Beta(a,b)$

mas,

$$E\left[\frac{1}{1-p}\,\middle|\,X=x\right] = \int_0^1 \frac{1}{1-p}\pi(p|x)\,dp = \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\int_0^1 \frac{1}{1-p}p^{x+a-1}(1-p)^{n+b-x-1}dp$$

$$= \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\int_0^1 p^{a'-1}(1-p)^{b'-1}dp \quad ; \quad a' = \underset{>0}{x+a} \text{ e } b' = \underset{>0}{n+b-x-1}$$

$$= \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)} \cdot \frac{\Gamma(a')\Gamma(b')}{\Gamma(a'+b')}\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}p^{a'-1}(1-p)^{b'-1}dp}_{Beta(a',b')} \quad 1$$

Então,

$$E\left[\frac{1}{1-p}\,\middle|\,X=x\right] = \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\,\frac{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x-1)}{\Gamma(n+a+b-1)} = \frac{\Gamma(n+a+b)\Gamma(n+b-x-1)}{\Gamma(n+b-x)\Gamma(n+a+b-1)}$$

$$= \frac{(n+a+b-1)\Gamma(n+a+b-1)\Gamma(n+b-x-1)}{(n+b-x-1)\Gamma(n+b-x-1)\Gamma(n+a+b-1)} = \frac{n+a+b-1}{n+b-x-1}$$

Também,

$$E\left[\frac{1}{p(1-p)}\,\middle|\,X=x\right] = \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\int_0^1 \frac{1}{p(1-p)}p^{x+a-1}(1-p)^{n+b-x-1}dp$$

$$= \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\int_0^1 p^{x+a-2}(1-p)^{n+b-x-2}dp$$

$$= \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\,\frac{\Gamma(a')\Gamma(b')}{\Gamma(a'+b')}\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(a'+b')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}p^{a'-1}(1-p)^{b'-1}dp}_{Beta(a',b')} \quad 1$$

em que $a' = x+a-1$ e $b' = n+b-x-1$, portanto

$$E\left[\frac{1}{p(1-p)}\,\middle|\,X=x\right] = \frac{\Gamma(n+a+b)}{\Gamma(x+a)\Gamma(n+b-x)}\,\frac{\Gamma(x+a-1)\Gamma(n+b-x-1)}{\Gamma(n+a+b-2)}$$

$$= \frac{(n+a+b-1)\Gamma(n+a+b-1)\Gamma(x+a-1)\Gamma(n+b-x-1)}{(x+a-1)\Gamma(x+a-1)(n+b-x-1)\Gamma(n+b-x-1)\Gamma(n+a+b-2)}$$

$$= \frac{(n+a+b-1)(n+a+b-2)\Gamma(n+a+b-2)}{(x+a-1)(n+b-x-1)\Gamma(n+a+b-2)}$$

$$= \frac{(n+a+b-1)(n+a+b-2)}{(x+a-1)(n+b-x-1)}$$

Assim,

$$\delta_\Lambda(x) = \frac{n+a+b-1}{n+b-x-1}\,\frac{(x+a-1)(n+b-x-1)}{(n+a+b-1)(n+a+b-2)} = \frac{x+a-1}{n+a+b-2}$$

é o estimador de Bayes sob perda dada.

logo,

$$R(p, \delta_\Delta(x)) = E\left[L(p, \delta_\Delta(x))\right] = E\left[\frac{1}{p(1-p)}(\delta_\Delta(x)-p)^2\right]$$

$$= \frac{1}{p(1-p)} E\left[(\delta_\Delta(x)-p)^2\right] = \frac{1}{p(1-p)}\left[Var(\delta_\Delta(x)-p) + E^2(\delta_\Delta(x)-p)\right]$$

$$= \frac{1}{p(1-p)}\left[Var(\delta_\Delta(x)) + E^2(\delta_\Delta(x)-p)\right]$$

mas,

$$Var(\delta_\Delta(x)) = \frac{np(1-p)}{(n+a+b-2)^2} \quad e \quad E(\delta_\Delta(x)) = \frac{np+a-1}{n+a+b-2}$$

Então

$$R(p, \delta_\Delta(x)) = \frac{1}{p(1-p)}\left[\frac{np(1-p)}{(n+a+b-2)^2} + \left(\frac{np+a-1}{n+a+b-2} - p\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{p(1-p)}\left[np(1-p) + (\cancel{np}+a-1-\cancel{np}-p(a+b-2))^2\right]\frac{1}{(n+a+b-2)^2}$$

$$= \frac{1}{(n+a+b-2)^2}\left[n + \frac{1}{p(1-p)}(a-1-p(a+b-2))^2\right]$$

Logo, fazendo $a=b=1$,

$$R(p, \delta_\Delta(x)) = \frac{1}{n^2}\left[n + \frac{1}{p(1-p)}\cdot 0\right] = \frac{1}{n}$$

Assim, se $a=b=1$ o risco é constante e

$$\delta_\Delta(x) = \frac{x}{n}$$

é o estimador minimax de p.

(13) Sejam $X_1, \dots, X_m$ e $Y_1, \dots, Y_n$ amostras aleatórias independentes das distribuições $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente; aqui $\mu_x \in \mathbb{R}$, $\mu_y \in \mathbb{R}$, $\sigma_x^2 > 0$ e $\sigma_y^2 > 0$. Considere o problema de estimar $\Delta = \mu_y - \mu_x$ sob perda quadrática.

(a) Mostre que $\bar{Y} - \bar{X}$ é estimador minimax de Δ quando σ_x e σ_y são conhecidos; $\bar{x} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i$ e $\bar{Y} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Seja $\Pi_{x,j} = N(0,j)$ e $\Pi_{y,j} = N(0,j)$, $j = 1, 2, \dots$ uma sequência de distribuições a prioris de μ_x e μ_y. Então, o estimador de Bayes de μ_x e μ_y são respectivamente, (usado a sugestão)

$$\frac{mj\bar{x}}{mj + \sigma_x^2} \quad \text{e} \quad \frac{nj\bar{Y}}{nj + \sigma_y^2}$$

$$\frac{\frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2} + \frac{0}{j}}{\frac{n}{\sigma_x^2} + \frac{1}{j}} = \frac{\frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}}{\frac{mj + \sigma_x^2}{j\sigma_x^2}} = \frac{jm\bar{x}}{mj + \sigma_x^2}.$$

Logo, o estimador de Bayes de $\Delta = \mu_y - \mu_x$ sob perda quadrática é

$$\delta_j = \frac{nj\bar{Y}}{nj - \sigma_y^2} - \frac{mj\bar{X}}{mj - \sigma_x^2}$$

com risco de Bayes,

$$R(\Delta, \delta_j) = E\left[\left(\frac{nj\bar{Y}}{nj + \sigma_y^2} - \frac{mj\bar{X}}{mj + \sigma_x^2} - \mu_y + \mu_x\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{nj\bar{Y}}{nj + \sigma_y^2} - \mu_y\right)^2 + \left(\frac{mj\bar{X}}{mj + \sigma_x^2} - \mu_x\right)^2 - 2\left(\frac{nj\bar{Y}}{nj + \sigma_y^2} - \mu_y\right)\left(\frac{mj\bar{X}}{mj + \sigma_x^2} - \mu_x\right)\right]$$

$$= \left(\frac{nj}{nj + \sigma_y^2}\right)^2 Var(\bar{Y}) + \mu_y\left(\frac{nj}{nj + \sigma_y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{mj}{mj + \sigma_x^2}\right) Var(\bar{X}) + \mu_x\left(\frac{mj}{mj + \sigma_x^2} - 1\right)^2$$

$$- 2\left(\frac{nj}{nj + \sigma_y^2} - 1\right)\left(\frac{mj}{mj + \sigma_x^2} - 1\right)\mu_y\mu_x$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \sigma_y^2/nj}\right)^2 \frac{\sigma_y^2}{n} + \mu_y\left(\frac{1}{1 + \sigma_y^2/nj} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \sigma_x^2/mj}\right)\frac{\sigma_x^2}{m} + \mu_x\left(\frac{1}{1 + \sigma_x^2/mj} - 1\right)^2$$

$$- 2\left(\frac{1}{1 + \sigma_y^2/nj} - 1\right)\left(\frac{1}{1 + \sigma_x^2/mj} - 1\right)\mu_y\mu_x$$

Logo,

$$\lim_{j \to \infty} R(\Delta, \delta_j) = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m}$$

que não depende de (μ_x, μ_y) e é igual ao risco de $\bar{Y} - \bar{X}$,

$$E\left[(\bar{Y} - \bar{X} - \mu_y + \mu_x)^2\right] = E\left[(\bar{Y} - \mu_y)^2\right] + E\left[(\bar{X} - \mu_x)^2\right] + 0$$

$$= Var(\bar{Y}) + Var(\bar{X})$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m} \quad (*)$$

Portanto $\bar{Y} - \bar{X}$ é minimax.

(b) Mostre que $\bar{Y} - \bar{X}$ é estimador minimax de Δ quando $\sigma_x^2 \leq M_x$ e $\sigma_y^2 \leq M_y$, sendo $M_x > 0$ e $M_y > 0$ constantes conhecidas.

Seja $\Theta = \{(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) : \mu_x \in \mathbb{R}, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x^2 \in (0, M_x], \sigma_y^2 \in (0, M_y]\}$

$\Theta_0 = \{(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2) : \mu_x \in \mathbb{R}, \mu_y \in \mathbb{R}, \sigma_x^2 = M_x, \sigma_y^2 = M_y\}$

Então, por (a) $\bar{Y} - \bar{X}$ é minimax quando Θ_0 é considerado como o espaço paramétrico

Seja $R_{\bar{Y} - \bar{X}}(\theta)$ a função de Risco de $\bar{Y} - \bar{X}$, então dado que

$$\sup_{\theta \in \Theta} R_{\bar{Y} - \bar{X}}(\theta) = \frac{M_y}{n} + \frac{M_x}{m}$$

e

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} R_{\bar{Y} - \bar{X}}(\theta) = \frac{M_y}{n} + \frac{M_x}{m}$$

dado $\sup R(\Delta, \bar{Y} - \bar{X}) = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m}$ (dado $*$) e $\sigma_y^2 \in (0, M_x)$ e $\sigma_x^2 \in (0, M_y)$

Então $\bar{Y} - \bar{X}$ é minimax.

ESTATÍSTICA AVANÇADA I - LISTA 4

9.6

Jaime Enrique Lincovil Curivil
Maicon Aparecido Pinheiro

Exercício 1. Por resultado visto em aula, sabemos que sob perda quadrática o estimador de Bayes é dado pela média a posteriori de θ. Portanto, para determiná-lo, vamos em um primeiro passo determinar a distribuição a posteriori de θ.

Supondo que, dado θ, $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $U(,\theta)$, $\theta > 0$, segue que

$$f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i)\right] = \frac{1}{\theta^n} I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) I_{(0,\theta)}(x_{(n)}) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) I_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta).$$

Ao considerar uma distribuição a priori Pareto(α, γ) para θ, isto é,

$$p(\theta) = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} I_{(\gamma,+\infty)}(\theta),$$

segue que a posteriori de θ é tal que

$$\begin{aligned} p(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) &\propto f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) p(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n} I_{(x_{(n)},+\infty)}(\theta) \frac{1}{\theta^{\alpha+1}} I_{(\gamma,+\infty)}(\theta) \\ &\propto \frac{1}{\theta^{n+\alpha+1}} I_{(\max\{x_{(n)},\gamma\},+\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Logo, a distribuição a posteriori de θ é uma Pareto$(n+\alpha, \max\{x_{(n)}, \gamma\})$. Assim, o estimador de Bayes para θ - vamos denotá-lo por δ_Λ, onde Λ representa a função distribuição de uma Pareto(α, γ) - é dado por

$$\delta_\Lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{(n+\alpha)\max\{X_{(n)}, \gamma\}}{n+\alpha-1},$$

uma vez que

$$\begin{aligned} E[\theta|x_1, \ldots, x_n] &= \int_{\max\{x_{(n)},\gamma\}}^{+\infty} \theta \frac{(n+\alpha)\max\{x_{(n)},\gamma\}^{n+\alpha}}{\theta^{n+\alpha+1}} d\theta \\ &= -\frac{(n+\alpha)\max\{x_{(n)},\gamma\}^{n+\alpha}}{(n+\alpha-1)\theta^{n+\alpha-1}}\Bigg|_{\max\{x_{(n)},\gamma\}}^{+\infty} \\ &= \frac{(n+\alpha)\max\{x_{(n)},\gamma\}}{n+\alpha-1}. \end{aligned}$$

$\int_b^{\infty} (n\alpha) b^{n\alpha} \theta^{-(n-\alpha)} d\theta$

$-\frac{n\alpha b}{(n+\alpha-1)}$

Exercício 6.

a. Do enunciado, sabemos que

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) = \frac{1}{\theta} I_{(x,+\infty)}(\theta),$$

e que

$$\pi(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2} I_{\mathbb{R}_+}(\theta).$$

Daí, segue que, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} q(x) := f(x) &= \int_{\Omega} f(x \mid \theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\theta(1+\theta)^2} I_{\mathbb{R}_+}(\theta) I_{(x,+\infty)}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\theta(1+\theta)^2}\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

onde Ω foi utilizado para representar o espaço paramétrico. Para resolver a integral acima, vamos utilizar o método das frações parciais, isto é, vamos encontrar os valores das constantes reais A, B e C tal que

$$\frac{1}{\theta(1+\theta)^2} = \frac{A}{\theta} + \frac{B}{1+\theta} + \frac{C}{(1+\theta)^2}.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta(1+\theta)^2} &= \frac{A}{\theta} + \frac{B}{1+\theta} + \frac{C}{(1+\theta)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\theta(1+\theta)^2} &= \frac{A(1+\theta)^2 + B\theta(1+\theta) + C\theta}{\theta(1+\theta)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\theta(1+\theta)^2} &= \frac{A(1+2\theta+\theta^2) + B(\theta+\theta^2) + C\theta}{\theta(1+\theta)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\theta(1+\theta)^2} &= \frac{A + (2A+B+C)\theta + (B+A)\theta^2}{\theta(1+\theta)^2}, \end{aligned}$$

segue, igualando os polinômios dos numeradores, que $A = 1$, donde decorre que $B = -1$ e $C = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} q(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\theta} - \frac{1}{1+\theta} - \frac{1}{(1+\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \left[\ln\theta - \ln(1+\theta) + \frac{1}{1+\theta}\right]\Big|_x^{+\infty} \\ &= \left[\ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) + \frac{1}{1+\theta}\right]\Big|_x^{+\infty} = 0 + 0 - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{1}{1+x} \\ &= \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x}, \quad \text{para } x > 0, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

b. De nota vista em aula, sabemos que o estimador de Bayes ($\delta(X)$) sob perda absoluta $L(\theta, d) = |d - \theta|$ é dado pela mediana a posteriori. Daí, denotando por $\pi(\theta|x)$ a posteriori de θ, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\delta(x)}^{+\infty} \pi(\theta|x)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \int_{\delta(x)}^{+\infty} \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{q(x)}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \int_{\delta(x)}^{+\infty} \pi(\theta)f(x|\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{q(x)}{2} &\Leftrightarrow \int_{\delta(x)}^{+\infty} \frac{1}{\theta(1+\theta)^2}\mathrm{d}\theta = \frac{q(x)}{2} \Leftrightarrow \\ \left[\ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) + \frac{1}{1+\theta}\right]\Big|_{\delta(x)}^{+\infty} = \frac{q(x)}{2} &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{\delta(x)}{1+\delta(x)}\right) - \frac{1}{1+\delta(x)} = \frac{q(x)}{2} \Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{1+\delta(x)}{\delta(x)}\right) - \frac{1}{1+\delta(x)} = \frac{q(x)}{2} &\Leftrightarrow q(\delta(x)) = \frac{q(x)}{2}, \end{aligned}$$

onde a segunda e quarta equivalências decorrem de $q(x)$ ser constante em relação à θ e da resolução da integral exibida no item **a.**, respectivamente. Logo $\delta(X)$ é solução de

$$q(\delta(X)) = \frac{q(X)}{2}.$$

Exercício 9.

a. Seja $\bar{\theta} = \hat{\theta} + c$. Logo, sob a perda quadrática temos que:

$$L(\theta, \bar{\theta}) = (\bar{\theta} - \theta)^2 = [(\hat{\theta} - \theta) + c]^2 = (\hat{\theta} - \theta)^2 + 2c(\hat{\theta} - \theta) + c^2.$$

Assim, o risco médio de $\bar{\theta}$ é dado por

$$\begin{aligned} R(\theta, \bar{\theta}) &= E_\theta[L(\theta, \bar{\theta})] = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2 + c^2 = Var_\theta(\hat{\theta}) + c^2 \\ &= R(\theta, \hat{\theta}) + c^2, \end{aligned}$$

uma vez que a perda é quadrática e $\hat{\theta}$ é não viciado. Agora, seja Δ a classe de todos os estimadores de θ e $\Delta^* \subset \Delta$ a classe dos estimadores não viciados. Logo,

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} \leq \inf_{\delta \in \Delta^*} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} < \sup_\theta \{R(\bar{\theta}, \theta)\}.$$

$\bar{\theta}$

Desde que $R(\theta, \bar{\theta}) > R(\theta, \hat{\theta})$, segue por definição que $\hat{\theta}$ não é estimador minimax. Por outro lado se

$$\sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} = \infty \; \forall \; \delta \in \Delta,$$

temos que

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} = \sup_\theta \{R(\bar{\theta}, \theta)\} = \infty.$$

Daí, por definição, $\hat{\theta}$ é estimador minimax.

b. Se consideramos $\bar{\theta} = c\hat{\theta}$, sob a perda quadrática temos que

$$\begin{aligned} L(\theta, \bar{\theta}) &= (c\hat{\theta} - \theta)^2 = (c\hat{\theta} - c\theta + c\theta - \theta)^2 \\ &= (c\hat{\theta} - c\theta)^2 + 2(c\hat{\theta} - c\theta)(c\theta - \theta) + (c\theta - \theta)^2. \end{aligned}$$

donde decorre que

$$R(\theta, c\hat{\theta}) = (1 - c)^2\theta^2 + c^2 Var_\theta(\hat{\theta}) = (1 - c)^2\theta^2 + c^2 R(\theta, \hat{\theta}).$$

$< R(\theta, \hat{\theta})$, pois $0 < c < 1$.

Ou seja, $R(\theta, \bar{\theta}) > R(\theta, \hat{\theta})$ e como no caso anterior,

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} \leq \inf_{\delta \in \Delta^*} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} < \sup_\theta \{R(\bar{\theta}, \theta)\}.$$

X ?

Logo, por definição, $\hat{\theta}$ não é estimador minimax. Por outro lado se

$$\sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} = \infty \; \forall \; \delta \in \Delta,$$

temos que

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(\delta, \theta)\} = \sup_\theta \{R(\bar{\theta}, \theta)\} = \infty.$$

$\hat{\theta}$

Neste caso, por definição, $\bar{\theta} = c\hat{\theta}$ é estimador minimax. ?

c. Sob a perda dada, o risco do estimador $c\hat{\theta}$ é dada por:

$$\begin{aligned} R(\theta, c\hat{\theta}) &= E_\theta\left[\frac{(\bar{\theta}-\theta)^2}{\theta^2}\right] = \frac{1}{\theta^2}E_\theta\left[(\bar{\theta}-\theta)^2\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left[c^2E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 + \theta^2(c-1)^2\right] \\ &= c^2E_\theta\left[\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\theta^2}\right] + (c-1)^2 = c^2R(\theta,\hat{\theta}) + (1-c)^2. \end{aligned}$$

Considerando $\zeta = \sup_\theta R(\theta, \hat{\theta}) < \infty$ e $c = 1/(1+\zeta)$. Então,

$$\sup_\theta \bar{\theta} = (1-c)^2 + c^2\zeta = \frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2} + \frac{\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = \frac{\zeta}{1+\zeta} < \zeta$$

Portanto, $\hat{\theta}$ não é estimador minimax, a menos que $\sup_\theta R(\theta, \bar{\theta}) = \infty$ para todo estimador $\delta \in \Delta$ de θ.

Exercício 15. Por definição, $\bar{X}$ será um estimado minimax para p se minimiza o risco máximo, ou seja,

$$\inf_\delta \sup_{p\in(0,1)} R(p,\delta) = \sup_{p\in(0,1)} R(\theta, \bar{X}).$$

No entanto, recordando que para um dado estimador $\delta(\mathbf{X})$ de p sob perda quadrática,

$$R(p, \delta(\mathbf{X})) = E_p(\delta(\mathbf{X} - p)^2 = Var_p(\delta(\mathbf{X}) + (E(\delta(\mathbf{X}) - p)^2, \quad p \in (0,1),$$

segue que

$$R(p, \bar{X}) = Var_p(\bar{X}) + (E_p(\bar{X}) - p)^2 = \frac{p(1-p)}{n} + \left(\frac{np}{n} - p\right)^2 = \frac{p(1-p)}{n}, \quad p \in (0,1),$$

de modo que

$$\sup_{p\in(0,1)} R(\theta, \bar{X}) = \frac{1}{4n},$$

uma vez que a função $R(\theta, \bar{X})$ atinge o máximo em $p = 1/2$, $p \in (0,1)$. Por outro lado, ao considerar o estimador

$$T(\mathbf{X}) = \begin{cases} \bar{X}, & \text{com probabilidade } \frac{n}{n+1}; \\ 1/2, & \text{com probabilidade } \frac{1}{n+1}, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} R(p, T(\mathbf{X})) &= E_p(T(\mathbf{X}) - p)^2 = E_p\left(E_p\left((T(\mathbf{X}) - p)^2 \mid T(\mathbf{X})\right)\right) \\ &= E_p\left(E_p\left((T(\mathbf{X}) - p)^2 \mid T(\mathbf{X}) = \bar{X}\right)\right) \mathbb{P}\left(T(\mathbf{X}) = \bar{X}\right) \\ &+ E_p\left(E_p\left((T(\mathbf{X}) - p)^2 \mid T(\mathbf{X}) = 1/2\right)\right) \mathbb{P}\left(T(\mathbf{X}) = 1/2\right) \\ &= \frac{p(1-p)}{n}\frac{n}{n+1} + (1/2-p)^2\frac{n}{n+1} \\ &= \frac{p - p^2 + p^2 - p + 1/4}{n+1} \\ &= \frac{1}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{p\in(0,1)} R(\theta, T(\mathbf{X})) = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Uma vez que o risco máximo do estimador aleatorizado $T(\mathbf{X})$ é menor que o risco máximo do estimador $\bar{X}$, já podemos concluir que

$$\inf_{\delta} \sup_{p\in(0,1)} R(p,\delta) < \sup_{p\in(0,1)} R(\theta,\bar{X}),$$

donde decorre a conclusão de que $\bar{X}$ não é um estimador minimax de p.

Exercício 16.

a. Vamos propor as distribuições $N(a_1, b_1^2)$ e $N(a_2, b_2^2)$ como distribuições a priori para μ_x e μ_y, respectivamente. Temos que a distribuição à posteriori bivariada de (μ_x, μ_y) dado $(X,Y) = (x,y)$, é tal que

$$\begin{aligned}\pi(\mu_x,\mu_y|X,Y) &\propto f(X,Y|\mu_x,\mu_y)\pi(\mu_x,\mu_y)\\ &\propto f(X,Y|\mu_x,\mu_y)\pi(\mu_x)\pi(\mu_y)\\ &\propto f(X|\mu_x)\pi(\mu_x)f(Y|\mu_y)\pi(\mu_y).\end{aligned}$$

Como, dado (μ_x,μ_y), X e Y são independentes, temos que

$$\mu_x|X \sim \text{Normal}\Big(\frac{\frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}+\frac{a_1}{b_1^2}}{\frac{m}{\sigma_x^2}+\frac{1}{b_1^2}}, \Big[\frac{m}{\sigma_x^2}+\frac{1}{b_1^2}\Big]^{-1}\Big)$$

$$\mu_y|Y \sim \text{Normal}\Big(\frac{\frac{n\bar{y}}{\sigma_y^2}+\frac{a_2}{b_2^2}}{\frac{n}{\sigma_y^2}+\frac{1}{b_2^2}}, \Big[\frac{n}{\sigma_y^2}+\frac{1}{b_2^2}\Big]^{-1}\Big)$$

Por outro lado, sob a perda quadrática o estimador de Bayes, $\delta_\Lambda(X,Y)$ de $\mu_y - \mu_x$, é dado por $\delta_\Lambda(X,Y) = E[g(\mu_x,\mu_y)|X,Y]$, onde $g(\mu_x,\mu_y) = \mu_y - \mu_x$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\delta(X,Y) &= E[\mu_y-\mu_x|X,Y] = E[\mu_y|X,Y] - E[\mu_x|X,Y] = E[\mu_y|Y] - E[\mu_x|X]\\ &= \frac{\frac{n\bar{y}}{\sigma_y^2}+\frac{a_2}{b_2^2}}{\frac{n}{\sigma_y^2}+\frac{1}{b_2^2}} - \frac{\frac{m\bar{x}}{\sigma_x^2}+\frac{a_1}{b_1^2}}{\frac{m}{\sigma_x^2}+\frac{1}{b_1^2}}\end{aligned}$$

Para dar resposta ao problema acharemos uma sequência de distribuições a priori tais que a sequência de riscos de bayes convirja a um risco igual ao supremo do risco médio de $\delta(X,Y)$ do estimador. Seja Λ_{1k} e Λ_{2k} duas sequências de distribuições a priori para X e Y da forma $Normal(0, b_{ik})$, $i = 1,2$, tais que $b_{ik} \to \infty$ quando $k \to \infty$. Dado que $a_1 = a_2 = 0$, a sequencia de estimadores de Bayes $\delta_k(X,Y)$ tem a forma

$$\delta_k(X,Y) = \frac{nb_{2k}\bar{y}}{nb_{2k}-\sigma_y^2} - \frac{mb_{1,k}\bar{x}}{mb_{1k}\sigma_x^2}.$$

O risco médio do estimador pode ser reduzida à expressão

$$\begin{aligned}R(\mu_y-\mu_x,\delta_k(X,Y)) &= E_\theta\Big[\Big(\frac{nb_{2k}\bar{y}}{nb_{2k}-\sigma_y^2} - \frac{mb_{1,k}\bar{x}}{mb_{1k}\sigma_x^2} - \mu_y + \mu_x\Big)^2\Big]\\ &= \Big(\frac{1}{1+\sigma_y^2/nb_{2k}}\Big)^2\frac{\sigma_y^2}{n} + \mu_y\Big(\frac{1}{1+\sigma_y^2/nb_{2k}} - 1\Big)^2\\ &+\Big(\frac{1}{1+\sigma_x^2/mb_{1k}}\Big)\frac{\sigma_x^2}{m} + \mu_x\Big(\frac{1}{1+\sigma_x^2/mb_{1k}} - 1\Big)^2\\ &-2\mu_x\mu_y\Big(\frac{1}{1+\sigma_y^2/nb_{2k}} - 1\Big)\Big(\frac{1}{1+\sigma_x^2/mb_{1k}} - 1\Big).\end{aligned}$$

Logo

$$r_k(\Lambda, \delta_k(X,Y)) = E_\Lambda[R(\mu_y - \mu_x, \delta_k(X,Y))] = \left(\frac{1}{1+\sigma_y^2/nb_{2k}}\right)^2 \frac{\sigma_y^2}{n} + \left(\frac{1}{1+\sigma_x^2/mb_{1k}}\right)\frac{\sigma_x^2}{m}.$$

Deste modo temos que

$$\lim_{k\to\infty} r_k(\Lambda, \delta_k(X,Y)) = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m}.$$

Notemos que $\delta_k(X,Y) \to \bar{Y} - \bar{X}$ quando $k \to \infty$. Também temos que,

$$\begin{aligned} R(\mu_y - \mu_x, \bar{Y} - \bar{X}) &= E[((\bar{Y} - \bar{X}) - (\mu_y - \mu_x))^2] = E[((\bar{Y} - \mu_y) - (\bar{X} - \mu_x))^2] \\ &= Var(\bar{Y}) - Var(\bar{X}) = \frac{\sigma_y^2}{n} - \frac{\sigma_x^2}{m}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_\theta R(\mu_y - \mu_x, \bar{Y} - \bar{X}) = \frac{\sigma_y^2}{n} - \frac{\sigma_x^2}{m}.$$

Deste modo, $\bar{Y} - \bar{X}$ é estimador minimax de $\mu_y - \mu_x$.

b. Seja $\Theta = (\mu_y, \mu_x, \sigma_y^2, \sigma_x^2)$, em que $\mu_x, \mu_y \in R$, $\sigma_y^2 \leq M_y$ y $\sigma_x^2 \leq M_x$, com M_x e M_y conhecidos e também $\Theta_0 = (\mu_y, \mu_x, \sigma_{0y}^2, \sigma_{0x}^2)$, em que $\mu_x, \mu_y \in R$, mas desta vez $\sigma_{0y}^2 = M_x$ e $\sigma_{0x}^2 = M_y$. Então, pelo exercício 19(a), $\bar{Y} - \bar{X}$ é o estimador de $\mu_y - \mu_x$ quando o espaço paramétrico é dado por Θ_0.

Seja $R(\mu_y - \mu_x, \bar{Y} - \bar{X}) =$ é a função de risco médio quando é considerado o espaço Θ. Logo

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\mu_y - \mu_x, \delta(X,Y)) = \frac{M_y}{n} + \frac{M_x}{m}$$

e também

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} R(\mu_y - \mu_x, \delta(X,Y)) = \frac{M_y}{n} + \frac{M_x}{m}$$

também, dado que $R(\mu_y - \mu_x, \bar{Y} - \bar{X}) = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m}$ e

$$E_{\mu_y,\mu_x}\left[(\bar{Y} - \bar{X} - \mu_y + \mu_x)^2\right] = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{m},$$

e também que $\sigma_y^2 \in (0, M_x]$ e $\sigma_x^2 \in (0, M_y]$. Então $\bar{Y} - \bar{X}$ é minimax quando é considerado o espaço paramétrico Θ.

Exercício 17. Denotaremos por Δ o conjunto de todos os estimadores de parâmetro e δ_Λ (Λ é a distribuição a priori de $g(\theta)$) o estimador de Bayes que é ENVVUM, minimax e admissível. Logo supondo validas as condições para a existência da distribuição a posterior dada por $g(\theta)|X$, temos que o estimador de Bayes de $ag(\theta) + b$ sob a pérda quadratica é dado por:

$$E_\Lambda(ag(\theta) + b|X) = a\delta_\Lambda + b.$$

(i) ENVVUM.

Dado que δ_Λ é UNVVUM ele é não correlacionado com $U(X)$ que pertence à classe de estimadores não viciados de 0, ou seja $E(\delta_\Lambda U(X)) = 0$. Assim:

$$Cov_\theta(a\delta_\Lambda + b, U(x)) = E_\theta(U(x)[a\delta_\Lambda + b]) = aE_\theta(\delta_\Lambda U(X)) = 0.$$

Logo $a\delta_\Lambda + b$ é ENVVUM para estimar $ag(\theta) + b$.

(ii) Admissível. Por hipótese temos que δ_Λ é admissível, então:

$$R(g(\theta), \delta_\Lambda) \leq R(g(\theta), \delta), \forall \delta \in \Delta.$$

Agora, nos temos:

$$R(ag(\theta) + b, a\delta_\Lambda + b) = E\left[a^2(g(\theta) - \delta_\Lambda)\right] = a^2 R(g(\theta), \delta_\Lambda).$$

Supondo que $a\delta_\Lambda + b$, não é admissível, e existe um estimador $a\delta' + b$ tal que:

$$a^2 R(g(\theta), \delta_\Lambda) \geq a^2 R(g(\theta), \delta').$$

o qual implica que $R(g(\theta), \delta_\Lambda) \geq R(g(\theta), \delta')$ ou seja que δ_Λ é inadmissível, o que contradiz a hipótese inicial.

(iii) Minimax. Por hipótese temos que δ_Λ é minimax para $g(\theta)$, então:

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(g(\theta), \delta)\} = \sup_\theta \{R(g(\theta), \delta_\Lambda)\}.$$

Logo, multiplicando por a^2 em ambos lados da igualdade, pela parte $19(ii)$ temos que:

$$\inf_{\delta \in \Delta} \sup_\theta \{R(ag(\theta) + b, a\delta + b\} = \sup_\theta \{R(ag(\theta) + b, a\delta_\Lambda + b)\}.$$

Então, $a\delta_\Lambda + b$ é minimax para estimar $ag(\theta) + b$.

Bayes?

9.8

Lista de Exercicios 5

MAE 5834 - ESTATÍSTICA AVANÇADA I

Prof. Silvia L.P. Ferrari

Hugo Alberto Brango García - 9176006

Mario José Pacheco López - 9034481

2º semestre, 2014

1 Seja $(X_1,\dots,X_n)$ uma amostra aleatória de variável aleatoria com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta)=\theta^{-c}cx^{c-1}\exp\{-(x/\theta)^c\},\quad x>0;\ \theta>0,\ c>0;$$

em que c é conhecido.

(a) Obtenha um teste uniformemente mais poderoso de $H:\theta\le\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$ de nível α.

Sejam θ e θ' quaisquer, em que $\theta<\theta'$ e $\theta>0$, então dado que

$$f(\underset{\sim}{x};\theta)=\theta^{-nc}c^n\left[\prod_{i=1}^{n}x_i^{c-1}\right]\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i/\theta)^c\right\}\quad ;\ x_i>0,\ i=1,\dots,n;\ \theta>0,\ c>0$$

então $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ e $f(\underset{\sim}{x};\theta')$ são distintas e a razão de verossimilhanças é dada por:

$$\frac{f(\underset{\sim}{x};\theta')}{f(\underset{\sim}{x};\theta)}=\left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^{nc}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i/\theta)^c-(x_i/\theta')^c\right]\right\}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^{nc}}_{>0}\exp\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{\theta^c}-\frac{1}{\theta'^c}\right)}_{>0}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i^c}_{>0}\right\}$$

logo, dado que $\theta>0$ e $\theta<\theta'$, $(\theta/\theta')^{nc}>0$ e $1/\theta^c-1/\theta'^c>0$, portanto a razão de verossimilhanças, $f(\underset{\sim}{x};\theta')/f(\underset{\sim}{x};\theta)$ é uma função não decrescente de $T(\underset{\sim}{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^c$.

Assim, um teste UMP para $H:\theta\le\theta_0$ contra $\theta>\theta_0$, de nível α, é dado por:

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{quando } T(\underset{\sim}{x})>d\\ 0, & \text{quando } T(\underset{\sim}{x})\le d\end{cases}$$

Onde d é determinado por: $E_{\theta_0}\{\phi(\underset{\sim}{x})\}=\alpha$ e portanto por a relação $P_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X})>d)=\alpha$. Mas,

$X_i\sim \text{Weibull}(c,\theta) \Rightarrow X_i^c/\theta^c\sim Exp(1)\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i^c/\theta^c\sim \text{Gama}(n,1)$

logo, $P_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X})>d)=\alpha \Rightarrow 1-P_{\theta_0}(T(\underset{\sim}{X})\le d)=\alpha$

$$\Rightarrow 1-P_{\theta_0}\left(\frac{T(\underset{\sim}{X})}{\theta_0^c}\le\frac{d}{\theta_0^c}\right)=\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(W\le\frac{d}{\theta_0^c}\right)=1-\alpha$$

em que $W\sim\text{Gama}(n,1)$. Portanto,

$$\frac{d}{\theta_0^c}=G^{-1}(1-\alpha)\Rightarrow d=\theta_0^c\,G^{-1}_{n,1}(1-\alpha)$$

em que $G^{-1}_{n,1}(1-\alpha)$ é o quantil $1-\alpha$ da distribuição Gama$(n,1)$.

Assim, um teste UMP, de nível α, para $H:\theta\le\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$, rejeita H quando $\sum_{i=1}^{n}x_i^c>\theta_0^c\,G^{-1}_{n,1}(1-\alpha)$. Isto é,

$$\phi(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \text{quando } \sum_{i=1}^{n}x_i^c>\theta_0^c\,G^{-1}_{n,1}(1-\alpha)\\ 0, & \text{quando } \sum_{i=1}^{n}x_i^c\le\theta_0^c\,G^{-1}_{n,1}(1-\alpha).\end{cases}$$

(b) Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para θ para θ com coeficiente de confiansa $1-\alpha$.

Temos que a razão de verossimilhança é monótona crescente de $T(\underset{\sim}{x})$ e $F_\theta(t)=G_{n,1}(t/\theta^c)$, portanto é contínua em cada variável t e θ quando a outra é fixada. Assim, existe um limite superior uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Logo, seja $\underset{\sim}{x}$ a amostra aleatoria observada e $t=T(\underset{\sim}{x})$, então o limite superior é determinado por

$$F_\theta(t)=\alpha\Rightarrow G_{n,1}(t/\bar\theta^c)=\alpha\Rightarrow\frac{t}{\bar\theta^c}=G^{-1}_{n,1}(\alpha)\Rightarrow\bar\theta=\left(\frac{t}{G^{-1}_{n,1}(\alpha)}\right)^{1/c}$$

Assim, $\bar\theta=\left(t/G^{-1}_{n,1}(\alpha)\right)^{1/c}$ é o limite superior de confiança uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(c) Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $H: \theta = \theta_0$ contra $K': \theta \neq \theta_0$ de nível α.

Neste caso temos que $\Omega_H = \Theta_0$ e $\Omega = \{\theta : \theta > 0\}$. Também,

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{-c} c x_i^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\} = \theta^{-nc} c^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}\right] \exp\left\{-\frac{1}{\theta^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right\}$$

$$\Rightarrow \ell(\theta) = -nc\log\theta + n\log c + (c-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{\theta^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{nc}{\theta} + \frac{c}{\theta^{c+1}}\sum_{i=1}^{n} x_i^c = \frac{c}{\theta}\left(\frac{1}{\theta^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c - n\right)$$

θ^{-c} $\quad -c\,\theta^{-c-1}$ $\quad \cdot\frac{c}{\theta}\frac{1}{\theta^{c+1}}$

logo, se $\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta} = 0$, então $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)^{1/c} = \left(\frac{1}{n}T(x)\right)^{1/c}$ é o E.M.V. de θ, dado que

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{c}{\theta^2}\left(\frac{1}{\theta^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c - n\right) - \frac{c^2}{\theta^{c+2}}\sum_{i=1}^{n} x_i^c = -\frac{c}{\theta^{c+2}}\sum_{i=1}^{n} x_i^c + \frac{cn}{\theta^2} - \frac{c^2}{\theta^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c$$

e quando $\theta = \hat{\theta}$, $\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial\theta^2} < 0$, dado que

$$-\frac{c\sum_{i=1}^{n} x_i^c}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)^{1+2/c}} + \frac{cn}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)^{2/c}} - \frac{c^2\sum_{i=1}^{n} x_i^c}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)} = -\frac{cn^{1+2/c}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)^{2/c}} + \frac{cn^{1+2/c}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right)^{2/c}} - \frac{c^2 n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^c}$$

$$= -\frac{nc^2}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^c}_{>0}} < 0 \qquad x_i > 0$$

Assim,

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta\in\Omega_H} L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Omega} L(\theta)} = \frac{\theta_0^{-nc} c^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}\right]\exp\left\{-\frac{1}{\theta_0^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right\}}{\hat{\theta}^{-nc} c^n \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{c-1}\right]\exp\left\{-\frac{1}{\hat{\theta}^c}\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right\}}$$

$$= \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta_0}\right)^{nc}\exp\left\{\left(\frac{1}{\hat{\theta}^c} - \frac{1}{\theta_0^c}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^c\right\}$$

$$= \left(\frac{T(x)}{(n\theta_0)^c}\right)^n \exp\left\{n - \frac{T(x)}{\theta_0^c}\right\}$$

Logo, rejeitamos $H_0: \theta = \theta_0$ se, e somente se $\lambda(x) < C$, com $C \in (0,1)$, ou seja, rejeitamos H_0 se, e somente se

$$\left(\frac{T(x)}{(n\theta_0)^c}\right)^n \exp\left\{n - \frac{T(x)}{\theta_0^c}\right\} < C$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T(x)}{\theta_0^c}\right)^n \exp\left\{-\frac{T(x)}{\theta_0^c}\right\} < n^n C e^{-n} = C_1$$

$$\Rightarrow -\frac{T(x)}{\theta_0^c} + n\left(\log T(x) - \log\theta_0^c\right) < \log C_1 = C_2$$

$$\Rightarrow \frac{T(x)}{\theta_0^c}\left\{\log\theta_0^c - \log T(x)\right\} < \frac{1}{n}C_2 = C_3$$

Agora, seja $\lambda_1(x) = \frac{T(x)}{\theta_0^c}\left\{\log\theta_0^c - \log T(x)\right\}$, então

$$\frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial T(x)} = \frac{\log\theta_0^c}{\theta_0^c} - \frac{\log T(x)}{\theta_0^c} - \frac{1}{\theta_0^c}$$

Assim, se $\frac{\partial\lambda_1(x)}{\partial T(x)} = 0 \Rightarrow T(x) = \exp\{\log\theta_0^c - 1\}$ é o valor que maximiza $\lambda_1(x)$, pois $\frac{\partial^2\lambda_1(x)}{\partial T^2(x)} = -\frac{1}{\underbrace{T(x)\theta_0^c}_{>0}} < 0 \; ; \; \forall\, T(x)$

Logo, rejeita-se H_0 quando $\lambda_1(x) < C_2$, o que equivale a rejeitar H_0 quando $T(x) < a$ ou $T(x) > b$, sendo a e b tais que $a < \exp\{\log\theta_0^c - 1\}$, $b > \exp\{\log\theta_0^c - 1\}$ e

$$E_{\theta_0}\{\phi(x)\} = P_{\theta_0}(T(x) < a) + P_{\theta_0}(T(x) > b) = \alpha$$

$$\Rightarrow P_{\theta_0}(T(x) \leq b) - P_{\theta_0}(T(x) < a) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P_{\theta_0}(a < T(x) < b) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P_{\theta_0}\left(\frac{a}{\theta_0^c} < \frac{T(x)}{\theta_0^c} < \frac{b}{\theta_0^c}\right) = 1-\alpha$$

$\Rightarrow P_{\theta_0}\left(\frac{a}{\theta_0^c} < W < \frac{b}{\theta_0^c} \right) = 1-\alpha$

em que $W \sim Gama(n,1)$, portanto

$\frac{a}{\theta_0^c} = G_{n,1}^{-1}(\alpha/2) \Rightarrow a = \theta_0^c G_{n-1}^{-1}(\alpha/2)$ e

$\frac{b}{\theta_0^c} = G_{n,1}^{-1}(1-\alpha/2) \Rightarrow b = \theta_0^c G_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)$

Assim, o teste da razão de verossimilhanças de $H: \theta = \theta_0$ contra $K': \theta \neq \theta_0$ de nível α, rejeita H_0 quando $T(\underline{x}) < \theta_0^c G_{n-1}^{-1}(\alpha/2)$ ou $T(\underline{x}) > \theta_0^c G_{n-1}^{-1}(1-\alpha/2)$.

(d) Obtenha uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de uma estatística suficiente minimal e determine um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Temos que,

$f(\underline{x};\theta) = \theta^{-nc} \exp\left\{ -\frac{1}{\theta^c} \sum_{i=1}^n x_i^c \right\} c^n \prod_{i=1}^n x_i^{c-1} = g_\theta(T(\underline{x}))\, h(\underline{x})$

e, pelo critério da fatoração, com $g_\theta(T(\underline{x})) = \theta^{-nc} \exp\left\{ -\frac{1}{\theta^c} \sum_{i=1}^n x_i^c \right\}$ e $h(\underline{x}) = c^n \prod_{i=1}^n x_i^{c-1}$ $(h(\underline{x}) > 0)$, $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^c$ é uma estatística suficiente.

Por outro lado,

$\frac{f(\underline{y};\theta)}{f(\underline{x};\theta)} = \exp\left\{ \frac{1}{\theta^c}\left[\sum_{i=1}^n x_i^c - \sum_{i=1}^n y_i^c \right] \right\} h(\underline{x},\underline{y})$; em que $h(\underline{x},\underline{y}) = \frac{h(\underline{y})}{h(\underline{x})}$ é não negativa

Logo, se $T(\underline{x}) = T(\underline{y}) \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^c = \sum_{i=1}^n y_i^c$, então $f(\underline{y};\theta) = f(\underline{x};\theta) h(\underline{x},\underline{y})$, e se $f(\underline{y};\theta) = f(\underline{x};\theta) h(\underline{x},\underline{y})$ então $\exp\left\{ \frac{1}{\theta^c}\left[\sum_{i=1}^n x_i^c - \sum_{i=1}^n y_i^c \right] \right\} = 1$, então $\sum_{i=1}^n x_i^c - \sum_{i=1}^n y_i^c = 0$, então $T(\underline{x}) - T(\underline{y})$.

Assim, dadas as condições do C.F., $T(\underline{x}) = T(\underline{y}) \Leftrightarrow \underline{y} \in D(\underline{x})$, em que $D(\underline{x}) = \{ \underline{y} \in \mathcal{X} : P_\theta(\underline{y}) = P_\theta(\underline{x}) h(\underline{x},\underline{y}),\ \forall\, \theta \in \Omega \}$ com h não negativa.

Então $T(\underline{x})$ é suficiente minimal.

Por outro lado, a distribuição de $T(\underline{x})/\theta^c \sim Gama(n,1)$, que não depende de θ, portanto $T(\underline{x})/\theta^c$ é uma quantidade pivotal.

Assim, um intervalo de confiança para θ sai da relação

$P\left(g_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{T(\underline{x})}{\theta^c} < g_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$, em que $g_\beta = G_{n,1}^{-1}(\beta)$, $\beta \in [0,1]$

$\Rightarrow \frac{1}{g_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\theta^c}{T(\underline{x})} < \frac{g}{g_{\alpha/2}} \Rightarrow \left[\frac{T(\underline{x})}{g_{1-\alpha/2}} \right]^{1/c} < \theta < \left[\frac{T(\underline{x})}{g_{\alpha/2}} \right]^{1/c}$

Então, o intervalo $\left([T(\underline{x})/g_{1-\alpha/2}]^{1/c} ; [T(\underline{x})/g_{\alpha/2}]^{1/c} \right)$ é um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ.

(8) Sejam $X_1,\dots,X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $U(-\theta,\theta)$, $\theta>0$.

(a) Considere o teste ϕ tal que $\phi(x_1,\dots,x_n)=1$, se $\max(|x_1|,\dots,|x_n|)>\theta_0$ e $\phi(x_1,\dots,x_n)=\alpha$, caso contrário. Mostre que ϕ é uniformemente mais poderoso (UMP) de nível α para testar $H:\theta=\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$. Este teste é UMP para testar $H^*:\theta\le\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$? Justifique.

Temos as v.a. $X_1,\dots,X_n$ com distribuição $U(-\theta,\theta)$, $\theta>0$, e vamos considerar as novas variáveis $Y_1,\dots,Y_n$, tais que $Y_i=|X_i|$, $i=1,\dots,n$. Notar que, a distribuição de Y_i é $U(0,\theta)$, $\theta>0$, para $i=1,\dots,n$.

Considere agora o teste de $H:\theta=\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$ ou equivalentemente $H:\theta=\theta_0$ contra $K:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$.

Dado que

$$f(\underset{\sim}{y}|\theta_1) = \frac{1}{\theta_1^n}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta_1)}(y_i) = \frac{1}{\theta_1^n} I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) \quad ;$$

$$f(\underset{\sim}{y}|\theta_0) = \frac{1}{\theta_0^n}\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta_0)}(y_i) = \frac{1}{\theta_0^n} I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$

em que $y_{(n)}=\max\{y_1,\dots,y_n\}$. Então, tomando $k=(\theta_0/\theta_1)^n$, temos que;

$\phi(x)=1$, se, e somente se

$$f(\underset{\sim}{y}|\theta_1)>k f(\underset{\sim}{y}|\theta_0) \iff \frac{1}{\theta_1^n}I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) > \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\frac{1}{\theta_0^n} I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$
$$\iff I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) > I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$
$$\iff y_{(n)}>\theta_0$$

e $\phi(x)=0$, se e somente se

$$f(\underset{\sim}{y}|\theta_1)<k f(\underset{\sim}{y}|\theta_0) \iff I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) < I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$

que nunca ocorre pois $\theta_1>\theta_0$

O de cima, válido quando pelo menos um, $f(\underset{\sim}{y}|\theta_1)$ ou $f(\underset{\sim}{y}|\theta_0)$, é positivo; isto é, quando $y_{(n)}<\theta_1$ e $y_{(n)}>0$.

Portanto, o teste UMP para testar $H:\theta=\theta_0$ contra $K:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$, é dado por:

$$\phi(\underset{\sim}{y})=\begin{cases}1, & y_{(n)}>\theta_0\\ \gamma, & y_{(n)}<\theta_0\end{cases}$$

em que γ é determinado tal que $E_{\theta_0}\{\phi(\underset{\sim}{Y})\}=\alpha$; assim, dado que

$$E_{\theta_0}\{\phi(\underset{\sim}{Y})\} = P_{\theta_0}(Y_{(n)}>\theta_0)+\gamma P_{\theta_0}(Y_{(n)}<\theta_0)$$
$$= 0+\gamma\cdot 1 = \gamma \; \alpha$$

Então, $\gamma=\alpha$, e o teste UMP para testar $H:\theta=\theta_0$ contra $K=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ ou $H:\theta=\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$, de nível α, é

$$\phi(\underset{\sim}{y})=\begin{cases}1,& y_{(n)}>\theta_0\\ \alpha,& y_{(n)}<\theta_0\end{cases} = \begin{cases}1,& \max\{|X_1|,\dots,|X_n|\}>\theta_0\\ \alpha,& \max\{|X_1|,\dots,|X_n|\}<\theta_0\end{cases}$$

Notar que, o de acima é válido quando $H:\theta\le\theta_0$, como se mostra a continuação. Quando $y_{(n)}<\theta_1$ e $y_{(n)}>0$, a razão $f(\underset{\sim}{y}|\theta_1)/f(\underset{\sim}{y}|\theta_0)$, com $\theta_0<\theta_1$, é não decrescente(*) de $y_{(n)}$, então a razão $f(\underset{\sim}{y}|\theta)$ tem razão de verossimilhanças monótona, então para testar $H:\theta\le\theta_0$ contra $K:\theta>\theta_0$, existe um teste UMP que é dado por

$$\phi'(\underset{\sim}{y})=\begin{cases}1,& \text{se } y_{(n)}>c\\ \gamma,& \text{se } y_{(n)}=c\\ 0,& \text{se } y_{(n)}<c\end{cases} = \begin{cases}1,& \text{se } y_{(n)}>c\\ 0,& \text{se } y_{(n)}\le c\end{cases}$$

dado que $y_{(n)}=c$ tem probabilidade zero, e c é determinado por $E_{\theta_0}\{\phi'(\underset{\sim}{Y})\}=\alpha$. Logo, dado que $f_{Y_{(n)}}(x|\theta)=n\theta^{-n}x^{n-1}I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta>0$,

$$E_{\theta_0}\{\phi'(\underset{\sim}{Y})\}=P_{\theta_0}(Y_{(n)}>c)=\int_c^{\theta_0} n\theta^{-n}x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{\theta_0^n}\Big|_c^{\theta_0} = 1-\frac{c^n}{\theta_0^n}$$

Portanto, $1-\frac{c^n}{\theta_0^n}=\alpha \Rightarrow c=\theta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$.

(*) Como em exemplo 6.8 de M.S. de Shao.

Logo, o poder de $\phi'(\underset{\sim}{y})$, para $\theta > \theta_0$, é

$$E_{\theta_1}\{\phi'(\underset{\sim}{y})\} = P_{\theta_1}(y_{(n)} > c) = 1 - \frac{c^n}{\theta_1^n} = 1 - (1-\alpha)\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$$

e do item (b) o poder de $\phi(\underset{\sim}{y})$ é também $1-(1-\alpha)\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$, para $\theta > \theta_0$.

Logo, dado que

$$\sup_{\theta \le \theta_0} E_\theta\{\phi(\underset{\sim}{y})\} = \sup_{\theta \le \theta_0} \underset{\substack{\downarrow \\ \nearrow \text{ em } \phi(\underset{\sim}{y})}}{\alpha P_\theta(y_{(n)} \le \theta_0)} = \alpha \underbrace{P_{\theta_0}(y_{(n)} \le \theta_0)}_{1} = \alpha$$

o teste $\phi(\underset{\sim}{y})$ é um teste UMP de nível α, para testar $H: \theta \le \theta_0$ contra $K: \theta > \theta_0$.

(b) Encontre a função de poder do teste ϕ.

Dado que, para $\theta > 0$

$$E_\theta(\phi(x)) = P_\theta(y_{(n)} > \theta_0) + \alpha P_\theta(y_{(n)} \le \theta_0)$$
$$= 1 - P_\theta(y_{(n)} \le \theta_0) + \alpha P_\theta(y_{(n)} \le \theta_0)$$
$$= 1 - (1-\alpha) P_\theta(y_{(n)} \le \theta_0)$$
$$= \begin{cases} 1-(1-\alpha), & \theta \le \theta_0 \\ 1-(1-\alpha)\int_0^{\theta_0} \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\,dx, & \theta > \theta_0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha, & \theta \le \theta_0 \\ 1-(1-\alpha)\frac{\theta_0^n}{\theta^n}, & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Assim, a função de poder é

$$\beta(\theta) = \begin{cases} \alpha, & \theta \le \theta_0 \\ 1-(1-\alpha)\frac{\theta_0^n}{\theta^n}, & \theta > \theta_0. \end{cases}$$

⑨ Considere uma única observação de uma variável aleatória X.

(a) Use o Lema de Neyman-Pearson para encontrar o teste mais poderoso de nível α de $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1,b)$, sendo, $b>1$ fixado. Se $\alpha = 0.05$ e se foi observado $x = 0,1$, qual é sua decisão? Qual é o nível descriptivo (p-value) do teste?

Solução

Se $X \sim Beta(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$

Vamos provar $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1,b)$, $b>1$ fixo

Pelo Lema de Neyman-Pearson existe um teste ϕ e uma constante K tais que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad P_1(x) > K P_0(x) \\ 0 & \text{se} \quad P_1(x) < K P_0(x) \end{cases}$$

e $E_0(\phi(x)) = \alpha$

Sob $H: X \sim U(0,1) \Rightarrow P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(1)\Gamma(b)}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$$

$$= \frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(b)}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x) = b(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$$

$$\Rightarrow P_1(x) > K P_0(x) \iff b(1-x)^{b-1} > K P_0(x)$$

$$\iff (1-x)^{b-1} > \frac{K}{b}$$

$$\iff (1-x) > \left(\frac{K}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\iff x < 1 - \left(\frac{K}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} = K'$$

$b>1$

Então

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x < K' \\ 0 & \text{se} \quad x > K' \end{cases}$$

Em que

$$E_0(\phi(x)) = \alpha \iff P_0(X < K') = \alpha$$

Sob H. $X \sim U(0,1) \Rightarrow K' = \alpha$

$$\iff 1 - \left(\frac{K}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} = \alpha \iff \left(\frac{K}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} = 1-\alpha$$

$$\iff K = b(1-\alpha)^{b-1}$$

Portanto,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b(1-x)^{b-1} > b(1-\alpha)^{b-1} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\iff \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1-x > 1-\alpha \\ 0, & \text{cc} \end{cases} \iff \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \alpha \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Si $x = 0.1$ e $\alpha = 0.05 \Rightarrow 0.1 > 0.05$ não rejeitamos H.

$$\hat{p}(x) = P_0(X \overset{\leq}{>} x) = P_0(X \overset{\leq}{>} 0.1) = 1 - P_0(X \leq 0.1) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad \times$$

$$\hat{p} = \inf\{\alpha / \phi(x) = 1\} = \inf\{\alpha / x < \alpha\} = x \Rightarrow \text{se } x = 0.1 \rightarrow \hat{p} = 0.$$

(b) O teste obtido em (a) é uniformemente mais poderoso de $H: X \sim U(0,1)$ contra $K': X \sim Beta(1,b),\ b > 1$? Justifique.

Solução

Considere $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1, b_0),\ b_0 > 1$

pelo item (a) o teste UMP é dado por.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Considere $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1, b_1),\ b_1 > b_0$

portanto o teste UMP é $\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ 0 & c.c \end{cases}$

Então, $\phi(x)$ é UMP para testar $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1,b), b:$

(c) Existe teste uniformemente mais poderoso de $H: X \sim U(0,1)$ contra $K'': X \sim Beta(1,b),\ b \neq 1$? Justifique.

Solução

- Se $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1,b), b > 1$, então

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ 0, & c.c \end{cases}$$

- Se $H: X \sim U(0,1)$ contra $K: X \sim Beta(1,b)\ b < 1$, então

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x > \alpha \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Portanto Não existe teste UMP para testar $H_0: X \sim U(0,1)$ contra $K'': X \sim Beta(1,b)$. $b \neq 1$.

(10) Seja X distribuída de acordo com $P_\theta, \theta \in \Omega$, e seja T uma estatística suficiente para θ. Mostre que, se $\phi(X)$ é qualquer teste de hipótese sobre θ, então $\psi(T)$ dado por $\psi(t) = E(\phi(X) | T = t)$ é um teste que depende apenas do T e sua função do poder é idêntica à de $\phi(X)$

Solução

Como T é uma estatística suficiente então $X | T = t$ não depende de parâmetros deconhecidos e portanto $\psi(T) = E(\phi(x) | T = t)$.

Seja $\theta \in \Omega_K$ assim

$$E_\theta(\psi(T)) = E_\theta[E(\phi(x) | T = t)] = E_\theta(\phi(x)) \quad \forall \theta \in \Omega_K$$

Ou seja, o poder do teste $\psi(T)$ coincide com o poder do teste $\phi(x)$.

(12) Sejam $X_1,\dots,X_n$ e $Y_1,\dots,Y_n$ amostras aleatórias de distribuições exponenciais de médias $\mu>0$ e $\lambda>0$ respectivamente. Obtenha o teste da razão de verossimilhanças de $H_0: \mu=\lambda$ versus $H_1: \mu\neq\lambda$ de nível α $(0<\alpha<1)$.

Solução

Temos que

$$P_\mu(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x_i}{\mu}\right) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$P_\lambda(\underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{y_i}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Seja $\underline{\theta} = (\mu,\lambda)$, logo

$$L(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta}) = \mu^{-n}\lambda^{-n}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum x_i - \frac{1}{\lambda}\sum y_i\right)$$

$$= \mu^{-n}\lambda^{-n}\exp\left(-\frac{n\bar{x}}{\mu} - \frac{n\bar{y}}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta}) = -n\log\mu - n\log\lambda - \frac{n\bar{x}}{\mu} - \frac{n\bar{y}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\mu} = 0 \iff -\frac{n}{\hat{\mu}} + \frac{n\bar{x}}{\hat{\mu}^2} = 0 \iff \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\lambda} = 0 \iff -\frac{n}{\hat{\lambda}} + \frac{n\bar{y}}{\hat{\lambda}^2} = 0 \iff \hat{\lambda} = \bar{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y},\underline{\theta})}{\partial\mu^2} = \frac{n}{\mu^2} - \frac{2n\bar{x}}{\mu^3} \quad ; \quad \frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y},\underline{\theta})}{\partial\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2} - \frac{2n\bar{y}}{\lambda^3} \quad \text{e,}$$

$$\frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\mu\partial\lambda} = 0$$

Seja $D(a,b) = \left[\frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y},\underline{\theta})}{\partial\mu^2}(a,b)\right]\left[\frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\lambda^2}(a,b)\right] - \left[\frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\mu\partial\lambda}(a,b)\right]^2$

como $D(\bar{x},\bar{y}) = \left[\frac{n}{\bar{x}^2} - \frac{2n\bar{x}}{\bar{x}^3}\right]\left[\frac{n}{\bar{y}^2} - \frac{2n\bar{y}}{\bar{y}^3}\right] - 0^2 = \frac{n^2}{\bar{x}^2\bar{y}^2} > 0$

e $\frac{\partial^2 l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\mu^2}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{n}{\bar{x}^2} - \frac{2n\bar{x}^2}{\bar{x}^3} = -\frac{n}{\bar{x}^2} < 0$

então, $\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\mu},\hat{\lambda}) = (\bar{x},\bar{y})$ maximiza $l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})$

Temos que $\Omega = \{\underline{\theta} = (\mu,\lambda) / \mu>0,\ \lambda>0\}$

e

$\Omega_H = \{\underline{\theta} = (\mu,\lambda) / \mu=\lambda\}$

Se $\underline{\theta}\in\Omega_H$, então

$$l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta}) = -2n\log\mu - \frac{n}{\mu}(\bar{x}+\bar{y})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta})}{\partial\mu} = 0 \iff -\frac{2n}{\hat{\mu}} + \frac{n}{\hat{\mu}^2}(\bar{x}+\bar{y}) = 0$$

$$\iff \hat{\mu} = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$$

Note que $\hat{\mu} = \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ maximiza $\ell(x,y,\theta)$ sobre H_0, pois

$$\left.\frac{\partial^2 \ell(x,y;\theta)}{\partial \mu^2}\right|_{\mu=\frac{\bar x+\bar y}{2}} = \left.\frac{2n}{\mu^2} - \frac{2n(\bar x+\bar y)}{\mu^3}\right|_{\mu=\frac{\bar x+\bar y}{2}}$$

$$= \frac{8n}{(\bar x+\bar y)^2} - \frac{16n(\bar x+\bar y)}{(\bar x+\bar y)^3} = -\frac{8n}{(\bar x+\bar y)^2} < 0$$

Agora,

$$\lambda(x,y) = \frac{\sup_{\theta\in\Omega_H} L(x,y;\theta)}{\sup_{\theta\in\Omega} L(x,y;\theta)}$$

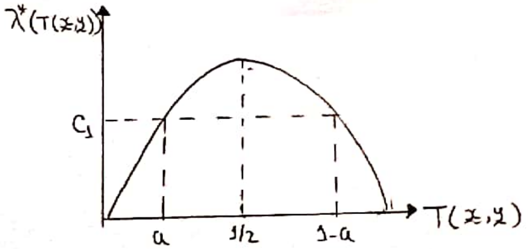
$$\Rightarrow \lambda(x,y) = \frac{\left(\frac{\bar x+\bar y}{2}\right)^{-2n} \exp\left[-n\left(\frac{2}{\bar x+\bar y}\right)(\bar x+\bar y)\right]}{\bar x^{-n}\,\bar y^{-n} \exp\left[-\frac{n\bar x}{\bar x} - \frac{n\bar y}{\bar y}\right]} = \frac{4^n \bar x^n \bar y^n}{(\bar x+\bar y)^{2n}}$$

Logo $\lambda(x,y) < c \iff \frac{\bar x\bar y}{(\bar x+\bar y)^2} = \lambda^*(x,y) < c_1$ sendo $c_1 = \frac{c^{1/n}}{4}$.

Note que:

$$\frac{\bar x\bar y}{(\bar x+\bar y)^2} = \frac{\bar x}{\bar x+\bar y}\cdot\frac{\bar y}{\bar x+\bar y} = \frac{\bar x}{\bar x+\bar y}\left(1-\frac{\bar x}{\bar x+\bar y}\right)$$

Chamemos $T(x,y) = \frac{\bar x}{\bar x+\bar y} \Rightarrow \lambda^* = \lambda^*(T(x,y))$



$\lambda^*(T(x,y)) < c_1 \iff T(x,y) < a$ ou $T(x,y) > 1-a$

Sob $H_0: \mu=\lambda$ temos que $X_1,\dots,X_n$ e $Y_1,\dots,Y_n$ são amostras aleatórias da distribuição $Exp(\mu)$, logo $\sum_{i=1}^n X_i \sim Gama(n,\mu)$ e $\sum Y_i \sim Gama(n,\mu)$ independentes.

Portanto $\frac{\bar X}{\bar X+\bar Y} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i} \sim Beta(n,n)$

Logo $P(T(x,y)<a) + P(T(x,y)>1-a) = \alpha$, equivale a ter

$P(T(x,y)<a) = \frac{\alpha}{2}$ Assim $a = q_{n,\alpha/2}$, sendo $q_{n,\alpha/2}$ o percentil $\alpha/2$ da distribuição Beta(n,n).

Assim, o teste de razão de verossimilhança de $H_0: \mu=\lambda$ contra $H_1: \mu\neq\lambda$ de nível α é dado por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } T(x,y) < q_{n,\alpha/2} \text{ ou } T(x,y) > 1-q_{n,\alpha/2} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

ESTATÍSTICA AVANÇADA I - LISTA 5

Jaime Enrique Lincovil Curivil
Maicon Aparecido Pinheiro

9.1

Exercício 2.

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleátoria da densidade:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1\ ,\ \theta > 0\ .$$

Item 2 (a): Obtenha um teste UMP de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ de nível α. Começamos escrevendo a função de verossimilhança, para $x \in \mathcal{X}$:

$$L(\theta) = \theta^n \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta-1} I_{\mathcal{X}}(x),$$

a qual pode ser expressada de forma equivalente por:

$$L(\theta) = \exp(log(L(\theta))) = \exp\{nlog(\theta) + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} log(x_i)\}I_{\mathcal{X}}(x).$$

Agora, seja $\theta_0 < \theta'$, consideremos a seguinte razão de verossimilhanças :

$$\frac{p_{\theta'}(x)}{p_{\theta_0}(x)} = \exp\{nlog\Big(\frac{\theta'}{\theta_0}\Big) + (\theta' - \theta_0)\sum_{i=1}^{n} log(x_i)\}.$$

De $\theta_0 < \theta'$, temos que $log\Big(\frac{\theta'}{\theta_0}\Big) > 0$ e $(\theta' - \theta_0) > 0$. Esta razão é uma função da estatística $T(X) = \sum_{i=1}^{n} log(X_i)$, a qual:

$$T : \mathcal{X} \to (-\infty, 0).$$

Como a razão depende da amostra através desta estatística, podemos considerarla como uma função $\psi_{\theta_0,\theta'}(T)$. Logo, como para dois valores de T, dados por t_1 e t_2 em que para $t_1 \leq t_2$ temos que $\psi_{\theta_0,\theta'}(t_1) \leq \psi_{\theta_0,\theta'}(t_2)$, ou seja a razão é uma função não decrescente de $T(X)$. Também, dada a distribuição contínua de $T(x)$, temos que $P(T = c) = 0, \forall c < 0$.

Pelo teorema correspondente, o teste UMP para as hipótesis consideradas é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) > c\ . \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) < c\ . \end{cases}$$

Para determinar a constante c associada com o nível de significância α. Precisaremos do seguinte resultado. Seja

$$Y = g(X) = -log(X),$$

em que g é uma função estritamente monótona. Seja $g^{-1}(X) = e^{-Y}$ e $dg^{-1}(X)/dY = -e^{-Y}$. Deste modo a densidade de Y é dada por:

$$f_y(y|\theta) = f_X(g^{-1}(x)|\theta)\Big|dg^{-1}(X)/dY\Big| = \theta e^{-\theta y} I_{R+}(y).$$

Portanto, $Y = -log(X) \sim E(\theta)$. Logo, pelo teorema correspondente, a constante c para o teste ϕ , esta sujeita à condição $E_{\theta_0}(\phi(X)) = \alpha$, ou seja:

$$P_{\theta_0}(T > c) = P_{\theta_0}(-T < -c) = P_{\theta_0}(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} -log(X_i) < -2\theta_0 c) = P_{\theta_0}(\chi^2_{2n} < -2\theta_0 c) = \alpha.$$

$$\Leftrightarrow -2\theta_0 c = q_\alpha \Leftrightarrow c = \frac{-q_\alpha}{2\theta_0}.$$

Em que q_α é o percentil de ordem α da distribuição χ^2_{2n}. Finalmente o teste $\phi(x)$ é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) > \frac{-q_\alpha}{2\theta_0} . \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) < \frac{-q_\alpha}{2\theta_0} . \end{cases}$$

Item 2 (b): Obtenha um teste UMP de $H_0 : \theta \geq \theta_0$ ($\theta_0 > 0$) versus $H_1 : \theta < \theta_0$ de nível α.

Pelo teorema correspondente o teste UMP para estas hipóteses é dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) < c . \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) > c . \end{cases}$$

Logo a constante c deve satisfazer:

$$P_{\theta_0}(T < c) = P_{\theta_0}(-T > -c) = P_{\theta_0}(2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} -log(X_i) > -2\theta_0 c) = P_{\theta_0}(\chi^2_{2n} > -2\theta_0 c) = \alpha.$$

$$\Leftrightarrow -2\theta_0 c = q_{1-\alpha} \Leftrightarrow c = \frac{-q_{1-\alpha}}{2\theta_0}.$$

Em que $q_{1-\alpha}$ é o percentil de ordem $1-\alpha$ da distribuição χ^2_{2n}. Finalmente o teste $\phi(x)$ é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) < \frac{-q_{1-\alpha}}{2\theta_0} . \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} log(x_i) > \frac{-q_{1-\alpha}}{2\theta_0} . \end{cases}$$

Item 2 (c): Neste exercício como resposta apresentamos um contra exemplo. A ideia principal do contra exemplo baseia-se no fato que necessariamente a região do teste nao é fixa, para as hipóteses propostas.

Sob a hipótese alternativa é especificado o conjunto dado por $\Omega - \{\theta_0\} = (0, \theta_0) \cup (\theta_0, +\infty)$. Pelos exercícios 2($a$) e 2($b$) temos que se $\theta < \theta_0$ a região crítica é dada por $\sum_{i=1}^{n} log(x_i) < \frac{-q_{1-\alpha}}{2\theta_0}$ e se $\theta > \theta_0$ a região critica é dado por $\sum_{i=1}^{n} log(x_i) > \frac{-q_\alpha}{2\theta_0}$. Porem, para os testes de nivel α o poder é maximizado pela seguinte função poder (sob o conjunto $(0, \theta_0) \cup (\theta_0, +\infty)$):

$$E_\theta[\phi(X)] = \begin{cases} P_\theta\Big(\sum_{i=1}^{n} log(X_i) < \frac{-q_{1-\alpha}}{2\theta}\Big), & \text{se } \theta < \theta_0 . \\ P_\theta\Big(\sum_{i=1}^{n} log(x_i) > \frac{-q_\alpha}{2\theta}\Big), & \text{se } \theta > \theta_0 . \end{cases}$$

Notamos que $E_\theta[\phi(X)]$ é crescente em θ se $\theta < \theta_0$ e decrescente se $\theta > \theta_0$. Neste caso a curva da função $E_\theta[\phi(X)] = \beta(\theta)$ é a maxima para os testes de nível α sobre a hipóteses alternativa. O ponto central é o seguinte: a região crítica deste teste de nível α vai depender dos possíveis valores de θ sob a alternativa a qual na pratica é desconhecido.

Item 2 (d): Para começar, procuramos o EMV de θ. A funcção de log verossimilhança, para $x \in X$ é dada por:

$$l(\theta) = \text{nlog}(\theta) + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \log(x_i).$$

Também tenemos que

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i).$$

Fazendo $dl(\theta)/d\theta = 0$ e reemplazando $\hat{\theta} = \theta$ o EMV é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{n}{-\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)}.$$

Também , como $d^2l(\theta)/d\theta^2 = -n/\theta^2 < 0$, $\forall\theta$, $l(\theta)$ tem um máximo em Ω.

Logo a razão de verossimilhança generalizada para as hipóteses propostas neste item é dada por:

$$\lambda(x) = \frac{\theta_0^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta_0 - 1} I_X(x)}{\hat{\theta}^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\hat{\theta} - 1} I_X(x)} = \left(\frac{\theta_0}{n}\right)^n T_1^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta_0 - \frac{n}{T_1}} < c$$

$$\Leftrightarrow T_1^n \left(\exp\{log \prod_{i=1}^n x_i\}\right)^{\theta_0 - \frac{n}{T_1}} < c'$$

$$\Leftrightarrow T_1^n \left(\mathrm{e}^{-T_1}\right)^{\theta_0 - \frac{n}{T_1}} < c' \Leftrightarrow T_1^n \mathrm{e}^{-\theta_0 T_1 + n} < c' \Leftrightarrow T_1^n \mathrm{e}^{-\theta_0 T_1} < c'.$$

Em que $T_1 = -\sum_{i=1}^n \log(X_i) \sim$ Gama(n, θ_0). Ou seja, a razão de verossimilhança depende dos dados somente através de T_1 e também tem uma forma proporcional a uma densidade de uma Gama $(n+1, \theta_0)$, crescente até um determinado ponto para depois decrescer.

Por isso rejeitar H_0 quando $\lambda(x) < c'$ é equivalente a rejeitar quando $T_1 < c_1$ ou $T_1 > c_2$ para adequadas constantes c_1 e c_2 tais que o teste seja de nível α. Para nosso teste escolhemos as constantes tais que $P_{\theta_0}(T_1 < c_1) = \alpha/2$ e $P_{\theta_0}(T_2 > c_2) = \alpha/2$.

Nesta vez, por simplicidade podemos tomar

Seria bom fazer um gráfico.

$$c_1 = v_{\alpha/2} \text{ e } c_2 = v_{1-\alpha/2},$$

em que $v_{\alpha/2}$ e $v_{1-\alpha/2}$ são os percentis correspondentes da distribuição Gama (n, θ_0). Logo, o teste da razão de verossimilhança é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T_1 < v_{\alpha/2} \text{ ou } T_1 > v_{1-\alpha/2} \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Item 2 (e).Encontre um limite inferior de confiança mais acurado co coeficiente de confiança $1-\alpha$..

Seja $\underline{\theta}$ o limite inferior de confiança uniformemente mais acurado para θ correspondente. Pelo item 2(a), a familia de densidades $p_\theta(x)$ tem RVM em a estatística $T = \sum_{i=1}^n log(X_i)$, deste modo, $\underline{\theta}$ será a solução de:

$$P_\theta(\sum_{i=1}^n log(X_i) < t) = P_\theta(-2\theta \sum_{i=1}^n log(X_i) > -2\theta t) = P_\theta(\chi^2_{2n} > -2\theta t) = 1 - \alpha,$$

é q_α ?

do exercício anterior temos que $\underline{\theta} = -q_\alpha/2t$, em que $t = \sum_{i=1}^n log(x_i)$.

Item 2 (f). Encontre um limite superior de confianca mais acurado co ceoficiente de confinza $1-\alpha$.

Do corolário utilizado no exercício anterior, temos que o limite superior $\overline{\theta}$ será a solução de :

$$P_\theta(\sum_{i=1}^n log(X_i) > t) = P_\theta(-2\theta \sum_{i=1}^n log(X_i) < -2\theta t) = P_\theta(\chi^2_{2n} < -2\theta t) = 1 - \alpha,$$

do exercício 2(b) anterior temos que $\underline{\theta} = -q_{1-\alpha}/2t$, em que $t = \sum_{i=1}^{n} log(x_i)$.

Item 2 (g). Determine uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de uma estatística suficiente e minimal e encontre um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

$$p_\theta(x) = \exp\{nlog(\theta) + -(\theta-1)\sum_{i=1}^{n} -log(X_i)\}I_X(x) = \exp\{nlog(\theta) + -(\theta-1)T(x)\}I_X(x)$$

$$= g_\theta(T(x))h(x).$$

Logo, pelo criterio da fatoração , a estatística T é suficiente para a família de densidades $p_\theta(x)$. Definamos para dois pontos do espaco amostral x e y o seguinte conjunto

$$D(x) = \{y : p_\theta(y) = p_\theta(x)h(x,y), \ \forall\, \theta \in \Omega\}.$$

Considerando $h(x,y) = 1$, verifica-se que $T(x) = T(y) \Leftrightarrow y \in D(x)$, porem $T(x)$ é uma estatística suficiente e minimal para $p_\theta(x)$

Como foi visto anteriormente $-2\theta\sum_{i=1}^{n} log(X_i) \sim \chi^2_{2n}$. Escolheremos constantes a e b tais que:

$$P_\theta(a \leq -2\theta\sum_{i=1}^{n} log(X_i) \leq b) = 1-\alpha.$$

decidimos por estas constantes tais que $a = v_{\alpha/2}$ e $b = v_{1-\alpha/2}$. Logo com probabilidade $1-\alpha$ temos que $v_{\alpha/2} \leq -2\theta\sum_{i=1}^{n} log(X_i) \leq v_{1-\alpha/2}$ e o intervalo de confianza respectivo é dado por:

$$\left[\frac{v_{\alpha/2}}{-2\sum_{i=1}^{n} log(x_i)}, \frac{v_{1-\alpha/2}}{-2\sum_{i=1}^{n} log(x_i)}\right]$$

desde que $-2\sum_{i=1}^{n} log(x_i) > 0$ e $_{\alpha/2}$ e $v_{1-\alpha/2}$ são os respectivos percentis da distribuição χ^2_{2n}.

Item 2 (h). Pelo teorema de Bayes temos que:

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) = \theta^n\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\theta-1}\gamma e^{-\gamma\theta}I_{R_+}(\theta).$$

$$\propto \theta^{(n+1)-1}\Big(exp\{log\prod_{i=1}^{n} x_i\}\Big)^{\theta-1}\gamma e^{-\gamma\theta}I_{R_+}(\theta).$$

$$= \theta^{(n+1)}e^{-(T+\gamma)\theta}I_{R_+}(\theta).$$

Então $\theta|x \sim Gama(n+1, T(x)+\gamma)$ e sob a perda quadrática, temos que o esimador de Bayes é dado por: ?

$$d_\Lambda = E_\gamma(\theta|x) = \frac{n+1}{-\sum_{i=1}^{n} log(x_i) + \gamma}$$

? $T = -\sum log x_i$?

Exercício 3. Seja $g(x)$ uma densidade de probabilidade que não depende de θ, dada a condição

$$\frac{d^2}{dx^2}logg(x) \leq 0, \ \forall x,$$

temos que a função $\tau(x) = logg(x)$ tem um maximo relativo que denotaremos por x_0. Logo, tanto para $x < x_1 < x_0$ como $x_0 > x_1 > x$ temos que $\tau(x) < \tau(x_1)$. Também isto implica que a $g(x)$ cresce até x_0 para depois decrescer, ou seja $g(x) \leq g(x_1)$. $\forall x \leq x_1$

Deste modo para $\theta < \theta'$, temos que $x - \theta' < x - \theta$ o qual implica que:

$$g(x-\theta') \leq g(x-\theta)$$
$$\Leftrightarrow log\left[\frac{g(x-\theta')}{g(x-\theta)}\right] \leq 0$$

também pela primeira desigualdade temos que:

$$\frac{d}{dx} log\left[\frac{g(x-\theta')}{g(x-\theta)}\right] = \frac{1}{g(x-\theta')} - \frac{1}{g(x-\theta)} \geq 0, \forall x.$$

Do ultimo resultado temos que $log\left[\frac{g(x-\theta')}{g(x-\theta)}\right]$ é não decrescente em x e como a função $log(.)$ é crescente em seu argumento isto leva à implicância de que a razão $g(x-\theta')/g(x-\theta)$ é não decrescente em x.

Exercício 7.

a. Uma vez que $X_i \sim$Pareto(β, γ), temos que

$$Y_i = 2\beta \log\left\{\frac{X_i}{\gamma}\right\} \sim \text{Exp}(1/2),\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

uma vez que

$$\mathbb{P}(Y_i \leq y) = \mathbb{P}\left(X_i \leq \gamma e^{y/2\beta}\right) = \int_{\gamma}^{\gamma e^{y/2\beta}} \frac{\beta\gamma^\beta}{x^{\beta+1}} dx = -\frac{\gamma^\beta}{x^\beta}\Bigg|_{\gamma}^{\gamma e^{y/2\beta}} = 1 - e^{-y/2},\ y > 0.$$

Daí, segue que $2\sum_{i=1}^n \beta \log\{X_i/\beta\} \sim \chi^2_{2n}$, uma vez que se $Y_i \sim \text{Exp}(1/2)$, então $Y_i \sim\sim \chi^2_2$ e a soma de chi-quadrados independentes é uma chi-quadrado com os graus de liberdades adicionados. Daí, segue que um intervalo de confinaça de nível $1-\alpha$ baseado em Q é dado por

$$\left[\frac{q_{\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n \log\{X_i/\beta\}}; \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^n \log\{X_i/\beta\}}\right],$$

γ γ

onde q_a é o quantil de ordem a de uma χ^2_{2n}.

b A função de densidade conjunta é dada por

$$f(x|\beta) = \beta^n \gamma^{n\beta} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(\beta+1)} I_{(\gamma,+\infty)}(x_{(1)}).$$

Para $\beta > \beta_0$, a razão é dada por

$$\frac{f(x|\beta_1)}{f(x|\beta_0)} = \frac{\beta_1^n \gamma^{n\beta_1} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(\beta_1+1)} I_{(\gamma,+\infty)}(x_{(1)})}{\beta_0^n \gamma^{n\beta_0} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-(\beta_0+1)} I_{(\gamma,+\infty)}(x_{(1)})}$$
$$= (\beta_1/\beta_0)^n \gamma^{n\beta_1 - n\beta_0} \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}\right)^{\beta_1-\beta_0}.$$

?

Logo, $f(x|\beta)$ tem RVM em $\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}$ e, portanto, também em $T = -\sum_{i=1}^n \log x_i$. Assim, $\bar{\beta}$ será a solução de $P_\beta(T < t) = 1 - \alpha$.

? $\bar{\beta} = ?$

c Dado que $f(x|\beta)$ tem RVM em $T = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i$,

$$\phi(X) = \begin{cases} 1, & -\sum_{i=1}^{n} \log X_i > c \\ 0, & -\sum_{i=1}^{n} \log X_i < c \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $c = ?$

d Quando β é conhecido e γ desconhecido, podemos reescrever

$$f(x|\gamma) = \beta^n \gamma^{n\beta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-(\beta+1)} I_{(\gamma,+\infty)}(x_{(1)}).$$

Para o caso das hipóteses simples dadas por

$$H: \gamma = \gamma_0 \quad \text{vs} \quad K: \gamma = \gamma_1,\ \gamma_0 < \gamma_1,$$

pelo LNP, o teste UMP de nível α é da forma $\phi(X) = \begin{cases} 1, & \text{se} f(x|\gamma_1) > f(x|\gamma_0) \\ \gamma, & \text{se} f(x|\gamma_1) = f(x|\gamma_0) \\ 0, & \text{se} f(x|\gamma_1) < f(x|\gamma_0) \end{cases}$ $\Rightarrow$?

Exercício 9.

Exercício 9 (a): Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a i.i.d com distribuição $U(-\theta, \theta)$ em que $\theta > 0$. Em primeiro lugar apresentamos a densidade conjunta dada por:

$$f(x|\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{(-\theta,\theta)}(x_i)$$

Além disso, notemos que $x_i \in (-\theta, \theta) \Leftrightarrow |x_i| \in (0, \theta)$. Assim, considerando $y_1 = |x_i|$, temos que $\prod_{i=1}^{n} I_{(-\theta,\theta)}(x_i) = 1 \Leftrightarrow 0 < y_{(1)} < y_{(n)} < \theta$, em que $y_{(1)} = \text{mín}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ e $y_{(n)} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Logo podemos re-escrever a densidade conjunta :

$$f(x|\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n I_{(0,y_{(n)})}(y_{(1)}) I_{(0,\theta)}(y_{(n)}).$$

Consideremos as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$ em que $\theta_0 < \theta_1$. Primeiro encontraremos o teste UMP segundo o LNP para estas hipóteses iniciais. Segundo o LNP o teste UMP é tais que $\phi(x) = 1$ se $f(x|\theta_1) > kf(x|\theta_1)$, $\phi(x) = \gamma$ se $f(x|\theta_1) = kf(x|\theta_1)$ e $\phi = 0$ se $f(x|\theta_1) < kf(x|\theta_1)$, para uma adequada constante k, tais que as condições [1] e [2] do Lema sejam satisfeitas, neste caso escolhemos $k = (\theta_1/\theta_0)^n$. Em este teste rejeitamos H_0 se

$$\left(\frac{1}{2\theta_1}\right)^n I_{(0,y_{(n)})}(y_{(1)}) I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) > k\left(\frac{1}{2\theta_0}\right)^n I_{(0,y_{(n)})}(y_{(1)}) I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$
$$\Leftrightarrow I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) > I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)}).$$

Desde que sempre $y_{(1)} \leq y_{(n)}$ se $\theta_0 < \theta_1$, a ultima desigualdade é verdadeira somente no caso $1 > 0$ ou seja $\phi(x) = 1$ se $y_{(n)} > \theta_0$.

Agora $\phi(x) = \gamma$ se $I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) = I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$, ou seja quando $y_{(n)} < \theta_0$. Por outro lado, o conjunto dos x, tais que

$$I_{(0,\theta_1)}(y_{(n)}) < I_{(0,\theta_0)}(y_{(n)})$$

é vazio, desde que nao existe um x, tais que isto acontece para $\theta_0 < \theta_1$.

Deste modo, o teste UMP aleatorizado é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_{(n)} > \theta_0 \\ \gamma, & \text{se } y_{(n)} < \theta_0 \end{cases}$$

Em que γ esta sujeito a

$$E_{\theta_0}[\phi(X)] = 1 \times P_{\theta_0}(Y_{(n)} > \theta_0) + \gamma \times P_{\theta_0}(Y_{(n)} < \theta_0) = 0 + \gamma = \alpha.$$

Porem o este UMP de nível α para as hipóteses simples consideradas é dado por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_{(n)} > \theta_0 \\ \alpha, & \text{se } y_{(n)} < \theta_0 \end{cases}$$

Dado que este teste é valido para $\theta_0 < \theta_1$, também é um test UMP quando é considerado qualquer outro $\theta' > \theta_0$, ou seja o este é UMP para testar as hipóteses $H : \theta = \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$.

Para as hipóteses $H^* : \theta \leq \theta_0$ countra $K : \theta > \theta_0$, temos que a densidade conjunta considerada tem RVM em a estatística $T(X) = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$, desde que:

$$\frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} = \begin{cases} (\frac{\theta_0}{\theta_1})^n, & \text{se } y_{(n)} < \theta_0 \\ \infty, & \text{se } \theta_0 < y_{(n)} < \theta_1 \end{cases}$$

Dado que a distribuição de $Y_{(n)}$ é continua o teste UMP será dado por:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_{(n)} > c \\ 0, & \text{se } y_{(n)} < c. \end{cases}$$

Como foi visto em listas anteriores a função de densidade de $Y_{(n)}$ é dada por:

$$f_{Y_{(n)}}(y|\theta) = n\theta^{-n}y^{n-1}I_{(0,\theta)}(y).$$

A constante c tem que garantir que o teste é de nível α, ou seja:

$$E_{\theta_0}[\phi_1(X)] = P_{\theta_0}(Y_n > c) = \int_c^{\theta_0} n\theta^{-n}y^{n-1}dx = \frac{y^n}{\theta_0^n}\Big|_c^{\theta_0} = 1 - \frac{c^n}{\theta_0^n}.$$

O qual implica que $c = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}$. Para finazar esta parte o teste é dado por:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_{(n)} > \theta_0(1-\alpha)^{1/n} \\ 0, & \text{se } y_{(n)} < \theta_0(1-\alpha)^{1/n}. \end{cases}$$

O poder do teste $\phi_1(x)$ para algum $\theta > \theta_0$ é dado por:

$$E_\theta[\phi_1(x)] = P_\theta(Y_{(n)} > \theta_0(1-\alpha)^{1/n}) = 1 - (1-\alpha)\left[\frac{\theta_0}{\theta}\right]^n.$$

Resumendo, o teste $\phi_1(x)$ é o teste UMP de nivel α para testar as hipóteses $H^* : \theta \leq \theta_0$ contra $K : \theta > \theta_0$. Voltando ao teste inicial que foi denotado por $\phi(x)$ é posivel verificar que ele é de nível α para estas hipóteses, pois:

$$\sup_{\theta:\theta\leq\theta_0}\{E_\theta[\phi(x)]\} = \sup_{\theta:\theta\leq\theta_0}\{1P_\theta(Y_{(n)} > \theta_0) + \alpha P(Y_{(n)} < \theta_0)\} = \sup_{\theta:\theta\leq\theta_0}\{\alpha \times 1\} = \alpha.$$

Também, o poder do teste ϕ para as hipóteses consideradas é:

$$E_\theta[\phi(X)] = P_\theta(Y_{(n)} > \theta_0) + \alpha P_\theta(Y_{(n)} < \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} n\theta^{-n}y^{n-1}dx + \alpha\int_0^{\theta_0} n\theta^{-n}y^{n-1}dx$$
$$1 - \int_0^{\theta_0} n\theta^{-n}y^{n-1}dx + \alpha\int_0^{\theta_0} n\theta^{-n}y^{n-1}dx = 1-(1-\alpha)\int_0^{\theta_0} n\theta^{-n}y^{n-1}dx$$
$$= 1-(1-\alpha)\left[\frac{\theta_0}{\theta}\right]^n, \forall\theta > \theta_0.$$

Desta forma $\phi(x)$ é de nivel α é mesmo poder a $\phi_1(x)$, ou seja o teste $\phi(x)_1$ também é mais poderoso para testar as hipóteses.

Exercício 9 (b): Para $\theta > 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\beta_\phi(\theta) = E_\theta(\phi(X)) &= P_\theta(Y_{(n)} > \theta_0) + \alpha P_\theta((Y_{(n)} < \theta_0))\\ &= 1 - P_\theta(Y_{(n)} \le \theta_0) + \alpha P_\theta((Y_{(n)} < \theta_0))\\ &= 1-(\alpha)P_\theta(Y_{(n)} \le \theta_0)\\ &= \begin{cases}\alpha, & \text{se } \theta \le \theta_0\\ 1-(1-\alpha)\left[\frac{\theta_0}{\theta}\right]^n, & \text{se } \theta > \theta_0.\end{cases}\end{aligned}$$

Exercício 11. Nesta demonstração nos assumimos que o teste $\phi(x)$ será dado por

$$\phi(x) = \begin{cases}1, & \text{se } x \in S_0\\ \gamma, & \text{se } x \in S_1\end{cases}$$

, em que S_0 e S_1 são as regiões de aceitação e rejeição respectivamente. Pela definição de esperança condicional temos que:

$$\psi(t) = E[\phi(X)|T=t] = 1\times P_\theta(x\in S_0|T=t) = \begin{cases}P_\theta(x\in S_0|T=t) = P_t'(x), & \text{se } T(x)=t.\\ 0, & \text{se } T(x)\ne t\end{cases}$$

Em que para um x fixo, $P_t'(x)$ somente depende de t. Seja Ω_K o subconjunto de Ω determinado por K. O poder do teste $\psi(t)$ para $\forall\theta\in\Omega_K$ é dado por:

$$\beta_{\psi(t)}(\theta) = E_\theta[\psi(T)] = E_\theta\Big[E(\phi(X)|T=t)\Big] = E_\theta(\phi(X)) = \beta_{\phi(x)}(\theta).$$

Ou seja, o poder do teste $\psi(t) =$ é o mesmo que o poder do teste ϕ para todo $\theta\in\Omega_K$.