Probabilidade II

1. Martingais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esp de prob., $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $n \geq 1$ e $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ é dita filtragem.

Definição 1: Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esp. de prob, $\mathcal{F}_n$ filtragem e X_n seq. de v.a's. Dizemos que X_n é martingal com respeito à $\mathcal{F}_n$ se

(i) $E|X_n| < \infty$

(ii) $X_n \in \mathcal{F}_n$, ie, X_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável

(iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

Caso, $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$ ou $\leq X_n$, X_n é dita submartingal ou supermartingal, respect.

Exemplo 1: Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots$ v.a's indep. e centradas ($E\xi_i = 0$). Seja $X_0 = 0$ e $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ com $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

dem: (i), (ii) ok!

(iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1} + X_n | \mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) + E(X_n | \mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1}) + X_n = X_n$.

Teorema 5.2.1: Se X_n é supermart., então para $n > m$

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m .$$

dem: Por indução, temos:

1) para $n = m+1$, $E(X_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m$.

2) suponha válido para $n > m$, então

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_m) = E(\underbrace{E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}^{\leq X_n} \mid \mathcal{F}_m)$$
$$\overset{def.}{\leq} E(X_n \mid \mathcal{F}_m)$$
$$\overset{H.I}{\leq} X_m$$

Corolário 5.2.2: Se X_n é martingal (sub), então para $n > m$,

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad (\geq X_m)$$

dem: Usando indução, temos

1) p/ $n = m+1$, imediato

2) suponha que vale para $n > m$, daí

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_m) = E(\underbrace{E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{\substack{= \\ \geq}\, X_n} \mid \mathcal{F}_m) \overset{def.}{\underset{(\geq)}{=}} E(X_n \mid \mathcal{F}_m)$$
$$\overset{H.I.}{\substack{= \\ \geq}} X_m$$

Teorema 5.2.3: Se X_n é martingal e φ uma função convexa, então $\varphi(X_n)$, com $E|\varphi(X_n)| < \infty$, é ~~submartingal~~. submartingal.

dem: (i), (ii) ok!

(iii) $E(\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \overset{\text{Jensen}}{\geq} \varphi(E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \overset{\text{def.}}{=} \varphi(X_n)$.

<u>Corolário 2</u>: Se X_n é martingal e $E|X_n|^p < \infty$ $\forall\, n \geq 1$ e algum $p \geq 1$, então $|X_n|^p$ é sub-martingal.

<u>dem</u>: (i), (ii) ok!

(iii) Note que $\varphi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ é convexa. Logo, pelo teorema anterior $|X_n|^p$ é submart.

<u>Teorema 5.2.4</u>: Se X_n é sub-martingal e φ convexa $\bar{n}$-decrescente tq $E|\varphi(X_n)| < \infty$, então $\varphi(X_n)$ é sub-martingal.

<u>dem</u>: (i), (ii) ok!

(iii) $E(\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \overset{\text{Jensen}}{\geq} \varphi(\underbrace{E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{\geq X_n})$

$\geq \varphi(X_n)$ (φ $\bar{n}$-decres.)

<u>Corolário 3</u>: X_n supermart. e φ côncava $\bar{n}$-deresc., então $\varphi(X_n)$ é supermart.

<u>dem</u>: (iii) $E(\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \leq \varphi(\underbrace{E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{\leq X_n})$

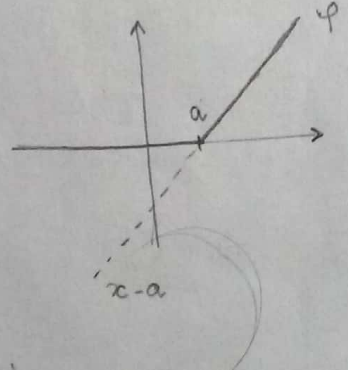
$\overset{\varphi\ \bar{n}\text{-decresc.}}{\leq} \varphi(X_n)$

Corolário 4: a) X_n é submartingal, então $(X_n - a)^+$ é submart. $\forall\ a \in \mathbb{R}$

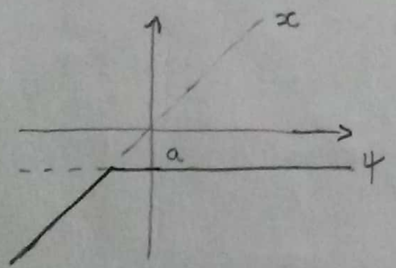
b) X_n é supermart., então $X_n \wedge a$ é supermart. $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

dem.: Seja $a \in \mathbb{R}$.

a) Veja que $\varphi(x) = (x-a)^+ = \max\{x-a, 0\}$ é convexa não decresc. Então, por teorema $(X_n - a)^+$ é submart.



b) Da mesma forma, $\psi(x) = x \wedge a = \min\{x, a\}$ é côncava ñ-decresc. Portanto, pelo corolário anterior temos $X_n \wedge a$ supermartingal.



Definição 2: Seja $\mathcal{F}_n$ uma filtragem. Dizemos que uma seq. H_n é previsível se $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, $n \geq 1$.

Definição 3: Sejam X_n adaptada à $\mathcal{F}_n$ e H_n previsível. Definamos $(X \cdot H)_n$ por

$$(X \cdot H)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1})$$

5.2.5

Teorema : Seja X_n um supermart. e $H_n \geq 0$ ltdo e previsível $\forall n$, então $(H \cdot X)_n$ é um supermart.

dem ∴ (i) $E|(H\cdot X)_n| = E\left|\sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1})\right|$

$\leq E\left(\sum_{m=1}^{n} H_m \cdot |X_m - X_{m-1}|\right) = \sum_{m=1}^{n} E(H_m \cdot |X_m - X_{m-1}|)$

$= \sum_{m=1}^{n} H_m \cdot E|X_m - X_{m-1}| \leq \sum_{m=1}^{n} \underbrace{H_m}_{\text{ltdo}} \cdot \left(\underbrace{E|X_m|}_{<\infty} + \underbrace{E|X_{m-1}|}_{<\infty}\right) < \infty$

(ii) ok!

(iii) $E((H\cdot X)_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E\left(\sum_{m=1}^{n+1} H_m \cdot (X_m - X_{m-1}) | \mathcal{F}_n\right)$

$= E(H_{n+1} \cdot (X_{n+1} - X_n) + (H \cdot X)_n | \mathcal{F}_n)$

$= E(\underbrace{H_{n+1}}_{\in \mathcal{F}_n} \cdot (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) + (H\cdot X)_n$

Mas, $E(H_{n+1} \cdot (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) = H_{n+1} \cdot E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)$

$= \underbrace{H_{n+1}}_{\geq 0} \cdot [\underbrace{E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n}_{\leq 0}]$

≤ 0

Donde, $E((H\cdot X)_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq (H\cdot X)_n$.

Propriedade 1 : Se X_n é martingal (sub ; super), então $EX_n = EX_0$ ($\geq EX_0$; $\leq EX_0$).

dem ∴ De fato, usando indução temos .

1) para $n = 1$,

$EX_1 = E(\underbrace{E(X_1 | \mathcal{F}_0)}_{= X_0}) = EX_0$

(ii) Suponha válido para n, i.e. $EX_n = EX_0$, então

$$EX_{n+1} = E(\underbrace{E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{= X_n}) = EX_n \overset{HI}{=} EX_0$$

$$\therefore \quad EX_n = EX_0 \quad \forall \; n \geq 1 \quad \text{se } X_n \text{ é mart.}$$

<u>Definição 4</u>: Uma v.a. N inteira não-negativa é dita tempo de parada (com respeito à $\mathcal{F}_n$) se $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$.

<u>Exemplo 2</u>: Sejam ξ_n seq. de v.a. Bernoulli e $N = \inf\{n \geq 1 ; \xi_n = 1\}$. Então N é tempo de parada.

De fato, basta observar que

$$\{N = n\} = \{\xi_i = 0, \; 1 \leq i \leq n-1, \; \xi_n = 1\} \in \mathcal{F}_n$$

<u>Corolário 5.2.6.</u>: Se X_n é supermart. e N for tempo de parada, então $X_{n \wedge N}$ é supermart.

<u>dem</u>: Primeiro, note que $H_n = I_{\{n \leq N\}}$ é previsível. De fato, basta observar que

$$\{n \leq N\} = \{N < n\}^c = \{N \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Logo, como $H_n \geq 0$ e ltdo segue do teorema anterior que

$$(H \cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1}) = X_{m \wedge N} - X_0 \quad \text{é supermart.}$$

Como X_0 é cte, logo martingal, e soma de martingais é martingal, segue o resultado.

Cruzamentos ascendentes de X_n

Sejam $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. $N_0 = -1$ e para $k \geq 1$

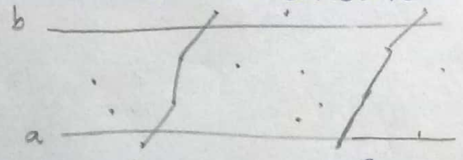
$$N_{2k-1} = \inf\{ m \geq N_{2k-2} : X_m \leq a \}$$

$$N_{2k} = \inf\{ m \geq N_{2k-1} : X_m \geq b \}$$

$\inf \phi = \infty$

Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $\{ N_{2k-1} < m \leq N_{2k} \}$ o evento em que m está num intervalo ascendente.

Note que



$$\{ N_{2k-1} < m \leq N_{2k} \} = \{ N_{2k-1} \leq m-1 \} \cap \{ N_{2k} \leq m-1 \}^c \in \mathcal{F}_{m-1}.$$

Defina,

$$H_m = I_{\{ N_{2k-1} < m \leq N_{2k} \}},$$

$X_{N_{2k-1}} \leq a$; $X_{N_{2k}} \geq b$ $< \infty$

então $H_m \geq 0$ é previsível e ltda.

Seja $U_n = \sup\{ k ; N_{2k} \leq n \}$ (nº de cruzamentos ascendentes de X_i até n.

Lema 5.2.7: Se X_n é submartingal, então

$$(b-a) E U_n \leq E(X_n - a)^+ - E(X_0 - a)^+$$

dem.: Seja $Y_n = a + (X_n - a)^+$. Como $\varphi(x) = (x-a)^+$ é convexa não-decrescente e X_n é submartingal, então por teorema anterior, Y_n tbm é. Além disso, do fato de φ ser não-decrescente, segue que # cruzamentos ascendentes de Y_n = # cruz. ascendentes de X_n.

Assim,

$$(H\cdot Y)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m \cdot \underbrace{(Y_m - Y_{m-1})}_{\geq b-a} \geq (b-a)\,U_n \qquad (*)$$

indica ocorrência ou ñ do upcrossing

Seja $K_m = 1 - H_m$. Então $0 \leq K_m \in \mathcal{F}_{m-1}$ (ie, previsível).

Daí,

$$(H\cdot Y)_n + (K\cdot Y)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m\cdot(Y_m - Y_{m-1}) + \sum_{m=1}^{n} K_m\cdot(Y_m - Y_{m-1})$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \underbrace{(H_m + K_m)}_{=1}\cdot(Y_m - Y_{m-1}) = Y_n - Y_0 . \qquad (**)$$

Tomando a média em $(*)$, vem

$$(b-a)\,EU_n \leq E(H\cdot Y)_n . \qquad (***)$$

Como K_m é previsível e Y_n é submartingal, então $(K\cdot Y)_n$ é submartingal. Logo, usando a propriedade 1,

$$E(K\cdot Y)_n \geq E(K\cdot Y)_1 = E(K_1(Y_1 - Y_0))$$

$$= E(E(K_1(Y_1-Y_0)\mid \mathcal{F}_0))$$

$$\overset{\text{Prop.}}{=} E(K_1\cdot E(Y_1 - Y_0 \mid \mathcal{F}_0))$$

$$= E\Big(\underbrace{K_1}_{\geq 0}\underbrace{(\underbrace{E(Y_1\mid\mathcal{F}_0)}_{\geq Y_0} - Y_0)}_{\geq 0}\Big) \geq 0 .$$

Logo, de $(**)$ e $(***)$, obtemos

$$EY_n - EY_0 \geq E(H\cdot Y)_n \geq (b-a)\,EU_n$$

Como, $EY_n - EY_0 = \cancel{a} + E(X_n - a)^+ - \cancel{a} - E(X_0 - a)^+$

$$= E(X_n - a)^+ - E(X_0 - a)^+$$

segue o resultado.

5.2.8

Teorema: Se X_n é submart. com $\sup_n EX_n^+ < \infty$, então existe X v.a. com $E|X| < \infty$ tq $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

dem: Seja $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, como anteriormente e defina

$$U = \lim U_n \quad := \# \text{ cruz. ascendentes de } X_n \text{ em } [a,b].$$

Então, do Lema anterior e do teo. da conv. monótona ($0 \leq U_n \uparrow U$), temos

$$EU = \lim EU_n \leq \overline{\lim} \frac{E(X_n - a)^+}{b-a}$$

Como, $(x-a)^+ \leq x^+ + |a|$, obtemos

$$EU \leq \overline{\lim} \frac{|a| + EX_n^+}{b-a} \leq \frac{|a| + \sup_n EX_n^+}{b-a} < \infty, \text{ por hipótese.}$$

Ou seja $EU < \infty$, donde $U < \infty$ q.c.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, segue de $U < \infty$ q.c. e do fato de a, b serem arbitrários que

$$P(\{\underline{\lim}\, X_n \leq a - \varepsilon < b + \varepsilon \leq \overline{\lim}\, X_n\}) = 0$$

logo,

$$P(\{\underline{\lim}\, X_n < \overline{\lim}\, X_n\}) = P\Big(\bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b}} \{\underline{\lim}\, X_n \leq a ; \overline{\lim}\, X_n \geq b\}\Big) = 0$$

ié, existe X v.a. tq $X_n \xrightarrow{q.c.} X$

Para mostrar que $E|X| < \infty$, observe que:

$$E|X| \overset{\text{Fatou}}{\leq} \underline{\lim}\, E|X_n| \leq \underbrace{\sup_n E|X_n|}_{<\infty} < \infty .$$

<u>Corolário</u> 5.2.9: Se $X_n \geq 0$ é supermart., então $X_n \xrightarrow{q.c} X$ e $EX \leq EX_0$.

<u>dem</u>: Note que:

1º) X_n é supermart, $-X_n$ é submart.

2º) $\sup_n E(-X_n)^+ \leq 0$, pois $X_n \geq 0$.

Logo, pelo teorema anterior, existe X v.a. com $E|X|<\infty$ tq $X_n \xrightarrow{q.c} X$. Além disso, de Fatou

$$EX \leq \underline{\lim}\, EX_n \underset{\text{Prop. 1}}{\leq} \underline{\lim}\, EX_0 = EX_0 .$$

<u>OBS</u>: Sob as condições do teorema de converg. de mart. nem sempre vale a converg. em L_1.

De fato, sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ uma seq. de v.a's iid com $P(\xi_i = 1) = 1/2 = P(\xi_i = -1)$ e $S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ e $S_0 = 1$. Defina $N = \inf\{n \geq 0 ; S_n = 0\}$. Note que N é tempo de parada. Defina ainda $X_n = S_{n \wedge N}$. Então X_n é um martingal não negativo e pelo corolário acima, existe X tq $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ (observe que $X = 0$ q.c.)

Logo, $EX = 0$, mas $EX_n = EX_0 = 1$, $\forall n \geq 1$, $\Rightarrow EX_n \not\to EX$.

5.3.1

Teorema : Seja X_n um martingal tq existe $M>0$ para o qual $|X_n - X_{n-1}| \leq M$, $\forall n$. Então os eventos $C = \{\lim X_n \text{ existe e } < \infty\}$ e $D = \{\underline{\lim}\, X_n = -\infty,\ \overline{\lim}\, X_n = +\infty\}$ são tais que $P(C \cup D) = 1$.

dem.: Primeiro, note que $X_n - X_0$ é martingal (X_0 é cte, logo podemos supor $X_0 = 0$). Fixemos $K>0$ e considere

$$N = N_K = \inf\{n \geq 1 ;\ X_n \leq -K\}.$$

Observe que N é tempo de parada, então sendo X_n martingal, $X_{n\wedge N}$ tbm é com $X_{n\wedge N} \geq -K-M$ q.c. Daí, $X_{n\wedge N} + K + M \geq 0$ é martingal tbm e em $\{N=\infty\}$ segue que $\lim X_n = \lim X_{n\wedge N}$ existe e é finito.

Agora, veja q/ $\{\underline{\lim}\, X_n > -\infty\} \subset \bigcup_K \{N_K = \infty\}$ donde concluímos que $\lim X_n$ existe e é finito. Usando o mesmo argumento para $-X_n$, obtemos que $\lim X_n$ existe e é finito em $\{\overline{\lim}\, X_n < +\infty\}$.

5.3.2

Corolário (Borel - Cantelli II). Seja $\mathcal{F}_n$ uma filtragem e A_n seq. de eventos tq $A_n \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 1$. Então

$$\{\sum I_{A_n} = \infty\} = \{A_n \text{ i.o.}\} \overset{q.c.}{=} \{\sum P(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$$

dem.: Seja $X_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} - P(A_i|\mathcal{F}_{i-1}) = I_{A_n} - P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) + X_{n-1}$

Então,

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(I_{A_n} - P(A_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) + X_{n-1}$$
$$= P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) - P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) + X_{n-1}$$
$$= X_{n-1}$$

ié, X_n é martingal. Além disso, note que os incrementos de X_n são ltdos por 1. Logo, pelo teorema anterior:

1.) $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ com $X < \infty$ q.c. e, neste caso,

$$\sum I_{A_n} = \infty \iff \sum P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty$$

2.) $\underline{\lim}\, X_n = -\infty$ e $\overline{\lim}\, X_n = +\infty$, neste caso,

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\sum I_{A_n} = \infty \qquad \sum P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty.$$

Exemplo 2 (Processos de ramificação): Sejam $\{\xi_{i,j}\,;\, i,j \geq 1\}$ v.a's iid inteiras e não-negativas.

Defina,

$$Z_0 = 1 \quad \text{e} \quad Z_n = \begin{cases} 0, & Z_{n-1} = 0 \\ \xi_{n,1} + \cdots + \xi_{n,Z_{n-1}}, & Z_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

Seja $X_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$, $\mu = E\xi_{11} \geq 0$ (suporemos $\mu > 0$ e $P(\xi_1 = 1) < 1$

Afirmação: X_n é martingal com respeito à $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\xi_{i,j}\,;\, i,j \geq 1\})$

dem: dado $\mathcal{F}_{n-1}$ e Z_{n-1},

$$E\left(\frac{Z_n}{\mu^n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\right) = E\left(\frac{Z_n}{\mu^n}\Big|Z_{n-1}\right) = \frac{1}{\mu^n} E(Z_n|Z_{n-1})$$

$$= \frac{1}{\mu^n} \cdot E\Big(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \underbrace{\xi_{n,i}}_{\text{indep.}} \,\Big|\, Z_{n-1} \Big) = \frac{1}{\mu^n} Z_{n-1}\,\mu = \frac{Z_{n-1}}{\mu^{n-1}} = X_{n-1}.$$

Como $X_n \geq 0$ é martingal, segue pelo corolário 6 que existe X v.a. com $EX = EX_0$ tq $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

Pergunta-se: $X \overset{q.c.}{=} 0$??

Teorema 7: Se $\mu < 1$, então $X = 0$.

dem.: Pela desig. de chebychev, temos

$$P(Z_n \geq 1) \leq EZ_n.$$

Mas,

$$EX_n = EX_0 = 1 \Rightarrow EZ_n = E(\mu^n X_n) = \mu^n EX_n = \mu^n$$

ou seja,

$$P(Z_n \geq 1) \leq \mu^n$$

$$\Rightarrow \sum P(Z_n \geq 1) \leq \sum \mu^n < \infty$$

Por Borel-Cantelli, $P(Z_n \geq 1 \text{ i.o}) = 0$, ié, $\exists\, n_0$ tq

$$Z_n = 0 \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Logo, $X_n = 0 \quad \forall\, n \geq n_0$.

Teorema 8: Se $\mu = 1$, então $X = 0$.

dem.: Se $\mu = 1$, temos $X_n = Z_n$. Daí Z_n é martingal. Como $Z_n \geq 0$, segue por corolário $Z_n \xrightarrow{q.c.} Z$. Da suposição que $P(\xi_{11} = 1) < 1$, temos que $P(\xi_{11} = 0) > 0$, e daí $Z = 0$.

Corolário 8: Se $\mu \leq 1$ e $P(\xi_{11} = 1) < 1$, então $X = 0$.

Teorema 9: Se $\mu > 1$, então $P(X > 0) > 0$.

dem: Veja livro, conseq. do Teorema da convergência de martingais em L_2 supondo $\operatorname{Var} \xi_{11} < \infty$.

Teorema 10: Se $\mu > 1$, então $X \neq 0 \iff E(\xi_{11} \log \xi_{11}) < \infty$.

Teorema 5.4.1: Se X_n é submart. e N um tempo de parada tq $P(N \leq k) = 1$ $\forall\, k \geq 1$. Então

$$EX_0 \leq EX_N \leq EX_k.$$

dem: Como X_n é submart. e N um tempo de parada, segue por resultado anterior que $X_{n \wedge N}$ tbm é. Então

$$EX_0 = EX_{N\wedge 0} \leq EX_{N \wedge k} \leq EX_N.$$

Agora, note que $(X_n - X_{N\wedge n})$ é submart. e seja, $K_n = I_{\{N < n\}} \geq 0$. Veja que K_n é previsível. Logo, $(K \cdot X)_n$ é submart. e daí

$$E(K \cdot X)_k = E(X_k - X_{N \wedge k}) = E(X_k - X_N) \geq E(K\cdot X)_1$$
$$= E(X_1 - X_{N\wedge 1}) \geq 0.$$

ou seja, $EX_k \geq EX_N$.

Lema 5.4.2 (desigualdade de Doob): Fixado $n \geq 1$, seja X_m submart. e $\overline{X}_n = \max_{0 \leq m \leq n} X_m^+$. Tome $\lambda > 0$ e seja $A = \{\overline{X}_n \geq \lambda\}$.

Então $\lambda \cdot P(A) \underset{(i)}{\leq} E(X_n I_A) \underset{(ii)}{\leq} E(X_n^+ I_A) \underset{(iii)}{\leq} EX_n^+$

dem.:

A desig. (ii) e (iii) são imediatas. Para verificar (i), usando a desig. de Chebychev, obtemos

$$P(\overline{X}_m \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E\overline{X}_n \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\lambda} EX_n^+ \leq \frac{1}{\lambda} E(X_n^+ I_{\{\overline{X}_n \geq \lambda\}})$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} E(X_n I_{\{\overline{X}_n \geq \lambda\}})$$

$\{\overline{X}_n < \lambda\}$
$\{x_n^+ < \lambda\}$

$$(*) \quad E\{\max_{m \leq n} X_m^+\} \overset{?}{\leq} \max_{m \leq n} EX_m^+ \overset{\text{submart}}{\leq} EX_n^+ = E\{X_n^+ I_A\} + E\{X_n^+ I_{A^c}\}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} E\{X_n^+ I_A\} + \lambda P(A^c) \leq \frac{1}{\lambda} E\{X_n^+ I_A\} + \lambda$$

Teorema 5.4.3 (desigualdade maximal em L_p): Se X_m é submart., então para $p > 1$ vale

$$E(\overline{X}_n)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(X_n^+)^p$$

Corolário 9: Se Y_n é martingal e $Y_n^* = \max_{m \leq n} |Y_m|$, então

$$E(Y_n^*)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|Y_n|^p).$$

dem (corolário): Tomando $X_n = |Y_n|$ no teorema anterior, obtemos o resultado.

dem (teorema): Seja $A = \{\overline{X}_n \geq \lambda\}$

$$E\{(\overline{X}_n)^p\} = E\left\{\int_0^{\overline{X}_n} p\lambda^{p-1} d\lambda\right\} = E\left\{\int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} d\lambda \, I_A\right\}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{\infty} p\lambda^{p-1} d\lambda \, P(A) \overset{\text{Doob}}{\leq} \int_0^{\infty} p\lambda^{p-2} d\lambda \, E(X_n^+ I_A) \overset{\text{Fubini}}{=} E\left\{X_n^+ \int_0^{\overline{X}_n} p\lambda^{p-2} d\lambda\right\}$$

$$= \frac{p}{p-1} E\{X_n^+(\bar{X}_n)^{p-1}\} \underset{q=\frac{p}{p-1}}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} \frac{p}{p-1} E\{(X_n^+)^p\}^{1/p} \cdot \underbrace{E\{(\bar{X}_n)^{\frac{q(p-1)}{=p}}\}^{1/q}}_{=E\{(\bar{X}_n)^p\}^{\frac{p-1}{p}}}$$

ou seja,

$$E\{(\bar{X}_n)^p\} \leq \frac{p}{p-1} E\{(X_n^+)^p\}^{1/p} \cdot E\{(\bar{X}_n)^p\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\Rightarrow E\{(\bar{X}_n)^p\}^{\underbrace{1-\frac{p-1}{p}}_{=1/p}} \leq \frac{p}{p-1} E\{(X_n^+)^p\}^{1/p}.$$

$$\Rightarrow E\{(\bar{X}_n)^p\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\{(X_n^+)^p\}$$

Teorema 5.4.5 (Convergência de martingais em L_p): Se X_n é martingal e $\sup_n E\{|X_n|^p\} < \infty$ para algum $p>1$, então $X_n \xrightarrow[L_p]{q.c} X$.

dem.: Note que

$$(E X_n^+)^p \leq (E|X_n|)^p \leq E\{|X_n|^p\}$$

$$\Rightarrow \sup_n (E X_n^+)^p \leq \sup_n E\{|X_n|^p\} < \infty, \text{ por hipótese}$$

Como, $(\sup_n E X_n^+)^p \overset{\text{Jensen}}{\leq} \sup_n (E X_n^+)^p$, segue por teorema que $X_n \xrightarrow{q.c.} X < \infty$.

Por outro lado, $E\{|X_n - X|^p\} \leq 2^p E\{\sup_n |X_n|^p\}$

Usando o TCM, obtemos

$$E\{\sup_n |X_n|^p\} = \lim E\{\sup_{m \leq n} |X_m|^p\} \overset{\text{Corolário 9}}{\leq} \lim \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\{|X_n|^p\}$$

$\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n E\{|X_n|^p\} < \infty \quad \forall p>1$. Ou seja, $\sup_n |X_n|^p$ está em L_1. Portanto, segue da convergência dominada que $E\{|X_n - X|^p\} \to 0$. $(\Leftarrow)$

Definição Seja $\{X_i, i \in I\}$ uma coleção de v.a's no mesmo esp. de prob. Dizemos que a coleção é uniformemente integrável (u.i) se $\sup_{i \in I} E\{|X_i| I_{\{|X_i|>M\}}\} \xrightarrow{M\uparrow} 0$.

Exemplos:

1) Se $X \in L_1$ é tq $|X_i| \leq |X|$.

2) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. $\frac{\varphi(x)}{|x|} \to \infty$ qdo $|x| \uparrow \infty$. Se $\sup_i E\{\varphi(X_i)\} < \infty$ então X_i é u.i.

Teorema 5.5.2: Seja $X_n \xrightarrow{P} X$. Então são equivalentes:

(i) X_n é ui.

(ii) $X_n \xrightarrow{L_1} X$

(iii) $E|X_n| \to E|X| < \infty$

dem.: Considere $\varphi_m(x) = -m \vee (x \wedge m)$, $m > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$E|X_n - X| \leq \underbrace{E|X_n - \varphi_m(X_n)|}_{①} + \underbrace{E|\varphi_m(X_n) - \varphi_m(X)|}_{②} + \underbrace{E|\varphi_m(X) - X|}_{③}.$$

Como $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \varphi_m(X_n) \xrightarrow{P} \varphi_m(X)$, φ_m contínua. Além disso, como $|\varphi_m(X_n)| \leq m$, segue do TCL que

② $\leq \varepsilon/3$, $n \geq n_0$ e $m > 0$

Para ① e ③, note que

$E|X_n - \varphi_m(X_n)| \leq E\{|X_n| I_{\{|X_n|>m\}}\} \leq \sup_n E\{|X_n| I_{\{|X_n|>m\}}\}$

$\leq \varepsilon/3$, m grande. e

$E|\varphi_m(X) - X| \leq E\{|X| I_{\{|X|>m\}}\} \leq \varepsilon/3$, $m \geq m_0$, pois $X_n \xrightarrow{P} X$

Logo, $m, n \geq \max\{m_0, n_0\}$ segue que

$$E|X_n - X| \leq \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) óbvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Note que

$$\underbrace{E|X_n|}_{\downarrow\ E|X|} = \underbrace{E\{|X_n| I_{\{|X_n|>m\}}\}}_{\Downarrow\ \text{converge.}} + \underbrace{E\{|X_n| I_{\{|X_n|\le m\}}\}}_{\downarrow\ E\{|X| I_{\{|X|\le m\}}\}}$$

Como $E|X|<\infty$, $\exists m_0$ tq $E\{|X| I_{\{|X|>m_0\}}\} \le \varepsilon/2$.

Para este m_0, $\exists$ n_0 tq

$$E\{|X_n| I_{\{|X_n|>m_0\}}\} \le E\{|X| I_{\{|X|>m_0\}}\} + \varepsilon/4, \quad n \ge n_0$$

$$\Rightarrow E\{|X_n| I_{\{|X_n|>m\}}\} \le E\{|X_n| I_{\{|X_n|\ge m_0\}}\} + \varepsilon/4$$

$$\le E\{|X| I_{\{|X|>m_0\}}\} + \varepsilon/2.$$

$$< \varepsilon \quad , n \ge n_0.$$

Teorema 5.5.3: Se X_n é submart. então são equivalentes

(i) X_n é u.i

(ii) $X_n \xrightarrow[L_1]{q.c.} X$

(iii) $X_n \xrightarrow{L_1} X$

dem: (i) $\Rightarrow$ (ii). De (i) $\sup E|X_n| < \infty$, pelo teorema conv. de martingais $X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ e pelo teorema anterior $X_n \xrightarrow{L_1} X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) óbvio.

(iii) $\Rightarrow$ (i). $X_n \xrightarrow{L_1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$; pelo teorema anterior, X_n é u.i.

Lema 5.5.5: Se X_n é martingal e $X_n \xrightarrow{L_1} X \Rightarrow X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ q.c.

dem.: Usando o fato que: $X \geq 0$ e $E(X|\mathcal{F}) = 0 \Rightarrow X \overset{q.c.}{=} 0$,

e que se $m \geq n$ $E(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$, temos:

$$E\{|X_n - E(X|\mathcal{F}_n)|\} = E\{|E(X_m|\mathcal{F}_n) - E(X|\mathcal{F}_n)|\}$$

$$= E(|E(X_m - X|\mathcal{F}_n)|) \overset{\text{Jensen}}{\leq} E(E(|X_m - X||\mathcal{F}_n))$$

$$= E\{|X_m - X|\}.$$

Como $X_n \xrightarrow{L_1} X$, $\exists$ n_0 tq $E\{|X_n - X|\} < \varepsilon$ $n \geq n_0$. e $\forall \varepsilon > 0$.

Logo, tomando-se $m \geq n_0$ temos que

$$E\{|X_m - X|\} < \varepsilon$$

donde, $E\{|X_n - E(X|\mathcal{F}_n)|\} < \varepsilon$.

Logo, $|X_n - E(X|\mathcal{F}_n)| = 0$ q.c. $\Leftrightarrow$ $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ q.c.

Teorema 5.5.6 (Convergência de martingais u.i). Se X_n é martingal, então são equivalentes (i), (ii) e (iii) do teorema 15 e (iv) $\exists$ $X \in L_1$ tq $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ q.c.

dem.: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) segue do Teorema 15.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) segue do lema 3.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $E\{|X_n|; |X_n| > m\} = E\{|E(X|\mathcal{F}_n)|; |E(X|\mathcal{F}_n)| > m\}$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} E\{E(|X||\mathcal{F}_n); E(|X||\mathcal{F}_n) > m\} = E(|X|; E(|X||\mathcal{F}_n) > m)$$

$$= E(|X|; |X| > m', E(|X||\mathcal{F}_n) > m) + E(|X|; |X| \leq m', E(|X||\mathcal{F}_n) > m)$$

$$\leq E(|X|; |X| > m') + m' \cdot P(E(|X||\mathcal{F}_n) > m)$$

$$\leq \underbrace{E(|X|; |X| > m')}_{< \varepsilon/2 \text{ qdo } m' \text{ grande}} + \underbrace{m' \frac{1}{m} \underset{<\infty}{E|X|}}_{< \varepsilon/2 \text{ qdo } m \to \infty} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.5.7: Sejam $\mathcal{F}_n$ uma filtragem e $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$ (dizemos que $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$). Se $X \in L_1$, então $E(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[L_1]{q.c.} E(X|\mathcal{F}_\infty)$.

dem: Seja $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$. Note que X_n é martingal u.i. de fato,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \overset{\text{Prop. } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}}{=} E(X|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Pelo teorema anterior, temos X_n u.i., além disso, existe $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $X_n \xrightarrow{L_1} X_\infty$. Do Lema 3,

$$X_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n) = E(X|\mathcal{F}_n) \Rightarrow \int_A E(X_\infty|\mathcal{F}_n)\,dP = \int_A E(X|\mathcal{F}_n)\,dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

$$\Rightarrow \int_A X_\infty \,dP = \int_A X\,dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty \quad \text{ié}, \quad X_\infty = E(X|\mathcal{F}_\infty)$$

(noutras palavras, X_∞ é versão para $E(X|\mathcal{F}_\infty)$).

Teorema: (Lei 0-1 de Levy) 5.5.8: Se $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ e $A \in \mathcal{F}_\infty$, então $E(I_A|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} I_A$.

dem: Note que $E\, I_A = P(A) < \infty$, ié, $I_A \in L_1$, então pelo teorema 5.5.7

$$E(I_A|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} E(\underbrace{I_A}_{\in \mathcal{F}_\infty}|\mathcal{F}_\infty) = I_A.$$

Teorema 5.5.9 (Convergência dominada p/ esperança condicional - TCDEC). Seja Y_n v.a's com $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$ e $|Y_n| \leq Z \in L_1$. Então, se $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ tem-se $E(Y_n|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} E(Y|\mathcal{F}_\infty)$.

dem: Seja $X_N = \sup\{|Y_n - Y|, n \geq N\}$. Como $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$ $\Rightarrow X_N \downarrow 0$ q.c. e note que $\underline{X_N \leq 2Z}$, pois $|Y| \leq Z$.
ié, $X_N \in L_1$.

Assim,

$$E\{|Y_n - Y| \mid \mathcal{F}_n\} \leq E(X_N \mid \mathcal{F}_n)$$

Teo. 5.5.7
$$\Rightarrow \quad \overline{\lim}\, E\{|Y_n - Y| \mid \mathcal{F}_n\} \leq \overline{\lim}\, E(X_N \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= \lim E(X_N \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= E(X_N \mid \mathcal{F}_\infty).$$

Como $X_N \underset{q.c.}{\downarrow} 0$ q^do^ $N \to \infty$, segue que $E(X_N \mid \mathcal{F}_\infty) \underset{q.c.}{\downarrow} 0$ e usando Jensen, vem

$$|E(Y_n \mid \mathcal{F}_n) - E(Y \mid \mathcal{F}_n)| = |E(Y_n - Y \mid \mathcal{F}_n)|$$
$$\leq E(|Y_n - Y| \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} 0$$

Do teorema 5.5.7, temos $E(Y \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} E(Y \mid \mathcal{F}_\infty)$, pois $Y \in L_1$.

Portanto, $E(Y_n \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow{q.c.} E(Y \mid \mathcal{F}_\infty)$.

Martingais Reversos

Seja X_n adaptadas à $\mathcal{F}_n$, com $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_m$, Dizemos que X_n é martingal reverso se

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad , \quad n \leq 0.$$

Teorema 5.6.1 $X_{-\infty} := \lim X_n$ existe q.c. e em L_1.

dem: Note que $EU_n \leq \dfrac{E(X_0 - a)^+}{b - a} \Rightarrow EU < \infty$ q.c. e daí, existe limite q.c. de X_n, a, b quaisquer.

Agora, como $E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$, $0 \geq m \geq n \Rightarrow$ $E(X_m \mid \mathcal{F}_n) = E(X_0 \mid \mathcal{F}_n)$. Portanto, $X_n = E(X_0 \mid \mathcal{F}_n)$ e como $X_0 \in L_1$ segue pelo teorema 5.5.6 que $X_n \xrightarrow{L_1} X$.

Teorema 5.6.2 : Se $X_{-\infty} := \lim X_n$ e $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap \mathcal{F}_n$, então $X_{-\infty} = E(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty})$

dem.: É claro que $X_{-\infty} \in \mathcal{F}_{-\infty}$. Assim, $A = \{ X_{-\infty} - E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) > 0 \}$

$$E\{| X_{-\infty} - E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty})|\} = E\{(X_{-\infty} - E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty})); A\}$$

$$+ E\{(E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) - X_{-\infty}); A^c\} = I + II.$$

$$(I) \overset{\text{Teo. } 5.6.1}{=} \lim E\{X_n - E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}); A\}$$

$$= \lim E(X_n; A) - E(E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}); \overset{\in \mathcal{F}_{-\infty}}{A})$$

$$\overset{5.6.1}{=} \lim \underbrace{E(E(X_0|\mathcal{F}_n); A)}_{= E(X_0; A)} - E(X_0; A) = 0$$

$\hookrightarrow \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_n$

(II) de maneira análoga ■

Teorema 5.6.3 : Se $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_{-\infty} \Rightarrow E(Y|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[L_1]{q.c.} E(Y|\mathcal{F}_{-\infty})$ $\forall$ $Y \in L_1$.

dem.: Seja $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$ Então X_n é martingal reverso.

do teorema 5.6.1, $X_n \xrightarrow[L_1]{q.c.} X \overset{\text{Teo } 5.6.2.}{=} E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) \overset{def}{=} E(E(Y|\mathcal{F}_0)|\mathcal{F}_{-\infty})$

$$\overset{\mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_0}{=} E(Y|\mathcal{F}_{-\infty}).$$

$$\therefore E(Y|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[L_1]{q.c.} E(Y|\mathcal{F}_{-\infty}).$$

Permutabilidade

Definições: 1) Uma permutação finita é uma função $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobrejetora e tal que $\pi(i) = i$ a não ser para um nº finito de i's.

2) Seja $(S, \mathcal{S}, \mu)$ esp. de prob. e sejam $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ e $P = \mu^{\mathbb{N}}$. Para $n \in \mathbb{N}$: $X_n : \Omega \to S$ tq $X_n(\omega) = \omega_n$.
$X_1, X_2, \dots$ iid.

3) Dada π uma permutação finita então $\pi : \Omega \to \Omega$ tq
$(\pi\omega)_j = \omega_{\pi_j}$

4) Um evento $A \in \mathcal{F}$ é dito permutável se $\pi^{-1}(A) = A$ p/ toda π permutação finita.

5) Seja $\mathcal{E} = \{ A \in \mathcal{F} : A$ é permutável $\}$. Então $\mathcal{E}$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

Exemplos: Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(i) Para $B \in \mathcal{S}$, $\{ S_n \in B \} \in \mathcal{E}$, $\pi(i) = i \ \forall \ i \geq N$, pois

$$S_n(\pi\omega) = \pi\omega_1 + \pi\omega_2 + \cdots + \pi\omega_{N-1} + \omega_N + \cdots$$
$$= \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{N-1} + \omega_N + \cdots = S_n(\omega)$$

(ii) $\{ \overline{\lim}\, S_n/a_n \in B \} \in \mathcal{E}$ sempre que $a_n \nearrow \infty$

6) $\mathcal{T}$:= σ-álgebra caudal, ie, $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$
$\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{E}$.

$\ulcorner$ LEMBRANDO: A Lei 0-1 de Kolmogorov, no nosso contexto
$(X_1, X_2, \dots$ indep $) \Rightarrow \mathcal{T}$ é trivial $\lrcorner$

Lei 0-1 de Hewitt-Savage: Se $X_1, X_2, \dots$ são iid e $A \in \mathcal{E}$, então $P(A) = 0$ ou 1.

Lema 5.6.4: Suponha $X_1, X_2, \dots$ iid e seja $A_n(\varphi) = \frac{1}{(n)_k} \sum_i \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ onde $\varphi : S^k \to \mathbb{R}$ é a soma está sobre todas os k índices distintos de $\{1, \dots, n\}$. Então se φ for ltda

$$A_n(\varphi) \xrightarrow{q.c.} E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}).$$

dem.: Como $A_n(\varphi) \in \mathcal{E}_n$, $A_n(\varphi) = E(A_n(\varphi) | \mathcal{E}_n) =$

$$= \frac{1}{(n)_k} \sum_i E(\varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) | \mathcal{E}_n) \overset{iid}{=} E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}_n)$$

$$\xrightarrow{\text{Teo. } 5.6.3} E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E})$$

Vamos mostrar que $E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}) \in \sigma(X_2, X_3, \dots)$. Então, veja que

$$\left| \frac{1}{(n)_k} \sum_{i: 1 \in i} \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \right| \leq \max \varphi \frac{1}{(n)_k} \#\{i : 1 \in i\} \longrightarrow 0.$$

Repetindo o argumento para $2, 3, \dots, k$ mostramos que

$$E(\varphi(X_1, \dots, X_k) | \mathcal{E}) \in \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) \qquad (1)$$

Como (1) vale para toda φ ltda temos $\sigma(X_1, \dots, X_k) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E}$ $\forall k \Rightarrow \sigma(\bigcup \sigma(X_1, \dots, X_k)) \perp\!\!\!\perp \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} \perp\!\!\!\perp \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}$ é trivial.

Teorema 5.7.1: Se X_n é submart. u.i. e N t.p., então $X_{N \wedge n}$ é u.i.

dem.: Como X_n é submart., temos que X_n^+ tbm é.

Vamos mostrar que $X_N \in L_1$.

Se N é ltdo, então pelo teorema 5.4.1

$$EX_{N \wedge N}^+ \leq EX_n^+ \Rightarrow \sup_n EX_{n \wedge N}^+ \leq \sup_n EX_n^+ < +\infty \text{ pois } X_n^+ \text{ é u.i.}$$

Note que $X_{n\wedge N}$ tbm é submart. Logo, pelo teorema de converg. de martingais

$$X_{n\wedge N} \xrightarrow{q.c.} X_N \quad (\text{aqui } X_\infty = \lim X_n)$$

e portanto, $X_N \in L_1$.

Se $\{N=\infty\}$, então $X_{N\wedge m} = X_n$ é u.i.

Se $\{N<\infty\}$, então $E(|X_{N\wedge n}|; |X_{N\wedge n}|>M)$

$$= E(|X_{N\wedge n}|; |X_{N\wedge n}|>M, N\leq n) + E(|X_{N\wedge n}|; |X_{N\wedge n}|>M, N>n)$$

$$= E(|X_N|; |X_N|>M, N\leq n) + E(|X_n|; |X_n|>M, N>n)$$

$$\leq E|X_N| + E(|X_n|; |X_n|>M) < \infty.$$

Teorema 5.7.3: Se X_m é submart. u.i e N t.p., então $EX_0 \leq EX_N \leq EX_\infty$ onde $X_\infty = \lim X_n$.

dem.: Pelo teorema anterior $X_{n\wedge N}$ é submart. u.i. Assim, pelo teorema 5.5.3, temos

$$X_n \xrightarrow[L_1]{q.c.} X_\infty \quad e \quad X_{N\wedge m} \xrightarrow[L_1]{q.c.} X_N \qquad (1)$$

Como $N\wedge n$ é ltdo por n, segue do teorema 5.4.1,

$$EX_0 \leq EX_{N\wedge n} \leq EX_n$$

por (1), vem $EX_0 \leq EX_N \leq EX_\infty$.

Teorema 5.7.4 (da parada opcional): Se $L\leq M$ são t.p. e $Y_{M\wedge m}$ é u.i., então $EY_L \leq EY_M$ e $Y_L \leq E(Y_M | \mathcal{F}_L)$, onde $\mathcal{F}_L = \{A\in\mathcal{F}; A\cap\{L=m\}\in\mathcal{F}_n\}$ $\forall n\geq 0$.

dem.: Aplicando o teorema 5.7.3 com $X_n = Y_{M\wedge n}$ e $N = L$, temos:

$$EX_0 \le EX_N \le EX_\infty \text{ , ou seja, } EY_0 \le EY_L \le EY_M .$$

o que prova a primeira parte.

Agora, sejam $A \in \mathcal{F}_L$ e $N = L I_A + M I_{A^c}$, então N é t.p. De fato,

sendo $A \in \mathcal{F}_L$ significa que $A \cap \{L = n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n \ge 0$. temos de verificar que $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$. Para isso, note que

$$\begin{aligned}\{N=n\} &= (\{N=n\}\cap A) \cup (\{N=n\}\cap A^c)\\ &= (\{L=n\}\cap A) \cup (\{M=n\}\cap A^c)\\ &= \underbrace{(\{L=n\}\cap A)}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{m=1}^{n} \{L=m\}\cap \underbrace{\{M=m\}\cap A^c}_{\in \mathcal{F}_n}\right)}_{\in \mathcal{F}_n}, \text{ pois } L \le M.\end{aligned}$$

Assim, aplicando o item anterior com $L = N$, temos

$$\begin{aligned} EY_L = EY_N &= E(Y_N; A) + E(Y_N; A^c) = E(Y_L; A) + E(Y_M; A^c)\\ &\le E(Y_M; A) + E(Y_M; A^c)\end{aligned}$$

ié, $\quad E(Y_L; A) \le E(Y_M; A) = E(E(Y_M | \mathcal{F}_L); A)$

$$\Rightarrow \int_A Y_L \, dP \le \int_A E(Y_M | \mathcal{F}_L) \, dP \text{ , } \forall A \in \mathcal{F}_L .$$

Logo, $Y_L \le E(Y_M | \mathcal{F}_L)$.

Teorema 5.7.5 : Se X_n é submart. e $E(|X_{n+1} - X_n| | \mathcal{F}_n) \leq B$ q.c.. Se N é t.p. com $EN < \infty$, então $X_{N \wedge n}$ é u.i. e portanto $EX_N \geq EX_0$.

OBS.: No de mart. temos a igualdade, que é a ident. de Wald.

dem.: Note que podemos escrever $X_{n \wedge N} = X_0 + \sum_{i=0}^{N \wedge n - 1} X_{i+1} - X_i$.

daí,

$$|X_{n \wedge N}| \leq |X_0| + \sum_{i=0}^{+\infty} |X_{i+1} - X_i| \, I_{\underbrace{\{i \leq (N \wedge n) - 1\}}_{\{N \wedge n > i\} \subseteq \{N > i\}}}$$

$$\leq |X_0| + \sum_{i=0}^{+\infty} |X_{i+1} - X_i| \, I_{\{N > i\}}$$

$$\Rightarrow E|X_{n \wedge N}| \leq E|X_0| + \sum_{i=0}^{+\infty} E(|X_{i+1} - X_i| ; \overbrace{N > i}^{\in \mathcal{F}_i})$$

$$= E|X_0| + \sum_{i=0}^{+\infty} E(\underbrace{E(|X_{i+1} - X_i| | \mathcal{F}_i)}_{\leq B} ; N > i)$$

$$\leq E|X_0| + B \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} P(N > i)}_{EN} = E|X_0| + B \cdot \underbrace{EN}_{<\infty} < \infty$$

ou seja, $X_{N \wedge n} \in L_1$ e, portanto, $X_{n \wedge N}$ é u.i.

Teorema 5.7.6: Se X_n é supermartingal não-negativo e N é t.p., então $EX_0 \geq EX_N$

dem.: Do teorema 5.4.1, $EX_0 \geq EX_{n \wedge N}$ $\forall n \geq 1$. Por outro lado,

$$EX_N = E(X_N ; N = \infty) + E(X_N ; N < \infty) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}) = E(X_\infty ; N = \infty) \overset{\text{FATOU}}{\leq} \underline{\lim} \, E(X_n ; N > n) = \underline{\lim} \, E(X_{n \wedge N} ; N > n).$$

e $X_\infty I_{\{N = \infty\}} = \lim X_n I_{\{N > n\}}$.

$$\text{(II)} \quad E(X_N \,;\, N<\infty) \overset{\text{Converg. monótona}}{=} \lim E(X_N \,;\, N\le n) = \lim E(X_{n\wedge N} \,;\, N\le n)$$

Assim,

$$EX_N \le \underline{\lim}\, E(X_{n\wedge N} \,;\, N>n) + \underline{\lim}\, E(X_{n\wedge N} \,;\, N\le n)$$

$$= \underline{\lim}\, E(X_{n\wedge N}) \le \underline{\lim}\, EX_0 = EX_0 .$$

$$\therefore \quad EX_N \le EX_0 .$$

Processos Estacionários

<u>Def</u>: $X_0, X_1, \dots$ é uma seq. estacionária se $(X_0, X_1, \dots) \sim (X_1, X_2, \dots)$, ie, $(X_0, X_1, \dots, X_m) \sim (X_1, \dots, X_{m+1})$ $\forall$ m.

<u>Exemplos</u>: 1) $X_0, X_1, \dots$ i.i.d.

2) $X_0, X_1, \dots$ cadeia de Markov Homog. com prob. de transição $p(x, A)$ e dist. estacionária π, ie, $\pi(A) = \int \pi(dx)\, p(x,A)$ $\forall$ $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

<u>Teorema 1.1</u>: $g : \mathbb{R}^{\{0,1,2,\dots\}} \to \mathbb{R}$ e $X_0, X_1, \dots$ for uma processo estacionário. Se fizermos $Y_k = g(X_k, X_{k+1}, \dots)$, $k \geq 0$, então $Y_0, Y_1, \dots$ é estacionário.

<u>dem</u>: Seja $G : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ onde $G(\underset{\sim}{x}) = (G_1(\underset{\sim}{x}), G_2(\underset{\sim}{x}), \dots)$ e $G_k(\underset{\sim}{x}) = g(x_k, x_{k+1}, \dots)$ $[\ \underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, \dots)\ ]$.

Se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, temos $P((Y_0, Y_1, \dots) \in A) =$

$$P((X_0, X_1, \dots) \in G^{-1}(A)) \overset{\text{est. de } X_0, X_1, \dots}{=} P((X_1, X_2, \dots) \in G^{-1}(A))$$

$$= P((Y_1, Y_2, \dots) \in A). \blacksquare$$

<u>Exemplo 1.4</u>: (Bernoulli Shift) $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$

$P =$ Lebesgue. $\omega \in \Omega$. $Y_0(\omega) = \omega$; $Y_k(\omega) = 2\,Y_{k-1}(\omega) \bmod 1$.

$\ulcorner x \bmod 1 = x - \lfloor x \rfloor \lrcorner$ Para vermos que $Y_0, Y_1, \dots$ é estacionária, sejam $X_0, X_1, \dots$ iid com $X_0 \sim$ Bernoulli (p), $p = \frac{1}{2}$, então $X_0, X_1, \dots$ é estacionária.

Para $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, defina $g(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2^{i+1}} x_i$

Scanned by CamScanner

Observe em seguida que se $\tilde{Y}_k = g(X_k, X_{k+1}, \ldots)$, então $\tilde{Y}_0 \sim Y_0$ e $\tilde{Y}_k \sim \tilde{Y}_k$. Logo $(Y_0, Y_1, \ldots) \sim (\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \ldots)$ que é estacionário pelo teorema 1.1.

<u>Def</u>: Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esp. de prob. e $\varphi: \Omega \to \Omega$. Dizemos que φ <u>preserva</u> <u>medida</u> se

$$P(\varphi^{-1}A) = P(A), \quad \forall\ A \in \mathcal{F}.$$

Seja φ^n a n-ésima iterada de φ, onde $\varphi^0 = Id$.

Seja X v.a e $X_0(\omega) = X(\omega)$, $X_n(\omega) = X(\varphi^n \omega)$

Temos que $X_0, X_1, \ldots$ é estacionária.

De fato, se $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, então

$$P((X_1, X_2, \ldots) \in A) = P(\{\omega : (X(\varphi\omega), X(\varphi^2\omega), \ldots)\} \in A)$$

$$= P(\{\omega : \varphi\omega \in B\} = \varphi^{-1}(B)) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{preserva} \\ \text{medida}}}{=} P(B) = P((X_0, X_1, \ldots) \in A)$$

sendo $B = \{\omega : (X(\omega), X(\varphi\omega), \ldots) \in A\}$.

Reciprocamente, se $(X_0, X_1, \ldots)$ for um processo estacionário, então seja $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ e $P(A) = P((X_0, X_1, \ldots) \in A)$, $A \in \mathcal{F}$. Logo o mapeamento $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(\omega_0, \omega_1, \ldots) \to (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ é tq φ <u>preserva</u> <u>a</u> <u>medida</u>.

<u>Teorema 1.2</u>: Toda seq. estacionária e indexada por $\mathbb{N}$ pode ser imersa numa seq. estacionária indexada por $\mathbb{Z}$.

dem.: Para todo $m \leq n \in \mathbb{Z}$ seja $(X_m, \ldots, X_n) \sim (X_0, \ldots, X_{n-m})$ o que nos da uma família de dist. em $\mathbb{R}^{\{m, \ldots, n\}}$, $m \leq n \in \mathbb{Z}$. O teorema de consistência de Kolmogorov nos dá um processo em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ consistente com esta família. A estacionariedade de $\ldots X_{-1}, X_0, X_1, \ldots$ segue.

Esquema básico: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $\varphi: \Omega \to \Omega$ tq $P(\varphi^{-1}A) = P(A)$ $\forall A \in \mathcal{F}$

Def.:

1) $A \in \mathcal{F}$ é estritamente invariante se $\varphi^{-1}A = A$

2) $A \in \mathcal{F}$ é invariante se $P(\varphi^{-1}A \,\Delta\, A) = 0$.

$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : A$ é invariante$\}$ é uma σ-álgebra. (Verifique)

3) Dizemos que φ é ergódica se $\mathcal{I}$ for trivial, ie. $P(A) = 0$ ou 1 $\forall A \in \mathcal{I}$.

Exemplos: $X_0, X_1, \ldots$ iid. Vamos verificar que a translação é ergódica.

Seja $A \in \sigma(X_0, X_1, \ldots)$ estritamente invariante, então $A = \{\omega : \omega \in A\}$ $\overset{\text{invar}}{=} \varphi^{-1}A = \{\omega ; \varphi\omega \in A\} \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots)$ e daí, $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ $\forall n \geq 1$, donde $A \in \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \mathcal{T} :=$ σ-álgebra caudal $\Rightarrow P(A) = 0$ ou 1, pela Lei 0-1 de Kolmogorov.

Exemplo 1.7: $X_0, X_1, \ldots$ cadeia de Markov num esp. ~~mens.~~ de estados enumerável, irredutível e recorrente positiva.

Então, existe uma única medida invariante π, com $\pi(x) > 0 \quad \forall\, x \in S$.

Seja A um evento invariante por translação.

$I_A \circ \theta_n = I_A$, sendo $\theta_n(\omega) = (\omega_n, \omega_{n+1}, \dots)$, $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$

Seja $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Pela inv. por translação e prop. de Markov.

$$E_\pi(I_A \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{invar.}}{=} E_\pi(I_A \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = E_{X_n}(I_A) = h(X_n) \; ; \quad h(x) = E_x(I_A)$$

Pela Lei 0-1 de Lévy:

$$E_\pi(I_A \mid \mathcal{F}_n) \longrightarrow I_A$$

Em particular, $h(X_n) \longrightarrow I_A$

Dado $x \in S$; pela recorrência de X_n, existe uma subseq $n_1 < n_2 < \dots$ tq $X_{n_i} = x \quad \forall\, i \geq 1$.

$\Rightarrow h(x) = I_A \quad \forall\, x \quad \Rightarrow P_x(A) = 0$ ou $1 \quad \forall\, x \in S$.

$\Rightarrow P_\pi \rightarrow$ medida de prob. no esq. básico.

<u>OBS:</u> 1º) $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{I}$. Se a C.M. for periódica, então $\mathcal{T} = \mathcal{I}$. Caso contrario, $\mathcal{T} \not\supseteq \mathcal{I}$.

22.09

Eventos invariantes: $\{(X_0, X_1, \ldots) \in A\} = \{(X_k, X_{k+1}, \ldots) \in A\}$ $\forall k$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

Esquema básico

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esp de prob. ; $\varphi : \Omega \to \Omega$ preserva P

$\underset{\sim}{X} = X_0, X_1, \ldots$ processo estac.;

$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $P = P_{\underset{\sim}{X}}$; $\varphi(\omega_0, \omega_1, \ldots) = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$

Teorema 1.3: Se $X_0, X_1, \ldots$ for uma seq. estacionária e ergódica, então $Y_k = g(X_k, X_{k+1}, \ldots)$, $k \geq 0$ $(Y_0, Y_1, \ldots)$ é estacionária e ergódica.

dem.: Seja $G: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $G_i(\omega_0, \omega_1, \ldots) = g(\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots)$.

Então, $\underset{\sim}{Y} = G(\underset{\sim}{X})$ e daí $P(\underset{\sim}{Y} \in A) = P(\underset{\sim}{X} \in G^{-1}(A))$

Se $\{\underset{\sim}{Y} \in A\}$ é invariante, temos $\{\underset{\sim}{Y} \in A\} = \{(Y_k, Y_{k+1}, \ldots) \in A\}$ $\forall k$

$\Leftrightarrow \{\underset{\sim}{X} \in G^{-1}(A)\} = \{(X_k, X_{k+1}, \ldots) \in G^{-1}(A)\}$

Logo o evento é trivial e portanto o evento anterior o é.

Teorema 2.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff) No quadro do esquema básico, se $X \in L_1$, então

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(\varphi^k \omega) \xrightarrow[L_1]{q.c} E(X \mid \mathcal{I}) \quad \text{qdo} \quad n \to \infty.$$

OBS: Se houver ergodicidade $E(X \mid \mathcal{I}) \overset{q.c}{=} E(X)$.

Consequência: Caso da LFGN p/ v.a's iid

☞ Formulação alternativa: Se $X_0, X_1, \ldots$ for uma seq. estacionária e integrável, então

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \xrightarrow[L_1]{q.c} E(X_0 \mid \mathcal{I})$$

dem.: Para fazer a demonstração, precisaremos do

Lema ergódico máximo.

Sejam $X_j(\omega) = X(\varphi^j\omega)$, $j \geq 0$, $S_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_i$ e $m_k = \max\{0, S_1, \dots, S_k\}$

$\Rightarrow E(X\,;\, m_k > 0) \geq 0$, $k \geq 1$.

dem.: Observe que $m_k(\varphi\omega) \geq S_j(\varphi\omega)$, $\forall\, j \leq k$.

$\therefore\ X(\omega) + m_k(\varphi\omega) \geq X(\omega) + S_j(\varphi\omega) = S_{j+1}(\omega)$

$\Rightarrow X(\omega) \geq S_{j+1}(\omega) - m_k(\varphi\omega)$, $\forall\, j \leq k$.

$\geq \max\{S_1(\omega), \dots, S_k(\omega)\} - m_k(\varphi\omega)$

Assim,

$$\int_{\{m_k>0\}} X(\omega)\, dP(\omega) \geq \int_{\{m_k>0\}} \{\max_{i\leq k} S_i(\omega) - m_k(\varphi\omega)\}\, dP(\omega)$$

$$= \int_{\{m_k>0\}} m_k(\omega) - m_k(\varphi\omega)\, dP(\omega) = \int_{\{m_k>0\}} m_k(\omega)\, dP(\omega) - \int_{\{m_k>0\}} m_k(\varphi\omega)\, dP(\omega)$$

$$\geq \int m_k(\omega)\, dP(\omega) - \int m_k(\varphi\omega)\, dP(\omega) = 0,$$ pois φ preserva P.

$\rightarrow E(X|\mathcal{I})(\omega) \overset{q.c.}{=} E(X|\mathcal{I})(\varphi^k\omega)$.

Continuando: Como $E(X|\mathcal{I})$ é invariante sob φ (verificar!!)

então fazendo $X' = X - E(X|\mathcal{I})$, podemos supor que

$E(X|\mathcal{I}) = 0$. Sejam $\bar{X} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{n}$, $\varepsilon > 0$ e $D = \{\omega : \bar{X}(\omega) > \varepsilon\}$

Vamos mostrar que $P(D) = 0$.

[Neste caso $\overline{\lim} \frac{S_n}{n} \leq 0$ q.c. e fazendo o

mesmo argumento p/ $-X$ obtemos $\underline{\lim} \frac{S_n}{n} \geq 0$ q.c.

$\lrcorner\!\lrcorner$

Observe que $\overline{X}(\varphi\omega) = \overline{X}(\omega) \Rightarrow \overline{X} \in \mathcal{I}$

Sejam

$$X^*(\omega) = (X(\omega) - \varepsilon)\, I_D(\omega),$$

$$S_n^*(\omega) = X^*(\omega) + X^*(\varphi\omega) + \cdots + X^*(\varphi^{n-1}\omega).$$

$$m_n^*(\omega) = \max\{0, S_1^*(\omega), \dots, S_n^*(\omega)\}$$

Seja $F_n = \{m_n^* > 0\} \nearrow$. $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n = \left\{\sup_n \frac{S_n^*}{n} > 0\right\}$

Pela def de X^* e D

$$F = \left\{\sup_k \frac{S_k}{k} > \varepsilon\right\} \cap D = D \in \mathcal{I}$$

Pelo Lema Erg. máximo,

$$0 \leq E(X^*; F_n) \xrightarrow{T.C.M} \overbrace{E(X^*; F)}^{\geq 0} = E(X^*; D) = E(X - \varepsilon; D)$$

$$= E(X; D) - \varepsilon \cdot P(D) = E(\overbrace{E(X|\mathcal{I})}^{=0}; \overset{\in \mathcal{I}}{D}) - \varepsilon \cdot P(D) = -\varepsilon \cdot P(D) \geq 0$$

$\Rightarrow P(D) = 0.$

Agora, seja $X_m = X\, I_{\{|X| \leq m\}}$. Pela 1ª parte

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_m(\varphi^k\omega) \xrightarrow{q.c.} E(X_m | \mathcal{I}).$$

Seja $X_m' = X - X_m$. Então

$$\text{(I)}\ E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X(\varphi^k\omega) - E(X|\mathcal{I})\right| \leq \underbrace{E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_m(\varphi^k\omega) - E(X_m|\mathcal{I})\right|}_{\to 0}$$

$$+ E\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_m'(\varphi^k\omega) - E(X_m'|\mathcal{I})\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{E(|X_m'|(\varphi^k\omega))}_{\to E(|X_m'|)} + \underbrace{E\{E(|X_m'| \,|\, \mathcal{I})\}}_{\to E(|X_m'|)}$$

$\therefore \overline{\lim}\ \text{(I)} \leq 2E(|X_m'|), \quad \forall\, m > 0.$

Como X é integrável e a desig. anterior vale $\forall m$, tem-se

$$(\mathrm{I}) \leq 2 \lim E(|X_m'|) = 0 .$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(\varphi^k \omega) \xrightarrow[L_1]{q.c.} E(X \mid \mathcal{I}) . \qquad \blacksquare$$

Movimento Browniano (MB)

Def: Um MB (unidimensional) é um processo estocástico real $(B_t)_{t\geq 0}$ tq:

a) Se $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, então $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são independentes (incrementos indep.)

b) $B_{t+s} - B_s \sim N(0,t)$ (incre. estacionários e normais)

c) a trajetória $t \to B_t$ é contínua.

Duas propriedades

(1.1) Invariância por translação:

$t_0 \geq 0$, $(B_t - B_{t_0})_{t\geq t_0} \perp\!\!\!\perp (B_t)_{t\leq t_0}$ e $(B_t - B_{t_0})_{t\geq t_0} \sim (B'_t)_{t\geq 0}$

sendo $(B'_t)_{t\geq 0}$ é um MB.

OBS: (a) e (b) $\Rightarrow$ $f_{B_{t_1},\dots,B_{t_n}|B_{t_0}}(x_1,\dots,x_n|x_0) = (2\pi)^{-n/2}\left[(t_1-t_0)\dots(t_n-t_{n-1})\right]^{-1/2} \times$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-x_0)^2}{t_1-t_0} + \dots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\}$$

(1.2) Se $B_0 = 0$, então $\forall\, t \geq 0$ $(B_{ts})_{s\geq 0} \sim \sqrt{t}\,(B_s)_{s\geq 0}$ ie,

se $s_1 < s_2 < \dots < s_n$.

$$(B_{ts_1},\dots,B_{ts_n}) \sim \sqrt{t}\,(B_{s_1},\dots,B_{s_n}).$$

dem: Segue de (a) e (b) e do fato que $N(0,ts) \sim \sqrt{t}\cdot N(0,s)$ $\forall\; t,s\geq 0$.

Def'. Um MB (padrão) é um processo estocástico real $(B_t)_{t\geq 0}$ com $B_0=0$ tq:

(a') (B_t) é um processo gaussiano (ié. todos as dist. finito dimensionais são normais multivariadas)

(b') $EB_s=0$ $\forall\ s\geq 0$. $EB_sB_t = s\wedge t$ $\forall\ t,s\geq 0$.

(c') $B:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\equiv$ (c) contínua.

Lema: Def $(+\ B_0=0)$ $\Longleftrightarrow$ Def'.

dem: a, b $\Rightarrow$ a' e b'

Se $s<t$, $EB_sB_t = E(B_s(B_t-B_s+B_s))$

$= EB_s(B_t-B_s)+EB_s^2 \overset{(a)}{=} \cancel{EB_s\,E(\overset{\to 0}{B_t}-B_s)} + EB_s^2 \overset{(b)}{=} s$.

Para $a'+b' \Rightarrow a+b$., basta verificar a indep. dos incrementos, o que no caso gaussiano equivale à ñ correlação.

$EB_s(B_t-B_s) = EB_sB_t - EB_s^2 \overset{(b)}{=} t\wedge s - s \overset{t>s}{=} s-s=0$.

Construção do MB

Para $x\in\mathbb{R}$, $0<t_1<\dots<t_n$, $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_{x,t_1,\dots,t_n}(A_1\times\dots\times A_n) = \int_{A_1}\cdots\int_{A_n} dx_n \prod_{m=1}^{n} P_{t_m-t_{m-1}}(x_{m-1},x_m)$$

$$\mu_{x,t_1,\dots,t_n}(A_1\times\dots\times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \cdots \int_{A_n} dx_n \times \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}}}{(2\pi)^n\left\{\prod_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\right\}^{1/2}}$$

$t_0=0$

$x_0=x$

onde $P_t(a,b) = (2\pi t)^{-1} e^{-\frac{(b-a)^2}{2t}}$

Existência do MB

Qual o espaço de prob ?

Candidato : $\Omega_0 = \{\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\}$

$\mathcal{F}_0 = \sigma(\underbrace{\{\omega \in \Omega_0 : \omega(t_i) \in A_i,\ i=1,\dots,n,\ t_i \geq 0,\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ i=1,\dots,n,\ n \geq 1\}}_{\tilde{A}}$.

Fato : $\mathcal{M} = \{\mu_{x, t_1, \dots, t_n}(\cdot),\ x \in \mathbb{R},\ 0 < t_1 < \dots < t_n\}$ é uma família consistente de distribuições multivariadas (no quadro do Teorema de Consist. de Kolmogorov).

Logo, pelo TCK existe uma única dist. em $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ conj. dist. f.d. são dadas por $\mathcal{M}$.

Mas se $C = \{\omega \in \Omega_0 : \omega \text{ é contínua}\} \notin \mathcal{F}_0$.

Vamos construir o MB em C.

$\Omega = C$, $\mathcal{G} = \sigma(\{\omega \in C;\ \omega \in \tilde{A}\})$

Para construir o MB em $(C, \mathcal{G})$

1) Seja $Q_2 = \{m 2^{-n} : m, n \geq 0\}$

$\Omega_q = \{\omega : Q_2 \to \mathbb{R}\}$

$\mathcal{F}_q = \sigma(\{\omega \in \Omega_q : \omega(t_i) \in A_i, \dots\})$

$\mathcal{M} = \{\mu_{x, t_1, \dots, t_n}(\cdot),\ x \in \mathbb{R},\ 0 < t_1, \dots, t_n \in Q_2\}$ é uma família consistente. Logo pelo TCK $\exists!$ dist. em $(\Omega_q, \mathcal{F}_q)$.

Com isto, temos uma única medida ν_x em $(\Omega_q, \mathcal{F}_q)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \nu_x(\omega(0) = x) = 1 \\ \nu_x(\omega : \omega(t_i) \in A_i,\ i=1,\dots,n) = \mu_{x, t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) \end{cases}$$

Para estender a construção para $(C, \mathcal{C})$, usaremos o resultado:

Teo 1.4: Seja $0 < T < \infty$, $x \in \mathbb{R}$ e $\tilde{C}_T = \{\omega : Q_2 \to \mathbb{R} ;\ \omega$ é uniformemente contínua em $Q_2 \cap [0,T]\}$. Então $\nu_x(\tilde{C}_T) = 1$
⌜Note que $\tilde{C}_T \in \mathcal{F}_q$ ⌟.

De posse deste resultado podemos definir $\Psi : \Omega_q \to \mathcal{C}$.

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} \bar{\omega} = \text{a única extensão contínua de } \omega : Q_2 \to \mathbb{R} \text{ para} \\ \quad \text{uma } f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad \text{se } \omega \in \bigcap_{T \geq 0} \tilde{C}_T . \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Vamos chamar de $P_x = \nu_x \Psi^{-1}$. $\{P_x, x \in \mathbb{R}\}$ é uma família de medidas de Wiener em $(C, \mathcal{C})$.

O teo. 1.4 segue do.

Teo 1.5: Suponha que $(X_t)_{t \in Q_2}$ satisfazendo: para dado $\alpha, \beta > 0$ $\exists k$ $E|X_t - X_s|^\beta \leq k|t-s|^{1+\alpha}$, $\forall t, s \in Q_2$. Se $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, então q.c. existe $c = c(\omega)$ tq $|X_q - X_r| \leq c|q-r|^\gamma$ $\forall q, r \in Q_2 \cap [0,1]$.

dem Teo. 1.4: $(B_0 = 0)$ $E_x|B_t - B_s|^4 = E_0 B_{t-s}^4 =$

$= E_0\left[\left\{(\sqrt{t-s})B_1\right\}^4\right] = (t-s)^2 E B_1^4$, $k = EB_1^4 < \infty$, $\beta = 4$ e $\alpha = 1$ no Teo 1.5.

Podemos concluir que as traj. do MB são q.c. Hölder contínuas de exp. $1/4$.

Além disso, temos para $\beta = 2m$

$$E_x |B_t - B_s|^{2m} = c\cdot(t-s)^{2m}$$

$\ulcorner$ $\beta = 2m$ e $\alpha = m-1$ $\Rightarrow$ exp. de Hölder $\frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ $\lrcorner$

<u>dem.: Teorema 1.5</u>: Sejam $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ e $0 < \eta < 1$ (a ser detalhado depois).

Defina $I_m = \{(i,j) : 0 \le i < j \le 2^m,\ 0 \le j-i < 2^{m\eta}\}$ e

$$G_n = \{|X(j2^{-m}) - X(i2^{-m})| \le [(j-i)2^{-m}]^{\gamma};\ \forall\ (i,j) \in I_m\}.$$

Então, usando a desig. de Markov com expoente β, vem

$$P(G_n^c) = P(|X(j2^{-m}) - X(i2^{-m})| > [(j-i)2^{-m}]^{\gamma};\ \forall\ (i,j) \in I_n)$$

$$\le \frac{E\{|X(j2^{-m}) - X(i2^{-m})|^{\beta};\ \forall\ (i,j) \in I_m\}}{[(j-i)2^{-m}]^{\gamma}}$$

$$= \frac{\sum_{(i,j)\in I_m} E|X(j2^{-m}) - X(i2^{-m})|^{\beta}}{[(j-i)2^{-m}]^{\gamma\beta}} \overset{\text{Hip.}}{\le} \frac{K\sum_{(i,j)\in I_m} [(j-i)2^{-n}]^{1+\alpha}}{[(j-i)2^{-n}]^{\gamma\beta}}$$

$$= K \sum_{(i,j)\in I_m} [(j-i)2^{-n}]^{1+\alpha-\gamma\beta} \overset{\text{def de } I_m}{\le} k\,[2^{m\eta}2^{-m}]^{1+\alpha-\gamma\beta} \cdot \underbrace{2^m \cdot 2^{m\eta}}_{\text{cota grosseira p/ } |I_m|}$$

$$= k\, 2^{m\eta(1+\alpha-\gamma\beta)}\, 2^{-n(1+\alpha-\gamma\beta)} \cdot 2^n \cdot 2^{m\eta}$$

$$= k \cdot 2^{-n[\eta(1+\alpha-\gamma\beta) + (1+\alpha-\gamma\beta) - 1 - \eta]}$$

$$= k \cdot 2^{-m[(1+\alpha-\gamma\beta)(1+\eta) - \eta - 1]} = k\cdot 2^{-n\lambda}$$

sendo $\lambda = (1+\alpha-\gamma\beta)(1+\eta) - \eta - 1 > 0$ se $\eta > 0$ e $\eta \sim 0$

pois de $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ tem-se $\alpha - \gamma\beta > 0$ $\therefore$ $P(G_n^c) \le k\, 2^{-n\lambda}$ $(*)$

Para concluir a demonstração, precisaremos do seguinte lema:

<u>Lema 1.6</u> Seja $A = \frac{3 \cdot 2^{(1-\eta)\gamma}}{1-2^{\gamma}}$. Em $H_N = \bigcap_{n \geq N} G_n$ temos

$|X_q - X_r| \leq A \cdot |q-r|^{\gamma}$ $\forall$ $q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1]$ tq $|q-r| < 2^{-(1-\eta)N}$

Usando o Lema 1.6 e a desig.

$$P(H_N^c) = P\left(\bigcup_{n \geq N} G_n^c\right) \leq \sum_{n \geq N} P(G_n^c) \overset{(*)}{\leq} k \sum_{n \geq N} 2^{-n\lambda} = \frac{k\, 2^{-\lambda N}}{1-2^{-\lambda}}$$

Por Borel-Cantelli 1, existe $N = N(\omega) < \infty$ tal que H_N^c não ocorre. Então se $q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1]$ e $|q-r| \leq 2^{-(1-\eta)N} = \delta$ temos $|X_q - X_r| \leq A \cdot |q-r|^{\gamma}$.

Agora, sejam $q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1]$ quaisquer e sejam $q = s_0 < s_1 < \dots < s_n = r$ com $s_i - s_{i-1} < \delta$ e $n \leq 1 + \delta^{-1}$.

Da desigualdade triangular

$$|X_q - X_r| \leq A \cdot \sum (s_i - s_{i-1})^{\gamma} = A \cdot |q-r|^{\gamma} \sum \underbrace{\frac{(s_i - s_{i-1})^{\gamma}}{|q-r|^{\gamma}}}_{\leq 1}$$

$$\leq A \cdot |q-r|^{\gamma} \cdot n \leq \underbrace{A(1+\delta^{-1})}_{C = C(\omega)} |q-r|^{\gamma}$$

$$\therefore |X_q - X_r| \leq C \cdot |q-r|^{\gamma}$$

<u>dem.: Lema 1.6</u>: Sejam $q, r \in \mathbb{Q}_2 \cap [0,1]$ com $0 < r-q < 2^{-(1-\eta)N}$

Tome $m \geq N$ tal que $2^{-(1-\eta)(m+1)} \leq r-q < 2^{-(1-\eta)m}$ e

escreva

$$r = j2^{-m} + 2^{-r_1} + \dots + 2^{-r_l} \quad \text{e} \quad q = i2^{-m} - 2^{-q_1} - \dots - 2^{-q_k}$$

com $m < r_1 < \dots < r_l$ e $m < q_1 < \dots < q_k$.

De $0 < r-q < 2^{-m(1-\eta)}$ temos $0 \leq j-i < 2^{m\eta}$ e em H_N

a) $|X(i2^{-m}) - X(j2^{-m})| \leq [(j-i)2^{-m}]^{\gamma} \leq [2^{m\eta}2^{-m}]^{\gamma} = 2^{-\gamma m(1-\eta)}$

b) $|X(r) - X(j2^{-m})| \leq |X(r) - X(j2^{-m} + 2^{-r_1} + \dots + 2^{-r_{l-1}})| + \dots +$

$|X(j2^{-m} + 2^{-r_1}) - X(j2^{-m})| \leq [r - (j2^{-m} + \dots + 2^{-r_{l-1}})]^{\gamma} + \dots + [j2^{-m} + 2^{-r_1} - j2^{-m}]^{\gamma}$

$= (2^{-r_l})^{\gamma} + (2^{-r_{l-1}})^{\gamma} + \dots + (2^{-r_1})^{\gamma} = \sum_{h=1}^{l} 2^{-\gamma r_h} \leq \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i\gamma} = \dfrac{2^{-\gamma m}}{1-2^{-\gamma}}$

c) $|X(q) - X(i2^{-m})| \leq$ (mesma ideia do (b)) $\leq \dfrac{2^{-\gamma m}}{1-2^{-\gamma}}$.

Usando a desig. triangular,

$$|X_q - X_r| \leq 2^{-\gamma m(1-\eta)} + \frac{2 \cdot 2^{-\gamma m}}{1-2^{-\gamma}} = \left[2^{-m(1-\eta)}\right]^{\gamma} + \frac{2 \cdot 2^{-\gamma m}}{1-2^{-\gamma}}$$

$$\leq |r-q|^{\gamma} + \frac{2 \cdot 2^{-\gamma m}}{1-2^{-\gamma}}$$

Note que de $|r-q| \geq 2^{-(1-\eta)(m+1)} = 2^{-m} \cdot 2^{\overbrace{\eta m}^{\sim 0}} 2^{\overbrace{\eta-1}^{<0}}$

$\Rightarrow |r-q| \geq 2^{-m}$. Logo.

$$|X_q - X_r| \leq \frac{(1-2^{-\gamma})|r-q|^{\gamma} + 2|r-q|^{\gamma}}{1-2^{-\gamma}} = \frac{|r-q|^{\gamma}(1 \overbrace{-2^{-\gamma}}^{\geq 0} + 2)}{1-2^{-\gamma}} \leq \frac{3}{1-2^{-\gamma}}|r-q|^{\gamma}.$$

Teorema 18: Com prob. 1, as trajetórias Brownianas não são Lipschitz contínuas (e portanto não diferenciáveis) em nenhum ponto.

dem: Sejam $C < \infty$ uma cte fixa e $A_n = \{ \omega : \exists\, s \in [0,1]$ tq $|B_t - B_s| \leq C \cdot |t-s| \ \forall\, t : |t-s| \leq 3/n \}$.

Para $1 \leq k \leq n-2$, sejam

$$Y_{k,n} = \max \left\{ \left| B\left(\frac{k+j}{n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{n}\right) \right| ; \ j = 0, 1, 2 \right\}$$

e

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-2} \left\{ Y_{k,n} \leq \frac{6C}{n} \right\}$$

Da desig. triangular $A_n \subset B_n$, daí

$$P(B_n) \leq \sum_{k=1}^{n-2} P\left(Y_{k,n} \leq \frac{6C}{n} \right) \leq n \cdot P\left(Y_{k,n} \leq \frac{6C}{n} \right) \leq n \cdot \left[P\left(\overset{\sim N(0,1/n)}{B_{1/n}} \leq \frac{6C}{n} \right) \right]^3$$

$$\leq c \cdot n^{-1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{qdo} \quad n \uparrow \infty .$$

Como $A_n \uparrow$ então $P(A_n) = 0 \ \forall\, n$ e C.

Teo 18': Se $\gamma > 1/2$, então com prob. 1 as trajetórias Brownianas não são γ-Hölder contínuas.

Propriedade de Markov

Sejam $\mathcal{F}_s^0 = \sigma\{B_r,\ 0 \le r \le s\}$, $(\mathcal{F}_s^0 \uparrow)$, $\mathcal{F}_s^+ = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t^0$

OBS.: $\mathcal{F}_s^+$ é contínua à direita

$$\mathcal{F}_s^+ = \bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u^0 = \bigcap_{t>s} \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_0^u = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t^+$$

Em outras palavras, o $\mathcal{F}_s^+$ é um "futuro infinitesimal", ie, $A \in \mathcal{F}_s^+$ se $A \in \mathcal{F}_{s+\varepsilon}^+$ $\forall\ \varepsilon > 0$.

Exemplo: Se $f(u) > 0$ $\forall\ u > 0$, então em $d=1$ a v.a.

$$\overline{\lim_{t \downarrow s}} \frac{B_t - B_s}{f(t-s)} \in \mathcal{F}_s^+, \text{ mas } \notin \mathcal{F}_s^0$$

Definição: Para $s \geq 0$, seja $\theta_s : C \to C$, $\theta_s(\omega t) = \omega(t+s)$ (translação por s unid. de tempo)

Teorema 2.1 (Propriedade de Markov). Se $s \geq 0$ e $Y \in \mathcal{C}$ e é ltda, então $\forall\ x \in \mathbb{R}^d$

$$E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^+) \overset{qc}{=} E_{B_s} Y,$$

onde $E_{B_s} Y$ é a função $E_x Y$ com $x = B_s$.

dem.: Basta verificarmos que

$$(*) \quad E_x(Y \circ \theta_s ; A) = E_x(E_{B_s} Y ; A), \quad \forall\ A \in \mathcal{F}_s^+$$

Para demonstrar $(*)$ usaremos o teorema da Classe monótona:

Teorema 6.13 Seja $\mathcal{A}$ um sistema-π que contém Ω e seja $\mathcal{H}$ uma coleção de funções reais satisfazendo:

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow I_A \in \mathcal{H}$

(ii) $f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow f+g,\ cf \in \mathcal{H} \quad \forall\ c \in \mathbb{R}$.

(iii) $f_n \in \mathcal{H}$ são não negativas e crescentes para f limitada, então $f \in \mathcal{H}$.

Então $\mathcal{H}$ contém todas as funções mensuráveis limitadas com respeito à $\sigma(\mathcal{A})$.

dem.: Seja $\mathcal{G} = \{A : I_A \in \mathcal{H}\}$. Mostrar que $\mathcal{G}$ é λ-sistema.
Com efeito, de (i) temos que

(a) Como $\Omega \in \mathcal{A} \overset{(i)}{\Rightarrow} I_\Omega \in \mathcal{H} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{G}$.

(b) $A, B \in \mathcal{G}$ com $A \subset B \overset{(i)}{\Rightarrow} I_A \in \mathcal{H}$ e $I_B \in \mathcal{H}$

Como $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B-A) \Rightarrow \mathcal{H} \ni I_B = I_{A\cup(B-A)} = I_A + I_{B-A}$

$\Rightarrow I_{B-A} = I_B - I_A \overset{(ii)}{\in} \mathcal{H}. \Rightarrow B-A \in \mathcal{G}$

(c) $A_n \in \mathcal{G}$ e $A_n \uparrow A \Rightarrow I_{A_n} \in \mathcal{H}$. Como $A_n \uparrow A$

$\Rightarrow I_{A_n} \uparrow I_A \overset{(iii)}{\Rightarrow} I_A \in \mathcal{H} \Rightarrow A \in \mathcal{G}$.

Logo, pelo Teorema do λ-π-sistema temos que $\mathcal{G} \supset \sigma(\mathcal{A})$.
De (ii) concluímos que $\mathcal{H}$ possui todas as funções simples e de (iii) concluímos que $\mathcal{H}$ contém todas as funções limitadas e $\sigma(\mathcal{A})$-mensuráveis.

Seja $Y(\omega) = \prod_{m=1}^{m} f_m(\omega(t_m))$ onde $0 < t_1 < \dots < t_m$ e

$f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitadas e mensuráveis. Note que

$$(Y \circ \theta_s)(\omega) = \prod_{m=1}^{m} f_m(\theta_s(\omega(t_m))) = \prod_{m=1}^{m} f_m(\omega(t_m+s))$$

Sejam $0 < h < t_1$, $0 < s_1 < \dots < s_k \leq s+h < t_1+s < \dots < t_n+s$,

$A = \{\omega : \omega(s_j) \in A_j ; 1 \leq j \leq k\}$, onde $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $1 \leq j \leq k$.

Observe que A é um cilindro de $\mathcal{F}^0_{s+h}$.

Da definição de MB, segue que

$$E_x(Y \circ \theta_s ; A) = E_x\left(\prod_{m=1}^{m} f_m(\omega(t_m+s)) ; A\right) \overset{\text{independência dos incrementos}}{=}$$

$$= \int_{A_1} dx_1\, p_{s_1}(x, x_1) \cdot \int_{A_2} dx_2\, p_{s_2-s_1}(x_1, x_2) \cdots \int_{A_k} dx_k\, p_{s_k - s_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) \times$$

$$\times \underbrace{\int dy\, p_{s+h-s_k}(x_k, y)}_{=1} \cdot \varphi(y, h),$$

sendo $\varphi(y, h) = \int dy_1\, p_{t_1-h}(y, y_1) \cdot f(y_1) \cdot \int dy_2\, p_{t_2-t_1}(y_1, y_2) \cdot f(y_2) \cdots$

$$\times \int dy_n\, p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n)\, f(y_n).$$

Então, usando que é a identidade no lado direito acima, temos que

$$E_x(Y \circ \theta_s ; A) = E_x(\varphi(B_{s+h}, h) ; A)$$

Essa última igualdade vale para todo conjunto A finito dimensional, então do teorema π-λ sistema temos que é válido para todo $A \in \mathcal{F}^0_{s+h} \supset \mathcal{F}^+_s$.

Seja

$$\Psi(y_1) = f_1(y_1) \int dy_2 \, p_{t_2 - t_1}(y_1, y_2) f_2(y_2) \cdots \int dy_n \, p_{t_n - t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n) f_n(y_n)$$

e note que $\Psi(y_1)$ é ltda e $\mathcal{B}$-mensurável

Fazendo $h \downarrow 0$ e usando o TC. Dominada temos que, se $x_h \to x$, então

$$\varphi(x_h, h) = \int dy_1 \, \underbrace{p_{t_1 - h}(x_h, y_1)}_{\substack{x_h \to x \,\downarrow\, h \downarrow 0 \\ p_{t_1}(x, y_1)}} \Psi(y_1) \longrightarrow \int dy_1 \, p_{t_1}(x, y_1) \Psi(y_1) = \varphi(x, 0).$$

Assim, do TCDominada (de novo), temos que

(1) $E_x(\varphi(B_{s+h}, h); A) \longrightarrow E_x(\varphi(B_s, 0); A)$, $\forall A \in \mathcal{F}^+_s$.

Isso mostra que $(*)$ vale para $Y = \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m))$ com f_m ltdas e mensuráveis.

Para concluirmos a demonstração, usaremos o Teorema da Classe monótona, então: Seja

$$\mathcal{H} = \{ \text{funções ltdas para as quais vale } (*) \}$$

Note que $\mathcal{H}$ claramente tem as propriedades (ii) e (iii). Para vermos (i), seja $\mathcal{A} = \{ \{\omega(t_1) \in A_1, \ldots, \omega(t_n) \in A_n\}, t_i \geq 0, A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, n, n \geq 1 \}$.

De (1) temos que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H} \;\; \forall A \in \mathcal{A}$.

$\therefore$ Pelo TC Monótona segue o resultado ■

OBS: $E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^+) \overset{q.c}{=} E_{B_s}(Y) \in \mathcal{F}_s^0$ o que implica

$$E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^+) \overset{q.c.}{=} E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^0) \quad (\Delta).$$

Teo 2.4: Se $Z \in \mathcal{C}$ é ltda, então $\forall\, s \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$

$$E_x(Z \mid \mathcal{F}_s^+) \overset{q.c.}{=} E_x(Z \mid \mathcal{F}_s^0)$$

dem: Como no teorema anterior, é suficiente provar o resultado quando

$$Z = \prod_{m=1}^{n} f_m(B_{t_m}).$$

onde as f_m's são ltdas e $\mathcal{C}$-mensuráveis. Nesse caso, podemos escrever Z como

$$Z = X(Y \circ \theta_s), \quad X \in \mathcal{F}_s^0 \text{ e } Y \in \mathcal{C}.$$

Assim,

$$E_x(Z \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(X(Y \circ \theta_s) \mid \mathcal{F}_s^+) = X \cdot E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^+)$$

$$\overset{(\Delta)}{=} X \cdot E_x(Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s^0) = E_x(X(Y \circ \theta_s) \mid \mathcal{F}_s^0) = E_x(Z \mid \mathcal{F}_s^0)$$

Corolario: Se $A \in \mathcal{F}_s^+$, $E_x(I_A \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(I_A \mid \mathcal{F}_s^0)$

dem: I_A é ltda e $I_A \in \mathcal{C}$. Logo pelo Teo 2.4

$$E_x(I_A \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(I_A \mid \mathcal{F}_s^0).$$

Teo 2.5: (Lei 0-1 de Blumenthal) Se $A \in \mathcal{F}_0^+$, então $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_x(A) \in \{0,1\}$.

dem: Usando que $A \in \mathcal{F}_0^+$, o corolario anterior e que $\mathcal{F}_0^0 = \sigma(B_0)$ é trivial sob P_x temos

$$\mathbb{1}_A = E_x(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_0^+) = E_x(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_0^0) = P_x(A) \quad \text{q.c.}$$

OBS. A σ-álgebra germinal $\mathcal{F}_0^+$ é trivial.

Teo. 2.6 Se $\tau^+ = \inf\{t \geq 0 : B_t > 0\}$, então $P_0(\tau^+ = 0) = 1$.

dem: $\forall\ t > 0$, temos

$$P_0(\tau^+ \leq t) \geq P_0(B_t > 0) = \frac{1}{2} \quad (B_t \sim N(0,t))$$

$$\therefore\ P_0(\tau^+ = 0) = \lim_{t \downarrow 0} P(\tau^+ \leq t) \geq \frac{1}{2}$$

Como $\tau^+ \in \mathcal{F}_0^+$, então por Blumenthal, $P_0(\tau^+ = 0) = 1$.

Teo 2.7: Seja $T_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$, então $P_0(T_0 = 0) = 1$.

dem: $P_0(\tau^- = 0) = 1$, sendo $\tau^- = \inf\{t \geq 0 ; B_t < 0\}$.

Pela continuidade de B_t segue $P_0(T_0 = 0) = 1$.

Teo 2.8: Se (B_t) é um MB com $B_0 = 0$ então ~~defin~~

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} t\, B_{1/t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

tbm é MB com $\tilde{B}_0 = 0$.

dem: temos de verificar (a'), (b') e (c') da definição

(a') $0 < t_1 < \dots < t_n$, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ é um processo gaussiano

i.e.,

$$f_{B_{t_1},\dots,B_{t_n}}(x_1,\dots,x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}}}{(2\pi)^n\left\{\prod_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1})\right\}^{1/2}}$$

Primeiro veja que

$$B_{t_i} \sim N(0, t_i) \implies B_{1/t_i} \sim N(0, 1/t_i)$$

$$\phi_{t_n B_{1/t_n}}(t) = E\, e^{i t\, t_n B_{1/t_n}} = \phi_{B_{1/t_n}}(t t_n) = e^{-\frac{(1/t_n)^2 (t t_n)^2}{2}}$$

$$= e^{-t/2} \implies t_n B_{1/t_n} \sim N(0,1).$$

Logo, $(t_1 B_{1/t_1}, \dots, t_n B_{1/t_n}) \sim$ dist. gaussiana de média 0.

(b') $E(t B_{1/t}) = 0$, por (a') e suponha $s < t$, então

$$E(t B_{1/t}\, s B_{1/s}) = ts\, E(B_{1/t} B_{1/s}) = ts\, 1/t = s = s \wedge t$$

(c') Claramente $\tilde{B}_t$ é contínuo fora da origem.

Precisamos então ver que $\tilde{B}_t \to 0$, $t \downarrow 0$.

Note que

$$\tilde{B}_t = t B_{1/t} = t\big(\overbrace{B_{1/t} - B_{\lfloor 1/t \rfloor}}^{X_t}\big) + t B_{\lfloor 1/t \rfloor}.$$

$$t B_{\lfloor 1/t \rfloor} = t \sum_{i=1}^{\lfloor 1/t \rfloor} (B_i - B_{i-1}) \xrightarrow{LFGN} 0 \quad q.c.$$

Agora, veja que

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, t|X_t| = \overline{\lim}\sup_{s\in[n,n+1]} \tfrac{1}{n}|B_s - B_n| \overset{\text{continuidade do MB}}{=}$$

$$= \overline{\lim}\; n^{-1} \lim_{m\to\infty} \sup_{j=1,\dots,2^m} |B_{m+j2^{-m}} - B_n|$$

Pela desig. de Kolmogorov, temos

$$\underbrace{P\left(\sup_{j=1,\dots,2^m} |B_{m+j2^{-m}} - B_n| > n^{2/3}\right)}_{B_n} \leq n^{-4/3} E(B_{n+1} - B_n)^2 = n^{-4/3}$$

Por Borel-Cantelli, segue que B_n ocorre no máximo um número finito de vezes, donde concluímos que

$$t\cdot|X_t| \longrightarrow 0 \quad \text{qdo } t\downarrow 0.$$

__Lema 2.5__: $\mathcal{T}$ é P_x-trivial $\forall\, x$.

__OBS.__: σ-álgebra terminal $\mathcal{F}'_s = \sigma(B_t, t\geq s)\downarrow \quad \mathcal{T} = \bigcap_{s\geq 0} \mathcal{F}'_s$

__dem__.: Note que $\mathcal{T}$ é σ-álgebra germinal para $\tilde{B}_t$ e, portanto trivial sob P_0. Para $x\neq 0$, seja $A\in \mathcal{T} = \bigcap_{s\geq 0}\mathcal{F}'_s$ então $A\in\mathcal{F}'_1$, então $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_D\circ\theta_1$ $\forall\, D\in \mathcal{F}'_0$. Daí

$$P_x(A) = E_x(\mathbb{1}_A) = E_x(\mathbb{1}_D\circ\theta_s) = E_x\{E_x(\mathbb{1}_D\circ\theta_s \mid \mathcal{F}'_1)\}$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} E_x\{E_{B_1}(\mathbb{1}_D)\} = \int p_1(x,y)\, P_y(D)\, dy$$

Tomando $x=0$, temos que se $P_0(A)=0$, então

$$\int p_1(0,y)\, P_y(D)\, dy = 0 \implies P_y(D) = 0 \quad \text{Lebesgue q.t.p.}$$

e daí, usando a fórmula novamente temos

$$P_x(A) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Se $P_0(A) = 1$, note que $A^c \in \mathcal{T}$ e $P_0(A^c) = 0$, o último mostra que $P_x(A^c) = 0 \iff P_x(A) = 1 \quad \forall\, x$.

Teorema 2.10: Seja (B_t) MB padrão (pode ser geral). Então

$$\overline{\lim}\, \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \text{e} \quad \underline{\lim}\, \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{q.c.}$$

dem.: Seja $k>0$.

$$P_0\left(\frac{B_n}{\sqrt{n}} > k \text{ i.v.}\right) \geq \overline{\lim}\, P_0\left(\frac{B_n}{\sqrt{n}} > k\right) \geq P_0\big(\underbrace{B_1}_{\sim N(0,1)} > k\big) > 0.$$

$\therefore$ pela trivialidade de $\mathcal{T}$ segue que $P_0\left(\frac{B_n}{\sqrt{n}} > k \text{ i.v.}\right) = 1$

A outra parte é feita de forma similar.

Teo 2.11: Seja (B_t) MB qualquer e $A = \bigcap_{n\geq 0} \{B_t = 0 \;\forall\, t \geq n\}$

Então $P_x(A) = 1 \quad \forall\, x$.

dem.:

$$P_x(A^c) = P_x\left(\bigcup_{n\geq 0} \{B_t = 0 \;\forall\, t\geq n\}^c\right) \leq P_x\big(\underbrace{B_t}_{\sim N(0,t)} \neq 0 \;\forall\, t>0\big)$$

$$= 2\cdot P_x(B_t > 0 \;\forall\, t>0) \leq 2\cdot P_x\big($$

$N_x = \{ A ; A \subset D ; P_x(D) = 0 \}$; $\mathcal{F}_s^x = \sigma\{ \mathcal{F}_s^+ \cup N_x \}$

$\mathcal{F}_s = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_s^x \longrightarrow$ σ-álgebra completa $\forall s$ e contínua à direita.

Tempos de Parada:

Def.: $S : (C, \mathcal{C}) \longrightarrow ([0, +\infty], \mathcal{B})$ é dito um tempo de parada com respeito à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se $\{ S < t \} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$.

OBS.: S é t.p. $\Leftrightarrow \{ S \leq t \} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$.

dem.:

$\Rightarrow)$ $\{ S < t \} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$, então

$$\{ S \leq t \} = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\{ S < t + 1/n \}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

$\Leftarrow)$

$$\{ S < t \} = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\{ S \leq t - 1/n \}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t .$$

Teo 3.1: Se $G \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $T = \inf\{ t \geq 0 ; B_t \in G \}$ é t.p.

dem.: Como G é aberto e (B_t) é contínuo, então

$$\{ T < t \} = \bigcup_{\substack{q < t \\ q \in \mathbb{Q}}} \{ B_q \in G \} \in \mathcal{F}_t$$

<u>Teo 3.2</u>: T_m for t.p $\forall n$, e $T_n \downarrow T$, então T é t.p

<u>dem</u>: $\left.\{T < t\} = \bigcup_n \underbrace{\{T_n < t\}}_{\in \mathcal{F}_t}\right\} \in \mathcal{F}_t$.

<u>Teo 3.3</u>: T_n for t.p $\forall n$ e $T_n \uparrow T$, então T é t.p.

<u>dem</u>: $\{T \leq t\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\}$

<u>Teo 3.4</u>: Se $K \subset \mathbb{R}$ é fechado, então $T = \inf\{t \geq 0; B_t \in K\}$ é t.p.

<u>dem</u>: Seja $G_n = \bigcup_{x \in K} B(x, 1/n)$, $n \geq 1$ e $T_n = \inf\{t \geq 0; B_t \in G_n\}$

Como G_n é aberto $\forall n \geq 1$, segue do teorema 3.1 que T_n é t.p $\forall n \geq 1$. Queremos mostrar que $T_n \uparrow T$. Para provar isso, primeiro note que $T \geq T_n$. donde $\lim T_n \leq T$. Agora, suponha que $T_n \uparrow t < \infty$ e note que $B_{T_n} \in \overline{G_n}$ $\forall n \geq 1$. Logo da continuidade do MB temos $B_{T_n} \to B_t \in K$ e daí, $T \leq t$. $\therefore$ $T_n \uparrow T$.

<u>Def.</u>: Para S t.p, defina $\mathcal{F}_S = \{A \in \mathcal{G} : A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0\}$

Note que $\mathcal{F}_S$ é σ-álgebra.

(i) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Então $A^c \cap \{S \leq t\} = A^c \cap \{S > t\}^c$
$= (A \cup \underbrace{\{S \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t})^c \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_S$

(ii) $A_1, \ldots \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A_n \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_S \ \forall n$
$\left.\Rightarrow \left(\bigcup_n A_n\right) \cap \{S \leq t\} = \bigcup_n \underbrace{\{A_n \cap \{S \leq t\}\}}_{\in \mathcal{F}_t}\right\} \in \mathcal{F}_t$.

Teo 3.5: Se $S \leq T$ são t.p. então $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

dem: dado $A \in \mathcal{F}_S$. temos $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Então

$$A \cap \{T \leq t\} = \underbrace{A \cap \{S \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \overbrace{\cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}}^{\subset \{T \leq t\}} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T.$$

Teo 3.6: Se $T_n \downarrow T$ t.p's, então $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$.

dem: Do Teo 3.5, temos $\mathcal{F}_{T_n} \supset \mathcal{F}_T \Rightarrow \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} \supset \mathcal{F}_T$.

Agora, se $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} \Rightarrow A \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall n$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}_t \ni \bigcup_n A \cap \{T_n \leq t\} = A \cap \Big\{ \bigcup_n \{T_n \leq t\} \Big\} = A \cap \{T \leq t\}.$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$.

Def: (Translação temporal por S t.p.) Se S é t.p, então definimos $\theta_S : (C, \mathcal{G}) \to (C, \mathcal{G})$ por

$$(\theta_S \omega)(t) = \omega(S(\omega) + t), \text{ se } S(\omega) < \infty.$$

Propriedade Forte de Markov para MB

Teorema 3.7: Seja S t.p (com r.a $(\mathcal{F}_t)$) e $Y : [0,+\infty) \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ Htda. Então $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$E_x (Y_S \circ \theta_S \mid \mathcal{F}_S) = E_{B_S}(Y_S) \quad \text{em} \quad \{ S < \infty \}$$

onde $E_{B_S}(Y_S) = E_x(Y_t)\Big|_{x = B_S}$ e $t = S$.

dem.: 1º caso: S é uma v.a. discreta. Seja $(t_n)_{n\geq 1}$ os valores finitos assumidos por S. Dado $A \in \mathcal{F}_S$.

$$E_x (Y_S \circ \theta_S ; A \cap \{ S < \infty \}) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_x (Y_{t_n} \circ S_{t_n} ; \overbrace{A \cap \{ S = t_n \}}^{\in \mathcal{F}_{t_n}})$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} E_x (E_{B_{t_n}} Y_{t_n} ; A \cap \{ S = t_n \}) = E_x (E_{B_S}(Y_S) ; A \cap \{ S < \infty \})$$

Caso Geral: Seja $S_m = (\lfloor 2^m S \rfloor + 1) 2^{-m}$. S_m é t.p $\forall\, n \geq 1$ e $S_n \downarrow S$.

$$c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, dF(u) = c \cdot \int_{0}^{\infty} \varphi(v)\, dF(v) + c \cdot \int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\, dF(u)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \varphi(v) dF(v) \int_{-\infty}^{0} (-u)\, dF(u) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\, dF(u) \int_{0}^{\infty} v\, dF(v)$$

$$= \int_{0}^{\infty} dF(v) \int_{-\infty}^{0} \varphi(v)(-u)\, dF(u) + \int_{0}^{\infty} dF(v) \int_{-\infty}^{0} v\, \varphi(u)\, dF(u)$$

$$= \int_{0}^{\infty} dF(v) \int_{-\infty}^{0} dF(u) \left[v\varphi(u) - u\varphi(v) \right]$$

$$\Longrightarrow \quad E\varphi(X) \underset{(1)}{\overset{(*)}{=}} c^{-1} \int_{0}^{\infty} dF(v) \int_{-\infty}^{0} dF(u) \left[v\varphi(u) - u\varphi(v) \right]$$

$$= c^{-1} \int_{0}^{\infty} dF(v) \int_{-\infty}^{0} dF(u) \left[v - u \right] \underbrace{\left\{ \frac{v\varphi(u) - u\varphi(v)}{v - u} \right\}}_{\mu_{u,v}(\varphi)}$$

$$= \int \varphi(x)\, dF_{u,v}(x)$$

(que é a média da v.a do tipo do 1º caso).

Sejam $(U,V) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$. $\tilde{P}\left((U,V) = (0,0) \right) = F(\{0\})$ e

$$\tilde{P}\left((U,V) \in A \right) = c^{-1} \iint_A dF(u)\, dF(v) \left[v - u \right] , \quad A \in \mathcal{B}\left((-\infty, 0) \times (0, +\infty) \right)$$

De (1) temos que

$$E\varphi(X) = \int \varphi(x)\, dF(x) = \tilde{E}\left(\int \varphi(x)\, dF_{U,V}(x) \right)$$

Considere $\left((\Omega, \mathcal{F}, P) \times \left((-\infty, 0] \times [0, +\infty), \mathcal{B}, \tilde{P} \right), \bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}^2, \right.$ $\left. \bar{P} = P \times \tilde{P} \right)$ esp. de prob para o MBP, então definindo-se

$T = T_{U,V} = T_U \wedge T_V$,

$$\bar{P}(B_T \leq x) = \tilde{E}\left(P(B_{T_{U,V}} \leq x) \right) = \int P(B_{T_{U,V}} \leq x)\, d\tilde{P}(u,v)$$

$$= \int F_{U,V}(x)\, d\tilde{P}(u,v) \overset{(*)}{=} F(x)$$

Teorema de Donsker

$X_1, X_2, \dots$ iid $EX_1 = 0$ e $EX_1^2 < \infty$ (suponha $= 1$), $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Queremos mostrar que

$$\left(S_n(t)\right)_{t\geq 0} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t \geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(B_t\right)_{t\geq 0}.$$

Teorema 6.1: (Representação de Skorokhod). Seja X v.a com $EX = 0$ e $EX^2 < \infty$. Então existem um esp. de prob com um MBP e um t.p. T tq $B_T \overset{d}{=} X$ e $ET = EX^2$.

dem: 1º Caso: Suponha que $P(X \in \{a,b\}) = 1$ com $a < 0 < b$. Como $EX = 0$, temos

$$P(X = a) = \frac{b}{b-a} \quad \text{e} \quad P(X = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

Seja $T = T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin (a,b)\}$. Do teorema 5.3 temos que $B_T \overset{d}{=} X$ e do teorema 5.5 vem que

$ET = -ab = EX^2$.

Caso Geral: Seja F a dist. de X. Escreveremos $F(x) = P(X \leq x)$ como uma mistura de duas dist. pontuais de média 0.

Como $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = 0$, seja

$$c = \int_{-\infty}^{0} (-u)\,dF(u) = \int_{0}^{\infty} v\,dF(v) > 0.$$

Seja φ ltda e tal que $\varphi(0) = 0$, usando as fórmulas para c, temos

Da continuidade de W_n, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tq

$$p(\varepsilon, \delta) = P\left(\sup\{ |W_n(t) - W_n(1)| ; |t-1| < \delta \} \right) \leq \varepsilon/2$$

De $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{q.c} 1$, $\exists\, n_0$ tq $p_n(\delta) = P\left(\left| \frac{T_n}{n} - 1 \right| > \delta \right) < \varepsilon/2 \quad \forall\, n \geq n_0$

Logo,

$$P\left(\left| W_n\left(\frac{T_n}{n}\right) - W_n(1) \right| > \varepsilon \right) \leq p(\delta, \varepsilon) + p_n(\delta) \leq \varepsilon \quad \text{qdo } n \geq n_0$$

OBS: O mesmo argumento vale para provar que se $0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty$ fixos, então $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_{\lfloor nt_1 \rfloor}, \dots, S_{\lfloor nt_k \rfloor} \right) \xrightarrow{d} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$ onde (B_{t_i}) é MBP.

Para $n \geq 1$, $\tilde{Y}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}$, então se Ψ for uma função contínua e ltda das trajetórias de $\tilde{Y}_n = (\tilde{Y}_n(t))_{t \geq 0}$ que dependa apenas de um conj fixo e finito de coordenadas^(*), então a observação acima garante que

$$E\Psi(\tilde{Y}_n) \xrightarrow{q.c.} E\Psi(B)^{(**)}, \text{ onde } B = (B_t)_{t \geq 0} \text{ é um MBP.}$$

(*) significa que $\varphi(X) = \varphi(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ $\forall\, k \geq 1$, $0 \leq t_1 < \dots < t_k < \infty$

$\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ contínua e ltda.

Queremos estender (**) para Ψ's mais gerais, que possam depender de toda a trajetória, por exemplo

$$\Psi(\omega) = \max_{0 \leq t \leq 1} \{ \omega(t) \}$$

" Será que $\max_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_n(t) \xrightarrow{d} \max_{t \in [0,1]} B(t)$

Scanned by CamScanner

2ª Parte

$$\bar{E}\,T = \bar{E}\,T_{U,V} = \tilde{E}(-UV) = \int_{-\infty}^{0} dF(u)(-u) \int_{0}^{+\infty} dF(v)\,[v-u]\,c^{-1}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dF(u)(-u)\left[(-u) + c^{-1}\int_{0}^{+\infty} v^2 dF(v)\right] = \int_{-\infty}^{0} u^2 dF(u) + \int_{0}^{+\infty} v^2 dF(v)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = EX^2.$$

Teorema 6.3: $X_1, \dots$ iid, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$. Então existe um MBP e uma seq. de t.p $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots$ tq

$$S_n \sim B_{T_n}\ ; \quad (T_n - T_{n-1}) \text{ iid com } ET_1 = 1.$$

dem: Segue do teorema da representação de Skorokhod que

$$(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots \overset{iid}{\sim} (U, V)$$

$$T_0 = 0, \quad e \quad T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} \ ;\ B_t - B_{T_{n-1}} \notin (U_n, V_n)\}$$

Corolário: (TLC) $X_1, X_2, \dots$ iid $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

dem: $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} B_{T_n} \quad \forall\, n \geq 1$

$$\overset{d}{=}\ W_n\left(\frac{T_n}{n}\right), \quad \text{onde } W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} B_{nt}$$

$(W_n(t))$ é um MBP $\forall\, n \geq 1$

Da LFGN, $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[(\Delta)]{q.c.} 1$. Vamos mostrar que

$$W_n\left(\frac{T_n}{n}\right) - W_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Scanned by CamScanner

Seja

$$Y_n(t) = \begin{cases} \tilde{Y}_n(t), & \text{se } t = k/n, \ \forall\, k = 0, \dots, n \\ \text{linear em } \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] & \forall\, k = 0, \dots, n \end{cases}$$

Por uma questão de conveniência técnica vamos nos ater as trajetórias entre $[0,1]$. Dessa forma, $Y_n \in C[0,1]$.

Considere a métrica: $\|\omega - \omega'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\omega(t) - \omega'(t)|$ e seja $\mathcal{B}(C[0,1])$ com a métrica $\|\cdot\|_\infty$.

Lema 6.5. $\mathcal{B} = \mathcal{G}[0,1] :=$ σ-álgebra gerada pelos cilindros em $[0,1]$

Teorema 6.5 (Teorema de Donsker) Se $\Psi: C[0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e ltda, então $E(\Psi(Y_n)) \longrightarrow E(\Psi(B))$, onde $B = (B_t)_{t\geq 0}$ é um MBP Noutras palavras

$$Y_n \xrightarrow{d} B \quad \text{em} \quad (C[0,1], \mathcal{G}[0,1])$$

Teorema 6.6 $\Rightarrow$ Teorema 6.7 $\Psi: C[0,1] \to \mathbb{R}$ contínua então $\Psi(Y_n) \xrightarrow{d} \Psi(B)$.

Exemplos 1) $\Psi(\omega) = \varphi(\omega(1))$ TLC

2) $\Psi(\omega) = \varphi(\omega(t_1), \dots, \omega(t_k))$ (TLC multidimensional)

3) $\Psi(\omega) = \varphi(\max_{t\in[0,1]} \omega(t))$

dem. (Teo. de Donsker) Para cada $n \geq 1$, sejam

$X_i^{(n)} = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ e $\tau_i^{(n)} = \frac{T_i}{n}$. Vamos usar o MBP da representação de Sko. para fazer as coisas de tal forma que

$$S_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} X_j^{(n)} = B_{\tau_i^{(n)}}.$$

$X_n \xrightarrow{P} X \iff$ toda subseq (n') de (n) admite uma subsub-seq. (n'') tq $X_{n''} \xrightarrow{q.c.} X$.

Fato 1: $\tau_{\lfloor ns \rfloor}^{(n)} \xrightarrow{P} s \iff \frac{1}{\lfloor ns \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor} (T_i - T_{i-1})$

mais ainda, $\sup \{ | \tau_{\lfloor ns \rfloor}^{(n)} - s | ; s \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \} \xrightarrow{P} 0$

Lema 6.8: $\| Y_n - B \|_\infty \xrightarrow{P} 0$

dem: Da continuidade das trajetórias de B, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ com $1/\delta \in \mathbb{N}$ tq

a) $P(| B_t - B_s | < \varepsilon \quad \forall \ 0 \leq s,t \leq 1 \text{ e } |t-s| < 2\delta) > 1 - \varepsilon$

O fato 1 nos diz que, $\forall \ \varepsilon, \delta > 0$, $\exists \ N_\delta$ tal que

b) $P(| \tau_{\lfloor nk\delta \rfloor}^{(n)} - k\delta | < \delta \quad p/ \ k = 1, \dots, 1/\delta) > 1 - \varepsilon$.

Na interseção dos eventos em (a) e (b), temos

c) $| S_i^{(n)} - B_{i/n} | < \varepsilon$ $\quad S_i^{(n)} = B_{\tau_i^{(n)}}$

Seja $t = \frac{i + \theta}{n}$, $\theta \in (0,1)$. Na interseção dos eventos (a), (b) e (c)

$| Y_t^{(n)} - B_t | = | (1-\theta) S_i^{(n)} + \theta S_{i+1}^{(n)} - B_t | \leq (1-\theta) | S_i^{(n)} - B_{i/n} | +$

$\theta \, | S_{\frac{i+1}{n}}^{(n)} - B_{\frac{i+1}{n}} | + (1-\theta) \cdot | B_{i/n} - B_t | + \theta \, | B_{\frac{i+1}{n}} - B_t |$

$\leq 2\varepsilon$ qdo $\frac{1}{n} < 2\delta$

$\therefore P(\| S_i^{(n)} - B \|_\infty \geq 2\varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \forall \ n \geq N_\delta \vee 1/\delta$

(II) ξ arbitrário, satisfazendo (2).

$$h > 0 : \quad \xi_h(t,\omega) = \begin{cases} \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} \xi(t+\tau\omega)\,d\tau, & \text{se } t \geq h \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

ξ_h está bem definida, é contínua, pm e satisfaz (2)

Pelo <u>Teorema da diferenciação de Lebesgue</u>:

$$\xi_h \longrightarrow \xi \quad \text{qdo} \quad h \downarrow 0, \ \forall \omega \text{ e Lebesgue q.t.p}$$

do TC dominada e (I) temos (1)

(III) Para ξ arbitrário seja

$\xi^{(m)} = (\xi \vee -m) \wedge m$, $m > 0$. $\xi^{(m)}$ satisfaz (2) e TC domi.

$$\Rightarrow \quad E\int_0^T |\xi_t - \xi_t^{(m)}|^2 dt \longrightarrow 0.$$

<u>Integral Estocástica (integral de Itô)</u>

Seja ξ uma função pms, então para $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\eta(t,\omega) = \int_0^t \xi(s,\omega)\,dB_s(\omega) := \sum_{k=0}^{j-1} \xi(t_k,\omega)\cdot\left(B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)\right) +$$
$$+ \xi(t_j,\omega)\cdot\left(B_t(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right).$$

<u>Propriedades</u>:

a) η_t é contínua — segue da continuidade do MB

b) η_t e $\eta_t^2 - \int_0^t \xi_s^2\,ds$ são ambos martingais — segue da martingalidade de B_t e $B_t^2 - t$

Integração Estocástica

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t), (B_t))$
↳ filtragem ↳ MBP

Definição 1: $\xi : [0,+\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é dita progressivamente mensurável (pm) se $\{(s,\omega) : s \in [0,t], \omega \in \Omega$ e $\xi(s,\omega) \in A\}$ $\in \mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t \quad \forall \; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definição 2: ξ é dita pm simples (pms) se $\exists \; 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ e $\forall \; \omega \in \Omega$
$$\xi(t,\omega) = \begin{cases} \xi(t_j,\omega), & t_j \leq t < t_{j+1} \\ \xi(t_n,\omega), & t \geq t_n \end{cases}$$

Lema 1.1: Se uma função pm satisfaz
$$E\int_0^T \xi^2(t,\omega)\, dt < \infty \quad \forall \; T > 0,$$
então existe (ξ_n) de funções pms tq
$$E\int_0^T |\xi(t,\omega) - \xi_n(t,\omega)|^2 dt \to 0. \qquad (1)$$

dem: Fixado $T > 0$. (I) Se ξ for contínua e
$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |\xi(t,\omega)|^2\right) < \infty. \qquad (2)$$

Então, $\xi_n(t,\omega) = \xi(\pi_n(t),\omega) \; \forall \omega$, onde $\pi_n(t) = \frac{j}{n}$ se $\frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}$.

c) $P\left(\sup_{t\in[0,T]} |\eta_t| \geq l \right) \leq \frac{E\eta_T^2}{l^2}$, $l > 0$.

d) (i) $E\eta_t = 0$ e (ii) $E\eta_t^2 = E\int_0^t \xi_s^2\, ds$.

e) Se $\xi = a\xi_1 + b\xi_2$, então $\eta = a\eta_1 + b\eta_2 = a\int \xi_1(t)\, dB_t$
$+ b\int \xi_2(t)\, dB_t$.

f) η é pm

Para ξ satisfazendo as condições do Lema 1.1 (em $L_2([0,T]\times\Omega)$ $\forall\, T<\infty$). Seja (ξ_n) uma seq. de funções pms satisfazendo (1). Então

$$\eta(t,\omega) = \int_0^t \xi(s,\omega)\, dB_s(\omega)$$

é definida como

$$\eta_t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \xi_n(s,\omega)\, dB_s(\omega) \quad \text{em } L_2(\Omega),\ \forall\, t$$

Observações: 1) o limite está bem definido

$$E\left(\eta_m^{(t)} - \eta_n^{(t)}\right)^2 = E\int_0^t |\xi_m(t) - \xi_n(t)|^2\, ds \xrightarrow{\text{Lema 1.1.}} 0, \quad \text{logo}$$

$(\eta_m^{(t)})$ é de Cauchy em $L_2(\Omega)$ e $\therefore$ converge.

2) O limite é uniforme em $t\in[0,T]$.

3) As propriedades (a) - (f) são preservadas no limite.

a) $P\left(\sup_{t\in[0,T]} |\eta_n(t) - \eta(t)| > \varepsilon \right) \overset{(c)}{\leq} \dfrac{E\left(|\eta_n(T) - \eta(T)|^2 \right)}{\varepsilon^2}$

$\overset{d(i)}{=} E \int_0^T |\xi_n(s) - \xi(s)|^2 ds \Big/ \varepsilon^2 \longrightarrow 0.$

<u>OBS</u>: Podemos substituir $E\int_0^T \xi^2 ds < \infty$ por $P\left(\int_0^T \xi^2 ds < \infty \right) = 1$ $\forall$ T. Podemos estender a noção de integral (ver Karatzas - Shreve, dos 2,3,4 pág 149, neste caso IE serão martingais locais).

Seja $A \in \mathcal{F}_S$. Como $S \leq S_n \Rightarrow A \in \mathcal{F}_{S_n}$. Pelo caso 1, temos

$$E_x(Y_{S_n} \circ \theta_{S_n}; A \cap \{S < \infty\}) = E_x(\varphi(B_{S_n}, S_n); A \cap \{S < \infty\}).$$

Tomando o limite com $n \to +\infty$, temos

$$\varphi(B_{S_n}, S_n) \to \varphi(B_S, S) \quad e$$

$$Y_{S_n} \circ \theta_{S_n} \to Y_S \circ \theta_S \quad \text{em } \{S < \infty\}$$

Segue do T. C. Dominada que

$$E_x(Y_S \circ \theta_S; A \cap \{S < \infty\}) = E_x(E_{B_S} Y_S; A \cap \{S < \infty\}) \qquad (*)$$

Para completar a demonstração, aplicaremos o teorema da classe monótona.

Seja $\mathcal{H} = \{Y; (*) \text{ vale}\}$

i) $Y, Y' \in \mathcal{H} \Rightarrow aY + bY' \in \mathcal{H}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e

ii) $0 \leq Y_n \in \mathcal{H}$ e $Y_n \uparrow Y$ é limitada $\Rightarrow Y \in \mathcal{H}$ são fáceis de verificar.

Para verificar (iii), seja $\mathcal{A} = \{A = G_0 \times \{\omega : \omega(s_j) \in G_j, 1 \leq j \leq k\}, G_j \text{ aberto}\}$. Tomando $f_j^n(x) = 1 \wedge n d(x, G_j^c)$ temos que $f_j^n(x) \uparrow \mathbb{1}_{G_j}$ e $f_j^n(x)$ são contínuas. Do fato que

$$Y_s^n(\omega) = f_0^n(s) \prod_{j=1}^{k} f_j^n(\omega(s_j)) \in \mathcal{H} \quad e \quad (ii) \quad \text{segue que}$$

$\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$, o que conclui a demonstração.

Propriedade Forte de Markov para MB

Teorema 3.7: Seja S um t.p. (c.r. à $\mathcal{F}_t$) e $Y: [0,\infty) \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ ltda. Então $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$E_x(Y_S \circ \theta_S \mid \mathcal{F}_S) = E_{B_S}(Y_S) \quad \text{em } \{S < \infty\},$$

onde $E_{B_S}(Y_S) = E_x(Y_t)\big|_{x = B_S,\, t = S}$.

dem: Caso 1: S é v.a. discreta. Seja $(t_n)_{n\geq 1}$ os valores finitos assumidos por S. Dado $A \in \mathcal{F}_S$

$$E_x(Y_S \circ \theta_S \,;\, A \cap \{S<\infty\}) = \sum_n E_x(Y_{t_n} \circ \theta_{t_n} \,;\, \overbrace{A \cap \{S = t_n\}}^{\in \mathcal{F}_{t_n}})$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \sum_n E_x(E_{B_{t_n}} Y_{t_n} \,;\, A \cap \{S = t_n\}) = E_x(E_{B_S} Y_S \,;\, A \cap \{S<\infty\}).$$

Caso Geral: Seja $S_n = (\lfloor 2^n S \rfloor + 1)\, 2^{-n}$. Note que S_n é t.p. $\forall\, n$ e $S_n \downarrow S$.

Seja $Y_s = f_0(s) \cdot \prod_{i=1}^{m} f_i(\omega(t_i))$; $0 < t_1 < \dots < t_m$, f_i's contínuas e ltdas.

Fato: Se f é contínua e ltda, então $x \mapsto \int p_t(x,y) f(y)\, dy$ é contínua e ltda.

Disso, segue que

$$\varphi(x,s) = E_x Y_s = f_0(s) \int dy_1\, p_{t_1}(x, y_1) f_1(y_1) \cdots \int dy_n\, p_{t_n}(y_{n-1}, y_n) f_n(y_n)$$

é contínua e ltda.

Aplicação: 1) Zeros do MB.

Sejam $Z = \{ t \geq 0 ; B_t = 0 \}$, $R_t = \inf\{ u > t : B_u = 0 \}$ e

$T_0 = \inf\{ u > 0 : B_u = 0 \} = R_0$. Note que R_t é t.p.

De um resultado anterior $P_x (R_t < \infty) = 1$.

$\therefore B_{R_t} = 0$ e pela PF Markov

$$P_x (T_0 \circ \theta_{R_t} > 0 \mid \mathcal{F}_{R_t}) = P_{B_{R_t}} (T_0 > 0) = P_0 (T_0 > 0) = 0.$$

$\Rightarrow P_x (T_0 \circ \theta_{R_t} > 0) = 0 \Rightarrow P_x (T_0 \circ \theta_{R_q} > 0 \ \forall q \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)) = 0.$

Se $u \in Z$ e existe $t < u$ tq $(t, u) \cap Z = \phi \Rightarrow \forall v > u$,

$(u, v) \cap Z \neq \phi$. $\Rightarrow$ todos os ptos de Z não são isolados.

Como Z é fechado então ele é não enumerável e

$$|Z| = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{B_t = 0\}} dt \overset{\text{Fubini}}{\Rightarrow} E_x |Z| = \int_0^\infty P_x (B_t = 0) dt = 0$$

ié, $|Z| = 0$ q.c.

Exemplo: Tempo de chegada, $a \in \mathbb{R}$. $T_a = \inf\{ t \geq 0, B_t = a \}$

Teorema 4.1. Sob P_0, $\{ T_a ; a \geq 0 \}$ tem incrementos indep. e estacionários.

dem: Se $0 < a < b$, então $T_b \circ \theta_{T_a} = T_b - T_a$, daí

$$E_0 (f(T_b - T_a) \mid \mathcal{F}_{T_a}) = E_0 (f(T_b) \circ \theta_{T_a} \mid \mathcal{F}_{T_a}) \overset{\text{PFM}}{=}$$

$$E_{B_{T_a}} (f(T_b)) = E_a (f(T_b)) = E_0 (f(T_b - a)),$$ o que mostra a estacionaridade

($B_{T_a} = a$)

Sendo $0 < a_1 < \dots < a_n$.

$$E_0\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(T_{a_i} - T_{a_{i-1}})\Big) = E_0\Big(E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(T_{a_i} - T_{a_{i-1}}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{T_{a_{n-1}}}\Big)\Big)$$

$$= E_0\Big(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(T_{a_i} - T_{a_{i-1}})\Big) \cdot \underbrace{E_0\big(f_n(T_{a_n} - T_{a_{n-1}}) \,|\, \mathcal{F}_{a_{n-1}}\big)}_{= E_0(f_n(T_{a_n} - T_{a_{n-1}}))}$$

$$= \dots = \prod_{i=1}^{n} E_0\big(f_i(T_{a_i} - T_{a_{i-1}})\big). \quad \therefore \text{ independentes.}$$

OBS.: $(a B_t) \overset{d}{=} (B_{a^2 t}) \Rightarrow T_a \sim a^2 T_1$. Disso e do Teorema 4.1 concluímos que (T_a) é um processo estável com índice $1/2$.

Transformada de Laplace de T_a.

$$\varphi_a(\lambda) = E e^{-\lambda T_a}, \quad \lambda \geq 0$$

$$\varphi_{x+y}(\lambda) \overset{\text{indep.}}{=} \varphi_x(\lambda)\, \varphi_y(\lambda) \quad (4)$$

Lema: $\varphi_a(\lambda) = e^{-a\, c(\lambda)}$ (5)

dem.: Defina $c(\lambda) = -\log \varphi_1(\lambda)$ (6). Então para $a = 1$,

$$e^{-c(\lambda)} = e^{\log \varphi_1(\lambda)} = \varphi_1(\lambda)$$

Agora, fazendo em (4) $x = y = 2^{-m}$ ⊕ (6) ⊕ indução, obtemos que (5) vale para $a = 2^{-m}$. (7)

Por último, fazendo em (4) $x = k 2^{-m}$ e $y = 2^{-m}$ ⊕ (7) ⊕ indução, obtemos (5) válido para todo $a \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, +\infty)$ e então, estende-se por continuidade e monotonicidade.

Note que,

$$\varphi(s,a) = E_a Y_s = E_a\left(\mathbb{1}\{s<t\,;\,B(t-s)>a\}\right) = \mathbb{1}\{s<t\}.\underbrace{P_a(B(t-s)>a)}_{=1/2}.$$

$$\Longrightarrow \varphi(s,a) = \frac{1}{2}.$$ Logo,

$$P_0(T_a<t,\, B_t>a) = \frac{1}{2}\cdot P_0(S<\infty) = \frac{1}{2}P_0(T_a<t)$$

Usando que $P_0(T_a<t) = 2\cdot P_0(B_t>a)$, temos

$$P(T_a\le t) = 2\cdot P_0(B_t>a) = 2\cdot\int_a^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dt \overset{x=\frac{a\sqrt{t}}{\sqrt{s}}}{=}$$

$$= \int_0^t \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{a^2}{2s}}}{s^{3/2}}}_{f(s)}ds$$, onde $f(s)$ é a densidade de T_a.

Observe que podemos usar $f(s)$ para obter uma expressão para $c(\lambda)$.

$$E_0(e^{-\lambda T_a}) = e^{-ac\sqrt{\lambda}}$$, onde $c=\sqrt{2}$.

<u>Exemplo</u> (dist. do maior zero) A dist. de $L = \sup\{t\le 1;\, B_t=0\}$ é

Note que $\{L<s\} = \{T_0\circ\theta_s > 1-s\}$, então

$$P_0(L<s) = P_0(T_0\circ\theta_s>1-s) = E_0(P_0(T_0\circ\theta_s>1-s\mid\mathcal{F}_s))$$

$$\overset{PM}{=} E_0(P_{B_s}(T_0>1-s)) = \int_{\mathbb{R}} p_s(0,x)\,P_x(T_0>1-s)\,dx.$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-\frac{x^2}{2s}}dx\int_{1-s}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,r^{3/2}}\,x\,e^{-\frac{x^2}{2r}}dr = \frac{1}{\pi}\int_{1-s}^{+\infty}(sr^3)^{-1/2}\int_0^{+\infty}x\,\frac{s-r}{2rs}x^2dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{1-s}^{+\infty}(sr^3)^{-\frac{1}{2}}\frac{rs}{r+s}dr \overset{t=\frac{s}{r+s}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^s\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dr = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}(\sqrt{s}).$$

Para identificarmos $c(\lambda)$, observe que

$$\varphi_a(1) = E e^{-T_a} \overset{T_a \sim a^2 T_1}{=} E e^{-a^2 T_1} = \varphi_1(a^2)$$

$$\Longrightarrow \quad c(\lambda) = \kappa\sqrt{\lambda} \quad \text{sendo } \kappa \text{ cte.}$$

Exemplo: (Princípio da reflexão) Seja $a \in \mathbb{R}_+$ e $T_a = \inf\{ t \geq 0 \,;\, B_t = a\}$. Então

$$P_0(T_a < t) = 2 \cdot P_0(B_t > a) \quad \forall\, t.$$

dem.: (Argumento intuitivo) Se $T_a = s < t$, sob P_0, $B_t - a = B_t - B_{T_a} \mid \mathcal{F}_{T_a} \overset{PFM}{\sim} B_{t-s}$. Então

$$P_0(T_a < t, B_t > a) = \int_0^t f_{T_a}(s) \underbrace{P_0(B_t > a \mid T_a = s)}_{= P_0(B_{t-s} > a) = \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} P_0(T_a < t)$$

$$\Longrightarrow P_0(T_a < t) = 2 \cdot P_0(T_a < t, B_t > a) = 2 \cdot P_0(B_t > a). \quad (\Delta)$$

O argumento anterior não é rigoroso, mas note que basta verificar a validade de (Δ). De fato, sendo a, t fixos, sejam $Y_s(\omega) = \mathbb{1}\{ s < t, \omega(t-s) > a\}$ e $S = \inf\{ s < t \,;\, B_s = a\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$

Observe que $\{S < \infty\} = \{T_a < t\}$. Então $Y_S \circ \theta_S = \mathbb{1}\{ T_a < t \,;\, B_t > a\}$. Da PFM, vem

$$P_0(T_a < t, B_t > a) = E_0(Y_S \circ \theta_S \,;\, S < \infty) = E_0(E_0(Y_S \circ \theta_S \mid \mathcal{F}_S);\, S < \infty))$$

$$\overset{PFM}{=} E_0(\varphi(S, \overset{a}{B_S});\, S < \infty), \quad \text{onde} \quad \varphi(s, y) = E_y(Y_s).$$

Teorema 5.4: $B_t^2 - t$ é um martingal.

dem: Seja $s < t$.

$$E_x(B_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = E_x(B_{t-s}^2 \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s) \overset{PM}{=} E_{B_s}(B_{t-s}^2) = E_x(B_{t-s}^2)\Big|_{x=B_s}$$

$$= B_s^2 + (t-s)$$

$$\Rightarrow \quad E_x(B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = B_s^2 - t + t - s = B_s^2 - s.$$

Corolário: Seja $T = T_a \wedge T_b$, $a < 0 < b$. Então $E_0 T = -ab$.

dem: Do teorema 5.1 e 5.4 temos

$$\begin{array}{ccc} E_0(B_{T\wedge t}^2) = E_0(T\wedge t) & \xrightarrow{TCM} & E_0 T \\ \downarrow TCD & & \\ E_0(B_T^2) & & \end{array}$$

Do teorema 5.3 segue o resultado.

Teorema 5.6: $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\exp\{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t\}$ é martingal.

dem: Seja $s < t$,

$$E_x(e^{\theta B_t} \mid \mathcal{F}_s) = E_x(e^{\theta B_{t-s}} \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s) \overset{PM}{=} E_{B_s}(e^{\theta B_{t-s}}) =$$

$$= E_x(e^{\theta B_{t-s}})\Big|_{x=B_s} = e^{\theta B_s} e^{\frac{\theta^2}{2}(t-s)}, \text{ onde}$$

$$E_x(e^{\theta B_{t-s}}) = E_x(e^{\theta(B_{t-s} - x + x)}) = e^{\theta x} E_x(e^{\theta(B_{t-s} - x)})$$

$$= e^{\theta x} E_0(e^{\theta B_{t-s}}) = e^{\frac{\theta^2(t-s)}{2}}.$$

Teorema 5.7: $T = T_{-a} \wedge T_a$. Então $E_0(e^{-\lambda T}) = [\cosh(a\sqrt{2\lambda})]^{-1}$.

dem: Dos teoremas 5.1 e 5.6 temos que

$$1 = E_0\{\exp\{\theta B_{t\wedge T} - \tfrac{\theta^2}{2}(T\wedge t)\}\} \xrightarrow[TCM]{t\uparrow\infty} E_0(e^{\theta B_T} e^{-\frac{\theta^2}{2}T})$$

sob P_0, B_T e T são indep.

$$= E_0 e^{\theta B_T} \cdot E_0 e^{-\frac{\theta^2}{2}T} = \tfrac{1}{2}(e^{-\theta a} + e^{\theta a}) = \cosh(\theta a) \overset{\theta=\sqrt{2\lambda}}{=} \cosh(a\sqrt{2\lambda}).$$

OBS: Podemos obter martingais derivando $\exp\{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t\}$ sobre θ.

Martingalidade do MB

Martingais à tempo contínuo

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s \leq t$ (X_t) adaptada à $(\mathcal{F}_t)$ é um martingal (sub, super) se $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$, $s<t$ $(\geq, \leq)$.

Teorema 5.1: (X_t) é martingal contínuo à direita adaptado à $(\mathcal{F}_t)$. Se T for t.p. limitado q.c., então $EX_T = EX_0$.

dem: Exercício.

Teorema 5.2: (B_t) é martingal c.r. à $(\mathcal{F}_t)$ sob P_x.

dem: Da PM, temos que, $s<t$

$$E_x(B_t \mid \mathcal{F}_s) = E_x(B_{t-s} \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s) \overset{PM}{=} E_{B_s}(B_{t-s}) = E_x(B_{t-s})\big|_{x=B_s}.$$

Como

$$E_x(B_{t-s} - x + x) = x + \underbrace{E_x(B_{t-s} - x)}_{=0} = x$$

temos,

$$\therefore\ E_x(B_{t-s})\big|_{x=B_s} = B_s$$

Teorema 5.3: Se $a<x<b$, então $P_x(T_a < T_b) = \dfrac{b-x}{b-a}$.

dem: Seja $T = T_a \wedge T_b < \infty$. Do teorema 5.2 e 5.1 temos que

$$E_x(B_{T\wedge t}) = E_x(B_0) = x.$$ Observe que $B_T = \lim_{t\to+\infty} B_{T\wedge t}$

TC Dominada
$$\Longrightarrow\ E_x(B_T) = x.$$
$$\Downarrow$$
$$a \cdot P_x(T_a < T_b) + b \cdot P_x(T_b < T_a)$$

$\Big\} \Rightarrow P_x(T_a < T_b) = \dfrac{b-x}{b-a}.$

De novo, seja $t_n = \alpha^n$, $\alpha > 1$.

$$P_0\Big(\underbrace{B_{t_{n+1}} - B_{t_n}}_{\sim N(0,\, t_{n+1}-t_n)} > \sqrt{t_{n+1} f(t_{n+1})} \Big) \overset{\text{dividindo por } \sqrt{t_{n+1}-t_n}}{=} P_0\Big(\underbrace{B_1}_{\sim N(0,1)} > \sqrt{\beta f(t_{n+1})} \Big) \qquad \beta = \frac{t_{n+1}}{t_{n+1}-t_n} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

(o evento acima é A_n)

$$\overset{(9.4)}{\geq} \frac{c\, e^{-\frac{\beta}{2} f(t_{n+1})}}{2\sqrt{\beta f(t_{n+1})}}.$$

Tomando $f(t) = \frac{2}{\beta^2} \log\log t$ e observando que $\log\log t_n = \log n + \log\log \alpha$, concluímos que $e^{-\frac{\beta f(t_{n+1})}{2}} \geq c_\alpha\, n^{-\frac{1}{\beta}}$

$\therefore \sum_{n\geq 1} P_0(A_n) \geq +\infty$ e pela indep. dos incrementos, de B-C II segue que

$$B_{t_{n+1}} - B_{t_n} > \sqrt{\frac{2}{\beta^2} \log\log t_{n+1}} \quad \text{i.v.}$$

Pela cota superior para B_{t_n}, usando a simetria

$$\varliminf \frac{B_{t_n}}{\sqrt{2 t_n \log\log t_n}} \geq -1 \implies \varlimsup \frac{B_{t_{n+1}}}{\sqrt{2 t_{n+1} \log\log t_{n+1}}} \geq$$

$$\underbrace{\frac{1}{\beta}}_{1-\frac{1}{\alpha}} - \underbrace{\lim \sqrt{\frac{t_n}{t_{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{\log\log t_n}{\log\log t_{n+1}}}_{=1}}}_{=\sqrt{1/\alpha}} \implies \varlimsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} \geq 1 - \frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

que vale para todo $\alpha > 1$ $\therefore$ segue o resultado

<u>Lei do logaritmo iterado p/ v.a's iid</u>: Se $X_1, X_2, \ldots$ v.a's iid com $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ então $\varlimsup \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = +1$ e

$$\varliminf \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1.$$

Continuando: Dados $\varepsilon, \delta > 0$, seja $G_\delta = \{ w \in C[0,1] ;$ se $\forall \; w' \in C[0,1]$, $\|w - w'\|_\infty < \delta$ então $|\Psi(w) - \Psi(w')| < \varepsilon \}$

Como Ψ é contínua, então $\forall \; \varepsilon > 0$ $G_\delta \uparrow C[0,1]$ qdo $\delta \downarrow 0$. Seja $\Delta_n = \| Y^n - B \|_\infty$, então

$$E|\Psi(Y^n) - \Psi(B)| \leq \varepsilon + P(\|Y^n - B\| > \delta) + P(G_\delta^c)$$

$\Rightarrow \overline{\lim}\, E|\Psi(Y^n) - \Psi(B)| \leq \varepsilon + P(G_\delta^c)$. Como $\varepsilon, \delta > 0$ são arbitrários e o lado esquerdo não depende de nenhum dos dois segue o resultado.

Aplicação: S_n passeio aleatório simétrico simples.

$$\max_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \max_{t \in [0,1]} B_t \sim |B_1|$$

Lei do Logaritmo iterado para o MB

Teorema 9.1. $\overline{\lim} \dfrac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1$ e $\underline{\lim} \dfrac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1$.

dem: Fato sabido: $\max_{s \in [0,1]} B_s \overset{P_0}{\sim} |B_1|$ (9.2)

estimativas. $$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0 \qquad (9.3)$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \sim \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \to +\infty \qquad (9.4)$$, onde

$f(x) \sim g(x)$ significa $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \uparrow \infty} 1$

De (9.4) temos que $f(t) \uparrow +\infty$, então

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{t}} B_t > \sqrt{f(t)}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi f(t)}} e^{-\frac{f(t)}{2}}$$

$$\therefore \sum_{n \geq 1} P\left(B_n > \sqrt{n f(n)}\right) \begin{cases} < +\infty, & \text{se } f(n) = (2+\varepsilon)\log n \\ = +\infty, & \text{se } f(n) = (2-\varepsilon)\log n \end{cases}$$

Por B-C, $\overline{\lim} \dfrac{B_n}{\sqrt{2n \log n}} \leq 1$ q.c.

Seja $(t_n)_{n \geq 1}$, $t_n = \alpha^n$, $\alpha > 1$ uma seq de t.p.

$$P_0\left(\max_{s \in [t_n, t_{n+1}]} B_s > \sqrt{t_n f(t_n)}\right) \leq P_0\left(\overbrace{\max_{s \in [0, t_{n+1}]} \frac{B_s}{\sqrt{t_{n+1}}}}^{\overset{d}{=} |B_1|} > \sqrt{\frac{f(t_n)}{\alpha}}\right)$$

$$\overset{(9.2)}{=} P\left(|B_1| > \sqrt{\frac{f(t_n)}{\alpha}}\right) \overset{(9.3)}{\leq} \frac{2c}{\sqrt{\frac{f(t_n)}{\alpha}}} e^{-\frac{f(t_n)}{2\alpha}}$$

Tomando $f(t) = 2\alpha^2 \log\log t$, temos $\log\log t_n = \log(n \log \alpha)$
$= \log n + \log\log \alpha$.

$$\therefore e^{-\frac{f(t_n)}{2\alpha}} \leq C_\alpha \cdot n^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} P_0\left(\max_{s \in [t_n, t_{n+1}]} B_s > \sqrt{t_n f(t_n)}\right) < \infty$$

$$\cdot \geq \sum_{n \geq 1} P_0\left(\max_{s \in [t_n, t_{n+1}]} \frac{B_s}{\sqrt{2s \log\log s}} > \alpha\right)$$

Por B-C, $\overline{\lim}_{t \to +\infty} \dfrac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} \leq \alpha \quad \forall\, \alpha > 1$.

$$\therefore \leq 1.$$

10.11

Caracterização do MB como mart. contínuo.

Teo 3.3.16 K-S: Seja $(X_t) \in M_c^2$ tq $\langle X \rangle_t \equiv t$. Então (X_t) é um MB.

dem.: Basta mostrar que $E(e^{ia(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) \overset{q.c.}{=} e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)}$

$\forall$ $0 \le s, t < \infty$ e $a \in \mathbb{R}$.

Vamos fixar $a \in \mathbb{R}$, e definir $u(x) = e^{iax}$

Observe que u satisfaz: $u'(x) = iau(x)$ e $u''(x) = -a^2 u(x)$.

Aplicando Itô: , fixado s.

$$e^{iaX_t} = e^{iaX_s} + \underbrace{ia \int_s^t e^{iaX_v} dX_v}_{M_{s,t} = \text{martingale}} - \frac{1}{2}a^2 \int_s^t e^{iaX_v} dv.$$

$\times\ e^{-iaX_s}$ dos 2 lados:

$$e^{ia(X_t - X_s)} = 1 + ia M_{s,t} e^{-iaX_s} - \frac{1}{2}a^2 \int_s^t e^{ia(X_v - X_s)} dv.$$

Seja $A \in \mathcal{F}_s$ e multipl. por $\mathbb{1}_A$ e integrando

$$E(e^{ia(X_t - X_s)} \mathbb{1}_A) = P(A) - \frac{1}{2}a^2 \int_s^t E(e^{ia(X_v - X_s)} \mathbb{1}_A).$$

o que nos dá uma eq. integral p/ a função $t \mapsto E(e^{ia(X_t - X_s)} \mathbb{1}_A)$ cuja única solução é então

$$P(A) e^{-\frac{1}{2}a^2(t-s)}$$

Lema 8.6.2-Oks: Sejam μ e ν 2 medidas de prob em $(\Omega, \mathcal{G})$ tq.

$$d\nu(\omega) = f(\omega)\, d\mu(\omega) \quad \forall \quad f \in L_1(\mu)$$

Se $X \in (\Omega, \mathcal{G})$ e $E_\nu(|X|) = \int |X|(\omega)\, d\nu(\omega)$
$$= \int |X|(\omega) f(\omega)\, d\mu(\omega) < \infty$$

então p/ toda $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ σ-álgebra:

$$E_\nu(X \mid \mathcal{H}) \cdot E_\mu(f \mid \mathcal{H}) = E_\mu(fX \mid \mathcal{H}).$$

dem.: Seja $H \in \mathcal{H}$:

$$\int_H \underbrace{E_\nu(X \mid \mathcal{H})}_{\in \mathcal{H}} E_\mu(f \mid \mathcal{H})\, d\mu = \int_H E_\nu(X \mid \mathcal{H}) \overbrace{f\, d\mu}^{= d\nu}$$

$$= \int_H X \underbrace{d\nu}_{f d\mu} = \int_H fX\, d\mu \quad \blacksquare.$$

Teorema de Girsanov:

Motivação: Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ v.a's iid normais padrão em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ e

$$\tilde{P}(d\omega) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i Z_i(\omega) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \right\} \cdot P(d\omega)$$

Então,

$$\tilde{P}(Z_1 \in dz_1, \ldots, Z_n \in dz_n) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \right\} \times$$

$$\underbrace{P(Z_1 \in dz_1, \ldots, Z_n \in dz_n)}_{= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}\, dz_1 \ldots dz_n}$$

10.11 :

$$= \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu_i)^2 \right\} dz_1, \dots, dz_n$$

$\therefore$ Sob $\tilde{P}$, $(Z_1, \dots, Z_n)$ é um vetor independente, $Z_i \sim N(\mu_i, 1)$

e $\tilde{Z}_i = Z_i - \mu_i$, concluímos que sob $\tilde{P}$, $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$ é um vetor iid $N(0,1)$.

Teo 8.63-Oks : (Girsanov I) Seja Y uma integral de Itô de forma

$$dY_t(\omega) = -\overset{\text{f.f. pm}}{a_t(\omega)}\, dt + dB_t(\omega), \quad t \leq T$$

$$Y_0 \equiv 0 \quad \text{e} \quad B_t \text{ é M.B.}$$

Suponha que

$$M_t = \exp\left\{ \int_0^t a_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2\, ds \right\}, \quad t \leq T, \in \mathcal{M}_c^2. \quad (2)$$

Seja $dQ(\omega) = M_T(\omega)\, dP(\omega)$. Então, sob Q, $(Y_t)_{t \leq T}$ é MBP.

Observações : 1) Q é medida ≥ 0

$$Q(\Omega) = E(M_T) = E(M_0) = 1.$$

2) A condição $E\left[\exp\left\{ c \int_0^T a_s^2\, ds \right\}\right] < \infty$ $\forall$ cte $c \geq \frac{1}{2}$ é suficiente p/ (2) (para $c \geq 8$ suf. grande vale (2))

3) $c = \frac{1}{2}$ (condição de Novikov)

12.11

(1)

dem.: Pela caracterização do MB como mart. cont,

basta verificar: sob Q

(i) Y_t é mart.

(ii) $Y_t^2 - t$ é mart.

Para (i), seja $K_t = M_t Y_t$.

Se $X_t^{(1)}$ e $X_t^{(2)}$ forem processos de Itô, i.e.,

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t \xi_s^{(i)}\, dB_s + \int_0^t \lambda_s^{(i)}\, ds \,,$$ então $X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)}$

tbm é um processo de Itô e

$$d X_t^{(1)} X_t^{(2)} = X_t^{(1)} dX_t^{(2)} + X_t^{(2)} dX_t^{(1)} + \xi_t^{(1)} \cdot \xi_t^{(2)} dt.$$

então, sendo $dM_t = a_t M_t dB_t$

$$dK_t = M_t dY_t + Y_t dM_t + a_t M_t dt$$

$$= M_t (\cancel{-a_t dt} + dB_t) + Y_t M_t a_t dB_t + \cancel{a_t M_t dt}$$

$$= M_t (1 + a_t Y_t) dB_t.$$

$\therefore$ K_t é mart sobre P

Pelo Lema 2, para $s < t \le T$

$$E_Q(Y_t | \mathcal{F}_s) = \frac{E_P(M_T Y_t | \mathcal{F}_s)}{E_P(M_T | \mathcal{F}_s)} = \frac{E_P(M_t Y_t | \mathcal{F}_s)}{M_s}$$

$$= \frac{M_s Y_s}{M_s} = Y_s. \blacksquare$$

Aplicação: Existência de solução fraca para Eq. Dif. Est.

Teorema (Prop. 5.3.6 KS) - Considere EDE

$$(*) \quad dX_t = \mu(X_t) + dB_t \quad , \; 0 \le t \le T \leftarrow \text{fixo},$$

B_t MBP e $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $|\mu(x)| \le K \cdot (1 + |x|)$ $(**)$

Então, $\forall$ prob. ν em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, a eq. $(*)$ tem sol. fraca com dist. inicial ν.

Uma solução fraca de $(*)$ é uma tripla $\{(X, B), (\Omega, \mathcal{F}, P), \{\mathcal{F}_t\}\}$ tq

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é prob.; $(\mathcal{F}_t)$ é filtragem;

(ii) (X, B) é cont e adapt.

(iii) $E \int_0^T \mu^2(X_t)\, dt < \infty$

(iv) $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)\, ds + B_t$, $0 \le t \le T$.

dem: Vamos começar com um MBP $\{\{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}, (\Omega, \mathcal{F}), P\}$. Por $(**)$ temos que

$$M_t = \exp\left\{ \int_0^t \mu(X_s)\, dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \mu^2(X_s)\, ds \right\} \text{ é um mart.}$$

em L^2 $(\in \mathcal{M}_c^2)$ sob P. (Cor 3.5.16 KS).

Por Girsanov, sob Q $(dQ = M_T dP)$, o processo

$$W_t = X_t - X_0 - \int_0^t \mu(X_s)ds, \quad t \in [0,T] \quad \text{é um MBP} \quad (4)$$

Reescrevendo (4),

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + W_t$$

Logo a tripla $\{(X,W), (\Omega, \mathcal{F}, Q), (\mathcal{F}_t)\}$ constitui uma solução fraca p/ (*)

$T_n \to \infty$, $(X_{t \wedge T_n})$ é mart. $\forall n$ $\leftarrow$ martingal local

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome________________________ Nº USP____________
Curso________________________ Período____________
Disciplina____________________ Código USP__________

Data____/____/____. Nota_____(__________) Pag__________

Fórmula de Itô

ξ, λ funções pm's tq $E\int_0^T \xi_t^2\, dt < \infty$ $\forall T$ e

$P\left(\int_0^T |\lambda_t|\, dt < \infty\right) = 1$ $\forall T$.

Seja $X_t = X_0 + \int_0^t \xi_s\, dB_s + \int_0^t \lambda_s\, ds$ (1)

$\int_0^T [u'(X_s)]^2 \xi_s^2\, ds < \infty$ $\leq \max_{0\leq s\leq T} (u'(X_s))^2 \int_0^T \xi_s^2\, ds$

ou (notação) $dX_t = \xi_t\, dB_t + \lambda_t\, dt$

Teo 2.1: (Regra de Itô) Seja $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2$. Então

$$u(X_t) = u(X_0) + \int_0^t u'(X_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{1}{2} u''(X_s)\, \xi_s^2\, ds \quad (2)$$

ou seja (notação)

$$d\, u(X_t) = u'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} u''(X_t)\, \xi_t^2\, dt$$

regra da cadeia do Cálculo estocástico.

dem: Suficiente mostrar (2) para ξ, λ simples. Pela aditividade da II, basta considerar ξ, λ ctes.

Vamos chamar $u(\underbrace{\xi B_t + \lambda t}_{X_t}) = u(X_t)$.

Sejam $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ e $\Delta_j = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, $j = 1, .., n$.

então

$$u(X_t) - u(X_0) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{u(\xi B_{t_j} + \lambda t_j) - u(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1})}$$

em série de taylor: $u'(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1})(\xi \Delta_{t_j} + \lambda(t_j - t_{j-1})) + \frac{1}{2} u''(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1}) \times$

$\times (\xi \Delta_{t_j} + \lambda(t_j - t_{j-1}))^2 + o([\xi \Delta_{t_j} + \lambda(t_j - t_{j-1})]^2)$.

$$= \sum_{j=1}^{n} u'(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1}) \xi \Delta_{t_j} \longrightarrow \int_0^t \xi u'(X_s)\, dB_s$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} u'(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1}) \cdot (t_j - t_{j-1}) \longrightarrow \int_0^t \lambda u'(X_s)\, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} u''(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1}) \Big(\xi^2 \underbrace{\Delta_j^2}_{\approx (t_j - t_{j-1})} + \cancel{2\xi\lambda \Delta_j (t_j - t_{j-1})}^{\to 0} + \cancel{\lambda^2 (t_j - t_{j-1})^2}^{\to 0} \Big)$$

$$=: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

$$(\mathrm{III}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} u''(\text{---}) \xi^2 (t_j - t_{j-1}) \longrightarrow \int_0^t \frac{1}{2} u''(X_s) \xi^2\, ds$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} u''(\xi B_{t_{j-1}} + \lambda t_{j-1}) \xi^2 \left[\Delta_j^2 - (t_j - t_{j-1}) \right]}_{(\mathrm{IV})}.$$

falta mostrar que $(\mathrm{IV}) \xrightarrow{P} 0$

Se u'' for ltdo em prob. (ie $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ $P(|u''| > M) < \varepsilon$.)

$$E(\mathrm{IV})^2 \leq c\, E\Big(\sum_{j=1}^{n} \big(\Delta_j^2 - (t_j - t_{j-1})\big) \Big)^2 \to 0.$$

<u>concluiremos na aula que vem:</u>

$$d u(X_t) = u'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} u''(X_t) \xi_t^2 dt$$

<u>Exemplos</u>: 1) $X_t = B_t$ e $v = x^2$.

$$\Rightarrow d B_t^2 = 2 B_t\, d B_t + dt$$

$$\Rightarrow \int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2} \{ B_t^2 - t \}$$

2) Seja $Z_t = \exp \Big\{ \underbrace{\int_0^t \xi_s\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \xi_s^2\, ds}_{X_t} \Big\}$

Itô

$$\Rightarrow dZ_t = Z_t \Big(\xi_t\, dB_t - \cancel{\frac{1}{2} \xi_t^2 dt} \Big) + \cancel{\frac{1}{2} Z_t \xi_t^2 dt}$$

$$= Z_t \xi_t\, dB_t$$

Z_t faz o papel no cálculo estocástico da função $\exp\{\int_0^t \xi_s ds\}$ no cálculo comum.

Exemplo: Problema de Dirichlet.

Suponha que $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^2$.

$$\begin{cases} u''(x) = 0 & \text{em } (a,b) \\ u(a) = u_1 \ ; \ u(b) = u_2 \end{cases}$$

· Eq. de Laplace c/ condição de fronteira de Dirichlet.

solução: Seja $T = T_a \wedge T_b$ $\left(T_x = \inf\{t \geq 0,\ B_t = x\} \right)$.

Então, $$u(B_{t\wedge T}) = u(B_0) + \underbrace{\int_0^{t\wedge T} u'(B_s)\, dB_s}_{\text{martingal}}$$

Se $x \in (a,b)$

$$E_x\{u(B_{t\wedge T})\} = E_x\big(\cancel{u(B_0)}\big) + 0, \quad \forall t$$

$u(x)$

$\downarrow t \to \infty$

$$E_x(u(B_T)) = u(a)\,P(T = T_a) + u(b)\,P(T = T_b)$$
$$= u_1 \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right) + u_2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

Equação diferencial estocástica

Resolva: $$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)\,dB_t + \mu(X_t)\,dt \\ X_0 = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$ $X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + \int_0^t \mu(X_s)\,ds$, com X_t pm.

Teorema: Suponha que

1) a) $|\sigma|, |\mu| \leq A$ b) x_0 é determinístico

2) $|\sigma(x) - \sigma(y)|, |\mu(x) - \mu(y)| \leq A|x-y|$

Então, $(*)$ tem uma única solução pm começando em x_0.

dem.: (Iteração de Picard).

$X_t^0 = x_0$, $\forall\ t$ e para $n \geq 1$, seja

$$X_t^n = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s^{n-1})\, dB_s + \int_0^t \mu(X_s^{n-1})\, ds.$$

Seja $\Delta_t^n = X_t^n - X_t^{n-1}$. Então

$$E\{(\Delta_t^n)^2\} \leq 2\left\{E\left\{\int_0^t (\sigma(X_s^{n-1}) - \sigma(X_s^{n-2}))\, dB_s\right\}^2 + E\left\{\int_0^t (\mu(X_s^{n-1}) - \mu(X_s^{n-2}))\, ds\right\}^2\right\}$$

$$= 2\,(I + II).$$

$$I = E\int_0^t (\sigma(X_s^{n-1}) - \sigma(X_s^{n-2}))^2\, ds. \leq A^2\, E\int_0^t (\Delta_s^{n-1})^2\, ds$$

$$II \underset{\text{Cauchy-Schw}}{\leq} t\, E\left\{\int_0^t (\mu(X_s^{n-1}) - \mu(X_s^{n-2}))^2\, ds\right\} \leq t A^2 E\int_0^t (\Delta_s^{n-1})^2\, ds.$$

Seja $\Phi_t^n = E((\Delta_t^n)^2)$

$$\Rightarrow \Phi_t^n \leq 2A^2(1+t)\int_0^t \Phi_s^{n-1}\, ds, \quad n \geq 2.$$

$$\Phi_t^1 = E((X_t^1 - X_t^0)^2) = E\left[\left\{\int_0^t \sigma(x_0)\, dB_s - \int_0^t \mu(x_0)\, ds\right\}^2\right] =$$

$$E\{\sigma(x_0)(B_t - B_0) + \mu(x_0)t\}^2 = t\sigma^2(x_0) + t^2\mu^2(x_0)$$

$$\leq A^2 t(1+t)$$

$$\Rightarrow \Phi_t^n \leq \frac{2^{n-1} A^{2n} t^n (1+t)^n}{n!} =: \lambda_t^n$$

$$X_t^n - X_t^0 = \sum_{k=1}^n \Delta_t^k$$

Vamos mostrar que $\sum_{k=1}^n |\Delta_t^k| \nearrow$. Basta mostrar que $\sum_{k=1}^{+\infty} E|\Delta_t^k| < \infty$

$$E|\Delta_t^k| \leq \sqrt{E(\Delta_t^n)^2} = \sqrt{\Phi_t^n} \leq \sqrt{\lambda_t^n} < \infty.$$

... Fatou + C.domi.

$$E\int_0^t (X_s^n - X_s)^2 ds \longrightarrow 0 .$$

$\therefore$ (X_t) satisfaz $(*)$.

Unicid : X_t, Y_t são 2 soluções de $(*)$, pm's e cont's.

Seja $\Phi_t = E(X_t - Y_t)^2$, então

$$\Phi_t \leq 2A^2(1+t)\int_0^t \Phi_s\, ds$$

Iterando : $\Phi_t \leq \lambda_t^n \underbrace{\int_0^t \Phi_s ds}_{<\infty}$, $\forall\, n \geq 1$

$\lambda_t^n \downarrow 0$

$=0$

obsevações: Podemos relaxar a hip. 1) do teorema.

a') $|\sigma(x)|, |\mu(x)| \leq A(1+|x|)$

b') $x_0 \in L_2$

Propriedade Markoviana das soluções (Seja X_t uma sol. de $(*)$

$t_0 > 0$, $\xi = X_{t_0} \in \mathcal{F}_{t_0}$. Seja

$$Y_t = \xi + \int_{t_0}^t \sigma(Y_s)\, dB_s + \int_{t_0}^t \mu(Y_s)\, ds = \xi + Z_t .$$

Pela unicidade, $Y_t = X_t$ se $t \geq t_0$.

Como $B_t - B_{t_0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_0}$ (PFM do MB), se $t \geq t_0$

$$P(X_t \in A \mid \mathcal{F}_{t_0}) = P(\xi + Z_t \in A \mid \underset{\xi = X_{t_0}}{\mathcal{F}_{t_0}}) = P(X_t \in A \mid X_{t_0})$$

homogeneidade

$$= P_{X_{t_0}}(X_{t-t_0} \in A) = p(t-t_0\, ;\, X_{t_0}\, ;\, A)$$

O mesmo p/ tempos de parada: X_t tem a PFM c/ prob. de transição dada por $p((\cdot);(\cdot);(\cdot))$.

Martingais contínuos em L_2 ($E X_t^2 < \infty$). Karatzas & Shreve.

(X_t) martingal contínuo em L_2. $X_0 = 0$ (Not. $X = (X_t) \in \mathcal{M}_c^2$)

Então,

$(X_t)^2$ é um submartingal

Decomposição de Doob-Meyer

$X_t^2 = M_t + A_t$, onde M_t é um martingal e

A_t não decrescente contínuo e adptado.

Notação: $\langle X \rangle_t = A_t$ ... (processo de) variação quadrática de X

Obs: $r \le s \le t$

$E\{(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_r\} = E\{X_t^2 - 2X_tX_s + X_s^2 | \mathcal{F}_r\}$

$= E(X_t^2 - 2X_s E(X_t | \mathcal{F}_s) + X_s^2 | \mathcal{F}_r) = E(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_r)$

$= E(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_s | \mathcal{F}_r)$

Lema 1 (Teo 15.8 KS) Sejam $X \in \mathcal{M}_c^2$, $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma partição de $[0,t]$ e $V_t^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$. Então

$$V_t^2(\pi) \xrightarrow[|\pi| \to 0]{P} \langle X \rangle_t .$$

Ex: Seja $\eta_t = \int_0^t \xi_s \, dB_s \in \mathcal{M}_c^2$. Mostre que $\langle \eta \rangle_t = \int_0^t \xi_s^2 \, ds$ e prove o Lema 1 neste caso.

Integral estocástica: Se $X \in \mathcal{M}_c^2$ e $\xi(t,\omega)$ uma função pm tq

(*) $E \int_0^T \xi^2(t,\omega) \, d\langle X \rangle_t < \infty \quad \forall T$

Lema 2: $\exists (\xi_n)$ pm's simples tq $E \int_0^T |\xi(t,\omega) - \xi^n(t,\omega)| \, d\langle X \rangle_t \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$

aí defini-se integral estocástica.