Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Equações de Kolmogorov

Tempos de parada

Uma va $T \geq 0$ é dita um *tempo de parada* para (X_t) se o evento $\{T \leq t\}$ depender apenas de $(X_s)_{s \leq t}$ para todo t

Teorema 1 (Ppdde Forte de Markov)

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$ e T um t.p. p/(X_t).

Então, dados $\{T < \infty\}$ e $\{X_T = x\}$,

$(X_{T+t})_{t \geq 0} \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q})$, indep de $(X_s)_{s \leq T}$.

Eqs Kolmogorov (cont)

Teorema 2

Seja (X_t) um processo de saltos cont à dir em $\mathcal{S}$ *finito*. Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz em $\mathcal{S}$ com matriz de trans $\mathbf{\Pi}$. São equivalentes:

(a) Dado que $X_0 = x$, a cadeia de saltos (Y_n) é uma CM$(\delta_x, \mathbf{\Pi})$, e p/$n \geq 1$, dados $Y_0, \dots, Y_{n-1}$, os tempos entre saltos $T_1, \dots, T_n$ são va's exps indep c/txs $q_{Y_0}, \dots, q_{Y_{n-1}}$, resp.

(b) Para $t, h > 0$, dado $X_t = x$, X_{t+h} é indep de $(X_s)_{s \leq t}$ e qdo $h \downarrow 0$, unif/e em t

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = y \,|\, X_t = x) = \delta_{xy} + q_{xy} h + o(h);$$

(c) Dados $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ e $x_0, \dots < x_{n+1} \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

onde $\{\mathbf{P} = (P_{xy}(t);\, x, y \in \mathcal{S}),\ t \geq 0\}$ é a slç da eq avançada

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}.$$

Dem. Teo 2

$$(\text{a} \Rightarrow \text{b}) \quad \mathbb{P}_x(X_h = x) \overset{(1)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 > h) = e^{-q_x h} = 1 + q_{xx} + o(h)$$

e para $y \neq x$

$$\mathbb{P}_x(X_h = y) \overset{(2)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 <, Y_1 = y, T_2 > h) = (1 - e^{-q_x h})\pi_{xy} e^{-q_y h}$$
$$= q_{xy} + o(h)$$

Logo,

$$1 = \sum_y \mathbb{P}_x(X_h = y) \overset{(3)}{\geq} \overbrace{\sum_y \delta_{xy}}^{1} + \Big(\overbrace{\sum_y q_{xy}}^{0} \Big) h + o(h) = 1 + o(h),$$

e podemos concluir que as $\geq$'s em (1) e (2) são $=$'s.

(b $\Rightarrow$ c) Façamos $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$. Dados $x, y \in \mathcal{S}$ e $t, h > 0$:

$$P_{xy}(t+h) = \sum_z \mathbb{P}_x(X_t = z)\mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = z)$$
$$= \sum_z P_{xz}(t)(\delta_{xy} + q_{zy} h + o(h))$$

(b $\Rightarrow$ c) (cont)

Logo,

$$\frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = \sum_z P_{xz}(t) q_{zy} + \frac{o(h)}{h};$$

segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{xy}.$$

Podemos repetir o argumento com $P_{xy}(t)$ e $P_{xy}(t-h)$, e obter

$$P'_{xy}(t) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{xy}.$$

(c $\Rightarrow$ a) Como no caso do PP.

$\square$

Obs. 1) Como $\mathcal{S}$ é finito, como já vimos, podemos substituir a eq avançada pela atrasada

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \;\; \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

(já que ambas eqs têm uma única e mesma slç).

Obs. (cont)

2) Note que (b) pode ser escrita de forma matricial. Seja

$$\mathbf{P}(s,t) = (P_{xy}(t-s))_{x,y\in\mathcal{S}}.$$

Então, (b) equivale a

$$\mathbf{P}(t,t+h) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}h + \mathbf{o}(h).$$

Logo, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0,t) &= \mathbf{P}\left(0,\tfrac{t}{n}\right)\mathbf{P}\left(\tfrac{t}{n},\tfrac{2t}{n}\right)\cdots\mathbf{P}\left(\tfrac{(n-1)t}{n},t\right)\\ &\simeq \left[\mathbf{I} + \mathbf{Q}\tfrac{t}{n} + \mathbf{o}\left(\tfrac{t}{n}\right)\right) \to e^{t\mathbf{Q}}\end{aligned}$$

qdo $n \to \infty$.

$\mathcal{S}$ infinito

Vamos escrever as eqs de Kolmogorov.

Eqs avançadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}(t)q_{zy},\ x, y \in \mathcal{S},\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

Eqs atrasadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t),\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z\in\mathcal{S}} q_{xz}P_{zy}(t),\ x, y \in \mathcal{S},\ P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

Teorema 3

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz. Então a eq atrasada tem uma slç mínima não negativa $\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$. Esta slç tem a ppdde de semigrupo:

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s+t), \; s, t \geq 0.$$

Obs. Se $\mathcal{S}$ for finito, então pelo Teo 2 do cj de slides inicial sobre CMTC, temos que $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$, que pelo mesmo resultado é a única slç de ambas eqs de Kolmogorov.

Teorema 4

Seja (X_t) um processo mínimo cont à dir em $\mathcal{S}$ *. Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz em $\mathcal{S}$ com matriz desaltos $\mathbf{\Pi}$ e semigrupo $\mathbf{P}(t)$ dado acima. São equivalentes:

(a) Dado $X_0 = x$, a cadeia de saltos $(Y_n) \sim \mathrm{CM}(\delta_x, \mathbf{\Pi})$, e dados $n \geq 1$ e $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$, os tempos de visita sucessivos $T_1, \ldots, T_n$ são va's exps indep c/txs $q_{Y_0}, \ldots, q_{Y_{n-1}}$, resp.

(b) Dados $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots < x_{n+1} \in \mathcal{S}$:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Nestas conds, chamaremos (X_t) de *PMS com gerador (ou gerado por)* $\mathbf{Q}$. Not: $(X_t) \sim \mathrm{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$

*Vide Slide 15 do cj de slides inicial sobre CMTC.

Dem. Teos 3 e 4

Seja (X_t) o PMS mínimo associado a $\mathbf{Q}$ construído nos slides da aula sobre PMS (vide Slide 4 daquele cj de slides), e seja $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$, $\mathbf{P}(t) = (P_{xy}(t))_{x,y\in\mathcal{S}}$.

1) Vamos mostrar que $\mathbf{P}$ satisfaz a eq atrasada. P$/x, y \in \mathcal{S}$, dado T_1:

$$
\begin{aligned}
P_{xy}(t) &= \mathbb{P}_x(X_t = y|\,T_1 > t)e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, q_x e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} \pi_{xz} P_{zy}(t-s) \\
&= \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} q_{xz} P_{zy}(t-s) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
P_{xy}(t)e^{q_x t} = \delta_{xy} + \int_0^t ds \sum_{z\neq x} q_{xz}\, e^{q_x s} P_{zy}(s), \qquad (2)
$$

o que mostra que $P_{xy}(t)$ é contínua e diferenciável (pois a série no integrando é uni/e conv e logo uma fç cont).

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

Diferenciando (2) nos dois lados:

$$q_x e^{q_x t}\, \mathbb{P}_{xy}(t) + e^{q_x t}\, \mathbb{P}'_{xy}(t) = \textstyle\sum_{z\neq x} q_{xz}\, e^{q_x t} P_{zy}(t),$$

e logo, cancelando $e^{q_x t}$ nos dois lados, e como $q_x = -q_{xx}$:

$$\mathbb{P}'_{xy}(t) = \textstyle\sum_z q_{xz}\, P_{zy}(t) \tag{3}$$

2) O mesmo argumento para provar (1) (condiciona/o em T_1 e o destino do 1o salto, usando a ppdde de Markov e homog temporal) tb prova que, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_{n+1}) = \delta_{xy}\, e^{-q_x t} & \\ + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z\neq x} q_{xz} \mathbb{P}_z(X_{t-s} = y, t-s < S_n). & \quad (4)\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ satisfaz a eq atrasada (na forma diferencial), então tb a satisfaz na forma integral (para ver isto, basta percorrer os passos de (1) a (3) acima em reverso.)

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

$$\tilde{P}_{xy}(t) = \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds\, e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} \tilde{P}_{zy}(t-s). \qquad (5)$$

Se $\tilde{P}_{xy}(t) \geq 0$, então

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_0) = 0 \leq \tilde{P}_{xy}(t) \ \forall\ x, y \in \mathcal{S}. \qquad (6)$$

Subst (6) em (4) e usando (5) recursiva/e, obtemos

$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_n) \leq \tilde{P}_{xy}(t)\ \forall\ n$, e tomando limite qdo $n \to \infty$:

$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_n) \leq \tilde{P}_{xy}(t)$ $\square_{\text{minimali//}}$

3) A ppdde de semigrupo segue da ppdde de Markov:

$$P_{xy}(s+t) = \sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z)\mathbb{P}_x(X_{s+t} = y | X_s = z)$$
$$= \sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z)\mathbb{P}_z(X_t = y) \qquad \square_{\text{Teo 3}}$$

Dem. Teos 3 e 4 (cont)

4) Supondo que (X_t) satisfaz (a), como fs=zemos até agora, e usando a PM:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

e (b) está satisfeita, então um argumento como aquele utilizado para o PP implica em (a). $\square_{\text{Teo 4}}$

Obs. Qdo **Q** for não explosiva, então temos unicidade das slçs probabilísticas das eqs atrasadas.

Exemplo de processo não mínimo: PN explosivo voltando à origem (c/prob 1) em ζ.

Teorema 5

A slç mínima não negativa da eq atrasada coincide com a slç mínima não negativa da eq avançada.

Dem. Livro