Espaços Métricos.

Aula 02, 07 de janeiro de 2019.

Revisão Aula 01.

Conjunto $M \neq \emptyset$

$d: M \times M \to \mathbb{R}$

i) $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$

Sempre que $x \neq y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in M$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in M$.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto d(x,y) = |x-y|$$

* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Soma: Dados $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Para cada $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_3(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Todos são métricas em $\mathbb{R}^n$

a) Se $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Então,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

. $n=2$

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

Tome para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2) =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Defina $A = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Vemos que

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

. Em particular, se $A > 0$, tome $\lambda = -\frac{B}{A}$, e assim

$$A\left(-\frac{B}{A}\right)^2 + 2B\left(-\frac{B}{A}\right) + C \geq 0 \iff$$

$$\frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C \geq 0 \iff$$

$$-\frac{B^2}{A} + C \geq 0 \iff C \geq \frac{B^2}{A} \iff AC \geq B^2.$$

No caso $A = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \Rightarrow y_i = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Para $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$, temos que provar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

Para $i=1,\dots,n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2}$$

Provemos primeiro

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

D. de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right]^2 \quad \blacksquare$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\underbrace{(x_i-z_i)}_{a_i} + \underbrace{(z_i-y_i)}_{b_i})^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i-y_i)^2\right).$$

c) $d_3(x,x)=0$

i) $x_i=y_i \Rightarrow x_i-y_i=0 \ \forall i=1,\dots,n$ Daí, $\max_{1\leq i\leq n} |x_i-y_i|=0$

Se $\vec{x}\neq\vec{y}$, $x_{i_0}\neq y_{i_0}$ para algum $1\leq i_0\leq n$

$\max_{1\leq i\leq n} |x_i-y_i| = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}$ $\Rightarrow d_3(\vec{x},\vec{y})\neq 0.$

o valor máximo está no conjunto.

Caso contrário, num conjunto infinito, seria o sup.

Seja $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n$. Temos que

$$d_3(\vec{x},\vec{y}) \leq d_3(\vec{x},\vec{z}) + d_3(\vec{z},\vec{y})$$

Para cada $i=1,\dots,n$

$$|x_i-y_i| \leq |x_i-z_i| + |z_i-y_i|$$

$$\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}$$

$$A=\{|x_1-z_1|+|z_1-y_1|,\dots,|x_n-z_n|+|z_n-y_n|\}$$

$|x_i - y_i| \leq \max A, \ \forall i = 1, \dots, n$

$d_3(\vec{x}, \vec{y}) \leq \max A$

$B = \{|x_1 - z_1|, \dots, |x_n - z_n|\}$

$C = \{|z_1 - y_1|, \dots, |z_n - y_n|\}$

Observe

$A \subset B + C$

$d_3(\vec{x}, \vec{y}) \leq \max(B + C) = \max B + \max C = d_3(\vec{x}, \vec{z}) + d_3(\vec{z}, \vec{y})$

Exemplo. Seja M um cjto $\neq \emptyset$ qualquer. Defina a função

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e seja d uma métrica sobre M. Então,

i) $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

ii) $d_2 : M \times M \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

São métricas sobre M.

Tome a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad x \geq 0$$

É claro que f é estritamente crescente. (f é crescente $\Leftrightarrow x < y, \ x, y \in D_f, \ f(x) < f(y)$)

$x + xy < y + xy$

$x(1 + y) < y(1 + x) \Rightarrow \dfrac{x}{1 + x} < \dfrac{y}{1 + y}$

Seja $x, y, z \in M$

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$

Assim,

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leqslant \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leqslant \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

Logo,

$$d_1(x,y) \leqslant d_1(x,z) + d_1(z,y) \qquad \square$$

(M,d), $M \neq \emptyset$ um conjunto e d uma métrica sobre M.

↳ Espaço Métrico

$(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_3)$ Espaços métricos

$(M,d) \to (M,d_1)$, (M,d_2)

Seja V um espaço vetorial real

Uma função $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ é uma norma sobre V se satisfaz

i) $\|x\| \neq 0$ sempre que $x \neq 0$ $(\forall x \in V)$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $x \in V$

iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$

$\Rightarrow$ $\|0\| = 0$, $\|-x\| = \|x\|$, $\|x\| \geqslant 0$

$V = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)$$

$$\|\vec{x}_3\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$d: V \times V \to \mathbb{R}$

$d(x,y) = \|x-y\|$

- $d(x,x) = \|x-y\| = \|0\| = 0$
- $d(x,y) = \|x-y\|$, $x \neq y$ $\quad d(x,y) = \|y-x\| = d(y,x)$. $d(x,y)$

. $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$.

Seja X um cjto qualquer diferente do $\emptyset$. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ diz-se limitada se existe $c>0$ tal que

$$|f(x)| \leq c \,, \ \forall x \in X$$

$\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ o conjunto de todos as funções limitadas.

Sejam $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$.

Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in X$.

multiplicação:

Por escalar. $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in X$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Defino $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

• Se $\underset{\text{não identicamente nula}}{f \neq 0}$, então $\exists x \in X$ t.q. $f(x) \neq 0$. Assim, $\overset{\|f\|}{\overset{\shortparallel}{\sup_{x \in X}}} \|f(x)\| > 0$.

• Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in X} |(\lambda f)(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|$$

(M,d), $M \neq \emptyset$ é um conjunto $d: M \times M \to \mathbb{R}$ é uma métrica em M.

* $(\mathbb{R}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$
* $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$
* Espaços Normados

$(V, \| \|)$

V é um espaço vetorial

$\|\cdot\| \; V \to \mathbb{R}$ é uma norma em V

$d(x,y) = \|x-y\|$, $x, y \in V$

* Seja (M, d) um espaço métrico e seja $S \subseteq M$, $S \neq \emptyset$.

$d: M \times M \to \mathbb{R}$

fornecer uma métrica sobre S, da seguinte forma

$$d|_{S \times S}(x,y) = d(x,y), \; \forall x, y \in S$$

* $\mathbb{R}$ com métrica usual $(0,1)$ é um espaço métrico com a métrica induzida por M

* $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $A = (0,1) \cup \{1\}$

$(S, d|_{S \times S})$ é um subespaço de (M, d).

$\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é o espaço das funções limitados em X.

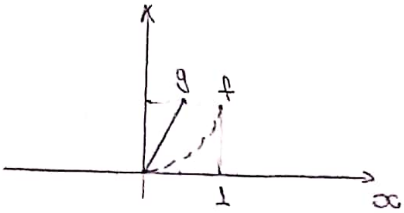
* $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Se $X=[0,1]$, $f:[0,1]\to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)=x^2$$

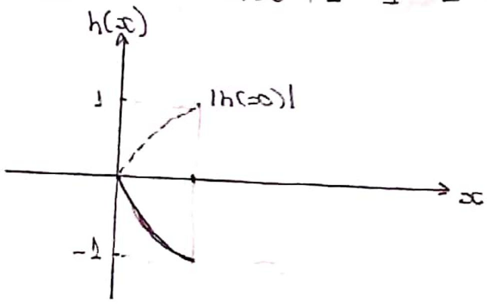
$$g:[0,1]\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=2x$$



$$|f(x)-g(x)| = |x^2-2x|$$

Defina

$$h(x)=x^2-2x = x^2-2x+1-1 = (x-1)^2-1 \quad , x\in[0,1]$$



Daí,

$$\sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| = 1 = d(f,g)$$

* Sejam $(M_1,d_1),\dots,(M_n,d_n)$ espaços métricos.

Defina $M=M_1\times\dots\times M_n$

$$d_1: M\to\mathbb{R}$$
$$d_1((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n}[d_i(x_i,y_i)]^2\right)^{1/2}$$

$$d_2 . M\to\mathbb{R}$$
$$d_2((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$$

$$d_3((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)$$

(M,d_1), (M,d_2), (M,d_3) são espaços métricos.

* Espaços Vetoriais com produto interno.

Seja E um espaço vetorial real. Uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisfaz

i) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle \neq 0$

é um produto interno em E.

O par $(E, \langle , \rangle)$ é o que chamamos de espaço com produto interno.

* $E = \mathbb{R}^n$ $\quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$L^2((0,1); \mathbb{R})$ (provar que é espaço vetorial)

conjunto de funções

$f . (0,1) \to \mathbb{R}$ Tais que $|f|^2$ é integrável

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < +\infty$$

$$\langle , \rangle : L^2((0,1); \mathbb{R}) \times L^2((0,1); \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

$\| \; \| : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

• Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para todo $x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

$E = \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\|_1 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\left|\sum x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Vejamos que $\| \ \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ define uma norma sobre E.

i) $x \in E$, $x \neq 0$

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \neq 0$$

ii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \langle x, \lambda x \rangle)^{1/2} = (\lambda \langle \lambda x, x \rangle)^{1/2} = (\lambda^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} =$$

$$= |\lambda| (\langle x, x \rangle)^{1/2} = |\lambda| \|x\|$$

iii) Sejam $x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle =$$

$$= \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

. $\langle x, y \rangle \leqslant |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\| \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \#$$

Bolas

Seja (M, d) um espaço métrico. Sejam $a \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$

* $B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$ é uma bola aberta de centro a e raio r.

* $B[a;r] = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}$ é uma bola fechada de centro a e raio r.
* $S(a,r) = \{x \in M : d(x,a) = r\}$: esfera de centro a e raio r.

Exemplos.

1. $\mathbb{R}$ com métrica usual

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} =$$

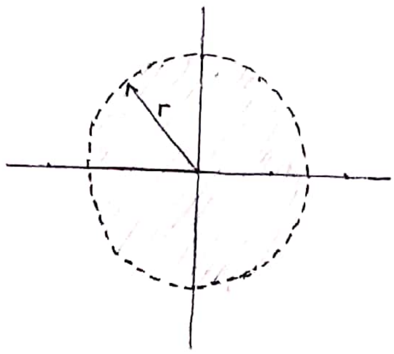
$$= (a-r, a+r)$$

$$B[a,r] = [a-r, a+r]$$

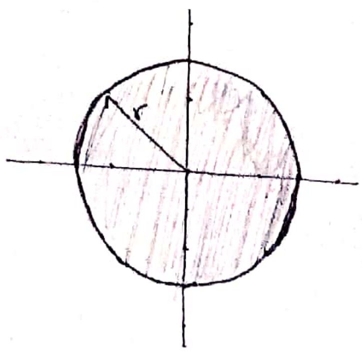
$$S(a,r) = \{a-r, a+r\}$$

2. $(\mathbb{R}^2, d_1)$: $d_1((x,y),(z,w)) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$

$$B(0;r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$$



$$B[0;r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$



$S(\hat{0}, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = r^2\}$ (circunferência de centro $(0,0)$ e raio r)

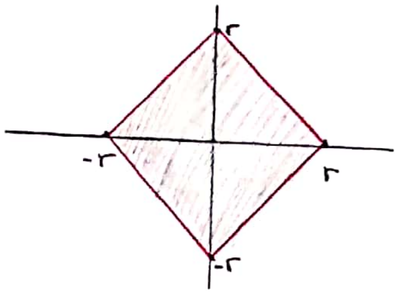
3. $(\mathbb{R}^2; d_2)$: $d_2((x,y),(z,w)) = |x-z| + |y-w|$

$B[\hat{0}; r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq r\}$

—— $|x| + |y| = r$

Se $x \geq 0, y \geq 0$, Se $x \geq 0$, $y \leq 0$, Se $x \leq 0, y \geq 0$, Se $x \leq 0, y \leq 0$

$x+y = r$; $y = r - x$, $x - y = r$, $y - x = r$, $x+y = -r$



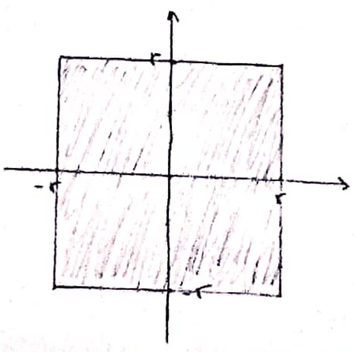
$S(0; r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = r\}$

$B(\hat{0}; r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < r\}$.

4. $(\mathbb{R}^2; d_3)$

$d_3((x,y),(z,w)) = \max\{|x-z|, |y-w|\}$

$B[\hat{0}; r] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq r\}$



$|y| = r$, $|x| \leq r$

$|x| = r$, $|y| \leq r$

Seja (M,d) um espaço métrico com

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

"Métrica zero-um"

Seja $r > 1$, $a \in M$

$$B(a;r) = \{x \in M : d(x,a) < r\} = M$$

$$B[a;r] = \{x \in M : d(x,a) \leq r\} = M$$

$$S(a;r) = \{x \in M : d(x,a) = r\} = \emptyset$$

Se $r < 1$ $(r > 0)$

$$B(a;r) = \{a\}$$

$$B[a;r] = \{a\}$$

$$S(a;r) = \emptyset$$

Se $r = 1$

$$B(a,1) = \{a\}$$

$$B[a;1] = M$$

$$S(a;1) = M \setminus \{a\}$$

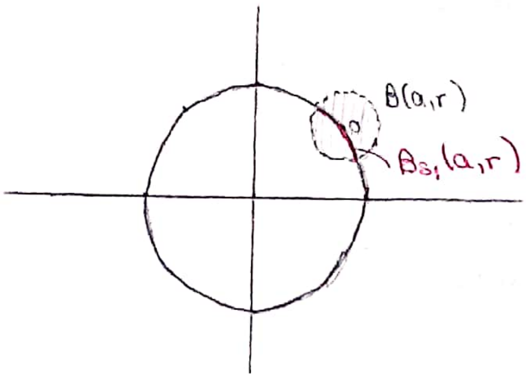
Seja (M,d) um espaço métrico e tome $\emptyset \neq S \subseteq M$.

Uma bola $B_S(a;r)$ em S de centro $a \in S$ e raio $r > 0$ se define:

$$B_S(a;r) = B(a;r) \cap S$$

Exemplo: $(\mathbb{R}^2, d_1)$

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$



Monitoria: 241 A (Segunda e Quinta às 14.00 hs)

$\mathbb{R}$ com métrica usual $S = (0,1)$

$$B_S(1/2; 2) = B(1/2; 2) \cap (0,1) = (0,1)$$

$$B_S(0.9; 0.2) = B(0.9; 0.2) \cap (0,1) = (0.7, 1)$$

Espaços Métricos, Aula 04

09/03/14

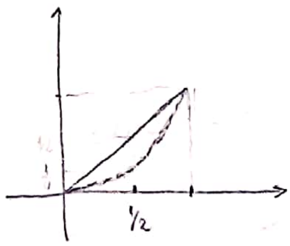
*

$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$

$g(x) = x^2$

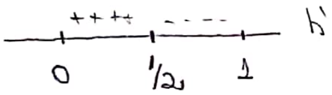
$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$



$$= \sup_{x \in X} |x - x^2| = \frac{1}{4}$$

$h(x) = x - x^2 \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$

$h'(x) = 1 - 2x = 0$ se $x = 1/2$



$x = 1/2$ a função h atinge o máximo. $h(1/2) = 1/2 - 1/4 = 1/4$.

Bolas e Esferas

Para estudar em casa

- Exemplo 12 - página 9, $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$

Sejam $(M, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Considere o espaço (M,d)

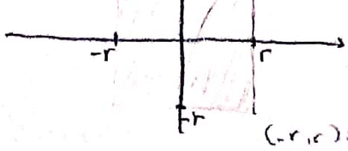
$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

$d : M \times M \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, \ldots, y_n)$

no caso $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^2$



$(-r,r) \times (-r,r)$

$B_m(a;r) = B_{m_1}(a_1;r) \times \dots \times B_{m_n}(a_n;r)$

$a = (a_1, \dots, a_n)$ com $a_i \in M_i$

$d_i(a_i, y_i) < r, \forall i = 1, \dots, n$

$B_i(a_i, r)$

$(x_1, \dots, x_n) \in B_m(a;r)$

$d_i(a_i, x_i) \leq \max_{1 \leq i \leq n} d(a_i, x_i) < r \quad \forall i = 1, \dots, n$

Então $x_i \in B_{m_i}(a_i, x), i = 1, \dots, n$

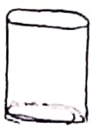
Isto é, $(x_1, \dots, x_n) \in B_{m_1}(a_1, x) \times \dots \times B_{m_n}(a_n, x)$

$(\mathbb{R}^3, d)$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i - y_i|$

Uma bola com centro em (a_1, a_2, a_3) e raio r.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ com métrica euclidiana



$x', y' \in \mathbb{R}^2$

$x' = (x_1', x_2')$

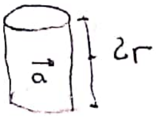
$y' = (y_1', y_2')$

$d_1(x', y') = \sqrt{(x_1' - y_1')^2 + (x_2' - y_2')^2}$

$a, b \in \mathbb{R}$, $d(a, b) = |b - a|$

$\mathbb{R}^3$ com a métrica

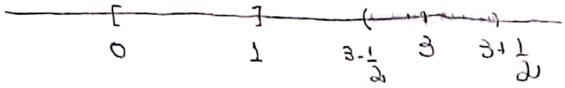
$\max\{d_1(x', y'), |b - a|\} = d\{(x', a), (y', b)\}$



Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $a \in M$ é isolado se ele é uma bola aberta. Isto é, se $B(a;r) = \{a\}$ para algum $r > 0$.

Exemplo: $M = [0,1] \cup \{3\}$ a métrica induzida por a métrica usual em $\mathbb{R}$.

Considere a bola $B_M(3;1/2) = B_{\mathbb{R}}(3;1/2) \cap M = \{3\}$



Exemplo: $\mathbb{Z} = \{\dots,-1,-2,0,1,2,\dots\}$ a métrica induzida da métrica em $\mathbb{R}$.

Se considera $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$

Espaço Métrico Discreto

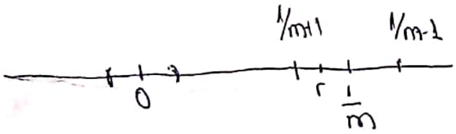
$B(n;r) = \{n\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

Considere $M = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$

. zero não é um ponto isolado

Seja $r > 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{r} < n$. Logo, $\frac{1}{n} < r$, que significa $\frac{1}{n} \in B(0,r)$.



Seja $\frac{1}{m} \in M$. Tome $0 < r < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{m+1-m}{m(m+1)} = \frac{1}{m(m+1)}$

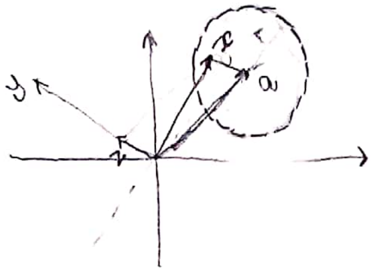
Logo, $B(1/m, r) = \{1/m\}$

Isto significa que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{n}$ é um pto isolado de M.

Seja $(E, \|\,\|)$ um espaço vetorial normado.

E não tem pontos isolados.

De fato, tomo $a \in E$ e $r > 0$



$y \neq 0$ em E e tome $z = \frac{r}{2\|y\|} y \neq 0$

Vemos que

$$\|z\| = \frac{r}{2\|y\|} \|y\| = \frac{r}{2}$$

Logo,

$$\|z\| < r$$

Agora, observe que $x = a + z \in B(a; r)$, pois

$$d\|a - x\| = \|z\| < r$$

- Conjuntos Abertos (Ex. pg 22, 23, 24, Seção 1 (11 problemas), Seção 2 (11 prob.))

↳ Cap. 2, pg 63.

Definição 1) Seja (M, d) um espaço métrico e seja $X \subset M \neq \emptyset$. Dizemos que um ponto $a \in M$ é interior a X se existe $r > 0$ tal que

$$B(a; r) \subset X$$

Definição 2 Dizemos que $a \in M$ é ponto de fronteira de X se para cada $r > 0$,

$$B(a; r) \cap X \neq \emptyset \quad e \quad B(a, r) \cap (M - X) \neq \emptyset$$

<u>Notação</u>: $\dot{X} = \text{int } X = \{$todos os pontos interiores a $X\}$

$\partial X = \{$todos os pontos fronteiras de $X\}$

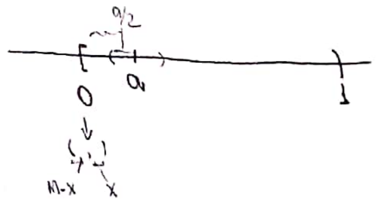
• $M = \mathbb{R}$ com métrica usual.

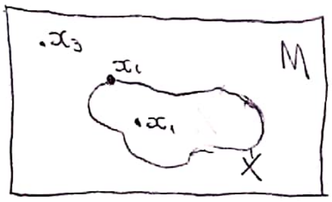
Seja $X = [0,1)$. Então

$$\text{int } X = (0,1)$$

$$\partial X = \{0, 1\}$$

não pertence à X.





Dado $X \subset M$ diferente de $\emptyset$

$$M = (\text{int } X) \cup (\text{int}(M - X)) \cup \partial X$$

$\mathbb{Q}$ <u>números racionais</u>, $\mathbb{R}$ como espaço métrico.

$r \in \mathbb{Q}$, será $r \in \text{int } \mathbb{Q}$?

R. Não

Todo intervalo

$$(r - p, r + p)$$

Contém números irracionais.

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

$$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$$

Definição. Se $X \subset M$, dizemos que X é aberto $\Leftrightarrow \text{int } X = X$

<u>Proposição</u>. Toda bola aberta num espaço métrico M é um conjunto aberto.

<u>Demonstração</u>. ~~Seja~~ Considere a bola aberta $B(a,r)$ em M, de centro a e raio r.

Seja $x \in B(a;r)$

Considere, $s = r - d(a,x)$

Então $B(x;s) \subset B(a,r)$

$y \in B(x;s) \Rightarrow d(x,y) < s$

pela desigualdade do triângulo

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s$$

$$d(a;y) < d(a,x) + r - d(a,x) = r$$

O que significa que $y \in B(a;r)$.

Espaços Métricos, Aula 05 10/01/14

Na última aula:

- Ponto interior à um subconjunto X
- $\text{int } X = X \Leftrightarrow X$ é aberto
- Toda bola aberta num espaço métrico é um cjto aberto

—''—

• Corolário: Para cada $X \subset M$, $\text{int} X$ é um cjto aberto.

Demonstração: Seja $a \in \text{int} X$. Logo, existe $r > 0$ tal que

$$B(a,r) \subset X$$

como $B(a;r)$ é um cjto aberto, existe para cada $x \in B(a;r)$, $s_x > 0$ tal que $B(x,s) \subset B(a,r) \subset X$, então

$$B(a,r) \subset \text{int} X$$

• Se $A \subset B$, A, B subconjuntos de um espaço métrico M. Então $\text{int} A \subset \text{int} B$

se $x \in \text{int} A$, $\exists r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset A \subset B$. Daí, $x \in \text{int} B$.

• O maior cjto aberto contido em $X \subset M$ é o $\text{int} X$.

Seja $A \subset X$ aberto, então $A = \text{int} A \subset \text{int} X$

• Um ponto $a \in M$, pode ser um cjto aberto?

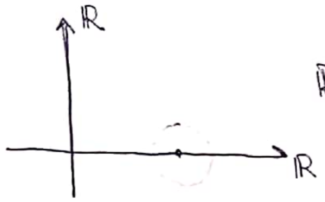
Se a é um ponto isolado de M, então $\{a\}$ é um aberto.

Como a é isolado, $\exists r > 0$ t.q

$$B(a,r) = \{a\}$$

• Se (M,d) é um espaço métrico, então M é um conjunto aberto.

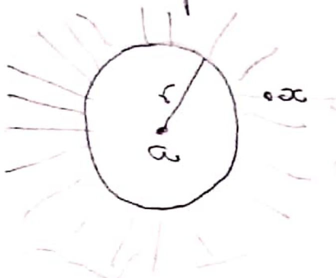
• $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. O cjto $[0,1)$ não é aberto em $\mathbb{R}$, 11 mas $[0,1)$ é aberto em $[0,1)$



$\mathbb{R}$ não é aberto em $\mathbb{R}^2$

• Em um espaço métrico M o complementar de uma bola fechada é um conjunto aberto em M.

Com efeito, tome $B[a;r]$, $r>0$, $a\in M$ e defina $A = M - B[a;r]$



Seja $x \in A$, então $d(a,x)>r$, tome $s = d(a,x)-r>0$.

Afirmamos que $B(x;s)\cap B[a;r]=\emptyset$. Com efeito, se $c\in B(x;s)\cap B[a;r]$, então $d(x,c)<s$ e $d(a,c)\leq r$

Pela des. do triângulo

$$d(a,x)\leq d(a,c)+d(c,x)$$
$$< s+r$$

Por conseguinte,

$s = d(a,x)-r<s$ (Contradição!). ($A,B\subset X$, $A\cap B=\emptyset$, então $A\subset (X-B)$). Decorre que $B(x,s)\subset A$.

Exemplo: Tome $M=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Com a métrica induzida pela de $\mathbb{R}$.

$$B_m[0,1] = B_m(0,1)$$

Exercício. Num espaço vetorial normado nunca uma bola fechada é uma bola aberta.

.Proposição: Seja (M,d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{U}$ a coleção de todos os subconjuntos abertos em M. Então

(i) $M\in\mathcal{U}$, $\emptyset\in\mathcal{U}$

(ii) Se $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{U}$, então $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\in\mathcal{U}$.

(iii) se $\{B_i\}_{i\in I}$ uma família em $\mathcal{U}$, então $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{U}$.

Dem.:

(i) fácil

(ii) Seja $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Então

$x \in A_i$, $1 \leq i \leq n$. Como A_i, $1\leq i \leq n$, é aberto, existem $r_i > 0$, $1 \leq i \leq n$; t.q.:

$B(x, r_i) \subset A_i$, $1 \leq i \leq n$, $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Por conseguinte,

$B(x,r) \subset B(x, r_i) \subset A$, $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

(iii) Seja $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$, então $\exists\, i_0 \in I$ t.q:

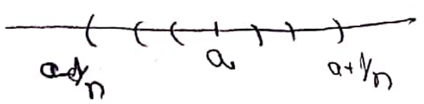
$$x \in B_{i_0}$$

Como $B_{i_0} \in \mathcal{U}$, $\exists\, r > 0$ t.q.

$B(x,r) \subset B_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} B_i$, o q. significa que $\bigcup_{i\in I} B_i$ é aberto.

- Afirmamos que

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} B(a; 1/n) \subseteq \mathbb{R}$$



$x \neq a$, então $d(x,a) > 0$. Logo, $\nexists\, n_0 \in \mathbb{Z}^+$, t.q.

$$d(x,a) > \frac{1}{n} \quad (*)$$

Isto é, $x \notin B(a, 1/n)$. Se $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} B(a, 1/n)$, $x \neq a$, então $(*)$ leva à uma contradição.

- Seja (M, d) um espaço métrico e seja (X, d_X) um subespaço métrico de (M,d), onde d_X é a métrica induzida pela de M.

$A \subset X$ é aberto em $X \Leftrightarrow \exists\, B$ aberto em M t.q. $A = B \cap X$.

Dem.

($\Rightarrow$) $A = \bigcup_{i \in I} B_x^i = \bigcup_{i \in I} (B_M^i \cap X)$

$$B \stackrel{*}{=} \left(\bigcup_{i \in I} B_M^i\right) \cap X$$

tome $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ é aberto em M e $A = B \cap X$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in A = B \cap X$, logo $x \in B$. Como B é aberto em M, temos que $\exists r > 0$ t.q.

$$B(x; r) \subset B$$

Ora,

$$B_X(x; r) = B(x; r) \cap X \subset B \cap X = A$$

$\therefore A$ é aberto em X.

* A é um aberto em M
para cada $x \in A$
$\{x\} \in B(x, r_x) \subset A$
$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup B(x, r_x) \subset A$
$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B(x; r_x)$

Exemplo. $M = \mathbb{R}$, $X = [0, 1)$ com métrica induzida de $\mathbb{R}$.

$(-1/2, 1/2) \cap X = [0, 1/2)$ é aberto em X.

$X \subset M$

se X é aberto em M

$A = B \cap M \subset X$ é aberto em M e também aberto em X.

- Espaços métricos
- métrica
- Bola aberta
- Bola aberta é um conjunto aberto
- Num espaço métrico existe uma <u>topologia</u> induzida pela métrica $\mathcal{U}$ coleção de abertos

- $\emptyset, M \in \mathcal{U}$
- Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$

  $\Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{U}$
- Se $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{U}$

  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$

- Todo conjunto aberto é união de bolas abertas.

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um conjunto $V \subset M$ é uma vizinhança para um ponto $a \in M$ se a é interior a V. $(a \in \text{int } V)$

Exemplo: $M = \mathbb{R}$, d = métrica usual. $V = [0,2]$ é uma vizinhança para qualquer $x \in (0,2)$.

- A intersecção de um número finito de vizinhanças para x é de novo uma vizinhança para x.

$V_1, \dots, V_n$ vizinhanças para x. Existem $r_1, \dots, r_n > 0$

$B(x; r_i) \subset V_i$, $i = 1, \dots, n$

é um cjto aberto

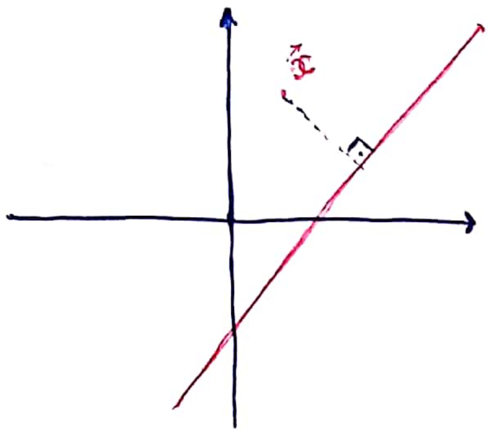
$x \in \bigcap B(x; r_i)$

Logo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} B(x; r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

• Se V é uma vizinhança para x e $W \supset V$, então W é uma vizinhança para x.

$M = \mathbb{R}^2$, $d_2((x,y),(z,w)) = \sqrt{|x-z|^2 + |y-w|^2}$



Definição: Seja (M,d) um espaço métrico.

Dado $y \in M$ e $X \subset M$, definimos a distância de y a X por

$$dis(y;X) = \inf\{d(y;x) : x \in X\}$$

Conjuntos Fechados

Definição: Seja (M,d) um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ diz-se ponto aderente a um conjunto $X \subset M$ se

$$dis(a, X) = 0$$

* Dado $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que

$$d(a,x) < \varepsilon$$

• para cada $\varepsilon > 0$, $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$

* $M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M-X)$

Afirmamos

$\overline{X} = \text{int}X \cup \partial X$ $\qquad$ $\overline{X}$ é um fecho de X

$\downarrow$

conjunto de todos os pontos aderentes à X

- Se $x \in X$, então $dis(x, X) = 0$.

$(B(a;\varepsilon) - \{a\}) \cap X \neq \emptyset \Rightarrow a$ é plo de acumulação $\underset{-\varepsilon}{(}\ ((;))\ \underset{\varepsilon}{)}$

- $x \in \overline{X} \Leftrightarrow$ toda vizinhança de x intersecta a X.

($\Rightarrow$) Suponha que $x \in \overline{X}$. Seja V uma vizinhança para x qualquer. Logo existe $r > 0$ tal que

$$X \cap B(x;r) \subset V \cap X$$

Como $x \in \overline{X}$, então

$$B(x;r) \cap X \neq \emptyset$$

Portanto

$$\emptyset \neq X \cap B(x;r) \subset V \cap X \neq \emptyset.$$

($\Leftarrow$)

Seja $\varepsilon > 0$ e considere $B(x,\varepsilon)$ a bola aberta de centro x e raio ε. da definição de vizinhança $B(x;\varepsilon)$ é uma vizinhança para x, portanto da hipótese

$$B(x;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

o que significa que $x \in \overline{X}$.

• $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (Por contradição...) , $\overline{M} = M$

• Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$

• Para cada $X \subset M$, $X \subset \overline{X}$

$x \in X$, $B(x;r) \cap X \neq \emptyset$

$x \in \overline{A}$, então $\forall r > 0$ $B(x;r) \cap A \neq \emptyset$

mas

$$A \subset B \Rightarrow \underbrace{A \cap B(x,r)}_{\neq \emptyset} \subset B \cap B(x,r)$$

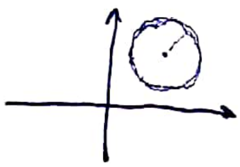
logo

$$B \cap B(x;r) \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \Rightarrow x \in \overline{B}.$$

$\therefore \overline{A} \subset \overline{B}$.

Exemplo. Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço normado. Temos se $X = B(a;r)$, $a \in E$, $r > 0$, então

$$b \in B[a,r] \Rightarrow dis(b, X) = 0$$



Suponha que $b \in B[a;r]$. Pode acontecer

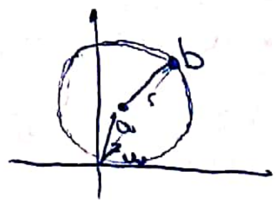
$$\|b-a\| < r \quad \text{ou} \quad \|b-a\| = r$$

. Se $\|b-a\| < r$, $b \in X$ então $dis(b,X) = 0$.

. Se $\|b-a\| = r$, para $\varepsilon > 0$, podemos tomar $t \in \mathbb{R}$,

$$r - \varepsilon < t < r$$

e considere $\quad u = \dfrac{b-a}{r} \quad$ e $x = a + tu$.



$$d(a,x) = \|a-x\| = \|tu\| = t < r$$

significa que $x \in X$.

$$d(b,x) = \|b-x\| = \|b-(a+tu)\| = \|(b-a) - tu\| = \left\| r\frac{(b-a)}{r} - tu \right\| = \|ru - tu\| =$$
$$= \|(r-t)u\| = |r-t| \, \|u\| = |r-t|$$

Mas $r-\varepsilon < t < r \Rightarrow -\varepsilon < t-r < 0 \Rightarrow 0 < r-t < \varepsilon$.

Daí,

$|r-t| = r-t < \varepsilon$.

Resumo. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $x \in X$ tal que

$$\inf_{y \in X} d(b,y) \leq d(b,x) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$dis(b,X) < \varepsilon + 0$$

então $dis(b,X) = 0$.

Seja (M,d) um espaço métrico,

$$\overline{B(a;r)} \stackrel{?}{=} B[a,r] \quad (\text{falso. Contra-exemplo})$$

$M = [0,1] \cup \{2\}$

Tome

$$B[0;2] = M$$

$$B(0;2) = [0,1]$$

$$\overline{B(0;2)} = [0,1]$$

$$\overline{B(0;2)} \subset B[0;2]$$

* Em todo espaço métrico:

$$\overline{B(a;r)} \subseteq B[a;r]$$

Definição: Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico é denso em M se

$$\overline{X} = M.$$

Exemplo: $\mathbb{Q}$ conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$.

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Espaços Métricos, Aula 07 14/01/14

Conjuntos Fechados

$\overline{X} = \{$todos os pontos aderentes a $M\}$

Conjunto $X \subset M$, é denso em M se $\overline{X} = M$.

* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

Teorema 1: Dado $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $n > x$.

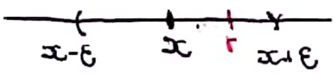
Teorema 2: Dado $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $nx > y$.

Considere $\frac{y}{x}$, pelo teorema anterior existe $n \in \mathbb{Z}^+$ t.q. $n > \frac{y}{x}$.

Teorema 3: Para cada $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ t.q. $x < r < y$.

Sabemos que $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$. Tenho que mostrar que $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$, tome $\varepsilon > 0$ então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.



Pois entre $x-\varepsilon$ e $x+\varepsilon$ sempre existe $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração do Teorema:

Já que $x < y$, $y - x > 0$.

Então, pelo Teorema 2, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ t.q.

$$n(y-x) > 1$$

$$ny > 1 + nx$$

Aplicando o Teorema 1 ou 2, $m_1 > nx$ e $m_2 > -nx$, para alguns $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Escolha $m \in \mathbb{Z}^+$, com $-m_2 < m \leq m_1$ tal que

$$m-1 \leq nx < m$$
$$m \leq nx+1 < m+1$$

$$nx < m \leq nx+1 < ny$$

Logo

$$nx < m < ny$$
$$x < \frac{m}{n} < y$$
$$\frac{m}{n} = r$$

Exemplo: $\overline{\mathbb{Q}}^n = \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cdots \times \mathbb{Q}}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

Se $X \subset M$, $Y \subset N$ são tais que $\overline{X} = M$, $\overline{Y} = N$, então

$$\overline{X \times Y} = M \times N$$

(M, d_M), (N, d_N)

$(M \times N, d)$, $d((x,y),(x',y')) = \max\{d_M(x,x'), d_N(y,y')\}$

Seja $(x,y) \in M \times N$ e A um aberto em $M \times N$, com $(x,y) \in A$.

Existe um $r > 0$ t.q. $B_{M \times N}((x,y); r) \subset A = B_M(x;r) \times B_N(y;r)$

Temos que mostrar que para cada aberto $A \subset M \times N$ com $(x,y) \in A$,

$$A \cap (X \times Y) = \emptyset$$

Afirmo

$$B_M(x,r) \cap X \neq \emptyset \text{ e } B_N(y,r) \cap Y \neq \emptyset$$

pois $\overline{X} = M$, $\overline{Y} = N$.

Portanto,

$$(B_M(x;r) \cap X) \times (B_N(y;r) \cap Y) \neq \emptyset$$

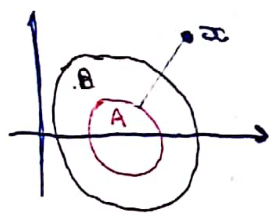
$$\Rightarrow (\underbrace{B_M(x;r) \times B_N(y;r)}) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$$

$$B_{M \times N}((x,y);r) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$$

Logo $A \cap (X \times Y) \neq \emptyset$.

Proposição: Seja (M,d) um espaço métrico e sejam A, B subconjuntos de M, em $A \subset B$. Então para cada $x \in M$,

$$d(x,B) \leq d(x,A).$$



Dado $x \in M$. Defina

$$A_x = \{d(x,a) : a \in A\}$$

$$B_x = \{d(x,b) : b \in B\}$$

Logo,

$$A_x \subseteq B_x \Rightarrow dis(x,B) = \inf B_x \leq \inf A_x = dis(x,A).$$

Proposição: Para todo $a \in M$ e todo subconjunto $X \neq \emptyset$ em um espaço métrico M, temos

$$d(a,X) = d(a,\overline{X})$$

Demonstração. Sabemos que $X \subset \overline{X}$, então

$$dis(a,\overline{X}) \leq dis(a,X)$$

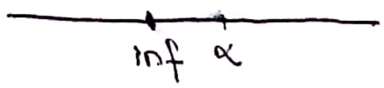
Para qqer $a \in M$.

Suponhamos que

$$dis(a, \overline{X}) < dis(a, X).$$

Então $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$dis(a, \overline{X}) < \alpha < dis(a, X)$$



pela propriedade de aproximação do inf, existe $\bar{x} \in \overline{X}$ tal que

$$d(a, \bar{x}) < \alpha$$

$$dis(a, \overline{X}) = \inf\{d(a,y) .\, y \in \overline{X}\}$$

$$B(\bar{x}, \alpha - d(a, \bar{x})) \cap X \neq \emptyset$$

Logo

$$\alpha - d(a, \bar{x}) > 0$$

Como $\bar{x}$ é aderente a X, $\exists\, x \in X$ t.q.

$$d(x, \bar{x}) < \alpha - d(a, \bar{x})$$

Da desigualdade do triângulo, temos que

$$d(a, x) \leq d(a, \bar{x}) + d(\bar{x}, x)$$

$$< d(a, \bar{x}) + \alpha - d(a, \bar{x}) = \alpha$$

Em resumo,

$$d(a, x) < \alpha$$

$\alpha < dis(a, X) < d(a, x) < \alpha \Rightarrow \Leftarrow$ (contradição). Só vale a igualdade.

Corolário: $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$

$$a \in \bar{\bar{X}} \Leftrightarrow dis(a, \bar{X}) = 0$$
$$\Leftrightarrow dis(a, X) = 0$$
$$\Leftrightarrow a \in \bar{X}.$$

Definição: Um conjunto F num espaço métrico M, diz-se fechado ~~em~~ M, se

$M - F$ é aberto.

Exemplo: Toda bola fechada num espaço métrico é um conjunto fechado.

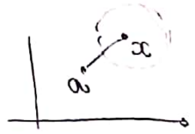
- $a \in M$, então $\{a\}$ é um cjto fechado em M.

Se toma $x \in M - \{a\}$, então $d(x, a) > 0$.

Tome a bola $B(x; r)$ com $r = \frac{d(a,x)}{2}$

É claro que

$$a \notin B(x; r)$$



Isto é, $x \in int(M - \{a\})$.

- Se $F = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_i \in M$, então F é um conjunto fechado.

$\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$

Proposição: Seja (M, d) um espaço métrico e seja $F \subset M$.

F é fechado em $M \Leftrightarrow \bar{F} = F$.

Demonstração: $(\Leftarrow)$
Suponha que $\bar{F} = F$ e mostramos que $M - F$ é aberto. Com efeito, seja $a \in M - F$, Como $F = \bar{F}$, então $a \notin \bar{F}$. Portanto, existe uma bola aberta $B(a; r)$ de centro a e raio r tal que

$$B(a;r) \cap F = \emptyset.$$

Logo,

$$B(a;r) \subseteq M-F$$

o que significa que $a \in \operatorname{int}(M-F)$.

Reciprocamente, $(\Rightarrow)$

Suponha que F é fechado, então $M-F$ é aberto.

Se $\overline{F} \neq F$, então $\boxed{\exists\, x \in \overline{F}}$, t.q. $x \notin F$, i.e., $x \in M-F$, logo

$\exists\ B(x;r)$, para algum $r>0$, t.q.

$$B(x;r) \subset M-F$$

$\Rightarrow\Leftarrow$ (contradição)

O fecho de um conjunto X é o menor fechado que contém a X.

$$X \subset F \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{F} = F$$

Conjuntos Fechados

* $\overline{X} = X \Leftrightarrow X$ é fechado

* Denso: M é um espaço métrico, $X \subset M$, X é denso em $M \Leftrightarrow \overline{X} = M$

* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$; $\overline{X}$ é fechado

* $X \subset \overline{X}$

  o fecho é o menor fechado que contem a X.

* $\overline{X} = \text{int} X \cup \partial X$

  Se X é fechado, então $\overline{X} = X$

  $$X = \text{int} X \cup \partial X$$

  Portanto $\partial X \subset X$.

  $\Leftarrow$ Se $\partial X \subset X \Rightarrow X$ é fechado

  $a \in \overline{X}$, então $a \in \text{int} X \subset X$ ou $a \in \partial X \subset X$.

  Portanto $a \in X$ $(\overline{X} \subseteq X)$.

* ∂X é fechada

  $$M = \underbrace{\text{int} X \cup \text{int}(M-X)}_{\text{complementar de } \partial X} \cup \partial X$$

  aberto $\Rightarrow \partial X$ é fechado

O complementar de ∂X em M é $\text{int} X \cup \text{int}(M-X)$ que é um cjto aberto.

* Tome $M = \mathbb{R}$, d é métrica usual.

  $X = (0,2)$ aberto em $\mathbb{R}$

  $Y = [1/2, 3/2]$ fechado em $\mathbb{R}$

  $X \cup Y = X$, é aberto

* Considere $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Com a métrica induzida pela de $\mathbb{R}$.

* $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ são abertos em M
* $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ são fechados em M

Proposição. Seja (M, d) um espaço métrico, então

i) $\emptyset$ e M são conjuntos fechados em M.

ii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados em M, então

$$F_1 \cup \cdots \cup F_n \text{ é fechado em } M$$

iii) Se $\{F_i\}_{i \in I}$, com cada F_i fechado, então

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ é um cjto fech. em } M.$$

* $M - (A \cup B) = (M - A) \cap (M - B)$
* $M - (A \cap B) = (M - A) \cup (M - B)$
* $M - \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} (M - F_i)$

* Exemplo: $M = \mathbb{R}$

$$F_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset (-1, 1)$$

Para cada $n \geq 1$ inteiro, F_n é fechado em $\mathbb{R}$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (-1, 1).$$

Proposição: Seja (M, d) um espaço métrico. Dado $X \subset S \subset M$, indicaremos o fecho de X em S por $\tilde{X}$ ou $\overline{X}^S$. Então $\overline{X}^S = \overline{X} \cap S$.

Exemplo. $M = \mathbb{R}$, $S = [0, 1)$

$X = [1/2, 1)$. Claro que $X \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$

$\overline{X} = [1/2, 1]$

$\overline{X}^S = X$, pois 1 não está em S

Demonstração:

$$\tilde{X} = \{a \in S : d(a,X) = 0\} =$$
$$= \{a \in M : d(a,X)\} \cap S =$$
$$= \overline{X} \cap S$$

Corolário: Se S é fechado em M, então $\tilde{X} = \overline{X}$.

$$X \subset S \Rightarrow \overline{X} \subset S \Rightarrow \tilde{X} = \overline{X} \cap S = \overline{X}.$$

Corolário. Todo conjunto F fechado em S é a interseção de um fechado em M com S.

$\Rightarrow \quad F = \tilde{F} = \overline{F} \cap S$

$\Leftarrow$

$X = F \cap S$, F fechado em M

$= \overline{F} \cap S = \tilde{X}$

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ diz-se de acumulação de $X \subset M$ se para cada bola $B(a; r)$ de centro e raio $r > 0$,

$$(B(a,r) - \{a\}) \cap X \neq \emptyset$$

Exemplo: $M = \mathbb{R}$;

$$X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

- $1 \in \overline{X}$ mas não é um ponto de acumulação de $\tilde{X}$
- 0 é ponto de acumulação de X.

Notação: X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X e o chamamos de derivado de X.

* observação: $X' \subseteq \overline{X}$

em $\mathbb{R}$, $X = [0,1]$, $\overline{X} = X'$.

$a \in X' \Leftrightarrow$ toda bola de centro a e raio r contém infinitos pontos de X.

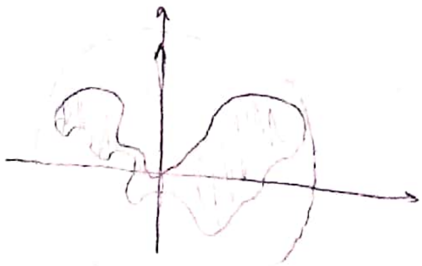
(Teorema de Bolzano)
* Todo conjunto infinito limitado em $\mathbb{R}^n$, tem pontos de acumulação.

Definição: Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se existe $c > 0$ tal que

$$0 \leq d(x,y) \leq c$$

para todo $x, y \in X$.

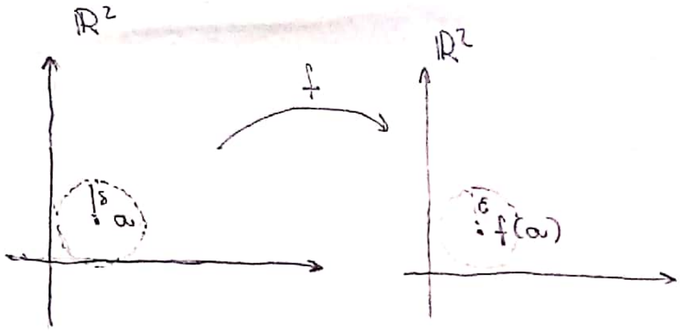
Um conjunto $X \subset M$ é limitado $\Leftrightarrow$ está contido numa bola aberta.



Funções Contínuas

Definição: Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Diz-se que uma aplicação $f: M \to N$ é contínua em $a \in M$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$



em $\mathbb{R}$,

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Gráfico de uma função $f: M \to N$

$$G_f = \{(x,y) \in M \times N : y = f(x)\}$$

f é contínua em $a \in M$ se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$

$$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$$

$f: M \to N$

$X \subset M$, então

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$ imagem do conjunto X.

Exemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, f é contínua em a.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon$

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| = |x-a| < \varepsilon$$

* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

Mostre que f é contínua em $x=a$ em $\mathbb{R}$

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|^2 < \delta^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 < \delta^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - a^2 < \delta + 2ax \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \delta + 2$$

$\varepsilon = \delta^2 + 2|a|\delta$

$|x^2 - a^2| = |x-a|\,|x+a|$

$(a-1, a+1)$ $\quad$ $a-1 \quad a \quad a+1$

$(2a-1) < x+a < 2a+1$

$|x+a| < 2a+1$

$|x-a| < \delta$

$|x-a|\,|x+a| < (2a+1)\delta = \varepsilon$

$\delta = \min\{1, \varepsilon/2a+1\}$

Espaços Métricos, 28/01/2014

Funções Contínuas

- Métricas Equivalentes

Proposição: Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. A aplicação $f: M \to N$ é contínua $\Leftrightarrow$ para cada aberto $B \subset N$, a imagem inversa* de B, $f^{-1}(B)$, é aberta em M.

* $f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\}$. Imagem Inversa de B por f.

Demonstração.

$\Leftarrow$ Seja $a \in M$, e vejamos que $f: M \to N$ é contínua em a

Seja $\varepsilon > 0$. A bola aberta $B(f(a); \varepsilon)$ é um conjunto aberto em N, logo, usando a hipótese, obtemos

$$f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$$

é um conjunto aberto em M. Além disso,

$$a \in f^{-1}(B(f(a); \varepsilon)).$$

Portanto, $\exists\ \delta > 0$ tal que (a é ponto interior de $f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$)

$$B(a; \delta) \subset f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$$

* $f: M \to N$ e $A \subset M$

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ Imagem direta de A por f.

a

- Se $A_1 \subset A_2 \subset M$, então

$$f(A_1) \subset f(A_2) \qquad (*)$$

$\llcorner$ $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1 ; f(x) = y \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow f(x) \in f(A_2)$.

Aplicando a observação $(*)$ obtemos

$$f(B(a;\delta)) \subset f(f^{-1}(B(f(a);\varepsilon)))$$
$$\subset B(f(a);\varepsilon)$$

o que significa que f é contínua em a.

$(\Rightarrow)$

Seja $B \subset N$ aberto e tome $a \in f^{-1}(B)$, ~~já que~~ existe $\varepsilon > 0$, t.q.

$$B(f(a);\varepsilon) \subset B.$$

Como f é contínua em a, para esse $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$$

Aplicando o exercício (2a) e (2b) da prova

$$f^{-1}(f(B(a;\delta))) \subset f^{-1}(B(f(a);\varepsilon)) \subset f^{-1}(B)$$

e

$$B(a;\delta) \subset f^{-1}(f(B(a;\delta))) \subset f^{-1}(B)$$

o que mostra que

$$a \in \operatorname{Int} f^{-1}(B). \text{ Logo, } f^{-1}(B) \text{ é aberto.}$$

28/03/2014

Dado uma métrica d num conjunto $M \neq \emptyset$.

* Topologia
  → Bola aberta
  → Ponto interior
  → Conjunto aberto: todos os ptos são interiores à ele. $(0,1) \cup (2,3)$
  → $\tau = \{$coleção de todos os conjuntos abertos$\}$

i) $\emptyset, M \in \tau$

ii) Se $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau$.

iii) Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ em τ, então

família de aberto

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau.$$

* $d_1 \sim d_2$, então $\tau_1 = \tau_2$

Ver na internet:

* A é um conjunto aberto de M se, e somente se,

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

Seja $A_1 \in \tau_1$. Então

$$A_1 = \bigcup_{x \in A_1} B^1(x, r^1_x)$$

onde $B^1(x, r_x)$ são bolas abertas com a métrica d_1. Como $d_1 \sim d_2$ para cada $x \in A_1$, existe

$$B^2(x; r^2_x) \subset B^1(x, r^1_x)$$

b

Seja $A_1 \in \tau_1$. Então

$$A_1 = \bigcup_{x \in A_1} B^1(x, r_x^1)$$

onde $B^1(x, r_x^1)$ são bolas abertos com a métrica d_1. Como $d_1 \sim d_2$ para cada $x \in A_1$, existe uma bola aberta B_x^2 na métrica d_2 tal que

$$\{x\} \subseteq B^2(x, r_x^2) \subset B^1(x, r_x^1) \subseteq A_1$$

Logo

$$\underbrace{\bigcup_{x \in A_1} \{x\}}_{A_1} \subset \bigcup_{x \in A_1} B^2(x, r_x^2) \subset \bigcup_{x \in A_1} B^1(x, r_x^1) = A_1$$

Portanto,

$$A_1 \in \tau_2.$$

Para mostrar que $A_2 \in \tau_1$, procedemos de modo análogo.

Se $f: M \to N$ é um homeomorfismo de M sobre N,

1) f é bijetiva

2) f é contínua

3) f^{-1} é contínua

Seja $B \subset N$ aberto

$$f(f^{-1}(B)) \overset{?}{=} B \quad \text{(verdade pois é sobrejetora)}$$

Seja $A \subset M$ aberto

$$f^{-1}(f(A)) \overset{?}{=} A \quad \text{(verdade pois é injetora)}$$

$g = f^{-1} : N \to M$, $A \subset M$ aberto, $g^{-1}(A) = (f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$.

Mostre que os abertos em N estão em correspondência biunívoca 1-1 com os abertos de M.

Proposição: Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. A aplicação $f: M \to N$ é contínua $\Leftrightarrow$ para cada fechado $F \subseteq N$, a imagem inversa de F, $f^{-1}(F)$, é fechado em M.

O complem. de F é aberto $\Rightarrow$ $f^{-1}(F^c)$ é aberto $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)$ é fechado...

Sequências

Definição: Uma função $f: \mathbb{N} \to M$, (M, d) um espaço métrico, é chamada uma sequência em M.

* $f(\mathbb{N}) = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Imagem direta de $\mathbb{N}$

  $\hookrightarrow$ $\{\cancel{f(0)}, f(1), f(3), f(5), f(4), f(6), \dots\}$ é a im. direta e não a seq.

* $(f(n))_{n \in \mathbb{N}} = (f(1), f(2), f(3), \dots)$ a sequência, ordenada.

* $f(n) = f_n$ (n-ésimo ~~termo~~ da sequência)

Exemplo:

i) $M = \mathbb{C}$

$$x_n = e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ fixo}$$

$$x_n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

$$= (\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta)$$

$\mathbb{C}$ = números complexos = $\mathbb{R}^2$ com o produto $(x,y)(z,w) = (xz - yw, xw + yz)$

ii) $M = \mathbb{R}$

$x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

iii) $M = \mathbb{R}$

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\right)$$

Qdo falo de uma seq., não precisa ser infinita.

(iv) $a \in M$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Espaços Métricos

29/01/2014

Sequências

$f: \mathbb{N} \to M$

(M,d) um espaço métrico

- $f(n) = f_n$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_1, f_2, \ldots)$
- Suponha que $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente.

Para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m < n \Rightarrow g(m) < g(n)$$

a composição

$$f\circ g: \mathbb{N} \to M$$

é uma sequência.

Exemplo: $M = \mathbb{Z}$

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto f(n) = n^2 \qquad (1, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots)$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto g(n) = 2n \quad \text{é estritamente crescente}$$

$$f\circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \mapsto f\circ g(n) = f(g(n)) = (2n)^2 \quad (4, 16, 36, \ldots)$$

A imagem da composta é um subconjunto da imagem da original.

Nestes termos, $f\circ g$ é uma subsequência da f. (Na verdade, a sequência 2 é uma subseq. da seq. 1. Não podemos falar apenas da imagem)

a

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow f:\mathbb{N}\to M$

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$ notação
$$k \mapsto g(k)=n_k$$

$$f\circ g:\mathbb{N}\to M$$
$$k\mapsto f(g(k))=f(n_k)=f_{n_k}$$ $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Como g é estritamente crescente,
$1<2<3<\dots$

$n_1<n_2<n_3<\dots$

Definição: Seja $f:\mathbb{N}\to M$ uma sequência em M e $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estritamente crescente, a nova sequência

$$f\circ g:\mathbb{N}\to M$$

é chamada uma sequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, \dots)$

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto f(n)=\frac{1}{n}=f_n$$

$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\dots\right)$ subsequência de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$h(n)=\frac{1}{2n+1}=f_{2n+1}$$

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$n\mapsto g(k)=2k+1$$

29/01/2014

Definição: Digamos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é convergente em M, à um elemento $\ell \in M$ se dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, \ell) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow x_n \in B(\ell; \varepsilon), \ \forall n \geq n_0$$

"O conjunto complementar à tal bola aberta sempre terá cardinalidade finita."

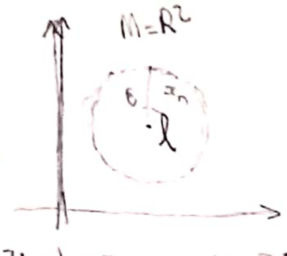


Ilustração com $M = \mathbb{R}^2$

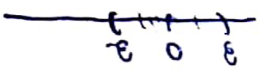
$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ou

$$x_n \to \ell, \text{ quando } n \to \infty$$

Exemplo: $M = \mathbb{R}$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$



Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Logo, $\forall n > n_0$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

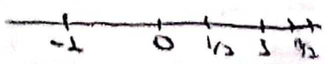
$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \varepsilon, \ \forall n > n_0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $M = \mathbb{R}$.

Exemplo: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \doteq (-1)^n$ não é convergente em $\mathbb{R}$.



Exemplo: $\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é convergente.

Deve mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Exemplo: $M = (0,1)$ com a métrica induzida pela de $\mathbb{R}$.

A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(0,1)$ não é convergente em M, pois $0 \notin (0,1)$.

Proposição: Uma sequência não pode convergir para dois limites.

Demonstração:

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seq. que converge a $l_1 \neq l_2$. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$d(x_n, l_1) < \varepsilon \quad , \forall n > n_0$$

e

$$d(x_n, l_2) < \varepsilon \quad , \forall n > n_0$$

Se por exemplo, tomarmos

$$\varepsilon = \frac{d(l_1, l_2)}{2}$$

Então, para $n > n_0$

$$\begin{aligned} d(l_1, l_2) &\leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) \\ &< \frac{d(l_1, l_2)}{2} + \frac{d(l_1, l_2)}{2} \\ &< d(l_1, l_2) \Rightarrow\Leftarrow \end{aligned}$$

29/01/2014

Exemplos: Dizer se as seguintes sequências convergem em $\mathbb{R}$.

a) $x_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

b) $y_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{-2}{3}\right)^n} + \frac{1}{3\left(\frac{-3}{2}\right)^n - 2} \to \frac{1}{3} + \frac{1}{0} = \frac{1}{3}$)

c) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $w_n = \frac{n^{2/3} \operatorname{sen}(n!)}{n+1}$

e) $m_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{3n^3 + 2n^2}$

f) Se $|a| < 1$, então $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$

g) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} = 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

Proposição: Dado (x_n) e (y_n) sequências convergentes em $\mathbb{R}$ a l_1 e l_2 respectivamente, temos que $(x_n \pm y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, (x_n / y_n) com $l_2 \neq 0$, são convergentes em $\mathbb{R}$ e

i) $\lim (x_n \pm y_n) = l_1 + l_2$

ii) $\lim (x_n \cdot y_n) = l_1 l_2$

iii) $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $|x_n - l_1| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_1$ (1) e $|y_n - l_2| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$ (2)

(i)

Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

logo para cada $n \geq n_0$,

$$|(x_n+y_n)-(l_1+l_2)| = |(x_n-l_1)+(y_n-l_2)| \leq$$

$$|(x_n-l_1)|+|y_n-l_2|$$

$$< \quad \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$ (Basta fazer $\varepsilon/2$ antes).

<u>Definição</u>: Uma seq. (x_n) em M é limitada se $\exists\, c \in \mathbb{R}^+$ t.q.

$$d(x_n, x_m) \leq c \quad \text{para todo } n,m \in \mathbb{N}.$$

Lembrete:

· $\Omega \subset M$ é limitados se

$$d(x,y) \leq c,\ \forall (x,y)$$

· $f: M \to N$ uma aplicação limitada

$f(M)$ é um conjunto limitado em N

$\forall\, m_1, m_2 \in M$

$$d(f(m_1), f(m_2)) \leq c \text{ para algum } c \in \mathbb{R}^+$$

· $f: \mathbb{N} \to M$

$m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(f(n), f(m)) \leq c$, algum $c \in \mathbb{R}^+$.

· Ω é limitado, tome $y \in \Omega$ fixo então para cada $x \in \Omega$

$$d(x,y) < c, \text{ para algum } c \in \mathbb{R}^+$$

Então

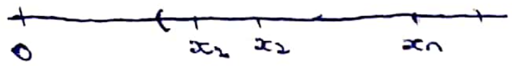
$$B(y; c) \supseteq \Omega.$$

29/01/2014

(x_n) é limitada em $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$

$$|x_n - x_m| \leq c$$

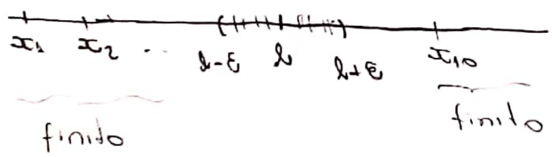
para algum $c \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.



Em resumo,

$$|x_n| \leq c_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposição: Toda sequência convergente em $\mathbb{M}$ é limitada,



Espaços Métricos, 31/03/2014

Sequências

$f: M \to N$ contínua em $l \in M \Leftrightarrow$

para toda sequência $(x_n) \to l$, temos $(f(x_n)) \to f(l)$.

$\Leftarrow$

f não é contínua em $l \in M$, então

$\exists (x_n) \to l, (f(x_n)) \not\to f(l)$

$\Rightarrow$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$d(x, l) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(l)) < \varepsilon$.

Suponha que $(x_n) \to l$ em M

Isto é,

dado $\delta > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

$d(x_n, l) < \delta, \forall n \geq n_0$

Seja $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(f(x_n), f(l)) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

A sequência $\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right)$ é convergente.

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}}\right) = \operatorname{sen} 1$$

Exemplo:

A função $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é contínua em 0?

Tomemos $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

Vemos, $x_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Mas,

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{1/n\pi}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Já que $(f(x_n))$ não é convergente em $\mathbb{R}$, então f não é contínua em 0.

nos Reais

Proposição: Toda sequência <u>monótona</u> limitada é convergente.

Definição: A sequência $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente (estritamente decrescente) se para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$,

$$\Rightarrow f(m) < f(n) \quad (f(m) > f(n))$$

1 2 3 4 5 ...

$f_1 < f_2 < f_3 < f_4 < f_5 \ldots$ f_n est. crescente

$f_1 > f_2 > f_3 > f_4 > f_5 \ldots$ f_n é est. decrescente

Espaços Métricos 31/01/2014

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente se
(decrescente)

$$f_n < f_{n+1}, \ \forall n \geq 1$$

$$f_n > f_{n+1}, \ \forall n \geq 1$$

Exemplo. A sequência

$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \ \forall n \geq 1.$$

Exemplo. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ fixo. Diga se (a^n) é crescente ou decrescente.

* $0 < a < 1, \xRightarrow{\text{mult. por } a} 0 < a^2 < a < 1$

$\Rightarrow 0 < a^3 < a^2 < a < 1$

$\Rightarrow \ldots$

$0 < a^n < a^{n-1} < \ldots < a < 1.$

Afirmo que a sequência a_n é estritamente decrescente e, além disso, limitada.

* $a > 1 \xRightarrow{\text{mult. por } a} a^2 > a > 1 \Rightarrow \ldots$

$\xRightarrow{\times a} a^n > a^{n-1} > \ldots > a > 1$

(a^n) é estritamente crescente e não limitada.

· Se for monótona e limitada, é convergente.

Demonstração da proposição:

Seja (x_n) uma sequência crescente e limitada, então

$$a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists\, x_{n_0} \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a < a + \varepsilon$$ (propriedade da aproximação do supremo)

Para cada $n \geq n_0$, como (x_n) é crescente

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$$

<u>Em resumo</u>, para $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

· A prova segue da mesma idéia para (x_n) decrescente.

Basta tomar $a = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$...

Se $0 < a < 1$, então (a^n) é convergente.

$$\lim a^n = l$$

$$= \lim a^{n+1}$$ pois (a^{n+1}) é subseq. de (a^n).

Espaços Métricos 31/01/2014

Proposição: Toda subsequência de uma sequência convergente é convergente.

$(a^n) = (a^1, a^2, a^3, \ldots)$

$(a^{n+1}) = (a^2, a^3, \ldots)$

Mas

$$\lim a^n = l$$

$$\lim a^{n+1} = \lim a \cdot a^n = a \cdot l$$

Como

$$l = la \Leftrightarrow$$

$$l(a-1) = 0, \quad a-1 \neq 0 \text{ pois } 0 < a < 1, \Leftrightarrow$$

$$l = 0$$

Isto é, $l = 0$.

Exemplo. $x_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N}$ diverge ou converge?

$-1 < a < 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$

$0 < |a| < 1 \Rightarrow \lim |a|^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} |a^n| = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{3^{n+1}} + \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}}{1 + \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

Consideremos agora a seq.

$$\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, \dots\right)$$

Quando n é ímpar, isto é,

$$n = 2k-1$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Quando n é $2k$,

$$x_{2k} = \frac{2k}{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{2k+1} \to 0$$

$$\frac{2k}{2k+1} \to 1$$

Proposição: Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$.

$l \in \overline{X} \Leftrightarrow \exists$ uma sequência (a_n) em X convergente a l em M.

Espaços Métricos, 31/01/2014

Demonstração:

$\Rightarrow$

Se $l \in X$, uma seq. constante $x_n = l$ serve.

Se $l \notin X$, então para cada $\varepsilon > 0$,

$$B(l;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

Para $n \geq 1$, $\varepsilon = 1/n$, $\exists$

$$l \neq a_n \in B(l; 1/n) \cap X \neq \emptyset$$

Afirmamos que a sequência (a_n) converge a l.

Seja $\varepsilon > 0$, então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \left(\frac{1}{n_0} < \varepsilon\right)$$

Então para todo $n \geq n_0$

$$a_n \in B(l;\varepsilon),$$

pois

$$a_n \in B\left(l; \frac{1}{n}\right) \subseteq B\left(l; 1/n_0\right) \subseteq B(l;\varepsilon)$$

$\therefore$

$$\lim a_n = l.$$

. Se eu tenho um ponto no fecho de X $\exists$ uma sequência em X convergente à de

$\Leftarrow$

Suponha que (a_n) em X converge a l em M.

~~Seja~~ Para $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

d

$a_n \in B(l;r)\ \forall n \geq n_0$

Então,

$a_n \in B(l;r) \cap X \neq \emptyset,\ \forall n \geq n_0$

Portanto, $l \in \overline{X}$.

Corolário:

$x \in \partial X \Leftrightarrow$ existe uma sequência (x_n) em X e uma sequência (y_n) em $M-X$ convergindo a x.

$x \in \partial X \Leftrightarrow x \in \overline{X} \cap \overline{(M-X)}$

- Se F é fechado, $\overline{F} = F$. Daí, existe uma seq em F convergente a um elemento de F

Proposição: Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$.

$l \in X' \Leftrightarrow$ existe uma sequência (x_n) em X de termos distintos que converge a l em M.

X' = todos os pontos de acumulação.

"Aqui, podemos encontrar uma seq. de pontos distintos. Poderia ser tbm a cte, mas tbm há uma dif. do cte"

Prova: $\forall n \geq 1$ a bola aberta

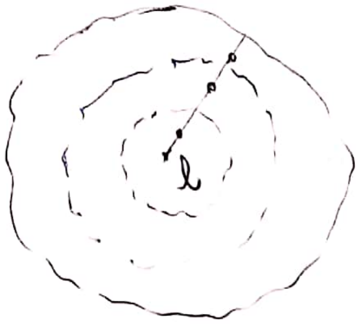
$B(l; \frac{1}{n})$ tem infinitos pontos de X (Isso é garantido quando l é pto de acumulação)

Aí, vou • $n=1$, escolho 1, sobram infinitos,

• $n=k$, escolho outro diferente ~~dos anteriores~~, sobram infinitos

⋮

Espaços Métricos 31/01/2014



Proposição. Sejam (M,d) espaços métricos e $A \subset M$,

A é aberto em M $\Leftrightarrow$

cumpre: $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja A aberto em M. Suponha que $x_n \to a \in A$. Como a é ponto interior de A então $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que

$$B(a;\varepsilon) \subset A$$

Agora, para este $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$x_n \in B(a;\varepsilon)$$

($\Leftarrow$) Vejamos $M - A$ é fechado.

Então $b \in M - A$, $\exists$ uma seq. (y_n) em $M-A$, $y_n \to b$ em $M-A$.

Espaços Métricos 03/02/2014

A é aberto $\Leftrightarrow$

para cada sequência $x_n \to a \in A \Rightarrow x_n \in A$ para n suficientemente grande.

$(\Rightarrow)$

Como $a \in A$, $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $B(a;\varepsilon) \subset A$. Agora, para tal ε, $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \in B(a;\varepsilon)$; $\forall n \geq n_0$

$$\Downarrow$$

$$x_n \in A,\ \forall n \geq n_0$$

$(\Leftarrow)$ Seja $b \in \overline{M-A}$, então $\exists$ uma sequência (y_n) em $M-A$ convergindo a b,

$$y_n \to b$$

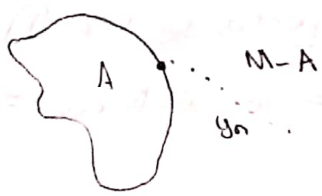
Se $b \in A$, então pela hipótese, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$y_n \in A,\ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Portanto $b \in M-A$; significa

$$\overline{M-A} \subseteq M-A$$

Logo, $M-A$ é fechado e assim A é aberto.



Conjuntos Conexos

Definição: Seja (M,d) um espaço métrico. Uma cisão de M é uma decomposição $M = A \cup B$ onde $A \cap B = \emptyset$ e A, B abertos em M.

Exemplo: Seja M um espaço métrico discreto. $A \subset M$ é aberto é claro que $B = M - A$ é aberto. $M = A \cup B$.

Tome α irracional, então

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$$

determinam uma cisão, pois

$$A \cap B = \emptyset \quad e \quad A \cup B = \mathbb{Q}.$$

Definição: Dizemos que uma cisão $M = A \cup B$ é trivial qdo $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Dizemos que M é CONEXO se a única cisão de M é a trivial. Em caso contrário dizemos que M é desconexo.

Proposição: São equivalentes:

1) M é conexo;
2) M e $\emptyset$ são os únicos abertos e fechados em M
3) Se $X \subset M$ tem fronteira vazia, então $X = M$ ou $X = \emptyset$.

1) $\Rightarrow$ 2) Sup. que A é aberto e fechado em M, então $B = M - A$ é aberto e fechado em M, logo

$M = A \cup B$ é uma

cisão de M. Como M é conexo $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, o que mostra que $A = \emptyset$ ou $A = M$.

2) $\Rightarrow$ 1) Seja $M = A \cup B$ uma cisão.

- A, B são abertos em M
- $A \cap B = \emptyset$
- $B = M - A$ e $A = M - B$, então A e B são fechados

Pela hipótese $A = \emptyset$ ou $A = M$. O que mostra que M é conexo.

2) $\Rightarrow$ 3) Seja $X \subset M$, com $\partial X = \emptyset$. Lembre que

$$X \subseteq \overline{X} = \operatorname{int} X \cup \overset{\emptyset}{\partial X} =$$
$$= \operatorname{int} X \subseteq X$$

Decorre

$$X = \overline{X} = \operatorname{int} X.$$

Então X é fechado e aberto em M. Pela hipótese.

$$X = \emptyset \quad \text{ou} \quad X = M$$

3) $\Rightarrow$ 2) Suponha A aberto e fechado em M. Então $\operatorname{int} X = X = \overline{X} = \operatorname{int} X \cup \partial X$.

Se $x \in \partial X$, então $x \in \overline{X} = \operatorname{int} X$. Logo $\exists\, \varepsilon > 0$

$$B(x; \varepsilon) \subset X$$

daí,

$$B(x; \varepsilon) \cap (M - x) = \emptyset \Rightarrow \Leftarrow$$

<u>Definição</u> $X \subset M$ é conexo se X como espaço métrico com a métrica induzida pela M é conexo.

Exemplo: os únicos conjuntos conexos em $\mathbb{Q}$ são os que tem um só ponto

Seja $X \subset \mathbb{Q}$ um conjunto conexo, com mais de um ponto.

Sejam $a, b \in X$, $a < b$.

Sabemos que $\exists\, \alpha$ irracional, $a < \alpha < b$. Tome

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \alpha\}$$

A e B são abertos em $\mathbb{R}$ e $X = (A \cap \mathbb{Q}) \cup (B \cap \mathbb{Q})$

é uma cisão não trivial de X pois $a \in A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ e $b \in B \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Logo X não é conexo.

* $\mathbb{R}$ é conexo

Suponha que $\mathbb{R} = A \cup B$ é uma cisão não trivial. Seja $a \in A$ e $b \in B$ tal que $a < b$

Seja $X = \{x \in A : x < b\}$. Como $a < b$, temos $X \neq \emptyset$. Além X é limitado superiormente, logo $\exists$ $c = \sup X$.

É claro que $c \leq b$.

Pela propriedade do sup, $\exists\, x \in X$ t.q.

$$c - \varepsilon < x \leq c < c + \varepsilon \Leftrightarrow x \in B(c;\varepsilon)$$

Logo $c \in \bar{A}$ (pois toda bola aberta $B(c;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$).

Como A é um cjto fechado em $\mathbb{R}$, $c \in A = \operatorname{int} A$. Logo $\exists\, \delta > 0$ t.q.

$$B(c;\delta) \subset A$$

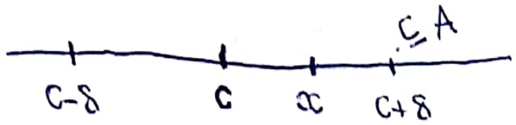
$$-\delta < x - c < \delta$$

$$c - \delta < x < \delta + c$$

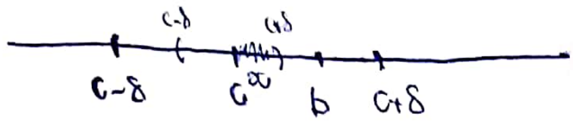
Espaços métricos

03/02/2014

$b \in B$ e $c \in A$ então $b \neq c$



Como ~~b~~ $c < b$, então



$x \in X$, mas $c = \sup X$, logo $x = c + \overset{>0}{\gamma} < c+\delta$ não deveriam pertencer à $X \Rightarrow \Leftarrow$

Os $x \in B(c;\delta)$ t.q. alguns $x \in (c, c+\delta)$ estão em X $\Rightarrow \Leftarrow$ pois $c = \sup X$.

C

04/02/2014

Espaços Métricos

1. Exemplo 9 pág. 122
2. Exemplos 10-13, 128
3. Exercícios 1, 2, 140

Conjuntos Conexos

M é conexo $\Leftrightarrow$

$M = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$

A e B abertos, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

$\bar{A} = \text{int} A = A$, $\partial A = \emptyset$.

$\hookrightarrow$ Se $M = A \cup B$

M é conexo $\Leftrightarrow$ M e $\emptyset$ são os únicos abertos em ^{M} t.q. $\underset{\bar{A}}{M} \cup \underset{\bar{B}}{\emptyset} = M$
e fechados

* $\mathbb{R}$ é conexo.
* $\mathbb{Q}$ é desconexo

Exemplo: $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

$M - A = B$ $\quad \bar{B} = B = \text{int} B$.

$M - B = A$

$X = (-1, 0) \cup (0, 1)$

• $Y \subset X \subset M$

$\tilde{Y} = \bar{Y} \cap X$.

Proposição: Sejam (M, d_1), (N, d_2) espaços métricos e $f: M \to N$ contínua. Se $X \subseteq M$ é conexo então $f(X) \subseteq N$ é conexa.

Demonstração:

Antes, um exemplo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2$$

$(1,4) \subseteq \mathbb{R}$ (veremos que os intervalos em $\mathbb{R}$ são conexos)

$f^{-1}((1,4)) = (-2,-1) \cup (1,2)$, que é desconexo.

Demonstração. Caso I:

Suponha que $f: M \to N$ é uma função contínua sobrejetora e M é conexo. $(f(M) = N)$.

Suponha também que $N = A \cup B$, A, B abertos em N e $A \cap B = \emptyset$.

* $f^{-1}(N) = f^{-1}(A \cup B)$
$$M = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

* $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ são abertos
* $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Então
$$M = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

é uma cisão. Mas M é conexo, então

$$f^{-1}(A) = \emptyset \quad \text{ou} \quad f^{-1}(B) = \emptyset$$

Como f é sobrejetora,

$$A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset.$$

Caso II:

Se $X \subset M$ é conexo e $f: M \to N$ contínua. Sabemos que a função

$$f: X \to f(X)$$

é contínua e sobrejetora. Então pelo caso I, $f(X)$ é conexo.

Se $f: M \to N$ é um homeomorfismo de M sobre N.

$Y \subset N$ conexo então $f^{-1}(Y)$ conexo em M.

Exemplo: Qualquer intervalo (a,b) em $\mathbb{R}$ $(a<b)$ é homeomorfo à $\mathbb{R}$.

* $(a,+\infty)$ é homeomorfo à $\mathbb{R}$.

* $f: \mathbb{R} \to (a,\infty)$, $f(x) = a + e^{x}$

* $g: (a,+\infty) \to \mathbb{R}$,
  $y \longmapsto g(y) = \ln(y-a)$

* $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(\ln(y-a)) = a + e^{\ln(y-a)} = a + y - a = y$

* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(a + e^{x} - a) = \ln e^{x} = x$.

Todo intervalo aberto em $\mathbb{R}$ limitado ou não é conexo.

Proposição: O fecho de um conjunto conexo é conexo.

Demonstração: Seja $X \subset M$ conexo e suponha que $\overline{X} = M$

(*) $x \in M$, todo aberto A em M com $x \in A$, $A \cap X \neq \emptyset$.

Vejamos que M é conexo.

Seja $M = A \cup B$ uma cisão.

Como A e B são abertos em M, então $X \cap A$ e $X \cap B$ são abertos em X e

* $(A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cup B) \cap X = M \cap X = X$

* $(A \cap X) \cap (B \cap X) = (A \cap B) \cap (X \cap X) = \emptyset \cap X = \emptyset$.

$X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ é uma cisão. Assim que

$$A \cap X = \emptyset \text{ ou } B \cap X = \emptyset$$

pois X é conexo.

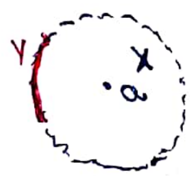
Se $A \neq \emptyset$, então para $x \in A$, pela observação (1) $A \cap X \neq \emptyset$

O mesmo se $B \neq \emptyset \Rightarrow B \cap X = \emptyset$

Portanto um deles (A, B) tem que que ser vazio.

Seja $X \subset M$ conexo, então X é denso em $\overline{X} \supseteq X$, $\overline{X}$ é conexo pelo anterior mostrado.

Corolário: $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$ e X é conexo, então Y é conexo.



Dem: $\overline{X}^Y = \overline{X} = \overline{X} \cap Y = \overline{X}^M \cap Y = Y$

X é denso em Y, então como X é conexo, Y é conexo.

04/02/2014

Proposição: Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in J}$ uma família de conjuntos conexos e suponha que

$$y \in X_\lambda, \ \forall \lambda \in J$$

Então

$$X = \bigcup_{\lambda \in J} X_\lambda$$

(união de cjto conexos que possuem um cara em comum, é conexo)

é conexo.

Demonstração:

Suponha $X = A \cup B$ uma cisão. Então $y \in A$ ou $y \in B$.

Para todo $\lambda \in I$,

$$A \cap X_\lambda \text{ e } B \cap X_\lambda$$

formam uma cisão para para X_λ.

$$X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda).$$

Como X_λ é conexo,

$$A \cap X_\lambda = \emptyset \quad \text{ou} \quad B \cap X_\lambda = \emptyset, \ \forall \lambda \in J$$

. Se $y \in A$, $y \notin B$. Logo

$$A \cap X_\lambda \neq \emptyset \text{ para todo } \lambda \in J$$

Logo, $B \cap X_\lambda = \emptyset \ \forall \lambda \in I$.

$$\emptyset = \bigcup_{\lambda \in J} (B \cap X_\lambda) = B \cap \bigcup_{\lambda \in J} X_\lambda = B \cap X = B.$$

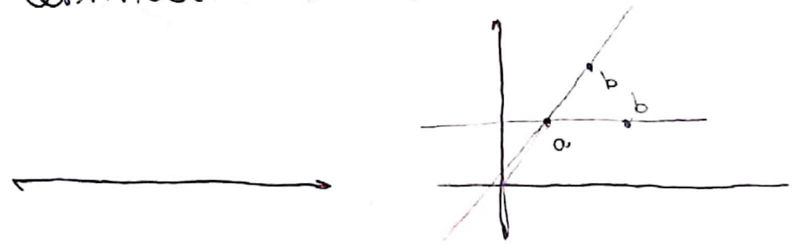
X é conexo.

Exemplo: Todo espaço vetorial $(E, \|\ \|)$ normado é conexo.

$$+ \ f: \mathbb{R} \to E$$
$$t \mapsto f(t) = a + t(b-a) \quad , a, b \in E \text{ fixos}$$

C

é contínua.



uma reta que passa por a e b.
Variando b, temos uma "horizontal"

$X_b = \{a + t(b-a) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$ é conexo.

Para cada $b \in E$, o cjto X_b é conexo e $a \in X_b$.

É claro que

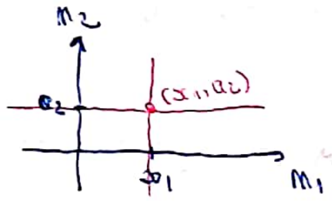
$$E = \bigcup_{b \in E} X_b$$

Pela proposição anterior, E é conexo.

* Toda bola aberta ou fechada num espaço vetorial normado é conexo.

Proposição: Se $M_1, \dots, M_n$ são conexos, então $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ é conexo

Demonstração: Seja $(a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$ fixo.
Para cada $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, o conjunto
$M_1 \times \{a_2\} \cup \{x_1\} \times M_2$ é conexo



$$\begin{aligned} f : M_1 &\to M_1 \times M_2 \\ a &\mapsto (a, a_2) \end{aligned}$$

$f(a) = (a, a_2)$ é contínua. Como M_1 é conexo então $\underset{M_1 \times \{a_2\}}{\underset{\shortparallel}{f(M_1)}}$ é conexa

$(x_1, a_2) \in M_1 \times \{a_2\} \cap \{x_1\} \times M_2$.

* $M_1 \times M_2 = \bigcup_{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2} \overbrace{(M_1 \times \{a_2\}) \cup (\{x_1\} \times M_2)}^{(a_1, a_2)}$, temos que $(a_1, a_2) \in W_{(x_1, x_2)}$

Espaços Métricos 05/02/2014

Conjuntos Conexos

Proposição: Se $M_1, \dots, M_n$ são espaços métricos conexos, então

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

é conexo.

Proposição: Se $M = M_1 \times \dots \times M_n$ é conexo, então M_i's são conexos.

Demostração:

Lembre que $\overset{\text{Projeção}}{P_i} : M \longrightarrow M_i$ é contínua e sobrejetora. Então

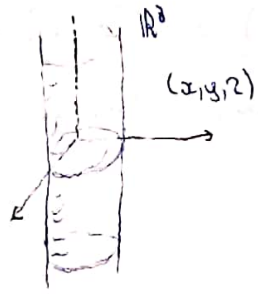
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x_1, \dots, x_n) = x_i$

$$P_i(M) = M_i$$

conexo.

Exemplo: $\mathbb{R}^n$ é conexo.

Exemplo:



$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$.

$S^1 \times \mathbb{R} = \{((x,y),z) . x^2 + y^2 = 1\}$

$h : C \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto ((x,y),z)$

S^1, $\mathbb{R}$ são conjuntos conexos, logo $S^1 \times \mathbb{R}$ é conexo. Portanto, usando h, C é conexo

Proposição: X é conexo em $\mathbb{R} \Leftrightarrow X$ é um intervalo em $\mathbb{R}$.

Demonstração: $\Leftarrow$ Já foi mostrado

$\Rightarrow$ Seja X conexo. Seja $a, b \in X$, com $a < b$. Tome $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$.
Suponha que $c \notin X$. Então

$$X = (X \cap (-\infty, c)) \cup (X \cap (c, +\infty))$$

é uma cisão. Como X é conexo, temos

$$X \cap (-\infty, c) = \emptyset \quad \text{ou} \quad X \cap (c, +\infty) = \emptyset$$

É claro que que $a \in (-\infty, c)$ e $b \in (c, +\infty)$.
Isto é uma contradição pois

$$a \in X \cap (-\infty, c) \text{ e } b \in X \cap (c, +\infty)$$

Portanto, $c \in X$.

Corolário. Seja (M, d) um espaço métrico e $f: M \to \mathbb{R}$ contínua, então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

Corolário: (Teorema do Valor Intermediário) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e se $f(a) < c < f(b)$, então, existe $x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = c.$$

Demonstração: Sabemos que $[a,b]$ é conexo, logo pelo corolário anterior $f([a,b])$ é um intervalo que contém $f(a)$ e $f(b)$. Então, como

$$f(a) < c < f(b),$$

Temos

$$c \in f([a,b])$$

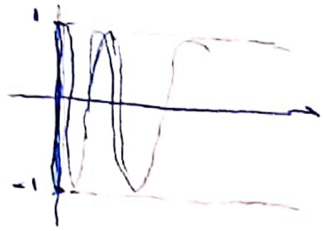
Significa que $\exists\, x \in [a,b]$ t.q. $f(x) = c$. É claro que $x \neq a$ e $x \neq b$, pois

$f(a) < f(x) = c < f(b)$

- componentes conexo
- arco conexo
- simplesmente conexo
- localmente conexo

Exemplo:

$\{(x,y) : y = \cos 1/x\} \; x \in (0,1)\}$ é conexo.



$\bar{A} = A \cup$ Segmento entre 1 e -1 mas não é arco-conexo.

$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.

* Seja $f : M \to N$ homeomorfismo e $a \in M$, ponto de acumulação de $X \subset M$.
Então $f(a)$ é um ponto de acumulação de $f(X)$.

Seja B um aberto em N, com $f(a) \in B$ (tem que mostrar que
$B \setminus \{f(a)\} \cap f(X) \neq \emptyset$).

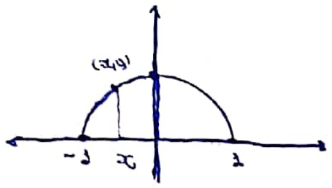
Agora $a \in f^{-1}(B)$, $f^{-1}(B)$ é aberto. Então como a é ponto de acumulação de X, $(f^{-1}(B) - \{a\}) \cap X \neq \emptyset$.

$$f((f^{-1}(B) - \{a\}) \cap X) \neq \emptyset$$

$$f(f^{-1}(B) - \{a\}) \cap f(X) \neq \emptyset$$

$$(B - \{f(a)\}) \cap f(X) \neq \emptyset$$

b



$S^1_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

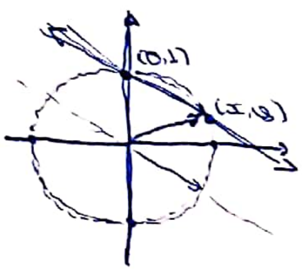
Tome $P: S^1_+ \to (-1,1)$

$(x,y) \mapsto P(x,y) = x$

$P((0,1)) = 0$

P é um homeomorfismo. Então como 0 é um ponto de acumulação em $(-1,1)$, temos que $(0,1)$ é um ponto de acumulação em S^1.

*



Projeção estereográfica.

$\pi : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$

$l(t) = (0,1) + t((x_0,y_0) - (0,1))$

$= (0,1) + t(x_0, y_0 - 1) =$

$= (tx_0, 1 + t(y_0 - 1))$

Temos que a reta $l(t)$ intersecta ao eixo x, quando

$1 + t(y_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1-y_0}$

$\pi : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \pi(x,y) = \frac{x}{1-y}$ é contínua.

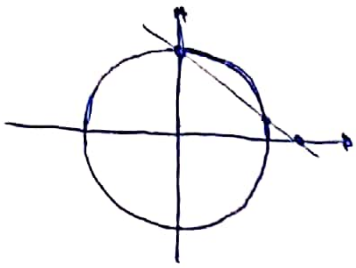
Projeção de x é contínua

$\pi(x,y) = \frac{x}{1-y}$

Projeção de y é contínua.

$1-y \neq 0$ pois $(0,1)$ foi excluído

Espaços Métricos 05/02/2014



$$g(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right)$$

$$(\pi \circ g)(t) = \pi \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right)$$

$$= \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{t^2-1}{1+t^2}} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-(t^2-1)}{1+t^2}} = \frac{2t}{2} = t$$

$$(g \circ \pi)(x,y) = g\left(\frac{x}{1-y}\right) =$$

$$\left(\frac{2\left(\frac{x}{1-y}\right)}{1+\left(\frac{x}{1-y}\right)^2}, \frac{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 - 1}{1+\left(\frac{x}{1-y}\right)^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{2x}{\cancel{(1-y)}}}{\frac{(1-y)^2+x^2}{(1-y)^{\cancel{2}}}}, \frac{\frac{x^2-(1-y)^2}{\cancel{(1-y)^2}}}{\frac{(1-y)^2+x^2}{\cancel{(1-y)^2}}} \right) =$$

$$= \left(\frac{2x(1-y)}{1-2y+\underbrace{y^2+x^2}_{1-y^2}}, \frac{\overbrace{x^2}^{1-y^2}-1+2y-y^2}{\underbrace{x^2}_{1-x^2}+1-2y+y^2} \right) \qquad \begin{matrix} x^2 = 1-y^2 \\ y^2 = 1-x^2 \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{2x(1-\cancel{y})}{2(1-\cancel{y})}, \frac{\cancel{2}(y-y^2)}{2(1-y)} \right) =$$

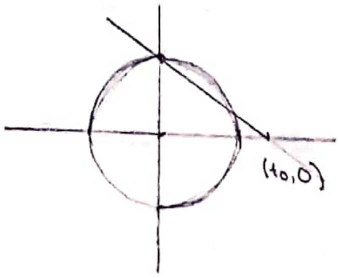
$$= (x,y)$$

Logo, $S^1 - \{(0,1)\}$ é conexo

$\overline{S^1 - \{(0,1)\}} = S^1$ é conexo

c

Espaços Métricos,   06/02/2014



- $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ é conexo
- $(0,1)$ é um ponto de acumulação
  - $S^1 - \{(0,1)\}$ homeomorfo à $\mathbb{R}$.

$l(s) = (0,1) + s((t_0,0)-(0,1))$

$= (t_0 s, 1-s)$ onde $x^2+y^2=1$

- $S^1 - \{(0,1)\}$ é conexo
- $S^1 - \{(0,1)\} = S^1$ é conexo

$$\pi : S^1 - \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \frac{x}{1-y}$$

$$(t_0 s)^2 + (1-s)^2 = 1$$

$$t_0^2 s^2 + 1 - 2s + s^2 = 1$$

$$s(t_0^2 s - 2 + s) = 0$$

$s \neq 0$,

$$s(t_0^2 + 1) = 2$$

$$s = \frac{2}{t_0^2+1}$$

$$g(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, 1 - \frac{2}{t^2+1}\right) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right).$$

Espaços Compactos

Definição: Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura para X, é uma família $\{C_j\}_{j\in I}$ de conjuntos C_j em M, $\forall_{j\in I}$, tal que

$$X \subset \bigcup_{j\in I} C_j.$$

Exemplo: $M = \mathbb{R}$, $X = (0,1)$

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$$

Com efeito, já que

$$\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \subset (0,1)$$

para todo $n \geq 1$, temos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \subset (0,1)$$

- Seja $x \in (0,1)$, pela propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$n > n_0 > \frac{1}{x_0}$; $\quad \frac{1}{n_0} < x < 1.$

Por outro lado, existe $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que (nov. pela prop. Arquimediana)

$$n > n_1 > \frac{1}{1-x};$$

$$\frac{1}{n_1} < 1-x;$$

$$x < 1 - \frac{1}{n_1}$$

Em resumo

$$\frac{1}{n_0} < x < 1 - \frac{1}{n_1}$$

Tome $n' = \max\{n_0, n_1\}$

Então

$$\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$$

Isto é, $x \in \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$.

Provamos que $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ é uma cobertura de $(0,1)$.

Definição: Seja $\{C_j\}_{j\in J}$ uma cobertura de X. Se $J' \subset J$ tal que

$$X \subset \bigcup_{j \in J'} C_j$$

Então dizemos que $\{C_j\}_{j\in I'}$ é uma subcobertura de $\{C_j\}_{j\in J}$.

Pode acontecer que

$$I' = \{j_1, \dots, j_m\}$$

Neste caso,

$$X \subset C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_m}$$

Cobertura aberta de X, se cada cjto da família é aberto em M.

Teorema (Borel-Lebesgue).

Se $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado limitado $(a<b)$. Toda cobertura aberta de $[a,b]$ tem uma subcobertura finita.

$[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} A_j$, A abertos, então $\exists\, j_1, j_2, \dots, j_n$, tal que

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k}$$

Demonstração:

* $t \in [a,b] \subset \bigcup_{j\in J} A_j$, então $\exists\, j_0 \in I$ tal que $t \in A_{j_0}$.

* Em particular, quando $t = a$.

* $X = \{x \in [a,b] : [a,x] \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_{j_k}$, para alguns $j_1, \dots, j_m \in I\}$

* Como $a \in A_{j_0}$, e A_{j_0} é aberto, existe $\delta > 0$ tal que

$$(a-\delta, a+\delta) \subset A_{j_0}, \text{ e } a+\delta < b.$$

Observe que para cada

$$x \in [a, a+\delta) \subset A_{j_0}$$

temos

$$[a,x] \subset A_{j_0}$$

Isso mostra que $X \neq \emptyset$.

* Tome

$$a \leq y < x, \quad x \in X, \text{ então}$$

$$[a,y] \subset [a,x] \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_{\delta_k},$$

e assim $y \in X$. Logo X é um intervalo.

* Tome $c = \sup X$, pois b é uma cota superior de X.

* X é da forma

$$[a,c) \text{ ou } [a,c]$$

* Mostremos que $c \in X$. Com efeito, da definição do sup dado $\varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que

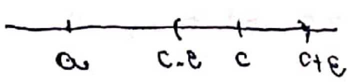
$$c - \varepsilon < x \leq c$$

Por outro lado, temos que $c \in A_{\delta_k}$, pois $a < c \leq b$. Logo, para $\varepsilon > 0$

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset A_{\delta_k}.$$

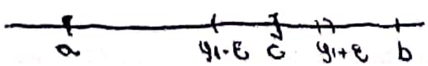
* $[a,x] \subset \bigcup_{i=1}^{p} A_{\delta_i}$

* $[a,c] \subset \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_{\delta_i}\right) \cup A_{\delta_k}$



* Isso significa que $c \in X$.
* $X = [a,c]$
* Afirmamos $c = b$

Se $c < b$, então $y = c + \varepsilon < b$, para algum $\varepsilon > 0$.



Esp. Métricos 06/02/14

Refaça o argumento anterior e mostre $g_1 \in X$.

Definição: Um espaço métrico M chama-se compacto se toda cobertura aberta de M possui uma subcobertura finita.

Exemplo: Os intervalos fechados limitados em $\mathbb{R}$ são conjuntos compactos.

$X \subset M$ compacto; toda cobertura $\{A_j\}_{j\in J}$ aberta em X possui uma subcobertura finita.

- Lembre que

$$A'_j = A_j \cap X \,,\ j \in I$$

onde A_j é um aberto em M.

$$X \subseteq \bigcup_{j\in J} A'_j \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j \Rightarrow X \subset \bigcup_{i=1}^{m} A'_{j_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_j .$$

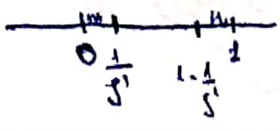
Exemplo. Vimos que $\{(1/n, 1-1/n)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma cobertura aberta de $(0,1)$ e não possui uma subcobertura finita para $(0,1)$. Portanto $(0,1)$ não é compacto.

Suponha que $\{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}\}$ é uma subcobertura finita de $(0,1)$. $j' = \max\{j_1, \dots, j_k\}$. Sabe-se que

$$A_n = \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) \subset \left(\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}\right) = A_{n+1}$$

Então

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_{j_k} = \left(\frac{1}{j'}, 1-\frac{1}{j'}\right) \not\supseteq (0,1)$$



G

Prova (Tarefa). Conjuntos fechados limitados são compactos.

Espaços Métricos Compactos

M é compacto $\Leftrightarrow$

Para toda $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, A_α abertos tal que

$$M = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

Existe $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, tal que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- Todo fechado limitado em $\mathbb{R}$ é compacto.
- Um ponto num espaço métrico é compacto.
- Se K e B são conjuntos compactos, $K\cup B$ é compacta.

Seja $K\cup B \subset \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ uma cobertura aberta.

Então

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

e

$$B \subset \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

Como K e B são compactos existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_p \in J$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$$

e

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{p} A_{\alpha_{n+i}}$$

Logo,

$$K\cup B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \cup \bigcup_{i=1}^{p} A_{\alpha_{n+i}} = \bigcup_{i=1}^{p} A_{\alpha_i}.$$

Portanto, $K \cup B$ é compacto.

* $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto finito de um espaço métrico é compacto.

* A reunião infinita de compactos poder não ser compacta.

$$(0,1) = \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\}$$

não é compacto sendo reunião de estes compactos.

Definição: Dizemos que uma familia $\{F_i\}_{i \in J}$ de subconjuntos de um espaço métrico M, tem a propriedade de intersecção finita se para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em J

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

Proposição: M é compacto $\Leftrightarrow$ toda familia $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de fechados em M com PIF, implica

$$\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha \neq \emptyset$$

Exemplo.

$$A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tem a PIF

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de fechados com a PIF e suponha que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$.

Então,

Espaços Métricos

$$M - \left(\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha\right) = M$$

$$\bigcup_{\alpha\in J} (M - F_\alpha) = M$$

Donde é claro que

$\{M - F_i\}_{i\in J}$ é uma cobertura aberta de M.

Como M é compacto, $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in J$ tal que

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} (M - F_{\alpha_i})$$

Logo,

$$\phi = M - \bigcup_{i=1}^{m} (M - F_{\alpha_i}) =$$
$$= \bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i}$$

$(\Leftarrow)$

Seja $M = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ uma cobertura aberta, então a família

$\{M - A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ é de cjtos fechados

e

$$\phi = \bigcap_{\alpha\in J} (M - A_\alpha)$$

Existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in J$ tal que

$$\phi = \bigcap_{i=1}^{m} (M - A_{\alpha_i})$$

Daí,

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}$$

$\therefore$ M é compacto.

Proposição: ~~Todo compacto~~ Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Então, cada fechado $F \subset M$ é compacto.

Demonstração:

Seja $F \subset M$ fechado e $F \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ uma cobertura aberta.

Então

$$M = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \cup (M - F)$$

Aqui temos uma cobertura aberta de M, porque $M-F$ é aberto. Logo, existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in J$ tal que

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i} \right) \cup (M - F)$$

Daí que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}.$$

Portanto, F é compacto.

Proposição: Todo subespaço compacto num espaço métrico é um conjunto fechado e limitado.

Demonstração:

- Vejamos F fechado

Seja $F \subset M$ compacto, M espaço métrico.

Seja $x \in \overline{F}$ e $x \notin F$

07/02/2014

Espaços Métricos

* $A_n = M - B[x; \frac{1}{n}]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, é um conjunto aberto

* $A_n \subseteq A_{n+1}$

* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[x; 1/n] = \{x\}$

* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = M - \{x\}$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (M - B[x; 1/n]).$$

$$= M - \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x, 1/n]$$

* $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pois $x \notin F$

* $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. tal que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i} = A_{n_1}$$

Estamos supondo que

$$n_1 = \max\{n_i \,;\, i = 1, \dots, k\}$$

* A Bola $B[x; 1/n_1] \cap F \neq \emptyset$ pois $x \in \overline{F}$.
* $x \in A_{n_1}$, significa $x \notin B[x; 1/n_1]$

* $y \in B[x; 1/n_1] \cap F$

* $y \in F \subset A_{n_1}$

$\Rightarrow y \notin B[x; 1/n_1]$

$\Rightarrow\Leftarrow$

(vejamos que F é limitado)

É claro

$$F \subseteq \bigcup_{x \in M} B(x;1)$$

é uma cobertura aberta de F em M. Como F é compacto, $\exists\, x_1, \dots, x_n \in M$ tal que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;1)$$

Temos que as bolas abertas são conjuntos limitados, e como F está contido na reunião finita de bolas abertas, F é limitado.

* $\ell^2(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

* $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}$ define uma norma.

* $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

*

$$\delta_{in} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq i \end{cases}$$

$e_i = (\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ é um elemento de $\ell^2(\mathbb{R})$

$e_1 = (1,0,0,0,\dots)$

$e_2 = (0,1,0,0,\dots)$

$\vdots$

$$\|e_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{in})^2 = 1 < +\infty$$

* É fácil ver que

$$F = \{e_i : i = 1,2,\dots\} \subset \ell^2(\mathbb{R}) \text{ é limitado.}$$

Espaços Métricos

07/02/2014

Sejam $e_i \neq e_j$ em $\mathcal{E}$

$$d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{in} - \delta_{jn})^2 \right)^{1/2} =$$

$$= (1+1)^{1/2} = \sqrt{2}, \quad \forall i,j = 1,2,\dots, i \neq j.$$

- $\mathcal{E}$ é limitado.
- $\mathcal{E}$ é fechado.
- $\mathcal{E}$ é enumerável
- Mas não é compacto.

Corolário. Se K_α compacto para cada $\alpha \in I$, então $K = \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ é compacto.

↓

- K é fechado
- $K \subset K_\alpha, \forall \alpha \in I$
- K é compacto.

Proposição: Sejam (M, d_1), (N, d_2) espaços métricos e $f: M \to N$ uma aplicação contínua. Se M é compacto, então $f(M)$ é compacto.

↓

- $f(M) \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, B_α abertos em N.
- $f^{-1} f(M) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right)$
- $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$

Como f é contínua, $f^{-1}(B_\alpha)$ são abertos. Portanto temos uma cobertura aberta de M.

Como M é compacto, $\exists x_1, \dots, x_m$, t.q.

$$* \quad M = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(B_{x_i})$$

$$f(M) = f\left(\bigcup f^{-1}(B_{x_i})\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} f f^{-1}(B_{x_i}) =$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i}.$$

* Portanto, $f(M)$ é compacto. [Exercícios: 1, 3 ; 10, 11
pg 264 ; pg 265

Espaços Métricos, 11 fev. 2014

1.

a) S^1 é homeomorfo à $\mathbb{R}$?

Não. Suponha que S^1 é homeomorfo à $\mathbb{R}$. Existe uma aplicação bijetora, contínua com inversa contínua.

Então $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ equipotente $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Mas $S^1 \setminus \{(0,1)\}$ é conexo e

$\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ é desconexo. Pronto!

- Se $f: M \to N$ é uma aplicação contínua e $K \subset M$ compacto, então $f(K)$ é compacto em N

Lembre.

$$\varphi: [0:2\pi] \to S^1$$
$$\theta \mapsto f(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

é contínua. Sabemos que $[0,2\pi]$ é compacto em $\mathbb{R}$. Então

$$\varphi([0,2\pi]) = S^1 \text{ é compacto}$$

Como $\mathbb{R}$ não é compacto, S^1 não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

B) $g, f: M \to \mathbb{R}$ contínuas

Mostre que

$$A = \{x \in M : f(x) \neq g(x)\} \text{ é aberto em } M.$$

Solução: Temos

$$f-g: M \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

é uma aplicação contínua.

Por outro lado,

$$A = \{x \in X : (f-g)(x) \neq 0\} =$$

$$= \{x \in X : (f-g)(x) > 0\} \cup \{x \in X : (f-g)(x) < 0\} =$$

$$= (f-g)^{-1}((0,+\infty)) \cup (f-g)^{-1}((-\infty,0))$$

Já que $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ são abertos em $\mathbb{R}$ e $f-g$ contínua, temos A aberto.

2. Mostre que um espaço métrico M é conexo $\Leftrightarrow$ toda função contínua $f : M \to \{0,1\}$ é constante.

Sol.

$\Rightarrow$ Se M é conexo então $f(M)$ é conexo.

Logo

$$f(M) = \{0\} \text{ ou } f(M) = \{1\}$$

$\Leftarrow$ Suponha uma cisão $M = A \cup B$. Então $f(M) = f(A \cup B) = \{0\} = f(A) \cup f(B)$

se $0 \in f(A)$, significa que $f(B) = \emptyset$, portanto, $B = \emptyset$, portanto M é conexo

3. Dado um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}$, mostre que existem sequências (x_n), (y_n) em X tais que $\lim x_n = \inf X$ e $\lim y_n = \sup X$.

Solução:

X é limitado significa, que existem, c, d em $\mathbb{R}$ tais que

$$c \leq x \leq d, \ \forall x \in X$$

Existe $d_1 = \sup X \neq +\infty$.

Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\ x_\varepsilon \in X$ tal que

$$d_1 - \varepsilon < x_\varepsilon \leq d_1$$

- Para $n=1$, $\varepsilon = 1$, existe $x_1 \in X$

$$d_1 - 1 < x_1 \leq d_1$$

- Para $n=2$, $\varepsilon = 1/2$, existe $x_2 \in X$

$$d_1 - \frac{1}{2} < x_2 \leq d_1$$

Então para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $\exists\ x_n \in X$ tal que

$$d_1 - \frac{1}{n} < x_n \leq d_1$$

+ Existência

(x_n) em X

$$-\frac{1}{n} < x_n - d_1 \leq 0;$$

$$0 \leq d_1 - x_n < \frac{1}{n};$$

Seja $\delta > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n_0 > \frac{1}{\delta}$. Assim, para cada $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \delta$ e pela construção de sequência (x_n), para estes $n \geq n_0$.

$$0 \leq |x_n - d_1| = d_1 - x_n < \frac{1}{n} < \delta.$$

Significa

$$\lim x_n = d_1.$$

b

4.

$$a_n = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{n+1}\right); & \text{se } n = 3k \\ (-1)^n \frac{1}{n}; & \text{se } n = 3k-1 \\ \frac{n^2+3}{n^2+3}; & \text{se } n = 3k-2 \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+2}{n^2+3} = 1$$

Já é o suficiente para concluirmos que a_n não é convergente.

5. $K \subset X \subset Y$

K é compacto em $X \Leftrightarrow$ é compacto em Y

Sol.

$\Rightarrow$ Seja K compacto em X, e suponha $K \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ uma cobertura aberta em Y. Logo $K = X \cap K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \cap X = \left(\bigcup_{\alpha \in J} (A_\alpha \cap X)\right)$

Para cada $\alpha \in J$, $A_\alpha \cap X$ é aberto em X. Então $\{A_\alpha \cap X\}$ é uma cobertura aberta ~~em~~ X de K. Logo, $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in J$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (A_{\alpha_i} \cap X) \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}. \quad \text{(Pronto)}$$

$\Leftarrow$ (Parecido.)

Seja K compacto em Y e suponha $K \subset \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$, uma cobertura aberta de K em X. Então para cada $\alpha \in J$ $\exists\, A_\alpha$ aberto em Y tal que

$$B_\alpha = A_\alpha \cap X \subset A_\alpha$$

Espaços Métricos, 11/02/2014

$K \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ é uma cobertura aberta em Y de K. Portanto, existem

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}$$

Daí,

$$K \cap X \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_{\alpha_j} \cap X$$

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{m} (A_{\alpha_j} \cap X)$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m} B_{\alpha_j} \quad . \text{ pronto}$$

A imagem inversa de um cjto aberto por uma f. contínua é um cjto aberto, mas a imagem direta de um cjto aberto pode não ser um cjto aberto.

Ex. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = x^2$

$(-1,1)$ é aberto em $\mathbb{R}$

$f((-1,1)) = [0,1)$ $\nexists$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Definição: Uma aplicação $f: M \to N$, M, N espaços métricos diz-se aberta (fechada) se para cada aberto (fechado) $A \subset M$, $f(A)$ é aberto (fechado) em N.

C

Um homeomorfismo é uma aplic. aberta e fechada.

Sejam M_1 e M_2 espaços métricos. Então

$$P_i : M_1 \times M_2 \to M_i$$
$$(x_1, x_2) \mapsto P_i(x_1, x_2) = x_i$$

são abertas.

- Mostrar que todo aberto Z em $M_1 \times M_2$ é da forma

$$Z = A \times B$$

onde B é aberto em M_2 e A é aberto em M_1

* $P_1(Z) = P_1(A, B) = A$.

Corolário. Se M é compacto então toda aplicação $f: M \to N$ contínua é uma aplicação fechada.

. Seja $F \subseteq M$ fechado. Logo, F é compacto em M. Como f é contínua, $f(F)$ é compacto em N. Então $f(F)$ é fechado em N.

Corolário. $\xrightarrow{} M$ compacto. Toda ~~bijeção~~ bijeção $f: M \to N$ contínua, é um homeomorfismo.

∴

$\forall A \subseteq M$; $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$.

Corolário. Se M é compacto, toda função $f: M \to \mathbb{R}$ contínua é limitado.

Exemplo: Sejam M, N esp. métricos e suponha que M é compacto. O cjto $\mathcal{C}(M;N) = \{f: M \to N :$ contínuas$\}$; $d: \mathcal{C}(M;N) \times \mathcal{C}(M;N) \to \mathbb{R}$

$$(f,g) \longmapsto d(f,g) = \sup_{x \in N} d(f(x), g(x))$$ métrica uniforme

Espaços Métricos : 11/02/2014

O conjunto

$$\mathcal{C}(M;N) = \{f: M \to N : \text{contínuas}\}$$

$$d_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(M;N) \times \mathcal{C}(M \times N) \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longmapsto d_{\mathcal{C}}(f,g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x))$$

↓
métrica uniforme

$f_n \to f$ em $\mathcal{C}(M;N)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_{\mathcal{C}}(f,g) = \sup_{x \in X} d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

* $d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X, \forall n \geq n_0$. (uniforme pois serve para todo $x \in X$)

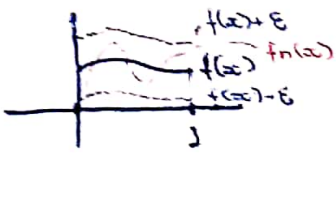
Exemplo: $M = [0,1]$, $N = \mathbb{R}$

$f_n \to f$ em $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1], n \geq n_0$$

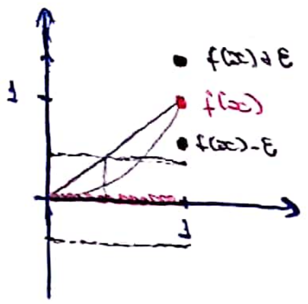
$$-\varepsilon + f(x) < f_n(x) < \varepsilon + f(x)$$



d

$f_n(x) = x^n \quad , \quad x \in [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



$f_n \to f$ pontualmente

3

Espaços Métricos, 12/02/2014

Compactos

$A \subset M$ é compacto se para toda coleção $\{A_i\}_{i\in J}$ de abertos em M, com

$$A \subset \bigcup_{i \in J} A_i ,$$

existem $i_1, \dots, i_m \in J$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_{i_j}$$

- A é compacto $\Rightarrow$

  A é limitado e fechado.

- $A \subset M$ compacto, e $f: M \to N$ contínua $\Rightarrow f(A)$ é compacto $\Rightarrow$

  $f(A)$ é limitado e fechado.

$\mathcal{F} = \{ f: M \to N ;$ funções$\}$

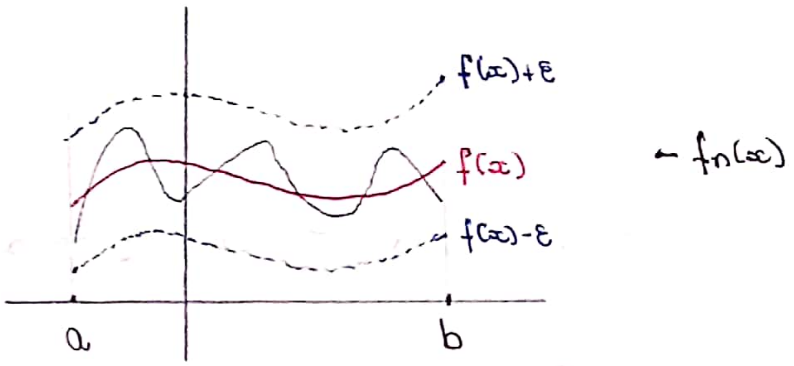
M, N espaços métricos

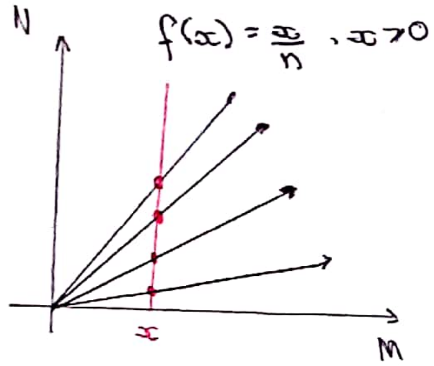
Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções, $f_n : M \to N$
$x \mapsto f_n(x)$

Dizemos que (f_n) converge uniformemente a f, se para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$\downarrow$
$n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para cada $x \in M$ e cada $n \geq n_0$.

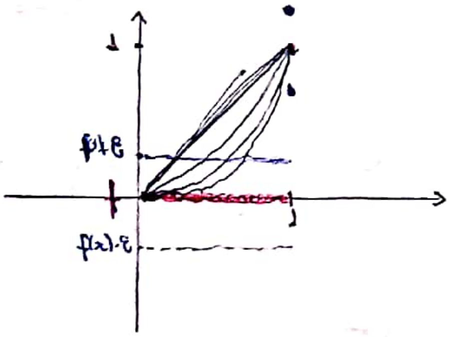




f_n converge pontualmente a f, se para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 = n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ ($x \in M$)
tal que

$$d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_0$$

$f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1) \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$



Espaços Métricos, 12/02/2014

Obs.

$f_n \to f$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f \Leftrightarrow \text{convergência uniforme}$$

Às vezes vale para a conv. pontual, mas nem sempre.

M é compacto

$\mathcal{C}(M;N) = \{f: M \to N : \text{contínua}\}$ é um espaço métrio

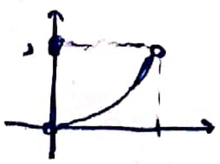
$$d_{\mathcal{C}}(f,g) = \sup_{x\in M} d_N(f(x), g(x)).$$

Teorema. Se M é compacto e $f: M \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem m_0, m_1, em M tal que

$$f(m_0) = \sup_{x\in M} f(x)$$

$$f(m_1) = \inf_{x\in M} f(x)$$

Exemplo: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2$



$$\sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$$

$$\inf_{x\in(0,1)} f(x) = 0$$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = x^2$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 1 = f(1) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

$\operatorname{Inf}\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0 = f(0) = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$

Demonstração. Sabemos que como M é compacto, então $f(M)$ é limitado, então

$$d_1 = \sup_{x\in M} f(x),$$

$$d_0 = \operatorname{Inf}_{x\in M} f(x),$$

$$d_0 \leq f(x) \leq d_1, \ \forall x \in M$$

isto significa que existe m_0 e $m_1 \in M$ tal que

$$f(m_0) = d_1$$

$$f(m_1) = d_0$$

Espaços Métricos Completos

Definição: Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que (x_n) é uma sequência de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

Espaços Métricos, 12/02/2014

para cada $m, n \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Exemplo: $M = \mathbb{Q}$, sabemos $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Significa que se α é irracional ($\alpha \notin \mathbb{Q}$)
Existe uma sequência (r_n) em $\mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$.

Proposição: Toda sequência convergente num espaço métrico é de Cauchy.
Demonstração: seja (x_n) uma seq. convergente a l em M.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Seja $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq n_0$$

Ora, para $m, n \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(x_m, l)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pelo exemplo anterior concluímos que não toda seq. de Cauchy é convergente.

- Toda sequência de Cauchy é limitada.

Proposição: **Se uma subsequência** de uma sequência de Cauchy, é convergente para um l, então a a sequência toda converge para l.

Demonstração:

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Seja (x_{n_k}) convergente para l em M, uma subsequência de (x_n).

Seja $\varepsilon > 0$ dado, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para cada $n_k \geq n_0$

$$d(x_{n_k}, l) < \varepsilon/2$$

Por outro lado, $\exists\, n' \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\, n, m \geq n'$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

para cada $n > n'' = \max\{n_0, n'\}$,

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, l)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Já foi mostrado que

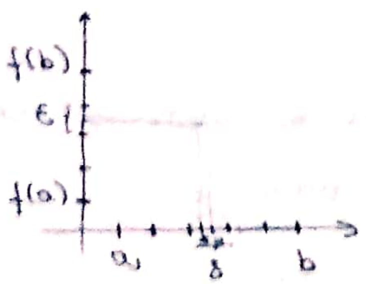
$f: M \to N$ contínua $\Leftrightarrow \forall\, x_n \to x$ em M, $f(x_n) \to f(x)$ em N

E pra de Cauchy? $f(x_n)$ também será de Cauchy? Nem sempre, apenas quando for contínua uniformemente

Definição: Dizemos que $f: M \to N$ é uniformemente contínua se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer x, y em M

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

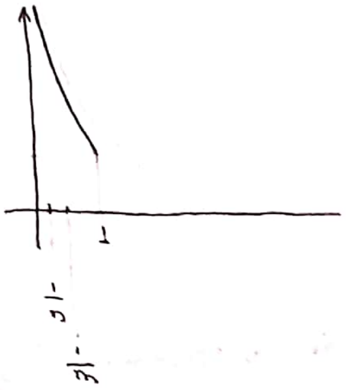
Interpretação do professor



Se eu dividir o contradomínio em pedaços de tamanho ε, consigo dividir o domínio em pedaços de tamanho δ, tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Espaço Métrico, 12/02/2014

Exemplo: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua



$\varepsilon = 1$, Dado $\delta > 0$ existe

$m = 1000n > n > \frac{1}{\delta}$; $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \delta$

Temos

$$d\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) < \delta$$

Agora

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = m \quad \text{e}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n$$

$$d\left(f\left(\frac{1}{m}\right), f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = d(m,n) = |m-n| = 999n > 1$$

Obs. Se tivéssemos tomado $f: [1/2, 1] \to \mathbb{R}$ teríamos a continuidade uniforme.

Exemplo. Se $f: M \to N$ é Lipschitz, então f é uniformemente contínua.

Existe $c > 0$ tal que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c\, d_M(x,y)$$

$\forall x, y \in M$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta < \varepsilon/c$

$\forall\, x, y \in M$, com

$$d_M(x,y) < \delta,$$

então,

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y) < c\delta < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Proposição. Seja $f: M \to N$ uniformemente contínua, então a imagem de toda sequência de Cauchy é uma sequência de Cauchy.

Espaços Métricos, 13/02/2014

Sequência de Cauchy (x_n) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \ \forall m, n \geq n_0$$

* Toda sequência de Cauchy é limitada.

* Se uma subsequência de uma sequência de Cauchy é convergente a ℓ, então a sequência toda também converge à ℓ.

* Definimos o que é uma ~~sequência~~ função uniformemente contínua

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

* Se $f: M \to N$ uniformemente contínua, então
Toda sequência (x_n) em M é transformada por f, numa sequência de Cauchy $(f(x_n))$ em $\mathbb{N}$.

Definição: Dizemos que um espaço métrico (M,d) é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente, isto é, existe $\ell \in M$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ell.$$

Exemplos: $\mathbb{Q}$ não é completo | $M = (0,1)$ não é completo. Tome $x_n = 1/n, n \geq 1$, é Cauchy mas $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin M$.

Proposição: $\mathbb{R}$ é completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma seq. de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o conjunto $X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$

* $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

* ~~XXX~~ $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$

X_n é uma sequência de conjuntos decrescentes.

* A sequência (x_n) é limitada, então para cada $n \in \mathbb{N}$

X_n é limitado.

* Defina $a_n = \inf X_n < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

* $a_1 \leq a_2 \leq \dots$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em $\mathbb{R}$

* $a_n \leq \sup X_1 = b, \forall n \geq 1$.

(a_n) é limitada

* Portanto, existe $l \in \mathbb{R}$, tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = l$.

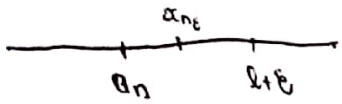
* Dado $\varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon, \ \forall n \geq m_0$$

$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$;

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon; \ \forall n \geq m_0$$

Espaços Métricos, 13/02/2014



• Argumento de sempre

$$\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\left(\varepsilon = \frac{1}{m}\right)$, existe $n_0\left(\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{N}$ e um $n_m \geq n_0\left(\frac{1}{m}\right)$ t.q.

$$l - \frac{1}{m} < a_n < x_{n_m} < l + \frac{1}{m}$$

$$|x_{n_m} - l| < \frac{1}{m}$$

• $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n) que converge para l.

• Portanto (x_n) converge para $l \in \mathbb{R}$.

Proposição: Se $F \subset M$ fechado, M espaço métrico completo, então F é completo.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em F. Como M é completo, então $\exists\, l \in M$ tal que

$$x_n \to l \text{ em } M$$

Logo $l \in \overline{F} = F$. Logo F é completo.

Proposição: Seja F subespaço completo de M. Então F é fechado em M.

Demonstração: Seja $l \in \overline{F}$. Existe uma (x_n) em F tal que

$$x_n \to l \quad \text{em } M$$

Logo (x_n) é Cauchy em F. Mas F é completo, portanto $l \in F$.

Proposição: Sejam M_1 e M_2 espaços métricos.

M_1 e M_2 são completos $\Leftrightarrow$ $M_1 \times M_2$ é completo.

Corolário. $\mathbb{R}^n$ é completo.

Teorema. Seja M um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes

(i) M é compacto;

(ii) Todo subconjunto infinito em M tem ponto de acumulação;

(iii) Toda sequência em M tem uma subsequência convergente em M.

(iv) M é completo e totalmente limitado.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Seja M compacto.

- $X \subset M$, $X' = \emptyset$

  Então $\overline{X} = X \cup X' = X$.

  Logo X é fechado, assim X é compacto.

- X é discreto
- Conclusão X é finito

↳ Imagine X infinito. Lembre que para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que

$$B(x; r_x) = \{x\}$$

$X = \bigcup_{x \in X} B(x; r_x)$, para $x \neq y$, $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$.

Espaços Métricos, 13/02/2014

• (ii) ⇒ (iii)

Seja (x_n) uma sequência em M.

<u>Caso 1</u>. (x_n) finita

$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ $(0, 1, 1, 2, \ldots)$

$\{x_n\} = \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$

Existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) constante.

<u>Caso 2</u> (x_n) infinita.

Então existe $l \in M$ ponto de acumulação de $\{x_n\}$.

Logo $\exists$ uma subsequência de (x_n) convergente a l, em M.

• (iii) ⇒ (iv)

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M.

Logo, da hipótese existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) convergente em M. Portanto (x_n) é convergente em M.

Definição: Dizemos que um espaço métrico é totalmente limitado se para cada $\varepsilon > 0$, existem $X_1, \ldots, X_n$ subconjuntos de M, com $\text{dia}(X_i) < \varepsilon$ tal que

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

$\text{dia}\, X = \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$

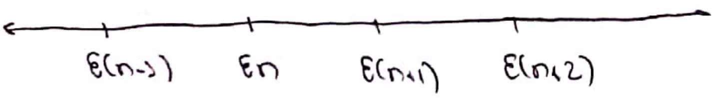
Exemplo: Uma bola aberta $B(a;r)$ num espaço métrico é um cjto limitado, pois $x,y \in B(a;r)$;

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r$$

$$\Rightarrow \quad \text{dia}\, B(a;r) \leq 2r$$

Exemplo: Todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado é totalmente limitado.

Para cada $\varepsilon > 0$



$$X \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$$

Exemplo: $\ell^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+} ; \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$

$$\|(a_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}$$

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $e_n = (\delta_{in})$, onde $\delta_{in} = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$

$$= (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$$

$\downarrow$ n-ésimo

• $m \neq n$

$\|e_m - e_n\| = \sqrt{2} \Rightarrow$ é limitado, mas não é totalmente limitado pois, tomando $\varepsilon < \sqrt{2}$,

$$B(e_m; \varepsilon) \cap B(e_n; \varepsilon) = \emptyset \quad , \text{ se } m \neq n$$

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B(e_m; \varepsilon)$, mas não consigo uma finita.

LISTA 1

1. Prove que toda norma $\| \ \|$ em $\mathbb{R}$ é da forma $\|x\| = a \cdot |x|$, onde $a > 0$ é uma constante e $|x|$ é o valor absoluto de x. Conclua que toda norma em $\mathbb{R}$ provém de um produto interno.

2. A fim de que uma métrica d, num espaço vetorial E, seja proveniente de uma norma, é necessário e suficiente que, para x, $a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários, se tenha $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

3. Em todo espaço métrico (M, d), tem-se

$$B[a;r] = \bigcap_{s>r} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; r + \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\{a\} = \bigcap_{s>0} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; \frac{1}{n}\right).$$

Exprima, dualmente, cada bola aberta de M como uma reunião de bolas fechadas.

4. Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos. Usando a métrica $d[(x,y),(x\prime,y\prime)] = \max\{d_M(x,x\prime), d_N(y,y\prime)\}$ definida sobre $M \times N$, mostre que a esfera de centro (a,b) e raio r em $M \times N$ é igual a $(B[a;r] \times S(b;r)) \cup (S(a;r) \times B[b;r])$.

5. Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$ o disco unitário aberto de plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Dado $a = (5,0)$, prove que $d(a, X) = 4$.

6. Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_{p+1} = \cdots = x_n = 0\}$. Usando em $\mathbb{R}^n$ a métrica euclidiana, prove que se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ então $d(\mathbf{a}, X) = \sqrt{(a_{p+1})^2 + \cdots + (a_n)^2}$.

7. Dados X, Y subconjuntos de um espaço métrico M, tem-se $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo em que esta última inclusão não é igualdade.

8. Seja $S = (\mathbb{R}^2 - S^1) \cup \{(1,0)\}$. Mostre que, para toda reta r em $\mathbb{R}^2$ tem-se $r \cap S$ aberto em r mas S não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

9. Não é verdade que $X \subset Y$, implique que $\partial X \subset \partial Y$. Entretanto, tem-se $\partial(int\ S) \subset \partial S$.

10. Todo aberto não-vazio $A \subset \mathbb{R}^m$ contém pelo menos um ponto $x = (x_1, \ldots, x_m)$ cujas coordenadas são racionais. Concluir que se $\mathcal{C}$ é uma coleção de abertos não-vazios dois a dois disjuntos em $\mathbb{R}^m$ então $\mathcal{C}$ é enumerável.