Construção e propriedades fundamentais do processo de Poisson

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ iid exponenciais de taxa $\lambda > 0$: intervalos de tempo entre ocorrências de certos eventos a partir de um tempo inicial $t = 0$.

T_1 é o tempo a partir do tempo inicial até a ocorrência do 1o. evento, e para $i \geq 2$, T_i é o tempo a partir de T_{i-1} até a ocorrência do i-ésimo evento.

Para $t \geq 0$, seja N_t o número de eventos ocorridos desde o tempo inicial, isto é,

$$N_t = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \tag{1}$$

onde $S_0 = 0$, e para, $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ é o tempo até a ocorrência do n-ésimo evento.

Observação

Note que N_t é uma função de t e $T_1, T_2, \ldots$, indicada da seguinte forma.

$$N_t = \Phi(t; T_1, T_2, \ldots), \tag{2}$$

onde Φ é a relação em (1).

O processo $(N_t)_{t \geq 0}$ é dito *processo de Poisson* de taxa λ, denotado $\mathrm{PP}(\lambda)$.

Teorema

Para todo $t > 0$ fixo

$$N_t \sim \textit{Poisson}(\lambda t). \tag{3}$$

Demonstração Queremos mostrar que

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Vamos usar os seguintes fatos.

Fato 1 Para todo $t > 0$ e $k = 1, 2, \dots$

$$N_t < k \Leftrightarrow S_k > t,\ \text{e} \tag{5}$$

Fato 2 Para todo $n \geq 1$

$$S_n \sim \ \text{Gama}(n, \lambda), \tag{6}$$

isto é, S_n é uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade

$$f_{S_n}(s) = \lambda\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\ s > 0. \tag{7}$$

Dos Fatos 1 e 2, temos que para $t > 0$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$ fixos,

$$\mathbb{P}(N_t < k+1) = \mathbb{P}(S_{k+1} > t) = \int_t^\infty f_{S_n}(s)\, ds = \int_t^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, ds. \quad (8)$$

Integrando o lado direito por partes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t < k+1) &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[\left(-e^{-\lambda s}\, s^k\right)\Big|_t^\infty + \int_t^\infty e^{-\lambda s}\, s^{k-1}\, ds \right] \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t}\, t^k + \frac{\lambda^k}{k!} \int_t^\infty e^{-\lambda s}\, (k-1) s^{k-1}\, ds \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \int_t^\infty \lambda\, e^{-\lambda s}\, \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\, ds \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \mathbb{P}(N_t < k). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Iterando (9), obtemos

$$\mathbb{P}(N_t < k+1) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \tag{10}$$

e, logo,

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(N_t < k+1) - \mathbb{P}(N_t < k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \qquad \square$$

Teorema

Sejam $k \geq 2$ *e* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. *Então*

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \text{ são v.a.'s independentes} \tag{11}$$

tais que

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \sim N_{t_i - t_{i-1}}, \; i=2,\ldots,k. \tag{12}$$

Observação

Este resultado diz que os incrementos de (N_t) *são independentes e estacionários.*

O Teorema 2 é uma consequência do seguinte resultado.

Lema

Para todo $t > 0$ fixo, sejam

$$T_1^{(t)} = S_{N_t+1} - t; \text{ e para } i \geq 2 \tag{13}$$

$$T_i^{(t)} = T_{N_t+i}. \tag{14}$$

Então

$$N_t, T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \ldots \text{ são v.a.'s independentes e} \tag{15}$$

$$(T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \ldots) \sim (T_1, T_2, \ldots) \tag{16}$$

Observação

$T_1^{(t)}$ é tempo transcorrido desde t até a ocorrência do próximo evento, e $T_i^{(t)}$, $i \geq 2$, é o tempo transcorrido desde $T_{i-1}^{(t)}$ até a ocorrência do próximo evento.

Demonstração do Teorema 2 Note que para $t \geq 0$

$$N_{s+t} - N_t = \Phi(s; T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots) =: N_s^{(t)}. \tag{17}$$

(15) $\Rightarrow N_t$ e $(N_{s+t} - N_t)_{s \geq 0}$ independentes.

Tomando $t = t_1$ no Lema, como $(N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}})$ é uma função de $(N_{s+t_1} - N_{t_1})_{s \geq 0}$:

$$N_{t_1} \text{ e } (N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \text{ são independentes.} \tag{18}$$

$$(16) \Rightarrow (N_{s+t_1} - N_{t_1})_{s \geq 0} = (N_s^{(t_1)})_{s \geq 0} \sim (N_s)_{s \geq 0}. \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \text{Segue que} \quad & (N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \\ \sim \quad & (N_{t_2 - t_1}, N_{t_3 - t_1} - N_{t_2 - t_1}, \dots, N_{t_k - t_1} - N_{t_{k-1} - t_1}). \end{aligned} \tag{20}$$

$k = 2$: (19,20) $\Rightarrow$ (11,12).

Caso geral: iteração do argumento acima, aplicado ao l.d. de (20), que tem a mesma forma que (11).

Demonstração do Lema 1 Basta mostrar que para todo $k, \ell \geq 0$ e $t_1, \ldots, t_\ell > 0$,

$$\mathbb{P}(N_t = k, T_1^{(t)} > t_1, \ldots, T_\ell^{(t)} > t_\ell) = \mathbb{P}(N_t = k)\,\mathbb{P}(T_1 > t_1, \ldots, T_\ell > t_\ell). \tag{21}$$

Note que

$$N_t = k \Leftrightarrow S_k \leq t, S_{k+1} > t, \tag{22}$$

do que segue que o lado esquerdo de (21) vale

$$\mathbb{P}(S_k \leq t, S_{k+1} > t, S_{k+1} - t > t_1, T_{k+2} > t_2, \ldots, T_{k+\ell} > t_\ell). \tag{23}$$

Obs: (22) $\Rightarrow$ $T_1^{(t)} = S_{k+1} - t$; $T_i^{(t)} = T_{k+i}$, $i = 2, \ldots, \ell$.

(23) $=$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t ds\, f_{S_k}(s)\, \mathbb{P}(T_{k+1} > t_1 + t - s,\, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+\ell} > t_\ell) \\
=&\int_0^t ds\, f_{S_k}(s)\, \mathbb{P}(T_1 > t_1 + t - s)\, \mathbb{P}(T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
=&\int_0^t ds\, f_{S_k}(s)\, \mathbb{P}(T_1 > t - s)\, \mathbb{P}(T_1 > t_1)\, \mathbb{P}(T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
=&\int_0^t ds\, f_{S_k}(s)\, \mathbb{P}(T_{k+1} > t - s)\, \mathbb{P}(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
=&\mathbb{P}(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \int_0^t ds\, f_{S_k}(s)\, \mathbb{P}(T_{k+1} > t - s) \\
=&\mathbb{P}(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell)\, \mathbb{P}(S_k \le t, S_k + T_{k+1} > t) \\
=&\mathbb{P}(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell)\, \mathbb{P}(S_k \le t, S_{k+1} > t) \\
=&\mathbb{P}(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell)\, \mathbb{P}(N_t = k) \quad \square
\end{aligned}
$$

Corolário

$(N_t)_{t\geq 0}$ é Markoviano.

Prova. Dados $0 < t_1 < \ldots < t_n < t < t'$, $i_1 \leq \ldots i_n \leq i \leq j$,

$$\begin{aligned} & P(N_{t'} = j | N_t = i, N_{t_1} = i_1, \ldots, N_{t_n} = i_n) \\ = \; & P(N_{t'} - N_t = j - i | N_t = i, N_{t_1} = i_1, \ldots, N_{t_n} = i_n) \\ = \; & P(N_{t'} - N_t = j - i) = P(N_{t'-t} = j - i), \end{aligned} \tag{24}$$

onde a segunda igualdade segue da independência entre

$$N_{t'} - N_t \text{ e } (N_t, N_{t_1}, \ldots, N_{t_n})$$

estabelecida pelo Teorema 2.

(24) então estabelece a propriedade de Markov: dado o presente (N_t), o futuro ($N_{t'}$) não depende do passado ($N_{t_1}, \ldots, N_{t_n}$) — note que o lado esquerdo de (24) é uma função de i, j, t, t' apenas, não depende de $i_1, t_1, \ldots, i_n, t_n$.