MAE 5834 - Estatística Avançada I

Prova 1 – 2º semestre de 2015 – Prof. Silvia L.P. Ferrari

A prova tem 8 itens, todos com a mesma pontuação. Escolha 7 entre os 8. Indique na primeira página de sua prova qual o item que você decidiu excluir. Boa prova!

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem distribuição beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, e função densidade de probabilidade
$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{I}_{(0,1)}(x).$$
Suponha que $\alpha = \beta^2$. Determine uma estatística suficiente minimal para β.

2. Sejam $X \sim b(m, \theta)$ e $Y \sim b(n, \theta^2)$ independentes; m e n são inteiros positivos fixados e $\theta \in (0,1)$ é um parâmetro desconhecido. Mostre que (X, Y) é uma estatística suficiente mas não é completa.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem função densidade de probabilidade
$$f_{\theta,\gamma}(x) = \frac{(\gamma+1)x^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}, \ x \in [0, \theta],$$
em que $\theta > 0$ é desconhecido e $\gamma > 0$ **é conhecido**.
   (a) Mostre que $X_{(n)} = \mathrm{maximo}(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa.
   (b) Obtenha o estimador não viciado de variância uniformemente mínima de θ.
   (c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ.
   (d) Mostre que a distribuição de X é uma família de escala. Obtenha o estimador equivariante por escala de risco mínimo para θ sob perda $[(d-\theta)/\theta]^2$. Veja nota ao final da prova.
   (e) Suponha que $n = 1$ e que γ seja **desconhecido**. Mostre que não existe estimador não viciado de γ.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com $X_i \sim N(m_i\mu, m_i\sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$, em que $m_1, \ldots, m_n$ são inteiros positivos conhecidos, e $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 > 0$ são desconhecidos. Essa situação ocorre quando se observam os totais de n grupos, em que o i-ésimo grupo é formado de m_i observações independentes de $N(\mu, \sigma^2)$. Encontre os estimadores não viciados de variância uniformemente mínima de μ e σ^2.

Nota: Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta
$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \tau > 0,$$
em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\mathbf{X})$ é equivariante por escala se $\delta(b\mathbf{X}) = b^r\delta(\mathbf{X})$, para todo $b > 0$. Pode-se mostrar que o estimador de Pitman de τ^r, dado por $\delta^*(\mathbf{X})$ sendo
$$\delta^*(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n)dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n)dv},$$
é um estimador equivariante por escala de risco mínimo sob perda $[(d-\tau^r)/\tau^r]^2$.

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Prova 2 – 2º semestre de 2015 – Prof. Silvia L.P. Ferrari

A prova tem 7 itens, todos com a mesma pontuação. Escolha 6 entre os 7 e indique na primeira página qual o item excluído. Boa prova!

1. Suponha que, dado θ, $X_1, \ldots, X_n$ $(n > 1)$ sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com densidade $f(x|\theta) = \exp(\theta - x)$, $x > \theta$. Considere que a distribuição a priori para θ é exponencial padrão. Encontre a densidade a posteriori de θ e o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição de Poisson de média λ. Mostre que $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ é estimador minimax de λ sob perda $L(\lambda, d) = (d - \lambda)^2/\lambda$. Sugestão: Considere uma distribuição a priori $\mathrm{Gama}(a, b)$ para λ, com $a = 1$. Use resultados que relacionam estimador de Bayes e minimax, e faça $b \to \infty$.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem função densidade de probabilidade

$$f_{\theta,\gamma}(x) = \frac{(\gamma + 1)x^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}, \; x \in [0, \theta],$$

em que $\theta > 0$ é desconhecido e $\gamma > 0$ **é conhecido**. Aqui $X_{(n)} = \mathrm{maximo}(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa (questão da Prova 1).

   (a) Encontre uma quantidade pivotal que depende dos dados apenas através de $X_{(n)}$ e com esta obtenha um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

   (b) Obtenha dois testes mais poderosos (distintos) de $\mathrm{H} : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{K} : \theta = \theta_1$ $(0 < \theta_0 < \theta_1)$ de nível $\alpha \in (0, 1)$. Obtenha o poder dos testes mais poderosos de H contra K. UMP mais poder

   (c) Admita γ **é desconhecido e** θ **é conhecido**. Encontre o teste uniformemente teste mais poderoso de $\mathrm{H} : \gamma \leq \gamma_0$ contra $\mathrm{K} : \gamma > \gamma_0$ de nível α. RVM

   (d) Admita γ **é desconhecido e** θ **é conhecido**. Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para γ com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

4. Faça um breve ensaio intitulado "Suficiência e Verossimilhança".

[illegible]
06/10/2014

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Prova 1 – 2º semestre de 2014 – Prof. Silvia L. P. Ferrari

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem função densidade de probabilidade

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \; x \in [0, \theta],$$

em que $\theta > 0$ é desconhecido.

(a) (1 ponto) Mostre que $X_{(n)} = \text{máximo}(X_1, \ldots, X_n)$ é uma estatística suficiente completa.

(b) (1 ponto) Obtenha o estimador não viciado de variância uniformemente mínima (ENVVUM) de θ.

(c) (1 ponto) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ.

(d) (1 ponto) Mostre que a distribuição de X é uma família de escala. Obtenha o estimador equivariante por escala de risco mínimo para θ sob perda $[(d-\theta)/\theta]^2$. Veja nota ao final da prova.

2. (a) (1 ponto) Mostre que se δ é um estimador inadmissível de $g(\theta)$ sob perda quadrática, então $a\delta + b$ é um estimador inadmissível de $ag(\theta) + b$, $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$.

(b) (1 ponto) Mostre que, se δ_i é estimador ENVVUM de $g_i(\theta)$, então $\sum_{i=1}^k c_i\delta_i$ é estimador ENVVUM de $\sum_{i=1}^k c_i g_i(\theta)$, em que $c_1, \ldots, c_n$ são constantes quaisquer.

3. (2 pontos) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ observações independentes de X, que tem distribuição seminormal com função densidade de probabilidade

$$f(x;\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{2}\right\} I_{(\xi,+\infty)}(x); \; \xi \in \mathbb{R}.$$

Obtenha uma estatística suficiente minimal para ξ.

4. (2 pontos) Escreva um breve ensaio sobre famílias exponenciais.

Nota Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x};\tau) = \frac{1}{\tau^n} f\left(\frac{x_1}{\tau}, \ldots, \frac{x_n}{\tau}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \; \tau > 0,$$

em que f é conhecida e τ é um parâmetro de escala desconhecido. Considere o problema de estimar τ^r, $r \geq 1$, inteiro. Dizemos que um estimador $\delta(\mathbf{X})$ é equivariante por escala se $\delta(b\mathbf{X}) = b^r\delta(\mathbf{X})$, para todo $b > 0$. Pode-se mostrar que o estimador de Pitman de τ^r, dado por $\delta^*(\mathbf{X})$ sendo

$$\delta^*(\mathbf{x}) = \frac{\int_0^\infty v^{n+r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n)dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1} f(vx_1, \ldots, vx_n)dv},$$

é um estimador equivariante por escala de risco mínimo sob perda $[(d-\tau^r)/\tau^r]^2$.

MAE 5834 - Estatística Avançada I

Prova 2 – 2º semestre de 2014 – Prof. Silvia L.P. Ferrari

A prova tem 7 itens, todos com a mesma pontuação. Boa prova!

1. Suponha que, dado θ ($\theta > 0$), $X_1, \ldots, X_n$ sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $U(0, \theta)$, $\theta > 0$. Considere uma distribuição a priori Pareto(α, γ) para θ com densidade

$$p(\theta) = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \quad 0 < \gamma < \theta, \quad \alpha > 0.$$

Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição de Pareto(β, γ). A densidade de Pareto é dada na questão 1. **Admita que γ é conhecido.**

(a) Mostre que $Q = 2\sum \beta \log(X_i/\gamma) \sim \chi^2_{2n}$ e é, portanto, uma quantidade pivotal. Construa um intervalo de confiança para β com coeficiente de confiança $1-\alpha$ baseado em Q.

(b) Obtenha um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para β com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(c) Obtenha o teste uniformemente mais poderoso de $H: \beta \leq \beta_0$ contra $K: \beta > \beta_0$ ($\beta_0 > 0$) de nível $\alpha \in (0,1)$.

(d) Agora admita γ **é desconhecido e β é conhecido**. Encontre um teste mais poderoso de $H: \gamma = \gamma_0$ contra $K: \gamma = \gamma_1$, em que $\gamma_1 > \gamma_0$, de nível α.

3. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli(p). Considere o problema de estimar p com perda quadrática. Mostre que $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ não é estimador minimax de p comparando seu risco com o do estimador aleatorizado $T(\mathbf{X})$ que é igual a $\overline{X}$ com probabilidade $n/(n+1)$ e $1/2$ com probabilidade $1/(n+1)$.

4. Faça um breve ensaio sobre métodos de estimação pontual.