Introdução aos Processos Estocásticos

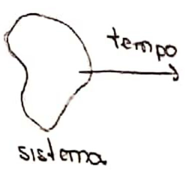
Aula 01 - 15/08/2013 — Eduardo J. Neves

Sala: 209

email: neves@ime.usp.br

www.vision.ime.usp.br/~neves

- Introdução aos Processos Estocásticos



- Determinístico: eq diferenciais, ..
- Estocástico

$\{X_t\}_{t \in T}$ em S = "espaço de estados"

X_t é uma v.a. T = "tempos" $\begin{cases} \text{contínuo} & \mathbb{R}^+ \\ \text{discreto} & \mathbb{N} \end{cases}$

"Todo modelo é incorreto". Caso contrário, seria a própria realidade, mas não, consiste em uma abstração.

No curso, falaremos sobre Processos de Markov!

Considerações:

$$T = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{"tempo discreto"} \\ \mathbb{R}^+ & \text{"tempo contínuo"} \end{cases}$$

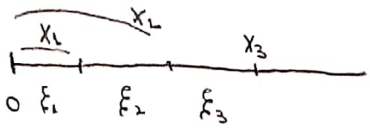
$$S = \begin{cases} S \subset \mathbb{N} & \text{finito} \\ & \text{infinito (enumerável)} \\ S & \text{não enumerável. Ex. } S = (a,b) \in \mathbb{R},\ a, b \in \bar{\mathbb{R}}^+ \end{cases}$$

Ex: $T = \mathbb{N}$; $S = \mathbb{R}$

$\{X_n\}_{n \geq 1}$ — X_1 v.a. em $\mathbb{R}$. "Temperatura ao meio dia"

$\{\xi_i\}_{i\geq 1}$, ξ_i: "tempo de falha"

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$



Processo de Renovação. ξ_1 o tempo até o sistema ficar vazio de novo.

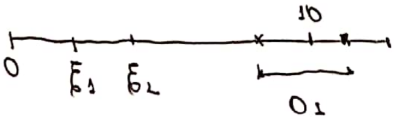
Interesse: A partir de um ponto, o processo se repete?

Sistema $\rightarrow$ taxa de falha $\begin{cases} \text{constante: Se } \xi_i \sim Exp(\lambda). \\ \text{crescente:} \\ \text{decrescente:} \end{cases}$

"Simulação"

$\xi_1 \sim U(0,1)$

$\xi_2 \sim U(0,1)$



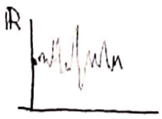
Amostra:	
1	O_1
2	O_2
⋮	⋮
n	O_n

Ainda outros exemplos com S não-enumerável.

Movimento Browniano:

Brown: (Telescópio + bolinha de vidro)

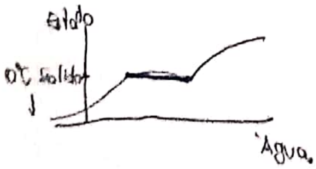
Idéia: Partícula de poeira bombardeada pelo vento. A trajetória seria o mov. browniano

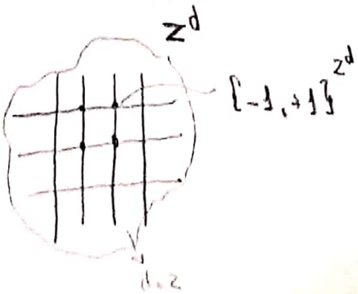


X_t: "posição de um grão de poeira no tempo t"

Sistema de Partículas

"Mecânica Estatística"





Obs: Se A e B são conjuntos

A^B := cjto. de funções de B em A

↳ Encontrar p_c tal que a propagação não ocorra

Obs. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ - não enumerável.

Se o espaço de estados é contínuo, problemas com a construções. ∃ conjuntos de medidas nulas não construtíveis que não poderemos estudar.

$\{X_t\}_{t \in T}$ em S

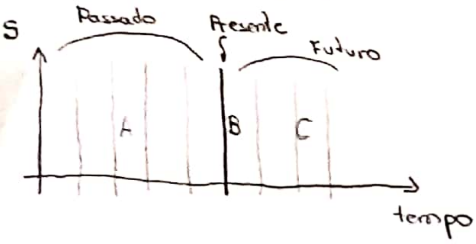
Cadeias de Markov em Tempo Discreto

$T = \mathbb{N} \rightarrow$ discreto

$S \subset \mathbb{N} \rightarrow$ cadeia

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em S enumerável

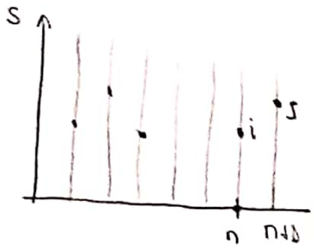
Satisfazendo a propriedade de Markov:



"$\mathbb{P}(C|B,A) = \mathbb{P}(C|B)$" ou "$P(C,A|B) = P(C|B)\,\mathbb{P}(A|B)$" } "Futuro e passado são independentes dado o presente"

Mais concretamente.

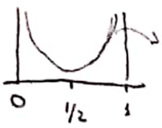
$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $S \subset \mathbb{N}$



$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,/\, X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i)$$

↳ "Condição de Markov"

Exemplo: Passeio Aleatório Simples

se $p = 1/2 \Rightarrow$ 

↳ Distrib. da prop. de vezes que um ou outro fica ganhando.

Exercício. Verificar a propriedade de Markov para o passeio aleatório.

Dizemos que a cadeia de Markov é homogênea se (no tempo)

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,/\, X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \,/\, X_0 = i) \quad \forall\, n \geq 1$$

Supomos homogeneidade a menos que isso seja indicado.

Chamamos $\mathbb{P}$ tal que

$$(\mathbb{P})_{ij} = P(X_1=j / X_0=i) \quad , i,j \in S$$

de matriz de transição se $(\mathbb{P})_{ij} \equiv p_{ij}$.

· $p_{ij} \geq 0$

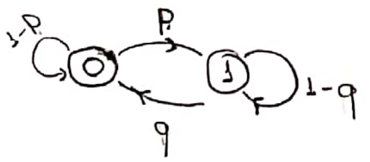
$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} & & & & | & \\ & & & & | & \\ & & & & | & \\ & & & & | & \\ - & - & - & - & p_{ij} & - \\ & & & & | & \end{array} \right) \end{array}$$

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_j P(X_1=j / X_0=i) = 1$$

$\left(\sum_i p_{ij} = ?\right)$ se $=1$ → duplamente estocástico

<u>Exemplo</u>: Cadeia 2 estados

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $S=\{0,1\}$



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \end{array}$$

p: "prob. de conserto"

q: "prob. de falha"

p, q em $(0,1)$

Informação sobre o sistema:

medida de probabilidade em S

· No caso,

$\pi = (\pi(0), \pi(1))$ vetor (linha)

Por exemplo: "Está funcionando" $= (0,1)$

"Não sei nada" $= (1/2, 1/2)$

$\pi : S \to \mathbb{R}^+ \quad , \sum_{i\in S} \pi(i) = 1.$

Markov Process: Caracterization and Convergence.
Stwart

Markov Chain and Mixing Times

Thomas M. Liggert
(Continuous Time Markov Process.

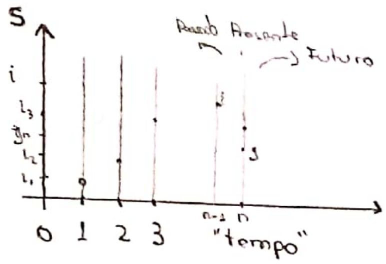
Se π_0 é distrib. de prob. no tempo zero (= inf. sobre o sistema no instante 0)
quero determinar π_n = inf. no n.

Introdução aos Processos Estocásticos

Aula 02 - 20/08/2013

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S \subset \overset{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}}$ (enumerável)

cadeia de Markov em tempo discreto



Propriedade de Markov
(condição . "estrutura")

"Passado" $= \{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$
"Presente" $= \{X_n = i\} = B$

"Futuro" $= \{X_{n+1} = j\} = C$

$$\mathbb{P}(C / A \cap B) = \mathbb{P}(C/B)$$

ou

$$\mathbb{P}(C \cap A / B) = \mathbb{P}(C/B)\mathbb{P}(A/B)$$

Exercício: Verificar implicação!

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

- Processos <u>homogêneos</u> no tempo.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j / X_0 = i)$$

- Matriz de Transição

$\mathbb{P}$ = matriz $S \times S$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{c} S \\ j \end{array} \\ S \; i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

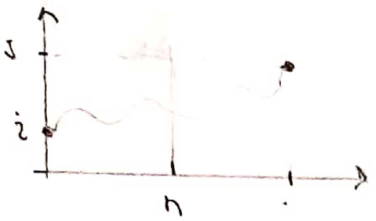
$(\mathbb{P})_{ij} = p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j / X_0 = i)$

Essa será uma matriz estocástica.

$$p_{ij} \geq 0 \quad e \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

• Em passos,

$$p_{ij}(n) \overset{\text{notação}}{\equiv} P(X_n = j / X_0 = i)$$

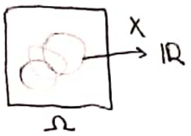


Idéia: pensar em duas etapas.

$$p_{ij}(n+m) = P(X_{n+m} = j / X_0 = i) =$$

$$= P(\{X_{n+m} = j\} \cap (\bigcup_{k \in S} \{X_n = k\}) / X_0 = i) = *$$

Obs: v.a. $X: \Omega \to \mathbb{R}$



$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — Ω: espaço amostral; $\mathcal{F}$: coleção dos eventos; P: Prob. do evento

Ver Exemplo: Royden

Cuidado: $\exists$ subconjuntos em Ω t.q. não podemos atribuir prob.
Teoria da medida – restrição aos de medida finita.

P é tal que

i) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$

ii) Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma coleção qqer de eventos disjuntos,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\sigma\text{-aditividade})$$

$$* = P(\bigcup_{k \in S} \{X_{n+m} = j\} \cap \{X_n = k\} / X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k} \frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \sum_{k} \frac{P(X_{n+m} = j / X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= \sum_{k} \mathbb{P}(X_m = j / X_0 = k)\, \mathbb{P}(X_n = k / X_0 = i)$$

↑
Markov
+
homogeneidade

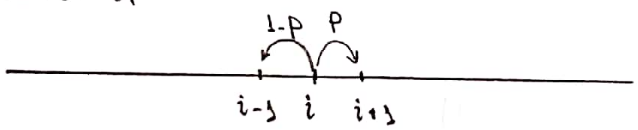
$$= \sum_{k} p_{ik}^{(n)}\, p_{kj}^{(m)} \quad , \forall\, n, m \geq 0 \,,\, i, j \in S \qquad \text{Chapman-Kolgomorov}$$

Então

$$p_{ij}(n) = (\mathbb{P}^n)_{ij}$$

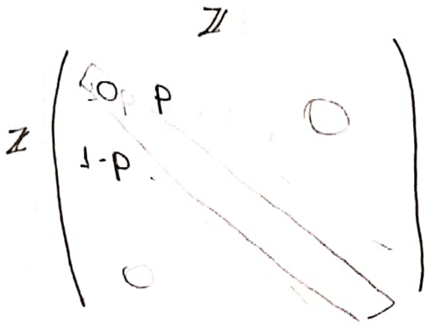
- Alguns Exemplos.

Passeio Aleatório:

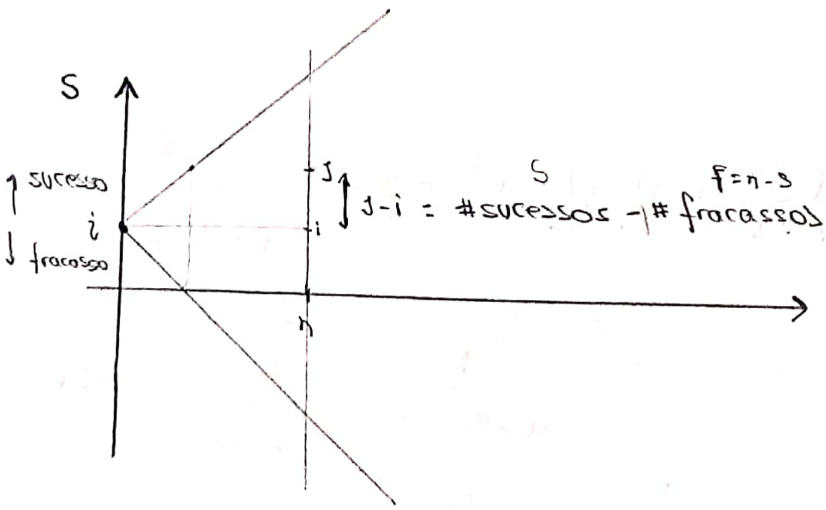


$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $S = \mathbb{Z}$

$\mathbb{P}$ tal ⟶



$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{se } j = i+1 \\ q = 1-p & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

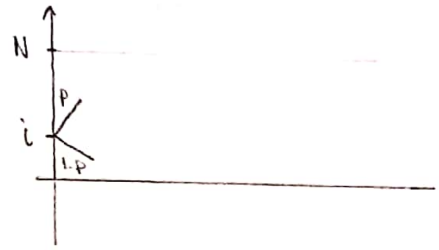


$j - i$ = #sucessos − #fracassos (s = #sucessos, $f = n - s$)

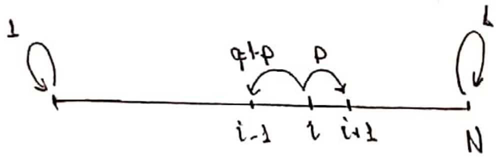
$$\begin{cases} s + f = n \\ s - f = j - i \\ s = \dfrac{n + j - i}{2} \end{cases}$$

$$P_{ij}(n) = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{se } n+j-i \text{ ímpar} \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

- Problema do Jogador



$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $S = \{0, 1, \dots, N\}$



Qual a chance de atingir o N antes do 0.

Logo,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1-p & 0 & p & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1-p & 0 & p \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

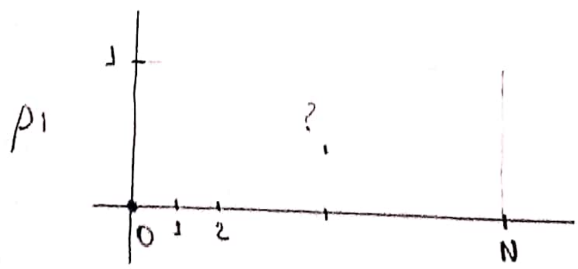
$P_{ij}(n)$

$\mathbb{P}(\text{Ganhar} / X_0 = i) = *$

não são disjuntos

$$* = \mathbb{P}(G / X_0 = i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = N\} / X_0 = i\right) = \rho_i$$

↳ depende de i



$\rho_0 = 0$

$\rho_N = 1$

$\rho_i \to$ crescente

Quem começa com mais tem + chance de ganhar

$p_i = \mathbb{P}(G / X_0 = i) =$

$= \mathbb{P}(G, X_1 = i+1 / X_0 = i) + \mathbb{P}(G, X_1 = i-1 / X_0 = i) = *$

Note que:

$$\mathbb{P}(G, X_1 = i+1 / X_0 = i) = \frac{\mathbb{P}(G, X_1 = i+1, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(G / X_1 = i+1, X_0 = i)}^{p_{i+1}} \overbrace{\mathbb{P}(X_1 = i+1, X_0 = i)}^{p}}{\mathbb{P}(X_0 = i)} =$$

$$= p_{i+1} \cdot p$$

e

$$\mathbb{P}(G, X_1 = i-1 / X_0 = i) = q\, p_{i-1}.$$

Daí,

$$* = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1} \qquad i \in \{1, \dots, N-1\}$$

ou seja,

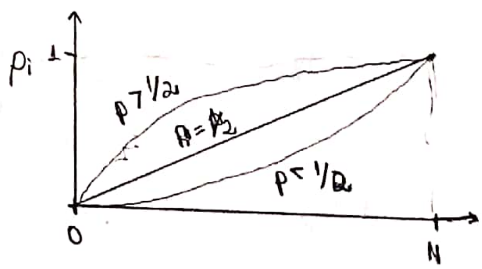
$$p_i = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1} \qquad , i \in \{1, \dots, N-1\}$$

Assim, com $p+q = 1$,

$$(p+q)\, p_i = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1} \Leftrightarrow \dots$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1})$$

se $p < 1/2$, $\frac{q}{p} > 1$



Vejamos que:

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p}(p_1 - \overset{0}{p_0}) = \frac{q}{p} p_1$$

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p}(p_1 - \overset{0}{p_0}) = \frac{q}{p} p_1$$

$$p_3 - p_2 = \frac{q}{p}(p_2 - p_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1$$

$$\vdots$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^i p$$

$$p_{i+1} - p_1 = \sum_{n=1}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^n p_1$$

Daí,

$$p_{i+1} = \cancel{p_1} \sum_{n=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^n p_1 = \begin{cases} (i+1)p_1 , & \text{se } p=q \\ \dfrac{1-(q/p)^{i+1}}{1-(q/p)} p_1 , & \text{se } p \neq q \end{cases}$$

Ainda temos p_1 livre. Mas sabemos que

$$p_N = 1$$

e

$$p_N = \begin{cases} N p_1 \\ \dfrac{1-(q/p)^N}{1-(q/p)} p_1 = 1 \end{cases}$$

i) Se $p=q$

$$Np_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{N}$$

se $p \neq q$

$$p_1 \left(\frac{1-(q/p)^N}{1-q/p} \right) = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1-q/p}{1-(q/p)^N}$$

Daí,

ii) $p_i = \dfrac{i}{N}$, se $p=q$ e $p_i = \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$ se $p \neq q$

Obs:

Ex. $N = 1000$

$i = 900$

$p = 1/2 \quad p_{900} = 0{,}9$

$p = \frac{18}{36} \quad p_{900} = 0{,}00003$

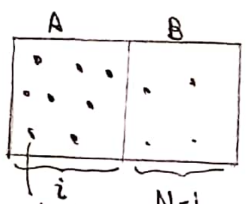
→ Como jogar: Apostar o que falta para completar o capital desejado.

Se começo com 900, aposto 100

$$\left.\begin{array}{l} 900 \text{, aposto } 100 \\ 800 \text{ — } 200 \\ \geq 500 \to \text{tudo} \end{array}\right\}$$ Estratégia golden play

Aumenta as chances.

• <u>Cadeia de Ehrenfest</u>



gás

(partículas de gás)

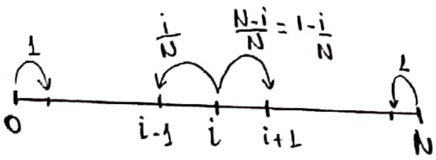
Bolas Numeradas: $1, 2, \ldots, N$

instante n $\quad X_n = \#$ nº de bolas na urna A

" " $n+1$

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $S = \{0, 1, \ldots, N\}$

P



Interesse: Tempo até as molécula se rearranjarem em A.

Nº de moléculas em A $\sim Bin(N, p)$

Introdução aos Processos Estocásticos

Aula 03 - 22/08/2013

Eduardo J. Neves

1ª prova 3 de outubro

2ª prova 21 de novembro

3ª substutiva 28 de novembro 03/12

MF = média das 2 melhores notas.

www.vision.ime.usp/~neves

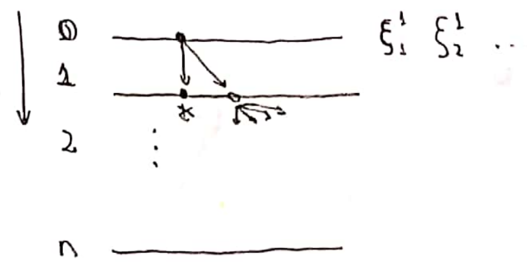
- Processo de Ramificação

→ Preocupação dos barões com sua descendência

→ Reação em cadeia no processo de fissão atômica ...

"População de Bactéria"

gerações



ξ = # de descendentes de uma bactéria na geração seguinte

$\{\xi_n^i\}_{\substack{i,n \\ n \geq 0 \\ i \geq 1}}$ v.a. i.i.d. com distribuição ξ.

com valores em $\mathbb{N}$.

$P(\xi = k) = p_k$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S=\mathbb{N}$

$X_0 = 1$

$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^{i}$ $\quad$ X_n = # de indivíduos na geração n.

$p = \lim_{n\uparrow\infty} P(X_n = 0)$

$p_n = P(X_n = 0)$

Seja $\mu = E\xi = \sum_{k\geq 0} k\, p_k$

Interesse:

EX_n.

Sabemos que $EX_0 = 1$.

$n \geq 1$ $\quad EX_n = E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^{i}\right]$

——— " ———

Obs: Suponha $\{T_i\}_{i\geq 0}$ i.i.d. com dist. exponencial(λ)

$T_i \sim exp(\lambda)$

$f_{T_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$

Se $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n,\lambda)$

Seja $N \sim$ geométrica(p) ind. $\{T_i\}_{i\geq 0}$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} T_i \sim exp(\lambda p)$ verificar!

——— " ———

obs 2: se X e Y são v.a.

$EX = E[E[X/Y]]$

$E[X/Y](\omega) = E[X/Y = Y(\omega)]$

$E[X/Y]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi^i_{n-1}\Big] = E\Big[\underbrace{E\Big[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi^i_{n-1} \,\Big|\, X_{n-1}\Big]}\Big]$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi^i_{n-1} \,\Big|\, X_{n-1}=k\Big] \qquad k \geq 0$$

$$= E\Big[\sum_{i=1}^{k} \xi^i_{n-1}\Big] = \sum_{i=1}^{k} E\,\xi^i_{n-1} = k\mu$$

$$E\Big[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi^i_{n-1} \,\Big|\, X_{n-1}\Big] = \mu X_{n-1}.$$

$$n \geq 1 \quad EX_n = E\Big[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi^i_{n-1}\Big]$$

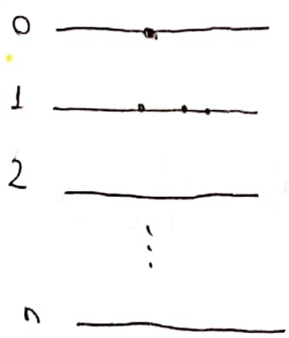
$$EX_n = E[\mu X_{n-1}] = \mu E X_{n-1}$$

$$\to \boxed{EX_n = \mu^n}$$

- Se $\mu > 1 \to$ explode
  $< 1 \to$ acaba ?

$p_n = P(X_n = 0)$

$p = \lim_{n \uparrow \infty} p_n$



$$p_n = P(X_n = 0) = \sum_{k \geq 0} P(X_n = 0 \,|\, X_{n-1} = k)\, P(X_{n-1} = k)$$

$$p_0 = P(X_0 = 0) = 0$$

$$p_1 = P(X_1 = 0) = p_0$$

$$p_2 = \sum_{k \geq 0} P(X_2 = 0 \,|\, X_1 = k)\, P(X_1 = k)$$

$$\rho = \mathbb{P}\{\text{Extinção eventual}\}$$

$$= \mathbb{P}(\overbrace{\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=0\}}^{A})$$

$$\rho = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\mathbb{P}(A \mid X_1 = k)}^{\rho^k} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = k)}_{p_k}.$$

$$\rho = \sum_{k\geq 0} \rho^k p_k = G(\rho).$$

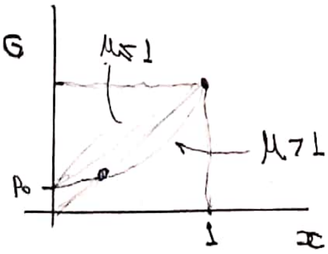
Dado $\{s_n\}_{n\geq 1}$

Função geradora $G(x) = \sum_{n\geq 1} s_n x^n$

$\{p_k\}_{k\geq 0}$ $\quad G(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$.

ρ é pto fixo de G

Dado $\{p_k\}_{k\geq 0}$ $\quad G(x)$



$$\frac{d}{dx} G(x) = \sum_{k\geq 1} k p_k x^{k-1} \geq 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1) p_k x^{k-2} \geq 0$$

convexa

$$\left.\frac{d}{dx} G(x)\right|_{x=1} = \sum_{k\geq 1} k p_k = \mu$$

$\mu \leq 1 \Rightarrow \rho = 1$ = "extinção certa"

$\mu > 1 \Rightarrow \rho < 1$ = prob. positiva de não extinção

Ex: ξ tal que

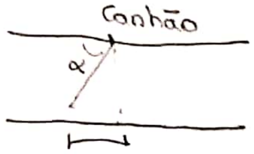
$P(\xi=0)=1/3$

$P(\xi=2)=2/3$ $\quad p=?$

$(1/2)$

$$G(x)=\frac{1+2x^2}{3}$$

Cauchy

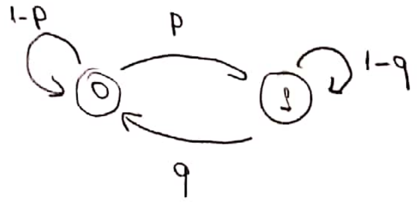


$\alpha \sim U(0,180)$

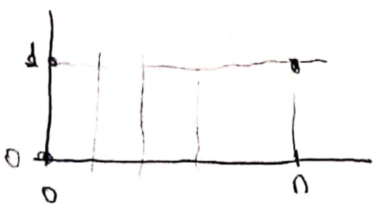
$D \sim$ Cauchy

Cadeia de Markov de 2 estados

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S=\{0,1\}$



$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-p & p \\ 1 & q & 1-q \end{array}$$ matriz de transição



$P(X_n=1/X_0=0)=P_{01}(n)$

$=(\mathbb{P}^n)_{01}$ ← Trans. em n passos.

$\mathbb{P}^n$

$P = UDU^{-1}$ $\qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$PU = UD = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\qquad P\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

$P\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ $\qquad$ ~~autovalores~~

autovalores de $\mathbb{P}$: $1, (1-p-q)$

verifique!

$(\det[\lambda - \mathbb{P}] = 0)$

$U = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix}$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{-1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^2 = (UDU^{-1})(UDU^{-1}) = UD^2U^{-1} = U \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}^n = U \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & p \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q+p(1-p-q)^n & p-p(1-p-q)^n \\ q-q(1-p-q)^n & p+(1-p-q)^n \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$$

Obs:

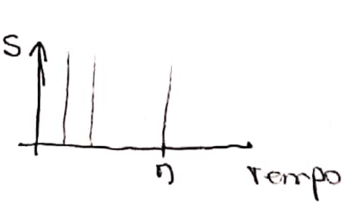
$\mathbb{P}^n \rightarrow$ 

$$(\mathbb{P}^n)_{ij} \underset{n\uparrow\infty}{=} \pi(j)$$

"sempre verdade?" - Não, somente sob certas condições. Qdo todo mundo pode ser visitado a qqer momento e ocorre a 'perda da memória de onde comecei'.

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S \subset \mathbb{N}$

$\mathbb{P}$



Distribuição de prob. em S

$\pi : S \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \pi(i) \geq 0 \\ \sum_{i \in S} \pi(i) = 1 \end{cases}$$

Inf. sobre a cadeia num dado instante.

Se π_0 é a dist. no inst. zero.

e π_n é a dist. no inst. n.

$$\pi_1(j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij} \quad \left(= \sum_{i \in S} P(Y_1 = j / Y_0 = i) P(X_0 = i)\right)$$

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$$

$$\vdots$$

$$\pi_n = \pi_0 \mathbb{P}^n$$

$\mathbb{P}$ é um operador de mult. à direita no espaço de medidas.

- Funções (observáveis de interesse) em S

$f(i) =$ "Quão bom é estar em i"

$=$ "lucro em i"

$f : S \to \mathbb{R}$

$$E[f(X_0) / X_0 = i] = f(i)$$

$$E^i[f(X_1)] = E[f(X_1) / X_0 = i] = \sum_{j \in S} P_{ij} f(j)$$

$$\vdots$$

$$E[f(X_n) / X_0 = i] = \sum_{j \in S} (\mathbb{P}^n)_{ij} f(j)$$

$$E[f(X_1) / \pi_0] = \sum_i E[f(X_1) / X_0 = i] \pi_0(i)$$

$$E(f(X_1)/\pi_0) = \pi_0 \mathbb{P} f = \underset{1\times n}{[\pi_0]} \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbb{P} & \\ & & \end{pmatrix}} \underset{n\times 1}{\overset{f}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}} = \underset{1\times 1}{(\ )}$$

Obs:

$<\pi, f> = \sum_{i \in S} \pi(i) f(i)$ = valor esperado de f com respeito à dist. de prob. π,

Se π é a dist. no instante 0

e f é a função de interesse: "Lucro",

$<\pi_0, f>$ = "valor esperado do Lucro no inst. 0"

$<\pi_0, \mathbb{P}f>$ = "valor esperado do Lucro no inst. 1" =

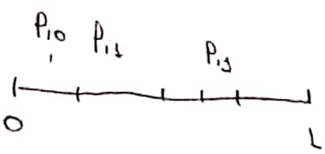
$= <\pi_0 \mathbb{P}, f>$

verificar

- Construção de uma Cadeia de Markov

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S \subset \mathbb{N}$

Const. a partir: $\{U_i\}_{i\geq 1}$, i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$



p_{ij}, $j \in S$

Defino f:

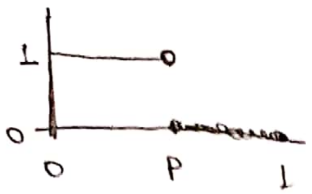
$f(i, U)$ = Prox. estado $\quad f: S \times [0,1] \to S$

i: estado atual

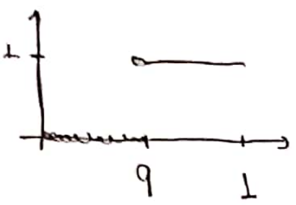
Ex. Cadeia de 2 estados

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-p & p \\ 1 & q & 1-q \end{array}$$

$f(0,x)$



$f(1,x)$

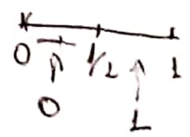


Simular

n	0	1
1	0	1
2	0	0
3	1	1
⋮		⋮

10.000

$\pi_0 = (1/2, 1/2)$



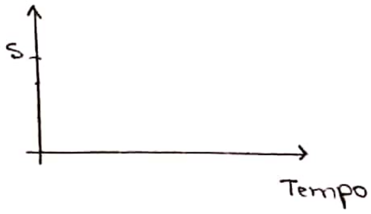
$\pi_1 = ? = \frac{\sum Y_i}{n}$

Introdução aos Processos Estocásticos

Aula 04 - 27/08

$\{X_n\}_{n \geq 0} \in S \subset \mathbb{N}$

Cadeia de Markov
tempo discreto



$\mathbb{P}$ = matriz de transição

Medidas de prob. em S = "inf. disponível num dado instante"

Definição
$\equiv \mathcal{A}$ {\cal S}

$\pi : S \to \mathbb{R}_+$

$i \in S \Rightarrow \pi(i) \geq 0$

$\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$

→ Funções em S: $\mathcal{F}$ (\cal F)

Se π_0 é a distribuição inicial e π_n é a distribuição no tempo n $\pi_n = \pi_0 \mathbb{P}^n$.

Se começo no estado i e $f \in \mathcal{F}$.

Qual é o valor esperado de f no instante 1?

$$E^i f(X_1) = \sum_j P_{ij} f(j)$$

no instante n,

$$E^i f(X_n) = \sum_j P_{ij}(n) f(j)$$

$f: S \to \mathbb{R}$ vetor coluna

$$\begin{array}{cc} \text{indexado por } S & \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

$E^i f(X_1)$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} & j & \\ \hline & P & \end{pmatrix}\begin{array}{c} f \\ \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{pmatrix} E^0 f(X_1) \\ E^1(f(X_1)) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Posso definir: valor esperado de f começando com uma distribuição π_0.

$E^i f(X_1)$

$$E^{\pi_0} f(X_1) = \sum_i E^i f(X_1) \pi_0(i)$$

Então.

$$E^{\pi} f(X_1) \equiv \langle \pi, Pf \rangle = \langle \pi P, f \rangle$$

Onde: se $\pi \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{F}$

$$\langle \pi, f \rangle = \sum_{i \in S} \pi(i) f(i)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P} \\ \pi \in \mathcal{S} \\ f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

$\pi_n = \pi_0 \mathbb{P}^n$

<u>Perguntas</u> "naturais"

Sempre existe $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$?

Sempre existe $\pi \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi = \pi \mathbb{P} \, ?$$

<u>Definição</u>: Dizemos que π é estacionária (invariante) para uma cadeia com matriz de transição $\mathbb{P}$ se

$$\pi = \pi \mathbb{P}.$$

ou seja,

$$\pi(j) = \sum_{i\in S} \pi(i) P_{ij} \;, \forall j \in S$$

$$\pi(j) = \sum_{\substack{i\in S \\ i\neq j}} \pi(i) P_{ij} + \pi(j) P_{jj}$$

$$\boxed{\pi_j (1 - P_{jj}) = \sum_{\substack{i\in S \\ i\neq j}} \pi(i) P_{ij}} \iff \pi \text{ ser estacionária}$$

"Equação de Balanceamento"

Sai de j p/ qqer outro dif. de j

de qqer que não seja j p/ j.

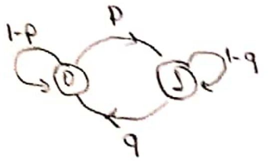
Exemplos:

1) Cadeia de 2 estados

$$\pi = \pi \mathbb{P}$$

$\pi = (a, b)$ $\quad \pi(0) = a$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} (0) \\ \\ (1) \end{array} \begin{cases} \pi(0)p = \pi(1)q \\ \\ \pi(1)q = \pi(0)p \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \pi(0) + \pi(1) = 1$$

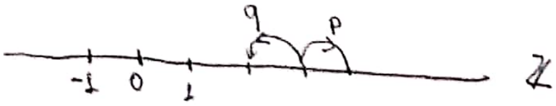
$$\pi(1) = \frac{p}{p+q} \qquad \pi(0) = \frac{q}{p+q}$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{bmatrix}$$

Se $\pi = \pi \mathbb{P}$

Sempre existe dist. estacionária?

2) Passeio Aleatório



$$\pi = \pi \mathbb{P}$$

(0) $\pi(0).1 = \pi(-1)P_{-10} + \pi(1)P_{10} = \pi(-1)p + \pi(1)q$

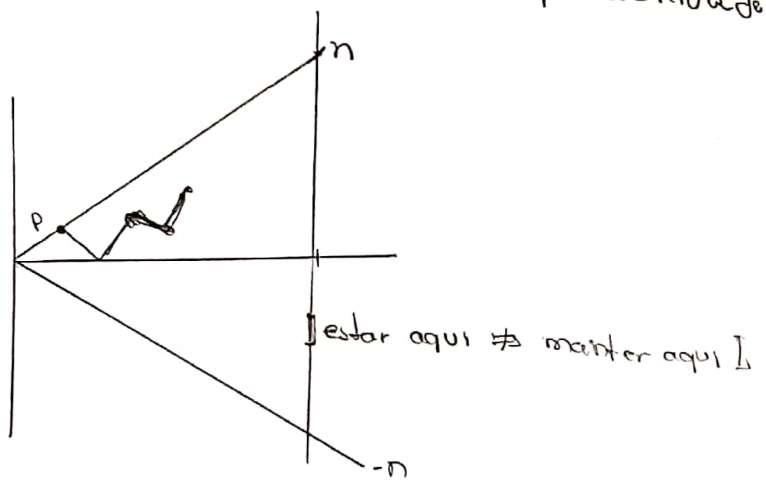
(1) $\pi(1).1 = \pi(0)P_{01} + \pi(2)P_{20} = \pi(0)p + \pi(2)q$

$\vdots$

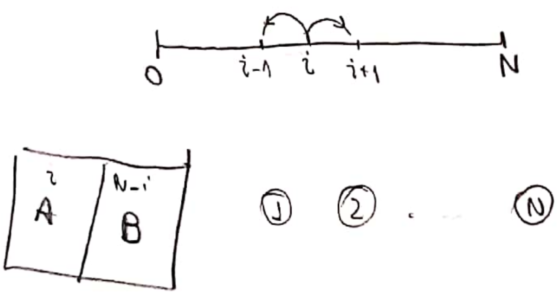
$$\pi(i) = \pi(i-1)p + \pi(i+1)q \quad \forall\ i \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 0$$

Não existe distribuição de probabilidade estacionária.



3) Ehrenfest:



X_n = # de bolas na urna A

Mostre que:

$$\pi(i) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

é estacionária.

4) Jogador

$\pi = \pi P$ e $\sum \pi(i) = 1$

Duas dist. estacionárias

δ_0: $\delta_0(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

δ_1: $\delta_1(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = N \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Verifique. Se $\alpha \in (0,1)$

$\pi = \alpha \delta_1 + (1-\alpha)\delta_0$ é estacionária

pi

Classificação dos Estados de Uma Cadeia

Definição: $i \in S$ é dito recorrente se

$P(\text{"Retornar a i"} \mid \text{"começou em i"}) = 1$

$\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}$ $\qquad\qquad$ $\{X_0 = i\}$

$P(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=i\} / X_0=i)=1 \Leftrightarrow i$ é recorrente

Caso contrário i é dito <u>transiente</u>.

Def:

$f_{ij}(n)$ = "Prob de partindo de i, atingir j pela primeira vez no instante n".

$f_{ij}(n)=P(X_k\neq j, k=1,\dots,n-1, X_n=j / X_0=i)$

$f_{ij}=\sum_{n\geq 1} f_{ij}(n)$ = Prob. de visitar j, eventualmente partindo de i

$\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=j\}$

Então.

$f_{ii}=1 \Leftrightarrow i$ é recorrente

$f_{ii}<1 \Leftrightarrow i$ é transiente

Se N_i = "# de visitas ao estado i"

$E[N_i / X_0=i]$ = Número esperado de retornos a i.

Se i é recorrente:

$E[N_i / X_0=i]=\infty$

Se i é transiente

$E[N_i / X_0=i]<\infty$

$E[N_i / X_0 = i]$

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$$

onde $\mathbb{1}_{\{X_n=i\}} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

obs: $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

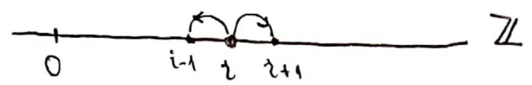
$$E[N_i / X_0 = i] = E\Big[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} / X_0 = i\Big] =$$

$$= \sum_{n \geq 1} \underbrace{E[\mathbb{1}_{\{X_n=i\}} / X_0 = i]}_{P(X_n = i / X_0 = i) = P_{ii}(n)} = \sum_{n \geq 1} P_{ii}(n)$$

$\sum_{n \geq 1} P_{ii}(n) = \infty \Leftrightarrow i$ é recorrente

$\sum_{n \geq 1} P_{ii}(n) < \infty \Leftrightarrow i$ é transiente

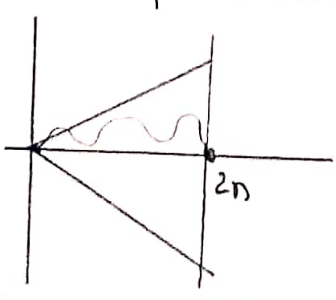
<u>Exemplo</u>: Passeio Aleatório.



Origem: "0 é recorrente ou transiente"?

$P_{00}(2n+1) = 0 \quad \forall n$

↳ retornar depois de um nº ímpar de passos é nula.



$$P_{00}(2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Aprox. de Stirling: $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$

"Demonstração" (uso TLC)

TLC. Se $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d com

$EX_i = \mu$ e $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$ então

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x \right) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}\, ds$$

(27/08/13) C. Markov Aula 05

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ em S contável

$\mathbb{P}$ = matriz de transição

$\mathcal{S}$ = Medidas em S

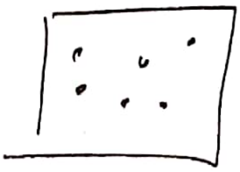
$\mathcal{F}$ = Funções em S

Perguntas:

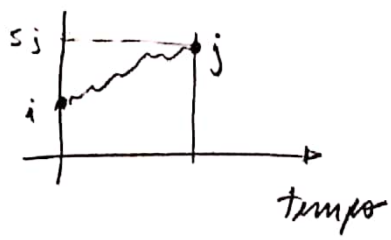
1) Existe (e é única) $\pi = \pi \mathbb{P}$, $\pi \in \mathcal{S}$

2) $p_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$

Classificação dos estados de uma cadeia



S



Recorrência: $i \in S$ é recorrente se $\mathbb{P}($visitar $i \mid X_0 = i) = 1$

caso contrário: transiente.

DEF: $f_{ij}(n)$ = Prob de, partindo de i, visitar j pela primeira vez no instante "n".

$$f_{ij}(n) = P(X_k \neq j,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ X_n = j \mid X_0 = j)$$

$$f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n)$$

i é recorrente $\Leftrightarrow f_{ii} = 1$

i é transiente $\Leftrightarrow f_{ii} < 1$

Critério para recorrência envolvendo $P_{ij}(n)$ (e não $f_{ij}(n)$)

considero as funções geradas

$$P_{ij}(s) = \sum_{n\geq 0} p_{ij}(n) s^n \quad ; \quad F_{ij}(s) = \sum_{n \geq 0} f_{ij}(n) s^n$$

OBS:

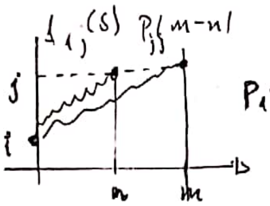
$$(P(0))_{ij} = p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

$$f_{ij}(0) = 0$$

Lema:

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s)$$

Dem:



$p_{ij}(n)$

$$P_{ij}(m) = P(X_m = j \mid X_0 = i)$$

seja $B_n = \{ X_k \neq j,\ k = 1, 2, \dots, n-1,\ X_n = j \}$

$$P_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} P(X_m = j, B_n \mid X_0 = i)$$

$$P(X_m = j, B_n \mid X_0 = i) = \frac{P(X_m = j, B_n, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \overbrace{P(X_m = j \mid B_n, X_0 = i)}^{\text{markov}\ P(X_m = j \mid X_n = j)} \cdot \overbrace{\frac{P(B_n, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}}^{P(B_n \mid X_0 = i)}$$

homogeneidade

$$= P_{jj}(m-n) f_{ij}(n)$$

$$P_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} P_{jj}(m-n) f_{ij}(n) \quad \times s^m \qquad m \geq 1$$

$$P_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n) P_{jj}(m-n) \qquad m \geq 1$$

$$P_{ij}(m) s^m = \sum_{n=1}^{m} P_{jj}(m-n) s^{m-n} \, f_{ij}(n) s^n$$

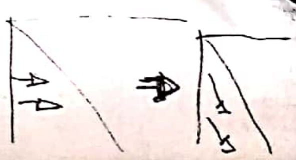
$$P_{ij}(m) s^m = \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n) s^n P_{jj}(m-n) s^{m-n}$$

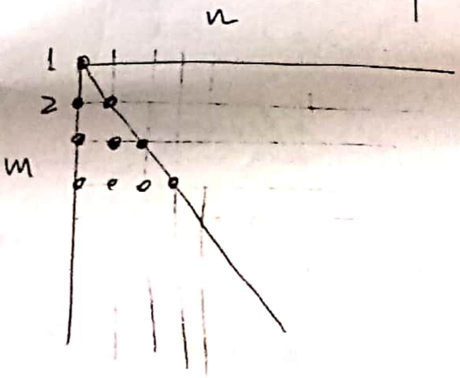
$$\sum_{m\geq 1} P_{ij}(m) s^m = \sum_{m\geq 1}\sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n) s^n P_{jj}(m-n) s^{m-n}$$

$+$

$P_{ij}(0)s^0 - P_{ij}(0)s^0$

$P_{ij}(s) - \delta_{ij}$





$$\sum_{n\geq 1}\sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n) s^n P_{jj}(\overbrace{m-n}^{k}) s^{\overbrace{m-n}^{k}} =$$

$f_{ij}(0) \equiv 0$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}(l) s^l} P_{jj}(k) s^k$$

$F_{ij}(s) P_{jj}(s)$ ▨

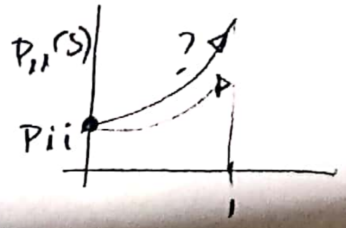
$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s)$$

$$P_{jj}(s)\left[1 - F_{ij}(s)\right] = \delta_{ij}$$

$(i=j)$
$$\boxed{P_{jj}(s) = \frac{1}{1-F_{jj}(s)}}$$

$(i\neq j) \Rightarrow P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s)$

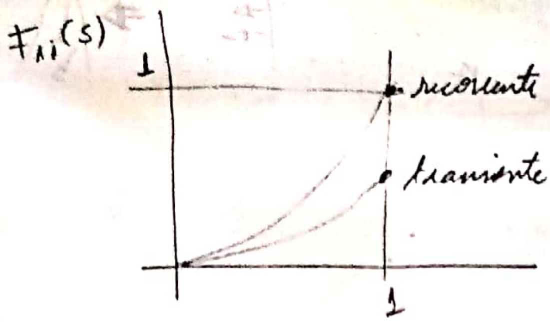
$$P_{ii}(s) = \sum_{n\geq 0} P_{ij}(n) s^n$$



$P_{ii}(0) = P_{ii}$

$P_{ii}(1) = \sum_{n\geq 0} P_{ii}(n)$

$$F_{ii}(s) = \sum_{n\geq 0} f_{ii}(n)\, s^n$$



$$F_{ii}(1) = \sum_{n\geq 1} f_{ii}(n) = f_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{recorrente} \\ <1 & \text{transiente} \end{cases}$$

$F(s) = \sum a_n s^n$

$a_n \geq 0$

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

$s \uparrow 1$: $P_{ii}(s) \to \sum P_{ii}(n)$

$\frac{1}{1 - F_{ii}(s)} \to$ ∞ se i recorrente, $<\infty$ se i transiente

Teorema de Abel

Critério:

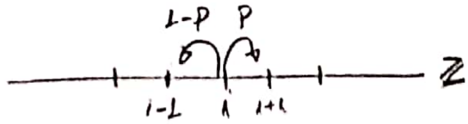
i recorrente $\iff \sum_{n\geq 1} P_{ii}(n) = \infty$

i transiente $\iff \sum_{n\geq 1} P_{ii}(n) < \infty$

$a_n = (-1)^n$

$F(s) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n s^n = \frac{1}{1-(-s)} = \frac{1}{1+1}$

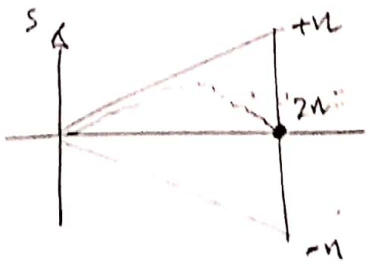
Exemplo: Passeio Aleatório



origem: transiente ou recorrente?

$$\sum_{n\geq 1} P_{00}(2n)$$

$(P_{00}(2n+1) = 0, \forall n)$



$$P_{00}(2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Aprox de Stirling

$$\frac{n!}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

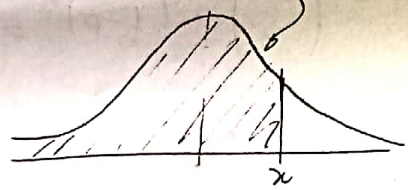
"Demonstração" usando TCL

TCL: Se $X_1, X_2, \dots$ iid com

$EX_i = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$

$$P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \phi(x)$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



Aplicando TCL

$X_i \sim Poisson(\lambda = 1)$ $i = 1, 2, \dots$ iid

$\underbrace{X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\text{(exercício)}}$

OBS: Poisson(λ)

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad k \geq 0 \qquad \begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ Var(X) &= \lambda \end{aligned}$$

$X \sim Bin(n, p)$

$n \to \infty$ $pn = \lambda$

Se $X_1, X_2, \dots$ iid $X_i \sim Poisson(\lambda = 1)$ $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(n)$

TCL
$$P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x \right) \to \phi(x)$$

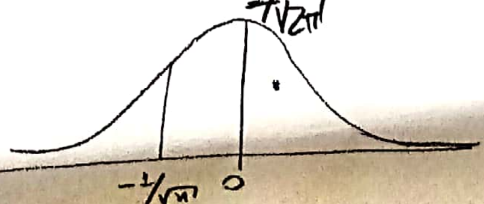
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n\right) = \frac{e^{-n} n^n}{n!}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n\right) = P\left(n-1 < \sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\right) = P\left(\frac{-1}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right)$$

$$\approx \phi(0) - \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

aprox TCL

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$



$\therefore \Rightarrow n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$

Voltando ao passeio aleatório.

$$\sum_{n\geq 1} P_\infty(2n)$$

$$P_\infty(2n) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot p^n(1-p)^n$$

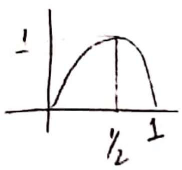
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{e^{-2n}\,2^{2n}\,n^{2n}\,2\sqrt{\pi n}}{e^{-2n}\,n^{2n}\,2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$P_\infty(2n) \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\, p^n(1-p)^n$$

$$\sum_{n\geq 1} P_\infty(2n) \sim \sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\, p^n(1-p)^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$4p(1-p)$



$\boxed{p \neq \frac{1}{2}}$

$\alpha = 4p(1-p) < 1$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} < \infty$$

origem é transiente

$\boxed{p = \frac{1}{2}}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow \text{origem é recorrente}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

$$\int_0^N \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \to \infty$$

Introdução aos Processos Estocásticos

10/09 - Aula 06

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ enumerável

Markov

Homogenéa

$\mathbb{P}$ matriz de transição

cjto de medidas de prob. em $\wp$

cjto de funções em $S = \mathcal{F}$.

Distribuição
Medida Estacionária.

$$\pi \in \wp : \pi = \pi \mathbb{P}$$

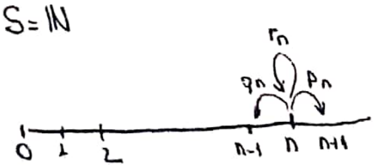
equivalente:

equação de balanceamento

$$\pi(j) = \sum_{i\in S} \pi(i) P_{ij} = \sum_{\substack{i\in S \\ i\neq j}} \pi(i) P_{ij} + \pi(j) P_{jj}$$

$$\boxed{\pi(j)(1-p_{jj}) = \sum_{\substack{i\in S \\ i\neq j}} \pi(i) p_{ij}}$$

Ex. 19: $S = \mathbb{N}$



Classificação dos Estados de uma Cadeia de Markov

$i \in S \rightarrow$ recorrente $\leftarrow$ "retorna com prob. 1"

transiente $\leftarrow$ "pode não retornar".

$f_{ij}(n) =$ $\quad f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n) \quad p_{ij}(n)$

Vimos:

i é recorrente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty$

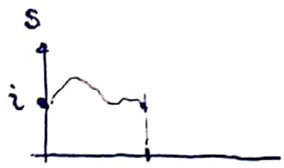
i é transiente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) < \infty$

Tempo Médio de Retorno

$\mu_i = E[T_i \mid X_0 = i]$

T_i = "instante de primeira visita"

$= \min \{n \geq 1;\ X_n = i\}$



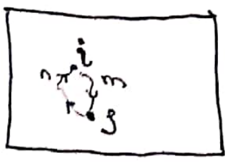
$\mu_i = \sum_{n \geq 1} n f_{ii}(n)$

Se i transiente $\Rightarrow \mu_i = \infty$

i recorrente $\Rightarrow$ $\mu_i < \infty$ recorrente positivo.

$\mu_i = \infty$ recorrente nulo.

— " —



S

i e j "se comunicam" : "$i \leftrightarrow j$".

$i \leftrightarrow j \equiv \exists\, n \geq 0 \quad p_{ij}(n) > 0$

$\exists\, m \geq 0 \quad p_{ji}(m) > 0$

$i \leftrightarrow j$ é uma "relação de equivalência"

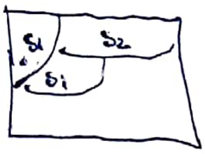
i) $i \leftrightarrow i$ (reflexiva)

ii) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$ (simétrica)

iii) transitiva

se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$.

Esta relação define uma partição (disjunta) em S.



$S = \bigcup_n S_n$

tal que

$i, j \in S_n \Rightarrow i \leftrightarrow j$

$i \in S_n$

$j \in S_m$

$n \neq m \Rightarrow i \not\leftrightarrow j$

~~[illegible]~~

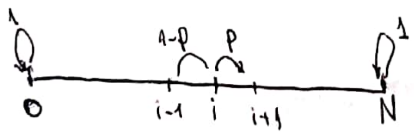
Definição. Se apenas um dos subconjuntos é não vazio esta cadeia é dita irredutível.

Exemplo:

1) De Ehrenfest

Irredutível

2) Jogador



$S = \underbrace{\{0\}}_{\text{recorrente}} \cup \underbrace{\{1, 2, \ldots, N-1\}}_{\text{transiente}} \cup \underbrace{\{N\}}_{\text{recorrente}}$

cadeia redutível.

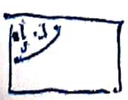
Lema: Dentro da mesma classe irredutível, todos os estados são do mesmo tipo.

transiente

recorrente positivo ou

recorrente nulo

Dem. (Exercício)



$i, j \in S_n$ classe irredutível

i transiente

irredutível impossível $\rightarrow$ $i \leftrightarrow j$ j é visitado inf. vezes

$P_{ij}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$ (Limite nem sempre converge pra dist. estacionário, só vale qdo período = 1).

$X_n \in \{N, S, L, O\}$

$P_{NS}(n) > 0$ se n é par
$= 0$ se n é ímpar } Não converge

Mas $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ é uma distribuição estacionária.

Período de um estado

$i \in S$ $\quad d(i) = \text{mdc}\{n : P_{ii}(n) > 0\}$

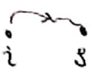
"só passo retornar em múltiplos do período"

Lema. Se i e j estão na mesma classe irredutível, então $d(i) = d(j)$.

Dem.

$\cdot i \quad \cdot j$ $\quad d(i)$
$d(j)$

Idéia: A conexão quebra o ritmo



$i \leftrightarrow j$ $\quad \exists\, n, m$ $\quad d(i) = \text{mdc}\{k : P_{ii}(k) > 0\}$

$P_{ij}(n) > 0$

$P_{ji}(m) > 0$ $\quad P_{jj}(n+m+r) = 0$ se r não for múltiplo de $d(i)$.

Teorema: Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S contável irredutível então existe distribuição estacionária única se e somente se a cadeia for <u>recorrente positiva</u>. Neste caso:

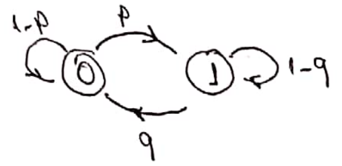
$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$$

Ex.:

$\}$ a cada μ_i

Ex. Concreto:

$\pi_0 = E[T_0 / X_0 = 0]^{-1}$ $\qquad X_n \in \{0,1\}$



T_0	Prob.
1	$1-p$
2	pq
3	$p(1-q)q$
$\vdots$	
n	$p(1-q)^{n-2}q$

$$\mu_0 = (1-p) + \sum_{n\geq 2} n\, p(1-q)^{n-2} q \iff$$

Ps: $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\alpha^{n-2} = \sum_{l\geq 0} (l+2)\alpha^l = \sum_{l\geq 0}(l+1)\alpha^l + \sum_{l\geq 0}\alpha^l$

$$\sum_{n\geq 1} n\alpha^{n-1} = \frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n\geq 0}\alpha^n\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n\alpha^{n-2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha|<1$$

$$\mu_0 = (1-p) + pq\left(\frac{1}{(1-1+q)^2} + \frac{1}{(1-1+q)}\right) =$$

$$= (1-p) + pq\left(\frac{1+q}{q^2}\right) =$$

$$= (1-p) + \frac{p(1+q)}{q} = \frac{q(1-p)+p(1+q)}{q} = \frac{q+p}{q} = \frac{1}{\pi(0)}.$$

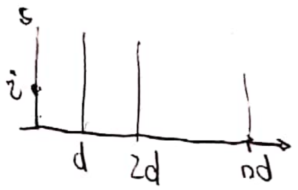
Teorema Limite.

Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é irredutível e aperiódica (ou seja, $d(i)=1$, $\forall i \in S$) então

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi(j)$$

Obs: Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S for periódica (ou seja, $d = d(i) \geq 1, i \in S$)

$$\lim_{n\to\infty} (nd) = \frac{d}{\mu_i}$$



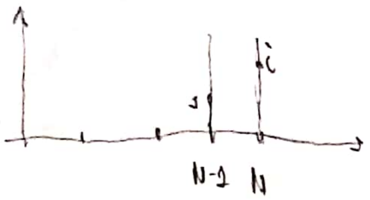
Exemplo:

$P_{NS}(n)$

$P_{NS}(2n) \to 1/2$

$P_{NS}(2n+1) \to 0$

Aula 07 - 12/09



Exemplo. Ehrenfest

Cadeia é reversível

π Binomial $(N, 2)$

π reversível $\Rightarrow$ π estacionária.

$$\pi(j)(1 - p_{jj}) = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) p_{ij}$$

$\Uparrow$

$\pi(i) p_{ij} = \pi(j) p_{ji}$ Balanceamento detalhado

Introdução Aos Processos Estocásticos

17/09/2013 - Aula 08

Teorema. Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S enumerável é uma cadeia de Markov irredutível, então

1. Existe uma distribuição estacionária π se e somente se esta cadeia for recorrente positiva.

2. Neste, π é única e dada por

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$$

onde $\mu_i = E[T_i / X_0 = i]$ onde $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.

μ_i = "tempo médio de retorno a $i \in S$"

Demonstração:

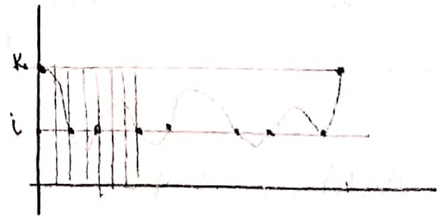
1 a cada μ_i

Fixo $k \in S$, e seja

$p_i(k)$ = "número médio de visitas ao estado i entre duas sucessivas visitas ao estado k"

$(p_0(k), p_1(k), \dots) = p(k)$ vetor em S

$$p_i(k) = E[N_i / X_0 = k], \quad N_i = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\mathbb{1}}_{\{\underset{\text{visita ao i}}{X_n = i},\ \underset{\text{não retornei}}{T_k \geq n}\}}$$



Obs: $\rho_k(k) = 1$

$$\rho_i(k) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = i, T_k \geq n \mid X_0 = k)}_{l_{ki}(n)}$$

Obs: $T_k = \sum_{i \in S} N_i$

$$\mu_k = E[T_k / X_0 = k] = \sum_{i \in S} E[N_i \mid X_0 = k] = \sum_{i \in S} \rho_i(k)$$

Lema: Para todo $k \in S$

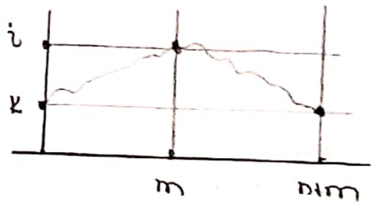
1) $\rho_i(k) < \infty$ 2) $\rho(k) = \rho(k) \mathbb{P}$

Demonstração:

1)

$$\rho_i(k) = \sum_{n \geq 1} l_{ki}(n)$$

$$l_{ki}(n) = P(X_n = i, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$



$\exists \bar{n} : P_{ik}(\bar{n}) > 0$

$\downarrow$

irredutível

$$f_{kk}(m+n) \geq l_{ki}(m) f_{ik}(n)$$

irredutível $\Rightarrow \exists \bar{n} \geq 1 : f_{ik}(\bar{n}) > 0.$

Então,

$$l_{ki} \leq \frac{f_{kk}(\bar{n}+m)}{f_{ik}(\bar{n})} \quad , \forall m \geq 1$$

$$\rho_i(k) = \sum_{m \geq 1} l_{ki}(m) \leq \sum_{m \geq 1} \frac{f_{kk}(\bar{n}+m)}{f_{ik}(\bar{n})} \leq \frac{1}{f_{ik}(\bar{n})} < \infty$$

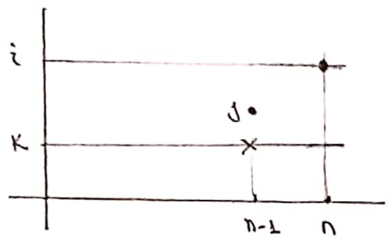
Logo, $\rho_i(k) < \infty \quad \forall k \in S.$

2)

$$\rho_i(k) = \sum_{n \geq 1} l_{ki}(n) \quad (= \rho_i(k))$$

$$l_{ki}(1) = \mathbb{P}(X_1 = i, T_k \geq 1 \,/\, X_0 = k) = p_{ki}$$

$$l_{ki}(n) = \mathbb{P}(X_n = i, T_k \geq n \,/\, X_0 = k)$$



$$l_{ki}(n) = \sum_{j \neq k} \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n \,/\, X_0 = k)$$

$$= \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-1)\, p_{ji} \quad , \quad n \geq 2$$

Assim,

$$\rho_i(k) = p_{ki} + \sum_{n \geq 2} \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-i)\, p_{ji} =$$

$$= 1 . p_{ki} + \sum_{j \neq k} \underbrace{\left(\sum_{n \geq 2} l_{kj}(n-1) \right)}_{\rho_j(k)} p_{ji}$$

$$= \sum_{j \in S} \rho_j(k)\, p_{ji}$$

$\forall\, k \in S$

$$\rho(k) = \rho(k)\, \mathbb{P}.$$

$$\pi = \pi\, \mathbb{P}.$$

<u>Pergunta</u>: Posso "normalizar"?

$$\pi(i) = \frac{\rho_i(k)}{\mu_k} \qquad \sum_{i \in S} \rho_i(k) = \mu_k$$

A existência de uma medida estacionária π implica $\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$.

Tome X_0 com distribuição π.

$$P(X_0 = i) = \pi(i)$$

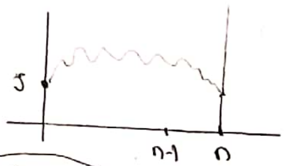
Fixo j,

$$\underset{\uparrow \; P(X_0=j)}{\pi(j)}\mu_j = \pi(j) \underbrace{E[T_j / X_0 = j]}_{\sum_{n\geq 1} P(T_j \geq n / X_0=j) \;(2.1.6)} = \pi(j) \sum_{n\geq 1} P(T_j \geq n / X_0 = j) =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \underbrace{P(T_j \geq n, X_0 = j)}_{a_n}$$

$$a_1 = P(T_j \geq 1, X_0 = j) = \pi(j)$$

$$a_n = P(T_j \geq n, X_0 = j)$$



$*$ $P(A\cap B) = P(B) - P(B \cap A^c)$

$$a_n = P(\overbrace{X_0 = j}^{A}, \overbrace{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j}^{B}) =$$

$$= P(X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j) - P(X_0 \neq j, X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j)$$

$$= b_{n-1} - b_n \, ,$$

$$b_n = P(\overbrace{X_0 \neq j, X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j}^{n \text{ termos}})$$

$$b_1 = P(X_1 \neq j) = 1 - \pi(j)$$

$$\pi(j)\mu(j) = a_1 + a_2 + \dots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n =$$

$$\pi(j) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\pi(j) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{N-1} - b_N)\right] = \pi(j) + b_1 - \overset{\searrow 0}{b_N}$$

$$\pi(i)\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n}_{x_n}$$

$b_N = P(X_n \neq y, n = 1, 2, \ldots, N) \searrow 0$

$N \uparrow \infty$

irredutível

$\pi(y)\mu_y = \pi(y) + \underbrace{b_1}_{1-\pi(y)} = 1 \Rightarrow \pi(y) = \frac{1}{\mu_y}$

Introdução Aos Processos Estocásticos

19/09/2013 - Aula 08

Na aula passada:

Teorema: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em S contável

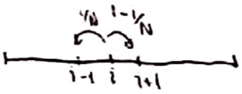
irredutível

1) Existe dist. estacionária $\Leftrightarrow$ cadeia for rec. positiva

2) Neste caso, $\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$ ← tempo médio de retorno

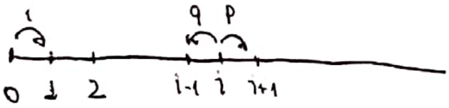
Exemplo:

1) Ehrenfest



$$\pi(i) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{\mu_i}$$ é a única medida estacionária.

2) Cadeia de Nascimento e Morte



$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S = \mathbb{N}$

$p+q = 1$ $\quad p\in(0,1)$

Exercício.

Classificação da cadeia: irredutível

recorrente positivo $p<q$ $\Rightarrow$ recorrente positivo se $p<1/2$

recorrente nulo $p=q$ — recorrente nulo se $p=1/2$

transiente $p>q$ — transiente se $p>1/2$

Medida estacionária.

$$\pi(i) = cte\left(\frac{p}{q}\right)^i = \frac{1}{\mu_i} \quad \text{se } p<q$$

Teorema Limite

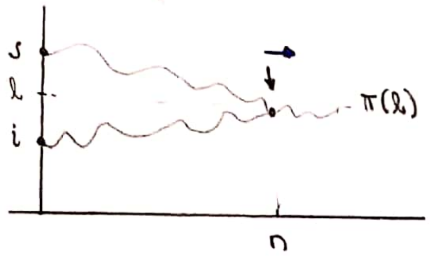
$\{X_n\}_{n \geq 0}$ em S contável

Se for aperiódica, irredutível

$$p_{ij}(n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \frac{1}{\mu_j}$$

"perda assintótica da memória"

. Probability and Random Process. Grimet.



• Simulação Perfeita (Perfect simulation)

Ex: Baralho (Penso num nº 0 à 10, espero essa carta, depois espero o nº de cartas igual à última carta obs.)

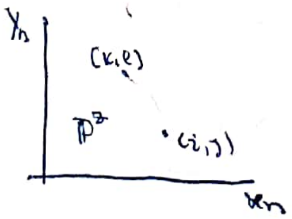
Demonstração.

$Z_n = (X_n, Y_n)$ "Acoplamento"

Par de cadeias de Markov com mesmo $\mathbb{P}$

Suponha X_n e Y_n independentes

recorrentes positivos



$Z_n \in S \times S$

Matriz

$\mathbb{P}^z$

$$P(Z_1 = (k,l) \mid Z_0 = (i,j)) = \underbrace{P_{ik} P_{jl}}_{\text{acoplamento}}$$

X_n irredutível e rec. positivo

e Z_n irredutível se X_n aperiódico

Ex. X_n passeio aleatório

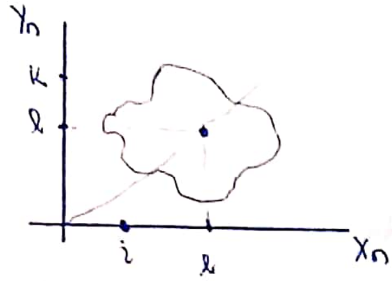
Se começar no (0,0), vou só pra pontos cuja soma das coordenadas é par

Se X_n for recorrente positivo então temos dist. estac. $\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$.

$Z_n \in S^2$

$\pi^2(i,j) = \pi(i)\pi(j)$ é estacionária (exercício) $\Rightarrow$

Z recorrente positivo.



$Z_0 = (i,j)$

$T_l^Z = \min\{n : Z_n = (l,l)\}$

$P_{ik}(n) \to ?$

$P_{ik}(n) = P(X_n = k / X_0 = i) = P(X_n = k / Z_0 = (i,j))$

$= P(X_n = k, T_l^Z \leq n / Z_0 = (i,j)) + P(X_n = k, T_l^Z > n / Z_0 = (i,j))$

$P(X_n = k, T_l^Z \leq n / Z_0 = (i,j))$

$\downarrow$ pq se encontraram já!

$= P(Y_n = k, T_l^Z \leq n / Z_0 = (i,j))$

$P_{ik}(n) = P(Y_n = k, T_l^Z \leq n / Z_0 = (i,j)) + P(X_n = k, T_l^Z > n / Z_0 = (i,j))$

$\leq P(Y_n = k / Z_0 = (i,j)) + P(T_l^Z > n / Z_0 = (i,j))$

$= P_{jk}(n) + P(T_l^Z > n / Z_0 = (i,j))$

$|P_{ik}(n) - P_{jk}(n)| \leq 2P(T_l^Z > n / Z_0 = (i,j))$

Z recorrente positivo $\quad \downarrow n \uparrow \infty$ $\quad 0$

$\Rightarrow \quad P_{ik}(n) \to \pi(k)$.

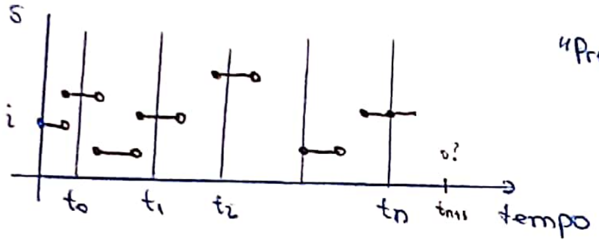
Cadeia de Markov Em Tempo Contínuo

$\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ em S enumerável
$(t \geq 0)$

Ex. Dois estados

$X_t \in \{0,1\}$, $t \in \mathbb{R}^+$

X_t = "# clientes num Banco no instante t"



"Processo de Salto"

$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ e $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$

Condição de Markov

$$P(\underbrace{X_{t_{n+1}} = j}_{\text{Futuro}} / \underbrace{X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}}_{\text{Passado}}, \underbrace{X_{t_n} = i}_{\text{Presente}}) =$$

$$= P(X_{t_{n+1}} = j / X_{t_n} = i)$$

$$= P(X_{t_{n+1} - t_n} = j / X_0 = i)$$

homogeneidade

Construção de uma cadeia de Markov em tempo contínuo

1) Para cada $i \in S$, associo $q_i > 0$ parâmetros dos sucessivos tempos de permanências no estado i, cuja distribuição é exponencial.

2) Ao término de cada tempo de permanência em i, decido para qual estado saltar conforme uma cadeia de Markov em tempo discreto com prob. de transição P.

↳ "Pegar uma cadeia discreta e associar tempos de permanência aos estados"

Exemplo: Fila $M|M|1$

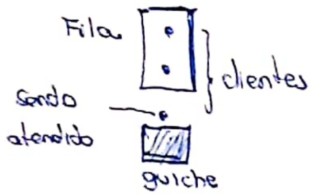
chegada → sem memória → Processo de Poisson

atendimento sem memória

um atendente

Número de clientes num banco com <u>um</u> atendente

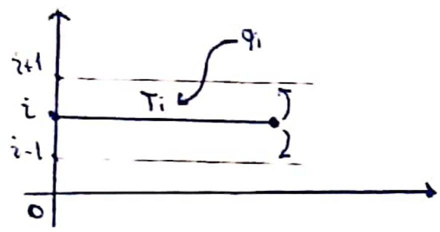
Fila única



X_t = # de clientes no sistema

(Fila + em atendimento)

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S = \mathbb{N}$



$T_0 \sim exp(\lambda)$

$T_1 \sim exp(\lambda + \mu)$

$T_c \sim exp(\lambda)$

$T_a \sim exp(\mu)$

T_a: tempo de atendimento

T_c: tempo de chegada

$$P(T_a < T_c) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

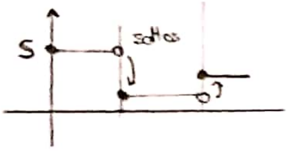
$$T_i = \min\{T_c, T_a\}$$

Introdução Aos Processos Estocásticos

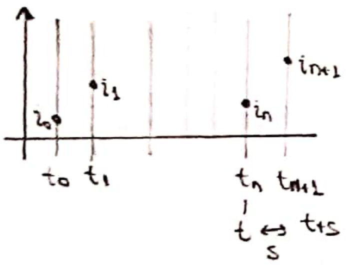
Aula 10 - 23/09/2013

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ em S contável
$t \in \mathbb{R}^+$

Cadeia de Markov em tempo contínuo.



contínua a direita



Se $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t < t+s,\ s > 0$

e

$i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n = j$ sendo estados quaisquer

Então,

$$P(X_{t+s} = j \,/\, X_{t_0} = i_0, \ldots, X_t = i) \overset{\text{Markov}}{=} P(X_{t+s} = j \,/\, X_t = i) =$$

$$\overset{\text{Homogeneo (no tempo)}}{=} P(X_s = j \,/\, X_0 = i)$$

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j \,/\, X_0 = i)$$

$\{P(t)\}_{t \geq 0}$ = "semigrupo"

$(P(t))_{ij} = P_{ij}(t)$

$\mathbb{P}(t)$ = matriz de transição no intervalo t

Obs: No caso discreto

$$\{\mathbb{P}(n)\}_{n\geq 0}$$

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}^n$$

$\mathbb{P}(t) \quad t \geq 0$

$\mathbb{P}(0) = \mathbb{1}$ = matriz identidade, pois

$$(\mathbb{P}(0))_{ij} = P(X(0)=j \,/\, X(0)=i) = \delta_{ij}$$

Nesse caso,

$$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{P}(s) \qquad , t,s \geq 0$$

Verificando: Queremos mostrar que

$$(\mathbb{P}(t+s))_{ij} = \sum_{k} (\mathbb{P}(t))_{ik}\,(\mathbb{P}(s))_{kj}$$

Notemos que

$$\mathbb{P}(X(t+s)=j \,/\, X(0)=i) = \sum_{k\in S} P(X(t+s)=j, X(t)=k \,/\, X(0)=i) =$$

$$= \sum_{k\in S} \frac{P(X(t+s)=j, X(t)=k, X(0)=i)}{P(X_0=i)} = \sum_{k\in S} P(X(t+s)=j \,/\, X(0)=i, X(t)=k)\,\frac{\mathbb{P}(X(t)=k, X(0)=i)}{\mathbb{P}(X(0)=i)} =$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{k\in S} P(X(t+s)=j \,/\, X(t)=k)\,\mathbb{P}(X(t)=k \,/\, X(0)=i) \overset{\text{homogeneidade}}{=}$$

$$= \sum_{k\in S} P_{kj}(s)\,P_{ik}(t) = \sum_{k\in S} (\mathbb{P}(t))_{ik}\,(\mathbb{P}(s))_{kj}.$$

Obs: $f(t+s) = f(t)\,f(s)$. se f é contínua, $f(t) = e^{at}$.

Comentário: Bolinha de ping-pong pingando. Quando próximo de fim, ela começa a quicar muito rápido, o que pode acontecer no processo. Para evitar isso, deve-se ter "$\mathbb{P}(t)$ contínua".

$\{\mathbb{P}(t)\}_{t \geq 0}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(0) = \mathbb{1} \\ \mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s) \end{cases}$$

(+ hipótese de continuidade

$\mathbb{P}(t)$ contínua e diferenciável na origem)

Definição. Cadeia irredutível.

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ em S é irredutível se, para todo par i, j em S, existem t e $s \geq 0$ tal

$$p_{ij}(t) > 0 \quad e \quad p_{ji}(s) > 0$$

Outro ponto: distr. estacionária.

Se $P(X_0 = i) = \pi_0(i)$ (π_0 é a dist. inicial da cadeia), então

$$\pi_t(j) = P(X(t) = j \,/\, \pi_0) =$$

$$= \sum_{i \in S} P(X(t) = j \,/\, X(0) = i)\, \pi_0(i) =$$

$$= \sum_{i \in S} P_{ij}(t)\, \pi_0(i) \quad \Rightarrow$$

$$\pi_t = \pi_0 \mathbb{P}(t)$$

Definição: π é dita uma distribuição estacionária se

$$\pi = \pi \mathbb{P}(t), \quad t \geq 0.$$

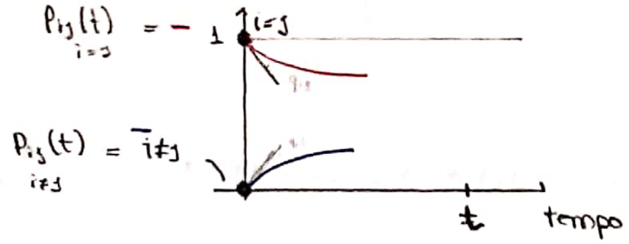
Agora: Como encontrar a distribuição estacionária?

Fica meio complicado, dada a dependência de t.

Mas devemos perceber que $\pi = \pi \mathbb{P}(t)$ é uma função de t, que para todo t se mantém constante, de tal forma que sua derivada deve ser nula.

Vamos estudar $(\mathbb{P}(t))_{ij}$.

$$(\mathbb{P}(t))_{ij} = P_{ij}(t) = P(X(t) = j \,/\, X(0) = i)$$

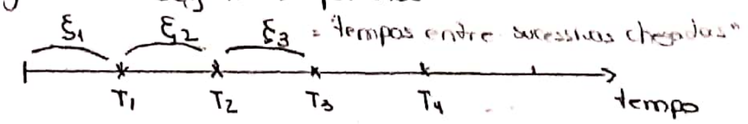


$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0} = \text{"taxa" (velocidade de transição de } i \text{ para } j)$$

Exemplo: Fila M/M/1

sistema (Banco) com 1 atendente

→ clientes chegam da seguinte forma



Se T_n = tempo de chegada do i-ésimo cliente

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad , \quad \xi_i \sim \exp(\lambda) \text{, independentes}$$

$S_i \sim \exp(\lambda)$ é uma restrição que nos diz que a taxa de chegada é constante.

→ tempos de atendimentos

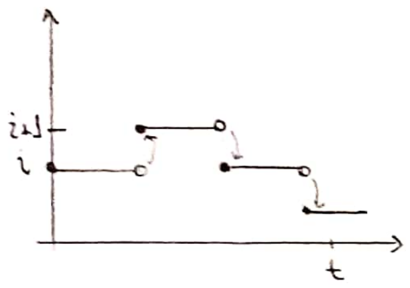
sucessivos tempos de atendimentos são independentes e tem dist. exp. com par. μ.

$S_1, S_2, S_3, \ldots \quad \{S_i\}_{i\geq 1} \sim \exp(\mu)$ rapidez do atend.

Definamos agora

X_t = # de clientes no sistema

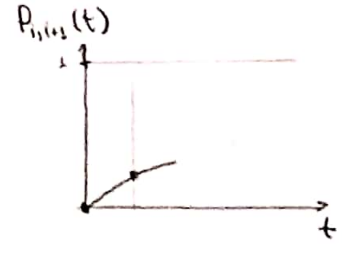
$X_t \in S = \mathbb{N}$



$P_{ij}(t)$

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt} P_{i,i+1}(t) \Big|_{t=0} = q_{i,i+1}$$



$$q_{i,i+1} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(h) - P_{i,i+1}(0)}{h}$$

$i \geq 1$.

$P_{i,i+1}(h) = P(\text{"Chegar alguem"}_{T_1 < h} \text{ e } \text{"ninguem foi atendido"}_{S_1 > h})$ no intervalo

$+ P(\text{"outras coisas"})$

$= P(T_1 < h, S_1 > h) + P(\text{"outras coisas"}) =$

$= P(T_1 < h) P(S_1 > h) + P(\text{"outras coisas"}) =$

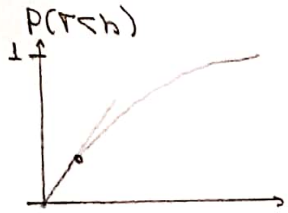
$= (1 - e^{-\lambda h}) e^{-\mu h} + P(\text{"outras coisas"})$

Vamos destrogar isso:

$$P(T_1 < h) = 1 - e^{-\lambda h} = 1 - \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda h)^n}{n!}\right) = 1 - \left(1 - \lambda h + \underbrace{o(h)}_{\frac{(\lambda h)^2}{2} + \cdots}\right)$$

vai mais rápido à zero que h.

$$= \lambda h + o(h)$$



Similarmente, $P(S_1 > h) = 1 - \mu h + o(h)$

Assim,

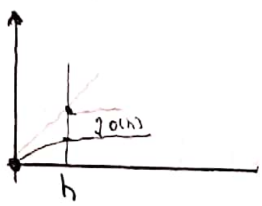
$$P(T_1 < h, S_1 > h) = \lambda h - \underbrace{\mu h \lambda h}_{h^2} + \overset{o(h)}{\lambda h\, o(h)} + \overset{o(h)}{o(h).1} - \overset{o(h)}{o(h)\mu.h} + \overset{o(h)}{(o(h))^2} =$$

$$= \lambda h + o(h)$$

e, P("outras coisas") = $o(h)$, pois seria no mínimo o produto do resultado acima.

Então. $P_{i,i+1}(h) = \lambda h + o(h)$

Logo, $\frac{d}{dt} P_{i,i+1}(t)\Big|_{t=0} = q_{i,i+1} = \lambda$



$P_{i,i+2}(h) = o(h) \Rightarrow q_{i,i+2} = 0$

$q_{i,i+k} = 0 \quad \forall k \geq 2$

Similarmente,

$P_{i,i-1}(h) = \mu h + o(h) \Rightarrow q_{i,i-1} = \mu$

$P_{i,i-2}(h) = o(h) \Rightarrow q_{i,i-2} = 0$

Falta agora $P_{ii}(h)$

$$P_{ii}(h) = P(\text{"Não ter acontecido nada"}) + P(\text{"outras coisas"}) =$$
$$= P(T_1 > h, S_1 > h) + \underbrace{P(\text{"outras coisas"})}_{o(h)}$$

e $P(T_1 > h, S_1 > h) = P(T_1 > h)P(S_1 > h) = (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) =$
$$= 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

$$P_{ii}(h) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

$$q_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_{ii}(h) - P_{ii}(0)}{h} = \frac{\cancel{1} - (\lambda+\mu)h + o(h) - \cancel{1}}{h} = -(\lambda + \mu)$$

Definição: Matriz de taxas $\mathbb{L}$.

$$(\mathbb{L})_{ij} = q_{ij}$$

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots \\ \hline 0 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ i & & 0 & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \end{array}$$

Pois $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 0 \Rightarrow \sum_{j \in S} q_{ij} = 0.$

Introdução Aos Processos Estocásticos

Aula 11 - 26/09

Cadeias de markov em tempo contínuo

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ em S contável

$\{P(t)\}_{t\geq 0}$

$(P(t))_{ij} = P(X(t)=j \,/\, X(0)=i)$

$P(0) = \mathbb{1}$ (identidade)

$P(s+t) = P(s)\,P(t)$

Definição: Distribuição estacionária π tal que

$$\pi = \pi P(t) \quad \forall t \geq 0$$

Taxas:

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$$

$i \neq j$ $\quad P_{ij}(t)$

$tg\alpha = \text{taxa} = q_{ij}$

$\begin{cases} q_{ij} \geq 0 & \text{se } i \neq j \\ q_{ij} \leq 0 \end{cases}$

$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0 \leftarrow \sum_j P_{ij}(t) = 1$

Matriz de ~~[illegible]~~ Taxas

$\mathbb{L}$

$(\mathbb{L})_{ij} = q_{ij}$

$$\begin{array}{cc} & S \\ \mathbb{L} = S & \begin{bmatrix} \leq 0 & \geq 0 \\ \geq 0 & \leq 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Equação de Balanceamento

$$\pi = \pi \mathbb{P}(t) \ , \ \forall t$$

derivo nos dois lados

$$\pi(j) = \sum_i \pi(i) P_{ij}(t) \quad j \in S$$

$$\forall j \in S \qquad 0 = \sum_{i \in S} \pi(i) q_{ij} \quad \equiv \quad 0 = \pi \mathbb{L}$$

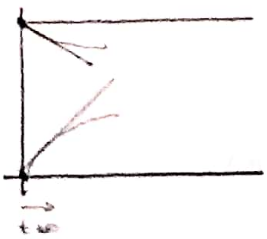
$$0 = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} + \overbrace{\pi(j) q_{jj}}^{\leq 0}$$

Seja $q_{jj} = -q_j$. Daí

$$-\pi(j) q_{jj} = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\pi(j) q_j = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} \quad \forall j \in S$$

• Interpretando:



No fundo,

$P_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$ e

$P_{jj}(t) = 1 + q_{jj} t + o(t) = 1 - q_j t + o(t)$, dado

que $q_{jj} = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{P_{jj}(t) - P_{jj}(0)}{t}$

Idéia: "Tomando t pequeno, é como se $\pi(j) q_j$ é a probab. de ter saído de j (pois $o(t)$ tende a zero)"

$q_j t = 1 - P_{jj}(t) + o(t)$

$\cong$ prob. de sair de j num intervalo de tempo (pequeno)

Então: temos do lado esquerdo de $(*)$ multiplicado por $h > 0$, pequeno

$\pi(j) q_j h \approx$ prob. de

1) Encontrar a cadeia em j

2) Presenciar um salto para fora de j, num intervalo de tempo h pequeno

Lado direito de $(*)$, multiplicado por h.

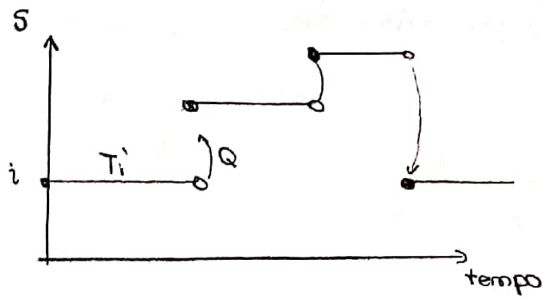
$\pi(i) q_{ij} h \approx$ 1) Prob. de encontrar em i

2) Ver salto de i para j no tempo h

Construção da Cadeia

1) $i \in S \to q_i$ parâmetro das sucessivas exponenciais de parâmetros em $i \in S$

2) Q = matriz de transição ao término de um período de permanência



$T_i \sim exp(q_i)$

Taxas:

$P_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$, $i \neq j$ pois p/ $i = j$ temos $q_j = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$

t pequeno

$$P_{ij}(t) = P(T_i < t, \text{ foi de } i \to j) + o(t) \quad \overset{\text{indep.}}{\Leftrightarrow}$$

$\downarrow$ tocar o relógio rápido

$1 - e^{-q_i t} = q_i t + o(t)$

$$P_{ij}(t) = P(T_i < t)\, Q_{ij} + o(t) =$$

$$= \boxed{q_i Q_{ij}} \times t + o(t) \quad \Rightarrow$$

$\Uparrow$

q_{ij}

$$\boxed{q_{ij} = q_i Q_{ij}}$$

$\downarrow$ taxa do T_i.

$$P_{jj}(t) = 1 + q_{jj}(t) + o(t) \Leftrightarrow$$

$$1 - P_{jj}(t) = -q_{jj} t + o(t)$$

$\approx$ Prob de sair de j no tempo t

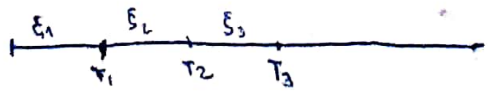
$$\cong P(T_j < t) = 1 - e^{-q_j t} = q_j t + o(t) \Rightarrow$$

$$q_{jj} = -q_j \,.\,//$$

Exemplo: Fila M/M/1 $\to$ Atendimento: sucessivos atend. são ind. com dist. exp. (μ).

1 atendente

$\downarrow$ cheg. de clientes: "sem memória"

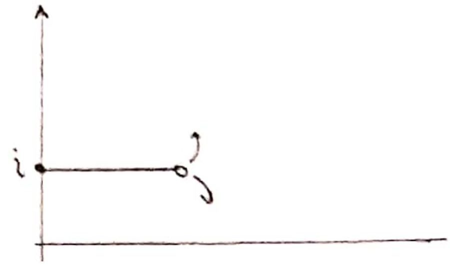


$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \qquad \xi_i \sim \exp(\lambda)$$

Já vimos.

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & , j = i+1 \\ \mu & , j = i-1, \; i \geq 1 \\ -(\lambda+\mu) & , j = i \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

Usando a construção:



$i \in S: \quad q_i = \begin{cases} \lambda + \mu & \text{se} \quad i \geq 1 \\ \lambda & \text{se} \quad i = 0 \end{cases}$

. Q

$$Q_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda} & \text{se } j = i+1 \\ \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } |i-j| \geq 2 \text{ ou } i=j. \end{cases}$$

Obs: Vale os dois teoremas anteriores:

1) Se a cadeia é irredutível existe distribuição estacionária se e somente se for recorrente positiva e

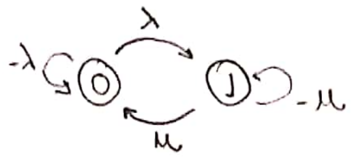
$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i} \qquad (\pi \text{ é única})$$

2) $P_{ij}(t) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \pi(j), \; \forall i,j.$

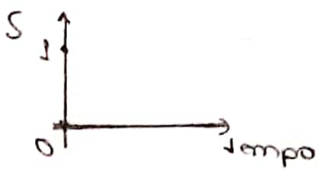
Exemplos:

1) Cadeia de Dois estados

(0) (1) $\quad X_t \in \{0,1\}$



$X_t \in \{0,1\}$



$$\mathbb{L} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & \mu & -\mu \end{array}$$

Distribuição estacionária.

Equação de balanceamento (taxas)

$$\pi(j)\, q_j = \sum_i \pi(i)\, q_{ij} \qquad \forall j \in S$$

Construção

$q_0 = \lambda$ (tempo de permanência no 0)

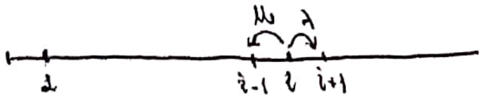
$q_1 = \mu$ (" " " " 1)

$$Q = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (0) \\ (1) \end{array} \quad \begin{cases} \pi(0)\lambda = \pi(1)\mu \\ \pi(1)\mu = \pi(0)\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi(1) = \lambda/\mu \; \pi(0) \\ \pi(0) + \pi(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi(1) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \quad e \quad \pi(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

2) M/M/1



$$\mathbb{L} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & & \\ 1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ 2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$$q_j = \begin{cases} \lambda+\mu & , j \geq 1 \\ \lambda & , \text{se } j=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \\ 2 & & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \vdots & & & & \end{array}$$

$Q =$ the matrix above (rows $0, 1, 2, \ldots$; columns $0, 1, 2, \ldots$).

"Dist. estacionária"

$(i \geq 1)$ $\quad \pi(i)(\lambda+\mu) = \pi(i-1)\lambda + \pi(i+1)\mu$

$(i=0)$ $\quad \pi(0)\lambda = \pi(1)\mu \Rightarrow \pi(1) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(0)$

$(i \geq 1)$

$$\pi(i)\lambda - \pi(i-1)\lambda = \pi(i+1)\mu - \pi(i)\mu \Leftrightarrow$$
$$\lambda\pi(i) - \mu\pi(i+1) = \lambda\pi(i-1) - \mu\pi(i)$$

$(i=1)$ $\quad \lambda\pi(1) - \mu\pi(2) = \lambda\pi(0) - \mu\pi(1) = 0 \Rightarrow$

$$\pi(2) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(1) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi(0).$$

$(i=2)$ $\quad \lambda\pi(2) - \mu\pi(3) = \lambda\pi(1) - \mu\pi(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\pi(3) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(2) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi(0)$$

$\vdots$

Iterando $\quad \pi(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\pi(0)$ $\quad$ + Indução

Agora,

$$\sum_{n\geq 0} \pi(n) = 1 \Rightarrow$$

$$\pi(0) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty \quad \text{se } \lambda < \mu =$$

$$= \pi(0) \frac{1}{1-\lambda/\mu} = \pi(0) \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

Daí,

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad //$$

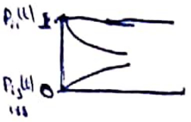
Introdução Aos Processos Estocásticos

Aula 12 - 08/10

$X_t \in S$ contável

$P_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$

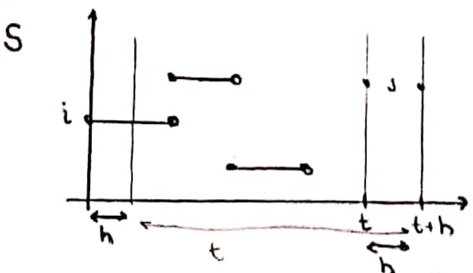
$$P_{ij}(t) = \begin{cases} q_{ij} t + o(t) = q_i Q_{ij} t + o(t) & i \neq j \\ 1 + q_{ii} t + o(t) = 1 - q_i t + o(t) \end{cases}$$



Q = matriz de taxas

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$$

Eq. de Kolgomorov



↳ Forward

↳ se condicionar na 1ª coisa que aconteceu. Backward

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P(X_{t+h} = j \mid X_h = k, X_0 = i) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \quad \text{(Chapman-Kolmogorov)}$$

$$= P_{ii}(h) P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) = (1 - q_i h + o(h)) P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} (h q_{ik} + o(h)) P_{kj}(t)$$

Daí,

$$P_{ij}(t+h) = P_{ij}(t) - q_i P_{ij}(t) h + h \sum_{k \neq j} q_{ik} P_{kj}(t) + o(h)$$

· Backward sempre existe (cond. no primeiro salto)
· Forward pode não existir (condic. no último salto)

Continuando, temos

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{ik} P_{kj}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$\Downarrow h \downarrow 0$

$$\left.\frac{d\, P_{ij}(s)}{ds}\right|_{s=t} = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \Rightarrow$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t)$$

ou, matricialmente,

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{L}\,\mathbb{P}(t) \qquad \text{equação Retrógrada}$$

E agora, condicionando no último salto,

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(h) =$$

$$= P_{ij}(t) P_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) =$$

$$= P_{ij}(t)\,[1 + \overbrace{q_{jj}}^{-q_j} h + o(h)] + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)\,[q_{kj} h + o(h)] =$$

$$= P_{ij}(t) + P_{ij}(t) q_{jj} h + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} h + \text{"}o(h)\text{"}$$

↓

soma de o(h)'s ponderados por prob. de chegar em j. Poderia não ser o(h), mas o é sob certas condições.

Logo,

$$\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h} = \frac{P_{ij}(t)\, q_{jj}\, \cancel{h}}{\cancel{h}} + \sum_{k\neq j} \frac{P_{ik}(t)\, q_{kj}\, \cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{o(h)}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$P'_{ij}(t) = P_{ij}(t) q_{jj} + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj}$$

$$= \sum_{k\in S} P_{ik}(t) q_{kj}$$

ou, matricialmente,

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L} \quad , \qquad \text{Adiantada}$$

"Formalmente,"

$$f'(t) = a f(t)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = a$$

$$(\log f(t))' = a \Rightarrow \log f(t) = at + cte \Rightarrow f(t) = cte\, e^{at}$$

Daí,

$$\text{“} \mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}} \text{”}.$$

$$e^{x} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} & \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \\ (1+x/N)^N & \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \\ \underbrace{(1-x/N)^{N}}_{\text{“resolvente”}} & \xrightarrow[N\uparrow\infty]{} \end{cases}$$

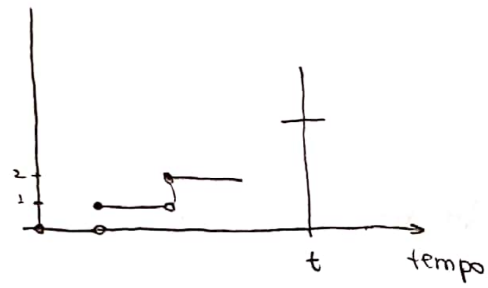
Exemplo: Processo de Poisson N_t $(N(t))$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \qquad \xi_i \sim exp(\lambda) \text{ i.i.d.}$$

N_t = # de eventos no intervalo $(0,t]$

$= \max\{n : T_n \leq t\}$

$X_t = N_t$.



1) $i \to q_i = \lambda$

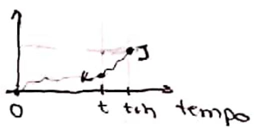
2) $Q_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ j = i+1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$N_t \in S = \mathbb{N}$

$P_{ij}(t) = P(N_t = j \mid N_0 = i)$

$P_{0j}(t) = P_j(t)$

(Refazendo o arg. da eq. de Kolg., adiantada)



$$P_{0j}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{0k}(t) P_{kj}(h) = \sum_{k=0}^{j-1} P_{0k}(t) P_{kj}(h) + P_{0j}(t) P_{jj}(h) \quad , j \geq 1$$

Se $(j=0)$

$$P_{00}(t+h) = P_{00}(t) P_{00}(h)$$

——— " ———

$(j \geq 1)$

$P_{j-1,j}(h) = \lambda h + o(h)$, $P_{j-2,j}(h) = o(h)$, $P_{jj}(h) = 1 - q_j h + o(h)$

$\Rightarrow$

$$P_{0j}(t+h) = (\lambda h + o(h))\, \underbrace{P_{0,j-1}}_{-P_{j-1,j}}(t) + \sum_{0\le k\le j-2} P_{0,k}(t)\, o(h) + P_{0j}(t)[1 + q_{jj}h + o(h)]$$

$$P_{0j}(t+h) = P_{0j}(t) - P_{0j}(t)\lambda h + P_{0,j-1}(t)\lambda h + o(h)$$

Daí,

$$\frac{P_{0j}(t+h) - P_{0j}(t)}{h} = -P_{0j}(t)\lambda + P_{0,j-1}(t)\lambda + \frac{o(h)}{h}$$

$\downarrow h \downarrow 0$

$$P_{0j}'(t) = -P_{0j}(t)\lambda + P_{0,j-1}(t)\lambda \quad , \text{ para } j \geq 1$$

No caso $j=0$,

$$P_{0,0}(t+h) = P_{0,0}(t)[1 - \lambda h + o(h)]$$

$$\frac{P_{0,0}(t+h) - P_{0,0}(t)}{h} = -\frac{\lambda P_{0,0}(t) h}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

$\downarrow h \downarrow 0$

$$P_{0,0}'(t) = -\lambda P_{00}(t) \Rightarrow$$

$P_{00}(t) = \text{cte}\, e^{-\lambda t}$,

Mas sabemos que $P_{00}(0) = 1 \Rightarrow \text{cte} = 1 \Rightarrow$

$$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$$

"Portanto"

$$P_{0j}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!} \quad , \quad j \geq 0$$

$(j=1)$ $P'_{01}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda P_{00}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda e^{-\lambda t}$

$P'_{01}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda e^{-\lambda t}$ $\qquad\qquad f(t) = P_{01}(t) + 1$

$e^{\lambda t}(f'(t) + \lambda f(t) = (\lambda e^{-\lambda t}) e^{\lambda t}$

$[e^{\lambda t} f(t)]' = f'(t) e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} f(t)$

$[e^{\lambda t} f(t)]' = f'(t) e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} f(t)$

$[e^{\lambda t} f(t)]' = \lambda$

$e^{\lambda t} f(t) = \lambda t + cte \Rightarrow$

$f(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t} + cte\, e^{-\lambda t}$

Como

$P_{01}(0) = 0$, $\cancel{\lambda} cte = 0$

Assim,

$P_{01}(t) = (\lambda t)\, e^{-\lambda t}$

* Exemplo da Indução

15/10 - Aula 13

$\{X(t)\}_{t \geq 0}$ em S

$P_{ij}(t)$

Equações de Kolgomorov

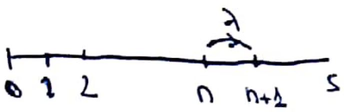
$$P'(t) = L\,P(t) \quad \text{(retrógrada)}$$
$$P'(t) = P(t)\,L \quad \text{(adiantada)}$$

onde $\mathbb{L}$ = matriz de taxas.

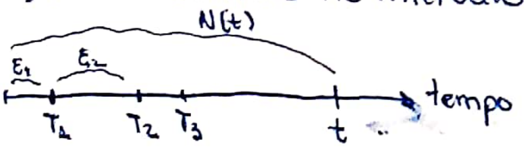
$$(\mathbb{L})_{ij} = q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$$

Exemplo:

1) Processo de Poisson (Nascimento "Puro")



$N(t)$ = "# de eventos no intervalo $[0,t]$"



$\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. com $\xi_i \sim exp(\lambda)$

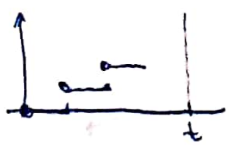
$T = \xi_1$

$T = \xi_1 + \xi_2$

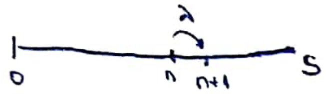
$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ = "instante do n-ésimo evento"

Equação Adiantada de Kolgomorov

$P'(t) = P(t)\mathbb{L}$



$P_{0n}(t) = P(N(t) = n \,/\, N(0) = 0)$



Eq. Adiantada: $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t) L$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t)\, q_{kj}$$

$$P'_{0n}(t) = P_{0,n-1}(t)\, \underset{\uparrow \atop \lambda}{q_{n-1,n}} + P_{0n}(t)\, \underset{\uparrow \atop -\lambda}{q_{nn}}$$

(*) $P'_{0n}(t) = \lambda P_{0,n-1}(t) - \lambda P_{0n}(t)$, $n \geq 1$

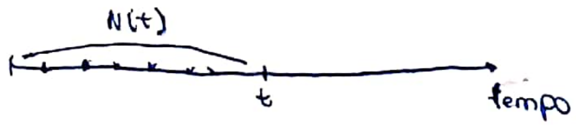
$(n=0)$ $P'_{00}(t) = P_{00}(t)\, \overset{-\lambda}{q_{00}}$

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t)$$

$$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$$

+ indução em (*)

$$P_{0n}(t) = P(N(t) = n \,/\, N(0) = 0)$$



$N(t) \sim$ Poisson (t)

$$P_{0n}(t) = P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \; n \geq 0$$

<u>Propriedades</u>:

1) "Seleção de um proc. de Poisson"

Seja $N(t) \sim$ Processo de Poisson (λ)

(PPP(λ))

Processo | Pontual | Poisson

Suponha que cada evento contado por $N(t)$ possa ser do tipo I com prob. p ou não (II) com prob. $1-p$, independentemente,

$$N(t) = \underbrace{N_I(t)}_{\substack{\text{contagens} \\ \text{do tipo I}}} + \underbrace{N_{II}(t)}_{\substack{\text{demais} \\ \text{contagens}}}$$

$$\left.\begin{aligned} N_I(t) &\sim PPP(p\lambda) \\ N_{II}(t) &\sim PPP((1-p)\lambda) \end{aligned}\right\} \text{indep.}$$

$$P(N_I(t) = k) = \sum_{n \geq k} P(N_I(t) = k, N(t) = n) =$$

$$= \sum_{n \geq k} P(N_I(t) = k \mid N(t) = n) P(N(t) = n) =$$

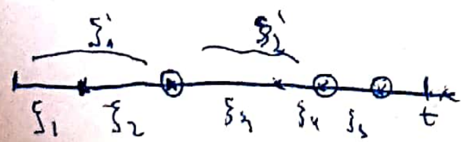
$$= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \overset{?}{=} \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

$$? \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = \frac{p^k}{k!} \frac{e^{-\lambda t}}{(1-p)^k} \sum_{n \geq k} \frac{[(1-p)\lambda t]^{n-k}}{(n-k)!} [(1-p)\lambda t]^k$$

$$= \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-p)t} = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!}$$

Independência (exercício).

"Outro modo de vista"

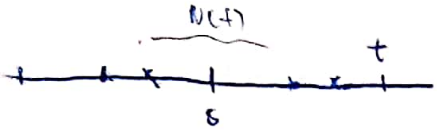


$\xi_i \sim \exp(\lambda)$

$\xi_i' \sim \exp(p\lambda)$, pois

$\xi_1' = \sum_{k=0}^{N} \xi_i \quad N \sim \text{Geométrica}(p)$

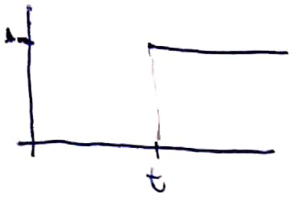
2)



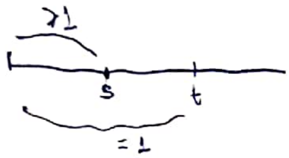
Prob. Condicionais

$$f(s) = P(N(s) \geq 1 \,/\, N(t) = 1)$$

$f(s)$

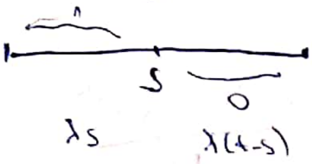


Notação: $N(s,t) = N(t) - N(s)$



$$P(N(s) \geq 1 \,/\, N(t) = 1) =$$

$$= \frac{P(N(s) \geq 1,\, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$



$$= \frac{P(N(s) = 1,\, N(s,t) = 0)}{P(N(t) = 1)} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^0}{0!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}} = \frac{s}{t}$$

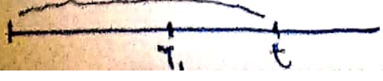
Outro modo de ver:

$$f(s) = P(N(s) \geq 1 \,/\, N(t) = 1)$$

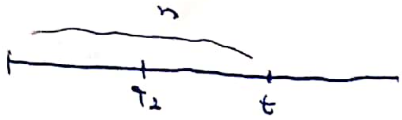
$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$$f(s) = P(T_1 \leq s \,/\, T_1 \leq t,\, T_2 > t) = \frac{P(T_1 \leq s,\, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$T_1 \,/\, \{N(t) = 1\} \sim U(0,t)$$



$T_1 / \{N(t) = 1\} \sim U(0,t)$



$T_1 / \{N(t) = n\}$

$T_1 \sim$ Primeira estatística de ordem de n uniformes independentes no intervalo $(0,t)$

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. com $X_i \sim U(0,t)$

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ Primeira est. de ordem.

$X_{(2)} =$ prox.

$\vdots$

$X_{(n)} = \max(\cdots)$

Lista 2.

(2) $N(t) \sim PPP(\lambda)$

$\lambda = 20\,h^{-1}$

(λt) = # médio de ocorrências no intervalo $(0,t]$

$N(t) \sim PPP(\lambda)$

$\lambda = 20\,h^{-1}$

(λt) = # médio de oco. no int. $(0,t]$

$p = \frac{3}{4}$ = prob. de ser do Brasil

$N(t) = pN_{Brasil}(t) + (1-p)\,N_{outro}(t)$

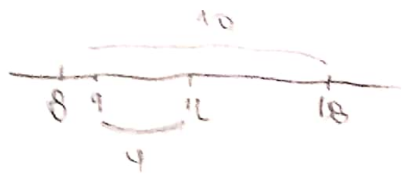
a) $E[N(14,16)] = 2\lambda = 40$

$N(14,16) \sim \text{Poisson}(\lambda(16-14))$

b)

$$P(N_{Brasil}(15,17) = 0) = \frac{e^{-\lambda p\,(17-15)}\,(\lambda p\, 2)^0}{0!}$$

ⓒ $P(N(9,12)=4 \mid N(8,18)=10) = \binom{10}{4}\left(\frac{4}{10}\right)^4\left(\frac{6}{10}\right)^{10}$



⑧.

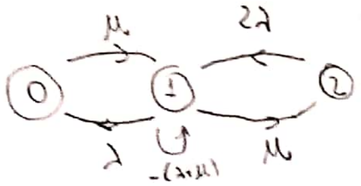
Maquinas: Ⓐ Ⓑ

$T_A \sim exp(\lambda)$ $T_B \sim exp(\lambda)$: tempo de funcionamento

Conserto $\sim exp(\mu)$

$X(t) \in S = \{0,1,2\}$

$= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$



$q_{01} = \mu$ $\quad q_{10}$

$q_{02} = 0$

$q_{00} = -\mu$

$$q_{ij} = \begin{cases} q_i Q_{ij} & i \neq j \\ -q_i & i = j \end{cases}$$

$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

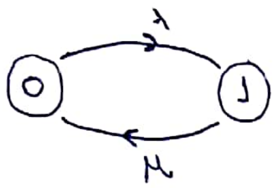
17-10 Aula 14

Eq. de Kolgomorov

Cadeia de 2 estados

$$X(t) \in S = \{0,1\}$$

Taxas
$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & \mu & -\mu \end{array}$$



$0 \to q_0 = \lambda$

$1 \to q_1 = \mu$

$$Q = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L}$$

$$\begin{bmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L} \qquad (\mathbb{L})_{kj} = q_{kj}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t)\, q_{kj} \quad \forall i,j$$

$$P'_{00}(t) = P_{00}(t)(-\lambda) + P_{01}(t)\mu$$
$$= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t)$$

Mas $P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$. Daí,

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu[1 - P_{00}(t)]$$
$$P'_{00}(t) = \mu - (\mu + \lambda) P_{00}(t).$$

$f(t) = P_{00}(t)$

$$f'(t) = \mu - (\mu+\lambda) f(t)$$

$$e^{(\mu+\lambda)t}\left[f'(t) + (\mu+\lambda) f(t) \right] = \mu e^{(\mu+\lambda)t}$$

$$\left[e^{(\mu+\lambda)} f(t) \right]' = \mu e^{(\mu+\lambda)t}$$

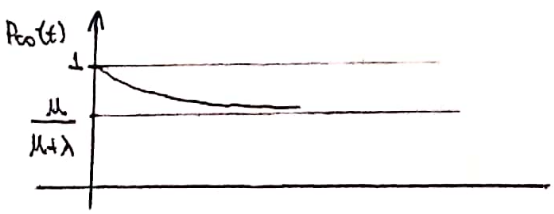
$$e^{(\mu+\lambda)t} f(t) = \mu \int e^{(\mu+\lambda)t} \frac{(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)} dt \quad + cte$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{(\mu+\lambda)t} + c$$

$$f(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + c e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow \quad c = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \longrightarrow \pi(0)$$



π estacionária

Eq. Balanceamento

$\pi = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \right)$

$$P_{01}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Analogamente, $P_{10}(t)$.

Obs: $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L}$

solução $\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}}$

$$e^{t\mathbb{L}} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \mathbb{L}^n}{n!}$$

$$\left| \begin{matrix} \left(1+\frac{t\mathbb{L}}{n}\right)^n \\ \left(1-\frac{t\mathbb{L}}{n}\right)^{-n} \\ \sum \frac{t^n \mathbb{L}^n}{n!} \end{matrix} \right|$$

$$\mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}^n$$

$$\mathbb{L} = B\Lambda B^{-1} \quad , \Lambda = \text{diagonal} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}^n = (B\Lambda B^{-1})(B\Lambda B^{-1}) \dots (B\Lambda B^{-1}) = B\Lambda^n B^{-1} \quad , \Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verificar

Daí,

$$\mathbb{P}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \mathbb{L}^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n B}{n!} \begin{bmatrix} (-(\mu+\lambda))^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} =$$

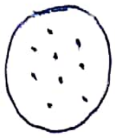
$$= B \begin{bmatrix} e^{-(\mu+\lambda)t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1}$$

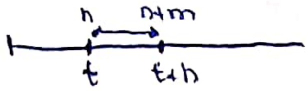
$$\mathbb{P}(t) = \frac{1}{\mu+\lambda} \begin{bmatrix} \mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} & \lambda - \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} \\ \mu - \mu e^{-(\mu+\lambda)t} & \lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu+\lambda} \begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}(t) \to \pi(j)$$

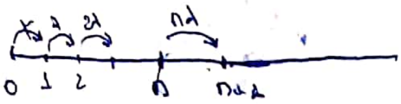
Exemplo: "Processo de Yule"

$X(t) =$ "População de Bactérias"





$X(t)$ processo de Nascimento Puro



$$P(X(t+h) = n+m \,/\, X(t) = n)$$

uma bactéria: Prob. de deixar descendente neste intervalo $= \lambda h + o(h)$

$$= \binom{n}{m} (\lambda h + o(h))^m (1 - \lambda h + o(h))^{n-m}$$

$$= \begin{cases} 1 - n\lambda h + o(h), & m = 0 \\ n\lambda h + o(h), & m = 1 \\ o(h), & m \geq 2 \end{cases}$$

Equações de Kolgomorov

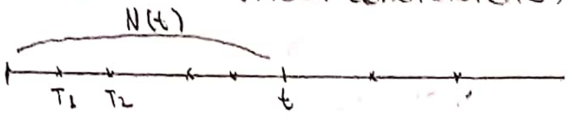
$$P'_{0n}(t) = P_{0n-1}(t)\, q_{n-1,n} + P_{0n}(t)\, q_{n,n}$$

$$= \lambda(n-1) P_{0,n-1}(t) - n\lambda P_{0n}(t)$$

$$P'_{00}(t) = P_{00}(t)\, q_{00} = 0$$

$$\Rightarrow P_{0n}(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^n \quad \text{(exercício)}$$

Processo de Poisson: (Prob. condicionais)



$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$

$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$

$(T_1, T_2, \ldots, T_n) \mid \underset{\uparrow}{N(t) = n}$

condicionado

$T_1 / N(t) = 1 \sim U(0,t)$

Teorema: A dist. de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dado $N(t) = n$ é a distribuição das n estatísticas de ordem com distribuição uniforme $U(0,t)$.

Obs: Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\quad X_i \sim U(0,t)$ ind.

Estatísticas de Ordem

$X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ (ordenado $X_1, \ldots, X_n$)

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} n!/t^n & \text{se } 0 < x_1 < \ldots < x_n < t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Idéia da prova de (*)

Sejam $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ e $h > 0$ tal que $t_i + h < t_{i+1}$

$$P(\overbrace{T_i \in (t_i, t_i+h),\ i = 1, 2, \ldots, n}^{A} / \overbrace{N(t) = n}^{B})$$

$$= \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

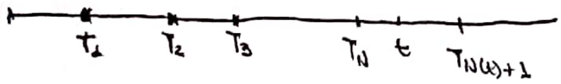
$$P(A,B) = \frac{(\lambda(t-nh))^0}{0!} e^{-\lambda(t-nh)} \overbrace{\frac{(\lambda h)^1 e^{-\lambda h}}{1!} \frac{(\lambda h) e^{-\lambda h}}{1!} \cdots \frac{(\lambda h) e^{-\lambda h}}{1!}}^{n \text{ termos}}$$

$$= e^{-\lambda t} (\lambda h)^n$$

Daí,

$$P(A \mid B) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda h)^n}{\left(\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \right)} = \frac{n!}{t^n} h^n.$$

Processo de Poisson Composto



Sejam $\{Y_i\}_{i \geq 1}$, v.a. i.i.d.

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

$$\phi_X(u) = E[e^{uX(t)}] = E[e^{u \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}] =$$

$$= \sum_{n \geq 0} E[e^{u \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i} / N(t) = n] \, P[N(t) = n]$$

$$\| \quad E[e^{u \sum_{i=1}^{n} Y_i} / N(t) = n]$$

$$\| \quad E[e^{u \sum_{i=1}^{n} Y_i}]$$

$$\| \quad [\phi_Y(w)]^n$$

$$\phi_x(w) = \sum_{n \geq 0} [\phi_y(w)]^n \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t \phi_y(w)} = e^{\lambda t [\phi_y(w) - 1]}$$

Assim,

$$E X(t) = [\phi_x'(w)]\Big|_{w=0} = \lambda t \, \phi_y'(w) \, e^{\lambda t [\phi_y(w)-1]}\Big|_{w=0} = \lambda t \, EY.$$

e

$$Var(X(t)) = \lambda t \, EY^2 \quad \text{(verificar!)}$$

Fila $M \,/\, G \,/\, \infty$
λ

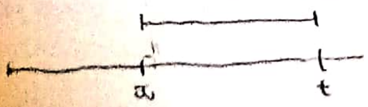
- Chegada de clientes Poisson (λ)
- Atendimento com dist. geral.
  $G(x) = P(\text{Tempo atendimento} \leq x)$
- Infinitos atendentes

Ex: Restaurante, formulários, ... (Autoatendimento)

$X(t) = \#$ de clientes, no sistema, no instante t.

Seja $N(t) = \#$ de clientes que entrou no sistema até t $\sim$ Poisson (λ)

$1 - G(t-x) = P(T\,\text{atend.} > t-x)$



p = prob. de um cliente que chegou em $(0,t)$ não ter sido atendido (ou seja, continua no sistema)

$$p = \int_0^t (1 - G(t-x)) \frac{dx}{t} = \left(\int_0^t (1-G(x)) \frac{dt}{t} \right)$$

Agora,

$$P(X(t)=k) = \sum_{n \geq k} P(X(t)=k \mid N(t)=n)\, P(N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-k}}{n!} (\lambda t)^k =$$

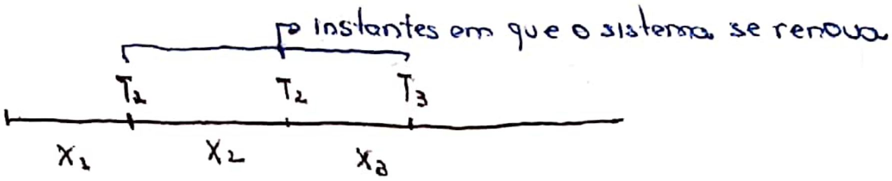
$$= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} (\lambda t p)^k \underbrace{\sum_{n \geq k} \frac{[(1-p)\lambda t]^{n-k}}{(n-k)!}}_{= e^{(1-p)\lambda t}}$$

$$P(X(t)=k) = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda t p)^k}{k!} \quad , \text{ Poisson } (\lambda p t)$$

Introdução Aos Processos Estocásticos

Aula 15 - 22/10

Processo de Renovação



$\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. $\rightarrow$ "o sistema não se desgasta", $X_i \sim F$

$P(X_i \geq 0) = 1$

$\{T_n\}_{n \geq 1}$ instantes de Renovação, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Interesse: Como varia o nº de renovações até o tempo t, Matematicamente,

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$$

Nessas condições,

$$\mu = EX_i = \int_0^{\infty} x \, dF(x) > 0$$

Hipótese: "F é não-aritmética"

Definição: F é dita aritmética se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$P(X_i \in \{\delta_1, 2\delta_1, \dots\}) = 1$$

"Não existe nenhum reticulado com massa 1".

Devemos notar que,

$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$

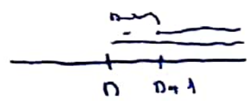
$\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \rightarrow \mu$ LGN $\Rightarrow N(t) < \infty$ com prob. 1 $\forall t$.

"Só explodiria se tivéssemos tempos entre renovações $\{X_i\}$ indo pra zero, o que não ocorre, já que $\mu > 0$"

$\lim_{t \uparrow \infty} N(t) \equiv N(\infty)$

$P(N(\infty) < \infty) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = \infty\}\right) \leq \sum P(X_n = \infty) = 0$

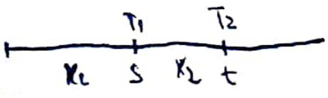
$$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)$$
$$= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)$$



$F_n(t) = P(T_n \leq t)$

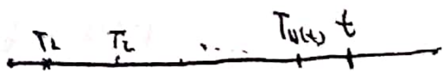
$F_1(t) = P(T_1 \leq t) = F(t)$

$F_2(t) = \int_0^t dF(s) F(t-s) = (F * F)(t)$
↓ convolução



$F_n = (\underbrace{F * F * F \ldots * F}_{n \text{ termos}})$

$m(t) = E[N(t)]$ ← função de renovação



Lema: $m(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$

Demonstração:

$$m(t) = E[N(t)]$$

$$\mathbb{1}_n = \begin{cases} 1 & \text{se } T_n \leq t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n$$

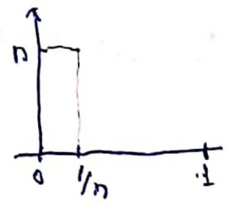
(?) - Teorema da conv. monótona

$$m(t) = E\left[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n\right] = \sum_{n \geq 1} E[\mathbb{1}_n]$$

Obs:

$f = \lim_{n \to \infty} f_n$

$\int f \, dx = \int_0^1 \lim f_n \, dx \overset{?}{=} \lim \int_0^1 f_n \, dx$ contra exemplo: $f_n(x)$:



$$m(t) = \sum_{n \geq 1} E(\mathbb{1}_n) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$$

Lema: $m(t) < \infty$, $\forall t$.

Demonstração: Se $P(X_n > 0) > 0 \Rightarrow \exists \alpha: P(X_n > \alpha) > 0$

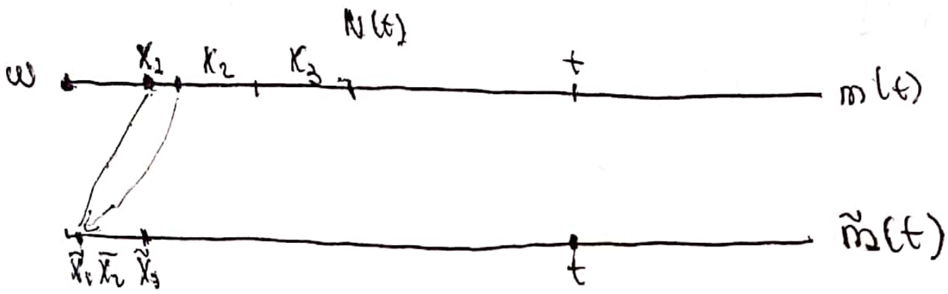
Por absurdo,

$\forall n$, $P(X_n \in (0, 1/n)) = 1$

continuidade da prob. p/ eventos decrescentes $\Rightarrow P(\emptyset) = 1$ contradição.

Seja α com prop. $P(X_n \geq \alpha) = p > 0$

Idéia do acoplamento



$$\tilde{X}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } X_i < \alpha \\ \alpha & \text{se } X_i \geq \alpha \end{cases}$$

$$\tilde{N}(t) = \max\{n : \sum_{i=1} \tilde{X}_i \leq t\}$$

$$\tilde{m}(t) = E[\tilde{N}(t)]$$

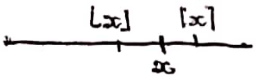
$$N(t) \leq \tilde{N}(t)$$

média da geométrica com $p = P(X_n > \alpha)$

$$m(t) \leq \tilde{m}(t) \leq \left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil \cdot \frac{1}{p} < \infty$$

vezes

$*\lceil x \rceil$ = menor inteiro maior que x



Teorema: $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \dfrac{1}{\mu}$

Demonstração:

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} \frac{(N(t)+1)}{(N(t)+1)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mu \qquad\qquad \mu$$

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \mu \qquad \text{pois } N(t) \to \infty \text{ com prob. } 1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu$$

Teorema Elementar da Renovação

$$\frac{m(t)}{t} \to_{\infty} \frac{1}{\mu}$$

$T_{N(t)} \leq t \leq T_{N(t)+1}$ constatação enganosa. Isso vale para v.a. "não trapaceiros".

$E[T_{N(t)}] \leq t \leq \cancel{E[T_{N(t)+1}]}$

$m(t)\,\mu \qquad\qquad \cancel{(m(t)+1)\,\mu}$

$$E\,T_{N(t)} = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = E[N(t)]\,E(X_i)$$

Definição: Tempo de parada.

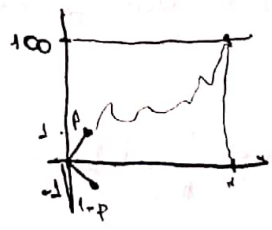
Seja $X_1, X_2, \dots$ v.a., i.i.d.

Uma v.a. $T \in \mathbb{N}$ é dita um tempo de parada com relação a $\{X_i\}_{i \geq 1}$ se

$$\{T = n\} \text{ é um evento independente de } \{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$$

Exemplo: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{prob. } p \\ -1 & \text{" } 1-p \end{cases}$

$$T = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = 100\}$$



Equação de Wald: Se $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma coleção i.i.d. com $EX_i = \mu < \infty$ e N é um tempo de parada $EN < \infty$, então

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i\Big] = E[N]\,E[X_i]$$

Demonstração:

$$\mathbb{1}_n = \begin{cases} 1, & N \geq n \\ 0, & \end{cases}$$

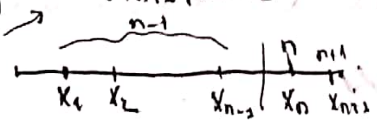
$$E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i\Big] = E\Big[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_n X_n\Big] = *$$

conv. monótona

$$* = \sum_{n\geq 1} E[\mathbb{1}_n X_n] = **$$

$$\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_{\{N\geq n\}}$$

$\{N=n\}$ indep. de $\{X_{n+1}, \ldots\}$
$\{N\geq n\}$ "



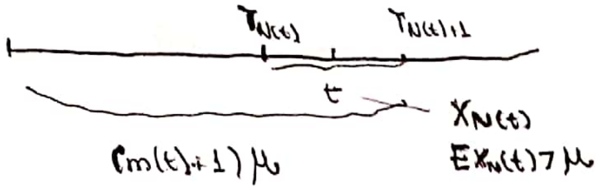
Se N é um tempo de parada, o evento

$\{N\geq n\}$ não depende de $X_n, X_{n+1}, \ldots$

$\{N\geq n\}$ = "Não parei até $n-1$"

$$** = \sum_{n\geq 0} E\mathbb{1}_n\, EX_n = \mu \sum_{n\geq 0} E\mathbb{1}_n = \mu \sum_{n\geq 0} P(N\geq n) = \mu EN.$$

$$\begin{cases} N(t) & \text{é um tempo de parada?} \quad \text{No Yes!} \\ N(t)+1 & \text{"} \qquad\qquad ? \end{cases}$$



16 I. Aos Processos Estocásticos

Aula 16 - 24/10

Teoria de Renovação

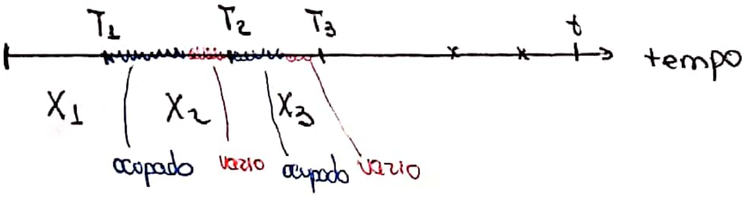
$\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. $X_i \geq 0$

$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = "instante da n-ésima renovação"

$N(t) = \max\{n, T_n \leq t\}$ = "número de renovações no intervalo $(0,t]$"

Suponde $X \sim F$ "não-aritmética" e $P(X_i > 0) > 0$ $EX_i = \mu$

Função de Renovação: $m(t) = E(N(t))$



Teorema: $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \dfrac{1}{\mu}$ com prob. 1 (já mostramos)

Teorema Elementar de Renovação:

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \frac{1}{\mu} \quad \text{(agora!)}$$

Já vimos que

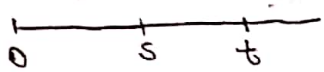
$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$$

onde $F_k(t)$ é a distribuição de T_k.

$T_1 = X_1 \sim F$

$T_2 = X_1 + X_2 \sim F_2$

$$F_2(t) = P(T_2 \leq t) = P(X_1 + X_2 \leq t) =$$
$$= \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t / X_1 = s) f_{X_1}(s)\, ds$$



$$F_2(t) = \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t \mid X_1 = s) f_{X_1}(s)\, ds =$$

$$= \int_0^t \underbrace{P(X_2 \leq t-s \mid X_1 = s)}_{F_{X_2}(t-s)} \underbrace{f_{X_1}(s)\, ds}_{dF(s)}$$

$$= \int_0^t F(t-s)\, dF(s)$$

$\equiv F * F$ "convolução"

Notação

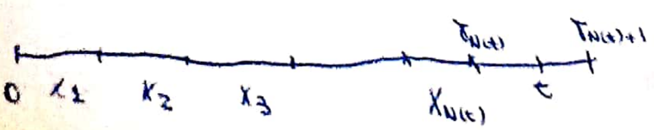
Notação: Se F e G são funções positivas e não-decrescentes "com densidade"

$$(F * G)(t) = \int_0^t F(t-s)\, \underbrace{dG(s)}_{\frac{dG}{ds} ds}$$

"convolução"

Propriedades. $F * G = G * F$

$(F * G) * H = F * (G * H)$



$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$

$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}$

$$E[T_{N(t)}] \leq t \leq E[T_{N(t)+1}]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] \leq t \leq E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right]$$

$$\overset{?}{=} \quad \mu m(t) \leq t \leq E[N(t)+1]\mu = \underset{(*)}{(m(t)+1)\mu}$$

Equação de Wald

$N \in \mathbb{N}$ $\quad E N < \infty$

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\quad N$ tempo

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N] E X_i$$

Obs: N tempo de parada se

$\{N = n\}$ não depende de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ (só pode depender de $X_1, \ldots, X_n$)

Se $(*)$ $\quad m(t)\mu \leq t \leq (m(t)+1)\mu$

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{(m(t)+1)}{t}$$

O que está errado em $(*)$?

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] \neq \mu m(t)$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] = \mu(m(t)+1)$$

$N(t)$ é tempo de parada?

(com respeito a $X_1, X_2, \dots$)

$\{N(t) = n\}$ não depende de $\cancel{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots}$? ?

precisa garantir que X_{n+1} é maior a $t - T_{N(t)}$

"Posso precisar da inf. de X_{n+1}"

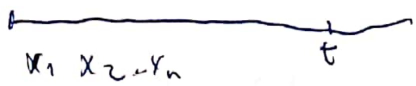
$N(t)$ <u>não</u> é um tempo de parada.

$N(t)+1$ é um tempo de parada?

$\{N(t)+1 = n\}$ não depende de $X_{n+1}, \dots, X_{n+2}, \dots$?

$\|$

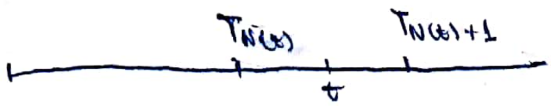
$\{N(t) = n-1\}$ ✓



$N(t)+1$ é um tempo de parada!

Teorema: $\dfrac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \dfrac{1}{\mu}$

Dem:

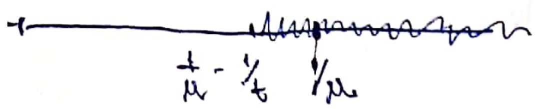


$t < T_{N(t)+1} \Rightarrow t < E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] \overset{\text{Wald}}{\Rightarrow} t < E[N(t)+1]\, E[X_i]$

$t < (m(t)+1)\,\mu$

$$\frac{1}{\mu} < \frac{(m(t)+1)}{t}$$

$$\frac{m(t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \quad , \forall t$$



Qdo $t \to \infty$, liminf

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

Outra desigualdade:

Processo de Renovação "truncado"

$\{X_i\}_{i \geq 1}$ renovação $\Big\}$ acopl.

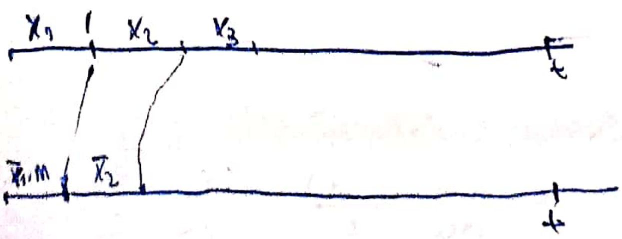
Dado $M > 0$. $\{\bar{X}_i\}_{i \geq 1}$ renovações truncadas

$$\bar{X}_i = \begin{cases} X_i & \text{se } X_i \leq M \\ M & \text{c.c.} \end{cases}$$

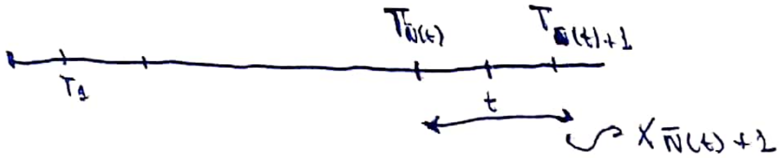
$N(t) = \max\{n : T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$

$\bar{N}(t) = \max\{n : \bar{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq t\}$

$$\overline{N(t)} \geq N(t)$$



$\bar{m}(t) = E(\bar{N}(t)) \geq E(N(t)) = m(t)$



$$T_{\bar{N}(t)+1} \leq t < T_{\bar{N}(t)+1}$$

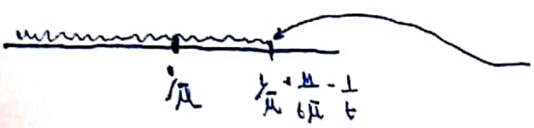
$$T_{\bar{N}(t)+1} = \underbrace{T_{\bar{N}(t)}}_{\leq t} + \underbrace{X_{\bar{N}(t)+1}}_{\leq M} \leq t + M$$

$$E\left[T_{\bar{N}(t)+1}\right] \leq t + M$$

Wald ⇓ $(\bar{m}(t)+1)\,\bar{\mu}_M \leq t + M$ $\qquad E[\bar{N}(t)+1]\,\overbrace{E\bar{X}_1}^{\bar{\mu}}$ $\qquad \bar{\mu} \leq E\bar{X}_1 \leq \mu$

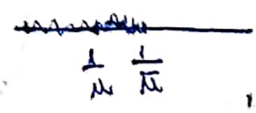
$$\frac{(\bar{m}(t)+1)}{t} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_M} + \frac{M}{\bar{\mu}_M t}$$

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{\bar{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_M} + \frac{M}{t\bar{\mu}} - \frac{1}{t}, \quad \forall t$$



$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{t}\left(\frac{M}{\bar{\mu}} - 1\right) \geq 0 \text{ se } M > \bar{\mu}, \ \forall t$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_M}, \quad \forall M$$



$\Downarrow$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

$\boxed{\text{(anterior)} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}}$

III

Comentário.

$EX_i = \mu$

$Var(X_i) = \sigma^2$ com prob. 1

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

Teorema: $$\frac{\frac{N(t)}{t} - \frac{1}{\mu}}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}}} \longrightarrow N(0,1)$$

Aula 18 - 31/10/2013

Teoria da Renovação

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ $\quad X_i \geq 0$ i.i.d. F $\quad$ com $EX_i = \mu$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{Var} X_i = \sigma^2$

$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad N(t) =$

$m(t) = E[N(t)]$

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \quad \text{q.c.}$$

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \qquad \text{Teorema Elementar de } \underline{\text{Renovação}}$$

Obs:

$$\frac{N(t)/t - 1/\mu}{\underbrace{[\quad]}_{\text{flutuação local.}}} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \boxed{?}$$

Resultado:

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xRightarrow[t\uparrow\infty]{} N(0,1)$$

Dem.

$$P\left(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\right) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$P(N(t) < a_t) = *$

$$a_t = \frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$$

$\{N(t) \leq n\} \equiv \{T_n \geq t\}$

$\sum_{i=1}^{a_t} X_i$

$* = P(T_{a_t} \geq t) =$

Obs: Há um erro em $*$, pois a_t não necessariamente é inteiro. No inteiro, no limite não teremos problemas.

$$= P\left(\frac{T_{a_t} - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}} > \frac{t - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}}\right) \approx$$

$\Downarrow$ sub a_t

$$-y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-1} \xrightarrow[t \to \infty]{} -y$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{T_{a_t} - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}} > -y\right) = \phi(y)$$

$\blacksquare$

Equação de Renovação

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x)$$

$\xrightarrow{\text{notação}}$ $(m = F + m*F)$

Obs: dadas m e F (funções)

Definição: $(m*F)(x) = \int_0^x m(t-s)\, dF(s)$ $(*)$

Demonstração. $m(t) = E[N(t)]$

mas

$$E[N(t)] = E[E[N(t) / X_1]]$$

$$E[N(t) / X_1 = x] = \begin{cases} 1 + m(t-x) & \text{se } x \leq t \\ 0 & x > t \end{cases}$$

Daí,

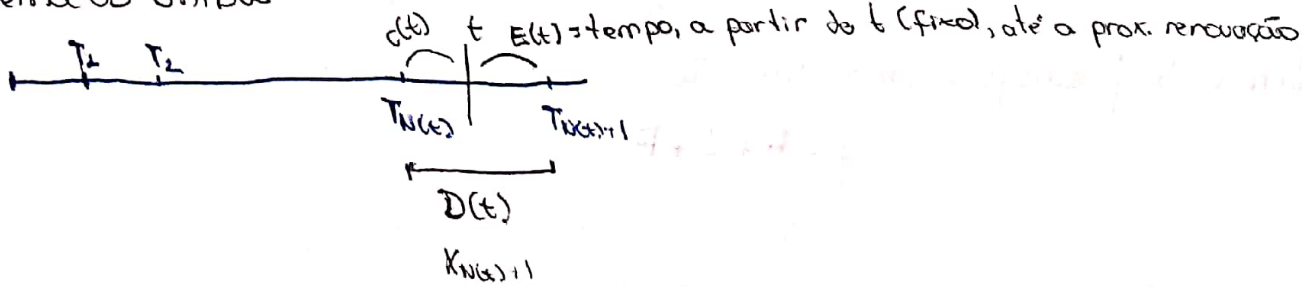
$$E[N(t)] = \int_0^t 1 + m(t-x)\, dF(x) = F(x) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x)$$

Obs: m satisfaz

$$m(t) = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$$

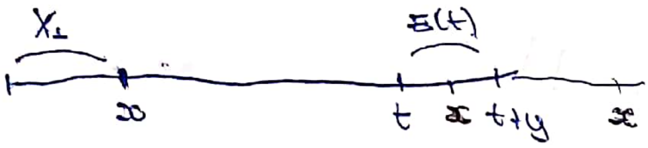
$$T_k \sim F_k = \underbrace{F * F * \dots * F}_{k \text{ vezes}}$$

Exemplo. Problema do ônibus



$$P(E(t) > y) = E[\mathbb{1}_{\{\ \}}] = E[E[\mathbb{1}_{\{E(t) > y\}} / X_1]]$$

$$E[\mathbb{1}_{\{E(t)>y\}} / X_1 = x] =$$



$$= \begin{cases} P(E(t-x)>y) & \text{se } x \leq t \\ 0 & \text{se } x \in (t, t+y) \\ 1 & \text{se } x > t+y \end{cases}$$

Logo,

$$\overbrace{P(E(t)>y)}^{f(t)} = \int_0^t \overbrace{P(E(t-x)>y)}^{f(t-x)}\, dF(x) + \overbrace{\int_{t+y}^{\infty} dF(x)}^{H(t)}$$

Obs: $\bar{F}(x) = P(X > x)$

Daí,

$$f(t) = H(t) + (f * H)(t)$$

$$\boxed{f = H + f * F}$$ Equação tipo-renovação (renewal-type)

Lema: Se f satisfaz uma equação

$$f = H + f * F$$

então $f = H + H * m$ é solução (única).

Dem: Se $f = H + H * m$ então

então

$$f*F = H*F + H*m*F = H*(\overbrace{F + m*F}^{m}) \qquad *$$

Obs: $f*g = g*f$ simétrica

$(f*g)*h = f*(g*h)$ associativa Exercício.

Se $f = g \Leftrightarrow f*h = g*h$

$f*(g+h) = f*g + f*h$ distributiva

mas $m = F + m*F$, Assim

$$f*F = H*m$$

e assim, $f = H + H*m = H + f*F$ ✓

(unicidade): propor outra solução e verificar que diferirá da anterior apenas em conjuntos de medida nula.

Voltando para $E(t)$

$$f(t) = P(E(t) > y)$$

$$f(t) = H(t) + (f*F)(t) \quad \text{com } H(t) = 1 - F(t+y) = \bar{F}(t+y)$$

Solução.

$$f = H + H*m \quad , \text{ ou seja}$$

$$P(E(t) > y) = 1 - F(t+y) + \int_0^t \bar{F}(t+y-x)\, \underbrace{dm(x)}_{dx^*/\mu} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} (?)$$

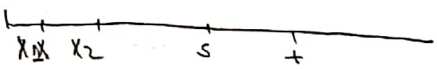
* Teorema de Blackwell

$$m(t+h)-m(t) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{h}{\mu} \quad , \text{ ou seja } dm \approx \frac{dx}{\mu}$$

Teorema chave de Renovação.

$$\int_0^t h(t-x)\,dm(x) \longrightarrow \int_0^\infty h(x)\,\frac{dx}{\mu}$$

Idéia da demonstração:



$X_1 \sim G \doteq \lim_{t\uparrow\infty} P(E(t)>y)$

$X_2, \dots \sim F$

acopla com o usual e mostra que vai pro mesma coisa

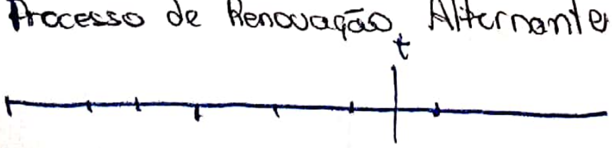
* Função diretamente Riemann-Integrável, que ocorre p/ funções simples.

Usando esse teorema chave

$$P(E(t)>y) = \overset{0}{\bar F(\cancel{t}+y)} + \int_0^t \bar F(t+y-x)\,dm(x)$$

$$\xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \int_0^\infty \frac{\bar F(x+y)}{\mu}\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F(\underbrace{x+y}_{\tilde x}))\,dx$$

Exemplo: Processo de Renovação Alternante



"on"

"off"

"on" Z_i (Z_i, Y_i) $X_1, \ldots$

"off" Y_i $X_i = Z_i + Y_i$ $X_i \sim F$

Z_i e Y_i podem ser dependentes $Z_i \sim F_Z$ $F = F_Z * F_Y$

$Y_i \sim F_Y$

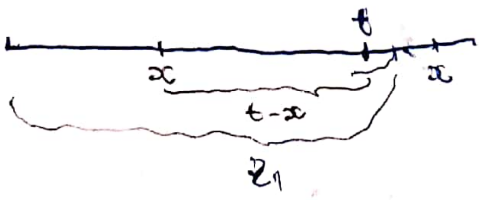
{sistema funcionando no instante t} = $\{O(t)\}$

"on no instante t"

$$P(O(t)) = P(\text{"on no inst. } t\text{"}) = P(t)$$

$$P(t) = E[P(\text{"on em } t\text{"}) / X_1]$$

$$P(O(t)/X_1 = x) = \begin{cases} P(t-x) & x \leq t \\ P(Z_1 > t \mid X_1 = x) & \text{se } x > t \end{cases}$$



$$P(t) = \int_0^t P(t-x)\, dF(x) + \int_t^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\, dF(x)$$

$$P(t) = H(t) + (P*F)(t)$$

...

Agora,

$$H(t) = \int_t^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\, dF(x) = \int_0^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\, dF(x), \text{ pois}$$

$P(Z_1 > t \mid X_1 = x) = 0$ para $0 \leq x \leq t$

e

$$H(t) = \int_0^\infty P(Z_1 > t / X_1 = x)\, dF(x) =$$

$$= P(Z_1 > t) = 1 - F_Z(t)$$

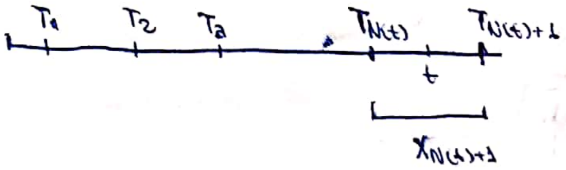
∴ Logo, usando a solução $P = H + H * M$

$$P(t) = \underset{\downarrow \atop 0}{P(Z_1 > t)} + \int_0^t P(Z_1 > t - x)\, \underset{\downarrow \atop \frac{dx}{\mu}}{dm(x)} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{\text{Chave}}$$

$$= 0 + \int_0^\infty \frac{P(Z_1 > x)\, dx}{\mu} =$$

$$= \frac{E[Z]}{\mu} = \frac{EZ}{EZ + EY}$$

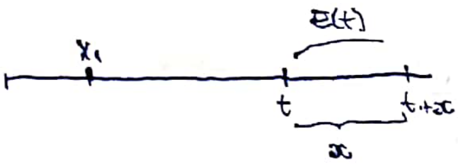
05/11 Aula 18



Renovação $\{X_n\}_{n\geq 1}$

$N(t)$

$$\begin{cases} E(t) = T_{N(t)+1} - t \\ A(t) = t - T_{N(t)} \end{cases} \qquad \text{se } P(t) = P(E(t) > x) \ (= P_x(t))$$



$$P(t) = \int_0^\infty P(E(t) > x / X_1 = s)\, dF(s)$$

$$P(E(t) > x / X_1 = s) = \begin{cases} P(t-s) & \text{se } s \leq t \\ 0 & \text{se } (t, t+x) \\ 1 & \text{se } s > t+x \end{cases}$$

$$P(t) = \int_0^t P(t-s)\, dF(s) + \underbrace{\int_{t+x}^\infty dF(s)}_{\substack{1-F(t+x) \\ H(t)}}$$

Daí, eq. de renovação

$$P(t) = H(t) + (P * F)(t)$$

cuja solução é

$$P(t) = H(t) + (H * m)(t)$$

$$P(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)] \, dm(y) \quad \approx \frac{dy}{\mu}$$

Teorema chave

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(t) = \int_0^\infty [1 - F(t+x)] \frac{dt}{\mu} = \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu} =$$

$$= \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

Distribuição de $E(t)$.

$$\lim_{t \uparrow \infty} P(E(t) \leq x) = 1 - \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu} =$$

$$= \frac{\overbrace{\int_0^\infty [1 - F(y)] \, dy}^{E(Y) = \mu}}{\mu} - \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

$$= \int_0^x [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

Logo,

$$P(E(t) \leq x) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \int_0^x [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

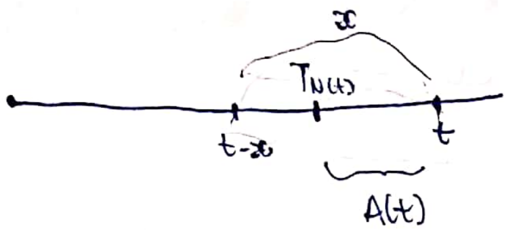
Se, por exemplo, $X_i \sim \exp(\lambda)$, $EX_i = \mu = 1/\lambda$

$$F(y) = P(X_i > y) = e^{-y/\mu}$$

$E(t) \sim \exp(1/\mu)$
↑
assintoticamente.

Ex: Suponha $X_i \sim U(0,1)$

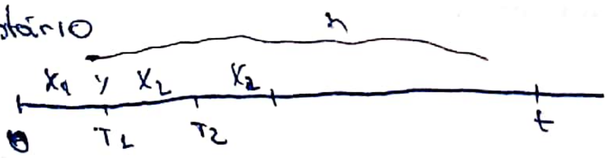
Determine $\lim_{t \uparrow \infty} P(E(t) \leq x)$



$$P(A(t) > x) = P(E(t-x) > x) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \int_0^t [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu} \quad \text{(Exercício)}$$

$A(t)$ é no máximo t, mas quando $t \uparrow \infty$, o problema é solucionado.

Comentário



$\{X_n\}_{n \geq 1}$
$X_1 \sim G$
$X_2, X_3, \ldots \sim F$
} Processo de Renovação com retardo

"Delay" $N_D(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$

$$P(N_D(t) = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)$$

$T_n \sim G * F_{n-1}$

$$m_D(t) = E(N_D(t)) = \sum_{n \geq 1} (G * F_{n-1})(t)$$

Renovação para $m_D(t)$

$$m_D(t) = E[N_D(t)] = \int_0^\infty E[N_D(t) / X_1 = s] \, dG(s)$$

$$E[N_D(t) / X_1 = x] = \begin{cases} 1 + m(t-x), & \text{se } x < t \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$m_D(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)] \, dG(x)$$

$$m_D(t) = G(t) + (m * G)(t)$$

Obs: $\dfrac{N_D(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ $\qquad P(E(t) \leq x) \to$ mesma coisa

$\dfrac{m(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$

+ comum
Estacionariedade

Processo de Renovação Em "Equilíbrio"

↳ idéia de que a volta no tempo não altera

$$G = F_e$$

$$F_e(x) = \int_0^x [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

$$P(E_D(t) > x, N_D(t)=0) = P(T_1 > t+x) = 1 - G(t+x)$$

$$P(E_D(t) > x, N_D(t)=n) =$$

$$= \int_0 \underbrace{P(E_D(t) > x, N_D(t)=n \mid T_n = s)}\, d(G * F_{n-1})(s) =$$

$$= \begin{cases} 1 - F(t+x-s) & \text{se } s \leq t \\ 0 & \text{se } s > t \end{cases}$$

$$= \int_0^t [1 - F(t+x-y)]\, d(G * F_{n-1})(y)$$

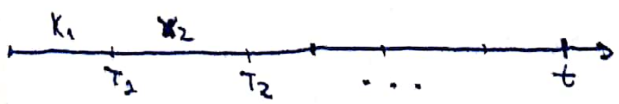
$$P(E_D(t) > x) = \sum_{n \geq 0} P(E_D(t) > x, N_D(t)=n) =$$

$$= 1 - G(t+x) + \sum_{n \geq 1} \int_0^t [1 - F(t+x-y)]\, d(G * F_{n-1})(y)$$

$$= 1 - G(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)]\, d\underbrace{\Big(\sum_{n \geq 1} G * F_{n-1}\Big)(y)}_{dm_D(y)}$$

* Vale $m_D(t) = t/\mu$.

Exemplo:



$N(t)$

(X_i, Y_i) vetores aleatórios i.i.d. $\qquad$ Y_i custo associado ao X_i

Processo de Renovação Com Recompensa

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

$$\frac{Y(t)}{t} \to \frac{EY}{EX}$$

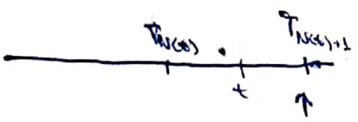
$$\frac{E[Y(t)]}{t} \to \frac{EY}{EX}$$

Demonstração (Idéia).

$$\frac{Y(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$$

$N(t) \to \infty$, $\downarrow$ LGN $E(Y)$; $\frac{N(t)}{t}$ $\downarrow$ LGN $\frac{1}{EX}$

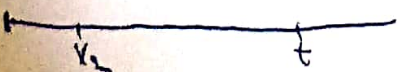
$$\frac{E[Y(t)]}{t}$$



$$\frac{E[Y(t)]}{t} = E\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n\right] - E(Y_{N(t)+1})$$

$$\overset{\text{Wald}}{=} \frac{(m(t)+1)\,EY}{t} - \frac{E(Y_{N(t)+1})}{t} \xrightarrow{(*)} 0$$

(*) $g(t) = E[Y_{N(t)+1}]$



$$g(t) = \int_0^\infty E[Y_{N(t)+1} / X_1 = s]\, dF(s) =$$

$$E[Y_{N(t)+1} / X_1 = s] = \begin{cases} g(t-s) & \text{se } s < t \\ E[Y_1 / X_1 = s] & s > t \end{cases}$$

$$g(t) = (g * F)(t) + H(t)$$

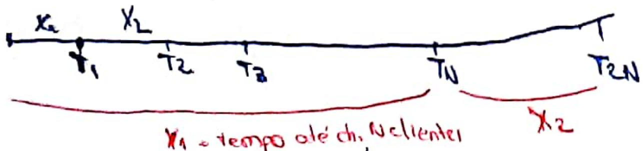
$$\text{com } H(t) = \int_t^\infty E[Y_1 / X_1 = s]\, dF(s)$$

Exemplo: "Lotação".

Chegam clientes com intervalos $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots$ $E\bar{X}_i = \mu$

Quando chegam $\underline{N}$, sai a lotação.

Custo de cada cliente, durante sua espera, é de c unidades monetárias por unidade de tempo.



Custo médio do sistema por unidade de tempo?

(X_i, Y_i)

$$E[Y_i] = c[0\, E(\overset{\mu}{\bar{X}_1}) + 1\, E(\overset{\mu}{\bar{X}_2}) + 2\, E(\bar{X}_3) + \ldots + (N-1)\, E(\overset{\mu}{\bar{X}_{N-1}})] =$$

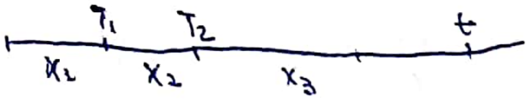
$$= c\, \frac{N(N-1)}{2} \cdot \mu$$

Daí, pelo resultado, $\dfrac{E[Y(t)]}{t} \to \dfrac{EY}{EX} = \dfrac{c\,\frac{(N-1)N\mu}{2}}{N\mu} = \dfrac{c(N-1)}{2}$ ..

Introdução Aos Processos Estocásticos

07/11 - Aula 19

Processo de Renovação Com Recompensa



$\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d.

$N(t)$

Y_i = Recompensa no Intervalo (T_{i-1}, T_i)

$\{(X_i, Y_i)\}_{i \geq 0}$ i.i.d.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

$$\frac{Y(t)}{t} \to \frac{E(Y)}{E(X)}$$

$$\frac{E(Y(t))}{t} \to \frac{E(Y)}{E(X)}$$

Exemplo: "Peter Principle"

Emprego

Dois tipos de funcionários

- Competente:

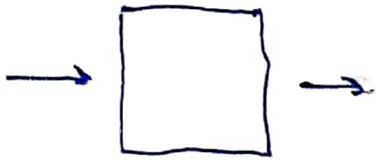
  fica na função conforme uma v.a. $X \sim F$

- Incompetente

  Fica $Y \sim G$

$EX = \mu$ $\mu < r$ = "tempo até a aposentadoria"

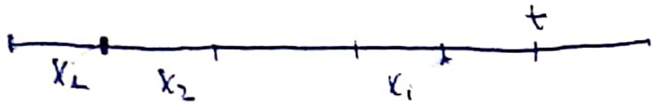
$EY = r$



Emp.

p é a prob. de ser competente
$1-p$ " " " " não ser "

Numa "dist. estacionária" qual é a prob. da função estar ocupada por um funcionário incompetente?



X_i = tempo de perm. do i-ésimo funcionário

Recompensa $Y_i = \begin{cases} 0 , & \text{se é incomp.} \\ X_i & \text{se é incomp.} \end{cases}$

$\{(X_i, Y_i)\}_{i\geq 0}$ i.i.d.

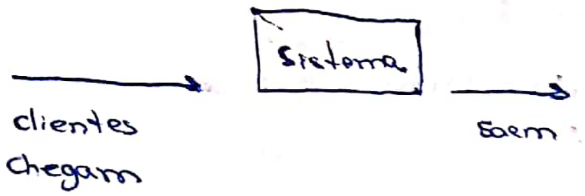
$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ = "tempo no qual trabalham funcionários incomp."

$$\frac{Y(t)}{t} \xrightarrow[q.c.]{} \frac{E(Y)}{EX} = \frac{\cancel{(1-p)r}}{p\mu + (1-p)r}$$

$EX = p\mu + (1-p)v$
$EY = (1-p)v$

Ex. Se $p = 1/2$, $v = 10$, $\mu = 1$ $\quad \frac{Y(t)}{t} \to 0{,}91$

Sistema de Filas

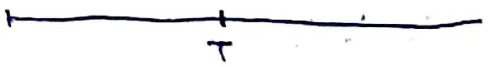


Hipóteses

1. Clientes chegam 1 a 1

O n-ésimo cliente, permanece um tempo V_n (aleatório)

2.



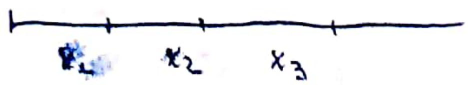
Existe um tempo de parada T tal que o sistema "recomeça probabilisticamente a partir de 0". tempo de renovação

3. Se $Q(t)$ = # de clientes no sistema no instante t

$$Q(0) = Q(T) = 0$$

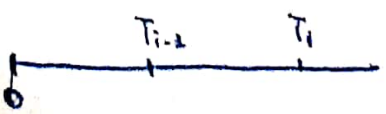
Exemplo: Fila G/G/1

Chegadas



$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. $X \sim F$ geral

Sucessivos atendimentos $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ $Y_i \sim G$ geral

ciclo


Processo dentro de cada ciclo: P_i

$P_i = \{ \underline{\underline{Q(t)}} \, , T_{i-1} \leq t \leq T_i \}$

N_i = # de clientes que entrou no sistema no ciclo i., i.i.d.

<u>Suponha</u>: $EN < \infty$

$T = T_1 \quad ET < \infty$

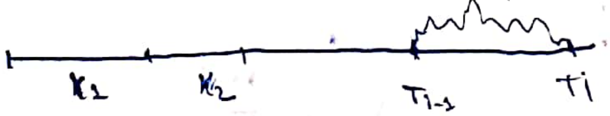
$ENT < \infty$

L = "tamanho médio da fila" (no sistema)

λ = "taxa média de clientes atendidos"

W = "tempo de perm. de um cliente"

Processo de Renovação com Recompensa I



sucessivas renovações

$X_1 = T_i - T_{i-1}$

$Y_1 = R_1$ "Recompensa"

$$R_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} Q(s)\, ds$$

$\{R_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. com a dist. de R_1

$$R = R_1 = \int_0^T Q(s)\, ds$$

$ER \leq ENT < \infty$

$$\frac{\int_0^t Q(s)\, ds}{t} \to \frac{ER}{ET} = L = \text{"tamanho médio da fila"}$$

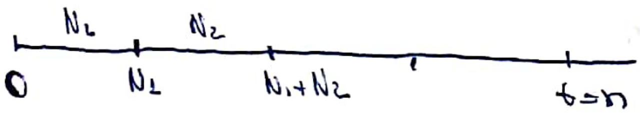
Processo II.

$X_i = T_i - T_{i-1}$ $\qquad$ Y_i = recompensa = N_i

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{EN}{ET} \equiv \lambda$$ "taxa de chegada de clientes"

Processo III

Tempo de Renovação



$\{X_i\}_{i\geq 1} = \{N_i\}_{i\geq 1}$ $\qquad$ $Y_i = S_i$ = recompensa =

= tempo total de perm. desses N_i clientes.

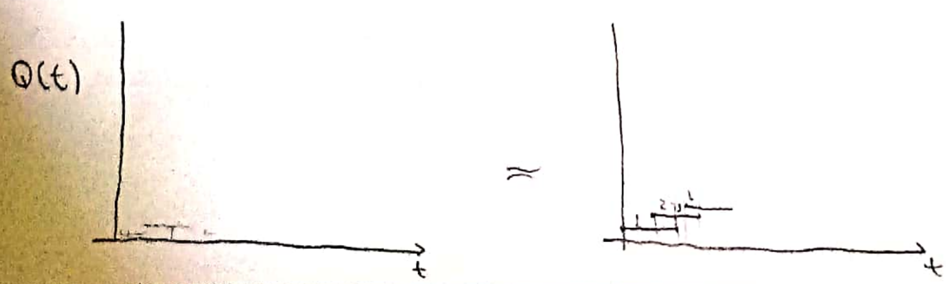
$$S_i = \sum_{l=1}^{N_i} V_l$$ "tempo total de permanência dos N_i clientes"

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n} \to \frac{ES}{EN} \equiv W$$

Teorema: $L = \lambda W$

Demonstração.

$$\frac{L}{\lambda W} = \frac{\overset{L}{ER}}{ET}\,\frac{\overset{1/\lambda}{ET}}{EN}\,\frac{\overset{1/W}{EN}}{ES} = \frac{E\left(\int_0^T Q(s)\,ds\right)}{E\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)} = 1$$



Exemplo. M\M\1 FIFO

λ μ

L

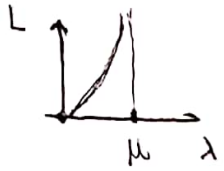
λ

W

Dist. estacionária

$$\pi(k) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$L = \sum_{k \geq 0} k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$



W

considero um cliente particular.

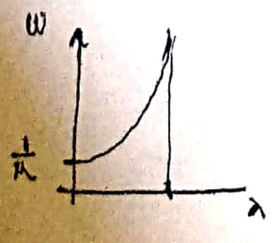
seja K = # de clientes no sistema que ele encontra

$$P(K = k) = \pi(k)$$

$$E[W] = E[E[W/K]]$$

$$E[W/K] = \frac{K+1}{\mu}$$

$$EW = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{\mu} \pi(k) = \frac{1}{\mu}\left[\sum_{k \geq 0} k\pi(k) + 1\right] = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda} + 1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$



Se L_Q = "nº médio de clientes aguardando atendimento"

W_Q = "tempo médio de um cliente aguardando atendimento"

Ainda vale,

$$L_Q = \lambda W_Q$$

- Como um cliente encontra o sistema a_n
- Como um cliente deixa o sitema ℓ_n
- Como tipicamente está o sitema π_n

Fluxo identico

$a_n = \ell_n$

$\mathbb{P}$(Chegar e encontrar n) =

$\mathbb{P}$(Sair e deixar n)

Quando Proc. de Poisson pra chegadas, $a_n = \ell_n = \pi_n$.

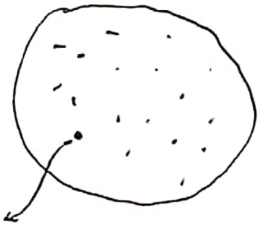
Aula 20 Introdução Aos Processos Estocásticos

12 de Novembro de 2013

$X_t \in S$, quando S contínuo

Sistema Markoviano de Partículas.

<u>Modelo de Contato</u>



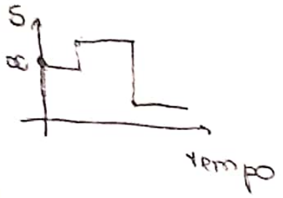
Λ: "Espaço"
"Enumerável"
"Posições no espaço"

Ex: $\Lambda = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}^d$ (Grafo)

Espaço de estados (Espaço de configurações)
$S = \{0,1\}^\Lambda$ não-enumerável.
↳ elemento de S: σ (ou η)

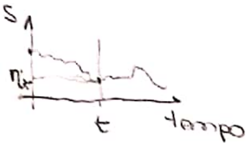
Obs: se A e B conjuntos
A^B = funções de B em A

suponhamos, a princípio
$1 \to 0$ taxa 1
$0 \to 1$ taxa $\lambda \times \#$ vizinhos doentes



η_t = configuração no instante t

$$\eta_t \in S \ \forall t \geq 0$$



$D_S[0,\infty)$ = "conjunto de trajetórias em S" "Royden"

"contínuas à direita e com limite à esquerda" cadlag

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{funções em } S & f \\ \text{medidas de prob. em } S & \mu \end{array} \right.$

$$\langle \mu, f \rangle = E^{\mu} f = \int_S f(\eta)\, d\mu(\eta)$$

<u>Semigrupo</u>: $\mathbb{P}(t)$

$$\mu_t = \mu_0 \mathbb{P}(t)$$

$f(\eta)$

$(\mathbb{P}(t) f)(\eta) = E^{\eta} f(\eta_t)$

$$\langle \mu \mathbb{P}(t) \mid f \rangle = \langle \mu \mid \mathbb{P}(t) f \rangle$$

"$\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}}$" Análise Funcional

$\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s)$ Hille-Yosida

Obs.:

$$\mathbb{L} f(\eta) = \sum_{x \in \Lambda} c(x,\eta)\left[f(\eta^x) - f(\eta) \right]$$

onde,

1. Notação: se $\eta \in S = \{0,1\}^\Lambda$ e $x \in \Lambda$

η^x é definida como a config.

$$\eta^x(y) = \begin{cases} 1 - \eta(x) & \text{se } y = x \\ \eta(y) & \text{c.c.} \end{cases}$$

2. $c(x, \eta)$ = "taxa com a qual a configuração em x muda quando a presente configuração é η"

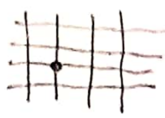
$$c(x,\eta) = \eta(x) + \lambda(1 - \eta(x)) \sum_{\substack{y: \\ |x-y|=1}} \eta(y)$$

Deixando de lado essa construção formal.

• Construção Gráfica (Harris)

Antes

$\Lambda = \mathbb{Z}^d$



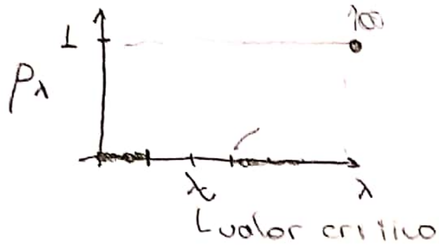
Perg. 'Natural'

Suponha que a config. inicial η_0 é "só a origem do $\mathbb{Z}^d$ está gripada"

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \text{Origem de } \mathbb{Z}^d = x = (0,0,\dots,0) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

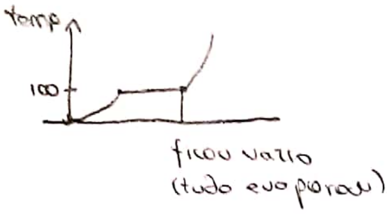
$p_\lambda(t) = P(\text{"tem alguém gripado no inst. } t\text{"}) =$

$= P\left(\sum_{x \in \Lambda} \eta_t(x) > 0\right)$ $\qquad p_\lambda = \lim_{t \uparrow \infty} p_\lambda(t)$



Se $\lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow P_{\lambda_1} \leq P_{\lambda_2}$

Exemplo da água.

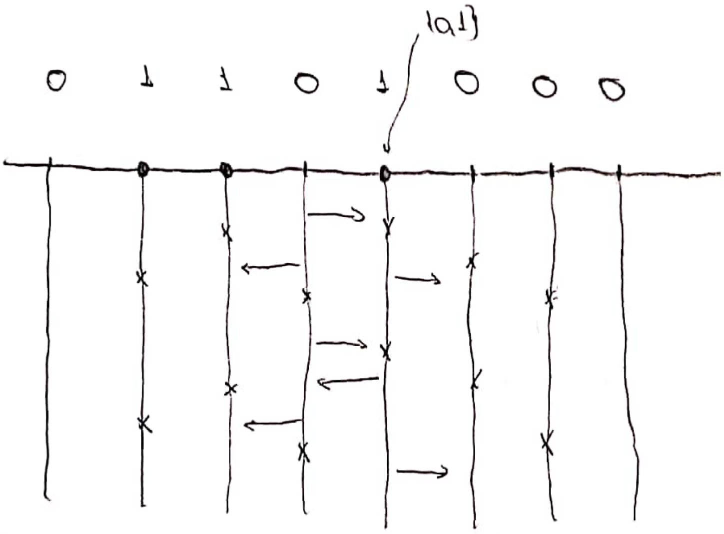


<u>Construção</u> Gráfica do Modelo de Contato ($\mathbb{Z}$)

$S = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ $\qquad \mathbb{Z} = \Lambda$

$1 \to 0$ taxa 1

$0 \to 1$ taxa $= \lambda$ # visinhos



Para cada $x \in \Lambda$ ($\mathbb{Z}$)

Associo 3 processo de Poisson

1) "Processo de Cruzes" taxa 1

2) Processo de setas à direita

3) Processo de setas à esquerda.

Introdução Aos Processos Estocásticos

Aula 21. 14 de novembro

Modelo de Contato

$d=1$

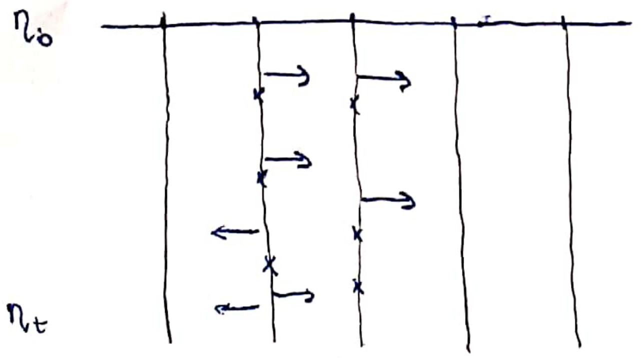
$\mathbb{Z}$

0 "sadio" → 1 "gripado" com taxa $\lambda \cdot$ # vizinhos gripados

1 "gripado" → 0 "sadio" com taxa 1

$\eta_t \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ "configuração" do processo no instante t.

Construção Gráfica



$x \in \mathbb{Z}$

↓

três processos de Poisson

× taxa 1
→ taxa λ
← taxa λ

indep.

η_0 : conf. inicial

η_t : " no instante t

$\{\eta_t(x)=1\} = \{$ existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que

1. $\eta_0(y)=1$
2. existe um caminho aberto para a gripe chegar a x no instante $t\}$.

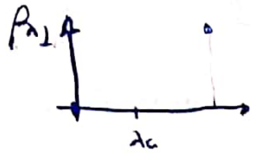
Pergunta. $p_\lambda(t) = P\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} \eta_t(x) > 0 \mid \eta_0 = \delta_0\right)$

δ_0 é a configuração: "só a origem gripada"

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow p_{\lambda_1} \leq p_{\lambda_2}$

$p_\lambda = \lim_{t\uparrow\infty} p_\lambda(t)$



$\lambda_c = \sup\{\lambda : p_\lambda = 0\} \geq 0$
$(\inf\{\lambda : p_\lambda > 0\})$

Teorema. $0 < \lambda_c < \infty$

Lema: $\lambda_c > 0$.

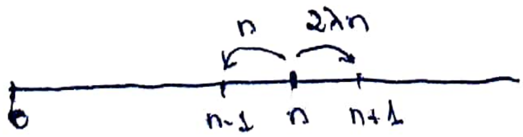
Comparo com ~~ramificação~~ nascimento e morte.

η_t e $X_t \in \mathbb{N}$ ~~ramificação~~ nasc. e morte tal que

$|\eta_t| \leq |X_t| \;\; \forall t$, $|X_0| = 1$

Tomo

X_t



temos que $2\lambda < 1$
$\lambda < 1/2$

X_t é caso de η_t mais favorável ao aumento de doentes

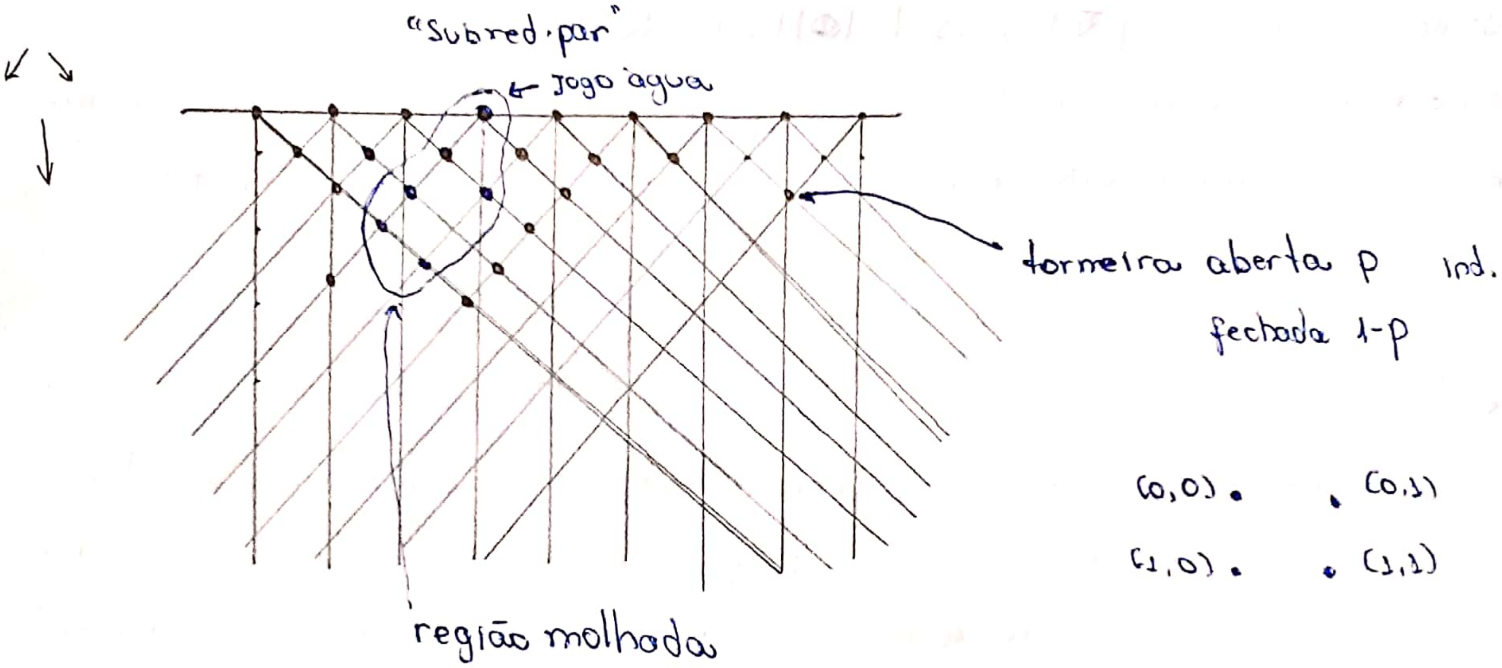
$\lambda_c > 0$
$\lambda_c \geq 1/2$ $\square$

Lema: $\lambda_c < \infty$.

Vem do italiano Percolatori. Voy a percolari un café!

a água só pode fazer ↙ ou ↘ (gravidade)

Modelo de Percolação Orientada.



Suponha.

fixada uma realização de "torneiras abertas ou fechadas a partir da origem"

Subrede para $P = \{y = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \text{ é par}\}$

$C(0) =$

Lema: $p_c > 0$

Comparo com ramificação. $p_c \geq 1/2$.

"No de ramificação, $p \leq 1/2 \Rightarrow |C(0)|$ é finito"

Como o nº de elementos molhados no de per c. orientada é menor que no Proc. de ramificação (não há competição por espaço), segue que $p_c \geq 1/2$.

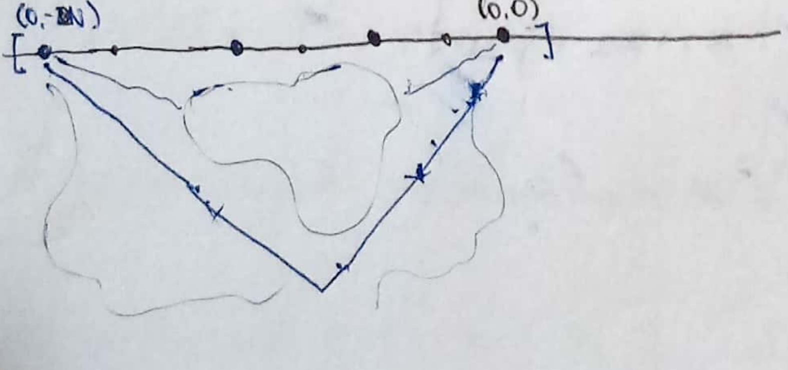
Peierl.

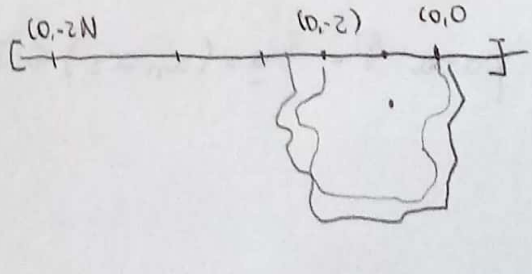
- Quanto maior o números do formas de ocorrer algo improvável, maior a chance daquilo ocorrer. Ou seja, quando a entropia é muito grande, a energia gasta se torna insignificante, fazendo aquilo ocorrer".

$\theta(p) = P(|C(0)| = \infty)$

$P(\underbrace{|C(0)| < \infty}_{\text{tamanho da região molhada é finito}})$

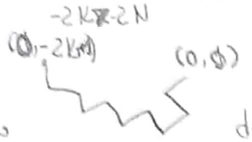
$C(N)$ = região molhada por $\{(0,0), (0,-2), \dots, (0,-2N)\}$





Lema: para $p > \frac{\theta_c}{\theta_1}$, $P(C(N) < \infty) < 1$

Dem: se $|C(N)| < \infty$



$\exists$ uma linha, do ~~tamanho~~ comprimento finito que liga $(0,0)$ à $(0,-2N)$

Dem: Se $|C(N)| < \infty$

então $\exists\ \gamma$ = caminho "contorno" na rede ímpar contornando esta região molhada.

$|\gamma|$ = comprimento do caminho

$\{C(N) < \infty\} = \{$ Existe um contorno finito ao redor de $C(N)\}$

$P(|C(N)| < \infty) = P($contorno ser finito$) =$

$= P\Big(\bigcup_{\substack{\text{contornos} \\ \gamma_i : |\gamma_i| = n}}$ "foi con

$|\gamma_i|$ = tamanho

$P(\gamma : |\gamma| = n)$ — contorno ao redor de $C(N)$ e γ com comp. n

maior que $\frac{n}{4}$

↗ ↖ ↙ ↘

pra esquerda

porque  contam o mesmo ponto

$P(\gamma : |\gamma| = n) \leq (1-p)^{n/4}$

$\#$ de caminhos de comprimento $n \leq 3^n$

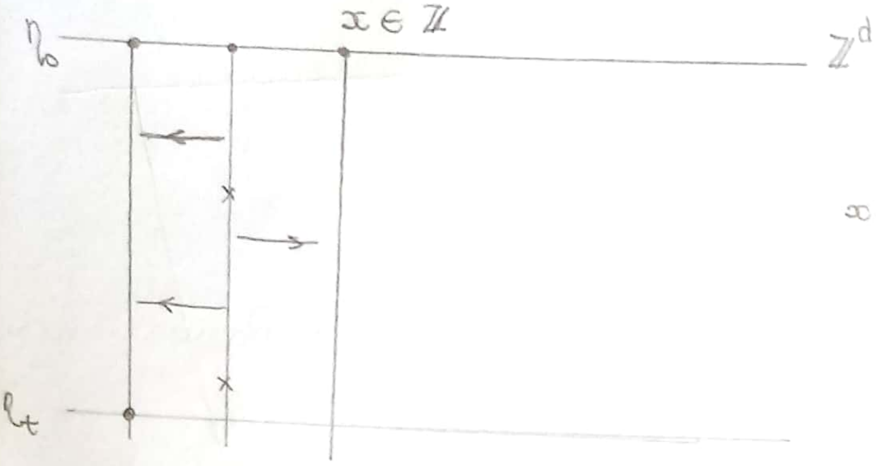
$P($existir um γ finito$) \leq \sum_{n \geq 2N} 3^n (1-p)^{n/4} = \sum_{n \geq 2N} [3(1-p)^{1/4}]^n$

$P(C(0) < \infty) < 1$

Contato em $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}^d)$

20/11, Aula 21

Construção Gráfica



$x \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow$ 3 proc. de Poisson indep.

× taxa 1

→ taxa λ

← taxa λ

Processo $\eta_t \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$

↑

configuração no instante t

η_0 = conf. inicial

$\{\eta_t(y)=1\} \Leftrightarrow \{$existe um caminho "aberto" até y no instante t (pela construção gráfica) que vai de $(x,0)$ até (y,t) com $\eta_0(x)=1\}$

Suponha η_0 - "só origem ocupada"

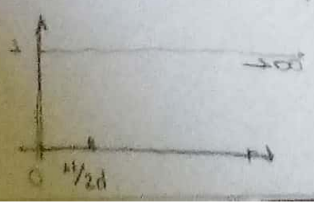
$A_0 = \{0\}$

$A_t =$

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x=0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\rho_\lambda(t) = P(|\eta_t| > 0)$ onde $|\eta_t| = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_t(x)$

$$\rho_\lambda = \lim_{t \uparrow \infty} P(|\eta_t| > 0)$$



$\lambda_c = \sup\{\lambda : \rho_\lambda = 0\}$

Teorema: $\lambda_c \in (0, \infty)$

$0 < \lambda_c < \infty$

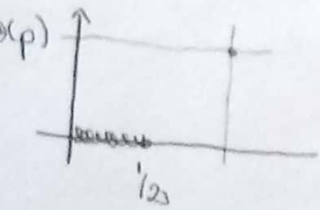
Lema: $\lambda_c > 1/2$.

Para provar que $\lambda_c < \infty$, "comparo" com o modelo de percolação orientada.

Região molhada

$C(0)$ = Região molhada a partir da origem

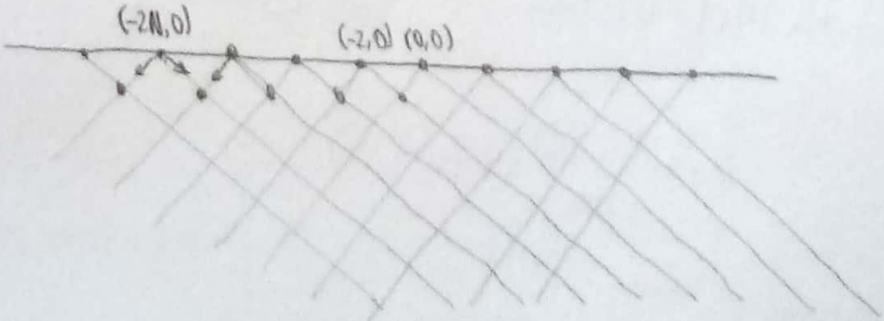
$\Theta(p) = P(|C(0)| = \infty)$



$p_c = \sup\{p : \Theta(p) = 0\}$

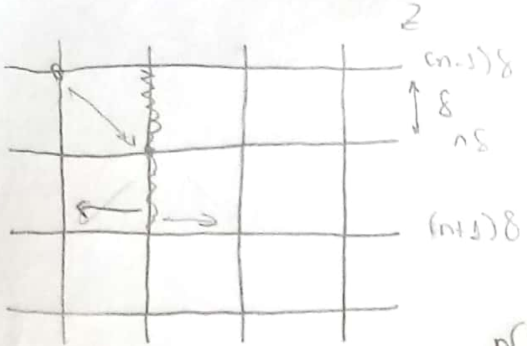
Lema: $p_c \geq 1/2$.

Lema: $p_c < \frac{80}{81} < 1$.



$C(N)$ = Região molhada por $\{(-2N,0), \ldots, (0,0)\} = A$

Uso do Resultado para contato.



$p(\lambda, \delta)$

- "Não existe x no intervalo $((n-1)\delta, (n+1)\delta)$
- pelo menos uma seta $\rightarrow$ $(\leftarrow)$ ind. no intervalo $(n\delta, (n+1)\delta)$

Consigo λ grande e $\delta > 0$:

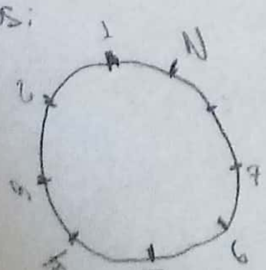
$$p(\lambda, \delta) = e^{-2\delta} (1 - e^{-\lambda\delta})^2 > \frac{80}{81}$$

$$\left.\frac{dp(\lambda, \delta)}{d\delta}\right|_{\delta = \delta(\lambda)} = 0$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda} \log(1+\lambda)$$

$$p(\lambda, \ ) = \left[\frac{\lambda}{(1+\lambda)^{1+1/\lambda}} \right]^2 \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{} 1$$

. Obs:



A cadeia ~~não~~ é irredutível, pois a conf. $(\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \dots, \overset{N}{0})$ é uma classe fechada.

$\{X_t\}$ (η_t)

$S = \{0,1\}^{\{1,2,\dots,N\}}$

1) Mostramos que $P(|C(N)| = \infty) > 0$

2) Se $|C(N)| = \infty \Rightarrow$ algum $|C(i)| = \infty$ para $i \in A$

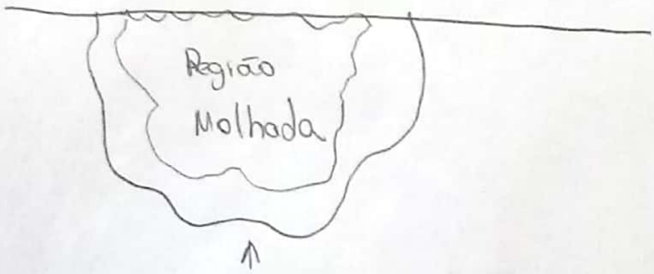
$$C(N) = \bigcup_i C(i)$$

$$(N+1)\, P(|C(i)| = \infty)$$

$$P(|C(N)| = \infty) = P\Big(\bigcup_i |C(i)| = \infty\Big) \leq \sum_{i=1}^{N+1} P(|C_i| = \infty)$$

$$P(|C(0)| = \infty) \geq \frac{1}{N+1} P(|C(N)| = \infty)$$

1) Pierls $|C(N) < \infty| \Rightarrow$ existe $\gamma \cdot |\gamma| = n$



caminho contornando a região molhada.

$$P(|C(N)| < \infty) \leq \sum_{n \geq 2N} 3^n (1-p)^{n/4}$$

$\frac{n}{4}$ fechados

onde $|\gamma|$ = comp. de γ.

Dado $\epsilon > 0$, def

$$\sum_{n \geq 2N} [3(1-p)^{1/4}]^n = ⊛$$

se $3(1-p)^{1/4} < 1$ a série converge ($p > 80/81$)

Revisão Parte I

Introdução Aos Processos Estocásticos

15/08 **Aula 01**

Sala: 209

email: neves@ime.usp.br

www.vision.ime.usp.br/~neves

$\xrightarrow{\text{Tempo}}$
- determinístico: edo, ...
- Estocástico

$\{X_t\}_{t \in T}$ em S = "espaço de estados"

X_t é uma variável aleatória T = "tempos"
- contínuo $\mathbb{R}^+$
- discreto $\mathbb{N}$

"Todo modelo é incorreto".

▶ Processos de Markov

Interesse: A partir de um ponto, o Processo se repete?

▷ Cadeias de Markov em Tempo Discreto

$T = \mathbb{N}$ → discreto

$S \subset \mathbb{N}$ → cadeia

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em S enumerável satisfazendo a condição de Markov

$$P(X_{n+1}=j \,/\, X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i) = P(X_{n+1}=j \,/\, X_n=i)$$

Condição de Markov

Dizemos que a cadeia de Markov é **homogênea** se

$$P(X_{n+1}=j \,/\, X_n=i) = P(X_1=j \,/\, X_0=i) \quad \forall n \geq 1$$

Chamamos $\mathbb{P}$ t.q.

$$(\mathbb{P})_{ij} = P(X_1=j \,/\, X_0=i), \quad i,j \in S$$

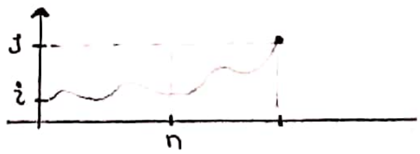
de **Matriz de Transição** se $(\mathbb{P})_{ij} = p_{ij}$.

- $p_{ij} \geq 0$
- $\sum_j p_{ij} = \sum_j P(X_1=j \,/\, X_0=i) = 1.$

20/08 **Aula 02**

Em n passos,

$$p_{ij}(n) \overset{\text{notação}}{\equiv} P(X_n=j \,/\, X_0=i)$$



Idéia: pensar em duas etapas.

$$p_{ij}(n+m) = P(X_{n+m}=j \,/\, X_0=i) = P\Big(\{X_{n+m}=j\} \cap \{\bigcup_{k\in S}\{X_n=k\}\} \,/\, X_0=i\Big) =$$

$$= P\Big(\bigcup_{k\in S} \{X_{n+m}=j\} \cap \{X_n=k\} \,/\, X_0=i\Big) = \sum_k \frac{P(X_{n+m}=j, X_n=k, X_0=i)}{P(X_0=i)} =$$

$$= \sum_k P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \frac{P(X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

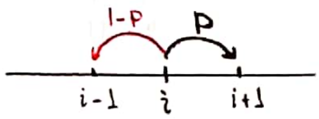
$$= \sum_k P(X_m = j \mid X_0 = k)\, P(X_n = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_k p_{ik}(n)\, p_{kj}(m) \quad , \forall\, n, m \geq 0 \,,\ i, j \in S$$

Chapman - Kolgomorov

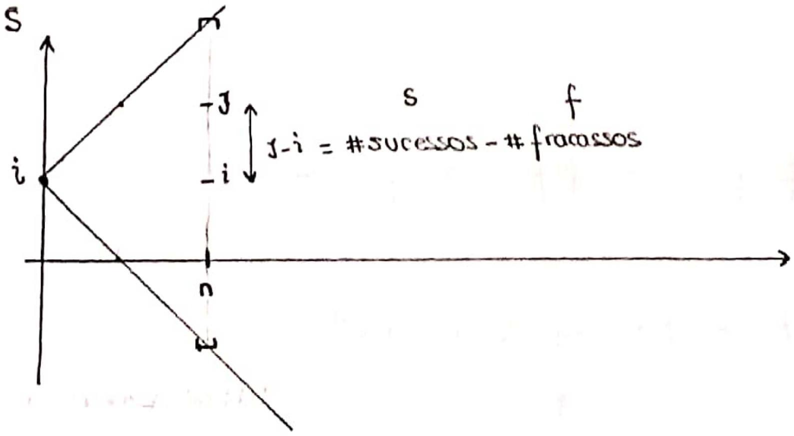
Então, $\quad p_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$

- Passeio Aleatório



$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $S = \mathbb{Z}$

$$p_{ij} = \begin{cases} p \,, & \text{se } j = i+1 \\ q = 1-p & \text{se } j = i-1 \\ 0 \,, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$\begin{cases} s + f = n \\ s - f = j - i \end{cases}$$

$$s = \frac{n+j-i}{2}$$

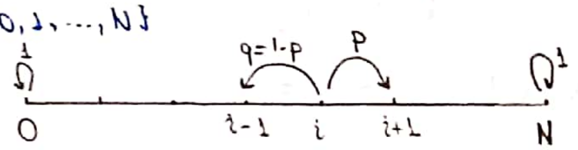
Assim,

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{se } n+j-i \text{ é par} \\ 0 \,, & \text{c.c.} \end{cases}$$

?

- Problema do Jogador

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $S=\{0,1,\dots,N\}$



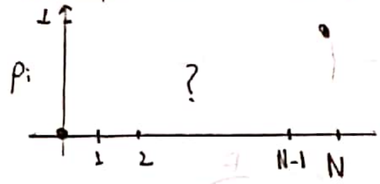
Qual a chance de atingir N antes de 0.

$$P(\text{Ganhar}/X_0=i) = P(G/X_0=i) = P\Big(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=N\}/X_0=i\Big) = p_i$$

↳ depende de i

$p_0 = 0$ $\quad p_i \to$ crescente: Quem começa com mais, tem mais chance de ganhar!

$p_N = 1$



$$p_i = P(G/X_0=i) = P(G, X_1=i+1/X_0=i) + P(G, X_1=i-1/X_0=i) =$$

$$= P(G/X_1=i+1)\,P(X_1=i+1/X_0=i) + P(G/X_1=i-1)\,P(X_1=i-1/X_0=i) =$$

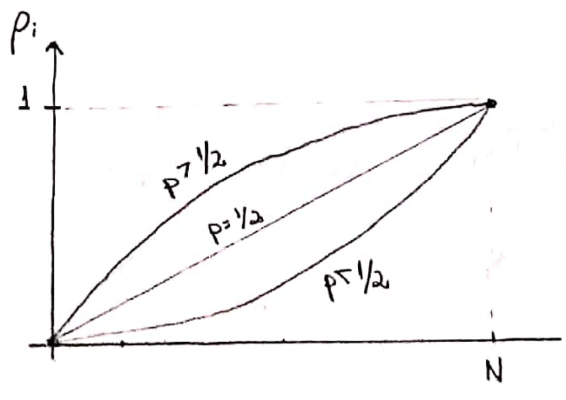
$$= p_{i+1}\,p + p_{i-1}\cdot q \quad , \quad i\in\{1,\dots,N-1\}$$

Assim, com $p+q=1$

$$(p+q)\,p_i = p\,p_{i+1} + q\,p_{i-1} \Leftrightarrow$$

$$p_{i+1}-p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1})$$

Se $p < 1/2$, $\frac{q}{p} > 1$



Vemos que

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p}(p_1 - \overset{0}{p_0}) = \frac{q}{p} p_1$$

$$p_3 - p_2 = \frac{q}{p}(p_2 - p_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1$$

$$\vdots$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^i p_1$$

$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$p_{i+1} - p_1 = \sum_{n=1}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^n p_1$$

Daí,

$$p_{i+1} = \sum_{n=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^n p_1 = \begin{cases} (i+1)\, p_1, & \text{se } p=q \\ \dfrac{1-(q/p)^{i+1}}{1-(q/p)}, & \text{se } p \neq q \end{cases} \qquad (*)$$

Mas ainda estamos em função de p_1. Para finalizar, devemos lembrar que

$$p_N = 1$$

e, por $(*)$

$$p_N = \begin{cases} N p_1, & \text{se } p=q \\ \dfrac{1-(q/p)^N}{1-(q/p)}, & \text{se } p \neq q \end{cases}$$

Daí,

i). Se $p=q$

$$N p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{N}$$

. Se $p \neq q$

$$p_1 \left(\frac{1-(q/p)^N}{1-(q/p)}\right) = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1-q/p}{1-(q/p)^N}$$

Daí,

ii)

$$p_i = \frac{i}{N}, \text{ se } p=q \qquad \text{e} \qquad p_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, \text{ se } p \neq q$$

Obs: Se $N = 1000$, $i = 900$

Com $p = 1/2$ $\quad p_{900} = 0,9$

Com $p = 18/38$ $\quad p_{900} = 0,00003$

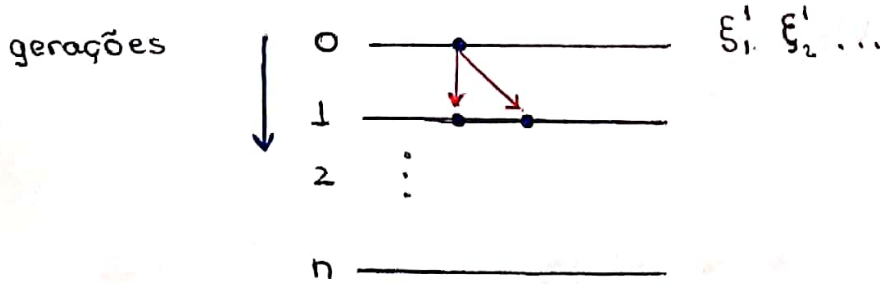
Como jogar: Apostar o que falta para completar o capital desejado. (Estratégia Golden Play).

Aula 03

22/08

Processo de Ramificação

- Preocupações dos barões com sua descendência
- Reação em cadeia no processo de fissão atômica
- População de Bactéria



ξ = # de descendentes de uma bactéria na geração seguinte

$\{\xi_n^i\}_{\substack{i,n \\ n\geq 0 \\ i\geq 1}}$ v.a. i.i.d. com distribuição $P(\xi=k)=p_k$.

com valores em $\mathbb{N}$

Definimos agora

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } S=\mathbb{N}$$

$X_0 = 1$

$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i$ $\qquad\qquad$ X_n = # de indivíduos na geração n.

Seja agora

$$\rho := \lim_{n\uparrow\infty} P(X_n=0)$$

$$\rho_n = P(X_n=0)$$

Seja $\mu = E\xi = \sum_{k\geq 0} k p_k$

Interesse: EX_n. Sabemos que $EX_0 = 1$.

$n\geq 1$ $\quad EX_n = E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i\right]$.

Mas

$$E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i / X_{n-1}=k\right]\right], \quad k\geq 0$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{k} \xi_{n-1}^i\right] = \sum_{i=1}^{k} E[\xi_{n-1}^i] = k\mu$$

Assim,

$$E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i / X_{n-1}\right] = X_{n-1}\mu \Rightarrow$$

$$E[X_n] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1}^i / X_{n-1}\right]\right] = E[X_{n-1}\mu] = \mu E X_{n-1} \Rightarrow$$

$$EX_n = \mu^n$$

Logo,

- Se $\mu > 1$, explosão

  Se $\mu \leq 1$, acaba?

$p_n = P(X_n=0)$

$p = \lim_{n\to\infty} p_n$

$$p_n = P(X_n=0) = \sum_{k\geq 0} P(X_n=0 / X_{n-1}=k)\, P(X_{n-1}=k)$$

$p_0 = P(X_0=0) = 0$

$p_1 = P(X_1=0) = p_0$

$p_2 = \sum_{k\geq 0} P(X_2=0 / X_1=k)\, P(X_1=k)$

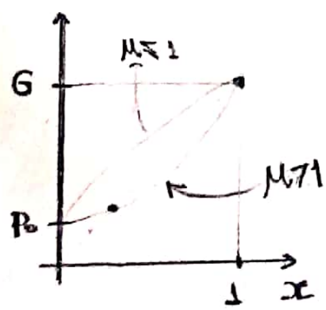
$$p = P\{\text{Extinção eventual}\} = P\Big(\overbrace{\bigcup_{n\geq 1}\{X_n=0\}}^{A}\Big)$$

$$p = P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{P(A | X_1=k)}^{p^k}\, \underbrace{P(X_1=k)}_{p_k}$$

$$p = \sum_{k\geq 0} p^k p_k = G(p)$$

Dado $\{p_k\}_{k\geq 0}$

$$\frac{d}{dx} G(x) = \sum_{k\geq 1} k\, p_k\, x^{k-1} \geq 0$$



$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)\, p_k\, x^{k-2} \geq 0 \Rightarrow \text{convexo}$$

$$\left.\frac{d}{dx} G(x)\right|_{x=1} = \sum_{k\geq 1} k\, p_k = \mu$$

$\mu \leq 1 \Rightarrow p = 1$: "extinção certa"

$\mu > 1 \Rightarrow p < 1$. "prob. positiva de não extinção"

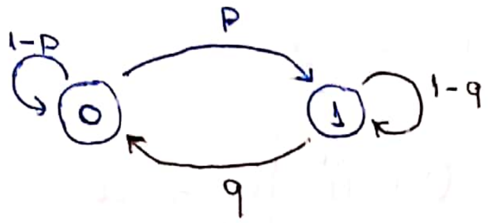
Exemplo. ξ tal que $P(\xi=0)=1/3$ e $P(\xi=2)=2/3$, $p=?$

Nesse caso,

$$G(x)=\frac{1+2x^2}{3}, \quad p=1/2,$$

Cadeia de Markov de 2 estados

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S=\{0,1\}$



$$P=\begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$P(X_n=1 / X_0=0)=P_{01}(n)=(P^n)_{01}$ ← transição em n passos.

P^n

$P=UDU^{-1}$ $\qquad D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$PU=UD=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad P\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

autovalores de P: $1, (1-p-q)$.

$(\det[\lambda - P]=0)$

$$U=\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \end{bmatrix}$$

$$P^2 = UD^2U^{-1} = U \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$P^n = U \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} U^{-1}$$

$$P^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^n & p - p(1-p-q)^n \\ q - q(1-p-q)^n & p + (1-p-q)^n \end{bmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$$

$(P^n)_{ij} \underset{n \uparrow \infty}{=} \pi(j)$? Nem sempre isso ocorre, somente sob certas condições. "Qdo todo mundo pode ser visitado a qqer momento e ocorre a perda da memória de onde comecei"

Agora, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ em SCIN

$\pi : S \to \mathbb{R}$, distribuição de probabilidade em S.

$$\begin{cases} \pi(i) \geq 0 \\ \sum_{i \in S} \pi(i) = 1 \end{cases}$$

inf. sobre a cadeia num dado instante.

Se π_0 é a distribuição no instante zero. e π_n no instante n.

$$\pi_1(j) = \sum_i \pi_0(i)\, p_{ij} \quad \left(= \sum_{i \in S} P(X_1 = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i)\right) \Rightarrow$$

$$\pi_1 = \pi_0 P$$

$$\vdots$$

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

$\mathbb{P}$ é um operador de mult. à direita no espaço de medidas.

Funções (observáveis de interesse) em S

$$f(i) = \text{"Quão bom é estar em } i\text{"}$$
$$= \text{"lucro em } i\text{"}$$

$f: S \to \mathbb{R}$ $\qquad E[f(X_0) / X_0 = i] = f(i)$

$$E^i[f(X_1)] = E[f(X_1) / X_0 = i] = \sum_{j \in S} p_{ij} f(j)$$

$$E[f(X_n) / X_0 = i] = \sum_{j \in S} (\mathbb{P}^n)_{ij} f(j)$$

$$E[f(X_1) / \pi_0] = \sum_i E[f(X_1) / X_0 = i] \pi_0(i)$$

$$E[f(X_1) / \pi_0] = \pi_0 \mathbb{P} f = [\pi_0]_{1\times n} \Big(\mathbb{P} \Big)_{n\times n} \Big(f \Big)_{n\times 1} = [\quad]_{1\times 1}$$

Obs:

$\langle \pi, f \rangle = \sum_{i \in S} \pi(i) f(i) =$ valor esperado de f com respeito à dist. de prob. de π.

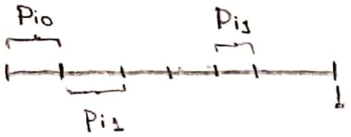
Se π é a distribuição no instante 0 e f é a função de interesse: "Lucro"
$\langle \pi_0, f \rangle$ = "valor esperado do Lucro no instante 0".

$\langle \pi_0, Pf \rangle$ = "valor esperado do lucro no instante 1" = $\langle \pi_0, Pf \rangle$

Construção de Uma Cadeia de Markov

$$\{X_n\}_{n \geq 0} \text{ em } S \subset \mathbb{N}$$

Construção a partir de $\{U_i\}_{i \geq 1}$, i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$



P_{ij}, $i,j \in S$

Defino f:

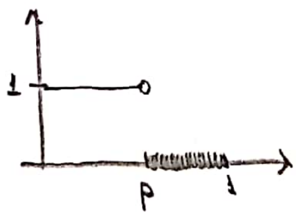
$f(i, U)$ = Prox. estado $\quad f: S \times [0,1] \to S$

i ↓ estado atual

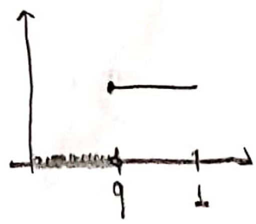
Exemplo. Cadeia de 2 estados

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \left[\begin{array}{cc} 1-p & p \\ q & 1-q \end{array}\right] \end{array}$$

$f(0, x) =$



$f(1, x)$

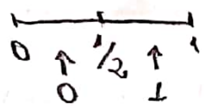


Simular

n	0	1
1	0	1
2	0	0
3	1	1
⋮		⋮

10000

$\pi_0 = (1/2, 1/2)$



$\pi_1 = ? = \frac{\sum X_1}{n}$

Aula 04

$\pi : S \to \mathbb{R}_+$

$i \in S \Rightarrow \pi(i) \geq 0$

$\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$

$\mathcal{P}$: medidas de prob. em S

$\mathcal{F}$: Funções em S.

Se π_0 é a distribuição inicial e π_n é a distribuição no tempo n. $\pi_n = \pi_0 P^n$

Se começo no estado i e $f \in \mathcal{F}$.

Qual é o valor esperado de f no instante 1?

$$E^i f(X_1) = \sum_j p_{ij} f(j)$$

e no instante n?

$$E^i f(X_n) = \sum_j p_{ij}(n) f(j)$$

$f : S \to \mathbb{R}$ vetor coluna

indexado por S $\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(j) \\ \vdots \end{bmatrix}$. $E^i f(X_1)$. $i \begin{bmatrix} \square \end{bmatrix} = i \underbrace{\left(\overset{j}{\text{———}} \right)}_{P} \overset{f}{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}$

Posso definir: Valor esperado de f começando com uma distribuição π_0.

$E^i f(X_1)$; $E^{\pi_0} f(X_1) = \sum_i E^i f(X_1)\, \pi(i)$

Então

$$E^{\pi} f(X_1) \equiv \langle \pi, \mathbb{P} f \rangle = \langle \pi \mathbb{P}, f \rangle$$

onde, se $\pi \in \wp$ e $f \in \mathcal{F}$

$$\langle \pi, f \rangle = \sum_{i \in S} \pi(i) f(i)$$

$\mathbb{P}$, $\pi \in \wp$, $f \in \mathcal{F}$

$\pi_n = \pi_0 \mathbb{P}^n$

Perguntas naturais: Sempre esciste $\lim_{n \uparrow \infty} p_{ij}(n)$?

Sempre existe $\pi \in \wp$ tal quo $\pi = \pi \mathbb{P}$?

Definição: Dizemos que π é estacionária (invariante) para uma cadeia com matriz de transição $\mathbb{P}$ se

$$\pi = \pi \mathbb{P}$$

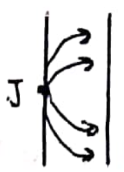
ou seja,

$$\pi(j) = \sum_{i \in S} \pi(i) p_{ij} \quad , \forall \ j \in S \quad \Leftrightarrow$$

$$\pi(j) = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) p_{ij} + \pi(j) p_{jj} \quad \Leftrightarrow$$

$$\pi(j)(1 - p_{jj}) = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) p_{ij} \quad \Leftrightarrow \ \pi \text{ ser estacionária}$$

"Equação de Balanceamento"



=

Ir de j p/ qqer outro dif. de j

de qqr que n seja j para j

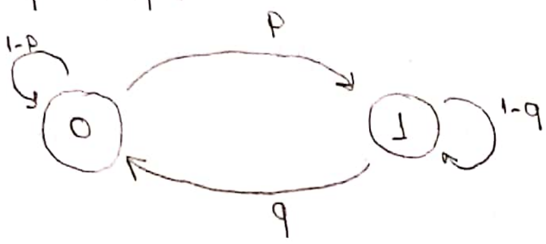
Exemplo.

- Cadeia de 2 estados

$\pi = \pi \mathbb{P}$

$\pi = (a, b) \qquad \pi(0) = a \ , \ \pi(1) = b$

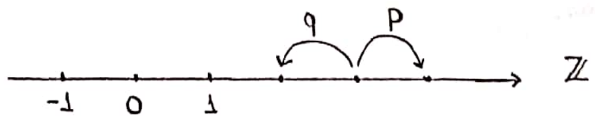
$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{l} (0) \\ \\ (1) \end{array} \begin{cases} \pi(0)\,p = \pi(1)\,q \\ \\ \pi(1)\,q = \pi(0)\,p \\ \quad \pi(0) + \pi(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi(0) + \pi(1) = 1 \\ p\pi(0) - q\pi(1) = 0 \end{cases} \quad \underset{\sim}{L_2 = L_2 - pL_1}$$

$$\begin{cases} \pi(0) + \pi(1) = 1 \\ -(q+p)\,\pi(1) = -p \end{cases} \Rightarrow \pi(1) = \frac{p}{q+p} \quad \text{e} \quad \pi(0) = \frac{q}{p+q}$$

- Passeio Aleatório



$\pi = \pi \mathbb{P}$

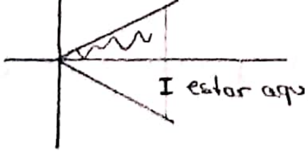
$(0) \qquad \pi(0).1 = \pi(-1).p + \pi(1)q$

$(1) \qquad \pi(1).1 = \pi(0)\,p + \pi(2)q$

$\vdots$

$(i) \qquad \pi(i).1 = \pi(i-1)\,p + \pi(i+1)q \qquad \forall\, i \in \mathbb{Z}$

Não $\nexists\, \pi \,/\, \pi\mathbb{P} = \pi$.

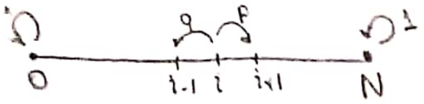


I estar aqui $\not\Rightarrow$ manter aqui

- Ehrenfest

$$\pi(i) = \binom{N}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

- Ruína do Jogador



$\delta_0 : \delta_0(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i=0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$\delta_1 : \delta_1(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i=N \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Se $\alpha \in (0,1)$

$\pi = \alpha\,\delta_1 + (1-\alpha)\,\delta_0$ é tbm estacionária.

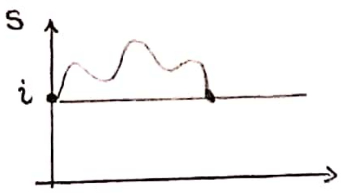
- "Se $\exists$ mais de uma, são infinitas."

Classificação dos Estados de Uma Cadeia

Definição: $i \in S$ é dito recorrente se

$$\mathbb{P}(\text{"Retornar a } i\text{"} / \text{"começou em } i\text{"}) = 1$$

$$\text{"Retornar a } i\text{"} = \bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\} \qquad \text{"começou em } i\text{"} = \{X_0 = i\}$$



$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = i\} / X_0 = i\right) = 1 \Leftrightarrow i \text{ é recorrente}$$

Caso contrário, i é dito transiente.

Definição: $f_{ij}(n)$: "Prob. de partindo de i, atingir j pela primeira vez no instante n".

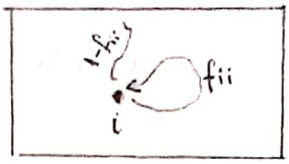
$$f_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_k \neq j,\ k = 1, \dots, n-1,\ X_n = j / X_0 = i)$$

$$f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n) = \text{Prob. de visitar } j \text{, eventualmente, partindo de } i$$

$$\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = j\}$$

Então

$$f_{ii} = 1 \Leftrightarrow i \text{ é recorrente}$$
$$f_{ii} < 1 \Leftrightarrow i \text{ é transiente}$$



Se N_i = "# de visitas ao estado i"

$E[N_i / X_0 = i]$ = Número esperado de retornos à i.

Se i é recorrente

$$E[N_i / X_0 = i] = \infty$$

Se i é transiente

$$E[N_i / X_0 = i] < \infty$$

$E[N_i / X_0 = i]$?

$$N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \quad , \text{ com } \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} = \begin{cases} 1 , & \text{se } X_n = i \\ 0 , & \text{o.c.} \end{cases}$$

$$E[N_i / X_0 = i] = E\Big[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} / X_0 = i\Big] = \sum_{n \geq 1} \underbrace{E[\mathbb{1}_{\{X_n = i\}} / X_0 = i]}_{P(X_n = i / X_0 = i)} = \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n)$$

Então,

$$\sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty \Leftrightarrow i \text{ é recorrente}$$

$$\sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) < \infty \Leftrightarrow i \text{ é transiente}$$

29/08 **Aula 5**

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ em S contável , $\mathbb{P}$: matriz de transição

$\wp$ = medidas em S

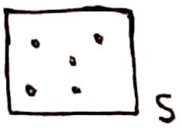
$\mathcal{F}$ = Funções em S

Perguntas:

1. Existe (e é única) $\pi = \pi P$, $\pi \in \wp$

2. $p_{ij}(n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} ?$

Classificação dos estados de uma cadeia



Recorrência: $i \in S$ é recorrente se $P(\text{"visitar } i\text{"} / X_0 = i) = 1$.

Caso contrário, transiente.

Definição: $f_{ij}(n)$ = Prob. de, partindo de i, visitar j pela primeira vez no instante "n".

$$f_{ij}(n) = P(X_k \neq j, k = 1, \dots, n-1, X_n = j / X_0 = i)$$

$$f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n)$$

i é recorrente $\Leftrightarrow f_{ii} = 1$

i é transiente $\Leftrightarrow f_{ii} < 1$

Critério para recorrência envolvendo $p_{ij}(n)$ (e não $f_{ij}(n)$)

Considero as funções geradoras

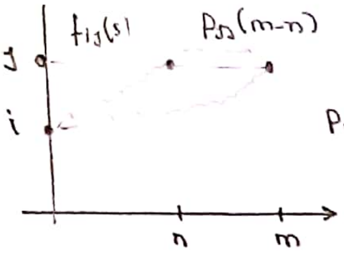
$$P_{ij}(s) = \sum_{n \geq 0} p_{ij}(n) s^n \; ; \; F_{ij}(s) = \sum_{n \geq 0} f_{ij}(n) s^n$$

Obs: $(P(0))_{ij} = p_{ij}(0) = \delta_{ij}$

$f_{ij}(0) = 0$

Lema: $P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)\, P_{jj}(s)$

Dem:



$$p_{ij}(m) = P(X_m = j \,/\, X_0 = i)$$

Seja $B_n = \{X_k \neq j,\ k = 1, 2, \dots, n-1,\ X_n = j\}$

$$p_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} P(X_m = j, B_n / X_0 = i)$$

$$P(X_m = j, B_n / X_0 = i) = \frac{P(X_m = j, B_n, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \overbrace{P(X_m = j / B_n, X_0 = i)}^{P(X_m = j / X_n = j)} \frac{P(B_n, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$\overset{\text{homogeneidade}}{=} \quad p_{jj}(m-n)\, f_{ij}(n)$$

$$p_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} p_{jj}(m-n)\, f_{ij}(n)$$

$s^m \qquad s^{m-n} \qquad \cdot s^n$

$$p_{ij}(m) = \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n)\, p_{jj}(m-n)$$

$\times\, s^m$

$$p_{ij}(m)\, s^m = \sum_{n=1}^{m} p_{jj}(m-n)\, s^{m-n} \quad , m \geq 1$$

$$p_{ij}(m)\, s^m = \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n)\, s^n\, p_{jj}(m-n)\, s^{m-n}$$

?

$$\sum_{m \geq 1} p_{ij}(m)\, s^m = \sum_{m \geq 1} \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n)\, s^n\, p_{jj}(m-n)\, s^{m-n}$$

$+$

$p_{ij}(0)\, s^0 - p_{ij}\, s^0$

$P_{ij}(s) - \delta_{ij}$

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n=1}^{m} f_{ij}(n) s^n \, p_{jj}(\overset{k}{\overbrace{m-n}}) s^{m-n} =$$

$f_{ij}(0) \equiv 0$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{ij}(l) s^l \, p_{jj}(k) s^k$$

$$f_{ij}(s) \, p_{jj}(s) \quad \boxtimes$$

$$p_{ij}(s) = \delta_{ij} + f_{ij}(s) \, p_{jj}(s)$$

$$p_{jj}(s)[1 - f_{ij}(s)] = \delta_{ij}$$

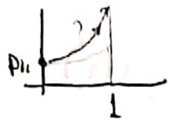
$(i = j)$

$$p_{ij}(s) = \frac{1}{1 - f_{jj}(s)}$$

$(i \neq j)$

$$p_{ij}(s) = f_{ij}(s) \, p_{jj}(s)$$

$$p_{ii}(s) = \sum_{n \geq 0} p_{ij}(n) s^n$$



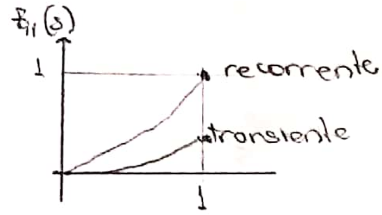
$p_{ii}(0) = p_{ii}$

$p_{ii}(1) = \sum_{n \geq 0} p_{ii}(n)$

$f_{ii}(s) = \sum_{n \geq 0} f_{ii}(n) s^n$

$$f_{ii}(1) = \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n) = f_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{se recorrente} \\ < 1 & \text{se transiente} \end{cases}$$

$F(s) = \sum a_n s^n, \ a_n \geq 0.$



$$p_{ii}(s) = \frac{1}{1 - f_{ii}(s)}$$

$\downarrow$

∞ se i recorrente

$< \infty$ se i transiente

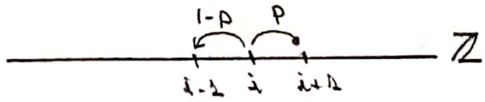
Teorema de Abel

Critério:

i recorrente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty$

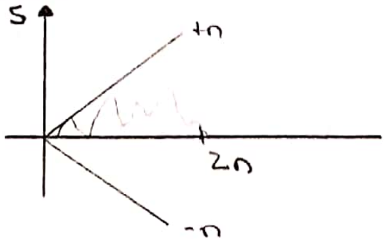
i transiente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) < \infty$

Exemplo: Passeio Aleatório.



Origem: transiente ou recorrente?

$$\sum_{n \geq 1} p_{0,0}(2n)$$



$(p_{00}(2n+1) = 0, \forall n)$

$$p_{00}(2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Aproximação de Stirling

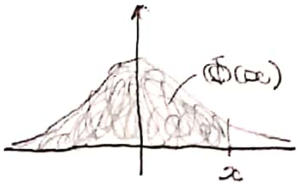
$$\frac{n!}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \qquad n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

Demonstração usando TCL.

TCL: Se $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. com

$$EX_1 = \mu \quad e \quad Var(X_1) = \sigma^2$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$



Aplicando TCL

$X_1 \sim Poisson(\lambda = 1)$ $\quad i = 1, 2, \ldots$ i.i.d

$X_1 + X_2 \sim \underbrace{Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)}_{exercício}$

Obs: Poisson(λ)

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0 \qquad E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

$X \sim Bin(n, p)$

$n \to \infty, \quad pn = \lambda$

Se $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $X_i \sim Poisson(\lambda = 1)$ $\quad \mu = 1, \sigma^2 = 1$

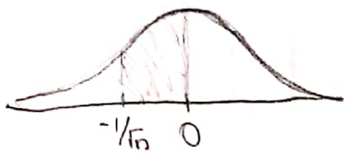
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(n)$

TCL.

$$\mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum X_i - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \to \Phi(x)$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n\right) = \frac{e^{-n}n^n}{n!}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n\right) = P\left(n - 1 < \sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \approx \phi(0) - \phi(-1/\sqrt{n})$$



$$\approx \Phi(0) - \Phi(-1/\sqrt{n}) \approx 1/\sqrt{2\pi n} \quad \therefore \Rightarrow n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

Voltando ao passeio aleatório

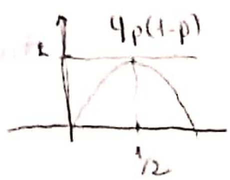
$$\sum_{n \geq 1} p_{0,0}(2n)$$

$$p_{00}(2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n})^2} = \frac{e^{-2n}\, 2^{2n}\, n^{2n}\, 2\sqrt{\pi n}}{e^{-2n}\, n^{2n}\, 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$p_{00}(2n) \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n$$

$$\sum_{n \geq 1} p_{00}(2n) \sim \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$



$\alpha = 4p(1-p) < 1$

- $p \neq 1/2$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty \leq \sum_{n \geq 1} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} < \infty \quad \text{origem é transiente.}$$

- $p = \frac{1}{2}$ $\quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow$ origem é recorrente.

Aula 06

10/09

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ enumerável

Markov

Homogênea

$\mathbb{P}$. matriz de transição

conjunto de medidas de probabilidade em $\mathcal{P}$

conjunto de funções em $S = \mathcal{F}$

Distribuição: Medida estacionária

$$\pi \in \mathcal{P} : \pi = \pi \mathbb{P}$$

ou seja,

$$\pi(j) = \sum_{i \in S} \pi(i) p_{ij} = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) p_{ij} + \pi(j) p_{jj} \Leftrightarrow$$

$$\pi(j)(1 - p_{jj}) = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) p_{ij} \qquad \text{(eq. de balanceamento)}$$

Classificação dos Estados de Uma Cadeia de Markov

$i \in S \longrightarrow$ recorrente = "retorna com prob. 1"

transiente = "pode não retornar"

$f_{ij}(n)$. $\quad f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n) \; p_{ij}(n)$

Vimos.

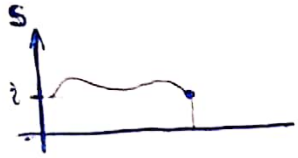
i é recorrente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty$

i é transiente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) < \infty$

Tempo Médio de Retorno

$$\mu_i = E[T_i / X_0 = i]$$

T_i = "instante da primeira visita" $= \min\{n \geq 1; X_n = i\}$



$$\mu_i = \sum_{n \geq 1} n f_{ii}(n)$$

Se i transiente $\Rightarrow \mu_i = \infty$

i recorrente $\Rightarrow \mu_i < \infty$ recorrente positivo

$\mu_i = \infty$ recorrente nulo

$i \leftrightarrow j$ (i e j se comunicam) $\equiv \exists n \geq 0 \quad p_{ij}(n) > 0$

$\exists m \geq 0 \quad p_{ji}(m) > 0$

$i \leftrightarrow$ é uma "relação de equivalência"

1) $i \leftrightarrow i$ (reflexiva)

2) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$ (simétrica)

3) transitiva. Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$ então $i \leftrightarrow k$.

Esta relação define uma <u>partição</u> (disjunta) em S.

$S = \bigcup_n S_n$ t.q. $i, j \in S_n \Rightarrow i \leftrightarrow j$

$i \in S_n,\ j \in S_m,\ n \neq m \Rightarrow i \not\leftrightarrow j$.

Definição: Se apenas um dos subconjuntos é não vazio esta cadeia é dita irredutível

Lema. Dentro da mesma classe irredutível, todos os estados são do mesmo tipo.

Periodo de um estado. $i \in S$, $d(i) = \text{mdc}\{n; p_{ii}(n) > 0\}$

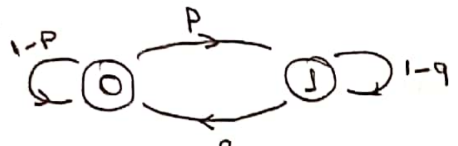
"Só posso retornar em múltiplos do período".

Lema. Se i e j estão na mesma classe irredutível, então $d(i) = d(j)$.

Teorema. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S contável irredutível então existe dist. estacionária única se e somente se a cadeia for recorrente positiva. Neste caso,

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$$

Exemplo concreto:



$\pi_0 = E[T_0 / X_0 = 0]^{-1}$

T_0	Prob.
1	$1-p$
2	pq
3	$p(1-q)q$
$\vdots$	
n	$p(1-q)^{n-2}q$

$$\mu_0 = (1-p) + \sum_{n\geq 2} n\, p(1-p)^{n-2} q \overset{*}{\Leftrightarrow} \mu_0 = (1-p) + pq\left(\frac{1}{(1-1+q)^2} + \frac{1}{(1-1+q)}\right) =$$

$$= (1-p) + pq\left(\frac{1+q}{q^2}\right) = (1-p) + \frac{p(1+q)}{q} = \frac{q(1-p)+p(1+q)}{q} = \frac{q+p}{q} = \frac{1}{\pi(0)}$$

$$* \sum_{n\geq 2} n\alpha^{n-2} = \sum_{l\geq 0}(l+2)\alpha^l = \sum_{l\geq 0}(l+1)\alpha^l + \sum_{l\geq 0}\alpha^l = \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha|<1.$$

Teorema Limite: Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é irredutível e aperiódica ($d(i)=1, \forall i \in S$) então

$$\lim_{n\uparrow\infty} p_{ij}(n) = \pi(j)$$

Obs: Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S for periódica $(d = d(i) > 1, i \in S)$

$$\lim_{n\uparrow\infty} p_{ij}(nd) = \frac{d}{\mu_i} \qquad (?)$$

12/09 **Aula 07**

π reversível $\Rightarrow$ π estacionária

$$\pi(j)(1-p_{jj}) = \sum_{\substack{i\in S\\ i\neq j}} \pi(i)\, p_{ij}$$

$$\Uparrow$$

$$\pi(i)\, p_{ij} = \pi(j)\, p_{ji} \qquad \text{(Balanceamento detalhado)}$$

17/09 **Aula 08**

Teorema: Se $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em S enumerável é uma cadeia de Markov irredutível, então

1. Existe uma distribuição estacionária π se e somente se esta cadeia for recorrente positiva.
2. Neste, π é única e dada por

$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i}$$

onde $\mu_i = E[T_i / X_0 = i]$, $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.

Demonstração:

Fixo $k \in S$, e seja

$p_i(k)$ = "número médio de visitas ao estado i entre duas sucessivas visitas ao estado k"

$(p_0(k), p_1(k), \ldots) = p(k)$ vetor em S

$$\rho_i(k) = E[N_i / X_0 = k] \quad , \quad N_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{X_n = i,\, T_k \geq n\}}$$

visita ao estado i · não retornei

Obs: $\rho_k(k) = 1$

$$\rho_i(k) = \sum_{n \geq 1} \overbrace{P(X_n = i,\, T_k \geq n / X_0 = k)}^{l_{ki}(n)}$$

Obs: $T_k = \sum_{i \in S} N_i$

$$\mu_k = E[T_k / X_0 = k] = \sum_{i \in S} E[N_i / X_0 = k] = \sum_{i \in S} \rho_i(k)$$

Lema. Para todo $k \in S$

1. $\rho_i(k) < \infty$ 2. $\rho(k) = \rho(k)\mathbb{P}$

Demonstração:

1. $p_{ik}(n) = \sum_{n \geq 1} l_{ki}(n)$

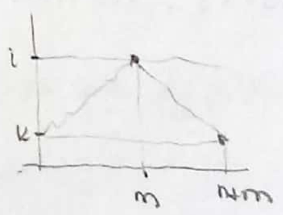
$$l_{ki}(n) = P(X_n = i,\, T_k \geq n / X_0 = k)$$

Mas

$$f_{kk}(m+n) \geq l_{ki}(m) f_{ik}(n)$$

Então,

$$l_{ki} \leq \frac{f_{kk}(\bar{n}+m)}{f_{ik}(\bar{n})} \quad , \forall\, m \geq 1$$



$\exists\, \bar{n} : p_{ik}(\bar{n}) > 0$ pois a cadeia é irredutível

Daí,

$$\rho_i(k) = \sum_{m \geq 1} l_{ki}(m) \leq \sum_{m \geq 1} \frac{f_{kk}(\bar{n}+m)}{f_{ik}(\bar{n})} \leq \frac{1}{f_{ik}(\bar{n})} < \infty$$

Logo, $\rho_i(k) < \infty \ \forall\, k \in S$.

2. $p_i(k) = \sum_{n \geq 1} l_{ki}(n)$

$l_{ki}(1) = P(X_1 = i, T_k \geq 1 / X_0 = k) = p_{ki}$

$l_{ki}(n) = P(X_n = i, T_k \geq n / X_0 = k)$

$$l_{ki}(n) = \sum_{j \neq k} P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n / X_0 = k) =$$

$$= \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-1)\, p_{ji}, \; n \geq 2$$

Assim,

$$p_i(k) = p_{ki} + \sum_{n \geq 2} \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-1)\, p_{ji} =$$

$$= 1 . p_{ki} + \sum_{j \neq k} \Big(\underbrace{\sum_{n \geq 2} l_{kj}(n-1)}_{p_j(k)} \Big) p_{ji}$$

$$= \sum_{j \in S} p_j(k)\, p_{ji} \quad \forall k \in S$$

$\forall k \in S$,

$$p(k) = p(k)\, \mathbb{P}$$

Pergunta: Posso normalizar? $\pi(i) = \dfrac{p_i(k)}{\mu_k}$, já que $\sum_{i \in S} p_i(k) = \mu_k$

A existência de uma medida estacionária implica $\pi(i) = 1/\mu_i$

Tome X_0 com distribuição π : $P(X_0 = i) = \pi(i)$

Fixo j,

$$\pi(j)\, \mu_{jj} = \underset{\uparrow\, P(X_0=j)}{\pi(j)}\, E[T_j / X_0 = j] = \pi(j) \sum_{n \geq 1} P(T_j \geq n / X_0 = j) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{P(T_j \geq n, X_0 = j)}_{a_n}$$

$\sum_{n \geq 1} P(T_j \geq n / X_0 = j)$

$a_1 = P(T_j \geq 1, X_0 = j) = \pi(j)$

$a_n = P(T_j \geq n, X_0 = j)$

$$a_n = P(\overset{A}{X_0 = j}, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j) =$$

$$= P(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j) - P(X_0 \neq j, X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j) =$$

$$= b_{n-1} - b_n$$

$$b_n = P(X_0 \neq j, X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j)$$

$$b_1 = P(X_1 \neq j) = 1 - \pi(j)$$

$$\pi(j)\mu(j) = a_1 + a_2 + \ldots \qquad = \lim_{N \uparrow \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n =$$

$$= \pi(j) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots$$

$$= \lim_{N \uparrow \infty} \left[\pi(j) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{N-1} - b_N) \right] = \pi(j) + b_1 - \overset{\searrow 0}{b_N}$$

- $\pi(i)\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \uparrow \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n}_{\alpha_n}$

$b_N = P(X_n \neq j, n = 1, \ldots, N) \underset{N \uparrow \infty}{\searrow} 0$ irredutível

$$\pi(j)\mu_j = \pi(j) + \underset{(1-\pi_j)}{b_1} = 1 \Rightarrow \quad \pi(j) = \frac{1}{\mu_j}$$

19/09 Aula 09

Na aula passada:

Teorema: $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em S contável.

irredutível

1. $\exists$ dist. estacionária $\Leftrightarrow$ cadeia for recorrente positiva
2. Neste caso, $\pi(i) = 1/\mu_i$, onde μ_i é o tempo médio de retorno.

Teorema Limite. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ em S contável

Se for aperiódica, irredutível

$$p_{ij}(n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \frac{1}{\mu_j}$$

"perda assintótica de memória"

Demonstração:

$Z_n = (X_n, Y_n)$ "Acoplamento"

Par de cadeias de Markov com mesmo $\mathbb{P}$

Suponha X_n e Y_n independentes

Matriz $\mathbb{P}^z$

$P(Z_1 = (k, l) \mid Z_0 = (i, j)) \overset{\text{acoplamento}}{=} p_{ik}\, p_{jl}$

X_n irredutível e rec positivo

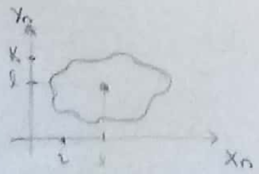
Z_n irredutível se X_n aperiódica

Ex X_n passeio aleatório

se começar no $(0,0)$, vou só pra pontos cuja soma das coordenadas é par (Z_n)

$\pi^z(i,j) = \pi(i)\pi(j)$ é estacionária $\Rightarrow$ Z recorrente positivo

$Z_0 = (i, j)$



...

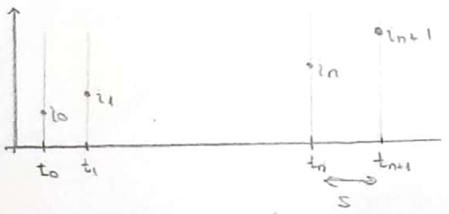
Cadeia de Markov em Tempo Contínuo

Construção de Uma Cadeia de Markov Em Tempo Contínua

1. Para cada $i \in S$, associo $q_i \geq 0$ parâmetros dos sucessivos tempos de permanência no estado i, cuja distribuição é exponencial.

2. Ao término de cada tempo de permanência em i, decido para qual estado saltar conforme uma cadeia de Markov em tempo discreto com probabilidade de de transição $\mathbb{P}$.

23/09 Aula 10



Se $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = t < t+s$, $s > 0$. e

$i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j$ sendo estados quaisquers

Então,

$$P(X_{t+s} = j / X_{t_0} = i_0, \dots, X_t = i) \overset{\text{Markov}}{=} P(X_{t+s} = j / X_t = i) \overset{\text{Homogêneo (no tempo)}}{=}$$

$$= P(X_s = j / X_0 = i)$$

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i)$$

$$(\mathbb{P}(t))_{ij} \equiv P_{ij}(t)$$

↳ matriz de transição no intervalo t

$\mathbb{P}(t)$, $t \geq 0$

$P(0) = \mathbb{1}$ = matriz identidade, pois $(\mathbb{P}(0))_{ij} = P(X(0) = j / X(0) = i) = \delta_{ij}$

Definição: Cadeia Irredutível.

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ em S é irredutível se, para todo i,j em S, existem t e $s \geq 0$ tal que

$$p_{ij}(t) > 0 \quad e \quad p_{ji}(s) > 0$$

* Seja $P(X_0 = i) = \pi_0(i)$ (π_0 é a dist. inicial da cadeia), então

$$\pi_t(j) = P(X(t)=j / \pi_0) =$$

$$= \sum_{i \in S} P(X(t)=j / X(0)=i)\, \pi_0(i) =$$

$$= \sum_{i \in S} p_{ij}(t)\, \pi_0(i) \Rightarrow$$

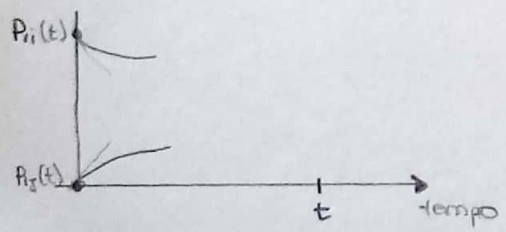
$$\pi(t) = \pi_0 \mathbb{P}(t).$$

Definição. π é dita uma dist. estacionária se

$$\pi = \pi \mathbb{P}(t), \quad t \geq 0$$

Vamos estudar $(\mathbb{P}(t))_{ij}$.

$$(\mathbb{P}(t))_{ij} = p_{ij}(t) = P(X(t)=j / X(0)=i)$$



$$q_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t)\Big|_{t=0} = \text{"taxa" (vel. de trans. de } i \text{ para } j)$$

Definição. Matriz de taxas $\mathbb{L}$.

$$(\mathbb{L})_{ij} = q_{ij}$$

26/09 **Aula 11**

Equação de Balanceamento

$$\pi = \pi \mathbb{P}(t), \ \forall t$$

derivo nos dois lados,

$$\pi(j) = \sum_i \pi(i) P_{ij}(t) \quad j \in S$$

$$\forall j \in S \quad 0 = \sum_i \pi(i) q_{ij} \equiv 0 = \pi \mathbb{L}$$

Daí,

$$0 = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} + \overbrace{\pi(j) q_{jj}}^{\leq 0}$$

Seja $q_{jj} = -q_j$.

$$-\pi(j) q_{jj} = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\pi(j) q_j = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij}, \ \forall j \in S.$$

...

Aula 11

26 de setembro de 2013

Resumo da Aula:

Revisão Aula 10

Equação de Balanceamento: $\forall j \in S, \sum_{i \in S} \pi(i) q_{ij} = 0 \Rightarrow \pi(j) q_j = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij}$.

Interpretando as taxas: $P_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$; $P_{jj}(t) = 1 - q_j(t) + o(t)$

$P_{ij}(t) = q_i Q_{ij} t + o(t)$, $P_{ii}(t) = 1 + q_{jj}(t) + o(t)$

$-q_j = q_{jj}$

. Construção da Cadeia.
1) $i \in S \to q_i$ parâmetros das exp. de per. em $i \in S$
2) Q = matriz de trans. ao término de um período de permanência

Fila M/M/1. $\pi(n) = (1 - \lambda/\mu)(\lambda/\mu)^n$

Vale os dois Teoremas..

1. Se a cadeia é irredutível existe distribuição estacionária se e somente se for recorrente positiva e $\pi(i) = 1/\mu_i$ (π é único)
2. $P_{ij}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \pi(j)$, $\forall i, j$.

$(X_t)_{t\geq 0}$ em S contável. $(P(t))_{ij} = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i)$; $P(0) = \mathbb{1}$; $P(s+t) = P(s)P(t)$

π é dist. est. se $\pi = \pi P(t)\ \forall t \geq 0$; $q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t)\Big|_{t=0}$

$$\pi = \pi P(t), \forall t \Rightarrow \pi(i) = \sum_{j\in S}\pi(j)P_{ji}(t) \overset{d/dt}{\Leftrightarrow} 0 = \sum_{j\in S}\pi(j)q_{ji} \Leftrightarrow \pi(j)q_j = \sum_{\substack{i\in S \\ i\neq j}}\pi(i)q_{ij}\ \forall j\in S.$$

• $\pi(j)q_j$ é a prob. de ter saindo de j, para $t>0$. q_j é a taxa de variação de $P_{jj}(t)$. Daí, estando em $\pi(j)$.

• $\pi(j)q_j h \approx$ prob. de
1. Estar a cadeia em j
2. Presenciar um salto p/ fora de j, num int. de tempo h

• $\pi(i)q_{ij} h \approx$ 1. Prob. estar em i
2. Ver salto de i p/ j no tempo h

Aula 12

08 de Outubro de 2013

Resumo da Aula:

Revisão Aula 11

Equações de Kolgomorov

- Condicionando na primeira coisa que aconteceu:

  $\Rightarrow P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t)$, i.e, $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{L}\,\mathbb{P}(t)$ equação retrógrada

- Condicionando no último salto:

  $\Rightarrow P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) q_{kj}$, i.e., $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L}$ equação adiantada

- $\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}}$

- Processo de Poisson

$$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_{0j}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$$

X_t em S contável; $P_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$ $\quad P_{ij}(t) = \begin{cases} q_{ij}\, t + o(t) = q_i\, Q_{ij}\, t + o(t), & i \neq j \\ 1 + q_{ii}\, t + o(t) = 1 - q_i\, t + o(t), & \end{cases}$

Aula 13

15 de Outubro de 2013

Resumo da Aula:

- Revisão Aula 12. $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{L}\,\mathbb{P}(t)$; $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L}$

  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

- Seleção de um Processo de Poisson.

  $N(t) \sim$ P. de Poisson (λ) , $N(t) = \underbrace{\overset{p}{N_I(t)} + \overset{1-p}{N_{II}(t)}}_{\text{Independentemente}}$. Daí, $N_I(t) \sim PPP(\lambda p)$

  $N_{II}(t) \sim PPP(\lambda(1-p))$

- Probabilidade Condicionais no Processo de Poisson

  $f(s) = \mathbb{P}(N(s) \geq 1 \,/\, N(t) = 1) = s/t$. $T_1 \,|\, \{N(t) = 1\} \sim U(0,t)$

Agora,

$T_1 \,/\, \{N(t) = n\} \sim$ Primeira estatística de ordem de n uniformes independentes no intervalo $(0,t]$.

$$P(N_1(t)=k) = \sum_{n\geq k} P(N_1(t)=k, N(t)=n) = \sum_{n\geq k} P(N_1(t)=k / N(t)=n)\, P(N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \overset{k = \text{fixo}}{=} \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k!}$$

Aula 14

22 de Outubro de 2013

Resumo da Aula:

- Encontrando $P_{00}(t)$ para uma CMTC com $S=\{0,1\}$
  - $P_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \rightarrow \pi(0)$ • Usando $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L}$

  - Encontrando $\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}}$.

$$e^{t\mathbb{L}} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \mathbb{L}^n}{n!}, \quad \mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}^n, \quad \mathbb{L} = B \Lambda B^{-1}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -(\mu+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\mathbb{P}(t) = \frac{1}{\mu+\lambda} \begin{bmatrix} \mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} & \lambda - \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} \\ \mu - \mu e^{-(\mu+\lambda)t} & \lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t} \end{bmatrix}$$

- Processo de Yule. $P_{0n}(t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n$

- Teorema: A distribuição de $T_1, T_2, \dots, T_n$ dado $N(t)=n$ é a distribuição das n estatísticas de ordem com distribuição uniforme $U(0,t)$.

- Processo de Poisson Composto. Seja $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ v.a. i.i.d. e $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

$$\phi_X(\omega) = E[e^{\omega X(t)}] = E[e^{\omega \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}] = \sum_{n\geq 0} E[e^{\omega \sum^{N(t)} Y_i} | N(t)=n]\,\mathbb{P}(N(t)=n) = e^{\lambda t[\phi_Y(\omega)-1]}$$

$EX(t) = \lambda t EY$, $Var(X(t)) = \lambda t EY^2$

Aula 15

22 de Outubro de 2013

Resumo da Aula:

- Processo de Renovação (Explicação)
- Estudo inicial de $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$
- Definição da Função de Renovação: $m(t) = E(N(t))$
- Lema: $m(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$.
- Lema: $m(t) < \infty$, $\forall t$.
- Teorema: $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$.
- Enunciado do Teorema Elementar da Renovação: $\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \frac{1}{\mu}$
- Definição. (Tempo de Parada).
- Equação de Wald. Se $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é uma coleção i.i.d. com $EX_i = \mu < \infty$ e N é um tempo de parada com $EN < \infty$, então

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N].E[X_i]$$

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. com dist. F não-arit. e com $P(X_i \geq 0) = 1$. $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ...

$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$. Como $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{LGN} \mu$, então $N(t) < \infty$. Mas $\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$

$P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$

$m(t) = E(N(t))$

Faço $E(N(t)) = E\left(\sum_{n\geq 1} 1\!\!1_n\right) \overset{T.C.M.}{=} \sum_{n \geq 1} E(1\!\!1_n) = \sum_{n\geq 1} E(1\!\!1_{\{T_n \leq t\}}) = \sum_{n\geq 1} P(T_n \leq t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t)$

Se $P(X_n > 0) > 0 \Rightarrow \exists \alpha.\ \underbrace{P(X_n > \alpha)}_{P} > 0$. Construo o Processo de Ren. t.q. $\tilde{X}_i = \begin{cases} 0, & X_i < \alpha \\ \alpha, & X_i \geq \alpha \end{cases}$. Daí,

$m(t) \leq \tilde{m}(t) = \left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil \cdot \frac{1}{p} < \infty \Rightarrow m(t) < \infty, \forall t.$

Noto que $T_{N(t)} \leq t \leq T_{N(t)+1}$

Daí, $\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{(N(t)+1)} \frac{(N(t)+1)}{N(t)} \overset{\substack{N(t)\to\infty \\ t\to\infty}}{\Rightarrow} \mu \leq \frac{t}{N(t)} \leq \mu \cdot 1 \Rightarrow \frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$

Ainda não provado.

É preciso definir tempo de parada.

Seja $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. Uma v.a. $T \in \mathbb{N}$ é dita um tempo de parada com relação à $\{X_i\}_{i\geq 1}$ se $\{T = n\}$ é um evento indep. de $\{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\}$.

Considero $1\!\!1_n = \begin{cases} 1, & N \geq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$. Daí, $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[\sum_{n\geq 0} 1\!\!1_n X_i\right] \overset{T.C.M.}{=} \sum_{n\geq 0} E(1\!\!1_n X_i) = \sum_{n \geq 0} E(1\!\!1_n) E(X_i) =$

$= E(X_i) \sum_{n\geq 0} E(1\!\!1_n) = E(X_i) \sum_{n\geq 0} P(N \geq n) = E(X_i) E(N)$.

Aula 16

24 de Outubro de 2013

Resumo da Aula:

- Revisão Aula 15

- Teorema Elementar de Renovação:

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu}$$

- Parte 1 da Prova: Mostrar que $\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$.

- Parte 2 da Prova: Mostrar que $\overline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$.

- Comentários $\dfrac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \longrightarrow N(0,1)$

- Definiu convolução de funções e falou de suas propriedades.

- Mostrou que $N(t)+1$ é um tempo de parada.

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. $X_i \geq 0$; $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$; $m(t) = E(N(t))$. $\begin{cases} X \sim F \text{ não-aritmética} \\ \text{e } P(X_i > 0),\ EX_i = \mu \end{cases}$

A taxa com que varia o nº esperado de renovações é, no limite, igual à $1/\mu$.

. Mostramos que $(N(t)+1)$ é tempo de parada. Com isso, $t < T_{N(t)+1} \Leftrightarrow t \leq E(T_{N(t)+1}) \Rightarrow$
$t \leq E[\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_i] \underset{E(N(t)+1) \text{ é finito}}{\overset{\text{Eq. Wald}}{\Leftrightarrow}} t \leq (m(t)+1)\mu \Leftrightarrow m(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1 \Leftrightarrow \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}, \forall t \Leftrightarrow$

$\lim_{t\uparrow\infty} \frac{m(t)}{t} = 1/\mu$

. Agora, usamos um Processo de Ren. truncado e a idéia de acoplamento. Def. $\bar{X}_i = \begin{cases} X_i, \text{ se } X_i \leq M \\ M, \text{ c.c} \end{cases}$.
$\bar{N}(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq t\}$. Daí, $\bar{m}(t) = E(\bar{N}(t)) \geq m(t)$. Nessa const., $T_{\bar{N}(t)} \leq t \leq T_{\bar{N}(t)+1}$, e
$T_{\bar{N}(t)+1} = \underbrace{T_{\bar{N}(t)}}_{\leq t} + \underbrace{X_{\bar{N}(t)+1}}_{\leq M} \leq t + M$. Daí, $E[T_{\bar{N}(t)+1}] \leq t + M \Rightarrow \frac{\bar{m}(t)}{t} \leq \frac{1}{\bar{\mu}_M} + \frac{M}{t\bar{\mu}} - \frac{1}{t}, \forall t, \forall M$. Rgo $M \uparrow 0$,
e constato que $\lim_{t\uparrow\infty} \frac{m(t)}{t} = 1/\mu$.

Comentário: essa prova será vista na aula 17.
$(N(t) - t/\mu) / \sqrt{t\sigma^2/\mu^3} \sim N(0,1)$

Se F e G são f. posit. e n. decrescentes (com dens.) $(F * G)(t) = \int_0^t F(t-s)\,dG(s)$. Vale $F*G = G*F$
$(F*G)*H = F*(G*H)$
...

Basta notar que $\{N(t)+1 = n\} \Leftrightarrow \{N(t) = n-1\}$ que obriga $X_n > t - T_{n-1}$, i.e. ñ dep. de $\{X_{n+1}, \dots\}$

Aula 17

31 de Outubro de 2013

Resumo da aula:

- Resumo Aula 16

- Resultado. $\dfrac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \underset{t\uparrow\infty}{\Rightarrow} N(0,1)$

- Equação de Renovação: $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x)$

$$\equiv (m = F + m * F)$$

- Começando a Considerar o Problema do Ônibus.
  Obtemos a equação tipo-renovação: $f = H + f * F$

- Solução de $f = H + f * F$: $f = H + H * m$.

- Voltando para $E(t)$. $P(E(t) > y) \underset{t\uparrow\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \int_0^\infty \dfrac{\bar{F}(x+y)}{\mu}dx = \dfrac{1}{\mu}\int_0^\infty 1 - F(x+y)\,dx$

(*)
- Teorema de Blackwell. $m(t+h) - m(t) \underset{t\uparrow\infty}{\longrightarrow} \dfrac{h}{\mu}$, ou seja, $dm \approx \dfrac{dx}{\mu}$

(*)
- Teorema Chave de Renovação: $\int_0^t h(t-x)\,dm(x) \overset{(*)}{\longrightarrow} \int_0^\infty h(x)\,\dfrac{dx}{\mu}$

- Processo de Renovação Alternante. $P(t) = \dfrac{EZ}{EZ + EY}$

$\{X_i\}_{i\geq 1}$, $X_i \geq 0$ i.i.d. F; $EX_i = \mu$, $Var X_i = \sigma^2$; $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$; $m(t) = E[N(t)]$ $\quad \frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$, $\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \sim N(0,1). \quad P\Big(N(t) \leq \underbrace{\frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}}_{a_t}\Big) = P(T_{a_t} > t) = P\Big(\frac{T_{a_t} - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}} > \underbrace{\frac{t - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}}}_{=-y}\Big) = 1 - \phi(-y) = \phi(y)$$

$$m(t) = E[N(t)];\ E[N(t)] = E[\underbrace{E(N(t)/X_1)}] = \int_0^t 1 + m(t-x)\,dF(x) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x) = F + (m * F)$$

$$E(N(t)/X_1) = \begin{cases} 1 + m(t-x), & se\ x \leq t \\ 0 & se\ x > t \end{cases}$$

Seja $E(t)$: t. a partir de t até a próx. ren. $P(E(t) > y) = E[\mathbb{1}_{\{E(t) > y\}}] = E[\underbrace{E(\mathbb{1}_{\{E(t)>y\}}/X_1)}]$ =

$$= \int_0^t P(E(t-x) > y)\,dF(x) + \underbrace{\int_{t+y}^{\infty} dF(x)}_{H(t)} = H(t) + (f * F)(t) \Rightarrow f = H + f * F.$$

$$E(\mathbb{1}_{\{E(t)>y\}}/X_1) = \begin{cases} P(E(t-x) > y), & se\ x \leq t \\ 0 & , se\ x \in (t, t+y) \\ 1 & , se\ x > t+y \end{cases}$$

. Se $f = H + H * m$ então $f * F = H * F + H * m * F = H * (F + \overbrace{m * F}^{m}) = H * m \Rightarrow f = H + f * F = H + H * m$

Daí, $f(t) = P(E(t) > y) = H + H * m = 1 - F(t+y) + \int_0^t \bar{F}(t+y-x)\,dm(x) \to \int_0^t \bar{F}(x-y)\,\frac{dx}{\mu}$

D $\qquad t - (x-y)$

$m(t+h) - m(t) \to h/\mu$

acopl. e mostrar q. vai p/ mesma coisa

on off on off

Z_1 Y_1 Z_2 Y_2

"on" Z_i $\quad (Z_i, Y_i)$ ind.

"off" Y_i $\quad Z_i$ e Y_i podem ser dep.

$X_i \sim F = F_Z * F_Y$

$X_i = Z_i + Y_i$ $\quad Z_i \sim F_Z$

$Y_i \sim F_Y$

$P(O(t))$: {sist. func. no inst. t} $= \{O(t)\}$ "on" no inst. t

$P(O(t)) = P(t) = E[P(\text{"on" em } t)/X_1] = \begin{cases} P(t-x), & x \leq t \\ P(Z_1 > t / X_1 = x), & x > t \end{cases}$

$\Rightarrow P(t) = H(t) + (P * F)(t) \Rightarrow P(t) = H(t) + (H * m)(t) \to \frac{E Z}{E Z + E Y}$

Aula 18

05 de Novembro de 2013

Resumo da Aula:

- Revisão Aula 18

- $P(E(t) \leq x) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \int_0^x (1 - F(y)) \frac{dy}{\mu}$

- $P(A(t) > x) = P(E(t-x) > x) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \int_0^t [1-F(y)] \frac{dy}{\mu}$

- Processo de Renovação Com Retardo. $X_1 \sim G$, $X_2, \ldots \sim F$
  Alguns Resultados.

- Processo de Renovação Com Recompensa

- Exemplo da Lotação.

Aula 19

07 de Novembro de 2013

Resumo da Aula

- Revisão Processo de Renovação Com Recompensa.

- Exemplo: "Peter Principle"

- Sistema de Filas.
  1. Clientes chegam 1 a 1
  2. $\exists$ um tempo de parada T tal que o sistema recomeça probabilisticamente a partir de 0".
  3. $Q(t) = \#$ de clientes no sistema no inst. t; $Q(0) = Q(T) = 0$

- $\dfrac{\int_0^t Q(s)\,ds}{t} \longrightarrow \dfrac{ER}{ET} \equiv L =$ "tamanho médio da fila"

- $\dfrac{N(t)}{t} \longrightarrow \dfrac{EN}{ET} \equiv \lambda$ "taxa de chegada de clientes"

- $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n} \longrightarrow \dfrac{ES}{EN} \equiv W$ "tempo médio de perm. de um cliente".

- Teorema: $L = \lambda W$. Exemplo. Fila $M/M/1$

- L_a, W_a, λ_a.

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. Y_i = rec. nom (T_{i-1}, T_i) $\{(X_i, Y_i)\}_{i\geq 1}$ i.i.d. $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$; $\frac{Y(t)}{t} \to \frac{E(Y)}{E(X)}$; $\frac{E(Y(t))}{t} \to \frac{E(Y)}{E(X)}$

Funcionário Comp. e Incapel.

Aula 11

Remoendo o passado:

Cadeia de Markov em tempo contínuo. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ em S contável.

$\{\mathbb{P}(t)\}_{t\geq 0}$

$(\mathbb{P}(t))_{ij} = \mathbb{P}(X(t)=j \,/\, X(0)=i)$ = probab. de estar no estado j no tempo t, dado que a cadeia começou no estado i.

Caso $t=0$, então nenhum tempo teria passado e

$$\mathbb{P}(X(0)=j \,/\, X(0)=i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Isto é, $\mathbb{P}(0) = \mathbb{1}$. (identidade)

Outra propriedade vista foi que

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t) \quad \text{, ou seja}$$

$$\{\mathbb{P}(s+t)\}_{ij} = \sum_{k\in S} \{\mathbb{P}(s)\}_{ik} \{\mathbb{P}(t)\}_{kj}$$

e, de fato,

$$\{\mathbb{P}(s+t)\}_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+s}=j \,/\, X_0=i) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{t+s}=j, X_s=k \,/\, X_0=i) =$$

$$= \sum_{k\in S} \frac{\mathbb{P}(X_{t+s}=j, X_s=k, X_0=i)}{\mathbb{P}(X_0=i)} = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{t+s}=j \,/\, X_s=k, X_0=i)\,\mathbb{P}(X_s=k \,/\, X_0=i) \overset{\text{Prop. Mark}}{=}$$

$$= \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_{t+s}=j \,/\, X_s=k)\,\mathbb{P}(X_s=k \,/\, X_0=i) \overset{\text{homog}}{=} \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_t=j \,/\, X_0=k)\,\mathbb{P}(X_s=k \,/\, X_0=i)$$

$$= \sum_{k\in S} \{\mathbb{P}(s)\}_{ik} \{\mathbb{P}(t)\}_{kj} \Rightarrow \mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t) \quad \blacksquare$$

Outra coisa vista:

Definição. Dist. estacionária π tal que

$$\pi = \pi\, \mathbb{P}(t), \ \forall t \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

A forma (1) não é tão simples dada a dependência de t. No entanto, justo por depender de t, sabemos que cada coordenada de π é uma função de t, que já não se altera com a evolução de t.

Sabemos de (1) que

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \pi_j \{\mathbb{P}(t)\}_{ji} = 1 \Leftrightarrow$$

tomando as derivadas em ordem a t, em ambos os lados,

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \pi_j\, q_{ji} = 0 \quad \text{ou, seja,}$$

$$\pi\, \mathbb{L} = \underset{\sim}{0}$$

com $\mathbb{L}$ a matriz de taxas, sendo $\{\mathbb{L}\}_{ij} = q_{ij}$ e

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} \{\mathbb{P}(t)\}_{ij} \Big|_{t=0} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(t) - P_{ij}(0)}{t}$$

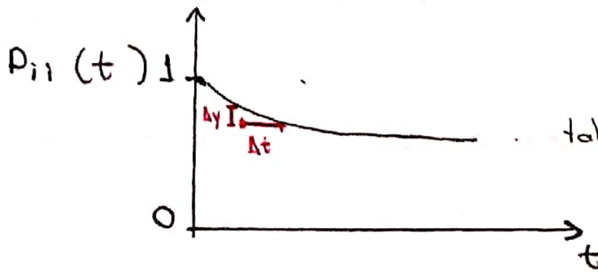
Logo q_{ij} é o incremento médio instantâneo na probabilidade de transição do estado i para o estado j avaliada no instante $t=0$.

Para um melhor "feeling", vamos entender q_{ij} de $P_{ij}(t)$ do ponto de vista geométrico:

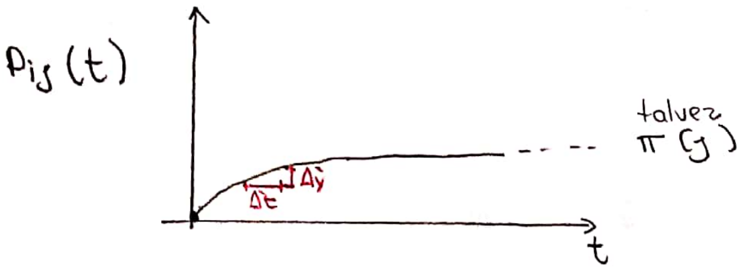
Como já visto antes, sabemos que $\mathbb{P}_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Se $i=j$, a probabilidade de i se manter em i quando t aumenta desresce, já que é natural, que o processo saia de i. Na verdade, $P_{ii}(t)$ é uma função não-crescente

Do mesma forma, concluímos que $P_{ij}(t)$, $i \neq j$ é uma função não-crescente.

ou seja, para $i \neq j$,



q_{ij} é a derivada da da função $P_{ij}(t)$, mas em $t=0$.



De

$\pi \mathbb{L} = 0$, temos

$$0 = \sum_{i \in S} \pi(i) q_{ij} \iff$$

$$0 = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} + \underbrace{\pi(j) q_{jj}}_{\leq 0 \text{ pois } q_{jj} \text{ é negativo}}$$

Seja $q_{jj} = -q_j$. Daí

$$-\pi(j) q_{jj} = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} \quad \text{ou seja}$$

$$\pi(j) q_j = \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq j}} \pi(i) q_{ij} \quad \forall j \in S \qquad (2)$$

sendo então (2) a equação de balanceamento

Em função do que já foi visto, podemos constatar que

$$P_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t) \quad e$$

$$P_{jj}(t) = 1 + q_{jj}t + o(t) = 1 - q_j t + o(t)$$

Ou seja, algo linear em t conf. $t \to 0$.

Daí,

$$q_{ij}t = P_{ij}(t) + o(t) \overset{t \downarrow 0}{\cong} \text{Prob. de ir de } i \text{ à } j$$

$$q_{j}t = 1 - P_{jj}(t) + o(t) \cong \text{Prob. de sair do } j$$

num interv. de tempo peq. pois $o(t) \downarrow 0$

E

$\pi(j) q_j h \approx$ prob. de

1) Encontrar a cadeia em j
2) Presenciar um salto para fora do j, num intervalo de tempo h pequeno

$\pi(i) q_{ij} h \approx$ 1) Prob. de encontrar em i
2) Ver o salto de i para j no tempo h.

Construção Da Cadeia

1. $i \in S \to q_i$ parâmetros das sucessivas exponenciais.
2. Q = matriz de transição ao término do um período de permanência

Aqui, para t pequeno

$$P_{ij}(t) = P(T_i < t, \text{ foi de } i \Rightarrow j) + o(t) \overset{\text{ind.}}{\Leftrightarrow}$$

tocar o rel. rápido

"parâmetro da exp i", e não a taxa

$$P_{ij}(t) = P(T_i < t)\, Q_{ij} + o(t) = q_i Q_{ij} t + o(t) \Rightarrow q_{ij} = q_i Q_{ij}$$

$$P_{jj}(t) = 1 + q_{jj}t + o(t) \Leftrightarrow$$

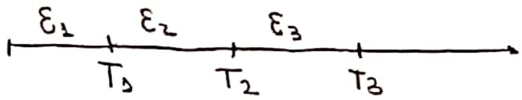
$$\underbrace{1 - P_{jj}(t)}_{\substack{\approx \text{ prob. de} \\ \text{sair de } j \text{ no tempo } t}} = -q_{jj}t + o(t)$$

$$= P(T_j < t) = 1 - e^{-q_j t} = q_j t + o(t) \Rightarrow$$

$$-q_j = q_{jj} \quad //$$

Exemplo. Fila $M/M/1$

- 1 servidor
- Atendimento: suc. atend. são ind. com dist. $\exp(\mu)$
- Chegada de clientes: sem memória



$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ , \ \varepsilon_i \sim \exp(\lambda)$$

Já vimos que

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & , \ j = i+1 \\ \mu & , \ j = i-1 \\ -\lambda-\mu & , \ j = i \\ 0 & , \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Usando a const.

$$i \in S, \quad q_i = \begin{cases} \lambda + \mu & \text{se } i \geq 1 \\ \lambda & , \ \text{se } i = 0 \end{cases}$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu+\lambda} & \text{se } j = i+1 \\ \frac{\mu}{\mu+\lambda} & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } |i-j| \geq 2 \text{ ou } i = j \end{cases}$$

Obs: Vale os dois teoremas anteriores.

1. Se a cadeia é irredutível, existe distribuição estacionária se e somente se for recorrente positiva e

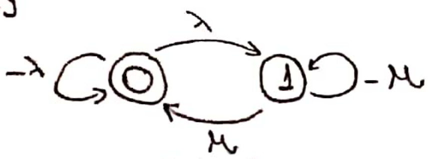
$$\pi(i) = \frac{1}{\mu_i} \qquad (\pi \text{ é única})$$

2. $P_{ij}(t) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \pi(j), \ \forall\, i, j.$

Exemplo:

1. Cadeia de 2 estados

$X_t \in \{0, 1\}$



$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

Construção

$q_0 = \lambda$ (tempo perm. no 0)

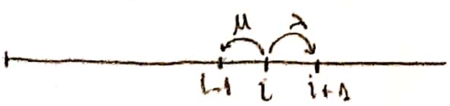
$q_1 = \mu$ (" " " 1)

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(0) $\pi(0)\lambda = \pi(1)\mu \quad \Rightarrow \quad \pi(1) = \lambda/\mu\, \pi(0) \xRightarrow{\pi(0)+\pi(1)=1} \quad \pi(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \ \pi(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

(1) $\pi(1)\mu = \pi(0)\lambda$

2. M/M/1



$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$q_j = \begin{cases} \lambda & \text{se } j=0 \\ \lambda+\mu & \text{se } j \geq 1 \end{cases}$$

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

• Dist. Estacionária

$(i \geq 1)$ $\pi(i)(\lambda+\mu) = \pi(i-1)\lambda + \pi(i+1)\mu$

$(i=0)$ $\pi(0)\lambda = \pi(1)\mu \Rightarrow \pi(1) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(0)$

$(i \geq 1)$

$$\pi(i)\lambda - \pi(i-1)\lambda = \pi(i+1)\mu - \pi(i)\mu$$
$$\lambda\pi(i) - \mu\pi(i+1) = \lambda\pi(i-1) - \mu\pi(i)$$

$(i=1)$ $\lambda\pi(1) - \mu\pi(2) = \lambda\pi(0) - \mu\pi(1) = 0 \Rightarrow$
$$\pi(2) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(1) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi(0)$$

$\vdots$

$\pi(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0)$. Como $\sum_{n\geq 0} \pi(n) = 1$, segue

$\pi(0) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty$ se $\lambda \geq \mu$ $= \pi(0) . \frac{1}{1-\lambda/\mu} = \pi(0) \frac{\mu}{\mu-\lambda}$

Daí,

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \blacksquare$$

A dist. estacionária é a geométrica.

Aula 12

Da aula passada,

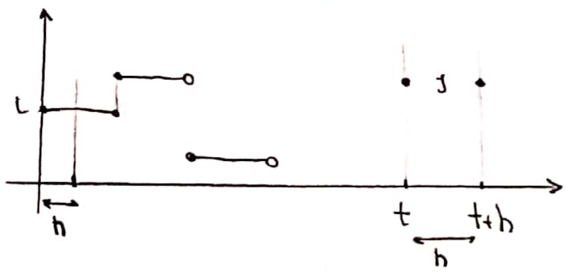
X_t em S contável

$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i)$

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} q_{ij} t + o(t) = q_i Q_{ij} t + o(t), & i \neq j \\ 1 + q_{ii} t + o(t) = 1 - q_i t + o(t) \end{cases}$$

$\mathbb{L}$ = matriz de taxas, com $q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$

Now, let's go learn about Kolgomorov's Equations.



(Chapman-Kolgomorov)

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P(X_{t+h} = j / X_h = k, X_0 = i) = \sum_{k \in S} P_{ik}(h) P_{kj}(t)$$

$$= P_{ii}(h) P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) = (1 - q_i h + o(h)) P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} (h q_{ik} + o(h)) P_{kj}(t)$$

Logo,

$$P_{ij}(t+h) = P_{ij}(t) - q_i P_{ij}(t) h + h \sum_{k \neq j} q_{ik} P_{kj}(t) + o(h) \Leftrightarrow$$

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{ik} P_{kj}(t) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0}$$

$$\frac{d}{ds} P_{ij}(s) \Big|_{s=t} = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \Rightarrow$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} P_{kj}(t)$$

Ou seja, matricialmente

$$\mathbb{P}' = \mathbb{L}\mathbb{P} \qquad \text{equação Retrógrada.}$$

E agora, condicionando no último salto,

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(h) =$$

$$= P_{ij}(t) P_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) =$$

$$= P_{ij}(t)\,[1 + \overset{-q_j}{\overbrace{q_{jj}}}\, h + o(h)] + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)[q_{kj} h + o(h)] =$$

$$= P_{ij}(t) + P_{ij}(t) q_{jj} h + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)[q_{kj} h + o(h)] =$$

$$= P_{ij}(t) + P_{ij}(t) q_{jj} h + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} h + \text{“}o(h)\text{”}$$

$\downarrow$

soma de $o(h)$'s pondera das por prob. de chegar em j. Poderia não ser "$o(h)$" mas o é sob certas condições.

Assim,

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = P_{ij}(t) q_{jj} + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \downarrow 0}$$

$$\frac{d}{ds} P_{ij}(s)\Big|_{s=t} = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) q_{kj} \quad \text{, ou matricialmente}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L}, \qquad \text{Adiantada.}$$

Daí,

$$\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}} = e^{t\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & 0 \\ \lambda & -\lambda+\mu & \mu & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 & \cdots & 0 \\ e^{\lambda t} & e^{-(\lambda+\mu)t} & e^{\mu t} & & 0 \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}$$

Obs:

$$e^{x} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{N\to\infty} e^{x} \\ \left(1+\frac{x}{N}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} e^{x} \\ \underbrace{\left(1-\frac{x}{N}\right)^N}_{\text{resolvente}} \xrightarrow{N\to\infty} e^{x} \end{cases}$$

Exemplo: Processo de Poisson

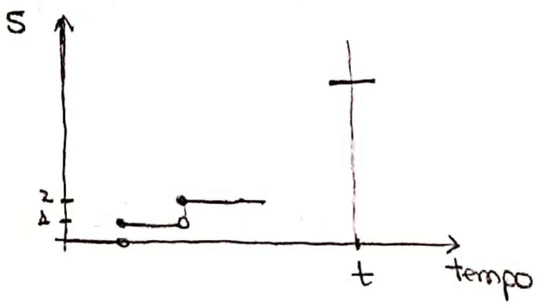
$$\underbrace{\quad}_{\xi_1}T_1\underbrace{\quad}_{\xi_2}T_2 \quad \cdots \quad T_{N_t} \quad t \quad T_{N_t+1}$$

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \,, \quad \xi_i \sim \exp(\lambda) \text{ i.i.d.}$$

N_t = # de eventos no intervalo $(0,t]$

$= \max\{n : T_n \leq t\}$

$X_t = N_t$



1) $i \to q_i = \lambda$

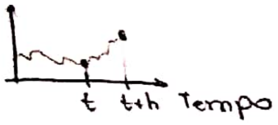
2) $Q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i+1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$N_t \in S = \mathbb{N}$

$P_{ij}(t) = P(N_t = j \,/\, N_0 = i)$

$P_{0j}(t) = P_j(t)$

Vamos refazer o argumento da eq. adiantada de Kolgomorov.



$$P_{0j}(t+h) = \sum_{k \in S} P_{0k}(t) P_{kj}(h) = \sum_{k=0}^{j-1} P_{0k}(t) P_{kj}(h) + P_{0j}(t) P_{jj}(h) \quad , j \geq 1$$

Se $(j = 0)$

$$P_{00}(t+h) = P_{00}(t) P_{00}(h)$$

Se $(j \geq 1)$

$$P_{j-1,j}(h) = \lambda h + o(h)$$

$$P_{j-2,j}(h) = o(h)$$

$$P_{j,j}(h) = 1 + \underbrace{q_{jj}}_{-q_j} h + o(h)$$

$\Rightarrow$

$$P_{0j}(t+h) = P_{j-1,j}(h) P_{0,j-1}(t) + \sum_{0 \leq k \leq j-2} P_{0k}(t) P_{kj}(h) + P_{0j}(t) P_{jj}(h) =$$

$$= (\lambda h + o(h)) P_{0,j-1}(t) + \sum_{0 \leq k \leq j-2} P_{0,k}(t) o(h) + P_{0j}(t) [1 + q_{jj} h + o(h)] \Leftrightarrow$$

$$P_{0j}(t+h) = P_{0j}(t) - P_{0j}(t) \lambda h + P_{0,j-1}(t) \lambda h + o(h)$$

Daí,

$$\frac{P_{0j}(t+h) - P_{0j}(t)}{h} = -P_{0j}(t) \lambda + P_{0,j-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

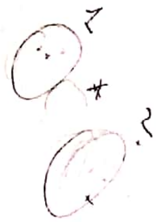
$\downarrow h \downarrow 0$

$$P_{0j}'(t) = -P_{0j}(t) \lambda + P_{0,j-1}(t) \lambda \quad , \text{ para } j \geq 1$$

No caso $j=0$,

$$P_{0,0}(t+h) = P_{0,0}(t)\left[1-\lambda h + o(h)\right]$$

$$\frac{P_{0,0}(t+h) - P_{0,0}(t)}{h} = -\lambda P_{0,0}(t) + \frac{o(h)}{h}$$



$\downarrow h \downarrow 0$

$$P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{0,0}(t) \Rightarrow P_{0,0}(t) = cte\, e^{-\lambda t},$$

Mas sabemos que $P_{00}(0) = 1 \Rightarrow cte = 1 \Rightarrow$
$$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$$

"Portanto"

$$P_{0j}(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}, \; j \geq 0 \, .$$

$(j=1)$ $\quad P'_{01}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda P_{00}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda e^{-\lambda t}$

$$P'_{01}(t) = -\lambda P_{01}(t) + \lambda e^{-\lambda t} \qquad f(1) =$$

Lembrando que

$$e^{\lambda t}\left(f'(t) + \lambda f(t)\right) = (\lambda e^{-\lambda t})\, e^{-\lambda t}$$
$$\left[e^{\lambda t} f(t)\right]' = \lambda \Leftrightarrow$$
$$e^{\lambda t} f(t) = \lambda t + cte \Leftrightarrow$$
$$f(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + cte\, e^{-\lambda t}$$

Podemos usar o mesmo acima, com $f(t) = P_{01}(t)$. $\Rightarrow$

$$P_{01}(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + cte\, e^{-\lambda t}$$

Como $P_{01}(0) = 0$, então

$$P_{01}(0) = \underbrace{e^{-\lambda \cdot 0} \cdot \lambda \cdot 0}_{} + cte\, \overbrace{e^{-\lambda 0}}^{1} \Leftrightarrow$$

$$P_{01}(0) = cte \Rightarrow cte = 0$$

Ou seja,

$$P_{01}(t) = (\lambda t)e^{-\lambda t}$$

Aula 13

$\{X(t)\}_{t\geq 0}$ em S

$P_{ij}(t)$

Equações de Kolgomorov

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{L}\,\mathbb{P}(t) \quad \text{(retrógrada)}$$

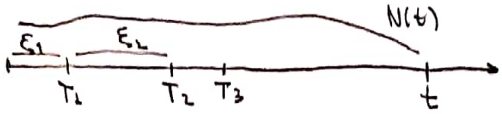
$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L} \quad \text{(adiantada)}$$

onde $\mathbb{L}$ = matriz de taxas

$$(\mathbb{L})_{ij} = q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \Big|_{t=0}$$

• Exemplo: Processo de Poisson (Nascimento "Puro")

$N(t)$ = # de eventos no intervalo $(0, t]$



$\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. com $\xi \sim \exp(\lambda)$

$T_1 = \xi_1$

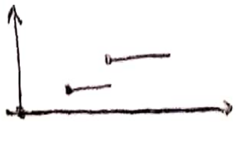
$T_2 = \xi_1 + \xi_2$

$\vdots$

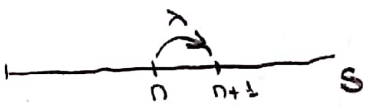
$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ = "instante do n-ésimo evento"

Equação Adiantada de Kolgomorov

$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\,\mathbb{L}$



$P_{0n}(t) = P(N(t)=n \mid N(0)=0)$



Eq. Adiantada: $P'(t) = P(t)\mathbb{L}$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) q_{kj}$$

$$P'_{0n}(t) = P_{0,n-1}(t)\underbrace{q_{n-1,n}}_{\lambda} + P_{0,n}(t)\underbrace{q_{n,n}}_{-\lambda}$$

$$(*) \quad P'_{0n}(t) = \lambda P_{0,n-1}(t) - \lambda P_{0,n}(t), \quad n \geq 1$$

$(n=0)$ $\quad P'_{00}(t) = P_{00}(t)\overset{-\lambda}{q_{00}} \Leftrightarrow$

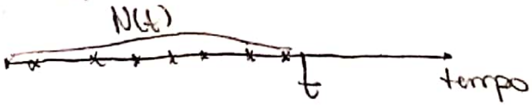
$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) \Leftrightarrow$

$P_{00}(t) = e^{-\lambda t} + cte$ $\qquad$ como $P_{00}(0) = 1$ então $cte = 0 \Rightarrow$

$P_{00}(t) = e^{-\lambda t}$

+ indução em $(*)$

$P_{0n}(t) = P(N(t)=n / N(0)=0)$



$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$P_{0n}(t) = P(N(t)=n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

Propriedades:

1. "Seleção de um Processo de Poisson"

Seja $N(t) \sim$ P. de Poisson(λ) $\quad$ (PPP(λ))

Proc.

Pont.

Poisson

Suponha que cada evento contado por $N(t)$ possa ser do tipo I com probabilidade p ou não (II) com prob. $1-p$, independentemente, Isto é,

$$N(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contagens} \\ \text{tipo I}}}{N_I(t)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contagens} \\ \text{tipo II}}}{N_{II}(t)}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_I(t) \sim PPP(p\lambda) \\ N_{II}(t) \sim PPP((1-p)\lambda) \end{array}\right\} \text{independentes}$$

- $N_I(t) \sim PPP(p\lambda)$

$$\mathbb{P}(N_I(t) = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N_I(t)=k, N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N_I(t)=k / N(t)=n)\, \mathbb{P}(N(t)=n) =$$

$$= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \overset{*}{=} \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k!}$$

$$* \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= \frac{p^k}{k!} \frac{e^{-\lambda t}}{(1-p)^k} \sum_{n \geq k} \frac{[(1-p)\lambda t]^{n-k}}{(n-k)!} [(1-p)\lambda t]^k =$$

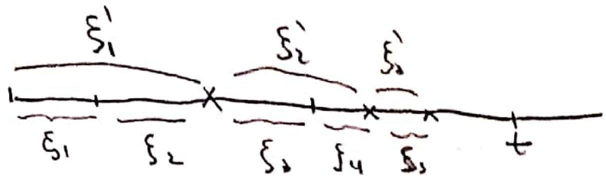
$$= \frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-p)t} = \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k!}$$

Analogamente,

$$\mathbb{P}(N_{II}(t)=k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N_{II}(t)=k, N(t)=n) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(N_{II}(t)=k / N(t)=n)\, \mathbb{P}(N(t)=n)$$

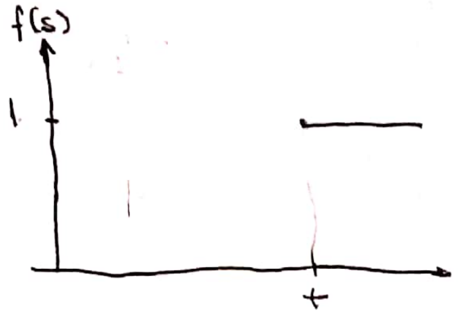
$$= \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda(1-p)t}(\lambda(1-p)t)^k}{k!}$$

Outro modo de ver o problema:



2) Prob. Condicionais

$$f(s) = P(N(s) \geq 1 \mid N(t) = 1)$$



Seja também

$$N(s,t) = N(t) - N(s)$$

$$P(N(s) \geq 1 \mid N(t) = 1) = \frac{P(N(s) \geq 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} =$$

$$= \frac{P(N(s) = 1, N(s,t) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^1}{1!} \, \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^0}{0!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}} = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \, \cancel{\lambda} s}{\cancel{e^{-\lambda t}} \, \cancel{\lambda} t} = \frac{s}{t}$$

Outro modo.

$$f(s) = P(N(s) \geq 1 \mid N(t) = 1)$$

$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$$f(s) = P(T_1 \leq s \mid T_1 \leq t, T_2 \geq t) = \frac{P(T_1 \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{s}{t}$$

ou seja

$$T_1 \mid \{N(t) = 1\} \sim U(0, t)$$

. Uma vez que ocorreu um valor até t, este valor pode ter ocorrido a qq momento antes de t com mesmas chances

$T_1 \mid \{N(t)=1\} \sim U(0,t)$. E se,

$T_1 \mid \{N(t)=n\}$, então

$T_1 \sim$ Primeira estatística de ordem de n uniformes ind. no int. $(0,t)$.

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. com $X_i \sim U(0,t)$,

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ Primeira estatística de ordem

$X_{(2)} =$ próx.

$\vdots$

$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

Aula 14

Equação de Kolgomorov

Cadeia de 2 estados

$X_t \in S = \{0,1\}$. Daí,

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \textcircled{0} \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \textcircled{1} \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$0 \to q_0 = \lambda$

$1 \to q_1 = \mu$

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L}$$

$$\begin{bmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) \\ P'_{10}(t) & P'_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L} \qquad (\mathbb{L})_{kj} = q_{kj}$$

$$\mathbb{P}'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) q_{kj} \quad \forall i,j$$

$$P'_{00}(t) = P_{00}(t)(-\lambda) + P_{01}(t)\mu = -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t)$$

Mas $P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$. Daí

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu[1 - P_{00}(t)]$$
$$P'_{00}(t) = \mu - (\lambda + \mu) P_{00}(t)$$

* Note que $P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ leva à $P'_{00}(t) = 0 \Rightarrow P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ é a dist. [illegible]

Seja então $f(t) = P_{00}(t)$.

$$f'(t) = \mu - (\mu+\lambda) f(t)$$

$$e^{(\mu+\lambda)t} \left[f'(t) + (\mu+\lambda) f(t) \right] = \mu e^{(\mu+\lambda)t}$$

$$\left[e^{(\mu+\lambda)} f(t) \right]' = \mu e^{(\mu+\lambda)t}$$

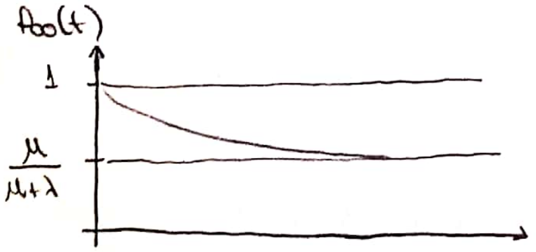
$$e^{(\mu+\lambda)t} f(t) = \mu \int e^{(\mu+\lambda)t} \frac{(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)} dt + cte =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{(\mu+\lambda)t} + c$$

$$f(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + c e^{-(\mu+\lambda)t} \qquad f(0) = 1 \rightarrow c = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Daí,

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} \longrightarrow \pi(0)$$



π estacionária

Eq. de balanceamento

$$\pi = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}, \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \right).$$

$$P_{01}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Obs: $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{L}$

$$\mathbb{P}(t) = e^{t\mathbb{L}}$$

$$e^{t\mathbb{L}} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \mathbb{L}^n}{n!} \qquad \mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}^n$$

$$\mathbb{L} = B \Lambda B^{-1} \quad , \quad \Lambda = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}^n = (B\Lambda B^{-1})(B\Lambda B^{-1}) \dots (B\Lambda B^{-1}) = B\Lambda^n B^{-1} , \Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

• Encontrando os autovalore de $\mathbb{L}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \lambda^* & \lambda \\ \mu & -\mu - \lambda^* \end{vmatrix} = (-\lambda - \lambda^*)(-\mu - \lambda^*) - \mu\lambda = 0 \implies$$

$$\cancel{\mu\lambda} + \lambda^*\mu + \lambda^{*2} + \lambda^*\lambda - \cancel{\mu\lambda} = 0$$

$$\lambda^{*2} + \lambda^*(\mu + \lambda) = 0$$

$$\lambda^*(\lambda^* + (\mu + \lambda)) = 0 \implies \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \lambda)$$

Daí,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\mu + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, os autovetores.

. Para $\lambda_1 = -(\mu + \lambda)$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mu + \lambda)x \\ -(\mu + \lambda)y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -\cancel{\lambda x} + \lambda y + \mu x + \cancel{\lambda x} = 0 \\ \mu x - \cancel{\mu y} + \cancel{\mu y} + \lambda y = 0 \end{cases} \approx$$

$$\begin{cases} \lambda y + \mu x = 0 \\ \lambda y + \mu x = 0 \end{cases} \implies y = -\frac{\mu}{\lambda} x \implies v = (1, -\mu/\lambda)$$

$$= (\lambda, -\mu)$$

e p/ $\lambda_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda x + \lambda y = 0 \\ \mu x - \mu y = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda y = \lambda x \Rightarrow v = (1,1)$$

Daí,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

Daí

$$\mathbb{P}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n Q^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} B \begin{bmatrix} (-\mu-\lambda)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} =$$

$$= B \begin{bmatrix} e^{-(\mu+\lambda)t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} \quad (?)$$

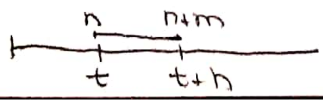
$$\mathbb{P}(t) = \begin{bmatrix} \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} & 1 \\ -\mu e^{-(\mu+\lambda)t} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\lambda+\mu & -1/\lambda+\mu \\ \mu/\lambda+\mu & \lambda/\lambda+\mu \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda+\mu}\begin{bmatrix} \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} + \mu & -\lambda e^{-(\mu+\lambda)t} + \lambda \\ -\mu e^{-(\mu+\lambda)t} + \mu & \lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t \to \infty}$$

$$\frac{1}{\mu+\lambda}\begin{bmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$$

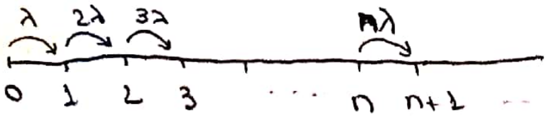
$P_{ij}(t) \to \pi(j)$

Exemplo: "Processo de Yule"

$X(t)$. "População de bactérias"



$X(t)$ processo de Nascimento Puro



$$P(X(t+h) = n+m \mid X(t) = n)$$

$$= \binom{n}{m} (\lambda h + o(h))^{m} \, (1 - \lambda h + o(h))^{n-m}$$

prob. de uma bact. deixar descendente neste intervalo

$$= \begin{cases} 1 - n\lambda h + o(h) & , m = 0 \\ n\lambda h + o(h) & , m = 1 \\ o(h) & , m \geq 2 \end{cases}$$

Equações de Kolgomorov

$$P'_{0n}(t) = P_{0n-1}(t)\, q_{n-1,n} + P_{0n}(t)\, q_{n,n}$$

$$= \lambda(n-1)\, P_{0,n-1}(t) - n\lambda\, P_{0,n}(t)$$

Como $P'_{00}(t) = P_{00}(t)\, q_{00} = 0$, temos

$$P_{0n}(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$. Exercício!

Processo de Poisson. (Cont. com Prob. condicionais)

$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} \Rightarrow \{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$

$(T_1, T_2, \ldots, T_n) / N(t) = n$

Sabemos que

$T_1 / N(t) = 1 \sim U(0,t)$

Teorema. A distribuição de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dado $N(t)=n$ é a distribuição das n estatísticas de ordem com dist. uniforme $U(0,t)$.

Obs: Se $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_i \sim U(0,t)$ então

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} n!/t^n, & \text{se } 0 < x_1 < \ldots < x_n < t \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

com $X_{(i)}$ a iésima estatística de ordem de $X_1, \ldots, X_n$.

Idéia da Prova:

Sejam $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ e $h > 0$ tal que $t_i + h < t_{i+1}$.

$$P(\underbrace{T_i \in (t_i, t_i+h),\ i = 1, 2, \ldots, n}_{A} / \underbrace{N(t) = n}_{B}) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

não ocorreram eventos fora do intervalinhos n
↑ de tamanho h. $PPP(\lambda(t-nh))$. $N(t)=0$

$$P(A,B) = \frac{(\lambda(t-nh))^0 e^{-\lambda(t-nh)}}{0!} \cdot \frac{(\lambda h)^1 e^{-\lambda h}}{1!} \frac{(\lambda h) e^{-\lambda h}}{1!} \cdots \frac{(\lambda h) e^{-\lambda h}}{1!} =$$

$$= e^{-\lambda(t-nh)} \cdot (\lambda h)^n e^{-n\lambda h} = (\lambda h)^n e^{-\lambda t}$$

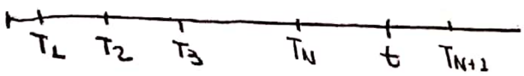
e

$$P(B) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

Assim,

$$P(A|B) = \frac{(\lambda h)^n e^{-\lambda t}}{\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} = n!\left(\frac{h}{t}\right)^n = \frac{n!}{t^n}\cdot h^n \qquad \square$$

Processo de Poisson Composto



Sejam $\{Y_i\}_{i\geq 1}$, v.a. i.i.d. e

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad : \text{"acúmulo de } Y_i\text{'s até o tempo } t\text{"}$$

$$\phi_X(\omega) = E[e^{\omega X(t)}] = E[e^{\omega \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}] =$$

$$= \sum_{n\geq 0} E[e^{\omega \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i} / N(t)=n]\, P[N(t)=n]$$

Mas,

$$E[e^{\omega \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i} / N(t)=n] = E[e^{\omega \sum_{i=1}^{n} Y_i}] = [\phi_Y(\omega)]^n$$

Isto é,

$$\phi_X(\omega) = \sum_{n\geq 0} [\phi_Y(\omega)]^n \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} \frac{[\phi_Y(\omega)\lambda t]^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\phi_Y(\omega)\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t[\phi_Y(\omega) - 1]}$$

Assim,

$$EX(t) = [\phi_X'(u)]\Big|_{u=0} = \lambda t\, \underbrace{\phi_Y'(u)}_{EY}\, \underbrace{e^{\lambda t[\phi_Y(u)-1]}}_{1}\Big|_{u=0} = \lambda t\, EY$$

e

$$Var(X(t)) = \lambda t\, EY^2 \quad (\text{verificar!})$$

— " — " — " —

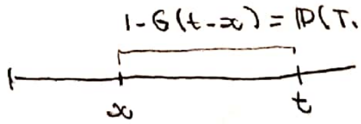
Fila M/G/∞

- Chegada de clientes Poisson (λ)
- Atend. com dist. geral $G(x) = P(\text{tempo atend.} \leq x)$
- Infinitos atendentes

Ex: formulário, "restaurante". (Auto-atendimento)

$X(t)$ = # de clientes, no sistema, no instante t.

$N(t)$ = # de clientes que entrou no sistema até o tempo t. $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda)$



p = prob. de um cliente que chegou em $(0,t)$ não ter sido atendido (ou seja, continua no sistema)

$$p = \int_0^t (1-G(t-x))\,\frac{dx}{t} = \left(\int_0^t (1-G(x))\,\frac{dx}{t}\right)$$

Agora,

$$\mathbb{P}(X(t)=k) = \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(X(t)=k \,/\, N(t)=n)\,\mathbb{P}(N(t)=n) =$$

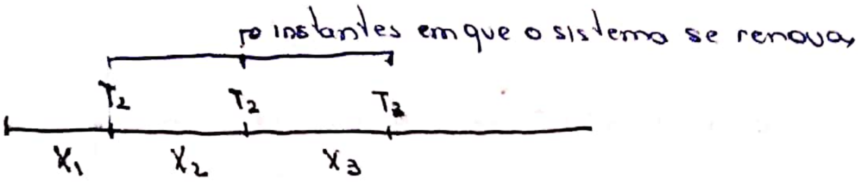
$$= \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, p^{k} (1-p)^{n-k}\, \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-k} (\lambda t)^{k}}{n!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} (\lambda t p)^{k} \underbrace{\sum_{n\geq k} \frac{[(1-p)\lambda t]^{n-k}}{(n-k)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(X(t)=k) = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda t p)^{k}}{k!}$$, ou seja, $X(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p t)$

22 de Outubro **15**

Processo de Renovação



$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. $\rightarrow$ "o sistema não se desgasta", $X_1 \sim F$

$P(X_i \geq 0) = 1$

$\{T_n\}_{n\geq 1}$ instantes de renovação, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Interesse: Como varia o número de renovações até o tempo t. Matematicamente,

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$$

Nas condições anteriores,

$$\mu = E X_i = \int_0^\infty x \, dF(x) > 0$$

Hipótese: "F é não-aritmética"

Definição: F é dita aritmética se $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$P(X_i \in \{\delta_1, 2\delta_1, \dots\}) = 1$$

F é não-aritmética = "não $\exists$ nenhum reticulado com massa 1"

Devemos notar que

$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$$\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu \text{ pela L.G.N.} \Rightarrow N(t) < \infty \text{ com prob. } 1\ \forall t.$$

" De fato, só explodiria se tivéssemos tempos entre renovações $\{X_i\text{'s}\}$ indo pra zero, o que não ocorre, já que $\mu > 0$"

$$\lim_{t\uparrow\infty} N(t) = N(\infty)$$

$$P(N(\infty) < \infty) = P\Big(\bigcup_{n\geq 1} \{X_n = \infty\}\Big) \leq \sum P(X_n = \infty) = 0$$

Notemos tbm que

$$P(N(t)=n) = P(N(t)\geq n) - P(N(t)\geq n+1) =$$
$$= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t)$$

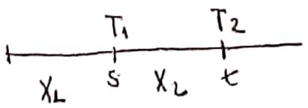
Seja

$$F_n(t) = P(T_n \leq t)$$

$$F_1(t) = P(T_1 \leq t) = F(t)$$

$$F_2(t) = \int_0^t dF(s)F(t-s) = \underbrace{(F*F)(t)}_{\text{convolução}}$$

$\{ T_2 \leq t = X_1 + X_2 \leq t \Rightarrow (F*F)(t) \}$



⋮

$$F_n(t) = (\underbrace{F*F*\dots*F}_{n\text{ termos}})(t)$$

Consideremos agora

$$m(t) = E[N(t)] \quad \leftarrow \text{função de renovação}$$

Lema: $m(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$

Demonstração:

$$m(t) = E[N(t)]$$

$$\mathbb{1}_n = \begin{cases} 1, & \text{se } T_n \leq t \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

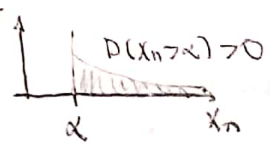
$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n$$

$$m(t) = E\Big[\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n\Big] \overset{\substack{\text{Teorema da conv. monótona} \\ !}}{=} \sum_{n \geq 1} E[\mathbb{1}_n] = \sum_{n \geq 1} P(T_n \leq t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$$

Lema: $m(t) < \infty$, $\forall t$

Demonstração.

Se $P(X_n > 0) > 0 \Rightarrow \exists \alpha \cdot P(X_n > \alpha) > 0$



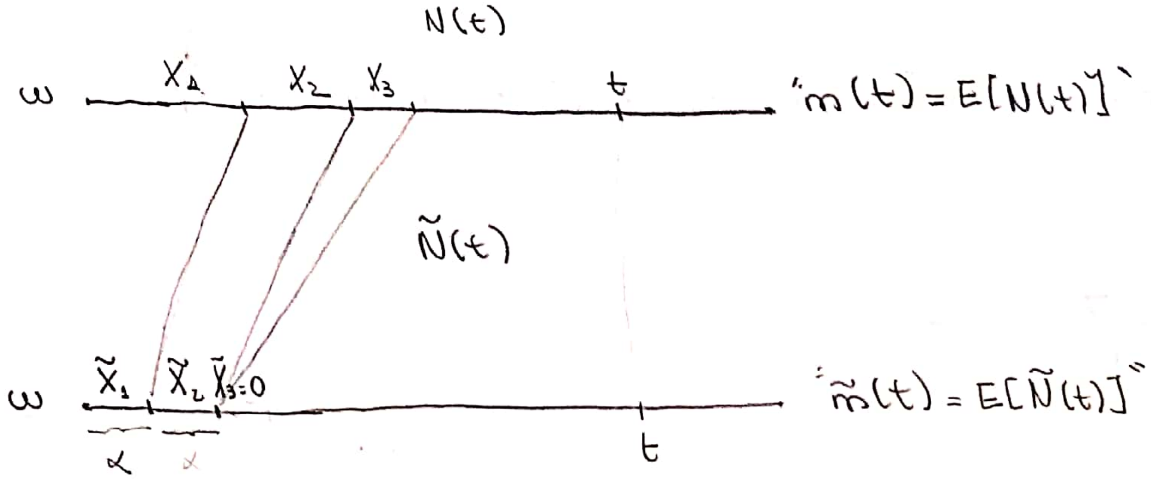
Por absurdo, Não existir este α é o mesmo que

$\forall n, \ P(X_n \in (0, 1/n)) = 1$

continuidade da prob. p/ eventos decrescentes $\Rightarrow P(\emptyset) = 1$. contradição

Seja α com prop. $P(X_n > \alpha) > p > 0$.

Idéia do Acoplamento.



Isto é,

$$\tilde{N}(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \leq t\} \quad e \quad \tilde{X}_i = \begin{cases} 0, & se\ X_i < \alpha \\ \alpha, & se\ X_i \geq \alpha \end{cases}$$

"Estou comprimindo o processo 1."

$$N(t) \leq \tilde{N}(t)$$

média da geométrica com $p = P(X_n > \alpha)$

$$m(t) \leq \tilde{m}(t) \leq \left\lceil \frac{t}{\alpha} \right\rceil \cdot \frac{1}{p} < \infty \quad \text{com}$$

* $\lceil x \rceil$ = menor inteiro maior que x

Teorema: $\dfrac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \dfrac{1}{\mu}$

Demonstração:

$$\underbrace{\frac{T_{N(t)}}{N(t)}}_{\mu} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} \underbrace{\frac{(N(t)+1)}{(N(t)+1)}}_{\mu}$$

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \mu \quad \text{pois } N(t) \to \infty \text{ com prob. } 1$$

$$\mathbb{P}(N(\infty) < \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = \infty\}\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = \infty) = 0$$

$X \sim F$ não aritmética
$P(X = x) = 0$

e $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu$

Teorema Elementar da Renovação

$$\frac{m(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu}$$

Poderíamos pensar:

$$T_{N(t)} \leq t \leq T_{N(t)+1}$$
$$E[T_{N(t)}] \leq t \leq E[T_{N(t)+1}]$$
$$m(t)\mu \leq t \leq (m(t)+1)\mu$$

usando o fato de que $E T_{N(t)} = E[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i] = E[N(t)]E(X_i)$.

Mas há um erro. Para um dos lados, esta argumentação é válida!
Para o outro, NÃO!
Para entender melhor a validade, vejamos o que segue ("só vale p/ $T_{N(t)+1}$ pois é um tempo de parada").

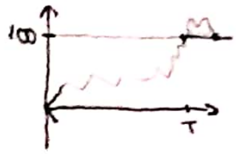
Definição: Tempo de parada.
Seja $X_1, X_2, \ldots$, v.a. i.i.d.
Uma v.a. $T \in \mathbb{N}$ é dita um tempo de parada com relação a $\{X_i\}_{i \geq 1}$ se

$$\{T = n\} \text{ é um evento independente de } \{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\}$$

Exemplo:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{com prob. } p \\ -1, & \text{" \quad " \quad } 1-p \end{cases}$$

$$T = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = 100\}$$



Equação de Wald: Se $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma coleção i.i.d. com $EX_i = \mu < \infty$ e N é um tempo de parada $EN < \infty$, então

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]\,E[X_i]$$

Demonstração.

$$\mathbb{1}_n = \begin{cases} 1, & N \geq n \\ 0, & \end{cases}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_n X_n\right] \overset{*}{=}$$

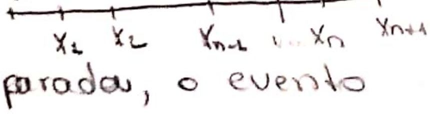
$$\overset{*}{=} \sum_{n\geq 1} E[\mathbb{1}_n X_n] \overset{**}{=}$$

— · —

$$\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_{\{N \geq n\}}$$

$\{N=n\}$ indep. de $\{X_{n+1}, \dots\}$

$\{N \geq n\}$



Se N é um tempo de parada, o evento

$\{N \geq n\}$ não depende de $X_n, X_{n+1}, \dots$

$\{N \geq n\}$ = "Não parei até $n-1$"

— " —

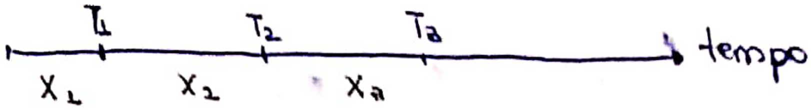
$$** = \sum_{n \geq 1} E\mathbb{1}_n EX_n = \mu \sum_{n \geq 1} E\mathbb{1}_n = \mu \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N \geq n) = \mu EN.$$

Agora resta descobrir:

$$\begin{cases} N(t) \text{ é um tempo de parada?} \\ N(t)+1 \text{ " " " " " ?} \end{cases}$$

24 de Outubro **16**

Teoria da Renovação



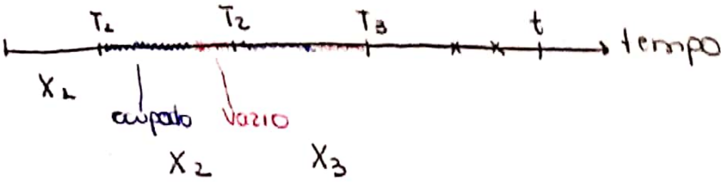
$\{X_i\}_{i\geq 1}$ i.i.d. $X_i \geq 0$

$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = "instante da n-ésima renovação"

$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$: "nº de renovações no intervalo $[0,t]$"

Suposição: $X \sim F$ 'não-aritmético' e $P(X_1 > 0) > 0$. $EX_i = \mu$

Função de Renovação: $m(t) = E(N(t))$



Teorema: $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu}$ com prob. 1

Teorema Elementar da Renovação:

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu}$$ ([illegible])

Já vimos que

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$$

pois, $E(N(t)) = E(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n) \overset{\text{conv. mon.}}{=} \sum_{n \geq 1} E(\mathbb{1}_n) = \sum_{n \geq 1} P(T_n \leq t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t)$

com $\mathbb{1}_n = \begin{cases} 1, & \text{se } T_n \leq t \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \Rightarrow N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_n$

$T_1 = X_1 \sim F$

$T_2 = X_1 + X_2 \sim F_2$

$$F_2(t) = P(T_2 \leq t) = P(X_1 + X_2 \leq t) =$$

$$= \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t \,/\, X_1 = s) f_{X_1}(s)\, ds =$$

$$= \int_0^t P(X_2 \leq t-s \,/\, X_1 = s) f_{X_1}(s)\, ds =$$

$$= \int_0^t F_{X_2}(t-s)\, dF_{X_1}(s) =$$

$$= \int_0^t F(t-s)\, dF(s)$$

$\equiv F * F$ "convolução"

↑ Notação

Notação: Se F e G são funções positivas e não-decrescentes " com densidade"

$$(F * G)(t) = \int_0^t F(t-s)\, dG(s)$$

Propriedades: $F * G = G * F$

$(F * G) * H = F * (G * H)$

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$$

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1} \Leftrightarrow$$
$$E[T_{N(t)}] \leq t < E[T_{N(t)+1}] \Leftrightarrow$$
$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] \leq t < E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] \Leftrightarrow$$

$$\overset{(?)}{\Leftrightarrow} \; m(t)\,\mu \leq t < (m(t)+1)\,\mu$$

Equação de Wald

$N \in \mathbb{N}$ $\quad$ $EN < \infty$

$\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ $\quad$ N tempo

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]\,EX_i$$

Obs: N tempo de parada se
$\{N=n\}$ não depende de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ (só depende de $X_1, \dots, X_n$)

Se (?) $\quad m(t)\,\mu \leq t < (m(t)+1)\,\mu$

$$\frac{m(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t}$$

Oque está errado em (?) ?

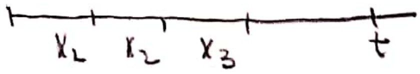
Resposta:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] \neq m(t)\,\mu$$
$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] = \mu(m(t)+1)$$

- $N(t)$ é tempo de parada?

(com resp. à $X_1, X_2, \ldots$)

$\{N(t)=n\}$ não depende de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$?



Preciso me certificar que X_{n+1} é tal que $T_n + X_{n+1} > t$. Logo, posso precisar da informação de X_{n+1}.

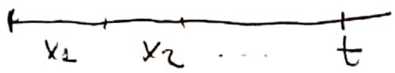
R: Assim, $N(t)$ não é um tempo de parada.

- $N(t)+1$ é um tempo de parada?

$\{N(t)+1 = n\}$ não depende de $X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}, \ldots$?

$\Updownarrow$

$\{N(t)=n-1\}$

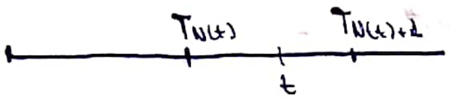


Posso precisar da inf. de X_n. Logo,

$N(t)+1$ é um tempo de parada!

Teorema: $\dfrac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \dfrac{1}{\mu}$

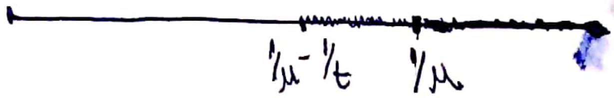
Demonstração.



$t < T_{N(t)+1} \Rightarrow t < E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right] \overset{\text{Wald}}{\Rightarrow} t < E[N(t)+1]\,E[X_i] \Rightarrow$

$t < (m(t)+1)\mu \Rightarrow \dfrac{1}{\mu} < \dfrac{m(t)}{t} + \dfrac{1}{t}$

$$\frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}, \quad \forall t$$



Qdo $t \to \infty$, lim inf.

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} \frac{m(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

Outra desigualdade.

Processo de Renovação "truncado"

$\{X_i\}_{i \geq 1}$ renovação

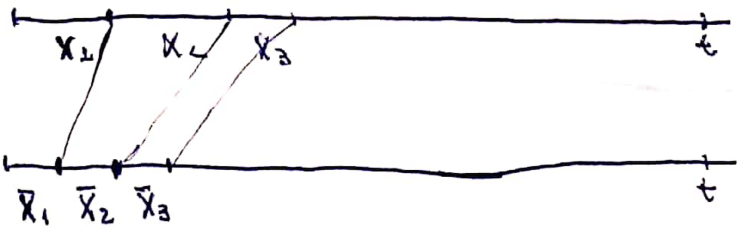
Dado $M > 0$, $\{\bar{X}_i\}_{i \geq 1}$ renovações truncadas

acoplamento.

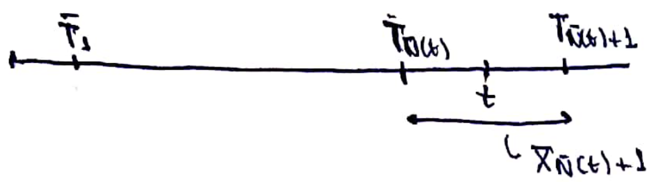
$$\bar{X}_i = \begin{cases} X_i & \text{se } X_i \leq M \\ M & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$N(t) = \max\{n : T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$$

$$\bar{N}(t) = \max\{n : \bar{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i \leq t\}$$



$$\bar{m}(t) = E(\bar{N}(t)) \geq E(N(t)) = m(t)$$



$$T_{\bar N(t)} \le t < T_{\bar N(t)+1}$$

$$T_{\bar N(t)+1} = \underbrace{T_{\bar N(t)}}_{\le t} + \underbrace{\bar X_{\bar N(t)+1}}_{\le M} \le t+M$$

$$E[T_{\bar N(t)+1}] \le t+M$$

wald

$$(\bar m(t)+1)\,\bar\mu_M \le t+M$$

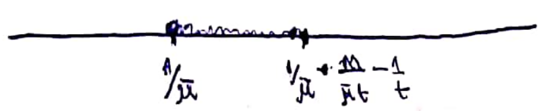
$$E[\bar N(t)+1]\overset{\bar\mu}{E\bar X_1} \qquad \bar\mu \le E\bar X_1 \le \mu$$

$$\frac{(\bar m(t)+1)}{t} \le \frac{1}{\bar\mu_M} + \frac{M}{\bar\mu_M t}$$

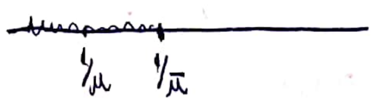
$$\frac{m(t)}{t} \le \frac{\bar m(t)}{t} \le \frac{1}{\bar\mu_M} + \frac{M}{\bar\mu_M t} - \frac{1}{t}, \ \forall t$$

$$\frac{1}{\bar\mu_M} + \frac{1}{t}\left(\frac{M}{\bar\mu_M} - 1\right) > 0 \quad \text{se } M > \bar\mu_M, \ \forall t$$

$$\Downarrow$$



$$\Rightarrow \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\bar\mu_M}$$



$, \forall M$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu} \qquad (+\text{ anterior}) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \qquad \blacksquare$$

Comentário:

$EX_i = \mu$

$Var(X_i) = \sigma^2$ com prob. 1

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

Teorema

$$\frac{\frac{N(t)}{t} - 1/\mu}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}}} \to N(0,1)$$

31 de novembro **17**

Teoria da Renovação

$\{X_i\}_{i\geq 1}$ $\quad X_i \geq 0$ i.i.d. F com $EX_i = \mu$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \operatorname{Var} X_i = \sigma^2$

$m(t) = E[N(t)]$

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \quad \text{q.c.}$$

$$\frac{m(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \qquad \text{Teorema Elementar da Renovação}$$

Obs:

$$\frac{N(t)/t - 1/\mu}{\boxed{}} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \boxed{?}$$

flutuação local

Resultado:

$$\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xRightarrow[t\uparrow\infty]{} N(0,1)$$

Dem:

$$P\left(\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} < y\right) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

$P(N(t) < at) \overset{*}{=}$

$$a_t = \frac{t}{\mu} + y\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}$$

$$\{N(t) \leq n\} \equiv \{T_n \geq t\}$$

$$* = P(T_{a_t} > t)$$

$$= P\left(\frac{T_{a_t} - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}} > \frac{t - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}}\right) \approx$$

"a_t não necessariamente é inteiro. No entanto, no limite, não temos problemas"

↓ sub a_t

$$-y\left(1 + \frac{y\sigma}{\sqrt{t\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} -y$$

$$P\left(\frac{T_{a_t} - \mu a_t}{\sigma\sqrt{a_t}} > -y\right) = \phi(y)$$

Equação de Renovação

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x)$$

$$\equiv (m = F + m * F)$$

Obs: Dadas m e F (funções)

Definição. $(m * F)(x) = \int_0^x m(t-s)\, dF(s)$ (*)

Demonstração: $m(t) = E[N(t)]$, mas

$$E[N(t)] = E[E[N(t)/X_1]]$$

$$E[N(t) \mid X_1 = x] = \begin{cases} 1 + m(t-x) & \text{se } x \leq t \\ 0 & \text{se } x > t \end{cases}$$

Daí,

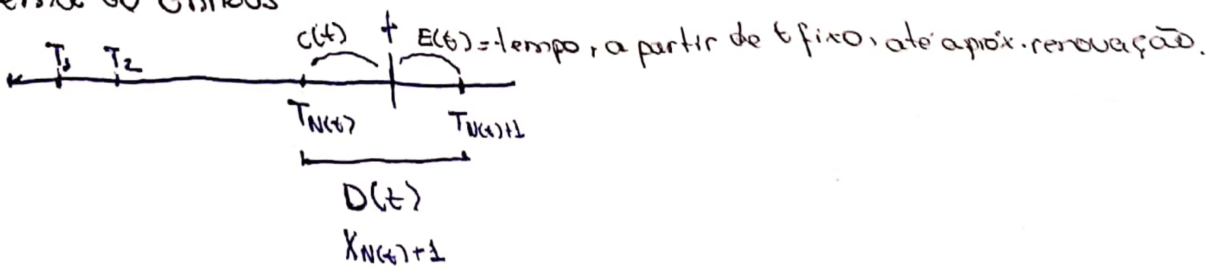
$$E[N(t)] = \int_0^t 1 + m(t-x)\, dF(x) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, dF(x)$$

Obs: m satisfaz

$$m(t) = \sum_{k \geq 1} F_k(t)$$

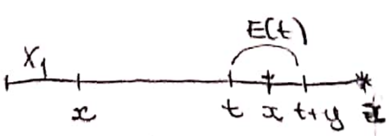
$$T_k \sim F_k = \underbrace{F * F * \cdots * F}_{k \text{ vezes}}$$

Exemplo: Problema do ônibus



$$P(E(t) > y) = E(\mathbb{1}_{\{E(t) > y\}}) = E[E[\mathbb{1}_{\{E(t) > y\}} / X_1]]$$

$$E[\mathbb{1}_{\{E(t) > y\}} / X_1 = x] =$$



$$= \begin{cases} P(E(t-x) > y) & \text{se } x \leq t \\ 0 & \text{se } x \in (t, t+y) \\ 1 & \text{se } x > t+y \end{cases}$$

Logo,

$$\overbrace{\mathbb{P}(E(t) > y)}^{f(t)} = \int_0^t \overbrace{\mathbb{P}(E(t-x) > y)}^{f(t-x)} dF(x) + \overbrace{\int_{t+y}^{\infty} dF(x)}^{H(t)}$$

Obs: $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$

Daí,

$$f(t) = H(t) + (f * F)(t)$$

$$f = H + f * F$$ Equação tipo-renovação (renewal-type)

<u>Lema</u>. Se f satisfaz uma equação

$$f = H + f * H$$

então $f = H + H * m$ é solução (única)

<u>Demonstração</u>. Se $f = H + H * m$, então

$$f * F = H * F + H * m * F = H * (\overbrace{F + m * F}^{m})$$

Obs. $f * g = g * f$ simétrica
$(f*g)*h = f*(g*h)$ associativa
Se $f = g \Leftrightarrow f*h = g*h$
$f*(g+h) = f*g + f*h$ distributiva

mas $m = F + m * F$. Assim,

$$f * F = H * m$$

e assim, $f = H + H * m = H + f * F$.

(unicidade): propor outra sol. e verificar que diferirá da anterior apenas em conjuntos de medida nula.

· Voltando para $E(t)$

$$f(t) = P(E(t) > y)$$

$$f(t) = H(t) + (f * F)(t) \quad \text{com } H(t) = 1 - F(t+y) = \bar{F}(t+y)$$

<u>Solução</u>:

$$f = H + H * m, \quad \text{ou seja}$$

$$P(E(t) > y) = 1 - F(t+y) + \int_0^t \bar{F}(t+y-x)\, \underbrace{dm(x)}_{\downarrow * \ \frac{dx}{\mu}} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} (?)$$

* Teorema de Blackwell

$$m(t+h) - m(t) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \frac{h}{\mu}, \quad \text{ou seja,} \quad dm \approx \frac{dx}{\mu}$$

Teorema Chave de Renovação

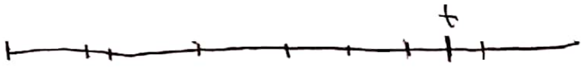
$$\int_0^t h(t-x)\, dm(x) \to \int_0^\infty h(x) \frac{dx}{\mu}$$

Usando este teorema chave,

$$\mathbb{P}(E(t) > y) = \bar{F}(t+y) + \int_0^t \bar{F}(t+y-x)\, dm(x)$$

$$\xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+y)}{\mu}\, dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(x+y))\, dx$$

Exemplo: Processo de Renovação Alternante.



"on"

"off"

"on" Z_i $\quad (Z_i, Y_i)$ $\quad X_1, \dots$ $\quad X_i \sim F$

"off" Y_i $\quad X_i = Y_i + Z_i$ $\quad Z_i \sim F_Z$ $\quad F = F_Z * F_Y$

Z_i e Y_i podem ser ind. $\quad Y_i \sim F_Y$

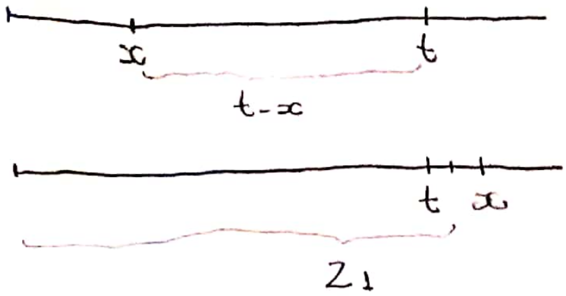
Seja $\{$sistema funcionando no instante $t\} = \{O(t)\}$

$\downarrow$ "on no instante t"

$$P(O(t)) = P(\text{"on no inst. } t\text{"}) = P(t)$$

$$P(t) = E[\mathbb{P}(\text{"on em } t\text{"}) / X_1]$$

$$P(O(t) / X_1 = x) = \begin{cases} P(t-x) & x \leq t \\ P(Z_1 > t / X_1 = x) & \text{se } x > t \end{cases}$$



$$P(t) = \int_0^t P(t-x)\,dF(x) + \int_t^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\,dF(x)$$

$$P(t) = H(t) + (P * F)(t)$$

...

Agora,

$$H(t) = \int_t^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\,dF(x) = \int_0^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\,dF(x)$$

↳ $P(Z_1 > t \mid \underset{Z_1+Y_1}{X_1} = x) = 0$ para $0 < x < t$

$$\rightarrow H(t) = \int_0^\infty P(Z_1 > t \mid X_1 = x)\,dF(x) = P(Z_1 > t) = 1 - F_Z(t).$$

... Logo, usando a solução $P = H + H * M$,

$$P(t) = P(Z_1 > t) + \int_0^t P(Z_1 > t - x)\,dm(x) \xrightarrow[t \to \infty]{\text{Chave}}$$

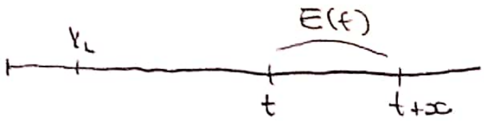
$$= 0 + \int_0^\infty \frac{P(Z_1 > x)}{\mu} = \frac{E[Z]}{\mu} = \frac{EZ}{EZ + EY}$$

Renovação $\{X_n\}_{n \geq 1}$

$N(t)$

$$\begin{cases} E(t) = T_{N(t)+1} - t \\ A(t) = t - T_{N(t)} \end{cases}$$

se $P(t) = P(E(t) > x) = (P_x(t))$



$$P(t) = \int_0^\infty P(E(t) > x \,/\, X_1 = s)\, dF(s).$$

mas,

$$P(E(t) > x \,/\, X_1 = s) = \begin{cases} P(t-s) & \text{se } s < t \\ 0 & \text{se } s \in (t, t+x) \\ 1 & \text{se } s > t+x \end{cases}$$

Daí,

$$P(t) = \int_0^t P(t-s)\, dF(s) + \underbrace{\int_{t+x}^\infty dF(s)}_{\underbrace{1-F(t+x)}_{H(t)}}$$

Temos então a eq. de renovação

$$P(t) = H(t) + (P * F)(t)$$

cuja solução é

$$P(t) = H(t) + (H * m)(t)$$

$$\mathbb{P}(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)]\, dm(y)$$

Teorema Chave

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{P}(t) = \int_0^\infty [1 - F(t+x)] \frac{dt}{\mu} = \int_x^\infty [1 - F(x+y)] \frac{dy}{\mu} =$$

$$= \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

Distribuição de $E(t)$.

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{P}(E(t) \leqslant x) = 1 - \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty [1 - F(y)]\, dy}{\mu} - \int_x^\infty [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

$$= \int_0^x [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

Logo,

$$\mathbb{P}(E(t) \leqslant x) \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \int_0^x (1 - F(y)) \frac{dy}{\mu}$$

Se, por exemplo, $X_i \sim exp(\lambda)$, $EX_i = \mu = 1/\lambda$

$$\bar{F}(y) = P(X_i > y) = e^{-y/\mu}$$

$$E(t) \underset{\uparrow}{\sim} exp(1/\mu)$$

assintoticamente

—— .. ——

Ex. $X \sim U(0,1)$, $EX_i = 1/2 = \mu$

$$\bar{F}(y) = P(X_i > y) = 1-y$$

$$E(t) \to \int_0^x \frac{[1-F(y)]\,dy}{\mu} =$$

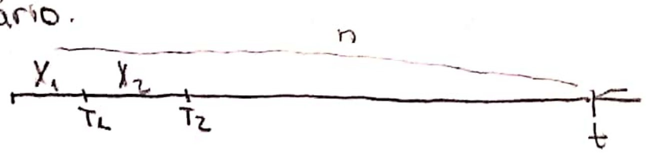
$$= \int_0^x 2y\,dy = y^2 \Big|_0^x = x^2$$

—— .. ——

$$P(A(t) > x) = P(E(t-x) > x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \int_0^x \frac{[1-F(y)]\,dy}{\mu} \quad (Ex.)$$

$A(t)$ é no máximo t, mas qdo $t \uparrow \infty$, o prob. é solucionado

Comentário.



$\{X_n\}_{n\geq1}$
$X_1 \sim G$
$X_2, \dots, \sim F$

} Processo de Renovação Com Retardo

"Delay" $N_D(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$

$$\mathbb{P}(N_D(t)=n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t)$$

$$T_n \sim G * F_{n-1}$$

$$m_D(t) = E(N_D(t)) = \sum_{n \geq 1} (G * F_{n-1})(t)$$

Renovação para $m_D(t)$,

$$m_D(t) = E[N_D(t)] = \int_0^{\infty} E[N_D(t) / X_1 = s] \, dG(s)$$

$$E[N_D(t) / X_1 = x] = \begin{cases} 1 + m(t-x) & , \text{se } x \leq t \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

$$m_D(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)] \, dG(x)$$

$$m_D(t) = G(t) + (m * G)(t)$$

Obs: $\dfrac{N_D(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ $\qquad \mathbb{P}(E(t) \leq x) \Rightarrow$ mesma coisa

$\dfrac{m(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$

Estacionariedade

Processo de Renovação Em "Equilíbrio"

↳ ideia de que a volta no tempo não altera

$G = F_e$

$$F_e(x) = \int_0^{x} [1 - F(y)] \frac{dy}{\mu}$$

$$P(E_D(t) > x, N_D(t) = 0) = P(T_1 > t+x) = 1 - G(t+x)$$

$$P(E_D(t)^{>x}, N_D(t) = n) =$$

$$= \int \underbrace{P(E_D(t)^{>x}, N_D(t) = n \,/\, T_n = s)} \, d(G * F_{n-1})(s) \overset{*}{=}$$

$$= \begin{cases} 1 - F(t+x-s) & \text{se } s < t \\ 0 & \text{se } s > t \end{cases}$$

$$* = \int_0^t [1 - F(t+x-y)] \, d(G * F_{n-1})(y)$$

$$P(E_D(t) \leqslant x) = \sum_{n \geq 0} P(E_D(t) \leqslant x, N_D(t) = n) =$$

$$= 1 - G(t+x) + \sum_{n \geq 1} \int_0^t [1 - F(t+x-y)] \, d(G * F_{n-1})(y)$$

$$= 1 - G(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)] \, d\Big(\underbrace{\sum_{n \geq 1} G * F_{n-1}}_{dm_D(y)}\Big)(y)$$

* vale $m_D(t) = \dfrac{t}{\mu}$.

Exemplo:

(X_i, Y_i) vetores aleatórios i.i.d. Y_i: custo associado ao X_i

Processo de Renovação Com Recompensa

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

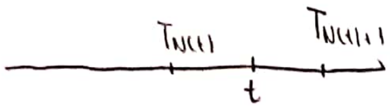
$$\frac{Y(t)}{t} \rightarrow \frac{EY}{EX}$$

$$\frac{E[Y(t)]}{t} \longrightarrow \frac{EY}{EX}$$

Demonstração. (Ideia)

$$\frac{Y(t)}{t} = \underbrace{\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)}}_{\substack{\downarrow \text{LGN} \\ E(Y)}} \; \underbrace{\frac{N(t)}{t}}_{\substack{\text{LGN} \\ \frac{1}{EX}}}$$

$$\frac{E[Y(t)]}{t}$$



$$\frac{E[Y(t)]}{t} = E\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n\right] - E\left[Y_{N(t)+1}\right]$$

$$\overset{\text{Wald}}{=} \frac{(m(t)+1)EY}{t} - \frac{E(Y_{N(t)+1})}{t}$$

(*) $g(t) = E[Y_{N(t)+1}]$

$$g(t) = \int_0^{\infty} E[Y_{N(t)+1} / X_1 = s]\, dF(s) =$$

$$E[Y_{N(t)+1} / X_1 = s] = \begin{cases} g(t-s) & \text{se } s < t \\ E[Y_1 / X_1 = s], & s > t \end{cases}$$

$$g(t) = (g * F)(t) + H(t)$$

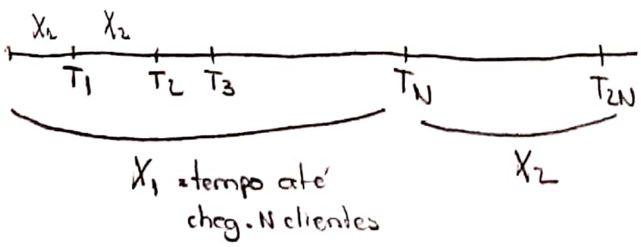
$$\text{com } H(t) = \int_t^{\infty} E[Y_2 / X_1 = s]\, dF(s)$$

Exemplo: Lotação.

Chegam clientes com intervalos $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$, $E\bar{X}_1 = \mu$

Quando chegam $\underline{\underline{N}}$, sai a lotação.

Custo de cada cliente, durante sua espera, é de c unidades monetárias por unidade de tempo.



Custo médio do sistema por unidade de tempo?

(X_i, Y_i)

$$E[Y_i] = c\,[0\, E(\bar{X}_1) + 1 E(\bar{X}_2) + \dots + (N-1) E[\bar{X}_{N-1})] =$$

$$= c\, \frac{N(N-1)}{2} \cdot \mu$$

Daí, pelo resultado.

$$\frac{E(V(t))}{t} \to \frac{EY}{EX} = \frac{c\,\frac{N(N-1)}{2}\mu}{N\mu} = \frac{(N-1)}{2}\, c\, \mu$$

19

Processo de Renovação Com Recompensa

$\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d.

$N(t)$

$Y_i =$ Recompensa no intervalo (T_{i-1}, T_i)

$\{(X_i, Y_i)\}_{i \geq 0}$ i.i.d.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

$$\frac{Y(t)}{t} \rightarrow \frac{E(Y)}{E(X)}$$

$$\frac{E(Y(t))}{t} \rightarrow \frac{E(Y)}{E(X)}$$

Exemplo: "Peter Principle"

Emprego

Dois tipos de funcionários

- Competente: fica na função conforme uma v.a. $X \sim F$
- Incompetente: fica " " " " " $Y \sim G$

$EX = \mu$ $\quad \mu < \gamma =$ "tempo até a aposentadoria"

$EY = \gamma$

p é a prob. de ser competente; $1-p$ a de não ser.

3.

Numa "dist estacionária" qual é a prob. da função estar ocupada por um funcionário incompetente?

X_i = tempo de permanência do i-ésimo funcionário

Recompensa $\quad Y_i = \begin{cases} 0, & \text{se é competente} \\ X_i, & \text{se é incompetente} \end{cases}$

$\{(X_i, Y_i)\}_{i \geq 0}$ i.i.d.

$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ = "tempo no qual trabalham func. incomp."

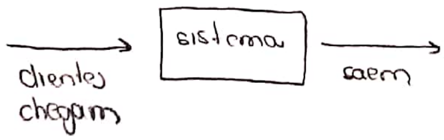
$$\frac{Y(t)}{t} \xrightarrow[q.c.]{} \frac{EY}{EX} = \frac{(1-p)r}{p\mu + (1-p)r}$$

$EX = p\mu + (1-p)r$

$EY = (1-p)r$

Ex. Se $p = 1/2$, $r = 10$, $\mu = 1$ $\quad \frac{Y(t)}{t} \to 0{,}91$.

Sistema de Filas



Hipóteses

1. Clientes chegam 1 a 1. O n-ésimo cliente, permanece um tempo V_n (aleatório)

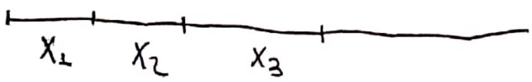
2.  ∃ um tempo de parada T tal que o sistema "recomeça prob. a partir do"

3. Se $Q(t) =$ # de clientes no sistema no instante t

$$Q(0) = Q(T) = 0$$

Exemplo: Fila G/G/1.

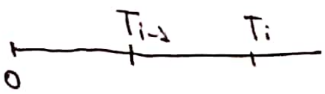
Chegadas



$\{X_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. $X \sim F$ geral

Sucessivos atendimentos $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ $Y_i \sim G$ geral

ciclo



Processo dentro de cada ciclo: P_i.

$$P_i = \{Q(t), T_{i-1} \leq t \leq T_i\}$$

N_i = # de clientes que entrou no sistema no ciclo i, ... i.i.d.

Suponha: $EN < \infty$

$T = T_1$, $ET < \infty$

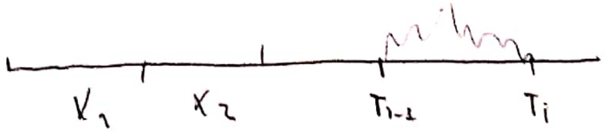
$ENT < \infty$

$L =$ "tamanho médio da fila" (no sistema)

$\lambda =$ "taxa média de clientes atendidos"

$W =$ "tempo de perm. de um cliente"

P. Renovação com Recompensa



$X_i = T_i - T_{i-1}$

$Y_i = R_i$ "Recompensa"

$$R_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} Q(s)\,ds$$

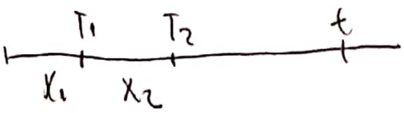
$\{R_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. com a dist. de R_1

$$R = R_1 = \int_0^T Q(s)\,ds$$

$$ER \leq ENT < \infty$$

$$\frac{\int_0^t Q(s)\,ds}{t} \longrightarrow \frac{ER}{ET} \equiv L = \text{"tamanho médio da fila"}$$

. Processo II

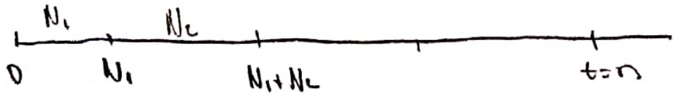


$X_i = T_i - T_{i-1}$ $\qquad Y_i =$ Recompensa $= N_i$

$$\frac{N(t)}{t} \longrightarrow \frac{EN}{ET} = \lambda \text{ "taxa de chegada de clientes"}$$

• III

Tempo de Renovação



$\{X_i\}_{i\geq 1} = \{N_i\}_{i\geq 1}$. $Y_i = S_i =$ recompensa =

= tempo total de perm. desses N_i clientes

$S_i = \sum_{i=1}^{N_i} V_i$ "tempo total de permanência dos N_i clientes"

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n} \rightarrow \frac{ES}{EN} = W$$

Teorema: $L = \lambda W$

Dem.

$$\frac{L}{\lambda W} = \frac{ER}{\cancel{ET}} \frac{\cancel{ET}}{EN} \frac{E\cancel{N}}{ES} = \frac{E\left(\int_0^T Q(s)\,ds\right)}{E\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)} = 1$$

1. Três prisioneiros são informados pelo carcereiro, que nunca mente, que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado ao amanhecer enquanto os outros dois irão ser libertados. Por uma cláusula contratual com o Rei local, ele não pode dizer qual deles foi escolhido para ser executado até o amanhecer. O prisioneiro A pede ao carcereiro que lhe diga confidencialmente o nome de um dos que vai ser solto entre os outros dois. Argumenta ele que isto não lhe trará informação alguma, visto que ele já sabe que pelo menos um dos outros dois vai ser solto e que, qualquer que seja o indivíduo apontado a informação será irrelevante. O carcereiro recusa, argumentando que se A tiver essa informação, a probabilidade dele ser executado que era 1/3 passa a ser de 1/2. Qual deles têm razão?

2. Considere o seguinte jogo: um jogador, jogador "A", escolhe dois números inteiros sucessivos e escreve cada um deles em uma folha de papel; outro jogador, jogador "B", escolhe ao acaso uma dessas folhas de papel e entrega a outra ao jogador "A"; o jogador que tiver o *menor* número ganha e, como prêmio, deve receber do jogador perdedor o valor, em Reais, equivalente ao maior dos dois números. O jogador "B" considera este jogo vantajoso pelo seguinte raciocínio: se o número que recebe é N, então o seu oponente terá o número N-1 ou o número N+1; se tiver N-1 então o jogador "B" perde, tendo que pagar N Reais; se, por outro lado, seu oponente tiver N+1, então o jogador "B" ganha, recebendo N+1 Reais; seu lucro médio por jogada seria, portanto, 50 centavos de Real. Você concorda com esse raciocínio?

3. Um baralho (52 cartas) é embaralhado repetindo-se o seguinte procedimento: a carta de cima do baralho é removida e recolocada no baralho, ao acaso, numa das 52 possiveis posições (ou seja, embaixo da primeira carta, entre a primeira carta e a segunda, etc... até a última possibilidade, que corresponde a recolocá-la em cima do baralho). Esse procedimento (repetido muitas vezes) consegue "embaralhar" (defina isto) as cartas?

4. Considere o processo de ramificação que consideramos em aula, quando discutimos o modelo de percolação orientada no caso subcrítico. Lembrando: sejam $\{\xi_{i,j}\}_{i\geq 0, j\geq 0}$ v. a. i.i.d. com valores em $\mathbf{N}$ e $X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}$ e $X_o = 1$. Termine o argumento visto em aula e mostre que se $E(\xi) \leq 1$ o processo se extingue com probabilidade 1.

5. Sejam T_1, T_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponenciais com parâmetros $\lambda 1$ e $\lambda 2$, respectivamente. a) Denote $X = \min\{T_1, T_2\}$. Dermine a distribuição de probabilidade de X. b) Determine $P(X = T_1)$. c) Determine $P(X = T_1 | X < s)$ para $s \in \mathbf{R}_+$.

6. Seja N uma v. a. com distribuição Poisson com parâmetro λ. Seja $X = X_1 + \ldots + X_N$ onde X_i é Bernoulli com parâmetro p (assuma independência). Mostre que $X \sim$ Poisson (λp).

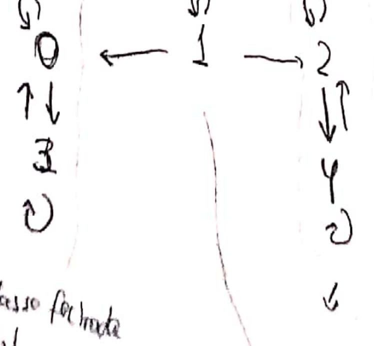
7. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

P^1_{10}

a) Classifique os estados. Justifique. b) Determine $P(X_5 = 0 | X_3 = 1)$. Justifique. c) Determine $P(X_5 = 0 | X_3 = 1, X_6 = 2) = 0$ Justifique. d) Determine uma medida estacionária. Ela é única? Justifique. e) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2 | X_0 = 1)$. Justifique.

↳ prob. de ter passado no 0.



1

$\pi^A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$\pi^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\pi = \alpha \pi^A + (1-\alpha)\pi^C$ estac. $\forall \alpha \in (0,1)$

⟶ por comb. linear convexa está no espaço (SIMPLEX).

classe fechada
est. recorrentes
positivos

Transiente
$P_1(T_1 = \infty) \geq p(1,0) = 1/3$

8. Se Y tem distribuição uniforme em $(0, 5)$ qual é a probabilidade de que a equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ tenha duas raizes reais?

9. Seja N uma variável aleatória discreta não negativa. Mostre que $E(X) = \sum_{k \geq 1} P(N \geq k)$.

10. Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de v.a. i.i.d. Binomial com parâmetros (n, p_n) com $np_n \to \lambda$ co $n \to \infty$. Determine a distribuição de probabilidade limite de X_n. Poisson

11. Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente, λ_1 e λ_2. a) Determine $P(X_1 < X_2)$, b) Determine a distribuição de probabilidade de $\min\{X_1, X_2\}$

12. Certo tipo de bateria permite uma lanterna funcionar por um tempo que é uma v.a. com média 40 horas e desvio padrão 20 horas. Dispomos de 25 dessas baterias. Estime a probabilidade de que a lanterna possa ser usada por pelo menos 1100 horas. TLC

13. Paradoxo de Simpson. Um médico testou duas drogas com os seguintes resultados

	Mulheres		Homens	
	Droga1	Droga2	Droga1	Droga2
Sucesso	20	10	19	1000
Fracasso	1800	190	1	1000

testando c droga contra cada doença

Qual das drogas é melhor? (considere as proporções de sucesso globais e por sexo)

14. Uma matriz de transição de uma cadeia de Markov $\mathbf{P}$ é dita duplamente estocástica se $\sum_{i \in S} \mathbf{P}_{(i,j)} = \sum_{j \in S} \mathbf{P}_{(i,j)} = 1$. Mostre que se todos os termos dessa matriz são não-nulos e o espaço de estados é finito então a distribuição uniforme é estacionária. Esta é a distribuição estacionária é única?

15. O número de clientes num sistema em cada instante t ($X_t \in \{0, 1, \ldots\}$) evolue conforme uma cadeia de Markov (tempo discreto) com probabilidades de transição dadas por $P_{i,i+1} = \frac{2}{3}$, para $i \geq 0$ e $P_{i,i-1} = \frac{1}{3}$, para $i \geq 1$. Suponha que no instante 0 a distribuição do sistema é tal que há k clientes no sistema com probabilidade $\frac{1}{2}^{k+1}$. Qual é o número médio de clientes no sistema no instante 1?

16. Numa roleta existem 38 números sendo 18 pretos, 18 vermelhos e 2 verdes. Um jogador sempre aposta no preto (probabilidade de ganhar de $\frac{18}{38}$) e, dependendo do resultado, ganha ou perde 1 real. Ele começa a jogar com 10 reais e para se perder tudo ou ganhar 90 (ou seja, atingir a "fortuna" de 100 reais. Qual é a probabilidade dele acabar perdendo tudo? Qual é a probabilidade de perder tudo se ele ficar *duplamente ganancioso*, isto é, se decidir parar somente se arruinado ou se atingir 200 reais?

17. Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

a) Classifique os estados e determine seus períodos. b) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 0)$. c) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 0, X_6 = 2)$. d) Determine uma medida estacionária. Ela é única? e) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2|X_0 = 3)$.

18. Quatro bolas numeradas de 1 até 5 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 5, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja X_n o número de bolas na urna A no instante n.
a) Determine a matriz de transição de $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Essa cadeia é irredutível?
b) A distribuição uniforme no espaço de estados é invariante?
c) Se no instante 1 cada uma das bolas é colocada ao acaso na urna A (probabilidade $\frac{1}{2}$) ou na urna B (probabilidade $\frac{1}{2}$), independentemente, determine a probabilidade de existirem duas bolas na urna A no instante 2.

19. *Processo de nascimento e morte.* Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com Matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por:

$$\mathbf{P}_{i,j} \equiv P_{i,j} = \begin{cases} q_i & \text{se } i \geq 1 \text{ e } j = i-1 \\ r_i & \text{se } j = i \\ p_i & \text{se } j = i+1 \end{cases} \tag{1}$$

Classifique os estados desta cadeia e determine os períodos de seus estados. Determine uma medida estacionária para este sistema.

20. Cada organismo de certo tipo gera um número de descendentes para a próxima geração conforme uma variável aleatória com distribuição binomial com $n = 3$ e $p = 0.5$. Assuma independência. Determine a esperança de X_n = número de organismos na n-ésima geração se $X_0 = 1$.

21. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Classifique os estados. b) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 2)$. c) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 2, X_6 = 2)$. d) Determine uma medida estacionária. Ela é única? e) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2|X_0 = 3)$.

19.

$p_i q_i > 0 \Rightarrow$ Irredutível

$\pi(j)[1-p_{jj}] = \sum_{i\in S, i\neq j} \pi(i) P_{ij}$

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE MAE5709

①

Eventos

E_A, E_B, E_C: o prisioneiro A, B ou C, respectivamente, é executado

S_B, S_C: o prisioneiro A fica sabendo pelo carcereiro que o prisioneiro B ou C, resp., não será executado

$$P(E_A|S_B) = \frac{P(E_A \cap S_B)}{P(S_B)} =$$

$$= \frac{P(E_A)P(S_B|E_A)}{P(E_A)P(S_B|E_A) + P(E_B)P(S_B|E_B) + P(E_C)P(S_B|E_C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1+0+2}{6}} = \frac{1}{3} = P(E_A)$$

Portanto, a probabilidade de o prisioneiro A ser executado dado que ele sabe o nome de um dos outros dois que vai ser solto é $\frac{1}{3}$, a mesma probab. de antes dessa informação, ou seja, o prisioneiro tem razão

(2) Seja L a v.a que representa o lucro do jogador B. Sejam a e $a+1$ os valores escritos nos dois pedaços de papel. N, o valor escrito no papel do jogador B, também é aleatório, daí está errado o raciocínio dele. O correto seria

$$E(L) = \mathbb{P}(N=a)\,E(L|N=a)$$
$$+\,\mathbb{P}(N=a+1)\,E(L|N=a+1) =$$
$$= \frac{1}{2}(a+1) + \frac{1}{2}(-(a+1)) = 0$$

Portanto, o lucro esperado, na verdade, é zero.

(3) Vamos considerar uma cadeia de Markov homogênea com o seguinte espaço de estados.
$S = \{1, 2, \ldots, 52\}$, cada estado representando uma posição no baralho, sendo 1 o topo e 52 a posição mais inferior. A matriz de transição P é dada pelas seguintes entradas:

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i-1}{52}, & i = 2, 3, \ldots, 52 \\ & j = i \\ \dfrac{53-i}{52}, & i = 2, 3, \ldots, 52 \\ & j = i-1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} \dfrac{1}{52}, & i = 1 \\ & j = 1, \ldots, 52 \end{matrix}$$

Isto é,

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & 51 & 52 \\ \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{52} & \frac{1}{52} & \frac{1}{52} & \cdots & \frac{1}{52} & \frac{1}{52} \\ \frac{51}{52} & \frac{1}{52} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{50}{52} & \frac{2}{52} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{52} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 52 \end{array}$$

Como a cadeia de Markov é irredutível e aperiódica e todos os estados são recorrentes positivos (todos os estados de uma cadeia de Markov irredutível com espaço de estados finito são recorrentes positivos), então a solução do sistema

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=1}^{52} \pi_i P_{ij}, \quad j = 1, \dots, 52 \\ \sum_{j=1}^{52} \pi_j = 1 \end{cases}$$

corresponde à distribuição limite da cadeia.

Além disso, como P é uma matriz duplamente estocástica $\left(\sum_{i=1}^{52} P_{ij} = 1, \forall j\right)$, então $\pi_j = \frac{1}{52}$, $j = 1, \dots, 52$.

Portanto podemos dizer que após muitas repetições do procedimento descrito no enunciado, o baralho tende a ficar bem embaralhado, no sentido de que todas as cartas têm aproximadamente a mesma probabilidade de estar em qualquer ponto do baralho.

④ $\{\xi_{i,j}\}_{\{i\geq 0,\, j\geq 0\}}$ v.a's i.i.d. c/ valores em $\mathbb{N}$

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} \quad e \quad X_0 = 1$$

Mostrar que, se $E(\xi) \leq 1$, o processo se extingue c/ prob. 1.

[Resolução baseada em anotacoesdeaula.wordpress.com/2013/05/21/impa-bc1414-ramificacao/]

Seja $q_n := \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, então $q_n \leq q_{n+1}$, isto é, $(q_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência não-decrescente e limitada $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq 1$. Portanto, existe o limite

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n$$

e, pela continuidade de $\mathbb{P}$;

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \{Z_n = 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) =$$

$$= q.$$

ou seja, $q = \mathbb{P}(\text{extinção})$ e satisfaz $q = P_\xi(q)$.

- $P_{X_{n+1}}(s) = P_{\xi_{n,1}+\cdots+\xi_{n,X_n}}(s) = P_{X_n}(P_\xi(s))$

para $n \geq 1$ e $s \in [0,1]$

fç. geradora de prob.: $P_X(s) = E(s^X)$

Iterando a expressão acima, a função geradora de probabilidade de X_n é obtida em função da de ξ, pois $P_{X_0}(s) = s$ e

$$P_{X_n}(P_\xi(s)) = P_{X_{n-1}}(P_\xi(P_\xi(s))) = \dots =$$

$$= \underbrace{P_\xi \circ P_\xi \circ \dots \circ P_\xi(s)}_{n \text{ termos } P_\xi} = P_\xi(P_{X_n}(s)) \qquad (1)$$

Como $P_{X_n}(0) = \mathbb{P}(X_n = 0)$, de (1) temos

$$q_{n+1} = P_\xi(q_n)$$

e, como P_ξ é contínua, resulta que $q = P_\xi(q)$.

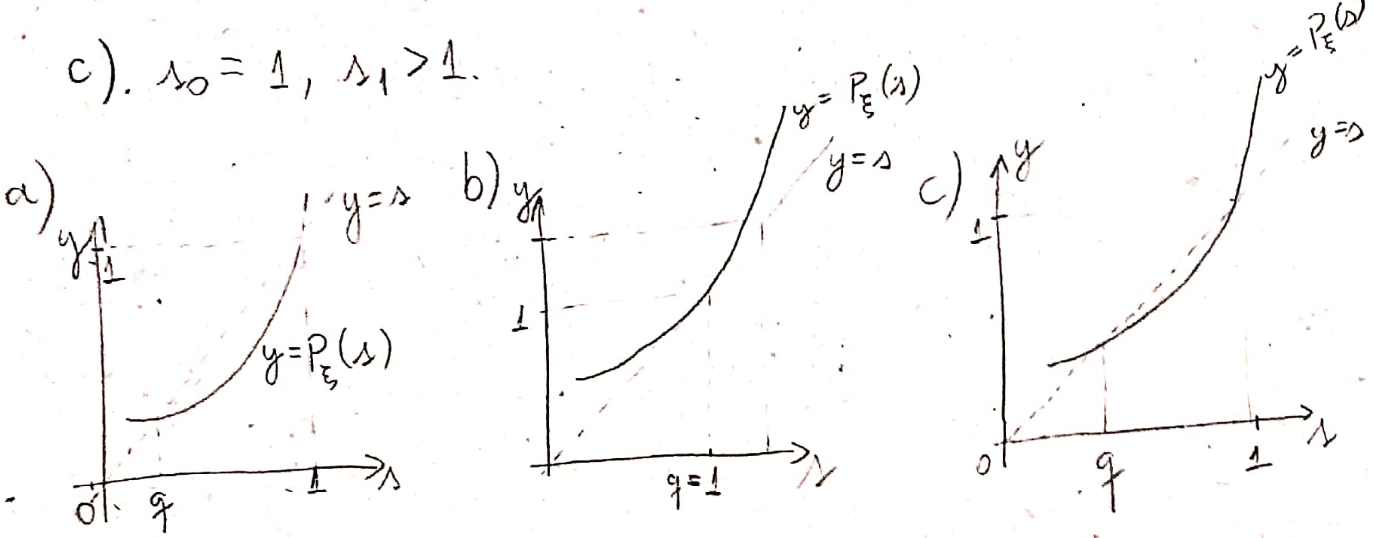
Analisemos as soluções da equação $s = P_\xi(s)$ para $s \in [0\ 1]$. Primeiro, observamos que, para $s \geq 0$, vale que as derivadas são positivas: $P_\xi'(s), P_\xi''(s) \geq 0$. Portanto, a função é crescente e côncava para cima, de modo que a reta $y = s$ encontra a curva $y = P_\xi(s)$ em no máximo dois pontos do plano cartesiano, di-

gamos que dê coordenadas iguais a s_0 e s_1.
Como $1 = P_\xi(1)$, as possibilidades para as raízes da equação $s = P_\xi(s)$ são:

a) $s_0 < 1$, $s_1 = 1$;

b) $s_0 = s_1 = 1$;

c) $s_0 = 1$, $s_1 > 1$.



Como q se trata de uma probabilidade, que não pode ser maior que 1, nos casos "b" e "c" podemos concluir que $q = 1$, ou seja, a extinção é certa. Lembremos que $q_{n+1} = P_\xi(q_n)$, $q_0 = 0$ e $q_n \uparrow q$.
Então,

$$q_{n+1} = P_\xi(q_n) \leq P_\xi(q) = q \text{ para } q = s_0 \text{ e } q = s_1,$$

pois P_ξ é crescente. Portanto, $q_n \leq \min\{s_0, s_1\}$, $\forall n \geq 0$.
Logo, $(q_n)_{n\geq 0}$ converge p/ a menor solução positiva de $s = P_\xi(s)$.

CONTINUA NO FIM DA LISTA

(5)

a) $X = \min\{T_1, T_2\}$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\min\{T_1, T_2\} \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min\{T_1, T_2\} > x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(T_1 > x, T_2 > x) \underset{\substack{\downarrow \\ T_1, T_2 \text{ indep.}}}{=} 1 - \mathbb{P}(T_1 > x)\mathbb{P}(T_2 > x) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, \quad \underline{x \geq 0}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, \quad \underline{x \geq 0}$$

$\therefore X \sim \text{Exponencial}(\lambda_1+\lambda_2)$.

b) $$\mathbb{P}(X = T_1) = \mathbb{P}(T_1 \leq T_2) = \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} \, dt_2 \, dt_1$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_1} dt_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t_1} dt_1}_{=1} =$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

c) $$\mathbb{P}(X = T_1 \mid X < s) = \frac{\mathbb{P}(X = T_1, X < s)}{\mathbb{P}(X < s)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T_1 < s, T_1 \leq T_2)}{\mathbb{P}(X < s)} = \frac{\mathbb{P}(T_1 < s < T_2) + \mathbb{P}(T_1 \leq T_2 < s)}{\mathbb{P}(X < s)}$$

$$\mathbb{P}(T_1 < s < T_2) = \int_s^\infty \int_0^s \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_s^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} (1 - e^{-\lambda_1 s}) dt_2 =$$

$$= \int_s^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 - \int_s^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_1 s - \lambda_2 t_2} dt_2 =$$

$$= e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s} e^{-\lambda_2 s} = e^{-\lambda_2 s}(1 - e^{-\lambda_1 s})$$

$$\mathbb{P}(T_1 \leq T_2 < s) = \int_0^s \int_{t_1}^s \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 dt_1 =$$

$$= \int_0^s \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} (e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 s}) dt_1 =$$

$$= \int_0^s \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t_1} dt_1 - e^{-\lambda_2 s} \int_0^s \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 =$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)s}) - e^{-\lambda_2 s}(1 - e^{-\lambda_1 s})$$

Άρα,

$$\mathbb{P}(X = T_1 \mid X < s) =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_2 s}\cancel{(1 - e^{-\lambda_1 s})} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}(1 - \cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}}) - e^{-\lambda_2 s}\cancel{(1 - e^{-\lambda_1 s})}}{1 - \cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}}} =$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

6 $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$
$X = X_1 + \dots + X_N$
$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$

Mostrar que $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$.

$$P(X=x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, P(X=x \mid N=n) =$$

$x \leq n$
$n \geq x$

$$= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^x}{x!(1-p)^x} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{(n-x)!} \cdot (1-p)^n =$$

$m = n-x$
$n = m+x$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^x}{x!(1-p)^x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{m+x}}{m!} =$$

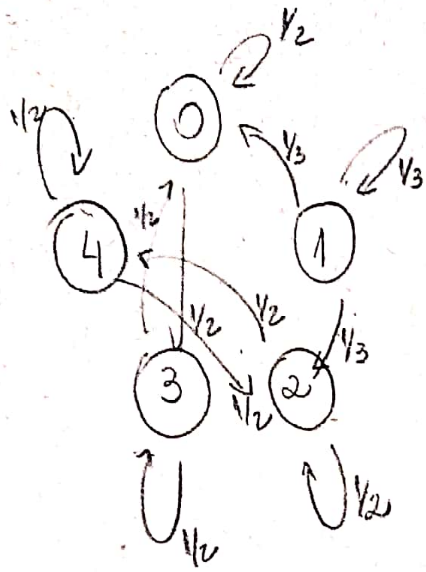
$$= \frac{e^{-\lambda} p^x [\lambda(1-p)]^x}{x!(1-p)^x} e^{\lambda(1-p)} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1-p)}[\lambda(1-p)]^m}{m!}}_{=1} =$$

$$= \frac{e^{\cancel{-\lambda}\cancel{+\lambda}-\lambda p}\, p^x \lambda^x \cancel{(1-p)^x}}{x!\cancel{(1-p)^x}} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$\therefore X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

⑦

a)



Os estados 0 e 3 comunicam-se e formam uma classe de estados recorrentes (positivos).

O estado 1 constitui uma classe separada e é um estado transitório, pois

$\mathbb{P}$(cadeia não retornar mais ao estado 1 estando nele) $> \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = 1/3 > 0$.

Os estados 2 e 4 constituem uma classe de estados recorrentes (positivos), pois

$\mathbb{P}$(cadeia retornar ao estado 2 estando nesse estado) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{2} = 1$ //.

(São recor. positivos, pois todos os estados recorrentes de uma CM c/ espaço de estados finito são recor. pos.)

(11)

b) $\mathbb{P}(X_5=0 \mid X_3=1) = \mathbb{P}(X_2=0 \mid X_0=1)$

$$\underset{\sim}{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ 5/18 & 1/9 & 5/18 & 1/6 & 1/6 \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(X_5=0 \mid X_3=1) = \frac{5}{18}$$

c) $\mathbb{P}(X_5=0 \mid X_3=1, X_6=2) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_3=1, X_5=0, X_6=2)}{\mathbb{P}(X_3=1, X_6=2)} =$$

$$= \frac{\cancel{\mathbb{P}(X_3=1)}\,\mathbb{P}(X_5=0 \mid X_3=1)\,\mathbb{P}(X_6=2 \mid X_3=1, X_5=0)}{\cancel{\mathbb{P}(X_3=1)}\,\mathbb{P}(X_6=2 \mid X_3=1)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2=0 \mid X_0=1)\,\mathbb{P}(X_1=2 \mid X_0=0)}{\mathbb{P}(X_3=2 \mid X_0=1)}$$

$$\underset{\sim}{p}^3 = \frac{\frac{5}{18}\cdot 0}{\mathbb{P}(X_3=2 \mid X_0=1)} = 0$$

d)
$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

Uma possível medida estacionária (quíntupla que satisfaz o sistema acima) é

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Não é única. Qualquer quíntupla da forma

$\left(\alpha, 0, \frac{1}{2}-\alpha, \alpha, \frac{1}{2}-\alpha\right)$ com $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ satisfaz o sistema acima.

Isso ocorre pelo fato de que a cadeia de Markov não é irredutível.

e) Como $\{0, 3\}$ e $\{2, 4\}$ são classes fechadas (a probabilidade de a cadeia sair de cada classe estando nela é nula), a probabilidade limite pedida no enunciado dependerá da probabilidade de a cadeia passar para cada uma dessas classes estando no estado 1 e das probabilidades estacionárias dentro de cada uma dessas classes fechadas. Assim:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\mathbb{P}(X_1 \in \{0,3\} \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{0,3\})$$
$$+ \mathbb{P}(X_1 \in \{2,4\} \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{2,4\})$$
$$+ \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 = 1) \Big]$$

Seja $L = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 1)$. Dessa forma,

$$L = \left(\frac{1}{3} + 0\right) \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{0,3\})$$
$$+ \left(\frac{1}{3} + 0\right) \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{2,4\})$$
$$+ \frac{1}{3} L$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\cancel{3}} L = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{2,4\})$$

Para encontrar $\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{2,4\})}_{= \pi_2^{\{2,4\}}}$, consideremos uma CM com matriz de transição dada por

$$\underset{\sim}{P}_{\{2,4\}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_2^{\{2,4\}} = \frac{1}{2} \pi_2^{\{2,4\}} + \frac{1}{2} \pi_4^{\{2,4\}} \\ \pi_4^{\{2,4\}} = \frac{1}{2} \pi_2^{\{2,4\}} + \frac{1}{2} \pi_4^{\{2,4\}} \\ \pi_2^{\{2,4\}} + \pi_4^{\{2,4\}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_2^{\{2,4\}} = 1/2 \\ \pi_4^{\{2,4\}} = 1/2 \end{cases}$$

Portanto,

$$2L = \pi_2^{\{2,4\}} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = 1/4$$

(8) $Y \sim$ Uniforme $(0,5)$

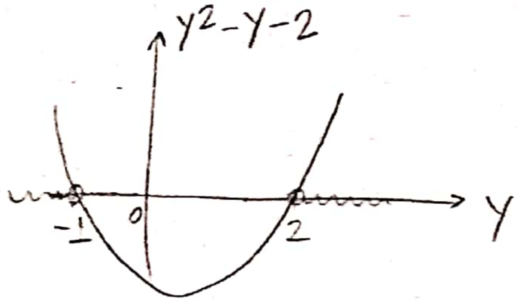
$\mathbb{P}(4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ ter duas raízes reais$) =$

$= \mathbb{P}\left(\Delta = (4Y)^2 - 4 \times 4 \times (Y+2) > 0\right) =$

$= \mathbb{P}\left(16Y^2 - 16Y - 32 > 0\right) =$

$= \mathbb{P}\left(Y^2 - Y - 2 > 0\right) =$

$= \mathbb{P}\left(Y < -1 \text{ ou } Y > 2\right) =$



$= \mathbb{P}(Y < -1) + \mathbb{P}(Y > 2) = 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

(9) N v.a. discreta não-negativa.

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N=n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k)$$

(10) $X_n \sim$ Binomial (n, p_n).

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p_n^x (1-p_n)^{n-x} =$$

$$= \frac{\overset{\to\lambda}{np_n}\,\overset{\to\lambda}{(n-1)p_n}\cdots\overset{\to\lambda}{(n-x+1)p_n}}{x!}\underbrace{\left(1 - \frac{\overset{\to\lambda}{(n-x)p_n}}{n-x}\right)^{n-x}}_{\to e^{-\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

$x = 0, 1, 2, \ldots$

Portanto, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}}$ Poisson (λ).

(11)

a) $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ (exercício 5, item "b")

b) $\min\{X_1, X_2\} \sim$ Exponencial $(\lambda_1+\lambda_2)$ (ex. 5, item "a")

(12) Sejam $X_1, \dots, X_{25}$ os tempos de funcionamento das 25 baterias. Como $X_1, \dots, X_{25}$ são v.a i.i.d. com média e variância finitas, podemos aplicar o TLC para obter uma aproximação para $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 1100)$.

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i \geq 1100\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25\times 40}{\sqrt{25\times 20^2}} \geq \frac{1100 - 25\times 40}{\sqrt{25\times 20^2}}\right) \approx$$

$$\approx \mathbb{P}(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1).$$

TLC

(13) Proporções de sucesso globais. D_1: 0,0212

D_2: 0,45909

Prop de suc. por sexo: Masc.: D_1: 0,95 Fem D_1: 0,01099

D_2: 0,5 D_2: 0,05

(14) Para que mostrar que a distribuição uniforme é uma distribuição estacionária da CM, precisamos mostrar que ela satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_i P_{ij}\pi_i, \ \forall j \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Seja s o número de estados da CM. Assim, $\pi_j = \frac{1}{s}$, $j = 1, \ldots, s$. Dessa forma, temos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} P_{ij}\pi_i = \sum_{i=1}^{s} P_{ij}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} P_{ij} = \frac{1}{s}\cdot 1 = \frac{1}{s} = \pi_j, \ \forall j \in \{1, \ldots, s\} \\ \sum_{j=1}^{s}\pi_j = \sum_{j=1}^{s}\frac{1}{s} = s \times \frac{1}{s} = 1 \end{cases}$$

P é duplamente estocástica

Portanto, a distr. unif. $\pi_j = \frac{1}{s}$, $j = 1, \ldots, s$, é estacionária.

Se todos os termos da matriz são não-nulos e se o espaço de estados é finito, então a CM é irredutível e recorrente positiva, de modo que os $\pi_j = \frac{1}{s}$, $j = 1, \ldots, s$, são a única solução não-negativa de $(*)$. Logo, a distr. estac. é única.

(15)

$$E(X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = k) E(X_1 | X_0 = k) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\times 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{2}{3}\times(k+1) + \frac{1}{3}\cdot(k-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{2k+2+k-1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\left(k + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3}\frac{1/4}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{1/\cancel{2}} + 3\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\times \cancel{2} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 6}{6} + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3} =$$

$$= \frac{2+6+9}{6} = \frac{17}{6}.$$

(16) Como visto em aula,

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & \text{se } p \neq 1/2 \\ \dfrac{i}{N} & \text{se } p = 1/2. \end{cases}$$

em que f_i é a prob. de a fortuna do jogador atingir N, começando com i, $0 \leq i \leq N$.

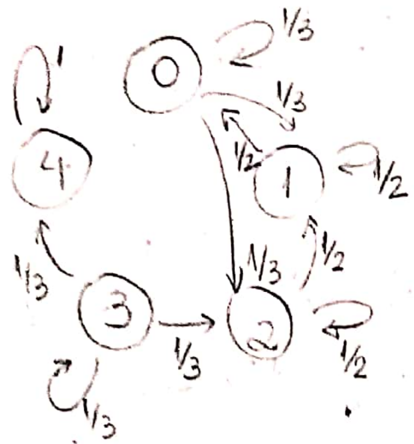
Assim, com $i = 10$, $N = 100$, $p = \frac{18}{38}$, $q = \frac{20}{38}$, temos

$$f_{10} = \frac{1-(20/18)^{10}}{1-(20/18)^{100}} = \frac{-1,86797}{-37647,6195} = 0,00005$$

Se o jogador for duplamente ganancioso,

$$f_{10} = \frac{1-(20/18)^{10}}{1-(20/18)^{200}} = \frac{-1,86797}{-1417418548,95387} = 1,3 \times 10^{-9}$$

(17)



a) $\{0, 1, 2\}$ é uma classe de estados transitórios. $\{3\}$ é uma classe com um estado transitório. $\{4\}$ é uma classe com um estado recorrente (positivo, pois a classe tem um número finito de estados, e absorvente).

b) $\mathbb{P}(X_5 = 1 \mid X_3 = 0) = P_{00}P_{01} + P_{01}P_{11} + P_{02}P_{21} + P_{03}P_{31} + P_{04}P_{41} =$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{2+3+3}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$P(X_5=1 \mid X_3=0, X_6=2) = \frac{P(X_3=0, X_5=1, X_6=2)}{P(X_3=0, X_6=2)} =$$

$$= \frac{\cancel{P(X_3=0)}\, P(X_5=1 \mid X_3=0)\, P(X_6=2 \mid X_5=1)}{\cancel{P(X_3=0)}\, P(X_6=2 \mid X_3=0)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9} \times 0}{\sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{4} P_{0i} P_{ij} P_{j2}} = 0$$

d) Para que uma distribuição de prob. $(\pi_0, \dots, \pi_4)$ (com $\pi_i \geq 0$, $i = 0, \dots, 4$, e $\sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1$) seja uma medida estacionária, devemos ter

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{4} \pi_i P_{ij}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, 4\}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_4 = \frac{1}{3}\pi_3 + \pi_4 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{4}\right)$ satisfaz o sistema acima. Essa solução não é única; qualquer quíntupla da forma $\left(\frac{1-\alpha}{3}, \frac{4(1-\alpha)}{9}, \frac{2(1-\alpha)}{9}, 0, \alpha\right)$ com $0 \leq \alpha \leq 1$ satisfaz o sistema e também pode ser considerado medida estacionária.

e) $L = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 3) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\mathbb{P}(X_1 \in \{0,1,2\} | X_0 = 3)\, \mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 \in \{0,1,2\})$$
$$+ \mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 3)\, \mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 3)$$
$$+ \mathbb{P}(X_1 = 4 | X_0 = 3)\, \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 4)}_{0} \Big]$$

Como $\{0, 1, 2\}$ é uma classe de estados fechada com estados recorrentes positivos e aperiódicos, podemos calcular as probabilidades limite dentro dessa classe, i.e, uma vez que a CM se encontra num desses estados. Para isso, vamos primeiramente considerar uma cadeia de Markov com matriz de transição dada por

$$\mathbb{P}_{\{0,1,2\}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} \pi_0^{\{0,1,2\}} = \frac{1}{3}\pi_0^{\{0,1,2\}} + \frac{1}{2}\pi_1^{\{0,1,2\}} \\ \pi_1^{\{0,1,2\}} = \frac{1}{3}\pi_0^{\{0,1,2\}} + \frac{1}{2}\pi_1^{\{0,1,2\}} + \frac{1}{2}\pi_2^{\{0,1,2\}} \\ \pi_2^{\{0,1,2\}} = \frac{1}{3}\pi_0^{\{0,1,2\}} + \frac{1}{2}\pi_2^{\{0,1,2\}} \\ \pi_0^{\{0,1,2\}} + \pi_1^{\{0,1,2\}} + \pi_2^{\{0,1,2\}} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0^{\{0,1,2\}} = 1/3 \\ \pi_1^{\{0,1,2\}} = 4/9 \\ \pi_2^{\{0,1,2\}} = 2/9 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{0,1,2\}) \end{cases}$$

Logo,

$$L = \left(0 + 0 + \frac{1}{3}\right) \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 \in \{0,1,2\}) + \frac{1}{3}L + \frac{1}{3}\times 0 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\times L$$

$$\Rightarrow \frac{27-9}{27}L = \frac{2}{27} \rightarrow L = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

18

a) $P_{00} = \frac{1}{6}$ $P_{01} = \frac{5}{6}$

$P_{10} = \frac{1}{6}$ $P_{11} = \frac{1}{6}$ $P_{12} = \frac{4}{6}$

$P_{21} = \frac{2}{6}$ $P_{22} = \frac{1}{6}$ $P_{23} = \frac{3}{6}$

$P_{32} = \frac{3}{6}$ $P_{33} = \frac{1}{6}$ $P_{34} = \frac{2}{6}$

$P_{43} = \frac{4}{6}$ $P_{44} = \frac{1}{6}$ $P_{45} = \frac{1}{6}$

$P_{54} = \frac{5}{6}$ $P_{55} = \frac{1}{6}$

$$\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

A cadeia é irredutível (todos os estados pertencem a uma única classe, pois todos eles se comunicam entre si)

b) Uma distribuição invariante (=estacionária) deve satisfazer

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{5} P_{ij}\pi_i \\ \sum_{j=0}^{5} \pi_j = 1 \\ \pi_j \geq 0, \ j = 0, 1, \dots, 5 \end{cases}$$

A distribuição unif. no esp de estados seria $\pi_j = \frac{1}{6}$, $j = 0, 1, \dots, 5$. Notemos que ela não satisfaz o sistema acima, pois, por exemplo,

$$\frac{1}{6} \neq P_{01}\frac{1}{6} + P_{11}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

c) As probabilidades iniciais de cada estado são

$p_0 = \frac{1}{32}$ $\quad p_1 = \frac{5}{32}$ $\quad p_2 = \frac{10}{32}$

$p_3 = \frac{10}{32}$ $\quad p_4 = \frac{5}{32}$ $\quad p_5 = \frac{1}{32}$

$$P(X_2 = 2) = p_0 P_{02} + p_1 P_{12} + p_2 P_{22} + p_3 P_{32} + p_4 P_{42} + p_5 P_{52} =$$
$$= \frac{1}{32} \cdot 0 + \frac{5}{32} \cdot \frac{4}{6} + \frac{10}{32} \cdot \frac{1}{6} + \frac{10}{32} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{32} \cdot 0 + \frac{1}{32} \cdot 0 = \frac{5}{16}$$

19 Estado 0:

$P_{0,0} = r_0 \qquad P_{0,1} = p_0$

Se $r_0 > 0$, o período do estado 0 é 1.

Se $r_0 = 0$ e $q_1 > 0$, o período do estado 0 é 2.

Se $r_0 = 0$ e $q_1 = 0$, o período do estado 0 é infinito.

Estado i, $i \geq 1$:

$P_{i,i-1} = q_i \qquad P_{i,i} = r_i \qquad P_{i,i+1} = p_i$

Se $r_i > 0$, o período do estado i é 1.

Se $r_i = 0$ e $((p_i > 0$ e $q_{i+1} > 0)$ ou $(q_i > 0$ e $p_{i-1} > 0))$, o período do estado i é 2.

Se $r_i = 0$ e $p_i q_{i+1} + q_i p_{i-1} = 0$, o período do estado i é infinito.

Para que uma medida seja estacionária, no caso desta CM ela deve satisfazer

$$\begin{cases} \pi_i = p_{i-1}\pi_{i-1} + r_i \pi_i + q_{i+1}\pi_{i+1}, \quad i \geq 1 & (*) \\ \pi_0 = r_0 \pi_0 + q_1 \pi_1 & (**) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Para $i \geq 1$, por $(*)$,

$$q_{i+1}\pi_{i+1} = (1-r_i)\pi_i - p_{i-1}\pi_{i-1}$$
$$= (p_i+q_i)\pi_i - p_{i-1}\pi_{i-1}$$
$$\Rightarrow q_{i+1}\pi_{i+1} - p_i\pi_i = q_i\pi_i - p_{i-1}\pi_{i-1}$$

Recursivamente,

$$q_{i+1}\pi_{i+1} - p_i\pi_i = q_i\pi_i - p_{i-1}\pi_{i-1} =$$
$$= \cdots = q_2\pi_2 - p_1\pi_1 = q_1\pi_1 - p_0\pi_0$$

Além disso, por $(**)$,

$$\pi_0 = r_0\pi_0 + q_1\pi_1$$
$$\Rightarrow \underbrace{(1-r_0)}_{p_0}\pi_0 = q_1\pi_1 \Rightarrow q_1\pi_1 - p_0\pi_0 = 0$$

Logo,

$$q_{i+1}\pi_{i+1} - p_i\pi_i = 0, \ \forall i \geq 0$$
$$\Rightarrow q_{i+1}\pi_{i+1} = p_i\pi_i, \ \forall i \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{q_{i+1}}{p_i} = \frac{\pi_i}{\pi_{i+1}}, \ \forall i \geq 0$$

e, assim,

$$\pi_i = \frac{p_{i-1}}{q_i}\pi_{i-1} = \frac{p_{i-1}}{q_i}\frac{p_{i-2}}{q_{i-1}}\pi_{i-2} = \cdots = \left[\prod_{j=0}^{i-1}\frac{p_j}{q_{j+1}}\right]\pi_0$$

de modo que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}} \right] \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}} \right]}$$

e

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}} \right]}, \quad \underline{i \geq 1}$$

(20) $E(X_n) = E[E(X_n | X_{n-1})] = E[E(Y_{n,1} + \dots + Y_{n,X_{n-1}})] =$

$= E[X_{n-1} E(Y_{n,1})] = E(Y_{n,1}) E(X_{n-1}) =$

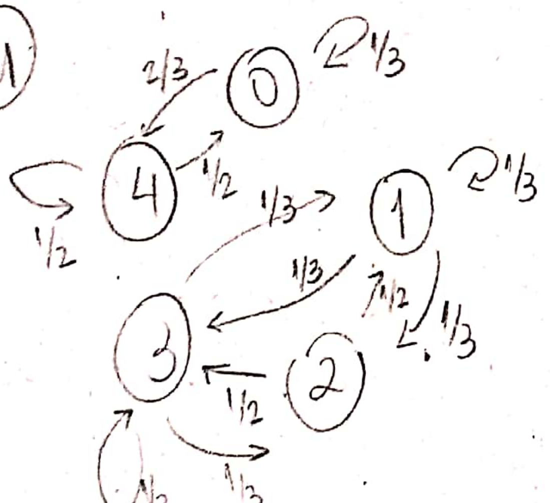
$= E(Y_{n,1}) E(Y_{n-1,1}) E(X_{n-2}) = \dots =$

$= E(Y_{n,1}) E(Y_{n-1,1}) \cdots E(Y_{1,1}) \underbrace{E(X_0)}_{1} =$

$= (E(Y_{1,1}))^n =$

$= (3 \times 0{,}5)^n = (1{,}5)^n$

(21)



a) $\{0, 4\}$ é uma classe de estados recorrentes.

$\{1, 2, 3\}$ é uma classe de estados recorrentes.

b) $P(X_5 = 1 | X_3 = 2) = P(X_2 = 1 | X_0 = 2) =$

$= P_{20} P_{01} + P_{21} P_{11} + P_{22} P_{21} + P_{23} P_{31} + P_{24} P_{41} =$

$= 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

c) $$\mathbb{P}(X_5=1 \mid X_3=2, X_6=2) = \frac{\mathbb{P}(X_3=2, X_5=1, X_6=2)}{\mathbb{P}(X_3=2, X_6=2)} =$$

$$= \frac{\cancel{\mathbb{P}(X_3=2)}\, \mathbb{P}(X_5=1 \mid X_3=2)\, \mathbb{P}(X_6=2 \mid X_5=1)}{\cancel{\mathbb{P}(X_3=2)}\, \mathbb{P}(X_6=2 \mid X_3=2)} =$$

$$= \frac{(P_{20}P_{01} + P_{21}P_{11} + P_{22}P_{21} + P_{23}P_{31} + P_{24}P_{41}) \times P_{12}}{\begin{aligned} &P_{20}P_{00}P_{02} + P_{20}P_{01}P_{12} + P_{20}P_{02}P_{22} + P_{20}P_{03}P_{32} + P_{20}P_{04}P_{42} \\ &+ P_{21}P_{10}P_{02} + P_{21}P_{11}P_{12} + P_{21}P_{12}P_{22} + P_{21}P_{13}P_{32} + P_{21}P_{14}P_{42} \\ &+ P_{22}P_{20}P_{02} + P_{22}P_{21}P_{12} + P_{22}P_{22}P_{22} + P_{22}P_{23}P_{32} + P_{22}P_{24}P_{42} \\ &+ P_{23}P_{30}P_{02} + P_{23}P_{31}P_{12} + P_{23}P_{32}P_{22} + P_{23}P_{33}P_{32} + P_{23}P_{34}P_{42} \\ &+ P_{24}P_{40}P_{02} + P_{24}P_{41}P_{12} + P_{24}P_{42}P_{22} + P_{24}P_{43}P_{32} + P_{24}P_{44}P_{42} \end{aligned}} =$$

$$= \frac{\left(0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\right)\cdot\frac{1}{3}}{\begin{aligned} &0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &+ 0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + 0 \\ &+ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &+ 0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3} + 0 \\ &+ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \end{aligned}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{63}{6}} = \frac{1}{9}$$

d) Uma distribuição de prob. $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ é estacionária para a cadeia se $\pi_j = \sum_{i=0}^{4} P_{ij}\pi_i$, $j = 0, \dots, 4$, ou seja,

$$\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_4$$

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\pi_3 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3$$

$$\pi_4 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_4$$

Uma solução possível para o sistema acima é a distribuição $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \left(\frac{3}{14}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{2}{7}\right)$.

Ela não é única. Qualquer distribuição da forma $(\alpha, \beta, \frac{2}{3}\beta, \beta, \frac{4}{3}\alpha)$ com $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{7}$ e $0 \leq \beta \leq \frac{3}{8}$ satisfaz o sistema acima e pode ser considerada cadeia de Markov com matriz de transição dada por

$$\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

pois tal cadeia é irredutível, recorrente positiva e aperiódica)

Todos os estados de uma CM c/ espaço de estados finito são recorrentes positivos e aperiódicos

CONTINUAÇÃO Q. 4:

Ademais, pela esperança via função geradora ($P_X'(1) = E(X)$), a inclinação da reta tangente em $(1,1)$ na curva $y = P_\xi(s)$ é $E(\xi)$, de modo que, no caso "a", $E(\xi) > 1$; no caso "b", $E(\xi) = 1$, e, no caso "c", $E(\xi) < 1$.

Em resumo:

prob de extinção

$\mu > 1 \Rightarrow q < 1$

$\mu \leq 1 \Rightarrow q = 1$

estacionária.

c) Como $\{1,2,3\}$ é um conjunto de estados fechado (isto é, $P_{ij} = 0, \forall i \in \{1,2,3\}$ e $\forall j \notin \{1,2,3\}$), então podemos considerar apenas este conjunto de estados na resolução deste item, pois estamos condicionando em $\{X_0 = 3\}$. Assim, vamos achar uma distribuição estacionária dentro da classe $\{1,2,3\}$, qual seja $(\pi_{\{1,2,3\},1}, \pi_{\{1,2,3\},2}, \pi_{\{1,2,3\},3})$.

$$\begin{cases} \pi_{\{1,2,3\},1} = \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},1} + \frac{1}{2}\pi_{\{1,2,3\},2} + \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},3} \\ \pi_{\{1,2,3\},2} = \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},1} + \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},3} \\ \pi_{\{1,2,3\},3} = \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},1} + \frac{1}{2}\pi_{\{1,2,3\},2} + \frac{1}{3}\pi_{\{1,2,3\},3} \\ \pi_{\{1,2,3\},1} + \pi_{\{1,2,3\},2} + \pi_{\{1,2,3\},3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_{\{1,2,3\},1} = 3/8 \\ \pi_{\{1,2,3\},2} = 2/8 \\ \pi_{\{1,2,3\},3} = 3/8 \end{cases}$$

Dessa forma, temos que $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

(Observemos que a distribuição acima é limite p/ a

MAE 5709 -Processos Estocásticos
Prova Substitutiva
Justifique suas respostas!

1. Um baralho com três cartas, denotadas por $1, 2$ e 3, é embaralhado repetindo-se o seguinte procedimento: a carta de cima do baralho é removida e recolocada no baralho, ao acaso, numa das três possiveis posições em relação às duas cartas remanescentes: de volta para a posição inicial (acima das duas), no meio dessas duas cartas ou abaixo das duas. (1,0) a) Descreva este processo como uma cadeia de Markov e classifique os estados. (1,5) b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? Ela é reversível?

2. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S = \{0, 1, \ldots\}$ uma cadeia de Markov com Matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por:

$$\mathbf{P}_{i,j} \equiv P_{i,j} = \begin{cases} q_i & \text{se } i \geq 1 \text{ e } j = i-1 \\ r_i & \text{se } j = i \\ p_i & \text{se } j = i+1 \end{cases} \tag{1}$$

onde os parâmetros não-negativos $\{q_i\}_{i\geq 1}$, $\{r_i\}_{i\geq 0}$ e $\{p_i\}_{i\geq 0}$, satisfazem $q_i + r_i + p_i = 1$, $i \geq 1$ e $r_0 + p_0 = 1$.

(1,0) Classifique os estados desta cadeia e determine os períodos de seus estados. (1,5) b) Se $p_i = 0$ para todo $i \geq 1$, e todos os demais parâmetros são positivos, determine uma medida estacionária para este sistema. Ela é única?

3. (Valor máximo 2,5) Considere uma fila $M/M/\infty$, com taxa de atendimento $\mu = 1$ clientes por minuto e taxa de chegada $\lambda < 1$ clientes por minuto. Suponha que esta cadeia de Markov esteja na sua situação estacionária e que cada cliente paga 10 reais ao término de seu serviço.(0,5) a) Qual é a probabilidade de que o primeiro cliente que chega após um instante t fixado encontre o sistema vazio? (1,0) b) Qual é o número médio de clientes no sistema? (1,0) c) Qual é o tempo médio que um cliente passa no sistema? (0,5) d) Qual é a renda média por minuto deste sistema?

4. (2,5) O conserto de um carro numa oficina envolve duas etapas, executadas por dois funcionários diferentes. A primeira etapa é executada pelo funileiro e demora um tempo que é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade exponencial com média a horas. A segunda etapa é executada pelo pintor e seu tempo de execução é uma v.a. independente da primeira com distribuição **uniforme** com média b horas. A oficina é pequena e só pode atender um carro por vez, de forma que se um cliente em potencial chega ao sistema e o encontra ocupado, ele vai embora. Clientes em potencial chegam conforme um processo de Poisson com taxa λ clientes por hora. No regime estacionário, qual é a proporção do tempo na qual o funileiro está trabalhando?

MAE 5709 -Processos Estocásticos

Prova 2

Justifique suas respostas!

1. **(Valor máximo 2,5)** Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\
4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

(1,0) a) Determine $P(X_{10} = 0 | X_3 = 0, X_{11} = 1)$. (1,0) b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é reversível? (1,0) c) Estime $P(X_n = 3 | X_0 = 4)$ para n muito grande. Justifique.

2. **(Valor máximo 2,5)** Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com parâmetro μ_i ($T_i^j \sim \exp(\mu_i)$); 2) nos momentos de transição os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição $\mathbf{Q}$ dada por

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
2 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\
3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

(1,0) a) Classifique os estados desta cadeia. (1,0) b) Determine as taxas do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$. (1,0) c) Se $\mu_0 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, determine $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2 | X_0 = 0)$. Justifique.

3. **(Valor máximo 2,5)** Considere uma fila $M/M/1$, com taxa de atendimento $\mu = 1$ clientes por minuto e taxa de chegada $\lambda < 1$ clientes por minuto. Suponha que esta cadeia de Markov esteja na sua situação estacionária e que cada cliente paga 10 reais ao término de seu serviço. (0,5) a) Qual é a probabilidade de que o primeiro cliente que chega após um instante t fixado encontre o sistema vazio? (1,0) b) Qual é o número médio de clientes no sistema? (1,0) c) Qual é o tempo médio que um cliente passa no sistema? (0,5) d) Qual é a renda média por minuto deste sistema?

4. **(Valor máximo 2,5)** Cada caminhão de uma transportadora funciona sem problemas por um tempo τ cuja distribuição é uniforme entre 50 e 150 horas ($\tau \sim U(50; 150)$ horas). A estratégia de manutenção adotada pela transportadora é a seguinte: todo caminhão é revisado, com agendamento, após T horas contínuas de funcionamento sem problemas; se houver problema antes de T, neste instante o caminhao recebe revisão emergencial. Suponha que o tempo que demora uma revisão seja desprezível, que cada revisão agendada custe 200 reais e que cada revisão emergencial custe 500 reais. (1,5) a) Se $T = 100$ horas, qual é o custo médio com a manutenção de cada caminhão? (1,5) b) Qual é o valor de T que minimiza este custo médio?

MAE 5709 -Processos Estocásticos
Prova 1

Justifique suas respostas!

1. (2,5) Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição **P** dada por

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 4 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

(0,5) a) Determine $P(X_{10} = 0|X_9 = 4, X_{11} = 1)$. (1,0) b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? (1,0) c) Estime $P(X_n = 3|X_0 = 4)$ para n muito grande. Justifique.

2. (2,5) Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencialcom parâmetro μ_i ($T_i^j \sim \exp(\mu_i)$); 2) nos momentos de transição os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição **Q** dada por

$$\begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(0,5) a) Classifique os estados desta cadeia. (1,0) b) Determine as taxas do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$. (1,0) c) Se $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = \mu_3 = 3$, determine $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2|X_0 = 3)$. Justifique.

3. (2,5) O número de clientes num sistema em cada instante n ($X_n \in \{0, 1, \ldots\}$) evolue conforme uma cadeia de Markov (tempo discreto) com probabilidades de transição dadas por $P_{i,i+1} = \frac{2}{3}$, para $i \geq 0$ e $P_{i,i-1} = \frac{1}{3}$, para $i \geq 1$. Suponha que no instante 0 a distribuição do sistema é tal que há k clientes no sistema com probabilidade $(\frac{1}{2})^{k+1}$. (1,0) a) Qual é a probabilidade de haver pelo menos um cliente no sistema no instante 1? (1,5) b) Estime o numero médio de clientes no sistema após um tempo muito longo, se ele começa vazio.

4. (2,5) Quatro bolas numeradas de 1 até 4 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 4, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 5 ou 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja X_n o número de bolas na urna A no instante n. (1,0) a) Determine a matriz de transição de $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Classifique os estados desta cadeia; ela é irredutível? (0,5) b) A distribuição uniforme no espaço de estados é invariante? Justifique. (1,0) c) Se no instante 1 cada uma das bolas é colocada ao acaso na urna A com probabilidade $\frac{1}{2}$ ou na urna B com probabilidade $\frac{1}{2}$, independentemente, determine a probabilidade de existirem duas bolas na urna A no instante 2.

1. Numa repartição pública há 3 funcionários identificados por funcionários A, B e C. Cada um deles trabalha durante um tempo que é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 10 minutos e sai para " tomar um café" sendo que o tempo até seu retorno ao trabalho também tem distribuição exponencial com média 15 min. Assuma independência. Denote por X_t o número de funcionários trabalhando no instante t. a) Determine as taxas de transição desta cadeia. b) Considere apenas o funcionário A. Seja $\{Y_t\}$ a cadeia de Markov que assume o valor 1 no instante t (isto é, $Y_t = 1$) se o funcionário A estiver trabalhando nesse instante e o valor zero caso contrário. A distribuição uniforme no espaço de estados desta cadeia ($S = \{0,1\}$) é estacionária?

2. Um servidor da rede USP recebe solicitações de acesso, das 6 horas até as 18 horas, conforme um processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ com taxa $\lambda = 20$ horas $^{-1}$. A probabilidade de cada solicitação ser proveniente de uma localidade brasileira é de 3/4. Assuma independência. a) Qual é o número médio de solicitações no intervalo de 14 até as 16 horas? b) Determine a probabilidade de não ter havido nenhuma solicitação proveniente de localidade brasileira entre 15 e 17 horas. c) Determine $P(N(9,12) = 4 | N(8,18) = 10)$.

3. Para o sistema $M|M|k$. Determine o número médio de clientes na distribuição estacionaria.

4. Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0,1,2,3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial (T_i^j indica a duracao da j-esima permanencia no estado i) com $E(T_i^j) = \frac{1}{\mu_i} > 0$; 2) nos momentos de transição os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição Q dada por

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

a) Determine as taxas do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se $\mu_i = 1$, $i \in S$. b) Determine $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2 | X_0 = 3)$.

5. Clientes chegam a uma estação de serviço com 2 servidores de acordo com um processo de Poisson com a taxa λ. Caso os dois servidores estiverem ocupados, os clientes aguardam em uma fila com capacidade infinita. Os tempos de serviço do servidor i são exponenciais com parâmetros μ_i, $i = 1, 2$. Caso um cliente que chega encontre os dois servidores livres, é igualmente provável que ele escolhe qualquer um dos dois. Descreva este modelo como uma cadeia de Markov a tempo contínuo. Mostre que esta cadeia é reversível. Quando existe, determine a medida estacionária e o número médio de clientes no sistema.

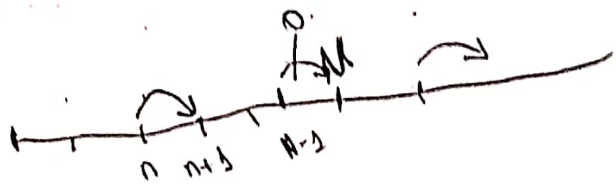
É reversível se

$\pi(i)q_{ij} = \pi(j)q_{ji}$

Exemplo

Se $\mu \neq \lambda$, não ocorre a estacionária

6. Clientes chegam a uma estação de serviço com taxa λ e requerem um tempo de serviço cuja duração é uma v.a. com distribuição exponencial



com taxa μ ($\mu > \lambda$). Os clientes que estão esperando na fila são impacientes, e deixam o sistema com a taxa $\delta > 0$. Determine as probabilidades limites, quando existirem.

7. Seja $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ um processo de nascimento e morte com taxa de salto de n para $n+1$, $n \geq 0$, dada por

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{se } n \neq N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$ e $N \geq 1$ é um número inteiro, e com taxa de salto de n para $n-1$, $n \geq 1$, dada por $\mu_n = n\mu$, para $\mu > 0$.

a) Classifique os estados desta cadeia. b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única?

8. Uma oficina tem 2 máquinas e um funcionário responsável por sua manutenção. Suponha que o tempo de funcionamento de cada máquina tem distribuição exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$ e o tempo gasto por um funcionário para consertar uma máquina também tem distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$. a) Qual é o número médio de máquinas funcionando (no regime estacionário)? b) Qual é a proporção do tempo que uma particular máquina está funcionando (também no regime estacionário)?

$\frac{30\lambda+\mu}{\mu+\lambda}$

1. Um navio tem apenas um motor e um funcionário responsável por sua manutenção. Com o motor funcionando, a velocidade do navio é 30 km/h. Quando o motor não está funcionando a velocidade do navio é 1 km/h (um marinheiro fica remando). Suponha que o tempo de funcionamento do motor tem média $\frac{1}{\lambda}$ e o tempo gasto para consertá-lo tem média $\frac{1}{\mu}$. Qual é a velocidade média do navio?

$\frac{1/\lambda \cdot 30 + 1/\mu}{1/\lambda + 1/\mu}$

2. Verifique as relações $L = \lambda W$ e $L_Q = \lambda_a W_Q$ para as filas $M/M/1$ e $M/M/\infty$. L e L_Q são. resp., os números médios de clientes no sistema e na fila; W e W_Q são, resp., o tempo médio que um cliente passa no sistema e na fila; λ é a taxa de chegada de clientes e λ_a é a taxa de entrada de clientes no sistema.

3. O conserto de um carro numa oficina envolve duas etapas, executadas por dois funcionários diferentes. A primeira etapa é executada pelo funileiro e demora um tempo que é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade F com média a horas. A segunda etapa é executada pelo pintor e seu tempo de execução é uma v.a. independente da primeira com distribuição G com média b horas. Clientes em potencial chegam conforme um processo de Poisson com taxa λ clientes por hora. Suponha que a oficina seja pequena e só possa atender um carro por vez de forma que se um cliente em potencial chega ao sistema e o encontra ocupado, ele vai embora. a) Se F e G são exponenciais represente o sistema como uma cadeia de Markov em tempo Contínuo. No regime estacionário, qual é a proporção do tempo na qual o funileiro está trabalhando? b) Qual é a proporção do tempo na qual o funileiro está trabalhando se F e G forem distribuições genéricas?

PPP(λ) F com $\mu_F = a$

G com $\mu_G = b$

Se chega e tá ocupado, VAI EMBORA!

F P $\pi_F = 1/2$ $\pi_P = 1/2$

4. Suponha que a oficina do exercício anterior, com F e G exponenciais, agora tem duas salas, uma para a realização do serviço de funilaria e outra para a pintura. Cada veículo atendido pela oficina passa pelas duas etapas, começando pela funilaria, executado conforme F. Ao término desta etapa, o veículo vai para a sala de pintura, se esta estiver vazia. Caso contrário ele antes precisa aguardar até que a sala de pintura esteja disponível. Após o instante de transferência para esta sala o tempo de pintura tem distribuição G. Um veiculo recem-chegado só pode ser atendido se a sala de funilaria está desocupada. Caso contrário, ele vai embora. a) Represente o sistema como uma cadeia de Markov. b) Qual é a proporção de clientes em potencial que é atendida? c) Qual o tempo médio que um cliente passa no sistema? d) Qual é o número médio de clientes no sistema?

$\lambda(P_{00}+P_{01})$

5. Clientes chegam a uma agência que tem apenas um atendente conforme um processo de Poisson com taxa λ. Mas um cliente apenas entra no banco se o atendente estiver livre no momento de sua chegada. Caso contrário ele vai embora para não mais voltar. Suponha que o tempo de atendimento seja uma variável aleatória com distribuição G. a) Qual é a taxa com que clientes entram no banco? b) Qual é a proporção de clientes que entra no banco?

6. A produção de uma peça envolve duas etapas cujos tempos são variáveis aleatórias exponenciais com parâmetros μ_1 e μ_2. Suponha que o aparelho que produz essas peças trabalha continuamente, ou seja, após completar as

duas etapas da produção de uma peça a máquina começa imediatamente a produção da próxima. Todos os dias, um funcionário examina o aparelho no intante t e aguarda o término da produção da próxima peça. a) qual é a probabilidade de que o aparelho esteja executando a primeira etapa da produção dessa peça? b) Determine o valor esperado do tempo que este funcionário tem que aguardar na produção desta peça: $E(E(t))$. c) Determine a função de renovação $m(t)$ (sugestão: use $T_{N(t)+1} = t + E(t)$ e a identidade de Wald). (?)

7. O tempo de funcionamento de um carro é uma variável aleatória com distrbuição G. Um indivíduo adota o seguinte sistemática: troca de carro sempre que ele quebra ou atinge uma idade T. Suponha que um carro novo custa C_1 reais e que a quebra do automóvel gere um custo adicional de C_2 reais. Suponha que o valor de venda do carro usado seja tão pequeno que possamos desprezar em comparação com os demais valores. a) Determine a taxa média do custo desse indivíduo. b) Se $G \sim U(0, 3)$ anos, $C_1 = 30.000,00$ reais, $C_2 = 5000,00$, determine o "melhor valor para T".

Resolução Oficial P1 Proc. Estocásticos.

1.

a)

$$P(X_{10}=0 / X_9=4, X_{11}=1) = \frac{P(X_{10}=0, X_9=4, X_{11}=1)}{P(X_9=4, X_{11}=1)} =$$

$$= \frac{P(X_{11}=1 \mid X_{10}=0, X_9=4)\, P(X_{10}=0, X_9=4)}{P(X_{11}=1 / X_9=4)\, P(X_9=4)} = \frac{P(X_{11}=1 / X_{10}=0)\, P(X_{10}=0 / X_9=4)}{P(X_{11}=1 / X_9=4)}$$

$$= \frac{P(X_1=1 / X_0=0)\, P(X_1=0 / X_0=4)}{P(X_2=1 / X_0=4)} \overset{*}{=} \frac{2/3 \cdot 1/5}{1/5} = \frac{2}{3}$$

$*$ $P(X_1=1/X_0=0) = 2/3$, $P(X_1=0/X_0=4) = 1/5$

$$P(X_2=1/X_0=4) = \sum_{j \in S} P(X_2=1, X_1=j / X_0=4) = \sum_{j \in S} P(X_2=1/X_1=j)\, P(X_1=j/X_0=4)$$

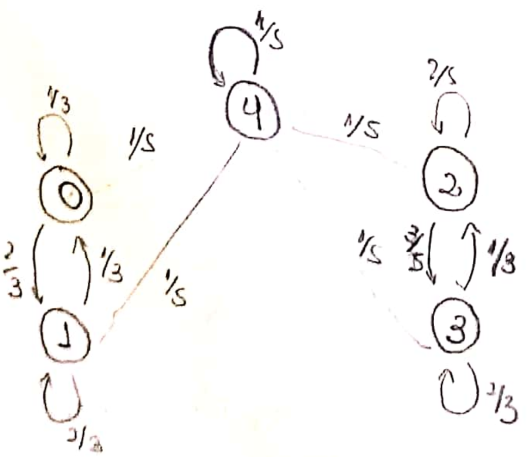
$$= P(X_2=1/X_1=0)P(X_1=0/X_0=4) + P(X_2=1/X_1=1)P(X_1=1/X_0=4) +$$
$$P(X_2=1/X_1=4)P(X_1=4/X_0=4) =$$
$$= 2/3 \cdot 1/5 + 2/3 \cdot 1/5 + 1/5 \cdot 1/5 =$$
$$= (2/3 + 2/3 + 1/5) \cdot 1/5 = \left(\tfrac{12}{15} + \tfrac{3}{15}\right)\tfrac{1}{5} = 1/5$$

$\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$

Logo,

$$P(X_{10}=0 / X_9=4, X_{11}=1) = 1/5.$$

b)



Supondo que $X_0 \in \{0,1\}$, segue que uma dist. estacionária será

$\pi_A = (1/3, 2/3, 0, 0, 0)$

Se $X_0 \in \{2,3\}$, p. exemplo outra será

$\pi_B = (0, 0, 5/14, 9/14, 0)$

Na vdd, qqe $\alpha\pi_A + (1-\alpha)\pi_B$ tbm o é, $0 \le \alpha \le 1$.

c)

$$P(X_n=3 / X_0=4) = \sum_{j\in S} P(X_n=3, X_1=j / X_0=4) =$$

$$= \sum_{j\in S} \frac{P(X_n=3, X_1=j, X_0=4)}{P(X_0=4)} = \sum_{j\in S} \frac{P(X_n=3 / X_1=j, X_0=4)\, P(X_1=j / X_0=4)\, \cancel{P(X_0=4)}}{\cancel{P(X_0=4)}} =$$

$$= \sum_{j\in S} P(X_n=3 / X_1=j)\, P(X_1=j / X_0=4) =$$

$$= \{ P(X_n=3 / X_1=0)\, P(X_1=0 / X_0=4) + P(X_n=3 / X_1=1)\, P(X_1=1 / X_0=4) +$$
$$+ \{ P(X_n=3 / X_1=2)\, P(X_1=2 / X_0=4) + P(X_n=3 / X_1=3)\, P(X_1=3 / X_0=4) +$$
$$+ \{ P(X_n=3 / X_1=4)\, P(X_1=4 / X_0=4) =$$

$$= \{ 0 . 1/5 + 0 . 1/5 \} + \{ P(X_n=3 / X_1=2) . P_{4,2} + P(X_n=3 / X_1=3)\, P_{4,3} \} + P(X_n=3 / X_1=4)\, P_{4,4} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(P(X_n=3 / X_1=2) + P(X_n=3 / X_1=3) \right) + \frac{1}{5} P(X_n=3 / X_1=4)$$

Daí,

$$P(X_n=3 / X_0=4) - \frac{1}{5} P(X_n=3 / X_1=4) = \frac{1}{5}\left(P(X_n=3 / X_1=2) + P(X_n=3 / X_1=3)\right) \Rightarrow$$

$$P(X_n=3 / X_0=4) - \frac{1}{5} P(X_{n-1}=3 / X_0=4) = \frac{1}{5}\left(P(X_n=3 / X_1=2) + P(X_n=3 / X_1=3)\right) \Rightarrow$$

olhando para $n \to \infty$, se o limite existe, $P(X_n=3 / X_0=4) = P(X_{n-1}=3 / X_0=4)$. Daí,

$$4/5\, P(X_n=3 / X_0=4) = 1/5\left(\pi_B(3) + \pi_B(3) \right) \Leftrightarrow$$

$$P(X_n=3 / X_0=4) = \frac{1}{2} \pi_B(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{28}$$

Justificativa: No infinito, X_n estará em 3 se, e somente, ele visitar a classe que contém os estados {2,3} antes da classe {0,1}. Como as prob. de ir de 4 à {2, 3} somam 2/5 e equivalem à prob. de ir de 4 à {0, 1}, então temos que, uma vez em 4, a prob. de ir pra cada uma delas é igual à 1/2. Uma vez dentro de uma delas (em {2, 3} no nosso caso) ela visitará o estado i com probabilidade $\pi(i) = \begin{cases} \pi_A(i), & i \in A \\ \pi_B(i), & i \in B \end{cases}$

Daí,

$$P(X_n = 3 / X_0 = 4) = P(X_n \text{ adentrar em } \{2, 3\} / X_0 = 4) \cdot P(X_n = 3 / X_n \in \{2, 3\}) = \frac{1}{2} \cdot \pi_B(3)$$

o que justifica o resultado.

8.

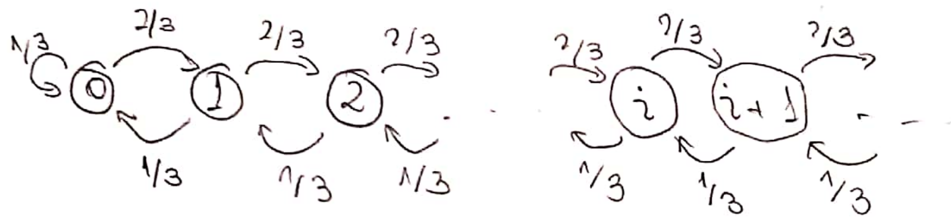
$\{X_n\}_{n\geq 1}$ em $S = \mathbb{N}$ com X_n sendo o nº de clientes no estado n.

De acordo com o enunciado, segue que

$$P_{i,i+1} = 2/3 \ , \ i \geq 0$$

$$P_{i,i-1} = 1/3 \ , \ i \geq 1.$$

Esquematicamente



ou seja,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{array}\right] \end{array}$$

assumimos que $\pi_0(K) = \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} \ , \ K \in S = \mathbb{N}$.

a)

A = ~~t~~evento representando a exist. de pelo menos um cliente no instante 1.

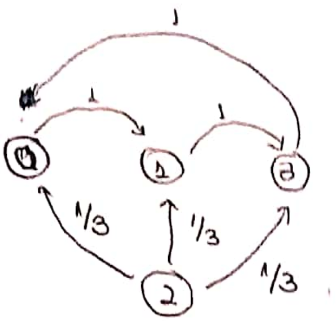
B = não ter ninguém no instante 1

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \pi_1(0).$$

Mas

$$\pi_1(0) = \sum_{i \in S} \pi_0(i) P_{i,0} = \pi_0(0) P_{0,0} + \pi_0(1) P_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

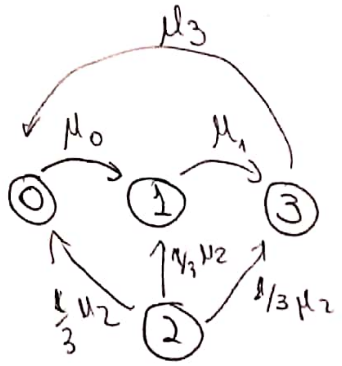
$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



a) 2 é transiente

$\{0,1,3\}$ são recorrentes

b)



$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\mu_0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2/3 & -\mu_2 & \mu_2/3 & \mu_2/3 \\ \mu_3 & 0 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) Se $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = \mu_3 = 3$, então

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Queremos $\lim_{t \to \infty} P(X_t = 2 \mid X_0 = 3)$. Nessa construção, é óbvio que

$$\lim_{t \to \infty} P(X_t = 2 \mid X_0 = 3) = 0,$$

pois não existe nenhum caminho a partir do 3 levando ao estado 2.

b)

Queremos estimar

$$E(X_n / X_0 = 0) \text{ para } n \text{ muito grande}$$

Devemos notar, à principio, que

$$E(X_n) = E(E(X_n / X_{n-1}))$$

Mas,

$$E(X_n / X_{n-1} = k) = \frac{2}{3}(k+1) + \frac{1}{3}(k-1) =$$

$$= k + 1/3.$$

Ou seja, $E(X_n / X_{n-1}) = X_{n-1} + 1/3$

Assim, ~~recursivamente~~, $E(X_n) = E(X_{n-1} + 1/3) = E(X_{n-1}) + 1/3$

Daí, recursivamente, temos

$$E(X_n) = E(X_0) + n/3$$

Logo,

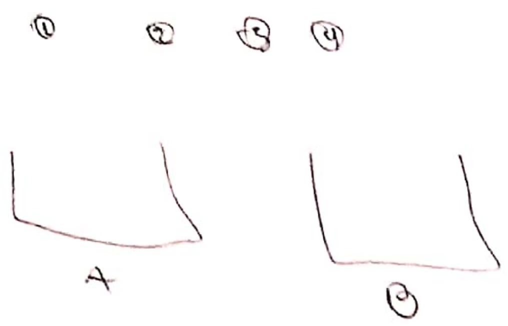
$$E(X_n / X_0 = 0) = 0 + n/3 = n/3$$

quando $n \to \infty$,

$$E(X_n / X_0 = 0) \to \infty$$

Ou seja, o nº médio diverge.

4)



$\{X_n\}_{n \geq 1}$ em $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, com X_n o nº de bolas na urna A no inst. n.

a) Queremos determinar $\mathbb{P}$.

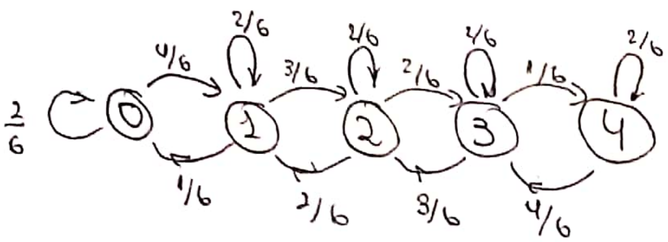
Para tal, estudemos as transições.

instante n	instante n+1		
0	0	se sai 5 ou 6 no dado	$P_{0,0} = 2/6$
	1	se sai 1, 2, 3 ou 4	$P_{0,1} = 4/6$
1	0	se sai 1	$P_{1,0} = 1/6$
	1	5 ou 6	$P_{1,1} = 2/6$
	2	se sai 2, 3 ou 4	$P_{1,2} = 3/6$
2	1	se sai umas das duas que estão em A	$P_{2,1} = 2/6$
	2	5 ou 6	$2/6$
	3	se sai umas das 2 que estão em B	$2/6$
3	2	se sai umas das 3 que estão em A	$3/6$
	3	5 ou 6	$2/6$
	4	se sai a que está em B	$1/6$
4	3	se sai 1, 2, 3 ou 4	$4/6$
	4	se sai 5 ou 6	$2/6$

Assim,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 2/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 2/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2/6 & 2/6 & 2/6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4/6 & 2/6 \end{array}$$

Pictorialmente,



- Todos os estados se comunicam pois para $m = n = 4$, já podemos mostrar que

$$p_{i,j}(m) > 0 \quad \text{e} \quad p_{j,i}(n) > 0$$

- $0 \to 1$ $\quad p_{0,1}(1) = 4/6 > 0$
  $\quad\ \ \to 2$ $\quad p_{0,2}(2) >$ pois $p_{0,1}\, p_{1,2} > 0$

Logo a cadeia é irredutível.

Como $p_0 = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\frac{3}{6}\frac{2}{6}\frac{1}{6}$

$=$

Como a cadeia é finita, são recorrentes positivos.

b)

Temos

$$\pi_u = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Como

$$\pi_u P = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{4+2+2}{6}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{3+2+3}{6}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{2+2+4}{6}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{1+2}{6}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{3}{30}, \frac{8}{30}, \frac{8}{30}, \frac{8}{30}, \frac{3}{30}\right) \neq \pi_u$$

segue que π_u não é invariante.

c)

Sendo assim,

$$\pi_0(k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Daí,

$$\pi_1(2) = \sum_{k \in S} \pi_0(k) P_{k,2} =$$

$$= \pi_0(1) P_{1,2} + \pi_0(2) P_{2,2} + \pi_0(3) P_{3,2} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{3}{6} + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{2}{6} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{3}{6} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}\left(\frac{3+3}{\cancel{6}}\right) + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

c)

$(X_n,$

$P(X_0 = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$P(X_n = 3, X_1 \in \{0,1\} / X_0 = 4)$

$+ \quad X_1 = 0$

$X_1 = 1$

Daí,

$$P(X_1 = 2) = \sum_k P(X_n = 2, X_0 = k) = \sum_k P(X_1 = 2 / X_0 = k)\, P(X_0 = k)$$

$$= P_{1,2}\, P(X_0 = 1) + P_{2,2}\, P(X_0 = 2) + P_{3,2}\, P(X_0 = 3) =$$

$$= \frac{1}{6}\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{6}\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3}{6}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

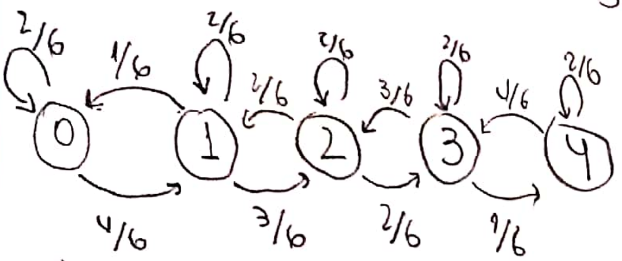
$$= \cancel{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

Ou, simplesmente

$$\pi_1(2) = \sum_j \pi_0(j)\, P_{j,2} = \sum_{j=1}^{3} \pi_0(j)\, P_{j,2} = \frac{3}{8}$$

Logo,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 2/6 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 2/6 \end{bmatrix} \end{array}$$



$P_{ij}^{(m)} > 0$ ($P_{ij}(m) > 0$ $\forall i,j \in S$)

Uma vez que todos os estados se comunicam, ela é irredutível. Ademais, todos os estados são recorrentes positivos pois pertencentem à uma classe finita.

$$f_{0,0} = p_{0,0}(1) + p_{0,0}(2) + p_{0,0}(3) + \cdots$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{4}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) = 1$$

b)

$$\pi_U = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Será se e só se

$$\pi_U \mathbb{P} = \pi_U \iff \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 2/6 & \\ 1/6 & \\ & \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{10}, \ldots\right)$$

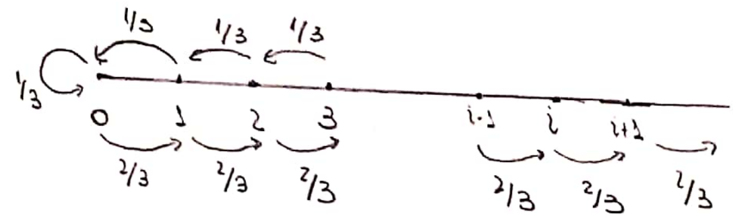
Como $\pi_U(0) \neq \sum_j \pi_U(j) P_{j0}$

segue que π_U não é invariante.

Exercício 3.

a)

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $\{0,1,\dots\}$ é uma cadeia de Markov. Pictorialmente, podemos representá-la da seguinte forma:



Ou seja, a matriz de transição associada à esta cadeia é dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & & & \\ 1/3 & 0 & 2/3 & & \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Supondo que

$$\pi_0 = \left(\overset{0}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \right)$$

Temos que

$$\pi_1(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0(i)\, p_{i0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Assim,

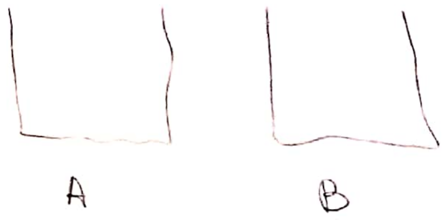
$$P(\text{" haver pelo menos um cliente no sistema no istante 1"}) = 1 - \pi_1(0) = \frac{3}{4}$$

b) Se trata de um processo de Nascimento e Morte com $p = 2/3$.

Como $p > \frac{1}{2}$, segue que $\mu = \infty$!

4.

a)



$\{X_n\}_{n \geq 0}$ em $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ uma cadeia de Markov representando o número de bolas na urna A no instante n.

Se, na urna A, temos

0 bolas, vamos pra 1 se o dado der 1, 2, 3 ou 4 e mantemos o 0 se o dado resultar em 5 ou 6. Daí,

$$P_{0,0} = \frac{2}{6} \text{ e } P_{0,1} = \frac{4}{6}, \quad P_{0,s} = 0, \ s > 1$$

1 bola, vamos pra zero se der nº da bola que está lá $= 1/6$
vamos " 2 " " " " " $= 3/6$
mantemos em 1 5 ou 6 $= 2/6$

2 bolas, vamos pra 1 se der de um dos nº das bolas que estão lá $= 2/6$
" " 3 se der um dos nº das bolas que não está lá $= 2/6$
mantemos em 2 se sair 5 ou 6 $= 2/6$

3
$\to 2$ com p. $3/6$
$\to 4$ com p. $1/6$
$\to 3$ " " $2/6$

4 < 3 com p. $4/6$
4 " " $2/6$

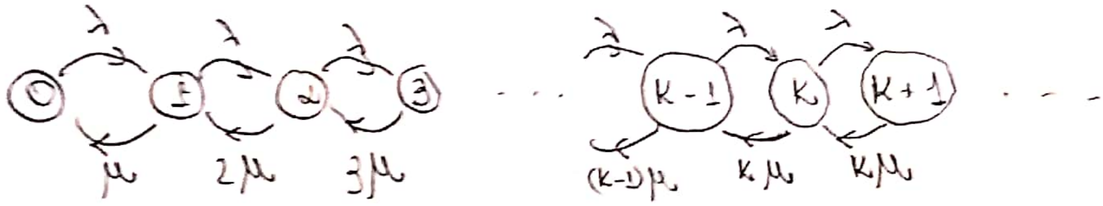
Lista II Processos Estocásticos

Exercício 3.

- **M/M/K**

Uma fila M/M/K é aque cujos tempos entre chegadas são ind. e exp. distribuidos com taxa λ, os tempos de atendimento de cada servidor ~~todos~~ independentes e exp. distribuidos com taxa μ, e há K servidores.

Daí, esquematicamente representamos a M/M/K da seg. maneira.



Ou seja, a matriz de taxas $\mathbb{L}$ é dada por

$$
\mathbb{L} = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & K-1 & K & K+1 & \cdots \\
\hline
0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & & \\
2 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \cdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \\
K-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda+(K-1)\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\
K & 0 & 0 & 0 & \cdots & K\mu & -(\lambda+K\mu) & \lambda & \\
K+1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K\mu & (-\lambda+K\mu) & \lambda \cdots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

Daí, π será estacionária se e só se

$$\pi \mathbb{L} = 0$$

Mas $\pi \mathbb{L} = \underline{0} \Leftrightarrow$

$$\underset{-q_{jj}}{\pi(j) q_j} = \pi(j-1) q_{j-1,j} + \pi(j+1) q_{j+1,j} \quad , \forall j \geq 1.$$

e $\pi(0)\lambda = \mu \pi(1) \Rightarrow \pi(1) = \frac{\lambda}{\mu} \pi(0).$

Para $j \geq 1$, segue

$j = 1$,

$$\pi(1)(\lambda + \mu) = \pi(0)\lambda + \pi(2)(2\mu) \Rightarrow$$

$$(2\mu)\pi(2) = -\lambda\pi(0) + \lambda\pi(1) + \mu\pi(1) \xRightarrow{\text{sub. } \pi(1) = \frac{\lambda}{\mu}\pi(0)}$$

$$(2\mu\pi(2) = \cancel{-\lambda\pi(0)} + \frac{\lambda^2}{\mu}\pi(0) + \cancel{\lambda\pi(0)} \Rightarrow$$

$$\pi(2) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu(2\mu)}\right)\pi(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi(0)$$

$j = 2$,

$$\pi(2)(\lambda + 2\mu) = \pi(1)\lambda + \pi(3)3\mu \Rightarrow$$

$$3\mu\pi(3) = \cancel{-\frac{\lambda^2}{\mu}\pi(0)} + \frac{\lambda^3}{\mu.2\mu}\pi(0) + \cancel{\frac{\lambda^2}{\mu}\pi(0)} \Rightarrow$$

$$\pi(3) = \frac{\lambda^3}{\mu.2\mu.3\mu}\pi(0)$$

Ou seja,

$$\pi(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_s}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_s}\pi(0) \text{ para } s \in \mathbb{N}$$

Cont. 3 Lista II P. Estocásticos

$$\pi(s) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!\,\mu^s}\,\pi(0), & s = 0, 1, \dots, k \\ \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{s-k} \pi(0) \text{ para } s \geq k. \end{cases}$$

Lista II Processos Estocásticos

Exercício 4.

Pela matriz de transição Q, notamos que para $i \in S = \{0,1,2,3\}$, a probabilidade do salto ocorrer e ser para i é de $1/3$, ou seja, o tempo até esse salto não necessariamente será o tempo de perm. no estado i, Para tal, seja

S_i = v.a. rep. o temp. de perm no estado i, $i = 0,1,2,3$.

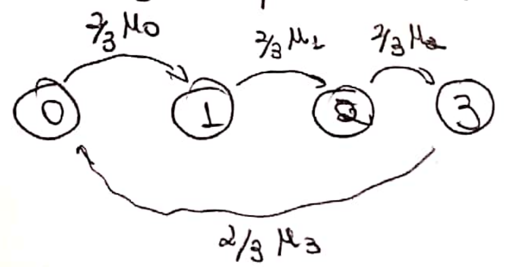
Temos que

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} T_i^j \,, \quad \text{com } N \sim \text{Geométrica}(2/3)$$

Já vimos em listas anteriores que $S_i \sim exp(2/3\, \mu_i)$. Daí,

$$S_i \sim exp(2/3\, \mu_i) \quad \forall i \in S = \{0,1,2,3\}$$

Com isso feito, segue que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S = \{0,1,2,3\}$ pode ser rep. como



Com $\mu_i = 1$, $i \in S$, segue que

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

Todos os estados se comunicam.

$\exists \pi$ t.q $\pi L = 0$ e $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$

Logo, a cadeia é irredutível e rec. positiva.

Daí, $\lim_{t \to \infty} P(X_t = j \mid X_0 = i) = \pi(j) = \frac{1}{4}$ no nosso caso.

Lista II Proc Estocásticos

Exercício 5.

Definimos então

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ um cadeia de Markov em tempo contínuo representando o nº de clientes no sistema no inst t.

Sabemos que os mesmos chegam conf um P.P.P(λ) $\Rightarrow$
$\{T_i\}_{i \geq 1}$ i.i.d. $exp(\lambda)$ onde T_i é o tempo entre chegadas de clientes

e que

$S_i \sim exp(\mu_i)$, $i = 1, 2$, com S_i = v.a. rep o tempo de serviço do servidor i.

Podemos representar $\{X_t\}_{t \geq 0}$ como

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu_1+\mu_2}{2}"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_1+\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_1+\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu_1+\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 5 \arrow[l, bend left, "\mu_1+\mu_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $q_{1,0} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ pois seria $\begin{cases} \mu_1, \text{ se o servidor 1 estivesse atendendo} \\ \mu_2, \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad 2 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \end{cases}$

Como o cliente escolhe o servidor 1 com mesma prob. que o servidor 2, segue que $q_{1,0} = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$.

$P_{10}(h) = P($"Do que está lá ser atendido", "Não chegar ninguem"$) + P($"outras coisas"$) =$

$\overset{ind.}{=} P($"Do que está lá ser atendido"$) P(T > h) + o(h) =$

$= \sum_{i=1}^{2} P($"Do que está lá ser atendido", "estar sendo atendido pelo atendente i"$) =$

$= (P(S_2 \leq h) \frac{1}{2} + P(S_1 \leq h) \frac{1}{2})(\quad) + o(h) = (\frac{\mu_1+\mu_2}{2})h + o(h)$

b) Sabemos que está será reversível se

$$\pi(j)\, q_{j,i} = \pi(i)\, q_{i,j} \quad \text{para todo } i,j \in S$$

No nosso caso, temos que encontrar $\pi(j)$.

Sabemos que π é est. se e só se

$$\pi \mathbb{L} = 0 \quad \& \quad \sum_{i \in S} \pi(i) = 1 \iff$$

$$\underbrace{\pi(i)\, q_i}_{-q_{i,i}} = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \pi(j)\, q_{j,i}$$

Daí, usando as eq. de balanceame. p/ nosso caso, segue que

$i=0$ $\quad \pi(0)(\lambda) = \pi(1)\frac{\mu_1+\mu_2}{2} \Rightarrow \pi(1) = \frac{2\lambda}{(\mu_1+\mu_2)}\pi(0)$

$i=(1)$ $\quad \pi(1)\left(\frac{2\lambda+\mu_1+\mu_2}{2}\right) = \pi(0)\lambda + \pi(2)(\mu_1+\mu_2) \Rightarrow$

$$\pi(2)(\mu_1+\mu_2) = -\lambda\pi(0) + \lambda\pi(0) + \frac{2\lambda^2}{(\mu_1+\mu_2)}\pi(0) \Rightarrow$$

$$\pi(2) = 2\frac{\lambda^2}{(\mu_1+\mu_2)^2}\pi(0)$$

$i=2$ $\quad \pi(2)(\lambda+\mu_1+\mu_2) = \pi(1)\lambda + \pi(3)(\mu_1+\mu_2) \Rightarrow$

$$\pi(3)(\mu_1+\mu_2) = \cancel{-\frac{2\lambda^2}{(\mu_1+\mu_2)}\pi(0)} + \frac{2\lambda^2}{\mu_1+\mu_2}\pi(0) + 2\frac{\lambda^3}{(\mu_1+\mu_2)^2}\pi(0)$$

$$\Rightarrow \pi(3) = 2\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^3\pi(0)$$

As equações indicam que $\pi(i) = 2\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i \pi(0)$. Por indução, verificamos que tal relação é verdadeira (caso sobre tempo, farei isso no final da prova).

Como $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$, então

$$\sum_{i \geq 0} \pi(i) = 1 \Rightarrow \pi(0) + \sum_{i \geq 1} 2\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i \pi(0) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-\pi(0) + 2\pi(0)\sum_{i \geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i = 1 \Leftrightarrow$$

$$\pi(0)\left[2\sum_{i \geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i - 1\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\pi(0) = \frac{1}{2\sum_{i \geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i - 1}$$

Se $\lambda < \mu_1+\mu_2$, segue que $\sum_{i \geq 0}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^i = \frac{1}{1 - \lambda/\mu_1+\mu_2} = \frac{1}{\frac{\mu_1+\mu_2-\lambda}{\mu_1+\mu_2}} \Rightarrow$

$$\pi(0) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}\right) - 1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}{2 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)}$$

$$= \frac{1 - \lambda/\mu_1+\mu_2}{1 + \lambda/\mu_1+\mu_2} = \frac{\mu_1+\mu_2-\lambda}{\mu_1+\mu_2+\lambda}$$

Questão.

1.

item b) Perguntar: É necessário encontrar a dist. est. ou apenas verificar $\pi L = Q$.

2.

item a) Nº de ocorrências num subintervalo de tempo do P.P.

item

4. Algo transiente

4

7. . . .

3.

Problema: Para o sistema M/M/K. Determine o número médio de clientes na distribuição estacionária.

* Processos de Fila

Um sistema de fila consiste de "clientes" chegando em tempos aleatórios para alguma facilidade onde eles recebem um determinado serviço e partem. Usamos "cliente" como um termo genérico. Isto pode referir, por exemplo, à "bona fide costumers demanding service at a counter", a barcos entrando em um porto, a "batches" de dados fluindo em um sub-sistema computacional, à máquinas quebradas esperando reparo, e assim por diante. Sistemas de filas são classificadas de acordo com

1. O Processo de Entrada, a dist. de prob. do padrão de chegadas de clientes no tempo;
2. A distribuição dos serviços, a distribuição de prob. do tempo aleatório para servir um cliente (ou um grupo, no caso do batch service), e
3. A disciplina da fila, o número de servidores e a ordem de atendimento.

Enquanto uma variedade de processos de entrada aparecem na prática, dois simples e frequentemente tipos ocorrentes são matematicamente tratáveis e dão insights em casos mais complexos. O primeiro é o scheduled input, onde os clientes chegam em tempos fixados $T, 2T, 3T, \ldots$ O segundo mais comum é o processo de chegadas "completamente aleatórias", onde os tempos de chegada dos clientes constituem um Processo de Poisson. Entender o desenv. axiomático do Processo de Poison em V pode ajudar a avaliar a validade da suposição de Poison em qualquer dada aplicação. Muitos resultados teóricos são avaliáveis quando os tempos dos clientes formam um Processo de Renovação. Tempos entre chegadas exponencialmente distribuidos corresponde ao P. de Poisson de chegadas com um caso especial.

Vamos sempre assumir que a duração do serviço para clientes individuais são v.a. n neg independentes e identicamente distribuídas e são independentes do Processo de Chegadas. A situação em que todos os tempos de serviço tem a mesma duração D, é, então, um caso especial.

A mais comum disciplina de fila é primeiro que entra, primeiro que sai, onde clientes são servidos na mesma ordem em que chegam

4.

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ um p. estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S=\{0,1,2,3\}$

1. os sucessivos tempos de perm. em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ i.i.d. com dist. exponencial. (T_i^j indica a duração do j-ésima permanência no estado i) com $E(T_i^j) = 1/\mu_i > 0$;
2. Nos momentos de transição, os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

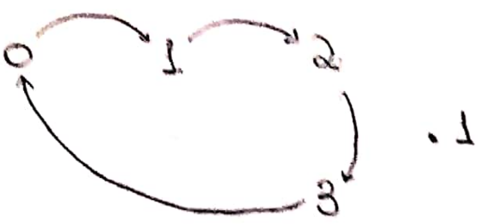
4.a.

Pela condição 1, temos que $T_i^j \sim Exp(\mu_i)$ para todo j. Logo, o tempo de permanência no estado i é uma v.a. com dist. exponencial com média $1/\mu_i$ (denotemos tal v.a. simplesmente por T_i) independente da vez em que o estado i está sendo visitado.

Ou seja,

$T_0 \sim exp(\mu_0)$: v.a. representando o tempo de perm. no estado 0
$T_1 \sim exp(\mu_1)$: " " " " " " " " 1
$T_2 \sim exp(\mu_2)$: " " " " " " " " 2
$T_3 \sim exp(\mu_3)$: " " " " " " " " 3

Pictorialmente, o processo pode ser representado da seguinte forma



Basta determinar as taxas para completar a representação . 1.

Temos que

$$P_{01}(h) = \mathbb{P}(T_0 < h \text{, Saltar pra } 1) + \mathbb{P}(\text{"outras coisas"})$$
$$= \mathbb{P}(\text{Saltar pra } 1 \mid T_0 < h)\, \mathbb{P}(T_0 < h) + \mathbb{P}(\text{"outras coisas"})$$
$$= \frac{2}{3}\mu_0 h + o(h)$$

Logo, $q_{01} = \frac{d}{dt} P_{01}(t) = \frac{2}{3}\mu_0$

Como $\sum_{j \in S} q_{ij} = 0$, $\forall i \in S$, segue que $q_{00} = -\frac{2}{3}\mu_0$

$\Big[\ \mathbb{P}(T_0 > h) + \mathbb{P}(T_0 < h \mid \text{Saltar pra } 0) + \mathbb{P}(\text{"outras coisas"}) =$

$= -\mu h + o(h) + \frac{1}{3}\mu h = -\frac{2}{3}\mu h$

Usando o mesmo raciocínio, temos que

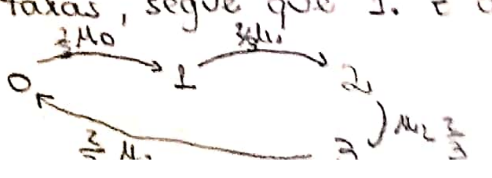
$q_{12} = 2/3\, \mu_1$ $\quad q_{23} = 2/3\, \mu_2$ $\quad q_{30} = 2/3\, \mu_3$

$q_{11} = -2/3\, \mu_1$ $\quad q_{22} = -2/3\, \mu_2$ $\quad q_{33} = -2/3\, \mu_3$

Ou seja, a matriz de taxas $\mathbb{L}$ é dada por

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\mu_0 & \frac{2}{3}\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu_1 & \frac{2}{3}\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu_2 & \frac{2}{3}\mu_2 \\ \frac{2}{3}\mu_3 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

E, em função das taxas, segue que 1. é da seguinte forma



4.

4.a. cont. 4.a.

Se $\mu_i = 1, i \in S$, segue que

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.b.

Queremos agora determinar

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(X_t = 2 \,/\, X_0 = 3)$$

Como a cadeia é irredutível e com espaço de estados finito, segue que a cadeia é recorrente positiva. Daí, temos que

$$P_{ij}(t) \to \pi(j), \text{ ou seja}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(X_t = j \,/\, X_0 = i) = \pi(j)$$

No nosso caso, $j = 2$ e $i = 3$. Basta encontrar $\pi(2)$. Sabemos que π é a dist. estacionária se $\pi L = 0$ e $\sum_{i \in S} \pi(i) = 1$, isto é

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_3 = 0 \\ \frac{2}{3}\pi_0 - \frac{2}{3}\pi_1 = 0 \\ \frac{2}{3}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_2 = 0 \\ \frac{2}{3}\pi_2 - \frac{2}{3}\pi_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2 + L_3}]{L_i \leftarrow \frac{3}{2} L_i} \approx \begin{cases} -\pi_0 - \pi_3 = 0 \\ -\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ \pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \approx \begin{cases} \pi_0 - \pi_3 = 0 \\ -\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Temos

$\pi_3 = \pi_0$ $\quad\quad$ $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow$

$\pi_1 = \pi_0$ $\quad\quad$ $4\pi_0 = 1 \Leftrightarrow \pi_0 = 1/4 \Rightarrow \pi_i = 1/4 \ \forall i \in S$

$\pi_2 = \pi_0$

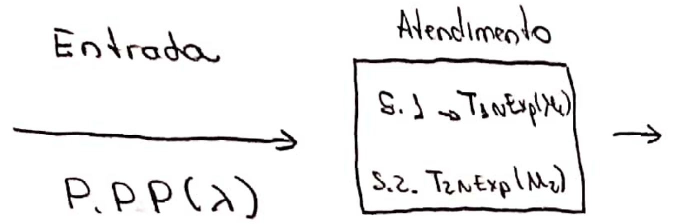
Daí

$\pi(2) = 1/4$ e, portanto

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{P}(X_t = 2 / X_0 = 3) = \pi(2) = \frac{1}{4}.$$

5.

Temos clientes chegando conforme um Processo de Poisson com taxa λ e dois servidores, sendo que o tempo de atendimento do cada servidor é uma exponencial com parâmetro μ_i, $i = 1, 2$, com i representando o servidor.

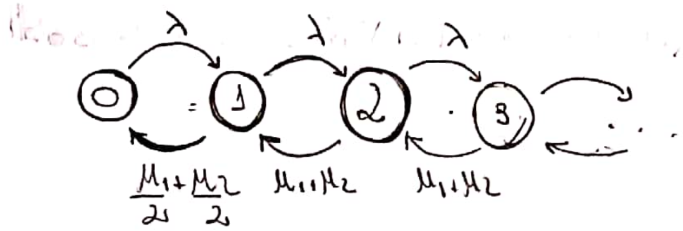


Seja X_t o número de clientes no sistema no instante t. Nesse X_t toma valores nos naturais, sendo zero quando não há ninguem esperando e ninguem sendo atendido.

Assim,

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S = \mathbb{N}$ é uma cadeia de Markov de tempo contínuo que representa este sistema.

Nessa construção, temos em função das taxas,



Para tal, basta notar que

$$\mathbb{P}_{01}(h) = \mathbb{P}(\text{Chegar alguém antes do tempo } h) + \mathbb{P}(\text{"outras coisas"}) =$$

$$= \mathbb{P}(T < h) + \mathbb{P}(\text{"outras coisas"}) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda h} + o(h) = \lambda h + o(h) \Rightarrow q_{01} = \lambda$$

$$\mathbb{P}_{10}(h) = \mathbb{P}(\text{"Do que está lá ser atendido antes do } h\text{, não chegar ninguém antes de } h\text{"}) +$$

$$\mathbb{P}(\text{"outras coisas"}) =$$

$$= \mathbb{P}(\text{"Do que está ser atendido antes de } h\text{"}) . \mathbb{P}(T > h) + o(h) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_1 < h) + \mathbb{P}(S_2 < h))\, e^{-\lambda h} + o(h) = \frac{1}{2}(\mu_1 h + \mu_2 h)(1 - \lambda h) + o(h) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)h + o(h)$$

Ela será reversível se

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_{t+s} = i) = \mathbb{P}(X$$

$$\pi(j)\, q_{j,i} = \pi(i)\, q_{i,j}$$

· Caso $\mu_1 + \mu_2 < \lambda$, podemos computar a distribuição estacionária como vimos, a matriz de taxas $\mathbb{L}$ é dada por

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \; \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \\ 1 & \frac{\mu_1+\mu_2}{2} & -\left(\frac{\lambda+\mu_1+\mu_2}{2}\right) & \lambda & 0 & \\ 2 & 0 & \mu_1+\mu_2 & -\lambda-\mu_1-\mu_2 & \lambda & \\ \vdots & & & & \ddots & \end{array}$$

Como π será a dist. estac. se e só se

$$\pi \mathbb{L} = 0, \quad \text{segue que}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) = 1$$

$$\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{2\lambda}{\mu_1+\mu_2}\pi_0 \\ \lambda \pi_0 - \left(\lambda + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\right)\pi_1 + (\mu_1+\mu_2)\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} \cdot \frac{2\lambda}{\mu_1+\mu_2}\pi_0 \\ \lambda \pi_1 - (\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_2 + (\mu_1+\mu_2)\pi_3 = 0 \Rightarrow \pi_3 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^2 \frac{2\lambda}{\mu_1+\mu_2} = 2\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^3 \pi_0 \\ \vdots \\ \lambda \pi_{k-2} - (\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_{k-1} + (\mu_1+\mu_2)\pi_k = 0 \;\vdots\; \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{k-1} \frac{2\lambda}{\mu_1+\mu_2} = 2\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{k} \pi_0 \end{cases}$$

5. cont.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) = 1 \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^k \pi_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_0 = \frac{1}{2.\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^k}$$

Caso $\lambda < \mu_1 + \mu_2$, então $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^k = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)} \Rightarrow$

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)$$

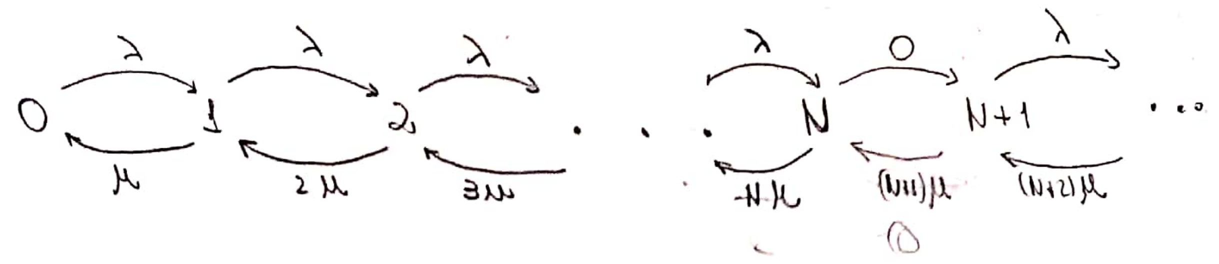
$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)$$

é a distribuição estacionária associada ao processo.

7.



a) Como os N e $N+k$, $k \in \mathbb{N}_*$ não se comunicam, temos uma cadeia não irredutível

Nesse caso, podemos decompor a cadeia em duas classes A_1 e A_2, com

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad e \quad A_2 = \{N+1, N+2, \dots\}$$

A_1 é finita e, uma vez nela, não se sai dela. A_1 é uma classe fechada irredutível, de modo que os estados $0, 1, \dots, N$ são recorrentes positivos.

Já A_2 é composta por estados cuja probabilidade de não retorno aos mesmos é igual a probabilidade de atingir o estado N, o que é maior que zero para o estado $N+k$, $k \in \mathbb{N}_*$ se $(N+k)\mu > \lambda$.

Log A_2 é composta por estados transientes.

8. Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ em $\{0,1,2\}$ o nº de máq. funcionando no tempo t. $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov de tempo contínuo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\mu"] & 1 \arrow[l, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend left, "\mu"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\lambda"] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\mu & \mu & 0 \\ 1 & \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 2 & 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{array}$$

Daí, π será tal que

$$\pi \mathbb{L} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1 \quad \text{, isto é}$$

$$\begin{cases} -\mu\pi_0 + \lambda\pi_1 = 0 \\ \mu\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + 2\lambda\pi_2 = 0 \\ \mu\pi_1 - 2\lambda\pi_2 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} \mu\pi_0 - \lambda\pi_1 = 0 \to \pi_1 = \frac{\mu}{\lambda}\pi_0 \\ -\mu\pi_1 + 2\lambda\pi_2 = 0 \to \pi_2 = \frac{\mu}{2\lambda}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Como $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}\pi_0 + \pi_0 + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\mu}{2\lambda}\pi_0 = 1 \Rightarrow$

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2\right)}$$

Assim, sendo N uma v.a. representando o nº de máquinas funcionando no regime estacionário, segue que

$$E(N) = 0\,\pi_0 + 1\,\pi_1 + 2\,\pi_2 =$$

$$= \frac{\mu/\lambda}{1 + \mu/\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2} + \frac{2\cdot\frac{1}{2}(\mu/\lambda)^2}{1 + \mu/\lambda + 1/2(\mu/\lambda)^2} = \frac{\mu/\lambda + (\mu/\lambda)^2}{1 + \mu/\lambda + 1/2(\mu/\lambda)^2}$$

b.

Sejam as máquinas denotadas por máq. A e B.

Assim, a prop. do tempo em que a máq. A está trabalhando é igual a soma da proporção em que as duas estão trab. com a proporção em que só ela está trabalhando. Ou seja, a prop. da mq. A está func. é dada por

$$p_A = \lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{P}(X_t = 2) + \lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{P}(X_t = 1, M = 1)$$

com $M = \begin{cases} 1 & \text{se a maquina A está funcionando} \\ 0 & \text{" " " " B " "} \end{cases}$

$$= \pi(2) + \lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{P}(X_t=1)\,\mathbb{P}(M=1 \mid X_t=1) =$$

já que não há pref. entre as máq

$$= \pi(2) + \lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{P}(X_t=1) \lim_{t\uparrow\infty} \mathbb{P}(M=1 \mid X_t=1) =$$

$$= \pi(2) + \pi(1) \cdot 1/2 =$$

$$= \frac{1/2\,(\mu/\lambda) + 1/2\,(\mu/\lambda)^2}{1 + \mu/\lambda + 1/2\,(\mu/\lambda)^2} = \frac{\mu/\lambda + (\mu/\lambda)^2}{2 + 2\,\mu/\lambda + (\mu/\lambda)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2}}{\dfrac{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2}} = \frac{\mu(\mu+\lambda)}{\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2}$$

(0,1)

$$\pi(0,1)(\lambda+\mu_p) = \mu_f\,\pi(1,0) + \mu_p\,\pi(\bar{1}1)$$

$$\mu_f\,\pi(1,0) + \mu_p\,\pi(\bar{1}1) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu_p} + \lambda\right)\pi(00)$$

(11)

$$\pi(11)(\mu_p+\mu_f) = \lambda\,\pi(01) = \frac{\lambda^2}{\mu_p}\,\pi(00) \Rightarrow \pi(11) = \frac{\lambda^2}{\mu_p(\mu_p+\mu_f)}\,\pi(00)$$

$(\bar{1}1)$

$$\pi(\bar{1}1)\,\mu_p = \mu_f\,\pi(11) = \frac{\mu_f\,\lambda^2}{\mu_p(\mu_p+\mu_f)}\,\pi(00) \Rightarrow \pi(\bar{1}1) = \frac{\mu_f}{\mu_p^2(\mu_p+\mu_f)}\,\pi(00)$$

Daí, segue que

$$\pi(\bar{1}1) = \frac{\mu_f}{\mu_p^2(\mu_p+\mu_f)}\,\pi(00)$$

$$\pi(11) = \frac{\lambda^2}{\mu_p(\mu_p+\mu_f)}\,\pi(00)$$

$$\pi(01) = \frac{\lambda}{\mu_p}\,\pi(00)$$

$$\pi(10) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu_p+\mu_f} + \lambda\right)\pi(00)$$

$$= \frac{\pi(00)\,\mu_f}{\mu_p(\mu_p+\mu_f)}\left(\lambda^2\mu_p + \lambda\mu_f^2 + \lambda\mu_p\mu_p + 1\right)$$

· M/M/∞

Na M/M/∞, temos

Daí,

$\Pi Q = 0 \Rightarrow \quad \pi_i q_{ij} = \pi_{i-1} q_{i-1,i} + \pi_{i+1} q_{i+1,i} \Leftrightarrow$

$\pi_i (\lambda + i\mu) = \pi_{i-1} (i-1)\mu + \pi_{i+1} \lambda \Leftrightarrow$

Lista 4 Processo Estocástico.

1) Para tal, seja

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{se o motor do navio não está funcionando no tempo } t \\ 1, & \text{se o " " " está funcionando no tempo } t \end{cases}$$

Temos que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S=\{0,1\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo.

Definindo agora

T_F : v.a. representando o tempo de func. de motor do navio,
T_{NF} : " " " " até o conserto do " " ".

temos,

$T_F \sim exp(\lambda)$ e $T_{NF} \sim exp(\mu)$

Daí, pictorialmente, podemos representar $\{X\}_{t\geq 0}$ em $S=\{0,1\}$ como

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend right, "\mu"'] & 1 \arrow[l, bend right, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

. Usando as equações de bal. é fácil obter que

$$\pi(0) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \quad e \quad \pi(1) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

Assim, o navio passa $\pi(1)$ do tempo com o motor func. e $\pi(0)$ com o motor em conserto. Logo, como a velocidade do navio (v) é

$$v = \begin{cases} 30, & \text{se o motor está ligado} \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Segue que

$$v = 30\pi(1) + 1\pi(0) =$$

$$= 30\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} =$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu}(30\mu+\lambda) \;//$$

$\pi_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

2.

- Caso 1 : Fila M/M/1.

Os tempos entre chegadas de clientes $\{T_i\}_{i\geq 1}$ são i.i.d conforme uma v.a $T \sim \exp(\lambda)$

O tempo para atendimento : $S \sim \exp(\mu)$

Isto é,

$\{X\}_{t\geq 0}$ em $S = \mathbb{N}$ é uma cadeia de Markov de tempo contínuo.

Pictorialmente,

ou seja,

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \; \cdots \\
\hline
L = 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \; \cdots \\
1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\
2 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\
3 & & & & \ddots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Daí, pela definição, temos que π é dist. estacionária se e somente se

$$\pi = \pi \mathbb{P}(t), \ \forall t \geq 0 \Rightarrow \pi L = 0 \Rightarrow \text{equações de balanceamento}$$

$j=0 \quad \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \Rightarrow \pi_1 = \lambda/\mu \ \pi_0$

$j=1 \quad \pi_1(\lambda+\mu) = \pi_0\lambda + \pi_2\mu \Rightarrow \pi_2 \mu = \dfrac{\lambda^2}{\mu}\pi_0 \Rightarrow \pi_2 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$

$\vdots$

$j \geq 1 \quad \pi_j(\lambda+\mu) = \pi_{j-1}\lambda + \pi_{j+1}\mu \Rightarrow \pi_{j+1} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \pi_0$

Como $\sum_{i\in S} \pi(i) = 1$, segue que $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$

Nessa construção, $\lambda < \mu$. Assim $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \frac{1}{1-\lambda/\mu} \Rightarrow \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Logo,

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad j \geq 0$$

Consequentemente,

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\pi(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

W = tempo médio que o cliente passa no sistema

Conside K = # de clientes no sistema que ele encontra. $P(K=k) = \pi(k)$

$E(W) = E[E(W/K)]$,

$$E[W/K] = \frac{K+1}{\mu}$$

$$EW = \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{\mu} \pi(k) = \frac{1}{\mu}\left[\sum_{k \geq 0} k\,\pi(k) + 1\right] = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda} + 1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Logo

$$L = \lambda W, \quad \text{pois } \lambda \cdot W = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = L \quad \blacksquare$$

Agora, consideremos

L_Q: Nº médio de clientes na fila

W_Q: tempo médio que o cliente passa na fila

Considere novamente.

K = # de clientes no sistema que ele encontra.

$$E(W_c) = E[E(W_c/K)]$$

$$E(W_c/K) = \frac{K}{\mu}$$

$$EW_c = \sum_{K \geq 0} \frac{K}{\mu}\pi(K) = \frac{1}{\mu}\sum_{K \geq 0} K\pi(K) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

e

$$L_c = \sum_{i=0}^{\infty}(i-1)\pi(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi(i) - 1 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - 1 = \frac{\lambda-(\mu-\lambda)}{\mu-\lambda} = \frac{2\lambda-\mu}{\mu-\lambda}$$

Deveríamos ter $\lambda_c = \dfrac{\mu\lambda}{2\lambda-\mu}$.

$$\begin{bmatrix} P'_{00}(t) & P'_{01}(t) \\ P'_{10}(t) & P''_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

$$P'_{00}(t) = -\mu_1 P_{00}(t) + \mu_2 P_{01}(t) \qquad P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$$

$$= -\mu_1 P_{00}(t) + \mu_2 (1 - P_{00}(t)) =$$

$$= \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) P_{00}(t) =$$

$$P'_{00}(t) + (\mu_1 + \mu_2) P_{00}(t) = \mu_2 \Rightarrow$$

$$e^{t(\mu_1+\mu_2)} \left(P'_{00}(t) + (\mu_1+\mu_2) P_{00}(t) \right) = \mu_2 e^{t(\mu_1+\mu_2)}$$

$$\left(e^{t(\mu_1+\mu_2)} P_{00}(t) \right)' = \mu_2 e^{t(\mu_1+\mu_2)}$$

Daí,

$$e^{t(\mu_1+\mu_2)} P_{00}(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{t(\mu_1+\mu_2)} + K$$

$$\Rightarrow \quad P_{00}(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + K e^{-t(\mu_1+\mu_2)}$$

Como $P_{00}(0) = 1$, então $K = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$. Daí

$$P_{00}(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} e^{-t(\mu_1+\mu_2)}$$

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1+\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} e^{t(\mu_1+\mu_2)}$$

$P_{00}(t)\ \exp(\lambda_1)$

$P_{01}(t)\ \exp(\lambda_2)$

Se ele chega na etapa 1, ele vai esperar aquela etapa acabar, ~~ou qual acontece~~ o que leva $1/\lambda_1$

$$E(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} & \text{com prob. } P_{00}(t) \\ \frac{1}{\mu_2} & \text{com prob. } P_{01}(t) \end{cases}$$

Daí

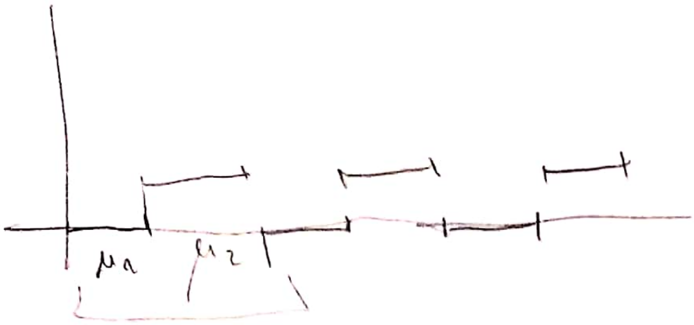
$$E(E(t)) = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) P_{00}(t) + \frac{1}{\mu_2} P_{01}(t) \quad (*)$$

d) Considere t tal que $N(t) = n$. Daí

$E(T_{N(t)+1}) = T_{n+1} - t \quad \Leftrightarrow$

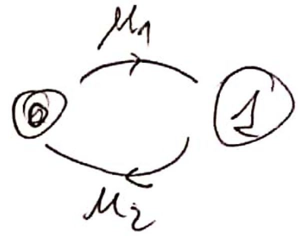
$(m(t)+1)EX - t = E(E(t)) \quad \Leftrightarrow$

$$m(t) = \frac{E(E(t)) + t}{EX} - 1 = \frac{(*) + t - 1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}$$



P("On em t") =

$$P_{12}(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{-\lambda \dots}$$



Queremos, dado que ~~começamos~~ a primeira etapa do

$$P_{01}(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$$

onde a expressão acima é obtida das.

$P'(t) =$ ~~PA~~

P_i

6.

Como é para todo t, devemos construir uma cadeia de Markov de 2 estado no tempo contínuo

$$1 \rightleftarrows 2$$

Daí,

$$\pi(1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(a)

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P_{12}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$P(E(t) \leq x) =$ condicionando em se x está em 1 ou 2,

$= P_{11}(t)$ soma exp $+$

$P_{12}(t)\ \exp(\lambda_2)$

d)

$E(\underbrace{T_{N_t+1}}) = T_{n+1} - t$

$E((m(t)+1)E(X)) = ((P_{11}(t)\ \exp + P_{12}(t)\exp(\lambda_2)))$

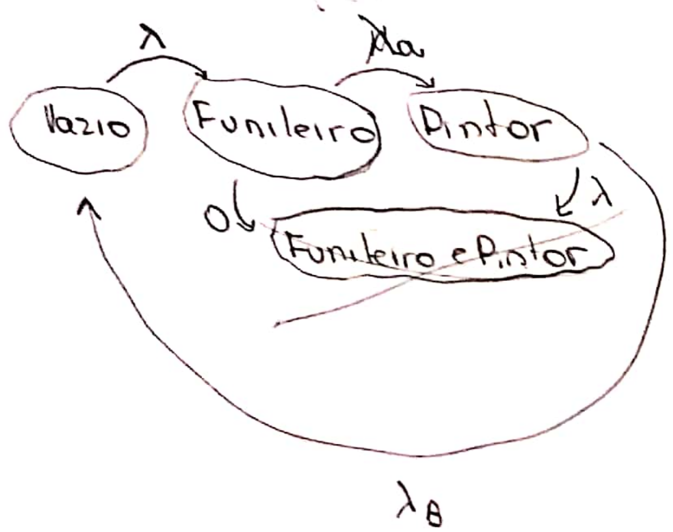
$E(m(t)) = E(E(t)) =$

3.

Para tal, seja

$$\{X\}_{t\geq 0} \text{ em } S = \{ \overset{N}{(0,0)}, \overset{F}{(0,1)}, \overset{P}{(1,0)}, \cancel{(1,1)} \}$$

uma cadeia de Markov em tempo contínuo, onde para $(x,y) \in S$, temos a primeira coordenada repr. o estado do funileiro (1 = trabalhando, 0, c.c) e a seg. " " " do pintor (1 = tr., 0 = c.c.).



$P_{F,P}(h) = (T_F < h, C > h) + $ 'outras'

$= (\mu h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))$

$P_{P,FP}(h) = (T_P > h, T_C < h) + $ out.

$1 - \lambda_B h)(\lambda h) + o(h)$

$P_{F,FP} = \mathbb{P}(T_F < h, T_C < h) =$

$= (\lambda h + o(h))(\lambda h + o(h)) + o(h)$

$= o(h)$

3.

Sejam os eventos

V = não há nenhum carro

F = o funileiro está ...

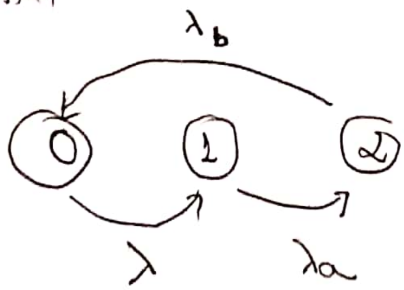
P = o pintor ,, ,,

a)

Podemos definir $\{X_t\}_{t\geq 0}$ em $S=\{0,1,2\}$, com

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{se } V \text{ ocorre} \\ 1 & \text{,, } F \text{ ,,} \\ 2 & \text{se } P \text{ ,,} \end{cases}$$

Pictorialmente,



$\lambda a = \frac{1}{a}$, $\lambda_b = \frac{1}{b}$

Ou seja,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \mathbb{L} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda a & \lambda a \\ \lambda_b & 0 & -\lambda_b \end{bmatrix} \end{array}$$

De $\pi \mathbb{L} = 0$, segue

$$\begin{cases} \lambda \pi(0) = \lambda_b \pi(2) \\ \lambda \pi(0) = \lambda a \pi(1) \\ \lambda a \pi(1) = \lambda_b \pi(2) = \lambda \pi(0) \end{cases} \Rightarrow \pi(1) = \frac{\lambda}{\lambda a}\pi(0), \quad \pi(2) = \frac{\lambda}{\lambda_b}\pi(0)$$

com $\sum_{i=0}^{2} \pi(i) = 1 \Rightarrow \pi(0) = \dfrac{1}{1 + \frac{\lambda}{\lambda a} + \frac{\lambda}{\lambda_b}}$

Ou seja

$$\pi(0) = \frac{1}{1+\lambda a + \lambda b},$$

Daí,

$$\pi(1) = \frac{a\lambda}{1+a\lambda+b\lambda} \quad e \quad \pi(2) = \frac{b\lambda}{1+a\lambda+b\lambda}$$

Logo, como $X_t = 1$ equivale ao evento o "funileiro está trab.",

$$\pi(1) = \frac{a\lambda}{1+a\lambda+b\lambda}.$$

b) Agora, seja

$T_F \sim F$ o tempo que o funileiro leva para concluir seu serviço

$T_P \sim G$ " " " pintor " " " " "

Entrada: PPP(λ)

E

$$= \frac{\mu_F}{\frac{1}{\lambda} + \mu_F + \mu_G}$$