Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

PMS — Estrutura de classes

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ em $\mathcal{S}$. Dados $x, y \in \mathcal{S}$, dizemos que x *atinge* y, not: $x \to y$, se

$$\mathbb{P}_x(X_t = y \text{ para algum } t \geq 0) > 0,$$

e que x *se comunica com* y, not: $x \leftrightarrow y$, se $x \to y$ e $y \to x$.

Noções de *classe de comunicação, classe fechada, estado absorvente* e *irredutibilidade*, em termos das noções do parágrafo anterior, são as mesmos do que para as CM's (em tempo discreto).

Teorema 1

Para $x \neq y \in \mathcal{S}$, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $x \to y$;

(ii) $x \to y$ na cadeia de saltos;

(iii) $q_{x_0 x_1}, \ldots, q_{x_{n-1} x_n} > 0$ p/algum $n \geq 1$ e $x = x_0, \ldots, x_n = y$;

(iv) $P_{xy}(t) > 0$ para todo $t > 0$;

(v) $P_{xy}(t) > 0$ para algum $t > 0$.

Dem. Teo 1

iv $\Rightarrow$ v $\Rightarrow$ i $\Rightarrow$ ii: claras.

(ii $\Rightarrow$ iii) $x \to y \Rightarrow \pi_{x_0x_1}, \dots, \pi_{x_{n-1}x_n} > 0 \Rightarrow q_{x_0x_1}, \dots, q_{x_{n-1}x_n} > 0$

(iii $\Rightarrow$ iv) Se $q_{xy} > 0$, então p/$t > 0$

$$P_{xy}(t) \geq \mathbb{P}_x(T_1 \leq t, X_{Y_1} = y, T_2 > t) = (1 - e^{-q_x t})\pi_{xy} e^{-q_y t} > 0. \quad (1)$$

Segue então de (iii) e de (1) (e da PM) que

$$P_{xy}(t) \geq P_{x_0x_1}\left(\tfrac{t}{n}\right) \cdots P_{x_{n-1}x_n}\left(\tfrac{t}{n}\right) > 0. \qquad \square$$

Tempos de chegada e probabilidades de absorção

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ em $\mathcal{S}$. Dado $A \subset \mathcal{S}$, o *tempo de chegada* a A é a va

$$D^A = \inf\{t \geq 0 : \, X_t \in A\}; \text{ conv: } \inf \emptyset = \infty.$$

Seja H^A o tempo de chegada a A da cadeia de saltos. Então

$$\{D^A < \infty\} = \{H^A < \infty\}, \text{ e, neste evento, } D^A = S_{H^A}.$$

Seja ainda $h_x^A = \mathbb{P}_x(D^A < \infty) = \mathbb{P}_x(H^A < \infty)$.

Do Teo I do segundo cj de slides sobre CM's em tempo discreto (Teo 1.3.2 do livro) segue, reescrevendo $\mathbf{\Pi}$ em termos de $\mathbf{Q}$, o seguinte resultado.

Teorema 2

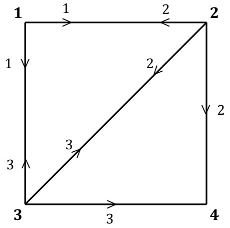
$h^A = (h_x^A, \, x \in \mathcal{S})$ é a slç mínima nneg do sistema linear de eqs

$$\begin{cases} h_x^A = 1, & \text{se } x \in A; \\ \sum_{y \in \mathcal{S}} q_{xy} h_y^A = 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Tempos de chegada esperados

Seja $k_x^A = \mathbb{E}_x(D^A)$, $x \in \mathcal{S}$, $A \subset \mathcal{S}$.

Exemplo.



$$A = \{4\},\ k_x \equiv k_x^{\{4\}}.$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}k_2 + \tfrac{1}{2}k_3 \\ k_2 &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{1}{3}k_3 \\ k_3 &= \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_1 &= \tfrac{68}{48} = \tfrac{17}{12} \\ k_2 &= \tfrac{45}{48} = \tfrac{15}{16} \\ k_3 &= \tfrac{43}{48} \end{aligned}$$

Teorema 3

Suponha que $q_x > 0$ p/todo $x \notin A$. Então $(k_x^A,\, x \in \mathcal{S})$ é a slç mínima nneg de

$$\begin{cases} k_x^A = 0, & \text{se } x \in A; \quad (2) \\ -\sum_{y\in\mathcal{S}} q_{xy} k_y^A = 1, & \text{se } x \notin A. \quad (3) \end{cases}$$

Dem.

(2) é claro.

(3): $\mathbb{E}_x(D^A) = \mathbb{E}_x(T_1 + D^A - T_1)$

$$= \mathbb{E}_x(T_1) + \mathbb{E}_x\Big\{\mathbb{E}_x\big(D^A - T_1 \big| Y_1\big)\Big\}$$

$$= \frac{1}{q_x} + \sum_{y\in\mathcal{S};\, y\neq x} \pi_{xy}\, \mathbb{E}_y(D^A).$$

Logo, $q_x k_x^A = 1 + \sum_{y\neq x} q_{xy}\, k_y^A$, e (k_x^A) satisfaz (3).

Dem. Teo 3 (cont)

Suponha que $\ell = (\ell_x,\, x \in \mathcal{S})$ satisfaz (2) e (3) e $\ell_x \geq 0\ \forall\ x \in \mathcal{S}$.

Então

$$\ell_x = \frac{1}{q_x} + \sum_{y \notin A} \pi_{xy} \ell_y = \frac{1}{q_x} + \sum_{y \notin A} \pi_{xy} \left(\frac{1}{q_y} + \sum_{z \notin A} \pi_{yz} \ell_z \right)$$

$$= \mathbb{E}_x(T_1; H^A \geq 1) + \mathbb{E}_x(T_2; H^A \geq 2) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} \pi_{xy} \pi_{yz} \ell_z$$

$$\vdots$$

$$= \mathbb{E}_x(T_1; H^A \geq 1) + \cdots + \mathbb{E}_x(T_n; H^A \geq n) + \sum_{y_1, \ldots, y_n \notin A} \pi_{xy_1} \cdots \pi_{y_{n-1} y_n} \ell_{y_n}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_x(T_i; H^A \geq i) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A \wedge n} T_i \right),\ n \geq 1.$$

Logo,

$$\ell_x \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A \wedge n} T_i \right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A} T_i \right) = \mathbb{E}_x(D^A) = k_x^A.$$

$\square$

Recorrência e Transitoriedade

Seja $(X_t) \sim \mathrm{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ em $\mathcal{S}$; dizemos que $x \in \mathcal{S}$ é *recorrente* se

$$\mathbb{P}_x(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ é não limitado }) = 1$$

e *transitório* se

$$\mathbb{P}_x(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ é não limitado }) = 0.$$

Obs. Se (X_t) puder explodir a partir de x, então x não pode ser recorrente.

Teorema 3

Para $x \neq y \in \mathcal{S}$, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) Se x for recorrente para (Y_n), então x é recorrente para (X_t);

(ii) Se x for transitório para (Y_n), então x é transitório para (X_t);

(iii) Cada estado é ou transitório ou recorrente;

(iv) Recorrência e transitioridade são propriedades de classe.

Dem. Teo 3

(i) Como vimos antes (Teo 2 do cj de slides sobre PMS; Teo 2.7.1 do livro), se x for recorrente para (Y_n), então (X_t) não é explosivo começando de x. Logo, sob $\mathbb{P}_x$, $S_n \to \infty$ qdo $n \to \infty$ e $X_{S_n} = Y_n = x$ i.v. qc. Logo, $\{t \geq 0 : X_t = x\}$ é ilimitado qc.

(ii) Seja N o tempo da última visita de (Y_n) a x. Então, sob $\mathbb{P}_x$, $N < \infty$ qc, e logo $\{t \geq 0 : X_t = x\}$ é limitado por $S_{N+1} < \infty$ qc, pois $(Y_n, n \leq N)$ não pode incluir estado absorvente.

(iii) e (iv) valem no caso contínuo por valerem no caso discreto, usando (i) e (ii).

Critério de recorrência e transitoriedade

Seja $\mathcal{T}_x$ o tempo de primeira passagem de (X_t) por $x \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{T}_x = \inf\{t \geq S_1 : X_t = x\}.$$

Teorema 4

Vale a seguinte dicotomia.

(i) Se $q_x = 0$ *ou* $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$, então x é recorrente e $\int_0^\infty P_{xx}(t)\,dt = \infty$;

(ii) Se $q_x > 0$ *e* $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) < 1$, então x é transitório e $\int_0^\infty P_{xx}(t)\,dt < \infty$.

Dem. (i) óbvio se $q_x = 0$ (neste caso, x absorvente e $P_{xx}(t) = 1,\ t \geq 0$).
Suponhamos então que $q_x > 0$, e seja N_x a 1a passagem de (Y_n) por x.
Então

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty). \tag{4}$$

Pelo Teo 3 e o resultado p/a cadeia de saltos (Teo 1 do 2do cj de slides do curso), x é recorrente se e só se $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$.

Dem. Teo 4 (cont)

Seja $\pi_{xx}^{(n)} = (\mathbf{\Pi}^n)_{xx}$. Vamos mostrar que

$$\int_0^\infty P_{xx}(t)\,dt = \frac{1}{q_x} \sum_{n=0}^\infty \pi_{xx}^{(n)} \tag{5}$$

e logo x é recorrente sse $\int_0^\infty P_{xx}(t)\,dt = \infty$, pelo Teo 3 e o resultado corresp p/(Y_n). Por Fubini

$$\int_0^\infty P_{xx}(t)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_x(\mathbb{1}\{X_t = x\})dt = \mathbb{E}_x\Big(\int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = x\}\Big)dt$$

$$= \mathbb{E}_x\Big(\sum_{n=0}^\infty T_{n+1}\mathbb{1}\{Y_n = x\}\Big) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_x(T_{n+1}|Y_n = x)\mathbb{P}_x(Y_n = x)$$

$$= \frac{1}{q_x} \sum_{n=0}^\infty \pi_{xx}^{(n)}. \qquad \square_{\text{(i)}}$$

Sob as conds de (ii), (4) vale e logo x é transitório p/a cadeia de saltos; a última condição de (ii) então segue de (5) e do critério de transitoriedade para CM's em tempo discreto (Teo 1 do 2do cj de slides do curso). $\square$

Teorema 5

Fixemos $h > 0$, e seja $Z_n = X_{nh}$.

(i) Se x for recorrente p/(X_t), então x é recorrente p/(Z_n).
(ii) Se x for transitório p/(X_t), então x é transitório p/(Z_n).

Dem. (ii) é claro.

(i)
$$\begin{aligned} P_{xx}(\lfloor \tfrac{t}{h} \rfloor h + h) &\geq \mathbb{P}_x(X_t = x, \text{ tempo até 1ro salto após } t \text{ é} > t + h) \\ &= P_{xx}(t)\, e^{-q_x h} \end{aligned}$$

Logo, $P_{xx}(t) \leq e^{q_x h} P_{xx}(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h + h)$, e

$$\infty = \int_0^\infty P_{xx}(t)\, dt \leq e^{q_x h} \int_0^\infty P_{xx}(\lfloor t/h \rfloor h + h)\, dt$$

$$= e^{q_x h} \sum_{n=0}^\infty \int_{nh}^{nh+h} \overbrace{P_{xx}(\lfloor t/h \rfloor h + h)}^{P_{xx}(nh+h)}\, dt = h e^{q_x h} \sum_{n=1}^\infty P_{xx}(nh).$$

Logo, $\sum_{n=1}^\infty P_{xx}(nh) = \infty$ e (Z_n) é recorrente pelo critério satisfeito por CM's em tempo discreto.