[redacted] Robson Pedreiro Gimenez
Estatística - F.C.T. Unesp. 2010

Livro: Probabilidade: Um curso em nível intermediário
Autor: Barry R. James

Capítulo 1

Definições básicas

01/03/2000

1 Sejam A, B e C eventos aleatórios. Identifique as seguintes equações e frases, pareando cada equação expressa na notação de conjuntos com a correspondente frase na linguagem de eventos

(a) $A\cap B\cap C = A\cup B\cup C \Leftrightarrow$
$A=B=C$

(b) $A\cap B\cap C = A \Leftrightarrow$
$\begin{cases} A\subset B \\ A\subset C \end{cases} \Leftrightarrow A\cap(B\cup C)=A \Leftrightarrow A\subset(B\cup C)$

(c) $A\cup B\cup C = A \Leftrightarrow$
$A\cap(B\cup C) = A \Leftrightarrow$
$A\supset(B\cup C)$

(d) $(A\cup B\cup C) - (B\cup C) = A \Leftrightarrow$
$A\cap(B\cup C) = \phi$

i) A e "B ou C" são incompatíveis: $A\cap(B\cup C)=\phi$ (d)

ii) Os eventos A, B, C são idênticos $A=B=C$ (a)

iii) A ocorrência de A implica a de "B ou C" $A\subset(B\cup C)$. (b)

iv) A ocorrência de A decorre da ocorrência de "B ou C" $\therefore A\supset(B\cup C)$ (c)

2- A partir dos axiomas, prove a propriedade P5.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Considere os eventos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $k=2,3,\ldots$ Assim $\underline{B_n \subseteq A_n, \forall n} \overset{P3}{\Rightarrow}$ $P(B_n)\leq P(A_n), \forall n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ e $B_i\cap B_j = \phi$. $\forall i\neq j$ (por construção). Assim.

$$\therefore P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = (\text{axioma } 3^\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

3. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. Mostre que:

(a) $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \overset{\text{POR P.4}}{\geq} 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$$

(b) Se $P(A_k)\geq 1-\varepsilon$ para $k=1,\ldots,n$ então $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - n\varepsilon$

Agora se $P(A_k)\geq 1-\varepsilon \Rightarrow 1-P(A_k) = P(A_k^c) \leq \varepsilon$ para $k=1,\ldots,n$

então $\sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \leq n\varepsilon \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \geq 1 - n\varepsilon$

(c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_k^c)$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right]^c \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)$$

Agora, pelo exercício 2: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \Rightarrow 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \Rightarrow$

$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$

4. Demonstre as seguintes propriedades

(a) Se $P(A_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ então $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

temos através do exercício 2 que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0 \xRightarrow{\text{axioma 1}} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

(b) Se $P(A_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ então $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)) = 1 \xRightarrow{P_2}$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

5. Demonstre: se $A_1, A_2, \ldots$ e $B_1, B_2, \ldots$ são eventos aleatórios do mesmo espaço de probabilidade tais que $P(A_n) \to 1$ e $P(B_n) \to p$ quando $n \to \infty$ então $P(A_n \cap B_n) \to p$.

$A_n \cup B_n = [A_n - (A_n \cap B_n)] \uplus [B_n - (A_n \cap B_n)] \uplus [A_n \cap B_n]$. Agora $A_n \cap B_n \subseteq A_n$, $A_n \cap B_n \subseteq B_n$. Assim

$P(A_n \cup B_n) = P(A_n) - P(A_n \cap B_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n) + P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n)$.

Então $\lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) + \lim_{n\to\infty} P(B_n) - \lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n)$. Agora como $A_n \cup B_n \supseteq A_n$

então $P(A_n \cup B_n) \geq P(A_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B_n) \geq \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 \xRightarrow{P_2} \lim_{n\to\infty} P(A_n \cup B_n) = 1$ Então:

$1 = 1 + p - \lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n \cap B_n) = p$

6. Seja Ω um conjunto não-vazio.

(a) Prove: se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são σ-álgebras de subconjuntos de Ω então $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ também é uma σ-álgebra.

A2. $A \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{A} \xRightarrow{\mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-alg}} A^c \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{B} \xRightarrow{\mathcal{B} \text{ é } \sigma\text{-alg}} A^c \in \mathcal{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A^c \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

A1. $\left.\begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{A} \ (\mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-alg}) \\ \Omega \in \mathcal{B} \ (\mathcal{B} \text{ é } \sigma\text{-alg}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$

A3.

$$\text{Se } A_1, A_2, \ldots \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \overset{\mathcal{A}\ \sigma\text{-alg}}{\Longrightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B} \overset{\mathcal{B}\ \sigma\text{-alg}}{\Longrightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B} \end{cases} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Então A1, A2 e A3 $\Rightarrow (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ é σ-álgebra

(b) Generalize o item (a): Se $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, são σ-álgebras de partes de Ω, onde I é um conjunto não-vazio de índices, então $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ também é uma σ-álgebra.

A1

$$\Omega \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in I \ (\text{pois } \mathcal{A}_i \text{ é } \sigma\text{-alg}) \Rightarrow \Omega \in \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i\right)$$

A2.

$$A \in \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i, \ \forall i \in I \overset{\mathcal{A}_i\ \sigma\text{-alg}}{\Longrightarrow} A^c \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \ldots A^c \in \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i\right)$$

A3

$$A_1, A_2, \ldots \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right) \Rightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_i ; \forall i \in I \overset{\mathcal{A}_i\ \sigma\text{-alg}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i\right).$$ De (A1) (A2) e (A3)

$\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i\right)$ é σ-álgebra de Ω

(c) Seja $\mathcal{C}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Mostre que existe pelo menos uma σ-álgebra que contém $\mathcal{C}$. (Sugestão: Qual a "maior" classe de subconjuntos de Ω).

A "maior" classe de subconjuntos de Ω é a classe formada por todos os subconjuntos de Ω, ou seja o conjunto de partes de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Como $P(\Omega)$ é σ-álgebra e contém todos os subconjuntos de Ω, então $\mathcal{P}(\Omega)$ contém $\mathcal{C}$.

(d) Visando a plena utilização dos itens (b) e (c), como você definiria "a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{C}$", onde $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω?

Seja I um conjunto de índices e sejam $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ todas as σ-álgebras de subconjuntos de Ω que contém $\mathcal{C}$ (I é não-vazio, pois fazendo $\mathcal{A}_1 = P(\Omega)$ que é σ-álgebra e contém $\mathcal{C}$, $1 \in I$). Então definiríamos a "menor σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contém $\mathcal{C}$":

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ , que é } \sigma\text{-álgebra por b)}$$

7- Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, e

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

(Veremos uma interpretação intuitiva desses eventos no §5.2.) Se $\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$ chamamos o evento de A de $\lim_{n\to\infty} A_n$ (limite de A_n). Demonstre que se $A = \lim A_n$, então $P(A_n) \to P(A)$ quando $n \to \infty$.

temos: a) fazendo $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$ então. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$

então $B_n \downarrow \lim\sup A_n = A \overset{P.6}{\Longrightarrow} P(B_n) \downarrow P(A)$ (I)

e analogamente $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ então $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$

então $C_n \uparrow \lim\inf A_n = A \overset{P.6}{\Longrightarrow} P(C_n) \uparrow P(A)$ (II)

Agora. $A_n \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_j$ e $A_n \supseteq \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ e então. $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n \overset{P.3}{\Longrightarrow}$

$P(C_n) \leq P(A_n) \leq P(B_n) \overset{(I)e(II)}{\Longrightarrow} P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(A)$

8- No jogo do "Craps" dois dados são jogados. Se o jogador tira 7 ou 11 pontos ele ganha. Se ele tira 2, 3 ou 12 ele perde. Nos outros casos ele continua jogando os dois dados até sair 7, caso em que ele perde, ou então sair o primeiro resultado, caso em que ele ganha. Descreva o espaço amostral. Qual é a probabilidade dele ganhar

$\Omega = \{ w_i, i = 1, 2, \dots ; \ w_i \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}, w_i = (a_i, b_i) \}$

Considere o evento G = ganhar o jogo. Então, sendo:

$G_1 = \{ (w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_1 = 7 \text{ ou } w_1 = 11 \}$ = "tirar 7 ou 11 na 1ª jogada"

$G_2 = \{ (w_1, w_2, \dots) \in \Omega, \ w_1 = 4, \exists j > 1 \text{ t.q } w_j = 4 \text{ e } w_i \neq 7, i = 2, \dots, j-1 \}$ = "tirar 4 na 1ª jog

$G_3 = \{ (w_1, w_1, \dots) \in \Omega : w_1 = 5, \exists j > 1 \text{ t.q } w_j = 5 \text{ e } w_i \neq 7, i = 2, \dots, j-1 \}$ = "tirar 5 na 1ª jogada e ganhar"

⋮

$G_n = \{ (w_1, w_2, \dots) \in \Omega : w_1 = 10, \exists j > 1 \text{ t.q } w_j = 10 \text{ e } w_i \neq 7, i = 2, \dots, j-1 \}$ = "tirar 10 na 1ª j

Então: $C = \bigcup_{i=1}^{7} G_i \overset{\text{disjuntos}}{\Rightarrow} P(G) = \sum_{i=1}^{7} P(G_i)$. igual

$P(G_1) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$P(G_2) = \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36} + \frac{3}{36}\cdot\frac{27}{36}\cdot\frac{3}{36} + \dots = \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36}\frac{1}{\left(1-\frac{27}{36}\right)} = \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36}\cdot\frac{36}{9} = \frac{1}{36}$

$P(G_3) = \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{26}{36}\cdot\frac{4}{36} + \dots = \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36}\frac{1}{\left(1-\frac{26}{36}\right)} = \frac{4}{36}\cdot\frac{4}{36}\cdot\frac{36}{10} = \frac{2}{45}$

$P(G_4) = \frac{5}{36}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{36}{11} = \frac{25}{396}$

$P(G_5) = \frac{25}{396}$, $P(G_6) = \frac{2}{45}$, $P(G_7) = \frac{1}{36}$

então: $P(G) = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} + \frac{2}{45} + \frac{25}{396} + \frac{25}{396} + \frac{2}{45} + \frac{1}{36} = 0{,}49292$

9. Uma caixa contém $2n$ sorvetes, n do sabor A e n do sabor B. De um grupo de $2n$ pessoas, $a < n$ preferem o sabor A, $b < n$ o sabor B e $2n-(a+b)$ não tem preferência. Demonstre: se os sorvetes são distribuídos ao acaso, a probabilidade de que a preferência de todas as pessoas seja respeitada é de: $\binom{2n-a-b}{n-a} / \binom{2n}{n}$

sorvetes: n do tipo A, n do tipo B

preferências: $a<n$ do tipo A, $b<n$ do tipo B, indiferentes $2n-a-b$

então:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{a}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{b}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{2n-a-b}$$

$$P = \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-a+1)\cdot n(n-1)\dots(n-b+1)\cdot(2n-a-b)!}{2n!} = \frac{1}{2n!}\,\frac{n!}{(n-a)!}\cdot\frac{n!}{(n-b)!}\cdot(2n-a-b)! =$$

$$= \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!\,(n-b)!}\cdot\frac{n!\,n!}{2n!} = \binom{2n-a-b}{n-a} \Big/ \binom{2n}{n}$$

10. Suponhas que dez cartas estejam numeradas de 1 a 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar-se o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessária. Exiba um bom modelo probabilístico para este experimento.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{A} = P(\Omega)$, $P(n) = \frac{\binom{5}{n-1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{n}}$, $n=1,2,\dots,5$ – errado.

$P[X=k] = \frac{A_{5,k-1}\cdot 5}{A_{10,k}}$, $k=1,\dots,5$

e $P(6) = \frac{1}{\binom{10}{5}}$

11- Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:

(a) seleciona-se um ponto, ao acaso do quadrado unitário $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Seja: $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \beta^2$ e sendo $Q = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ definimos:

$$P(A \in \mathcal{A}) = \frac{\text{área}(A \cap Q)}{\text{área}(Q)} = \text{área}(A \cap Q)$$

(b) Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e com reposição, até se tirar o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathcal{A} = P(\Omega), \quad P(n) = \left(\frac{12}{13}\right)^{n-1} \cdot \frac{12}{13}, \; n = 1, 2, \dots$$

(c) Quinze bolas são retiradas ao acaso e com reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas, e uma bola branca. Observa-se o número de vezes que ocorre cada cor.

$$\Omega = \{(n_v, n_p, n_b): n_v, n_p, n_b \in N \text{ e } n_v + n_b + n_p = 15\}$$

$$\mathcal{A} = P(\Omega)$$

e $P(n_v, n_p, n_b) = \frac{15!}{n_v!\, n_p!\, n_b!} \left(\frac{5}{15}\right)^{n_v} \cdot \left(\frac{9}{15}\right)^{n_p} \left(\frac{1}{15}\right)^{n_b}$, $(n_v, n_p, n_b) \in \Omega$

(d) O experimento (c) é realizado sem reposição.

$\Omega = \{(n_v, n_p, n_b) = (5, 9, 1)\}$ $\quad \mathcal{A} = \{(5,9,1)\}$ $\quad P(\{(5,9,1)\}) = 1$

12 - Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Exiba um bom modelo probabilístico para este experimento, se:

(a) As retiradas são feitas sem reposição:

$$\Omega=\{0,1,2,3,4\},\ \mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)\ \text{e}\quad P(n)=\frac{\binom{48}{4-n}\cdot\binom{4}{n}}{\binom{52}{4}},\quad n=0,1,2,3\text{ e }4.$$

(b) As retiradas são feitas com reposição:

$$\Omega=\{0,1,2,3\},\ \mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)\ \text{e}\quad P(n)=\binom{4}{n}\left(\frac{12}{13}\right)^{4-n}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^{n},\quad n=0,1,\dots,4$$

(c) Determine em que caso, (a) ou (b), é mais provável obter 4 reis.

$$P_a(4)=\frac{\binom{48}{4}\cdot 1}{\binom{52}{4}}=\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50}\cdot\frac{45}{49}=71,87\ \%.$$

$$P_b(4)=\binom{4}{4}\left(\frac{12}{13}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^{4}=\left(\frac{1}{13}\right)^{4}=52,66\ \%$$

Assim, é mais provável obter 4 reis no caso (b).

13 - (a) Sejam A, B e C eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Mostre que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ e $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

Temos: $A\cup B=A\cup(B-(A\cap B))$ e como $(A\cap B)\subset B \Rightarrow P(B-(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)$. Então pela aditividade finita; $P(A\cup B)=P(A)+P(B-(A\cap B))=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Agora: $P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$

$-P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

(b) Enuncie a generalização do item (a) para o caso da união de n eventos aleatórios.

Sejam $A_1,A_2,\dots,A_n$ eventos aleatórios em um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_i\cap A_j)+\dots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$$

(c) Prove as seguintes desigualdades de Bonferroni. Referência: Feller v.1 - cap IV - item 5.

I-

i) $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)$

i) Primeiramente vamos mostrar $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ por indução

assim para $n=2$ vale a desigualdade, pois $P(A)+P(B)-P(A\cap B) = P(A\cup B)$

Agora, suponhamos que vale para n então provaremos que vale para $n+1$:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_{n+1}\cup(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(A_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - P(A_{n+1}\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \geq P(A_{n+1}) + \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j)\right) -$$

$$- P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_i)) \geq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) - \sum_{i=1}^{n} P(A_{n+1}\cap A_i) \quad \left(\text{pois: } P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_{n+1}\cap A_i)\right)$$

então $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i\cap A_j)$.

ii) Agora mostraremos também por indução que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

assim para $n=3$ vale a desigualdade pois pelo item a:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - \{P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C)\} + P(A\cap B\cap C)$$

Agora, suponhamos que vale para n então provaremos que vale para $n+1$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_{n+1}\cup(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = P(A_{n+1}) + P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - P(A_{n+1}\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \leq P(A_{n+1}) + \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) +\right.$$

$$\left. + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)\right) - P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_i)).$$

Agora, como: $P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_{n+1}\cap A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_{n+1}\cap A_i\cap A_j)$ (item i)

temos:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n+1} P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

ii) Se k é impar $k\leq n$ então

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i\cap A_j) + \dots (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})$$

Se k é par, $k\leq n$, vale $\geq$ nesta ultima igualdade.

Façamos:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad S_2 = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \qquad \dots \qquad S_n = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

então por (b): $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$ (I)

Agora, vamos introduzir a seguinte notação:

P_m é a probabilidade de que ocorram pelo menos m dos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$
$P_{[m]}$ é " " " " exatamente m " "

então: $P_m = P_{[m]} + P_{[m+1]} + \dots + P_{[n]}$ (II)

Agora usando o fato de que $P_{m+1} = P_m - P_{[m]}$ e usando a equação (I), podemos exprimir P_m em termos de $S_m, S_{m+1}, \dots, S_n$. Assim:

$$P_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \dots \pm \binom{n-1}{m-1} S_n \qquad \text{(III)}$$

Porém, podemos expressar S_v em termos de $[P_k]$ da seguinte maneira.

$$S_v = \sum_{k=v}^{N} \binom{k}{v} P_{[k]} \qquad \text{(IV)}.$$

Então; provar as desigualdades de Bonferroni é equivalente a provar para $m=1$ que se conservarmos apenas os termos $S_1, S_2, \dots, S_r$; e se descartam os termos $S_{r+1}, \dots, S_n$, então o erro tem o sinal do primeiro termo omitido (a saber $(-1)^r$) e é menor em valor absoluto. O que através de (III) se verifica, quando:

$$\sum_{v=t}^{N} (-1)^{v-t} \binom{v}{1} S_v \geq 0 \quad , \text{para todo } t = 1, 2, \dots, n \qquad \text{(V)}$$

Agora de (IV) em (V) $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{v=t}^{N} (-1)^{v-t} \binom{v}{1} \sum_{k=v}^{N} \binom{N}{v} P_{[k]}$.

Agora, esta é uma combinação linear dos $P_{[k]}$, onde para $t \le k < N$ o coeficiente de $P_{[k]}$ é igual a:

$$\sum_{v=t}^{k} (-1)^{v-t} \binom{v}{1} \binom{k}{v} = \binom{k}{1} \sum_{v=t}^{k} (-1)^{v-t} \binom{k-1}{v-1} = \binom{k}{1} \binom{k-2}{t-2} \geq 0$$

14. (Problema de casamentos) .1.

(a) No exercício I, se você identificasse ao acaso as equações e frases qual a probabilidade de que você acertasse pelo menos 1 casamento.

Seja A = evento acertar o 1º casamento

B = " " o 2º "

C = " " o 3º casamento

$A \cup B \cup C$ = evento acertar pelo menos 1 casamento

Então por 13(a): $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

e
$$\begin{cases} P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ P(A\cap B)=P(B\cap C)=P(A\cap C)=\frac{1}{6} \\ P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{6} \end{cases}$$

então $P(A\cup B\cup C) = 3\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(b) Resolva o item (a) para o caso em que há n equações e n frases para serem identificadas (Sugestão. Use o exercício 13(b))

Fazendo: A_i = evento acertar a identificação da i-ésima equação, $i=1,2,\dots,n$

temos $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ = evento acertar pelo menos uma identificação.

$$\begin{cases} P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, & i=1,2,\dots,n \\ P(A_i\cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n+1)}, & 1\leq i<j\leq n \\ P(A_i\cap A_j\cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, & 1\leq i<j<k\leq n \\ \vdots \\ P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = \frac{1}{n!} \end{cases}$$

então usando o exercício 13(b) e a simetria do problema:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n\,P(A_i) - \binom{n}{2}P(A_1\cap A_2) + \binom{n}{3}P(A_1\cap A_2\cap A_3) \dots (-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$$

$$= n\cdot\frac{1}{n} - \frac{n(n+1)}{2!}\cdot\frac{1}{n(n+1)} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\cdot\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \dots (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} =$$

(c) Mostre que a probabilidade considerada no item (b) converge para $p = \frac{1}{e}$ quando $n \to \infty$.

Temos que $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right) = \frac{1}{e}$.

Assim: $\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right) = \frac{1}{e}$

15. Suponha que n cartas numeradas de 1 a n sejam embaralhadas e retiradas uma por uma, sem reposição, até que todas as cartas serem retiradas. Qual a probabilidade de que pelo menos uma carta coincida com o número de retirada? (Observação. A resposta é igual ao exercício 14(b). Porque?)

Este problema é igual ao do casamento, ou seja pode ser considerado como o problema da identificação ao acaso do nº da carta com o nº da sua retirada então por 14(b): $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

16- Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e suponha que todos os conjuntos abaixo pertençam a $\mathcal{A}$. Prove:

(a) Se os A_n são disjuntos e $P(B/A_n) \geq c$ para todo n, então $P(B/\cup A_n) \geq c$ (pode supor $P(A_n) > 0$ para todo n)

temos: $[B \cap (\cup A_n)] = \cup [B \cap A_n] \Rightarrow P(B \cap (\cup A_n)) = \sum_n P(B \cap A_n)$ (I)

agora: $P(B/A_n) \geq c \xRightarrow{P(A_n)>0} P(B \cap A_n) \geq c \cdot P(A_n)$, $\forall n$

então somando em n: $\sum_n P(B \cap A_n) \geq c \sum P(A_n) = c\, P(\cup A_n) \xRightarrow{(I)}$

$P(B \cap (\cup A_n)) \geq c\, P(\cup A_n) \xRightarrow{P(\cup A_n)>0} \frac{P(B \cap (\cup A_n))}{P(\cup A_n)} \geq c \Rightarrow P(B/\cup A_n) \geq c$

(b) O item (a) com "=" no lugar de "$\geq$". A prova é análoga e:

$P(B/\cup A_n) = c$

(c) Se $A_n \supset A_{n+1}$ e $P(A_{n+1}/A_n) \leq \frac{1}{2}$ para todo n, então $P(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$

Verifiquemos inicialmente que se: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n$, então:

$$P(A_n / A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) = P(A_n / A_{n-1})$$

pois: $$P(A_n / A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) = \frac{P(A_n \cap (A_{n-1} \cap \dots \cap A_1))}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} = \begin{pmatrix} A_{n-1} \subset A_{n-2} \subset \dots \subset A_1 \\ \text{então} \\ A_{n-1} \cap A_{n-2} \cap \dots A_1 = A_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{P(A_n \cap A_{n-1})}{P(A_{n-1})} = P(A_n / A_{n-1}) \quad (I)$$

Agora, aplicando o teorema da probabilidade composta:

$$P(A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cdot \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1, A_2) \cdots P(A_n / A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) =$$

$$\overset{(I)}{=} P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_n) \cdots P(A_n/A_{n-1}) \quad (II)$$

Agora: $0 \leq P(A_1) \leq 1$ e $0 \leq P(A_i/A_{i-1}) \leq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Assim de

(II): $$0 \leq P(A_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} P(A_n) \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

d) Se os A_n são disjuntos e $P(B/A_n) = P(C/A_n)$, $\forall n$, então

$$P(B / \cup A_n) = P(C / \cup A_n)$$

$$P(B/\cup A_n) = \frac{P(B \cap (\cup A_n))}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup (B \cap A_n))}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(B \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum P(B/A_n) \cdot P(A_n)}{P(\cup A_n)} =$$

$$= \frac{\sum_n P(C/A_n) \cdot P(A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{\sum_n P(C \cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(\cup (C \cap A_n))}{P(\cup A_n)} = P(C/\cup A_n)$$

e) Se os $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos e $\cup A_n = \Omega$, então:

$$P(B/C) = \sum_n P(A_n/C) \cdot P(B / A_n \cap C)$$

temos: $$\sum_n P(A_n/C) \cdot P(B / A_n \cap C) = \sum_n \frac{P(A_n \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(A_n \cap C)} = \frac{1}{P(C)} \sum_n \frac{P((B \cap C) \cap A_n)}{P(A_n)} =$$

$$= \frac{1}{P(C)} \sum_n P(B \cap C / A_n) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} A_n \text{ são disjuntos} \\ \text{e } \cup A_n = \Omega \end{pmatrix} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(B/C)$$

17- Suponha que a ocorrência ou não de chuva dependa das condições do tempo no dia imediatamente anterior. Admita-se que se chove hoje, choverá amanhã com probabilidade 0,7 e que se não chove hoje choverá amanhã com probabilidade 0,4. Sabendo-se que choveu hoje, calcule a probabilidade de que choverá depois de amanhã:

C_i = evento chove no dia i

$P(C_{i+1}/C_i) = 0{,}7$

$P(C_{i+1}/C_i^c) = 0{,}4$

e queremos obter: $P(C_{i+2}/C_i) = ?$. Agora temos $\left\{\begin{array}{l} C_{i+1} \cup C_{i+1}^c = \Omega \\ \text{e} \left\{\begin{array}{l} P(C_{i+1}/C_i) = 0{,}7 \\ P(C_{i+1}^c/C_i) = 0{,}3 \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$P(C_{i+2}/C_i) = P(C_{i+2}, C_{i+1}/C_i) + P(C_{i+2}, C_{i+1}^c/C_i) =$$

$$= P(C_{i+2}/C_{i+1}) \cdot P\left(\frac{C_{i+1}}{C_i}\right) + P\left(\frac{C_{i+2}}{C_{i+1}^c}\right) \cdot P\left(\frac{C_{i+1}^c}{C_i}\right) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}61$$

18- Certo experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual é a probabilidade condicional de:

a) pelo menos um número ser 6, e.

b) a soma dos números 8?

$P(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \forall (i,j) \in \{1,2,..,6\} \times \{1,2,..\} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

Seja: A = evento dois números diferentes. $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

B = pelo menos 1 número ser 6 $\quad P(B) = \frac{11}{36}$, $P(B \cap A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

C = a soma dos números é 8 $\quad P(C) = \frac{5}{36}$, $P(C \cap A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

então: $P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$, $\quad P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{\cancel{9}3}}{\frac{5}{\cancel{6}2}} = \frac{2}{15}$

19- Em teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p. Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se ele não sabe ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. Qual a probabilidade de ele saiba a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente?

A = evento aluno sabe a resposta correta

B = " " acerta a questão.

$$P(B/A) = 1 \quad P(B/A^c) = \frac{1}{m} \qquad P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B/A)}{P(A)\cdot P(B/A) + P(A^c)\cdot P(B/A^c)} =$$

$$= \frac{p}{p + \frac{(1-p)}{m}} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

Calcule o limite desta probabilidade quando (i) $m \to \infty$ com p fixo e (ii) $p \to 0$ com m fixo.

(i) $\lim_{m\to\infty} P(A/B) = \frac{mp}{1+(m-1)p} = \left(\begin{matrix}\text{Regra de}\\ \text{L'Hopital}\end{matrix}\right) = \frac{p}{p} = 1$

(ii) $\lim_{p\to 0} P(A/B) = \lim_{p\to 0} \frac{mp}{1+(m-1)p} = 0$

20- (De Fernandez [10]) Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é 0,3. O Fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com a probabilidade de 0,4; em um dia sem chuva com a probabilidade de 0,6. Se ganhou um jogo em novembro qual a probabilidade de ter chovido?

C = evento chuva em novembro e $P(C) = 0{,}3$

G = evento Fluminense ganha em novembro

$$P(G/C) = 0{,}4 \quad , \quad P(G^c/C) = 0{,}6 \quad , \quad P(G/C^c) = 0{,}6$$

$$P(C/G) = \frac{P(C\cap G)}{P(G)} = \frac{P(C)\cdot P(G/C)}{P(G/C)\cdot P(C) + P(G/C^c)\cdot P(C^c)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4}{0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}6\cdot 0{,}7}$$

$$= 0{,}222..$$

Scanned with CamScanner

21 (De Fernandez [10]) Pedro quer enviar uma carta a Marina. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é de 0,80. A probabilidade de que o correio não perca é 0,9. A probabilidade que o carteiro entregue é 0,9. Dado que Marina não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

E = evento Pedro escrever a carta $P(E) = 0.80$

C_0 = " Correio não perde a carta $P(C_0/E) = 0,90$

M " Marina recebe a carta $P(M/C_0) = 0,9$

$$P(E^c/M^c) = \frac{P(E^c \cap M^c)}{P(M^c)} = \begin{cases} P(E^c \cap M^c) = P(E^c) = 0,2 \\ P(M^c) = P(M^c/C_0) \cdot P(C_0) + P(M^c/C_0^c) \cdot P(C_0^c) = \\ = 0,1 \cdot P(C_0) + 1 \cdot P(C_0^c) = \\ = 0.1 \cdot P(C_0/E) \cdot P(E) + P(C_0^c/E) \cdot P(E) + P(C_0^c/E^c) P(E^c) \\ = 0.1 \cdot 0,9 \cdot 0,8 + 0.1 \cdot 0,8 + 0,2 = \\ = 0,352 \end{cases}$$

então: $P(E^c/M^c) = \frac{0,2}{0,352} = 0,56818\ldots$

22- Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos aleatórios independentes, com $p_k = P(A_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Obtenha a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos, em termos da probabilidade p_k:

a) A ocorrência de nenhum dos A_k

$$B_a = \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]^c = \left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right] \Rightarrow P(B_a) \overset{indep}{=} \prod_{k=1}^{m} (1 - P(A_k)) = \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k)$$

b) A ocorrência de pelo menos um dos A_k

$$B_b = \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \left[\bigcap_{i=1}^{m} A_i^c\right]^c \Rightarrow P(B_b) \overset{ind}{=} 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k)$$

c) A ocorrência de exatamente um dos A_K

$$B_c = \bigcup_{j=1}^{n} [A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c] \overset{\text{indep}}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (1-p_i)$$

d) A ocorrência de exatamente dois dos A_K

$$B_d = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} [A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \cdots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c] \Rightarrow$$

$$P(B_d) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i \, p_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}} (1-p_k)$$

e) A ocorrência de todos os A_K:

$$B_e = [A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] \implies P(B_e) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} p_i$$

f) A ocorrência de no máximo $(n-1)$ dos A_K

$$B_f = [A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n]^c \Rightarrow P(B_f) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$$

23- Sejam $A_1, \ldots, A_n$ eventos aleatórios independentes com $p_k = P(A_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Faça uma adaptação das desigualdades de Bonferroni (exercício 13 (c)) para este caso expressando-as em termos das p_k.

Desigualdades de Bonferroni:

(i) $$\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i \cdot p_j \leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_i p_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} p_i \cdot p_j \, p_k .$$

(ii) Se k é ímpar, $k \leq n$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} p_{i_1} p_{i_2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$

Se k é par, vale $\geq$ nesta última desigualdade

24- Em uma certa rodovia, a intensidade média do fluxo de tráfego é de 30 carros por minuto. Um medidor é colocado ...

do processo de Poisson, adaptadas para a contagem de carros em vez de telefonemas, e calcule:

(a) A probabilidade de que dois carros ou mais carros sejam registrados durante determinado intervalo de dois segundos

Processo de Poisson: $P(A^{n}_{t,t+s}) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$, $n=0,1,2,\dots$ $\lambda = 30/\text{min}$

Agora $P\left[\left([A^{0}_{t,t+1/30}] \cup [A^{1}_{t,t+1/30}]\right)^c\right] = 1 - \frac{(30\cdot\frac{1}{30})^0}{0!} e^{-30\frac{1}{30}} - \frac{(30\frac{1}{30})^1}{1!} e^{-30\frac{1}{30}} = 1 - 2e^{-1}.$

(b) A probabilidade de passar mais de 1 minuto até registrar o primeiro carro:

$$P(A^{0}_{0,1}) = \frac{(30\cdot 1)^0}{0!} e^{-30\cdot 1} = e^{-30}$$

25- Consideremos um experimento em que será contado o número de estrelas em uma região longínqua do espaço, a região sendo de volume V. Façamos as seguintes três hipóteses, que são análogos espaciais do processo de Poisson:

(H1) A probabilidade de achar k estrelas na região depende somente de V

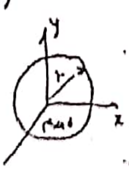
(H2) Os números de estrelas contadas em regiões disjuntas do espaço são independentes.

(H3) Duas estrelas não ocupam o mesmo lugar.

Interpretando estas hipóteses de maneira semelhante à do Processo de Poisson, obtenha o valor de $P_k(V)$ = probabilidade de achar exatamente k estrelas na região de volume V. Aqui, o parâmetro λ é a densidade estelar na vizinhança da região sendo considerada.

Contaremos o número de estrelas em uma determinada região V.

então, arbitraremos um eixo de coordenadas e um ponto de referência.



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e façamos: $\Omega = \{w : [0,\infty) \to \{0,1,\dots\} ;\ \exists\ 0 < v_1 < v_2 < \dots (v_n \uparrow \infty$ t.q. $w(v) = 0$ para $v \in [0, v_1)$, $w(v) = 1$ para

Onde W = volume da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio $r = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Seja o evento $A^k_{w,v}$ = {contar exatamente k estrelas no intervalo de volume (w,v) $(w, v]$}

para $w, v > 0$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$ e

assumiremos que a σ-álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos de Ω contenha todos os eventos do tipo $A^k_{w,v}$.

Os três hipóteses adotadas são:

H1: incrementos estacionários: $P(A^k_{w,v}) = P(A^k_{0,v}) = P_k(v)$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ $v > 0$

H3: "chegadas" não simultâneas: $\dfrac{1 - P_0(v) - P_1(v)}{1 - P_0(v)} \xrightarrow[v \to 0]{} 0$

H2: incrementos independentes $P(A^k_{w,v} \cap A^j_{u,z}) = P(A^k_{w,v}) \cap P(A^j_{u,z})$

se $[w, w+v) \cap [u, u+z) = \emptyset$,

$\forall k, j \geq 0$

As hipóteses adotadas são identicas à adotadas na demonstração do Processo de Poisson para chegadas telefônicas, basta trocar t tempo por V volume, então:

$$P_k(v) = \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-(\lambda v)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ onde}$$

λ = nº médio de estrelas contadas / volume

V = volume de contagem ≥ 0.

26. N pontos são escolhidos independentemente e ao acaso, de uma esfera (bola) de raio R.

(a) Calcule a probabilidade da distância entre o centro da esfera e o ponto mais próximo ser maior que r.

Seja A = evento distância entre o ...

$P(A_r) = P(\text{todos os pontos distam do centro mais que } r) \overset{\text{indep}}{=} [P(\text{ponto distar mais que } r)]^N$

$P(\text{ponto distar mais que } r) = \begin{cases} 1, & r=0 \\ 1 - \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right] & 0<r\leq R \\ 0, & r>R \end{cases}$

Então.

$$P(A_r) = \begin{cases} 1, & r=0 \\ \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N, & 0<r\leq R \\ 0, & r>R \end{cases}$$

(b) Qual o limite da probabilidade obtida no item (a) quando $R\to\infty$ e $\frac{N}{R^3}\to\frac{4}{3}\pi\lambda$? (Observação: este λ é o mesmo do exercício anterior.)

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \frac{N}{R^3}\to\frac{4}{3}\pi\lambda}} P(A_r) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \frac{N}{R^3}\to\frac{4}{3}\pi\lambda}} \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \frac{N}{R^3}\to\frac{4}{3}\pi\lambda}} \left\{\left[1-\frac{r^3}{R^3}\right]^{R^3}\right\}^{\frac{N}{R^3}} = \lim_{\frac{N}{R^3}\to\frac{4}{3}\pi\lambda} \left(e^{-r^3}\right)^{\frac{N}{R^3}} = e^{-\frac{4}{3}\pi r^3\lambda} =$$

$= e^{-\lambda V_r}$, onde V_r = volume da esfera de centro na origem e raio r.

Obs: Isto é o mesmo que $P_0(V_r)$ no exercício anterior

27- Acende-se uma lâmpada no instante $t=0$. Para $t>0$ seja $Q(t+\Delta t/t)$ a probabilidade condicional da lâmpada queimar até o instante $t+\Delta t$, dado que ficou acesa até o instante t. Suponha que $\forall t>0$, $\frac{Q(t+\Delta t/t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \lambda t$ onde λ não depende de t. (Este limite é a chamada taxa de falha da lâmpada. Neste exemplo, a taxa de falha é proporcional à idade).

(a) Ache a equação diferencial satisfeita pela função $P(t)$ = probabilidade da lâmpada ficar acesa até o instante t. Você pode supor que a sejam iguais.

$$Q(t+\Delta t/t) = P(T \leq t+\Delta t / T > t) = \frac{P(T < t+\Delta t, T > t)}{P(T > t)} \qquad \frac{P(t < T \leq t+\Delta t)}{P(T > t)} = 1 - \frac{P(T > t}{P(T > t}$$

Já que as derivadas são iguais a direita e a esquerda e a função é contínua então $P(t)$ é derivável em todo $t > 0$. Assim:

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -P(t) \cdot \left[\frac{1 - \frac{P(t+\Delta t)}{P(t)}}{\Delta t} \right] =$$

$$= -P(t) \cdot Q(t+\Delta t / t) = -\lambda t . P(t)$$

então, a equação diferencial, será:

$$P'(t) + \lambda t P(t) = 0 \quad , \quad P(0) = 1$$

(b) Resolva a equação diferencial do item (a):

$$P'(t) + \lambda t P(t) = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -\lambda t P \Rightarrow$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\lambda t \, dt \Rightarrow \ln p + c = -\frac{\lambda t^2}{2} \Rightarrow$$

$$P(t) = k e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}, \text{ onde } k = e^{-c}. \text{ Agora:}$$

$$P(0) = k \cdot e^{-\frac{\lambda 0^2}{2}} = k = 1 \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda t^2/2}, \ t \geq 0$$

(c) Obtenha e resolva a equação diferencial satisfeita por $P(t)$ quando a taxa de falha é constante $(=\lambda)$.

Temos: $P'(t) = -P(t) \cdot Q(t+\Delta t / t) = -P(t)\lambda \Rightarrow$

$$\int \frac{dp}{p} = \int -\lambda \, dt \Rightarrow \ln p + c = e^{-\lambda t} \Rightarrow P = k e^{-\lambda t}$$

Agora $P(0) = 1 = k e^{-0 \cdot ?} = k \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda t}, \ t \geq 0$

22- Uma lâmpada está acesa no tempo $t=0$. Sempre que a lâmpada queimar, é substituída por uma lâmpada nova, embora isto não seja feito imediatamente. Suponha que para todo $t>0$:

(H1) Dado que a lâmpada esteja acesa no instante t, a probabilidade dela estar queimada no instante $t+\Delta t$, dividida por Δt, converge para λ quando $\Delta t \to 0$; e

(H2) Dado que a lâmpada esteja queimada no instante t, a probabilidade dela estar novamente acesa no instante $t+\Delta t$, dividida por Δt, converge para ξ quando $\Delta t \to 0$. $(\lambda, \xi > 0)$.

(a) Seja $P(t)$ a probabilidade da lâmpada estar acesa no instante t, $t>0$. Ache a equação diferencial satisfeita por $P(t)$

Seja $P_{q/a}(t+\Delta t/t)$ = probab. de estar queimada em $t+\Delta t$ dado que estava acesa em t
$P_{a/q}(t+\Delta t/t)$ = " " " acesa em " " " " queimada " .

(H1): $\dfrac{P_{q/a}(t+\Delta t/t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \lambda$ (H2): $\dfrac{P_{a/q}(t+\Delta t/t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \xi$

e Seja $P_a(t)$ = prob de estar acesa em t. Então:

$$P_a(t+\Delta t) = P(\text{acesa em } t+\Delta t \,; (\text{"acesa em } t\text{"} \cup \text{"queimada em } t\text{"})) =$$
$$= P(\text{acesa em } t+\Delta t, \text{acesa em } t) + P(\text{acesa em } t+\Delta t, \text{queimada em } t) =$$
$$\left[1 - P_{q/a}(t+\Delta t/t)\right] P_a(t) + \left[P_{a/q}(t+\Delta t/t)\right]\cdot\left[1 - P_a(t)\right]$$

então: $P_a(t+\Delta t) - P_a(t) = \left[- P_{q/a}(t+\Delta t/t) - P_{a/q}(t+\Delta t/t)\right] P_a(t) + P_{a/q}(t+\Delta t/t)$

agora sendo P_a contínua e com derivadas iguais à direita e esquerda e portanto derivável

... L) ,

$$P_a'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_a(t+\Delta t) - P_a(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} P_a(t)\left[-\frac{P_{1/a}(t+\Delta t/t)}{\Delta t} - \frac{P_{a/a}(t+\Delta t/t)}{\Delta t}\right] + \frac{P_{a/a}(t+\Delta t/t)}{\Delta t} =$$

$$= -P_a(t)\,[\lambda + \xi] + \xi$$

Então, a equação diferencial será:

$$P_a'(t) + P_a(t)\,[\lambda+\xi] - \xi = 0 \quad , \quad P_a(0) = 1$$

(b) Resolva a equação diferencial do item (a). Determine $\lim_{t\to\infty} P(t)$. Este resultado tem sentido intuitivo?

Temos: solução hom.

$$P_a'(t) + P_a(t)\,[\lambda+\xi] = 0 \Rightarrow P_a^h(t) = K e^{-(\lambda+\xi)t}$$

sol. particular

$$P_a(t) = C \Rightarrow C[\lambda+\xi] = \xi \Rightarrow C = \frac{\xi}{\lambda+\xi} \Rightarrow P_a^p(t) = \frac{\xi}{\lambda+\xi}$$

e então:

$$P_a(t) = P_a^h(t) + P_a^p(t) = K e^{-(\lambda+\xi)t} + \frac{\xi}{\lambda+\xi}.$$

Agora, condição de contorno $P_a(0) = 1$, então,

$$1 = K + \frac{\xi}{\lambda+\xi} \Rightarrow K = \frac{\lambda}{\lambda+\xi}$$

Assim, a solução da eq. diferencial, será: $P_a(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\xi} e^{-(\lambda+\xi)t} + \frac{\xi}{\lambda+\xi}$,

$t \geq 0$

Agora: $\lim_{t\to\infty} P_a(t) = \frac{\xi}{\lambda+\xi}$. Este resultado tem apelo intuitivo, pois

se $\xi >> \lambda$ então $\lim_{t\to\infty} P_a(t) \simeq 1$ (ou seja a lâmpada permanece acesa), e

se $\lambda >> \xi$ então $\lim P_a(t) \simeq 0$ (ou seja " " " queimada). P feito esta relação nos dá uma idéia da proporção do tempo que a linha fica ocupada.

29- Suponhamos que cada elemento de uma certa população ou morre ou se divide. (Exemplo: uma colônia de bactérias). Façamos três hipóteses:

(H1) A probabilidade de que um indivíduo, vivo no instante t, venha a morrer até o instante $t+\Delta t$, é assintoticamente equivalente a $\mu \Delta t$ (i.e., a razão dos dois converge para 1 quando $\Delta t \to 0$).

(H2) Um elemento vivo no instante t se divide até o instante $t+\Delta t$ com probabilidade assintoticamente equivalente a $\lambda \Delta t$ e produz "netos", i.e., se divide ao menos duas vezes, com probabilidade que, dividida por Δt, converge para 0 quando $\Delta t \to 0$.

(H3) Não há interação entre os elementos, i.e. eles morrem ou se dividem independentemente.

(a) Ache as equações diferenciais satisfeitas pela probabilidade $P_n(t)$ = probabilidade da população conter exatamente n elementos no instante t ($n=0,1,2,\dots$; $t\geq 0$)

ref. Feller vol. 1 cap XVII item 5

Hipóteses adotadas: O sistema se move somente de transições de cada estado aos vizinhos mais próximos (de E_n a E_{n+1} ou E_{n-1}, se $n \geq 1$, e de E_0 só passa para E_1). Se em determinada época o sistema está em estado E_n, a probabilidade de que entre t e $t+h$ ocorra a transição $E_n \to E_{n+1}$ é igual a $\lambda_n h + o(h)$ e a probabilidade de que $E_n \to E_{n-1}$ ($n \geq 1$) é igual a $\mu_n h + o(h)$. A probabilidade que durante $(t, t+h)$ ocorra mais de uma mudança é $o(h)$.

Para calcular $P_n(t+h)$ observe que o estado E_n em $t+h$ só é possível se:

1) em t o sistema está em E_n e entre t e $t+h$ não ocorre mudança,

2) em t o sistema está em E_{n-1} e entre t e $t+h$ ocorre transição para E_n,

3) " " " " " E_{n+1} " " " " " " ",

4) entre t e $t+h$ ocorrem mais de uma transição.

então, como as contingências são mutuamente excludentes:

$$P_n(t+h) = P_n(t)\{1-\lambda_n h-\mu_n h\} + \lambda_{n-1} h\, P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} h\, P_{n+1}(t) + o(h)$$

Assim: $$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + o(h)$$

então: $$P_n'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t)$$

Agora, no nosso caso, como não há interação entre os indivíduos teremos $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$ e então as equações diferenciais serão

Sistema de Equações Diferenciais
$$\begin{cases} P_0'(t) = \mu P_1(t) \\ P_n'(t) = -(\lambda+\mu)n\,P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) \qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$

(b) Mostre que $\lambda = \mu = 1$ e $P_1(0) = 1$, uma solução será

$$P_0(t) = \frac{t}{1+t}\ ;\ P_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{n+1}},\ n=1,2,\dots$$

Temos: $P_0'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, $\mu P_1(t) = 1.\frac{1}{(1+t)^2}$ então vale a 1ª equação do sistema

$$-(\lambda+\mu)n\,P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) = \frac{-2nt^{n-1}}{(1+t)^{n+1}} + \frac{(n-1)t^{n-2}}{(1+t)^n} + \frac{(n+1)t^n}{(1+t)^{n+2}} =$$

$$= \frac{(1+t)(-2nt^{n-1}) + (1+t)^2(n-1)t^{n-2} + (n+1)t^n}{(1+t)^{n+2}} =$$

$$= \frac{(n-1)t^{n-2} - (n+1)t^{n-1}}{(1+t)^{n+2}} =$$

Agora: $$P_n'(t) = \frac{(n-1)t^{n-2}(1+t)^{n+1} - (n+1)(1+t)^n t^{n-1}}{(1+t)^{2(n+1)}} = \frac{(n-1)t^{n-2}(1+t) - (n+1)t^{n-1}}{(1+t)^{n+2}}$$

$, n = 1,2,\dots$

então a solução satisfaz o sist. de eq. diferenciais

(c) Suponha que a equação do item (b) seja a única, qual a probabilidade da população mais cedo ou mais tarde ficar extinta?

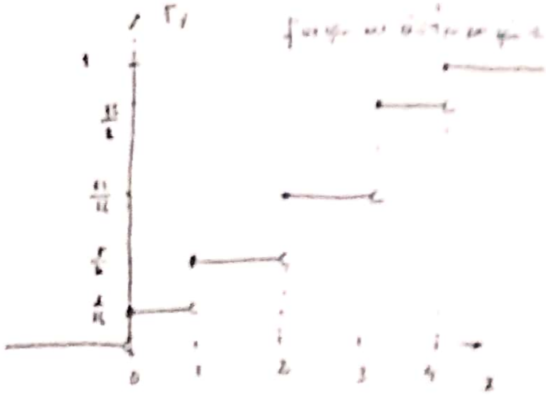
Capítulo 2

Variáveis Aleatórias

1- Seja X o número de caras obtidas em 4 lançamentos de uma moeda honesta. [illegible] o gráfico da função de distribuição de X

$X \sim b(4, \frac{1}{2})$

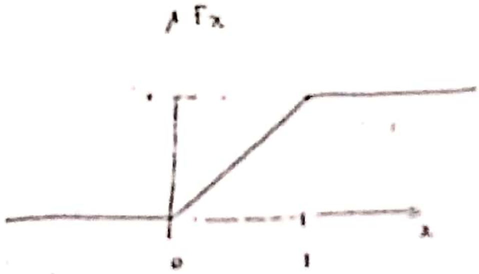
$$P(X=x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \; x = 0,1,2,3,4 \quad \begin{cases} P(X=0) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \\ P(X=1) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \\ P(X=2) = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} \\ P(X=3) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \\ P(X=4) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \end{cases}$$



2- Um ponto é selecionado, ao acaso, do quadrado unitário $[0,1] \times [0,1]$. Seja X a primeira coordenada do ponto selecionado. Faça o gráfico da função de distribuição de X.

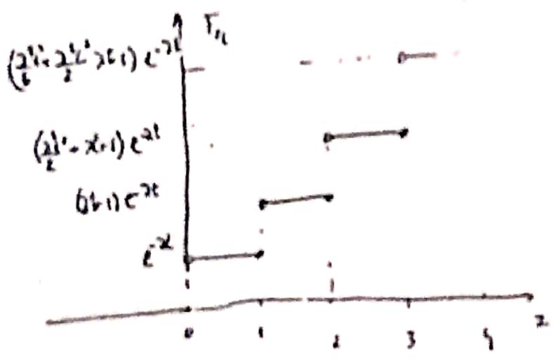
Como o ponto é selecionado ao acaso em $[0,1] \times [0,1]$, então X é uniforme em $[0,1]$, e então:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



3- Se adotássemos $F(x) = P(X < x)$ como definição da função de distribuição de X, qual seria a distinção entre o gráfico de F_{T_2} e o apresentado no §2.1? Haveria alguma mudança na função de distribuição de T_1, no mesmo exemplo?

Se adotássemos $F(x) = P(X < x)$, F_{T_2} seria contínua à esquerda e seu gráfico seria



Não haveria mudança na função distribuição de T_1, pois $P(X<x) = P(X \leq x)$, $\forall x$, porque F_T não tem ponto de descontinuidade e isso implica em $P(X=x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e como $P(X \leq x) = P(X<x) + P(X=x) \Rightarrow P(X \leq x) = P(X<x)$.

4. Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson, parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que a função de distribuição de X é

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t^n \, dt & \text{se } n \leq x < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos: se $n \leq x < n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$F(x) = \frac{1}{n!} \left[\int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t^n \, dt \right] = \begin{pmatrix} \text{integração por partes:} \\ u = t^n \Rightarrow du = n t^{n-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \left\{ \left[-t^n e^{-t} \right]_{\lambda}^{\infty} + n \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} \, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left\{ \lambda^n e^{-\lambda} + n \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} \, dt \right\} = \begin{pmatrix} \text{por} \\ \text{indução} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \left\{ \lambda^n e^{-\lambda} + n \lambda^{n-1} e^{-\lambda} + \right.$$

$u = t$, $du = dt$, $dv = e^{-t}$, $v = -e^{-t}$, $-te^{-t} + \int e^{-t}$

$$\left. + \, n(n-1) \lambda^{n-2} e^{-\lambda} + \cdots + n(n-1)\cdots 2 \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} t \, dt \right\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + e^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = P(X \leq x) \quad \text{onde } X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

5. Suponha que a vida útil de certo tipo de lâmpada tenha distribuição exponencial com parâmetro λ.

(a) (Falta de memória da distribuição exponencial. Compare com o exercício 27(c) do Capítulo 1.) Seja T a vida de uma lâmpada deste tipo. Mostre que:

$$P(T > t+s \mid T > t) = P(T > s) \quad t > 0$$

Temos: $$P(T > t+s / T > t) = \frac{P([T > t+s] \cap [T > t])}{P(T > t)} = \frac{P(T > t+s)}{P(T > t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(T > s), \quad \forall t > 0$$

(b) Suponha que $\lambda = 3$ quando a vida é expressa em dias. Uma lâmpada solitária é ligada em uma sala no instante $t = 0$

... no final do período.

(i) Qual a probabilidade de que você entre na sala quando já escureceu?

$$P(T < 1) = 1 - e^{-3 \cdot 1} = 95{,}02\ \%$$

(ii) Qual a probabilidade de você entrar na sala com a lâmpada ainda acesa e sair depois da lâmpada queimar?

$$1 \text{ hora} = 1/3 \text{ dia}$$

Então $P(1 < T < 4/3) = e^{-3 \cdot 1} - e^{-3 \cdot 4/3} = e^{-3} - e^{-4} = 3{,}15\ \%$

6- Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante c

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} cx^2\,dx = \left[c\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

(b) Ache o valor de α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$. (α é o primeiro quartil da distribuição de f).

$$\frac{1}{4} = F_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} \frac{3}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha^3}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -0{,}7937$$

7- Uma variável aleatória X tem função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Qual a densidade de F(x)?

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \text{ quando F for derivável em } x$$

Então

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ 3x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

e arbitrariamente fazemos $f(0) = f(1) = 0$

.. Verifique que a função de Cantor é distribuição

A função de Cantor é função de distribuição pois:

(i) é não decrescente. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ (construção)

(ii) é contínua à direita: $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \downarrow F(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (construção)

(iii) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ (construção)

e toda função que satisfaz (i), (ii) e (iii) é f. distrib. de alguma v. aleatória

9- Seja X uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Seja $Y = \max(X, c)$ onde c é uma constante > 0.

(a) Ache a função de distribuição de Y.

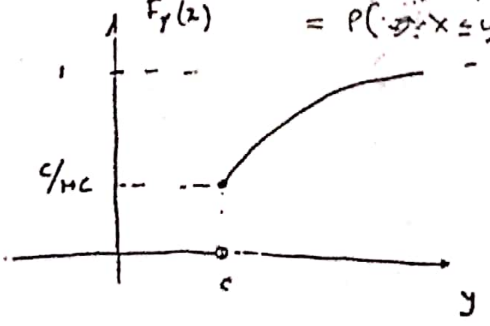
(a1) $y < c$ $\quad P(Y \leq y) = 0$

(a2) $y = c$ $\quad P(Y \leq y) = P(X \leq c) = \int_0^c \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left.\frac{-1}{(1+x)}\right|_0^c = 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{c}{1+c}$

(a3) $y > c$ $\quad P(Y \leq y) = P(X \leq y) = \int_0^y \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left.\frac{-1}{(1+x)}\right|_0^y = \frac{y}{1+y}$

$P(\max(x,c) \leq y) = P(X \leq y, c \leq y)$
$= P(\cancel{c \leq}\, X \leq y) = P(X \leq y)$

Assim:



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < c \\ \frac{y}{1+y}, & y \geq c \end{cases}$$

(b) Decomponha F_Y em suas partes discreta, absolutamente contínua e singular

b1) F_{Y_d} : $\quad P(Y_d = y) = F_Y(y) - F_Y(y^-) = \begin{cases} 0, & y \neq c \\ \frac{c}{1+c}, & y = c \end{cases}$

$F(y) \int^y f\,du \quad f(y) \partial F$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{(1+y)-y}{(1+y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} & , y > c \\ 0 & , y < c \\ 0 & , y = c \text{ (arbitrariamente)} \end{cases}$$

então: $$F_{y_{ab}}(y) = \begin{cases} 0 , & y < c \\ \int_c^y \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{y}{1+y} - \frac{c}{1+c} , & y \geq c \end{cases}$$

b3). Agora como: $F_y(y) = F_{y_d}(y) + F_{y_{ab}}(y) + F_{y_s}(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, temos:

$$F_{y_s}(y) = F_y(y) - F_d(y) - F_{y_{ab}}(y) = \begin{cases} 0 , & y < c \\ \frac{c}{1+c} - \frac{c}{1+c} = 0 , & y = c \\ \frac{y}{1+y} - \frac{c}{1+c} - \left(\frac{y}{1+y} - \frac{c}{1+c}\right) = 0, & y > c \end{cases}$$

então $F_{y_s}(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$

-10- Se X é uma v. aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda >$ qual a distribuição da v.a $Y = \min(\lambda, X)$? Faça a decomposição de F_Y.

$X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ $\qquad Y = \min(\lambda, X)$ $\qquad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

a) Distribuição de Y:

a1) $Y < \lambda$ $\quad P(Y \leq y) = 0$

a2) $Y = \lambda$ $\quad P(Y \leq y) = P(Y = \lambda) = P(X \leq \lambda) = 1 - e^{-\lambda^2}$

a3) $Y > \lambda$ $\quad P(Y \leq y) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$

b) Decomposição de F_y:

b.1) F_{d_y} : $\quad P(Y_{d_y} = y) = F_y(y) - F_y(y^-) = \begin{cases} 0, & x \neq \lambda \\ 1 - e^{-\lambda^2}, & x = \lambda \end{cases}$

b) $F_{a,b,y}(y) = \int_{-\infty}^{y} f(y)\,dy$; Agora $f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \lambda \\ \lambda e^{-\lambda y}, & y > \lambda \end{cases}$

então $F_{a,b,y}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \lambda \\ e^{-\lambda^2} - e^{-\lambda y}, & y > \lambda \end{cases}$

e Então $F_y(y) = F_{d_y}(y) + F_{a,b}(y)$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow F_{s_y}(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

11- Suponha que uma máquina seja colocada para funcionar no instante $t=0$. Para $t>0$, seja $Q(t+\Delta t/t)$ a probabilidade condicional da máquina pifar até o instante $t+\Delta t$, dado que funcionou até o instante t. A taxa de falha da máquina é a função:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t/t)}{\Delta t} \quad \text{se este limite existe.}$$

Suponha que $h(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}$, onde $\lambda > 0$, $\alpha > 0$.

(a) Ache a equação diferencial satisfeita por $P(t) = P(T>t)$, $t \geq 0$, onde T é a vida útil da máquina. (Suponha que $P(t)$ seja contínua com $P(0)=1$, e que as derivadas à direita e à esquerda são iguais.)

Temos que $Q(t+\Delta t/t) = P(t < T \leq t+\Delta t \,/\, T>t) = \dfrac{P(T>t) - P(T>t+\Delta t)}{P(T>t)}$

então: $h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{Q(t+\Delta t/t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{-\left[\dfrac{P(T>t+\Delta t) - P(T>t)}{\Delta t}\right]}{P(T>t)} = \left(\begin{array}{c}\text{fazendo} \\ P(t) = P(T>t)\end{array}\right.$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{-\left[\dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}\right]}{P(t)} = \dfrac{1}{P(t)} \cdot -\lim_{\Delta t \to 0} \left[\dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}\right]$

Então: $h(t) \cdot P(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \left[\dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}\right] = \left(\begin{array}{c}\text{Supondo} \\ \text{que as} \\ \text{derivadas a}\end{array}\right) = -P'(t)$

Assim, a equação diferencial será:

$$P'(t) + h(t)P(t) = 0 \Rightarrow P'(t) + \lambda\alpha t^{\alpha-1}P(t) = 0 \quad , \; P(0) = 1$$

(b) Resolva a equação diferencial do item (a). Qual é a densidade de T? (Obtém a distribuição de Weibull com parâmetros α e λ. Quando $\alpha = 1$, a distribuição é exponencial; quando $\alpha = 2$, é de Rayleigh. Estes dois casos foram considerados no exercício 27 do Capítulo 1)

Temos: $\dfrac{dP}{dt} + \lambda\alpha t^{\alpha-1}P = 0 \Rightarrow \dfrac{dP}{P} = -\lambda\alpha t^{\alpha-1}\,dt \Rightarrow$

$$\int \frac{dP}{P} = \int -\lambda\alpha t^{\alpha-1}\,dt \Rightarrow \ln P = -\lambda t^{\alpha} + c \Rightarrow P = e^{c}\cdot e^{-\lambda t^{\alpha}} = K e^{-\lambda t^{\alpha}},$$

onde $K = e^{c}$. Agora, usando a condição de contorno: $P(0) = 1$, então:

$$1 = K e^{-\lambda (0)^{\alpha}} = K \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}} \quad \text{e portanto:}$$

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t^{\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e assim:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Agora $\alpha = 1 \Rightarrow F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \Rightarrow T \sim exp(\lambda)$

$\alpha = 2 \Rightarrow f(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2},\; t \geq 0$. Agora fazendo $\theta = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$

então $f(t) = \dfrac{t}{\theta^2} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}},\; t \geq 0 \rightarrow T \sim \text{Rayleigh}\left[\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

12. Determine a densidade de $Y=(b-a)X+a$, onde $X \sim U[0,1]$. (É a densidade da distribuição uniforme em $[a,b]$, e escrevemos $Y \sim [a,b]$. Faça o gráfico da distribuição de Y.

$$X \sim U[0,1] \Rightarrow P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

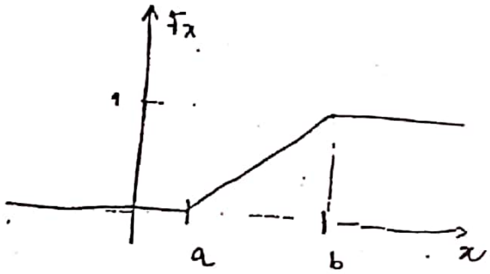
Agora $Y=(b-a)X+a$, então:

$$P(Y \leq y) = P((b-a)X+a \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-a}{(b-a)}\right) = \begin{cases} 0, & y<a \\ \frac{y-a}{(b-a)}, & 0 \leq y < b \\ 1, & y \geq b \end{cases}$$

e então:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq y < b \\ 0, & y \geq b \end{cases}$$

e



13. Se X tem densidade $f(x)=\frac{e^{-|x|}}{2}$, $-\infty<x<\infty$, qual a distribuição de $Y=|X|$?

$$P(Y \leq y) = P(|X|<y) = P(-y \leq X \leq y) \overset{f \text{ é abs. cont.}}{=} \int_{-y}^{y} \frac{e^{-|x|}}{2}\,dx = \int_0^y e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^y = 1-e^{-x}$$

então $Y \sim exp(1)$

14. Cinco pontos são escolhidos independentemente e ao acaso, do intervalo $[0,1]$. Seja X o número de pontos que pertencem ao intervalo $[0,c]$ onde $0<c<1$. Qual a distribuição de X?

É a repetição de ensaios com mesma probabilidade de sucesso p e independentes (ensaios de Bernoulli) onde

$$p = \frac{comp[0,c]}{comp[0,1]} = c. \quad \text{Então } X \sim b(5,c)$$

15. Determine a distribuição do tempo de espera até o segundo sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli com probabilidade p de sucesso.

Seja X a v.a. que designa o tempo de espera até o segundo sucesso.

então $P(X=0)=P(X=1)=0$

Agora, a probabilidade de ocorrer 2 sucessos em $k(k\geq 1)$ ensaios é $p^2(1-p)^{k-2}$, se o último ensaio ocorre na última posição então o primeiro ensaio pode ocorrer em qualquer das posições anteriores, assim:

$$P(X=k)=(k-1)\cdot p^2(1-p)^{k-2}\quad, k=2,3,\dots$$

16 - Uma massa radiativa emite partículas segundo um processo de Poisson de uma taxa média de 10 partículas por segundo. Um contador é colocado ao lado da massa. Suponha que cada partícula emitida atinge o contador com probabilidade 1/10, que o contador registra todas as partículas que o atingem, e que não há interação entre as partículas (elas se movimentam independentemente).

(a) Qual a distribuição de $X_t \stackrel{def}{=}$ nº de partículas emitidas até o tempo t, $t>0$?

Temos $(X_t)_{t\geq 0}$ é proc. de Poisson então $P(X_t=n)=P(A^n_{0,t})=\begin{cases}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, & n=0,1,2,\dots\\ 0, & c.c.\end{cases}$

então $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

(b) Prove que Y_t tem distribuição de Poisson onde Y_t é o número de partículas registradas (contadas) até o temp t, $t>0$. Qual o parâmetro?

$Y_t =$ nº de partículas registradas.

$$[Y_t=n]=\bigcup_{k=n}^{\infty}\left([Y_t=n]\cap[X_t=k]\right)\Rightarrow$$

$$P(Y_t=n)=\sum_{k=n}^{\infty}P(Y_t=n,X_t=k)=\sum_{k=n}^{\infty}P(Y_t=n/X_t=k)\cdot P(X_t=k)\qquad (\mathrm{I})$$

Agora $\begin{cases} Y_t/X_t=k \sim b\left(k,\frac{1}{10}\right) \Rightarrow P(Y_t=n/X_t=k)=\frac{k!}{(n-k)!\,n!}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-n} \\ X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t) \Rightarrow P(X_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{}e^{-\lambda}\end{cases}$

o que substituindo em (1) encontramos:

$$P(Y_1=n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!\,n!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-n}\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}e^{-\lambda t} = \frac{e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}(\lambda t)^{n}}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{9}{10}\lambda t\right)^{k-n}}{(k-n)!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda t}{10}\right)^{n} e^{-\lambda t}}{n!}\cdot\sum_{\substack{j=0 \\ (j=k-n)}}^{\infty}\frac{\left(\frac{9}{10}\lambda t\right)^{j}}{j!} = \frac{\left(\frac{\lambda t}{10}\right)^{n} e^{-\lambda t} e^{\frac{9}{10}\lambda t}}{n!} = \frac{\left(\frac{\lambda}{10}t\right)^{n} e^{-\frac{\lambda t}{10}}}{n!}$$

então $Y_1 \sim \text{poisson}\left(\frac{\lambda t}{10}\right)$

17- (a) Demonstre que a função:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x-y}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

não é função de distribuição de um vetor aleatório.

Seja: $I_x = (0,1]$ e $I_y = (0,1]$

então $\Delta_{I_x}\Delta_{I_y} F(x,y) = F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) =$

$$1-e^{-2} - 1 + e^{-1} - 1 + e^{-1} + 0 = 2e^{-1} - e^{-2} - 1 = -0{,}399$$

Portanto F não é função de distribuição pois não vale.

$\Delta_{I_x}\Delta_{I_y} F(x,y) \geq 0$, todo I_x, I_y intervalos de n° reais.

(b) Mostre que a seguinte função é função de distribuição de algum (X,Y)

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja $\bar{X} \sim \exp(1)$, $\bar{Y} \sim \exp(1)$ e X indep Y então $F_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{x},\bar{y}) = F_{\bar{X}}(\bar{x})\cdot F_{\bar{Y}}(\bar{y}) =$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\bar{x}})(1-e^{-\bar{y}}), & \bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

assim $F_{\bar{X},\bar{Y}}(x,y) = F(x,y)$, $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$

Então (X,Y) é função de algum particular (X,Y), [illegible]

18. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são tiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda.

a) Todos os resultados possíveis do experimento são equiprováveis, então a função de probabilidade:

Y \ X	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

b) Pela tabela acima: $P(X<Y) = P(Y>X) = \frac{1}{2}$

19- Dizemos que a distribuição conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é invariante para permutações se toda permutação das X_i tem a mesma distribuição, i.e., se $(X_{\pi_1}, X_{\pi_2}, \ldots, X_{\pi_n}) \sim (X_1, \ldots, X_n)$ para toda permutação do vetor $(1, 2, \ldots, n)$.

(a) Mostre que se $(X,Y) \sim (Y,X)$ e se X e Y possuem densidade conjunta $f(x,y)$ então $P(X<Y) = P(Y<X) = \frac{1}{2}$.

Temos que
$$P(X<Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix}\text{troca de}\\ \text{variável}\\ x'=y\\ y'=x\end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y'}^{\infty} f_{Y,X}(y',x')\,dx'dy'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y'}^{\infty} f(y',x')\,dx\,dy \overset{\text{invariância}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y'}^{\infty} f(x',y')\,\overset{\cancel{dydx}}{dx\,dy} = P(Y<X)$$

Agora $P(X=Y)=0$ pois F é absolutamente contínua e $\lambda^2(B)=0$, onde $B=\{(x,y): x=y\}$ então $P(\Omega) = P[[X>Y] \cup [Y>X] \cup [X=Y]] \Rightarrow$

$$1 = P(X>Y) + P(Y>X) + P(X=Y) = 2P(X>Y) \Rightarrow P(X>Y) = P(Y>X) =$$

(f) Generalize o item (e), provando que se a distribuição conjunta de $X_1, \dots, X_n$ é invariante para permutações e $X_1, \dots, X_n$ possuem densidade conjunta $f(x_1, \dots, x_n)$, então

$$P(X_1 < X_2 < \dots < X_n) = P(X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \dots < X_{\pi_n}) = \frac{1}{n!} \quad e$$

$$P(X_i = X_j \text{ para algum } (i,j), \text{ tal que } i \neq j) = 0$$

$$P(X_1 < X_2 < \dots < X_{n-1} < X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \left(\begin{array}{c} \text{troca de variáveis} \\ x_1 = x_{\pi_1} \\ x_2 = x_{\pi_2} \\ \vdots \\ x_n = x_{\pi_n} \end{array} \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_{\pi_n}} \int_{-\infty}^{x_{\pi_{n-1}}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{\pi_2}} f(x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, \dots, x_{\pi_n})\, dx_{\pi_1}\, dx_{\pi_2} \dots dx_{\pi_n} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_{\pi_n}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{\pi_2}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n =$$

$$= P(X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \dots < X_{\pi_{n-1}} < X_{\pi_n})$$

Agora, sendo $B = \{ X_i = X_j \text{ para algum } (i,j) \text{ tal que } i \neq j \} \subset \mathbb{R}^n$ e

$\lambda^n(B) = 0$. Assim como $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}$ é abs. contínua $\Rightarrow P(B) = 0$

Assim $\Omega = \left\{ \bigcup_{\substack{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \\ \text{permutação} \\ \text{de } (1,2,3,\dots,n)}} [X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \dots < X_{\pi_n}] \right\} \cup B$

então $1 = n!\, P(X_1 < X_2 < \dots < X_n) \Rightarrow P(X_1 < X_2 < \dots < X_n) = \frac{1}{n!}$

20- Seleciona-se ao acaso um ponto do círculo unitário $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Sejam X e Y as coordenadas do ponto selecionado.

(a) Qual é a densidade conjunta de (X, Y)

(X,Y) é uniforme no círculo unitário então $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ Área $A = \pi = \pi R^2 = \pi(1)$

então: $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x,y \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(b) Determine $P(X<Y)$, $P(Y<X)$, $P(X=Y)$.

Agora pelo item (a) $(X,Y) \sim (Y,X)$ então aplicando o exercício 19(a).

$$P(X<Y) = P(Y<X) = \frac{1}{2}, \quad P(X=Y) = 0$$

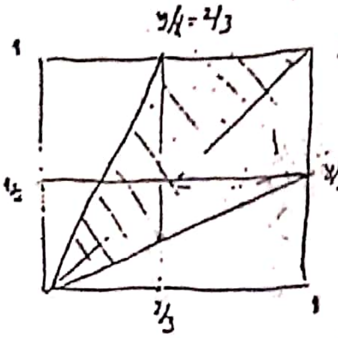
21- Seleciona-se, ao acaso, um ponto do quadrado unitário $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sejam X e Y as coordenadas do ponto selecionado.

(a) Qual a distribuição conjunta de X e Y?

(X,Y) é uniforme em $A = \{(x,y) ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, área $= 1$

então $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

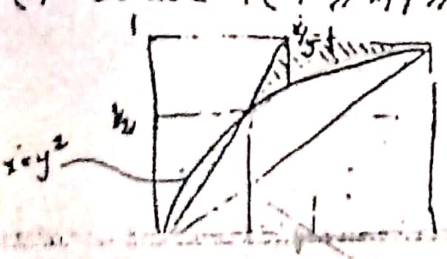
(b) Calcule $P(|Y/X - 1| \leq \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} \leq Y/X - 1 \leq \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2} \leq Y/X \leq \frac{3}{2}) =$



$$= \int_0^{2/3} \int_{x/2}^{3x/2} 1 \, dx\,dy + \int_{2/3}^{1} \int_{x/2}^{1} 1 \, dx\,dy =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2/3} + \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_{2/3}^{1} = \frac{4}{9\cdot 2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{9\cdot 4} = \frac{5}{12}$$

(c) Calcule $P(Y \geq X / Y \geq 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} \int_{\sqrt{x}}^{2x} 1 \, dy\,dx + \int_{1/2}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} 1 \, dy\,dx =$



$\Rightarrow \begin{cases} x/y = 1/2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow x = 1/4$

$$= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{1/4}^{1/2} + \left[x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 10,416\ \% \ldots$$

22- (Critério para independência no caso discreto) (a) Sejam X e Y v.a discretas, tomando respectivamente os valores $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$. Prove que se X e Y são independentes se, e somente se, $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$ $\forall i,j$.

Temos pela definição de independencia que:

X indep $Y \Leftrightarrow$ todo par de borelianos B_1 e B_2: $P(X\in B_1, Y\in B_2) = P(X\in B_1).P(Y\in B_2)$.

Então $(\Rightarrow)$ $\underset{\text{para cada } (i,j)}{\text{Então}}$ tomar $B_1 = \{x_i\}$ e $B_2 = \{y_j\}$ então X indep $Y \Rightarrow P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$(\Leftarrow)$ Sejam B_1 e B_2 borelianos quaisquer $\begin{cases} B_1 \text{ e } A_1 = B_1 \cap \{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots\} \\ B_2 \text{ e } A_2 = B_2 \cap \{y_1, y_2, \ldots\} = \{y_{j_1}, y_{j_2}, y_{j_3}, \ldots\} \end{cases}$

$$P(X\in B_1, Y\in B_2) = P(X\in A_1, Y\in A_2) = \sum_k \sum_m P(X = x_{i_k}, Y = y_{j_m})$$

$$= \sum_k \sum_m P(X = x_{i_k}) \cdot P(Y = y_{j_m}) =$$

$$= \left(\sum_k P(X = x_{i_k})\right) \cdot \left(\sum_m P(Y = y_{j_m})\right) = P(X\in A_1) \cdot P(X\in A_2)$$

$$= P(X\in B_1) \cdot P(Y\in B_2)$$

(b) Mostre que se X e Y tomam somente um numero finito de valores digamos $x_1, \ldots, x_m$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$, então X e Y são independentes se $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$, para $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n-1$. (Em outras palavras, para provar independência basta verificar $(m-1)\times(n-1)$ equações).

Se $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m-1$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$ $\quad$ (I) então: $P(X=x_m, Y=y_j) = P(Y=y_j) - \{P(X=x_1, Y=y_j) + \dots + P(X=x_{m-1}, Y=y_j)\} \overset{(I)}{=}$

$$= P(Y=y_j) - P(Y=y_j)\left(P(X=x_1) + \dots + P(X=x_{m-1})\right) =$$

$$= P(Y=y_j) - P(Y=y_j)\left[1 - P(X=x_m)\right] = P(Y=y_j)\cdot P(X=x_m),$$

$j = 1,2,n$ (II)

Analogamente $P(X=x_i, Y=y_n) \overset{(I)}{=} P(X=x_i)\,P(Y=y_n)$ $\quad i = 1,2,\dots m$ (III)

De (I), (II) e (III) e usando o item (a) $\Rightarrow$ X e Y são independentes

(c) Generalize o item (a) para o caso de n variáveis aleatórias. Compare com a proposição 2.5 e explique porque é suficiente verificar se a função de probabilidade conjunta é igual ao produto de n funções de probabilidade unidimensionais

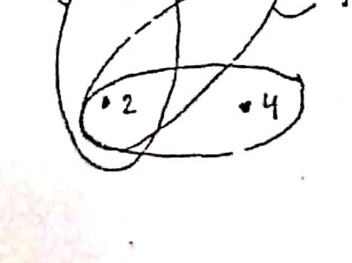
$X_1, X_2, \dots, X_n$ são v.a discretas, onde X_i assume os valores $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$

então $X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes $\Leftrightarrow P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, X_n = x_{i_n}^{(n)}) = P(X_1 = x_{i_1}^{(1)}) \dots P(X_n = x_{i_n}^{(n)})$

Agora, isto é suficiente pois para todo boreliano B, temos $\forall i_1, i_2, \dots, i_n$. que $P(X_i \in B) = P(A)$, onde $A \subset \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots\}$, e generalizando o raciocínio do item (a) $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$.

23- Demonstre ou exiba um contra-exemplo: Se X, Y e Z são independentes 2 a 2 então eles são independentes:

Contra Exemplo



W v.a discreta onde $P(W=1) = P(W=2) = P(W=3) = P(W=4)$;

X v.a discreta $W \cdot I_{\{1,2\}}$ $\begin{cases} P(X=1) = \frac{1}{2} \\ P(X=0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Y v.a discreta $W \cdot I_{\{2,3\}}$ $\begin{cases} P(Y=1) = \frac{1}{2} \\ P(Y=0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Z v.a discreta $W \cdot I_{\{2,4\}}$ $\{ P(Z=0) = 1/2$

então $\begin{cases} P(X=1, Y=1) = P(W=2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X=1) \cdot P(Y=1) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ são ind.} \\ P(X=1, Z=1) = P(W=2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X=1)\, P(Z=1) \Rightarrow X \text{ e } Z \text{ " "} \\ P(Y=1, Z=1) = P(W=2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(Y=1) \cdot P(W=1) \Rightarrow Y \text{ e } Z \text{ " "} \end{cases}$

Agora X, Y, Z não são independentes pois:

$$P(X=1, Y=1, Z=1) = P(W=2) = \frac{1}{4} \neq P(X=1) \cdot P(Y=1)\, P(Z=1)$$

pois $P(X=1) \cdot P(Y=1) \cdot P(Z=1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

24 - Ache a densidade conjunta e as distribuições marginais das variáveis aleatórias X e Y cuja função de distribuição conjunta está no exercício 17(b). X e Y são independentes

Temos $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

então $f(x,y) = f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial (1-e^{-x})(1-e^{-y})}{\partial x \partial y} = e^{-x} e^{-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$

Portanto $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = e^{-x}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-y}$

então $X \sim exp(1)$ e $Y \sim exp(1)$.

Agora, como $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $\int_{-\infty} f_X(x)\,dx = 1$ e $\int_{-\infty} f_Y(y)\,dy = 1$ então

X, Y são independentes.

25- Determine as distribuições marginais das variáveis aleatórias discretas X Y definidas no exercício 18. X e Y são independentes?

Temos da resolução do exercício 18: $\begin{cases} P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3} \\ P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3} \end{cases}$

Agora, então $P(X=1, Y=1) = 0 \neq P(Y=1) \cdot P(Y=1)$ pois:

$P(X=1)\ P(Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \overset{\text{exerc } 22}{\Longrightarrow}$ X e Y não são indep.

26- Demonstre a proposição 2.6 (b)

Se $f(x,y)$ é densidade conjunta de X e Y então X tem densidade dada por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

Vejamos se f_X assim obtida verifica a definição de densidade de X

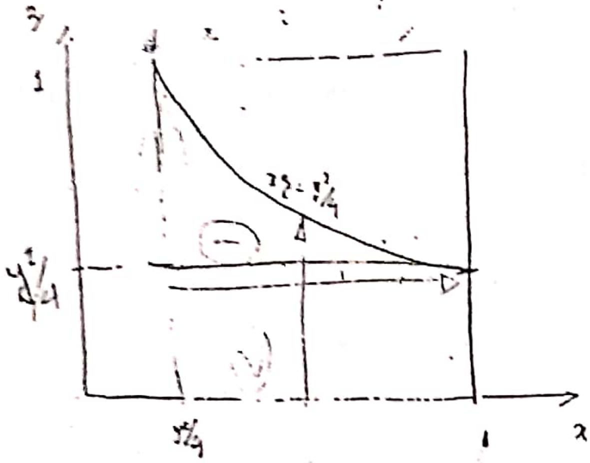
$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx \overset{f(x,y)\geq 0,\ \forall x,y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy = P(X \leq x, -\infty < Y < +\infty)$$

$$= P(X \leq x) = F_X(x)$$, então vale a proposição

27- Sejam X, Y, Z variáveis aleatórias independentes, cada uma tendo distribuição uniforme em $[0,1]$. Qual a probabilidade da equação quadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ ter raízes reais?

temos $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f(x,y,z) = \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in [0,1]^3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$A = [Xt^2 + Yt + Z = 0$ tem raízes reais$] = [Y^2 - 4XZ \geq 0]$



$z = \frac{y}{4x}$

$z \le \frac{y^2}{4x}$

$xz \le \frac{y^2}{4}$

$\frac{y^2}{4} < x < 1$

$0 < z < \frac{y^2}{4x}$

$0 < y < 1$

então $P(A) = P([Y^2 - 4XZ \geq 0]) = \iiint_{y^2-4xz\geq 0} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$xz \le \frac{y^2}{4}$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{4} + \int_{y^2/4}^1 \int_0^{y^2/4x} 1\,dz\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{4}\int_{y^2/4}^1 \frac{1}{x}\,dx\right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4}\ln\left(\frac{y^2}{4}\right)\right) dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4}(1+\ln 4)\,dy - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \ln y\,dy}_{I}$$

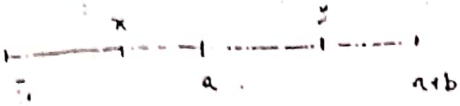
$$= \left[\frac{y^3}{12}(1+\ln 4)\right]_0^1 + I = \frac{1}{12}(1+\ln 4) + I =$$

Agora $I = -\frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \ln y\,dy = \begin{pmatrix} y = e^{-v} \\ dy = -e^{-v}dv \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int_\infty^0 e^{-2v}\, v\, e^{-v}\,dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty v\, e^{-3v}\,dv = \begin{pmatrix} u = v \\ e^{-3v}dv = dw \\ w = -\frac{e^{-3v}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[-\frac{v e^{-3v}}{3}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-3v}}{3}\,dv\right] = \frac{1}{18}$$

Assim: $P(A) = \frac{\ln 4}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = 0{,}2544$

27- Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com $X \sim U[0,a]$ e $Y \sim U[a, a+b]$, onde $a > 0$, $b > 0$. Qual a probabilidade de que os três segmentos $[0,X]$, $[X,Y]$, $[Y,a+b]$ possam formar um triângulo?



Sejam as seguintes v.a.s:

$S_1 = X$ → comprimento do segmento $[0,X]$

$S_2 = Y-X$ → " " " $[X,Y]$

$S_3 = (a+b)-Y$ → " " " $[Y,a+b]$

As condições geométricas para que S_1, S_2 e S_3 possam formar um triângulo são:

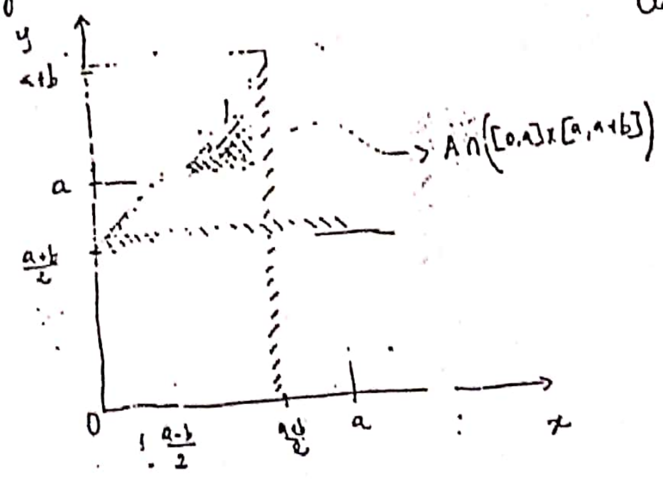
$$\begin{cases} (I) & S_1 \leq S_2+S_3 \Rightarrow X \leq Y-X+(a+b)-Y \Rightarrow X \leq \frac{(a+b)}{2} \\ (II) & S_2 \leq S_1+S_3 \Rightarrow Y-X \leq X+(a+b)-Y \Rightarrow X \geq Y-\frac{(a+b)}{2} \\ (III) & S_3 \leq S_1+S_2 \Rightarrow (a+b)-Y \leq X+Y-X \Rightarrow Y \geq \frac{(a+b)}{2} \end{cases}$$

Seja E = evento é possível formar um triângulo com $[0,X]$, $[X,Y]$ e $[Y,a+b]$

Então ∴ $E = [X \leq \frac{a+b}{2}] \cap [X \geq Y - \frac{(a+b)}{2}] \cap [Y \geq \frac{(a+b)}{2}]$, $A = \{(x,y)$, valem (I), (II) e (III

e assim $P(E) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \overset{indep}{=} \iint_{A\cap([0,a]\times[a,a+b])} \frac{1}{ba}\,dx\,dy = \frac{1}{ba}\cdot \text{Área}(A\cap([0,a]\times[a$ (I)

Agora, façamos $a \geq b$, então.



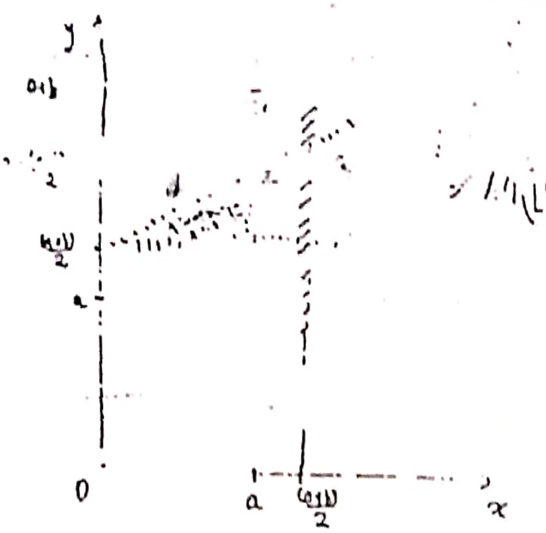
Agora: $\text{Área}[A\cap([0,a]\times[a,a+b])] = \frac{b}{2}\cdot\left(\frac{(a+b)}{2}-(a\right.$

$= \frac{b^2}{2}$

Assim: $P(E) = \frac{b^2}{2ba} = \frac{b}{2a}$ (II)

de (I)

Agora, supomos $a < b$, então



Então $P(A \cap [[0,a] \times [a, a+b]]) = \frac{a}{2} \times \left(\frac{(a+b)}{2} + a - \frac{(a+b)}{2}\right)$

$= \frac{a^2}{2}$

Assim de (I) : $P(E) \cdot \frac{a^2}{2ba} \Rightarrow P(E) = \frac{a}{2b}$ (II)

Resumindo (II) e (III) : $P(E) = \frac{1}{2} \frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$

23 – Demonstre: se a variável aleatória X é independente de si mesma, então X é constante com probabilidade 1 (i.e., existe uma constante c tal que $P(X=c) = 1$).

Se X é independente de X então pela definição de independência para todo par de Borelianos B_1 e B_2:

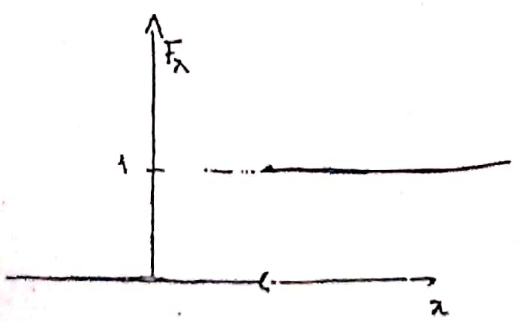
$$P(X \in B_1, X \in B_2) \cdot P(X \in B_1) \cdot P(X \in B_2).$$

Agora, vamos escolher uma classe de Borelianos que caracteriza a distribuição de X: $B_1 = B_2 = [X \leq x]$; então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = P([X \leq x]) = P([X \leq x] \cap [X \leq x]) \overset{\text{indep}}{=} P([X \leq x])^2 \cdot (F_X(x))^2 \Rightarrow$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Então como F é não decrescente: $\exists c$ tal que $P(X = c) = 1$



3. Suponha que as vidas úteis T_1 e T_2 de máquinas I e II sejam variáveis aleatórias independentes, tendo distribuições exponenciais com, respectivamente, parâmetros λ_1 e λ_2. Um inspetor escolhe uma das máquinas [illegible] cada uma tendo a mesma probabilidade de ser escolhida, e depois observa a máquina escolhida durante a vida útil dela. (Suponha que a escolha seja independente das vidas.)

(a) Determine a densidade de T, onde T é a vida observada.

Temos E = v.a. que designa a máquina escolhida $\begin{array}{l} E=0 \text{ máquina I} \\ E=1 \quad " \quad \text{II} \end{array}$

então $P(E=0)=P(E=1)=\frac{1}{2} \Rightarrow P([E=0]\cup[E=1])=1$

Agora $P(T\leq t) = P([T\leq t]\cap([E=1]\cup[E=0])) =$

$= P(([T\leq t]\cap[E=1])\cup([T\leq t]\cap[E=0])) \overset{\sigma\text{-adit}}{=}$

$= P([T\leq t]\cap[E=1]) + P([T\leq t]\cap[E=0]) =$

$= P(T\leq t/_{E=1})\cdot P(E=1) + P(T\leq t/_{E=0})\cdot P(E=0)$

Agora: $P(T\leq t/_{E=1}) = P(T_2\leq t) = 1-e^{-\lambda_2 t}$

$P(T\leq t/E=0) = P(T_1\leq t) = 1-e^{-\lambda_1 t}$

E portanto: $P(T\leq t) = \frac{1}{2}(1-e^{-\lambda_2 t}) + \frac{1}{2}(1-e^{-\lambda_1 t}) = 1-\frac{1}{2}(e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t})$, $t>0$

e então
$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) & , t>0 \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) Suponha que o inspetor parou de observar a máquina escolhida depois de 100 horas, com a máquina funcionando. Qual a probabilidade da máquina escolhida ter sido a máquina I?

$$P(E=0/_{T>100}) = \frac{P(E=0\cap[T>100])}{P(T>100)} = \frac{P(T>100/_{E=0})\cdot P(E=0)}{P(T>100)} =$$

$$= \frac{P(T_1 > 100)}{P(T > 100)} \cdot P(E=0) = \frac{e^{-\lambda_1 100} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(e^{-\lambda_1 100} + e^{-\lambda_2 100})} = \frac{e^{-\lambda_1 100}}{e^{-\lambda_1 100} + e^{-\lambda_2 100}}$$

(c) Qual a distribuição de T se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$?

de (a), temos que $f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$

então $T \sim exp(\lambda)$

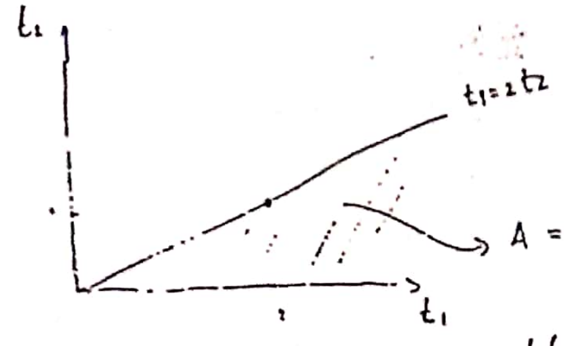
31- Suponhamos que o tempo que dois estudantes demoram para resolverem um problema seja independentes e exponenciais com parametro $\lambda > 0$. Calcule a probabilidade do primeiro estudante demorar pelo menos duas vezes o tempo do segundo?

T_1 = tempo que o primeiro estudante demora $\quad T_1 \sim exp(\lambda)$ e T_1 indep T_2

T_2 = " " segundo " " $\quad T_2 \sim exp(\lambda)$

então: $f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(t_1+t_2)}, & t_1 > 0, t_2 > 0 \\ 0, & c.c \end{cases}$

$P(T_1 \geq 2T_2) = ?$



$A = \{(t_1, t_2) : 0 < t_1 \text{ e } t_2 \leq 2t_1\}$

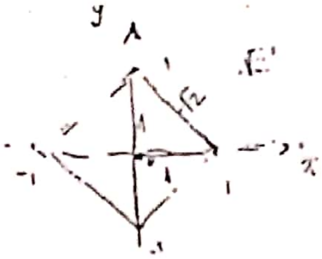
Assim: $P(T_1 \geq 2T_2) = \iint_A f_{T_1,T_2}(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2$

então $P(T_1 \geq 2T_2) = \int_0^\infty \int_0^{t_1/2} \lambda^2 e^{-\lambda t_1} \cdot e^{-\lambda t_2} dt_2 dt_1 = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} \left[-e^{-\lambda t_2} \right]_0^{t_1/2} dt_1 =$

$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} (1 - e^{-\lambda t_1/2}) dt_1 = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t_1} dt - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{3t_1}{2}} dt$

$$= 1 + \left[\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}t_1}\right]_0^{\infty} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

32. Um ponto é selecionado ao acaso (i.e., conforme a distribuição uniforme) do seguinte quadrado



Sejam X e Y as coordenadas do ponto selecionado.

(a) Qual a densidade conjunta de X e Y?

Sol.: $A = \{(x,y): |x| + |y| \leq 1\}$, $(X,Y) \sim U(A)$, ou seja:

$$f_{X,Y}(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{area } A} = \dfrac{1}{2}, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(b) Obtenha a densidade marginal de X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} \frac{1}{2}\,dy = 1-|x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(c) X e Y são independentes?

Não, pois $\exists\, B \subset A$ tq $(x,y) \in B \Rightarrow f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $\lambda^2(B) > 0$.

Pois analogamente. $f_Y(y) = \begin{cases} 1-|y|, & |y| \leq 1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

Então seja $B \subset A$ tq: $(x,y) \in B \Rightarrow (1-|x|)(1-|y|) \neq \frac{1}{2}$ então a medida de Lebesgue de B é maior que zero $\Rightarrow$ X e Y não são independentes.

33. Suponhamos que X e Y tenham distribuição conjunta dada pela seguinte tabela

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	1/5	0
2	1/5	1/5	1/5
3	0	1/5	0

(Por exemplo, $P(X=1, Y=1) = 0$ e $P(X=2, Y=1) = 1/5$)

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

$$P(X=1) = P(X=3) = \frac{1}{5}, \quad P(X=2) = \frac{3}{5}$$

$$P(Y=1) = P(Y=3) = \frac{1}{5}, \quad P(Y=2) = \frac{3}{5}$$

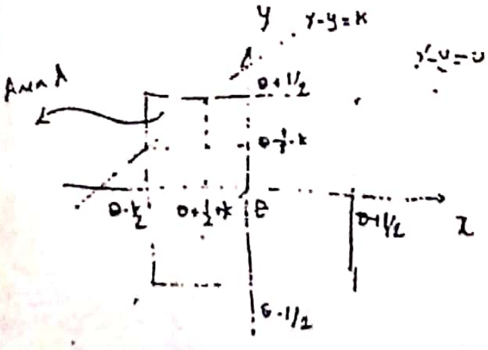
(b) X e Y são independentes? Porque?

Não pois; $P(X=1, Y=1) = 0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = P(X=1) \cdot P(Y=1)$

E pelo exercício 22 $\Rightarrow$ X e Y não são indep.

34- Sejam X e Y v. aleatórias independentes com distribuição uniforme em $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ onde $\theta \in \mathbb{R}$. Prove que a distribuição de $(X-Y)$ não depende de θ, achando sua densidade.

X e Y indep $\Longrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]^2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$



Assim $k \leq 0$:

$$P(X-Y \leq k) = \begin{cases} \iint_A 1 \, dx\,dy = \text{area } A = \frac{1}{2}(1+k)^2, & -1 \leq k \\ 0, & k < -1 \end{cases}$$

Analogamente, por simetria, para $k > 0$

$$P(X-Y \leq k) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(1-k)^2, & 0 < k \leq 1 \end{cases}$$

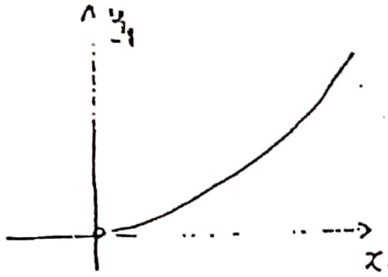
$$f_{T}(t) = \begin{cases} (1+t), & -1 \leq t \leq 0 \\ (1-t) & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \text{ ou } t < -1 \end{cases}$$

15- Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição comum de Rayleigh com parâmetro θ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Determine a distribuição conjunta de $Y_1, \dots, Y_n$ onde $Y_i = X_i^2$

Obtemos primeiro a distribuição de Y_i



$G = [0, \infty]$, $G_0 = [0, \infty]$

$$Y_1 = g(X_1) = X_1^2 \Rightarrow X_1 = h^{-1}(Y_1) = \sqrt{Y_1} \Rightarrow \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Então

$$f_{Y_1}(y) = \begin{cases} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \dfrac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} \dfrac{\cancel{\sqrt{y}}}{\theta^2} \exp\left(-\dfrac{y}{2\theta^2}\right), & y > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Agora $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ são v.a i.i.d., então:

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n y_1 y_2 \dots y_n} \exp\left(-\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{2\theta^2}\right), & y_i > 0, \ i = 1, 2, \dots n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) Qual a distribuição de $U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ (Como se chama esta distribuição)

$$P(U > u) = P(X_1 > u, X_2 > u, \ldots, X_n > u) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i > u) \overset{\text{id. dist.}}{=} [P(X_1 > u)]^n$$

Agora
$$P(X_1 > u) = \begin{cases} \displaystyle\int_u^\infty \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) dx = \begin{pmatrix} y = x^2/2\theta^2 \\ dy = \frac{x}{\theta^2}\, dx \end{pmatrix} = \int_{u^2/2\theta^2}^\infty \exp(-y)\, dy = \left[-e^{-y}\right]_{u^2/2\theta^2}^{\infty} \\ = e^{(u^2/2\theta^2)}, \quad u > 0 \\ = 1, \quad u \leq 0 \end{cases}$$

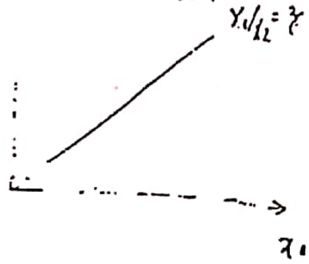
então $P(U > u) = \left(e^{u^2/2\theta^2}\right)^n = e^{n u^2/2\theta^2}$, $u > 0$ e então

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{n u}{2\theta^2} e^{n u^2/2\theta^2} = \dfrac{u}{(\theta/\sqrt{n})^2} e^{u^2/2(\theta/\sqrt{n})^2}, & u > 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Assim $U \sim \text{Rayleigh}(\theta/\sqrt{n})$

(c) Qual a distribuição de $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$

$$P(Z \leq z) = P\left(\frac{X_1}{X_2} \leq z\right) = P(X_1 \leq X_2 \cdot z) = \int_0^\infty \int_{x_1/z}^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2\, dx_1 =$$



$$= \int_0^\infty \int_{x_1/z}^\infty \frac{x_1 \cdot x_2}{\theta^4} \exp\left(-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2\theta^2}\right) dx_2\, dx_1 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x_1}{\theta^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\theta^2}\right) \cdot \left[\int_{x_1/z}^\infty \frac{x_2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\theta^2}\right) dx_2\right] dx_1 = \begin{pmatrix} y_2 = \dfrac{x_2^2}{2\theta^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x_1}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\theta^2}\right) \cdot \left[-e^{-y_2}\right]_{x_1^2}^{\infty} dx_1 = \int^\infty \frac{x_1}{\theta^2} \exp\left[\frac{-1}{2\theta^2} x_1^2 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\right] dx_1 =$$

$$= \left(\cdot y_1 = \frac{x_1}{2\theta^2} \right) = \int_0^{\infty} \exp\left(-y_1\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\right) dy = \left[\frac{e^{-y_1\left[1+\frac{1}{z^2}\right]}}{\left[1+\frac{1}{z^2}\right]} \right]_0 = \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2+1}, \; z > 0$$

e para $z \leq 0$. $P\left(X_1/X_2 \leq z\right) = 0$.

36- Sejam as v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independentes e exponenciais com respectivamente, parâmetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

(a) Mostre que a distribuição de $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ é exponencial. Qual o parâmetro?

a1) $y > 0$

$$P(Y > y) = P(X_1 > y, \ldots, X_n > y) \overset{indep}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = e^{-\left(\sum \alpha_i\right) y} \Rightarrow P(Y \leq y) = 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) y}$$

a2) $y < 0$

$$P(Y > y) = 1 \Rightarrow P(Y \leq y) = 0.$$

Então $Y \sim \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$

(b) Prove que para $K = 1, \ldots, n$.

$$P\left(X_K = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_K}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

(Sugestão. X_K e $\min_{i \neq K} X_i$ são independentes e pelo item a exponenciais. Considere o evento $\left[X_K \leq \min_{i \neq K} X_i\right]$.)

temos: $\left[X_K = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right] = \left[X_K \leq \min_{i \neq K} X_i\right]$. Agora fazendo $U_K = \min_{i \neq K} X_i$, temos:

X_K e U_K são independentes então

$$f_{X_K U_K}(x,u) = f_{X_K}(x) \cdot f_{U_K}(u) = \begin{cases} \alpha_K \cdot \sum_{i \neq K} \alpha_i \, e^{-\left[\left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) u + \alpha_K x\right]}, & x, u \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

então: $$P\left(X_K = \min_{1 \leq i \leq n} X_i\right) = P\left([X_K \leq U_K]\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{u} \alpha_K \left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) e^{-\left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) u} \cdot e^{-\alpha_K x} \, dx \, du =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) \cdot e^{-\left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) u} \left[-e^{-\alpha_K x}\right]_0^{u} du = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) e^{-\left(\sum_{i \neq K} \alpha_i\right) u} \left(1 - \ldots\right.$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum \alpha_i\right) e^{-\sum \alpha_i} du - \left(\frac{\sum \alpha_i}{\sum \alpha_i}\right) \int \left(\sum \alpha_i\right) e^{-\left(\sum \alpha_i\right) u} du = 1 - \frac{\sum \alpha_i}{\ldots} = \frac{\alpha_K}{\ldots}$$

37. Seja X uma variável aleatória cuja função de distribuição F é uma função contínua na reta. Prove que a distribuição de $Y = F(X)$ é $U[0,1]$ (Sugestão: Prove primeiro no caso de F estritamente crescente. Observe que não é suficiente provar no caso absolutamente contínua, vale também quando F é a função de Cantor

i) Se F estritamente crescente e contínua $\Big\}$ então $\exists\, F^{-1}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e portanto

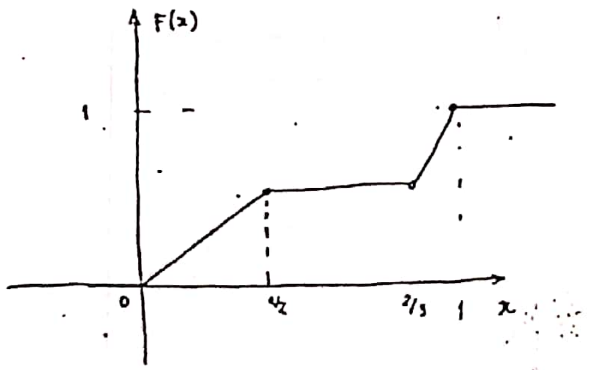
Sejam $a,b \in [0,1]$, $a<b$:

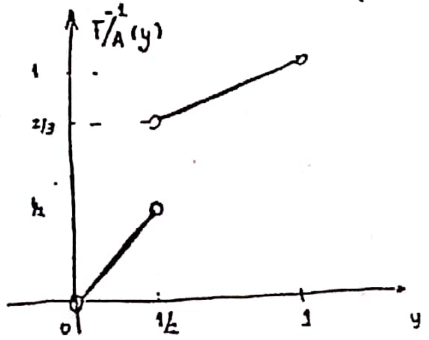
$$P(a<Y\leq b) = P(a<F(X)\leq b) = P(F^{-1}(a) < X \leq F^{-1}(b)) = F(F^{-1}(b)) - F(F^{-1}(a)) =$$

$$= b - a$$ então como $P(0\leq Y\leq 1) = 1$, temos:

$$Y \sim U[0,1]$$

ii) Caso geral. Se F é contínua, não-decrescente em $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ E F será constante em uma união disjunta e enumerável de intervalos fechados, ou seja no conjunto $A = \bigcup_i I_i$, onde $I_i = [a_i, b_i]$ e $\cdots < a_i < b_i < a_{i+1} < b_{i+1} < \cdots$. E também F será estritamente em $B = \mathbb{R} - A = \bigcup_j J_j$, onde $J_j = (b_j, a_{j+1})$. Por exemplo, seja a f.d. F do gráfico abaixo





então: $B = (0, \frac{1}{2}) \cup (2/3, 1)$

$A = (-\infty, 0] \cup [1/2, 2/3] \cup [1, \infty)$

Então F é estritamente crescente quando restrita a B. Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin B \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \Rightarrow \exists\, i_x \in \mathbb{N}$, tal que $a_{i_x} \leq x \leq b_{i_x} \Rightarrow F(x) = F(a_{i_x}) = F(b_{i_x})$. Assim $\begin{cases} x\in A \Rightarrow F(x) \in \overbrace{\{F(a_i), F(a_{i+1}) \ldots\}} \\ x \in B \Rightarrow F(x) \in \underbrace{[0,1] - \{F \ldots\}}_{F(B)} \end{cases}$

Assim se $F/_B : B \rightarrow F(B)$ ... ; $F/_B$ é contínua e estritamente crescente $\Big\} \Rightarrow \exists\, (F/_B)^{-1} : [0,1] \longrightarrow I$

Agora, sejam $w, z \in [0,1]$ e $w<z$. Então:

$P(w<Y\leq z) = P(w < F(X) \leq z)$ temos 4 casos possíveis $\begin{cases} \text{I)}\ w, z \in F(B) \\ \text{II)}\ w \in F(B),\ z \notin F(B) \\ \text{III)}\ w \notin F(B),\ z \in F(B) \end{cases}$

I) $P(w < F(X) \leq z) = P(F_B^{-1}(w) < X \leq F_B^{-1}(z)) = F(F_B^{-1}(z)) - F(F_B^{-1}(w)) = z - w$ (V)

II) $P(w < F(X) \leq z) = P(w < F(X) < z) + P(F(X) = z) = \begin{pmatrix} P(F(X) = z) = \\ = P(a_z \leq X \leq b_z) = \\ = F(a_z) + F(b_z) = 0 \end{pmatrix} =$

$= P(w < F(X) < z) = P(F_B^{-1}(w) < X < F_B^{-1}(z^-)) = F(F_B^{-1}(z^-)) - F(F_B^{-1}(w))$

$= z - w$ (VI)

III) Analogamente: $P(w < F(X) \leq z) = F(F_B^{-1}(z)) - F(F_B^{-1}(w^-)) = z - w$ (VII)

IV) " $P(w < F(X) \leq z) = P(w < F(X) < z) = F(F_B^{-1}(z^-)) - F(F_B^{-1}(w^-)) = z - w$

Agora, com $P(0 \leq Y \leq 1) = 1$, de (V), (VI), (VII) e (VIII): $Y \sim U[0,1]$

38- (a) As variáveis X, Y e Z são independentes, cada uma uniformemente distribuída no intervalo $[0,1]$. Determine $P(X < Y < Z)$ e $P(X \leq Y \leq Z)$

X, Y e Z são independentes então $f(x,y,z) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \ldots \\ 0, & c.c. \end{cases}$

e (X,Y,Z) é absolutamente contínua

então: $P(X \leq Y \leq Z) = P(X < Y < Z) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^y 1 \, dx \, dy \, dz = \int \int_0 y \, dy \, dz =$

$= \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{6}$ (Poderíamos utilizar o exercício 19 e obter o resultado diretamente)

(b) Se X, Y e Z são independentes e identicamente distribuídas, e a função de distribuição comum F é contínua, qual é $P(X < Y < Z)$?

Temos: $P(X < Y < Z) = \begin{pmatrix} (X,Y,Z) \text{ é} \\ \text{absolut.} \\ \text{contínua} \end{pmatrix} = P(X \leq Y \leq Z) = \begin{pmatrix} F \text{ é contínua} \\ \text{não-decrescente} \\ \text{e } F(x) \geq 0, \forall x \end{pmatrix} =$

$= P(F(X) \leq F(Y) \leq F(Z)) = \begin{pmatrix} \text{Agora, } F(X), F(Y), F(Z) \\ \text{são independentes cada} \\ \text{um tem dist uniforme} \\ \text{em } [0,1] \text{ pelo exercício 37} \\ \text{então pelo item (a)} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}$.

39. (a) Sejam X e Y independentes com distribuição de Poisson tendo, respectivamente, parâmetros λ_1 e λ_2. Mostre que $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

$$[X+Y=k] = \bigcup_{n=0}^{k} \left([X=n] \cap [Y=k-n]\right) \quad , \; k=0,1,2,\dots$$

então $$P(X+Y=k) \overset{\text{disj}}{=} \sum_{n=0}^{k} P(X=n, Y=k-n) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{n=0}^{k} P(X=n)\cdot P(Y=k-n) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(k-n)}}{(k-n)!} e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{k!}{n!\,(k-n)!} \lambda_1^n \lambda_2^{k-n} \right) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \lambda_1^n \lambda_2^{k-n} =$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad , \; k=0,1,2,\dots$$

Assim $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

(b) Mostre que se $X_1,\dots,X_n$ são independentes tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $i=1,\dots,n$, então $X_1+\dots+X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$.

Temos pelo item (a) que $X_1+X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$. Agora suponhamos que temos $X_1+X_2+\dots+X_m \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\dots+\lambda_m)$ então: Como $(X_1+\dots+X_m)$ e X_{m+1} são indep (pela propried. hereditária) então pelo item (a): $X_1+\dots+X_{m+1} \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\dots+\lambda_{m+1})$.

Então por indução: $X_1+\dots+X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

40. Certo supermercado tem duas entradas, A e B. Fregueses entram pela entrada A conforme um processo de Poisson com taxa média de 15 fregueses por minuto. Pela entrada B, entram fregueses conforme outro processo de Poisson, independente do primeiro a uma taxa média de 10 por minuto.

(a) Seja X_t o número total de fregueses que entram no supermercado até o instante t (inclusive), para $t \geq 0$. Então $\{X_t : t \geq 0\}$ é também processo de Poisson (não é preciso provar). Qual o parâmetro deste processo? Justifique sua resposta.

Sim, $\{X_t ; t \geq 0\}$ é processo de Poisson com parametro $(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 10+15 = $

O parâmetro de $\{X_t : t \geq 0\}$ é $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, pois fixando um determinado t, temos

$X_t = A_t + B_t$; onde $\begin{cases} A_t : \text{v.a. do nº de fregueses que entram até } t \text{ pela A} \\ B_t : \text{" " " " " " " B} \\ A_t \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t) \\ B_t \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t) \end{cases}$ e A_t indep B_t

pelo item (a)

$\Rightarrow \quad X_t \sim \text{Poisson}\left[(\lambda_1+\lambda_2)t\right] = 25t$

(b) Seja T_1 o tempo que o primeiro freguês entra pela entrada A e V_1 o tempo em que o primeiro freguês entra pela entrada B. Ache a distribuição de $\min(T_1, V_1)$, o mínimo dos dois tempos.

temos $T_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $V_1 \sim \exp(\lambda_2)$, T_1 indep V_1, então

Assim, para $m > 0$:

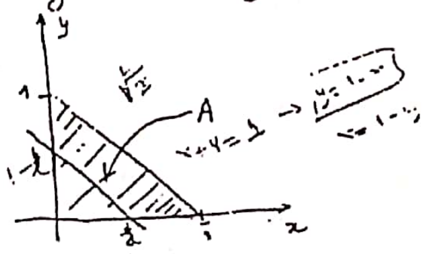
$$P(M = \min(T_1,V_1) > m) = P(T_1 > m, V_1 > m) \overset{\text{indep}}{=} P(T_1 > m) \cdot P(V_1 > m) = e^{-\lambda_1 m} e^{-\lambda_2 m}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)m} \Rightarrow M \sim \exp(\lambda_1+\lambda_2 = 25)$$

(c) Determine a probabilidade de que o primeiro freguês a entrar no mercado entre pela entrada A.

$$P(T_1 = \min(T_1,V_1)) \overset{\text{EXERCÍCIO 36}}{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{15}{10+15} = \frac{3}{5}$$

41- Seja A o seguinte triângulo:



Suponha que X e Y tenham densidade conjunta $f(x,y) = c\, I_A(x,y)$

(a) Determine o valor da constante c

temos. $1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = c \iint dx\, dy = c \text{ Area}(A) = c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$

Scanned with CamScanner

(b) Calcule a distribuição de X, a de Y e a de $Z = X+Y$.

b1) X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 2\int_0^{1-x} dy = 2(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

b2) Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^{1-y} dx = 2(1-y), & 0<y<1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

b3) X+Y:

$$P(X+Y\le t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t-x} f(x,y)\,dy\,dx = \begin{cases} 2\int_0^t\int_0^{t-x} dy\,dx = 2\int_0^t (t-x)\,dx = 2\left[tx-\frac{x^2}{2}\right]_0^t = t^2, & 0\le t\le 1 \\ 0, & t<0 \\ 1, & t>1 \end{cases}$$

(c) X e Y são independentes?

Não, pois $\lambda^2\left[\{(x,y): f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\,f_Y(y)\}\right] > 0$ Pois $2(1-x)\cdot 2(1-y) = 4(1-x)(1-y) \neq 2$

$(1-x)(1-y) \neq \frac{1}{2}$

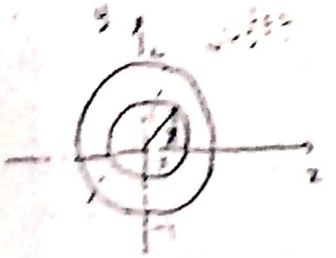
e $\lambda^2\left[\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\} \cap \{(x,y): (1-x)(1-y) \neq \frac{1}{2}\}\right] > 0.$

10. Se X e Y são as coordenadas de um ponto selecionado, ao acaso, do círculo unitário $\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, qual a distribuição da variável aleatória $Z = X^2+Y^2$?

Seja $A = \{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ $(X,Y) \sim U[A] \Rightarrow f_{XY}(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{área } A} = \frac{1}{\pi}, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$

então $0\le z\le 1$

$$P(Z\le z) = P(X^2+Y^2\le z) = \iint_{x^2+y^2\le z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le z} \frac{1}{\pi} I_A\,dx\,dy =$$



$$= \frac{1}{\pi}\,\text{Área}\left[\{(x,y): x^2+y^2\le z\}\cap A\right] = \frac{\pi z^2}{\pi} = z^2$$

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, tendo distribuição comum $U[0,1]$

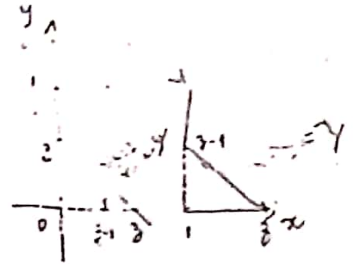
(a) Qual a densidade da variável aleatória $Z = X + Y$

$0 \leq z \leq 1$: $P(X+Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^z\int_0^{z-x} 1\,dy\,dx = \left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_0^z = \frac{z^2}{2}$

$1 \leq z \leq 2$: $P(X+Y \leq z) = \int_{z-1}^{1}\int_0^{z-x} 1\,dy\,dx = \left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_{z-1}^{1} = -\left[z(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2}\right] + \frac{1}{2} = $

$= -\left((z-1)\cdot\left(-\frac{z}{2}+z\right)\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - z(z-1)\right)$

e $z<0$: $P(X+Y \leq z) = 0$ e $z>2$: $P(X+Y\leq z) = 1$.



então:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ z, & 0\leq z\leq 1 \\ 1-2z, & 1\leq z\leq 2 \\ 0, & z>2 \end{cases}$$

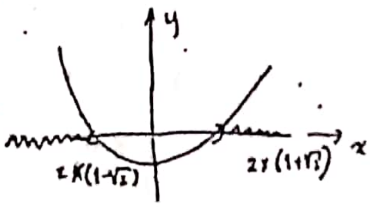
(b) Ache a probabilidade da equação quadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ ter raízes reais:

Xt^2+Yt+Z tem raízes reais se: $Y^2 - 4XZ = Y^2 - 4X(X+Y) > 0 \Rightarrow$

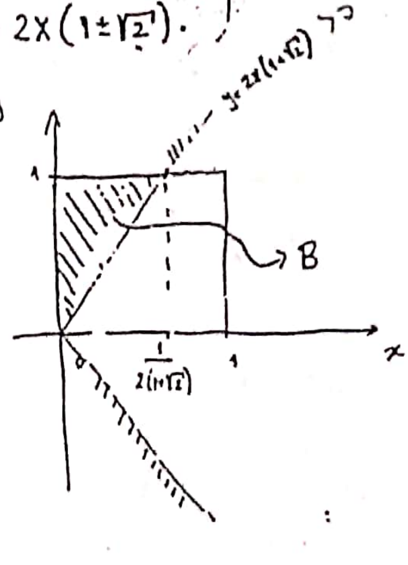
$y^2 - 4xy - 4x > 0$

raízes: $y_R: \frac{4x \pm \sqrt{16x^2+16x^2}}{2} =$

$= 2x(1\pm\sqrt{2})$.



então



Então, seja E = evento Xt^2+Yt+Z tem raízes reais

$P(E) = \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$

$= \iint_B dx\,dy =$ área B $=$

$= \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} = 0{,}10355$

44- Dizemos que X tem distribuição de Weibull com parâmetros α e λ se X tem densidade

$$f_X(x) = \lambda\alpha\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} I_{(0,\infty)}(x)$$

onde $\alpha>0$ e $\lambda>0$. Suponha que a vida útil de certo tipo de máquina, i.e, o tempo que ela funciona até pifar, possua distribuição Weibull(α,λ). Colocam-se em funcionamento simultaneamente, n, destas máquinas. Qual a distribuição do tempo de espera até alguma máquina pifar? (suponha independência das máquinas.)

temos: $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independentes que designam a vida útil das n máq.

$$P(X_1 > x_1) = \int_{x_1}^{\infty} f_{X_1}(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{\infty} \lambda\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} dx = \begin{pmatrix} y = \lambda x^{\alpha} \\ dy = \lambda\alpha x^{\alpha-1} dx \end{pmatrix} = \int_{\lambda x_1^{\alpha}}^{\infty} e^{-y} dy = \left[-e^{-y}\right]_{\lambda x_1^{\alpha}}^{\infty} = e^{-\lambda x_1^{\alpha}}, & x_1 > 0 \\ 1, & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

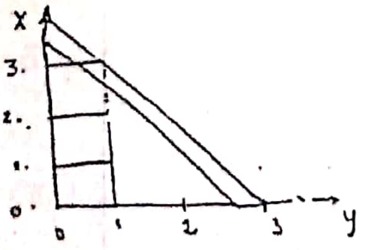
Agora: $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ = tempo de espera até alguma máquina pifar:

$$P(Z > z) = \begin{cases} P(X_1 > z, \dots, X_n > z) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i > z) \overset{\text{ident. dist.}}{=} \left[P(X_1 > z)\right]^n = e^{-\lambda n z^{\alpha}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

então

$$f_Z(z) = (\lambda n)\, z^{\alpha-1} \cdot e^{-(\lambda n) z^{\alpha}} I_{(0,\infty)}(z) \Rightarrow Z \sim \text{Weibull}(\alpha, n\lambda)$$

45- Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, X tendo distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 5$ e Y tendo distribuição uniforme em $[0,1]$. Ache a densidade de $Z = X+Y$. Obs: $[X]$ é parte inteira de X.



temos: $[X+Y \leq z] = [X \leq [z]-1] \cup [X = [z], Y \leq z-[z]]$

então $z \geq 0$:

$$F_Z(z) \overset{\text{o.c.d.i.}}{=} P(X \leq [z]-1) + P(X = [z], 0 \leq Y \leq z-[z]) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{[z]-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-5} + \frac{\lambda^{[z]}}{[z]!} e^{-5} \cdot (z - [z])$$

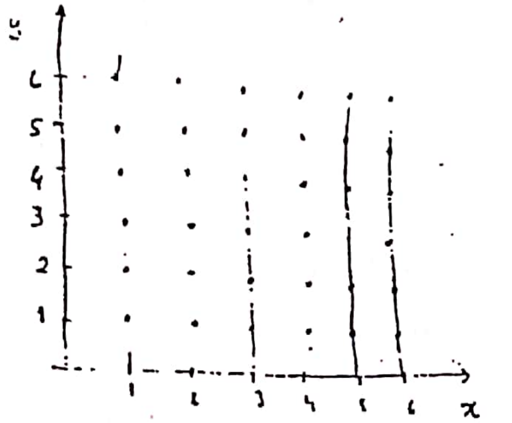
$x: z \leq 0 \quad F_Z(z) = 0$

Então

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{[z]}}{[z]!} e^{-5} & , z > 0 \\ 0 & , z \leq 0 \end{cases}$$

46. Lança-se um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam os números obtidos em, respectivamente, o primeiro e o segundo lançamento.

(a) Determine $P(X=Y)$



X indep $Y \xRightarrow{\text{exercício 22}} P(X=x, Y=y) = \frac{1}{36}, \ \forall x,y \in \{1,2,..$

então $\quad P(X=Y) = \sum_{k=1}^{6} P(X=k, Y=k) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

(b) $W = |X-Y|$

$P(W=0) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

$P(W=1) = 2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{18}$

$P(W=2) = 2 \cdot \frac{4}{36} = \frac{2}{9}$

$P(W=3) = 2 \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{6}$

$P(W=4) = 2 \cdot \frac{2}{36} = \frac{1}{9}$

$P(W=5) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

e $P(W \notin \{0,1,2,3,4,5\}) = 0$

(c) Seja $\quad Z = \begin{cases} 1 & , X+Y \text{ é par} \\ 0 & , X+Y \text{ é ímpar} \end{cases}$

Scanned with CamScanner

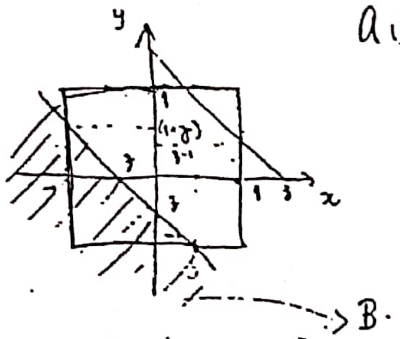
Explique porque X e Z são ou não são independentes.

temos $P(Z=0) = P(Z=1) = \frac{(3\cdot 3)+(3\cdot 3)}{36} = \frac{1}{2}$.

e $\begin{cases} P(X=x,\ Z=1) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \underbrace{P(X=x)}_{1/6}\cdot\underbrace{P(Z=1)}_{1/2} \\ P(X=x,\ Z=0) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \underbrace{P(X=x)}_{1/6}\cdot\underbrace{P(Z=0)}_{1/2} \end{cases}$ então pelo $\Rightarrow$ ex. 22 X e Z são independentes.

47. Escolhe um ponto ao acaso (i.e conforme a distribuição uniforme) dos lados do quadrado de vertices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,1)$. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido.

(a) Determine a distribuição de $X+Y$



A resp. distribuição será singular e temos:

$$P(A) = \frac{comp(A\cap L)}{comp(L)}$$

onde $L = \{(x,y) : (|x|=1 \text{ ou } |y|=1) \text{ e } x^2+y^2\leq 1\}$

e $comp(L) = 8$

então

$$F_Z(z) = P(X+Y\leq z) = \frac{comp(C\cap L)}{8} = \begin{cases} 0, & z<-2 \\ \frac{2+z}{4}, & -2\leq z\leq 0 \\ \frac{8-2(2-z)}{8} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}z, & 0<z\leq 2 \\ 1, & z>2 \end{cases}$$

(b) Ache $P(W>0)$ onde W é o máximo de X e Y

$$P(W>0) = \frac{comp(C\cap L)}{8}, \text{ onde } C = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) : x\leq 0 \text{ e } y\leq 0\}$$

então $comp(C\cap L) = 6 \Rightarrow P(W>0) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

48. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $N(0,1)$. Mostre que $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ e $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ também são independentes e $N(0,1)$.

$X \sim N(0,1)$
$Y \sim N(0,1)$ independentes: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$

Agora: $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $X = \frac{U+V}{\sqrt{2}}$, $Y = \frac{U-V}{\sqrt{2}}$

Assim $J_{((x,y),(u,v))} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = +1$

Então:

$$f_{U,V}(u,v) = |J_{(x,y),(u,v)}| \cdot f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(u+v)^2}{2} + \frac{(u-v)^2}{2}\right)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}}_{\text{densidade de } N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2}}_{\text{densidade de } N(0,1)},$$

$-\infty<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$.

Então: $U \sim N(0,1)$, $V \sim N(0,1)$ e U indep V

49- Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $U[0,1]$. Ache a densidade conjunta de W e Z, onde $W = X+Y$ e $Z = X-Y$. W e Z são independentes?

Temos $X \sim U[0,1]$, $Y \sim U[0,1]$, X e Y indep. $\Rightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

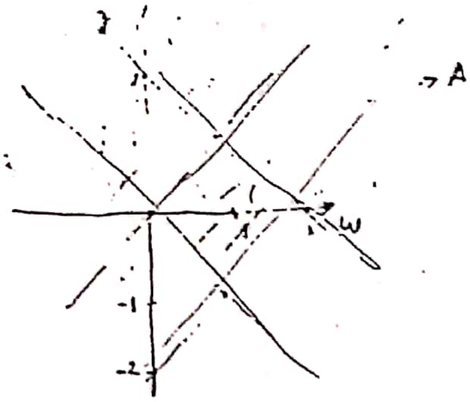
Usando o método do Jacobiano:

$\left.\begin{array}{l} W = X+Y \\ Z = X-Y \end{array}\right\} \Rightarrow X = \frac{W+Z}{2}$, $Y = \frac{W-Z}{2}$ e $J_{(x,y),(w,z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

então: $f_{W,Z}(w,z) = |J_{(x,y),(w,z)}| \cdot f_{X,Y}(h_1^{-1}(x), h_2^{-1}(y)) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (w,z) \in \underbrace{\{(w,z): 0 \leq \frac{w+z}{2} \leq 1 \text{ e } 0 \leq \dots}_{A} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Assim:

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{2} I_A(w,z)$$

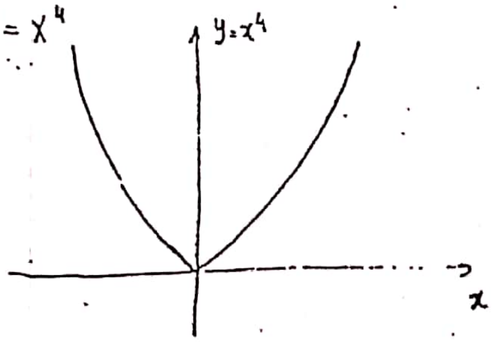


Agora W e Z não são independentes, analogamente a X e Y no exercício 32

50 - Suponha que X seja uma variável aleatória com distribuição N(0,1). Calcule a densidade de $Y = X^4$ e a de $Z = 1/X$. Y e Z possuem densidade conjunta? Porque?

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ -\infty < x < \infty$$

a) $Y = X^4$



Seja $G_0 = (0,\infty)$ $G_1 = (0,\infty)$ $G_2 = (-\infty, 0)$

então
$$\begin{cases} y_1 : G_1 \to G_0 \\ y_1 = x^4 \Rightarrow h_1^{-1} = (y)^{1/4} \\ y_2 : G_2 \to G_0 \\ y_2 = x^4 \Rightarrow h_2^{-1} = -(y)^{1/4} \end{cases}$$

Assim $J_{1(x,y)} = \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y} = \frac{1}{4} y^{-3/4}$ e $J_{2(x,y)} = \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y} = -\frac{1}{4} y^{-3/4}$

então

$$f_Y(y) = |J_{1(x,y)}| f_X(h_1^{-1}(y)) + |J_{2(x,y)}| f_X(h_2^{-1}(y)) \Rightarrow$$

então
$$f_Y(y) = \begin{cases} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{1/2}}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{1/2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{y}}{2}} \cancel{X}, & y > 0 \\ = 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

b) $Z = \frac{1}{X} \Rightarrow h^{-1}(z) = X = \frac{1}{Z} \Rightarrow J_{(x,z)} = -\frac{1}{z^2}$

$$f_Z(z) = |J_{(x,z)}| \cdot f(h^{-1}(z)) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1/z^2}{2}} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2z^2}}, \ -\infty < z$$

c) Y e Z não possuem densidade conjunta pois (Y,Z) possui distribuição singular. Isto acontece pois $\exists\ A \subset \mathbb{R}^2$ t.q $P((Y,Z) \in A) = 1$ e $\lambda^2(A) = 0$, onde $A = \{(y,z) : z^4 \cdot y = 1\}$.

51. Seja X uma variável aleatória possuindo densidade $f(x)$.

(a) Ache a densidade de $Y = |X|$ pelo método básico, obtendo a função de distribuição de X e derivando-a.

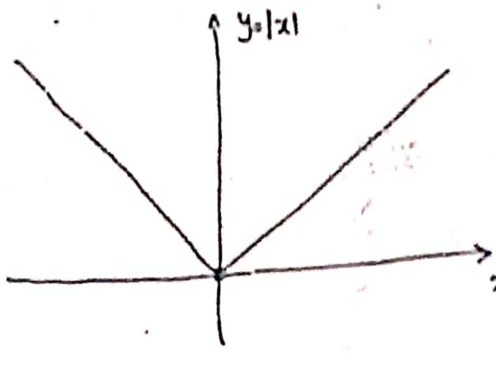
temos: $P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \left(\begin{smallmatrix} X \text{ é va} \\ \text{contínua} \end{smallmatrix}\right) = P(-y < X \leq y) =$

$= F_X(y) - F_X(-y) \quad , \ y > 0$

e $P(Y \leq y) = 0, \quad y < 0$

então: $$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y), & y > 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

(b) Ache a densidade de Y pelo método do Jacobiano



$G_0 = (0,\infty)$, $G_1 = (0,\infty)$, $G_2 = (-\infty,0)$

$y_1 : G_1 \to G_0$	$y_2 : G_2 \to G_0$
$y_1 = x$	$y_2 = -x$
$x = h_1^{-1}(y) = y$	$x = h_2^{-1}(y) = -y$
$J_{(x,y_1)} = 1$	$J_{(x,y_2)} = -1$

então:

$$f_Y(y) = |J_{(x,y_1)}| \cdot f_X(h_1^{-1}(y)) + |J_{(x,y_2)}| \cdot f_X(h_2^{-1}(y)) =$$

$$= \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & , y > 0 \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

12. Suponha que X, Y, Z possuem densidade conjunta

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1+x+y+z)^4} & x>0,\ y>0\ e\ z>0 \\ 0 & ,\ c.c \end{cases}$$

Obtenha a densidade da variável aleatoria $W = X+Y+Z$ de duas maneiras diferentes (método básico e método do Jacobiano).

<u>método básico:</u>

$$P(W \le w) = P(X+Y+Z \le w) = \int_0^{w}\int_0^{w-x}\int_0^{w-(x+y)} \frac{6}{(1+x+y+z)^4}\,dz\,dy\,dx \longrightarrow \text{com } y^{-1}$$

$$\text{Agora } I = \int_0^{w-(x+y)} \frac{6}{(1+x+y+z)}\,dz = \begin{pmatrix} v=(1+x+y+z) \\ dv = dz \end{pmatrix} = 6\int_{1+x+y}^{w+1} \frac{1}{v}\,dv = 6\Big[\ln v\Big]_{(1+x+y)}^{w+1} =$$

$$= 6\cdot\Big[\ln(w+1) - \ln(1+x+y)\Big]$$

Continuando:

$$II = \int_0^{w-x} 6\left[\ln(w+1) - \ln(1+x+y)\right] dy = 6\Big\{(\ln(w+1))(w-x) + III\Big\}$$

$$\text{onde } III = \int_0^{w-x} \ln(1+x+y)\,dy = \begin{pmatrix} v = 1+x+y \\ dv = dx \end{pmatrix} = \int_{1+x}^{w+1} \ln v\,dv = \Big[v\ln v - v\Big]_{1+x}^{w+1}$$

$$= (w+1)\ln(w+1) - (w+1) - (1+x)\ln(1+x) + (1+x)$$

$$\text{então } II = 6\Big\{ w\ln(w+1) - x\ln(w+1) + (w+1)\ln(w+1) - (w+1) - (1+x)\ln(1+x) + (1$$

$$\text{Agora } (V) = \int_0^{w} II\,dx = 6\cdot\Big\{ xw\ln(w+1) - \frac{x^2}{2}\ln(w+1) + x(w+1)\ln(w+1) - x(w+1) + x + \frac{x^2}{2}\Big\}$$

$$(IV) = 6\int^{w} (1+x)\ln(1+x)\,dx = \begin{pmatrix} v = 1+x \\ dv = dx \end{pmatrix} = 6\cdot\int v\ln v\,dv = 6\cdot\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 6 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{(w+1)^2}{2}\left(\ln(w+1) - \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{então:}$$

$$(\mathrm{V}) \doteq 6 \left\{ w^2 \ln(w+1) - \frac{w^2}{2}\ln(w+1) + w^2 \ln(w+1) + w\ln(w+1) - w^2 - \cancel{w} + \cancel{w} + \frac{w^2}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} + \frac{(w+1)^2}{2}\ln(w+1) - \frac{(w+1)^2}{4} \right\} \Rightarrow$$

$$P(W \leq w) = \begin{cases} 3 \cdot (2w+1)^2 \ln(w+1) - \frac{9}{2} w^2 + 3w - 3 & , w > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

método do Jacobiano

$W = X+Y+Z$ $\quad X = U$
$U = X$ $\quad$ então $\quad Y = T$ $\quad$ e $\quad J_{(x,y,z),(u,t,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$
$T = Y$ $\quad Z = W - U - T$

então

$$f_{W,U,T}(w,u,t) = \left|J_{(x,y,z)(u,t,w)}\right| f_{X,Y,Z}(u,t,w-u-t) = \begin{cases} \frac{6}{(1+w)^4} & , u>0,\ t>0 \\ & \ w \geq u+t \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{W,U,T}(w,u,t)\, du\, dt \quad \int_0^w \int_0^{w-u} \frac{6}{(1+w)^4}\, dt\, du = 6\int_0^w \left[\frac{w}{(1+w)^4} - \frac{u}{(1+w)^4}\right] du =$$

$$= \begin{cases} 6 \cdot \left[\frac{w}{[1+w]^4} u - \frac{u^2}{2(1+w)^4}\right]_0^w = 6\left[\frac{w^2}{[1+w]^4} - \frac{w^2}{2(1+w)^4}\right] = \frac{3w^2}{(1+w)^4} & , w \geq 0 \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

53- Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição comum $\exp(\lambda)$. Prove que $Z = \frac{X}{X+Y} \sim U[0,1]$.

Usando o método do Jacobiano, e fazendo:

$$\begin{matrix} W = X \\ Z = \frac{X}{X+Y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X = W \\ Y = W \cdot \left(\frac{1}{z} - 1\right) \end{matrix}, \text{ então } J_{(x,y),(w,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z} - 1 & -\frac{w}{z^2} \end{vmatrix} = -\frac{w}{z^2}$$

Agora $f_{X,Y}(x,y) \overset{\text{indep}}{=} \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

então: $f_{W,Z}(w,z) = \left|J_{(x,y),(w,z)}\right| \cdot f_{X,Y}\left(w, w\left(\frac{1}{z}-1\right)\right) = \begin{cases} \frac{w}{z^2} \lambda^2 e^{-\lambda\left(\frac{w}{z}\right)}, & w>0 \text{ e } 0<z<1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

assim: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,Z}(w,z)\, dw$

então para $0<z<1$: $\begin{cases} f_Z(z) = \int_0^{\infty} \frac{w}{z^2} \lambda^2 e^{-\lambda\left(\frac{w}{z}\right)} dw = \begin{pmatrix} v = \frac{\lambda w}{z} \\ dv = \frac{\lambda}{z} dw \end{pmatrix} = \\ = \int_0^{\infty} v \cdot e^{-v} dv = 1 \end{cases}$

então $Z \sim U[0,1]$ pois f caracteriza a lei de Z.

54- (Extensão do método do Jacobiano para o caso de K infinito)

Seja $\underset{\sim}{Y} = g(\underset{\sim}{X})$ onde $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$. Suponhamos que G; $G_1, G_2, \ldots$ sejam subregiões abertas do $\mathbb{R}^n$ tais que $P(\underset{\sim}{X} \in \bigcup_n G_n) = 1$, e tais que $g|_{G_n}$ seja uma correspondência biunívoca entre G_n e G, $\forall n \geq 1$. Demonstre o seguinte teorema: se a função $h^{(n)}$, a inversa de $g|_{G_n}$ satisfaz as condições da função h do Teorema 2.1, $\forall n \geq 1$, então $\underset{\sim}{Y}$ tem densidade

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f(h^{(n)}(\underset{\sim}{y})) \cdot |J_n(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})| , & \underset{\sim}{y} \in G \\ 0 , & \underset{\sim}{y} \notin G \end{cases}$$

onde $J_n(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})$ é o jacobiano de $h^{(n)}$.

Seja $B \subset G$, sob as condições acima, temos:

$$P(\underset{\sim}{Y} \in B) = P(g(\underset{\sim}{X}) \in B) = \sum_{l=1}^{\infty} P(g(\underset{\sim}{X}) \in B, \underset{\sim}{X} \in G_l) = \sum_{l=1}^{\infty} P(\underset{\sim}{X} \in h^{(l)}(B)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int_{h^{(l)}(B)} \cdots \int f(\underset{\sim}{x})\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int \cdots \int_B f(h^{(l)}(\underset{\sim}{y})) \cdot |J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})|\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n = \left(\begin{matrix} \text{o integrando} \\ \text{é contínuo} \\ \text{e limi-} \end{matrix} \right.$$

$$= \int \cdots \int_B \sum_{l=1}^{\infty} f(h^{(l)}(\underset{\sim}{y})) \cdot |J_l(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y})|\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n .$$

55- Se X possui densidade $f(x)$, qual a densidade de $Y = \cos X$?
(Sugestão. Use o exercício 54)

$G = (0, \infty)$, $G_k = (k\pi, (k+1)\pi)$.

Assim $P(X \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} G_k) = 1$ pois X é abs. contínua então $P(X = k\pi, k \in \mathbb{Z})$

temos também que $y = \cos x$ é bijetiva em G_k. então, a função inversa existe e é dada por $x = h^{(k)}(y) = \arccos(y - k\pi)$

$$\frac{\partial h^{(k)}}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$, que é contínua em G, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Então, valem as condições do exercício 54 e portanto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\arccos(y - k\pi)) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\arccos(y-k\pi)) + f(\arccos(y+ \right. & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

56- Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tendo distribuição comum $U[0,1]$, e sejam $R = \sqrt{2 \log(1/(1-X))}$ e $\Theta = \pi(2Y - 1)$.

(a) Mostre que $\Theta \sim U[-\pi, \pi]$ e que R tem distribuição de Rayleigh com densidade

$$f(r) = \begin{cases} r e^{-r^2/2}, & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}$$

Inicialmente $X, Y \sim U[0,1]$ e indep $\Rightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1]^2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

<u>Método do Jacobiano</u>

$R = \sqrt{2 \log(1/1-x)} \Rightarrow \frac{R^2}{2} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{1} = e^{-r^2/2} \Rightarrow x = e^{-r^2/2} + 1$

$\Theta = \pi(2Y - 1) \Rightarrow 2y - 1 = \frac{\theta}{\pi} \rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\pi} + 1\right)$

então: $$J_{(x,y)(r,\theta)} = \begin{vmatrix} -r e^{-r^2/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} = -\frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}$$

Assim:

$$f_{R,\theta}(r,\theta) = |J_{(x,y),(r,\theta)}| \cdot f_{X,Y}\left(e^{-r^2/2}+1, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\theta}{\pi}+1\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-r^2/2}\, f_{X,Y}\left(e^{-r^2/2}+1, \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\theta}{\pi}+1\right)\right) =$$

$$f_{R,\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \cdot r e^{-r^2/2}, & (r,\theta) \in A \\ 0, & (r,\theta) \notin A \end{cases}$$

onde $A = \left\{ (r,\theta) : 0 \leq e^{-r^2/2}+1 \leq 1,\ 0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\pi}+1\right) \leq 1 \right\} =$

$= \{ (r,\theta) : r \geq 0,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \}$

Então: R, θ são independentes com $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ e $R \sim$ Rayleigh.

(b) Mostre que Z e W, definidas por $Z = R\cos\theta$ e $W = R \operatorname{sen}\theta$ são independentes com distribuição comum $N(0,1)$.

temos $Z = R\cos\theta$, $W = R\operatorname{sen}\theta$ $\Rightarrow J_{(z,w),(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} = R(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = R$

então $J_{(r,\theta),(z,w)} = \dfrac{1}{J_{(z,w),(r,\theta)}} = \dfrac{1}{r}$. Então:

$$f_{Z,W}(z,w) = |J_{(r,\theta),(z,w)}| \cdot f_{R,\theta}(h^{-1}(r), h^{-1}(\theta)) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot r e^{-\frac{(z^2+w^2)}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}, \quad -\infty < z < \infty,\ -\infty < w < \infty$$

$Z, W \sim N(0,1)$.

junta $f(x,y)$, ache a densidade conjunta de W e Z, onde

$W = aX+b$ e $Z = cY+d$, $a>0$, $c>0$, $b \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$.

Usando o método do Jacobiano:

$$W = aX+b \Rightarrow X = \frac{1}{a}(W-b)$$
$$Z = cY+d \Rightarrow Y = \frac{1}{c}(Z-d)$$

então $J_{(x,y),(w,z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{ac}$

e portanto,

$$f_{W,Z}(w,z) = |J_{(x,y),(w,z)}| \cdot f_{X,Y}\left(\tfrac{1}{a}(w-b), \tfrac{1}{c}(z-d)\right) = \frac{1}{a.c} f_{X,Y}\left(\tfrac{1}{a}(w-b), \tfrac{1}{c}(z-d)\right), \quad -\infty < w < \infty, \ -\infty < z < \infty$$

(b) Seja (X,Y) um vetor aleatório tendo distribuição normal bivariada com densidade dada no exemplo 15 (§ 2.5). Qual a densidade de $(W,Z) = \left(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$? Que distribuição é essa?

temos:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

onde $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$, $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$.

Agora $W = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \Rightarrow$ Se $a = \frac{1}{\sigma_1}$, $b = \frac{-\mu_1}{\sigma_1} \Rightarrow W = aX+b$

$Z = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \Rightarrow$ Se $c = \frac{1}{\sigma_2}$, $d = \frac{-\mu_2}{\sigma_2} \Rightarrow Z = cY+d$

Usando o item (a):

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{\sigma_1 . \sigma_2 .}{2\pi . \sigma_1 . \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[w^2 - 2\rho w . z + z^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[w^2 - 2\rho w . z + z^2\right]\right\}, \quad -\infty < w < \infty, \ -\infty < z < \infty$$

Esta distribuição é a normal bivariada com coeficiente de correlação ρ, $W \sim N(0,1)$ e $Z \sim N(0,1)$.

(c) Se (X,Y) tem distribuição uniforme no círculo unitário $\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$, qual a distribuição conjunta de W e Z (como definidas no item (a))?

temos:
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x,y) \in A, \text{ onde } A = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então, se $W = aX+b$ $(a>0)$ e $Z = cY+b$ $(c>0)$, temos

$$f_{W,Z}(w,z) = \begin{cases} \frac{1}{a.c} \frac{1}{\pi}, & (w,z) \in \left\{(w,z): \frac{1}{a^2}(w-b)^2 + \frac{1}{c^2}(z-d)^2 \leq 1\right\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

58. Suponha que X e Y sejam independentes com $X \sim \Gamma(\alpha_1,1)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2,1)$, onde $\alpha_1>0$ e $\alpha_2>0$. Mostre que $X+Y$ e X/Y são independentes e ache suas distribuições.

$$\left.\begin{array}{l} W = X+Y \\ Z = X/Y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X = \frac{ZW}{(Z+1)} \\ Y = \frac{W}{(Z+1)} \end{array} \Rightarrow J_{(X,Y)(W,Z)}^{(w,z)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial w & \partial x/\partial z \\ \frac{z}{z+1} & \frac{w}{(z+1)^2} \\ \partial y/\partial w & \partial y/\partial z \\ \frac{1}{(z+1)} & \frac{-w}{(1+z)^2} \end{vmatrix} = -\frac{w(z+1)}{(z+1)^3} = -\frac{w}{(z+1)^2} = -y$$

$$\frac{z}{z+1}\left(\frac{-w}{(1+z)^2}\right) - \frac{w}{(z+1)^3} = -\left[\frac{(z+1)(1+\cdot}{(z+1)^3}\right.$$

$x = zy$

$x = z(w-x)$ $\quad y = \frac{zw}{z+1} \Rightarrow y = w - \frac{zw}{z+1} = \frac{w}{z+1}$

$x + zx = zw$

Agora $X \sim \Gamma(\alpha_1,1)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2,1)$ e X e Y indep. $\Rightarrow$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha_1-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot \frac{y^{\alpha_2-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha_2)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então, pelo método do Jacobiano:

$$f_{W,Z}(w,z) = \left|J_{(X,Y),(W,Z)}^{(w,z)}\right| \cdot f_{X,Y}\left(\frac{zw}{z+1}, \frac{w}{z+1}\right) = \begin{cases} \frac{w\left(\frac{z}{z+1}\right)^{\alpha_1-1} w^{\alpha_1-1} \cdot w^{\alpha_2-1} \frac{1}{(z+1)^{\alpha_2-1}} e^{-w}}{(z+1)^2\,\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \\ = \frac{z^{\alpha_1-1}}{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{w^{(\alpha_1+\alpha_2)-1}e^{-w}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} & w>0, z>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

temos que:
$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{w^{(\alpha_1+\alpha_2)-1}e^{-w}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}_{\text{densidade da } \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,1)} dw = 1$$

Agora $\int_0^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{z^{\alpha_1-1}}{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2}} dz = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha_1-1}}{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2}} dz = 1$

Então, $W = X+Y$, $Z = X/Y$ são independentes com:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{w^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot e^{-w}, & w \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{z^{\alpha_1-1}}{(1+z)^{\alpha_1+\alpha_2}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

59- Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição com densidade $f(x)$. Mostre que $P(X_1 < \ldots < X_n) = \frac{1}{n!}$ e que $P(X_i = X_j$ para algum par (i,j) tal que $i \neq j) = 0$. (Veja o exercício 19)

Temos que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são uma amostra aleatória, então são aleatórias independentes, ident. distribuídas então $X_1, \ldots, X_n$ é invariante para permutações e possuem densidade conjunta $[f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)]$ assim, pelo exercício 19(b): $P(X_1 < \ldots < X_n) = \frac{1}{n!}$ e

$P(X_i = X_j$ para algum par (i,j) tal que $i \neq j) = 0$.

60 - Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ sejam independentes e identicamente distribuídas, com densidade comum f. Mostre que a densidade conjunta de $U = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ e $V = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ é:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} n(n-1)[F(v)-F(u)]^{n-2} f(u) \cdot f(v), & \text{se } u < v \\ 0, & \text{se } u \geq v \end{cases}$$

(Sugestão. Primeiro obtenha $P(U \leq u, V \leq v)$. Depois calcule a derivada

Temos: $P(V \leq v) = P(X_1 < v, \ldots, X_n < v) \overset{\text{indep. e ident. dist.}}{=} [P(X_1 \leq v)]^n = [F(v)]^n$. Então

$$F_{U,V}(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(V \leq v) - P(U > u, V \leq v) = [F(v)]^n - P(U > u, V \leq v)$$

Agora $P(U > u, V \leq v) = P(u < X_1 \leq v, u < X_2 \leq v, \ldots, u < X_n \leq v) = (\text{indep. e distrib. ident.}) =$

$$= [P(u < X_1 \leq v)]^n = [F(v) - F(u)]^n$$

portanto:
$$F_{U,V}(u,v) = \begin{cases} [F(v)]^n - [F(v) - F(u)]^n, & u < v \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

1-
$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2 F_{U,V}(u,v)}{\partial u \partial v} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v}\left[n[F(v) - F(u)]^{n-1} f(u)\right] = \\ n(n-1)[F(v) - F(u)]^{n-2} f(u) f(v), & u < v \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

61- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $[0, \theta]$, onde $\theta > 0$. Sejam

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \qquad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

(a) Prove que a densidade conjunta de (U, V) é:

$$f(u,v) = \begin{cases} n(n-1) \cdot (v-u)^{n-2}/\theta^n, & 0 \leq u < v \leq \theta \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

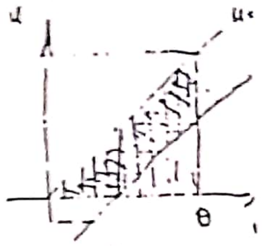
(Sugestão. Exercício 60)

Como $X_1 \sim U[0, \theta]$ então $F_{X_1}(x) = F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$

$$f_{X_1}(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Assim, aplicando o resultado do Exercício 60, temos

$$f(u,v) = \begin{cases} n(n-1)\,(v-u)^{n-2}/\theta^{n}, & 0 \leq u < v < \theta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



(b) Prove que a densidade de $V-U$ está dada por

$$f(w) = \begin{cases} \frac{n(n-1)\,w^{n-2}}{\theta^{n-1}}\left(1-\frac{w}{\theta}\right), & 0 \leq w \leq \theta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

temos que $F_W(w) = P(W \leq w) = P(V-U \leq w) = \underbrace{\int_0^w \int_0^v f(u,v)\,du\,dv}_{I} + \underbrace{\int_w^\theta \int_{v-w}^v f(u,v)\,du}_{II}$

onde $I = \int_0^w \int_0^v \frac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{\theta^n}\,du\,dv = \begin{pmatrix} x = v-u \\ dx = -du \end{pmatrix} = \int_0^w \frac{n(n-1)}{\theta^n} \int_0^v x^{n-2}\,dx.$

$$= \int_0^w \frac{n(n-1)}{\theta^n (n-1)}\, v^{n-1}\,dv = \left[\frac{n}{\theta^n}\,\frac{v^n}{n}\right]_0^w = \left(\frac{w}{\theta}\right)^n.$$

$$II = \int_w^\theta \int_{v-w}^v \frac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{\theta^n}\,du\,dv = \begin{pmatrix} x = v-u \\ dx = -du \end{pmatrix} = \int_w^\theta \frac{n(n-1)}{\theta^n} \int_0^w x^{n-2}\,d$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta^n (n-1)} \int_w^\theta w^{n-1}\,dv = \frac{n\,w^{n-1}}{\theta^n}(\theta - w) = n\left(\frac{w^{n-1}}{\theta^{n-1}} - \frac{w}{\theta}\right)$$

Então $F_W(w) = \begin{cases} -(n-1)\frac{w^n}{\theta^n} + n\,\frac{w^{n-1}}{\theta^{n-1}}, & 0 \leq w \leq \theta \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$$\frac{\partial T_u(w)}{\partial \ldots} = \begin{cases} -n(n-1)\frac{w^{n-1}}{\theta^n} + n(n-1)\frac{w^{n-2}}{\theta^{n-1}} = \frac{n(n-1)w^{n-2}}{\theta^{n-1}}\left(1-\frac{w}{\theta}\right), \\ \\ n, \quad \text{c.c} \end{cases}$$

12- Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com distribuição comum $U[0,1]$, mostre que

$$-2n \log Y \sim \chi^2(2n)$$

onde Y é a média geométrica das X_i, definida por

$$Y = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

temos que se $X_1 \sim U[0,1]$ então pelo exemplo 17: $-\log X_1 \sim \exp(1) = \Gamma(1,1)$

então: $-n \log Y = -\log Y^n = -\log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = (-\log X_1) + (-\log X_2) + \cdots + (-\log X_n)$

Agora pela propriedade hereditária da independência $-\log X_1, -\log X_2, \ldots, -\log X_n$ são independentes e com dist $\Gamma(1,1)$. Assim $-n \log Y \sim \Gamma(n,1)$

Agora, fazendo $Z = -n \log Y$ ∴ Então, seja $W = 2Z$:

$$f_W(w) = \frac{1}{2} \cdot f_Z(w/2) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{w}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{w}{2}}, \quad w > 0$$

Então $W = -2n \log Y \sim \Gamma(n, \tfrac{1}{2})$ (I)

Agora $\chi^2(n) \sim \Gamma(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}) \Rightarrow \chi^2(2n) = \Gamma(n, \tfrac{1}{2})$ (II)

e de (I) e (II): $-2n \log Y \sim \chi^2(2n)$

63. Mostre que se $X \sim t(1)$, então X tem distribuição de Cauchy.

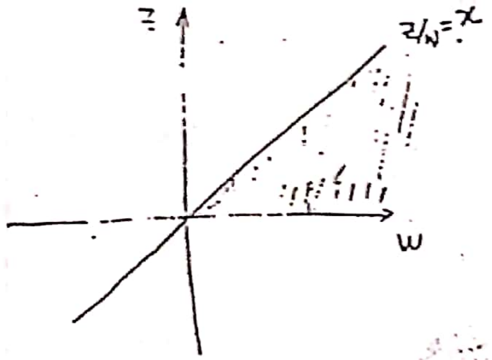
Pela definição de v.a t de student, temos que se Z e Y independentes com $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2(n)$ então:

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

Agora se $n=1$, verifiquemos qual é a distribuição de $\sqrt{Y}$:

Então $W=\sqrt{Y} \Rightarrow Y = W^2 \Rightarrow J_{(y,w)} = 2w$ e então:

$$f_W(w) = 2w \cdot f_Y(w^2) = \begin{cases} 2w \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi w^2}} e^{-w^2/2} = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}, & w>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Z e W são indep $\Rightarrow$ $$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, & \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

então $$P(X \leq x) = P(Z/W \leq x) = \int_0^{\infty} \int_0^{w.x} \frac{1}{\pi} e^{-w^2/2} e^{-z^2/2} \, dz \, dw =$$

$$= (\text{simetria}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{s.x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz \, ds = P\left(Z/S \leq x\right),$$

onde Z e S indep e $Z \sim N(0,1)$ e $S \sim N(0,1)$. Portanto pelo exemplo 21: $X \sim$ Cauchy-Padrão

Capítulo 3:

Esperança Matemática

Scanned with CamScanner

1- Dizemos que a distribuição de X é simétrica (em torno de zero) se $P(X \geq x) = P(X \leq -x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ... que uma distribuição é simétrica em torno de μ se:

$$P(X \geq \mu + x) = P(X \leq \mu - x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Prove: se a distribuição de X é simétrica em torno de μ e se X é integrável, então $EX = \mu$ (Sugestão: Prove primeiro para $\mu = 0$)

X é integrável e tem dist sim. t. zero $\Rightarrow P(X \geq x) = P(X \leq -x) \Rightarrow$

$$(1 - F_X(x)) = F_X(-x) \Rightarrow EX = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx = \left(\begin{array}{c}\text{Fazendo} \\ \text{na 2ª integral} \\ \text{uma troca de} \\ \text{variável } (-x) \\ \text{mudança de } x\end{array}\right) =$$

$$\Rightarrow EX = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx - \int_0^{\infty} F_X(x)\,dx = 0 .$$

$\mu \neq 0$. X é integrável e sua dist simétrica em μ $P(X \geq \mu + x) = P(X \leq \mu - x), \forall x \in \mathbb{R}$

... $-\mu$ então $Y \leq X$, e como X é integrável $\Rightarrow Y$ é integrável pois

$y = X - \mu \Rightarrow |x| - \mu \leq |x - \mu| = |y| = |X - \mu| \leq |X| + \mu$. Agora Y é s. torno zero, pois:

$$P(Y \geq y) = P(X - \mu \geq y) = P(X \geq \mu + y) \overset{S.t.\mu}{=} P(X \leq \mu - y) = P(X - \mu \leq -y) = P(Y \leq -y). \text{ Então}$$

por (a.1) $\Rightarrow EY = 0$

(b) Suponha que X possua densidade $f(x)$. Mostre que se $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ então a distribuição de X é simétrica em torno de μ. Enuncie e prove a propriedade análoga para o caso discreto.

$$P(X \geq \mu + x) = \int_{\mu+x}^{\infty} f_X(x)\,dx = \begin{pmatrix} y = 2\mu - x \\ dy = -dx \end{pmatrix} = -\int_{\mu - x}^{-\infty} f_X(2\mu - y)\,dy = \int_{-\infty}^{\mu - x} f_X(2\mu - y)\,dy = \left(\begin{array}{c} \text{faz} \\ 2\mu + y \\ \mu + (\ldots \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{usando} \\ f(\mu + x) = f(\mu - x)\end{array}\right) = \int_{-\infty}^{\mu - x} f_X(y)\,dy = P(X \leq \mu + x)$$

Caso discreto: Suponha que X possui função de probabilidade p. Mostre que se $P(\mu+x) = P(\mu-x)$ $\forall x$, então a distribuição de X é simétrica em torno de μ.

Prova:
$$P(X \geq \mu+x) = \sum_{\mu+x}^{\infty} P(x) = (y = \mu - x) = \sum_{-\infty}^{-x} P(\mu-y) = \sum_{-\infty}^{-x} P(\mu+y) =$$
$$= (x = \mu+y) = \sum_{-\infty}^{\mu-x} p(x) = P(X \leq \mu - x).$$

(c) Qual é o ponto de simetria das distribuições das seguintes v. aleat.? Esperança de cada v.a. se existir.

(i) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \ x \in \mathbb{R}$

$$f(\mu - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu-x-\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$
$$f(\mu+x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mu+x-\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$

então pelo item (b) X é s.t. μ

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \begin{pmatrix} y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ x = \sigma y + \mu \\ dx = \sigma dy \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cancel{\sigma} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{N(0,1)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2}y^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu$$

(ii) $X \sim \text{Cauchy}(M, b)$: $\qquad f(x) = \frac{b}{\pi[b^2 + (x-M)^2]}, \ x \in \mathbb{R}$

$$f(M-x) = \frac{b}{\pi[b^2 + (M-x-M)^2]} = \frac{b}{\pi(b^2+x^2)}$$
$$f(M+x) = \frac{b}{\pi[b^2 + (M+x-M)^2]} = \frac{b}{\pi(b^2+x^2)}$$

então pelo item (b) X é s.t. M

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{b}{\pi[b^2+(x-M)^2]} dx = \begin{pmatrix} y = x - M \\ x = y + M \\ dx = dy \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} (y+M)\frac{b}{b^2+y^2}\, dy = \frac{b}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2y}{b^2+y^2} + \frac{2bM}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{b^2+y^2} =$$

$$= \frac{b}{\pi} \lim_{a\to\infty} \left(\log(b^2+y^2)\right)_0^a + \frac{2bM}{\pi}\left[\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{b}{\pi}(+\infty) + \frac{2M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty + M = \infty$$

iii) $X \sim U[a,b]$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & c.c \end{cases}$

$$f\left(\frac{a+b}{2}+x\right) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \frac{a+b}{2}+x \in [a,b] \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \leq x \leq \frac{b-a}{2} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}-x\right) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \frac{a+b}{2}-x \in [a,b] \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \leq -x \leq \frac{b-a}{2} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

X é s.t. $\frac{a+b}{2}$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)}\, dx = \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

iv) $X \sim B(n, \frac{1}{2})$, $\quad p(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$

Logo $\quad P\left(X + \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{x+\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad$ que são iguais

$P\left(-X+\frac{n}{2}\right) = \binom{n}{-x+\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad$ pois $x + \frac{n}{2} = n - \left(x - \frac{n}{2}\right)$

X é s.t. $\frac{n}{2}$:

e X é integrável pois $0 \leq X \leq n$, então pelo item (a): $EX = \frac{n}{2}$

v) X tal que F_X é função de Cantor

Por construção X é s.t. $\frac{1}{2}$ e como é limitada $0 \leq EX \leq 1 \Rightarrow EX = \frac{1}{2}$

ii) X tem distribuição de Laplace (exp. dupla) $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}, x \in \mathbb{R}$

$$f(\mu - x) = \frac{\lambda}{2} e^{-|\mu - x - \mu|} = \frac{\lambda}{2} e^{-|x|}$$
$$f(\mu + x) = \frac{\lambda}{2} e^{-|\mu + x - \mu|} = \frac{\lambda}{2} e^{-|x|}$$
X é s. l. de μ

Agora: $$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\lambda}{2} e^{-|x-\mu|} dx = \begin{pmatrix} x-\mu = y \\ x = y+\mu \\ dx = dy \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu)\frac{\lambda}{2} e^{-|y|} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (y+\mu)\frac{\lambda}{2} e^{y} dy + \int_{0}^{\infty} (y+\mu)\frac{\lambda}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \lambda y e^{\lambda y} dy + \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{y} dy +$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \lambda y e^{-\lambda y} dy + \frac{\mu}{2}\int_{0}^{\infty} \lambda e^{y} dy = \frac{-1}{2\lambda} + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\lambda} = \mu$$

2. Seja X uma variável aleatória tendo distribuição logística com densidade:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, x \in \mathbb{R}$$

(a) Prove que a distribuição de X é simétrica em torno de zero

$$\frac{f(x)}{f(-x)} = \frac{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}{\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}} = \frac{e^{-x}(1+e^{x})^2}{e^{x}(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} + e^{x} + 2}{e^{x} + e^{-x} + 2} = 1 \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

$\xRightarrow{\text{Teorema 1}}$ X é s. l. zero

(b) Determine se X tem esperança finita. Se tiver, ache o valor.

Assim $E|X| = \int_0^\infty x \, dF_{|X|}(x) = \int_0^\infty x \left[f(x) + f(-x)\right] dx = 2\int_0^\infty x \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\, dx = \begin{pmatrix} t = e^{-x} \\ x = -\log t \\ dx = -\frac{1}{t}dt \end{pmatrix}$

$$= 2\int_0^1 \log t \cdot \frac{t}{(1+t)^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt = -2\int_0^1 \frac{\log t}{(1+t)^2}\, dt = \begin{pmatrix} u = \log t & \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt \\ dv = \frac{1}{(1+t)^2}dt & \Rightarrow v = -(1+t)^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= -2\left\{\left[\frac{\log t}{1+t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{t(1+t)}\, dt\right\} = -2\left\{-\frac{\log t}{1+t} + \log\left(\frac{1+t}{t}\right)\right\}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -2\left[\log t^{\frac{1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1+t}{t}\right)\right] = -2\left[\frac{t}{1+t}\log t + \log(1+t)\right]_0^1 = 2\log 2$$

então X é integrável $\xRightarrow{\text{Exercício 1}}$ $EX = 0$

c) Obtenha a densidade de $Y = e^x$ e ache EY:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(\log Y) = \frac{1}{y}\dfrac{\frac{1}{y}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^2} = \dfrac{1}{(1+y)^2}, & y > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim: $EY = \int_0^\infty \frac{y}{(1+y)^2}\, dy = \begin{pmatrix} u = y, \; du = dy \\ dv = \frac{dy}{(1+y)^2}, \; v = \frac{-1}{1+y} \end{pmatrix} = \left[\frac{-y}{1+y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{1+y}\, dy =$

$$-1 + \log(1+y)\Big|_0^\infty = 1 + \infty = +\infty$$

3- Calcule EX se X possui densidade $f(x)$ onde

a) f é a densidade dada no exercício 6 do capít. 2

$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$ $\quad EX = \int_{-1}^1 x f(x)\, dx = \int_{-1}^1 cx^3\, dx = \left[\frac{cx^4}{4}\right]_{-1}^1 = 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ se $x > 0$ e $f(x) = 0$ se $x \leq 0$

Pelo item (c) do exercício 2: $EX = +\infty$

4. (a) Se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, qual é EX?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\, dx = \begin{pmatrix} y = \beta x \\ dy = \beta dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y}\, dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}$$

(c) Dizemos que X tem distribuição de Weibull se possui densidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Agora: $$EX = \int_0^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda \alpha x^{\alpha} e^{-\lambda x^{\alpha}}\, dx = \begin{pmatrix} y = \lambda x^{\alpha} \\ x = \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ dx = \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot y^{\frac{1}{\alpha}-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha \cdot y \cdot e^{-y} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\lambda^{1/\alpha}}\, dy = \lambda^{-1/\alpha} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y}\, dy =$$

$$= \lambda^{(-1/\alpha)} \cdot \Gamma(1 + 1/\alpha)$$

5- Sejam X e Y v. aleatórias independentes com distribuição comum $U[0,1]$. Calcule EZ e EW, onde $Z = \min(X,Y)$ e $W = \max(X,Y)$.

então $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$

Assim: $P(Z>z) = P(X>z, Y>z) \stackrel{\text{indep}}{=} P(X>z)\cdot P(Y>z) = \begin{cases} 1, & z<0 \\ (1-z)^2, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & z \geq 1 \end{cases}$

$(z-1)$

então $EZ = \int_0^1 P(Z>z)\,dz = \int_0^1 (1-z)^2\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ $\quad 2(1-z)(-1)$

Como Z é v.a não-negativa

$-2z\int_0^1 (1-z)\,dz = \int_0^1(-2z+2z^2)\,dz = -\frac{2z^2}{2}+\frac{2z^3}{3}\Big)\Big|_0^1 =$ $\quad -1+\frac{2}{3} = \frac{-3+2}{3} = \frac{-1}{3}$

Agora: $P(W \leq w) = P(X \leq w, Y \leq w) \stackrel{\text{indep}}{=} P(X\leq w)\cdot P(Y \leq w) = \begin{cases} 0, & w<0 \\ w^2, & 0 \leq w < 1 \\ 1, & w \geq 1 \end{cases}$

$2(1-z)(-1) = 2(z-1)$

$2z(z-1) = 2z^2-2z = \frac{2z^3}{3} - \frac{2z^2}{2} = \frac{2}{3}-1$

então $EW = \int_0^1 P(W>w)\,dw = \int_0^1 (1-w^2)\,dw = w\Big|_0^1 - \frac{w^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

W é v.a não negativa

6. Um jogador vai lançando uma moeda honesta. Ele pára depois de lançar ou duas caras sucessivas ou duas coroas sucessivas. Qual a esperança do número de lançamentos?

$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \cdots & & \\ \_ & \_ & \_ & \_ & & & \_ & \_ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & n-1 & n \end{array}$

Seja $n = 2K$ (par) $k = 1,2,\ldots$: $P(X>2K) = 2\cdot p^K\cdot(1-p)^K = 2\cdot\frac{1}{2}^K\cdot\frac{1}{2}^K = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2K} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n = 2K+1$ (impar) $k = 1,2,\ldots$ $\quad P(X>2K+1) = p^K(1-p)^{K+1} + p^{K+1}(1-p)^K = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2K+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Então: $EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n) = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

7- Uma urna contém n bolas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Uma pessoa tira uma bola e devolve, tira outra e devolve, continuando até tirar uma bola pela segunda vez. Seja X o número total de retiradas necessárias para obter esta repetição.

, ache a distribuição de X. (Sugestão: Ache $P(X>K)$)

Temos: $[X>K]$ = as K primeiras bolas retiradas são diferentes, $K = 2, \ldots, (n-1)$

então $P(X>K) = \dfrac{C_n^K}{n^K} = \dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n-K}{n} =$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{K}{n}\right)$$

$P(X>0) = P(X>1) = 1$. e $P(X>K) = 0$, $K \geq n$

(b) Mostre que

$$EX = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Temos que X é v.a. não negativa, então

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n) \overset{\text{item (a)}}{=} 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

8- Sejam X e Y v. aleat. Se $F_X(x) \leq F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, dizemos que X é estocasticamente maior que Y. Prove que se X é estocasticamente maior que Y, então $EX \geq EY$ (se EX e EY existem).

temos que $EX = \underbrace{\int_0^{\infty} (1-F_X(x))\,dx}_{I_x} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx}_{II_x}$ e $EY = \underbrace{\int_0^{\infty} (1-F_Y(y))\,dy}_{I_y} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0} F_Y(y)\,dy}_{II_y}$

Agora, como $F_X(x) \leq F_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{0} F_Y(x)dx \Rightarrow II_x \leq II_y$

e $(1-F_X(x)) \geq (1-F_Y(x))$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{\infty} (1-F_X(x))dx \geq \int_0^{\infty} (1-F_Y(x))dx \Rightarrow I_x \geq I_y$

então $EX \geq EY$

... componentes eletrônicos vão ser testados simultâneamente. Suponha que a vida em horas de cada componente é exponencialmente distribuída com parâmetro λ, e que as vidas dos componentes são independentes. Calcule:

(a) A esperança do tempo de falha até a primeira falha de um dos componentes.

$T_1 \sim exp(\lambda)$, $T_2 \sim exp(\lambda)$ indep

$[T > t] = [T_1 > t] \cap [T_2 > t]$, então

$$P(T>t) \overset{indep}{=} P(T_1>t) \cdot P(T_2>t) = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}.$$

Assim, como T é v.a não negativa

$$ET = \int_0^{\infty} P(T>t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t} = -\frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\lambda}$$

(b) A esperança do tempo de falha até ambos os componentes falharem

$[T \leq t] = [T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \Rightarrow P(T\leq t) \overset{indep}{=} P(T_1 \leq t) \cdot P(T_2 \leq t) =$

$= (1-e^{-\lambda t})^2 \Rightarrow$ Como T é v.a não negativa, $ET = \int_0^{\infty} P(T>t)dt = \int_0^{\infty} \left(-e^{-2\lambda t} + 2e^{-\lambda t}\right)dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}$

10. Dois jogadores lançam moedas simultaneamente até obterem o primeiro resultado (i.e., ou duas caras ou duas coroas). Se os dois lançam "cara" simultaneamente, ganha o jogador I; se ambos lançam coroa ganha o jogador II. Por exemplo, se os dois obtêm "cara" no primeiro lançamento, então o jogo termina, e o jogador I ganha o jogo. Suponha que a moeda do jogador I seja honesta, mas que a moeda do outro não necessariamente o seja, tendo probabilidade p de "cara", $0<p<1$

(a) Calcule a esperança do nº de lançamentos (i.e., o número de vezes que o jogador I lança a moeda até terminar o jogo)

X_i = resultado (i-ésimo lançamento) da moeda do jogador I: $\begin{cases} 0 \to \text{cara} & P_I(0) = 1/2 \\ 1 \to \text{coroa} & P_I(1) = 1/2 \end{cases}$

Y_i = " " " " " II: $\begin{cases} 0 \to \text{cara} & P_{II}(0) = p \\ 1 \to \text{coroa} & P_{II}(1) = (1-p) \end{cases}$

G_i^I = ganha I no lançamento i

G_i^{II} = " II " " "

C_i = nem I nem II ganham no lançamento i e continua o jogo.

temos: $P(G_i^I / C_{i-1}) = P(X_i + Y_i = 0) \overset{\text{indep}}{=} P(X_i=0) \cdot P(Y_i=0) = \frac{1}{2}p$

$i=2,3,\ldots$

$P(G_i^{II} / C_{i-1}) = P(X_i + Y_i = 2) \overset{\text{indep}}{=} P(X_i=1)\, P(Y_i=1) = \frac{1}{2}(1-p)$

$P(C_i / C_{i-1}) = P(X_i + Y_i = 1) \overset{\text{indep}}{=} P(X_i=0) \cdot P(Y_i=1) + P(X_i=1) \cdot P(Y_i=0) =$

$= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$

Seja Z = nº de lançamentos (até o jogo terminar)

temos $P(Z>n) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) \cdot P(C_3/C_1 \cap C_2) \cdots P(C_n / C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{n-1}) =$

$\overset{\text{indep}}{=} P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) \cdot P(C_3/C_2) \cdots P(C_n/C_{n-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 0,1,2$

então como Z é v.a.

$E(Z) = \sum^{\infty} P(Z>n) = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \ldots 1$

(i) Ache a probabilidade do jogador I ganhar o jogo (mais cedo ou mais tarde)

W = jogador ganha o jogo

W_i = jogador ganha o jogo no lançamento i.

$$W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \overset{\sigma\text{-adit}}{\Rightarrow} P(W) = \sum_{n=1}^{\infty} P(W_n)$$

Agora $P(W_n) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) \cdots P(C_n^c/C_{n-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} p = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot p$, $n = \ldots$

Então: $P(W) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n p = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} p = p$

11. Jogadores I e II têm Cr\$ 200 cada um. Lança-se uma moeda com probabilidade p de dar cara $(0<p<1)$. Se der cara, o jogador I recebe Cr\$ 1... se coroa, I paga Cr\$ 100 ao II. Continua-se lançando a moeda até um dos jogadores perder tudo, i.e., até um deles ficar com os Cr\$ 400. Determine EN, onde N é o número de lançamentos até terminar o jogo.

Seja X_i = nº de caras até inclusive a jogada i; só acaba o jogo em n se $|X_i - Y_i| = 2$

Y_i = nº de coroas " " " " i

Assim: $n = 2k$ (par): $[N > n] = [X_i = k] \cap [Y_i = k]$, $n = 1, 2, \ldots$

Então $P(N>n) \overset{\text{indep}}{=} p^k (1-p)^k = [p(1-p)]^k$, $n = 1, 2, \ldots$

Agora $n = 2k+1$ (ímpar): $[N>n] = ([X_i = k] \cap [Y_i = k+1]) \cup ([X_i = k+1] \cap [Y_i = k]) \Rightarrow$

$P(N>n) \overset{\text{indep}}{=} p^k (1-p)^{k+1} + (1-p)^k \cdot p^{k+1} = p^k (1-p)^k \cdot [p + (1-p)] =$

$= \ldots p^k (\ldots)^k$

Também: $P(N>0) - P(N>1) \doteq 0$

Assim $EN = \sum_{n=0}^{\infty} P(N>n) = 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P(N>2k)}_{\text{pares}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P(N>2k-1)}_{\text{ímpares}} =$

$$= 2 \cdot 2 \frac{p(1-p)}{1-p(1-p)} = \frac{4p(1-p)}{1-p(1-p)}$$

Prove que o critério de integrabilidade ainda vale se '$\geq$' é substituído por '$>$', i.e., X é integrável se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) < \infty$

Temos que X é integrável $\Leftrightarrow$ $|X|$ é integrável.

Agora $[|X|] \leq |X| \leq [|X|] + 1$

$$E[|X|] \leq E|X| \leq E[|X|] + 1$$, Porém $E[|X|] = \sum_{n=0}^{\infty} P(|X|>n) =$

$$= P(|X|>0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) \leq E[|X|] \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n)$

Assim: $$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) \leq E|X| \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) + 2$$

Então $E|X| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) < \infty$

13. Verifique que a desigualdade de Jensen ainda vale se a função φ é convexa em um intervalo (a,b) tal que $P(a<X<b)=1$, onde admitimos a possibilidade de $a=-\infty$ ou $b=+\infty$ (Sugestão. Para provar que $a<EX<b$ - note que a propriedade E.2 só implica

então $P(Y=0)=1$.)

Agora pela E2: $a<X<b \Rightarrow a\leq X\leq b \Rightarrow a\leq EX\leq b$. Agora, suponha

por absurdo que $EX=a \Rightarrow \begin{cases} E(X-a)=0 \\ X-a\geq 0 \end{cases} \overset{E(?)}{\Rightarrow} P(X-a=0)=1 \Rightarrow P(X=a)=1$ absurdo

e que $EX=b \Rightarrow \begin{cases} E(b-X)=0 \\ X-b\geq 0 \end{cases} \overset{E(?)}{\Rightarrow} P(X-b=0)=1 \Rightarrow P(X=b)=1$ absurdo

$a<EX<b$.

Então

Como X é convexa em (a,b) então:

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0)+\lambda(x-x_0)$$

e então:

$$E\varphi(X) \geq \varphi(x_0)+\lambda E(X-x_0)$$, Agora como $a<EX<b$, logo $x_0=EX$ e

$$E\varphi(X) \geq \varphi(EX).$$

14. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta $f(x,y)$. Verifique se $E(aX+bY)=aEX+bEY$ para este caso. (Suponha EX e EY finitos)

Sabemos que se X e Y tem densidade conjunta $f(x,y)$ então:

$$aEX+bEY = a\int x\, f_X(x)\,dx + b\int y\, f_Y(y)\,dy \quad \text{(I)}$$

Agora: Pelo teorema 3.1:

$$E(aX+bY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (ax+by)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy \qquad (II)$$

De (I) e (II), temos: $E(aX+bY) = aEX + bEY$

15- Suponha que $X \sim U[0,1]$. Determine os valores de t ($t \in \mathbb{R}$) tais que $E(X^t)$ é finita. Qual o valor da esperança nesse caso?

$$EX^t \overset{\text{teorema 3.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^t f_X(x)\, dx \quad , \text{ Agora se } X \sim U[0,1] \text{ então } f_X(x) = I_{[0,1]}$$

então

$$EX^t = \int_0^1 x^t\, dx = \left.\frac{x^{t+1}}{t+1}\right|_0^1 = \frac{1}{t+1}$$

agora: $EX^t < \infty \Rightarrow t \neq -1$. Assim $t \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow EX^t = \frac{1}{1+t} < \infty$

16- Calcule $E(e^X)$, onde X tem densidade logística $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $x \in \mathbb{R}$, utilizando o teorema 3.1. Compare com o resultado obtido no exercício 2(c).

Pelo teorema 3.1, temos:

$$Ee^X = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2}\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+e^{-x})^2}\, dx}_{I} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2}\, dx}_{II}$$

Agora:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1+e^{-x})^2}\, dx = \begin{pmatrix} y = e^x \\ dy = \frac{e^x}{y} dx \end{pmatrix} = \int_0^1 \frac{1}{y(1+\frac{1}{y})^2}\, dy = \int_0^1 \frac{y}{(1+y)^2}\, dy = \begin{pmatrix} z = 1+y \\ dz = dy \end{pmatrix} =$$

$$= \int_1^2 \frac{z-1}{z^2}\, dz = \left.\log z\right|_1^2 + \left.\frac{1}{z}\right|_1^2 = \log 2 - \frac{1}{2}$$

$\text{II} = +\infty$ pois $\frac{1}{(1+e^{-x})^2} \geq 0$;, $x \in \mathbb{R}_+$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+e^{-x})^2} = 1$

então $Ee^{x} = \text{I} + \text{II} = \log 2 - \frac{1}{2} + \infty = +\infty$

17- Calcule EY nos exercícios 6 e 7 do Capítulo 2.

exerc 6: $f(y) = \begin{cases} cy^2, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$ então $EY = \int_{-1}^{1} cy^3 dy = \frac{cy^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$

$f(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & cc \end{cases}$ então $EY = \int_0^1 3y^3 dy = \frac{3y^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

18- Seja X o tempo de espera até o primeiro sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli tendo probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Calcule EX^2.

$$P(X=k) = p\cdot q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \qquad q = 1-p \text{ e } 0<p<1$$

$$EX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(kq^k) = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$$, pois $|q|<1$. Agora

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots$$

$$-qS = -q^2 - 2q^3 - 3q^4 - \dots$$

$$S - qS = q + 2q^2 - q^2 + 3q^3 - 2q^3 + 4q^4 - 3q^4 + \dots = q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q}$$

então: $S(1-q) = \frac{q}{(1-q)} \Rightarrow S = \frac{q}{(1-q)^2}$. Então $EX^2 = p\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4}\right)$

$$EX^2 = p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3} = p\cdot\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

19- Suponha que a variável aleatória X tenha a seguinte densidade "triangular"

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{se } X<-1 \text{ ou } X>1 \end{cases}$$

Calcule EX e $\operatorname{Var}X$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

então: $\operatorname{Var}X = EX^2 - E^2X = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$

20. (a) Prove: se a variável aleatória X é limitada, então tem momentos toda ordem.

X é limitada $\Rightarrow \exists\, K > 0$ t.q. $|X| < K \overset{EC2}{\Rightarrow} E|X| < K \Rightarrow X$ é integrável

e: $|X| < K \Rightarrow |X|^t < K^t,\ t > 0 \Rightarrow E|X|^t < K^t \Rightarrow X^t$ é integrável.

Assim, X terá momentos finitos de toda ordem

(b) Seja A um evento aleatório. Calcule todos os momentos absolutos da variável aleatória $X = I_A$

Temos: $X^t = I_A^t = I_A \Rightarrow EX^t = EX = EI_A \overset{\text{teorema 3.1}}{=} \int_A f_X(x)\,dx = P(X \in A),\ \forall t$

(c) Demonstre que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então todos os momentos de X são finitos.

Para isto basta mostrar que os momentos de ordem par são finitos, e utilizar o corolário da proposição 3.2.

Então, seja $t<1$

$$E|Y|^t = \int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^t}{\pi(1+x^2)}dx + \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\pi(1+x^2)}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x^t}{\pi(1+x^2)}dx$$

Agora $E|X|^t = \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\int_0^1 \frac{x^t}{(1+x^2)}dx}_{\text{finito}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x^t}{(1+x^2)}dx}_{I}\right]$ onde:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x^t}{1+x^2}dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^t}{x^2}dx = \int_1^{\infty} x^{t-2}dx = \left[\frac{x^{t-1}}{t-1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{t-1}, \text{ pois } t<1$$

Logo, todos os momentos de ordem menor que 1 são finitos

21- Obtenha as variâncias de Z e W no exercício 5.

$$Z: \quad f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0\leq z\leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$W: \quad f_W(w) = \begin{cases} 2w, & 0\leq w\leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Agora, já sabemos que $EZ = \frac{1}{3}$, $EW = \frac{2}{3}$. Agora,

$$EZ^2 \overset{\text{teo 3.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)dz = \int_0^1 2z^2(1-z)\,dz = \left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{z^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$EW^2 \overset{\text{teo 3.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 f_W(w)dw = \int_0^1 2w^3dw = \left[\frac{w^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Então:

$$\text{Var}Z = EZ^2 - E^2Z = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\text{Var}W = EW^2 - E^2W = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

22- Através de experimentos estatísticos, determina-se que a duração de um certo tipo de chamada telefônica satisfaz a relação

$P(T>t) = a e^{-\lambda t} + (1-a) e^{-\xi t}$, $t\geq 0$ onde $0\leq a\leq 1$, $\lambda>0$, $\xi>0$ cte.

Calcule a média e a variância de T. II

Temos T é v.a não-negativa, então: $ET = \int_0^\infty P(T>t)\,dt = \int_0^\infty a e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty (1-a) e^{-\xi t} dt =$

$$= a \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt}_{E(\exp(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}} + b \underbrace{\int_0^\infty e^{-\xi t} dt}_{E(\exp(\xi)) = \frac{1}{\xi}} \Rightarrow ET = \frac{a}{\lambda} + \frac{(1-a)}{\xi}$$

Agora T^2 é também v.a não-negativa, então: $ET^2 = 2\int_0^\infty t\,P(T>t)\,dt =$

$$= 2\left\{ \frac{a}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt}_{E[(\exp(\lambda))^2] = \frac{1}{\lambda^2}} + (1-a) \underbrace{\int_0^\infty t e^{-\xi t} dt}_{E((\exp(\xi))^2) = \frac{1}{\xi^2}} \right\} = 2\left[\frac{a}{\lambda^2} + \frac{(1-a)}{\xi^2}\right]$$

$$\therefore \operatorname{Var} T = ET^2 - (ET)^2 = 2\left[\frac{a}{\lambda^2} + \frac{(1-a)}{\xi^2}\right] - \left[\frac{a}{\lambda} - \frac{(1-a)}{\xi}\right]^2$$

23. Prove que se X assume valores somente no intervalo $[a,b]$, então $a \leq EX \leq b$ e $\operatorname{Var} X \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ (Sugestão: Faça primeiro para $a=0$, $b=1$). Exiba uma variável aleatória que atinge a variância máxima.

Tomemos inicial um v.a.i. tal $0 \leq Y \leq 1 \overset{EC2}{\Rightarrow} 0 \leq EY \leq 1$

Agora, seja m uma mediana de Y então:

$$\operatorname{Var} Y = \operatorname{Var}(Y-m) \leq E(Y-m)^2 = \int_0^m (Y-m)^2 dF_Y + \int_m^1 (Y-m)^2 dF_Y \leq m^2 P(Y \leq m) + (1-m)^2 \ldots$$

$$\leq \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}(1-m)^2 = m^2 - m + \frac{1}{2} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Resumindo: $\operatorname{Var} Y \leq \frac{1}{4}$

Agora, tomemos $Y = (b-a)X + a \Rightarrow \operatorname{Var} Y = (b-a)^2 \operatorname{Var} X \leq \frac{(b-a)^2}{4}$

e $EY = (b-a)EX + a \Rightarrow a \leq EY \leq b$

A variável aleatória que atinge a variância máxima é $P(X=a) = P(X=b) =$

24- Calcule a variância da variável aleatória X, sob as seguintes condições:

(a) $X \sim$ Poisson(λ), onde $\lambda > 0$

Temos:

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \lambda \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j \lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right\} =$$

$$e^{-\lambda} \lambda \left\{ \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right\} = e^{-\lambda} \lambda \left\{ \lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} \right\} = \lambda^2 + \lambda$$

Então $\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 \overset{\text{etapa 1}}{=} \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

(b) $X \sim b(n,p)$ onde $0 < p < 1$

Temos:

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$(j = k-1) \quad = np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{(n-1)!}{((n-1)-j)!\,j!} p^j (1-p)^{[(n-1)-j]}$$

$$= np \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} j \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-j)!\,j!} p^j (1-p)^{[(n-1)-j]}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-j)!\,j!} p^j (1-p)^{(n-}}_{\text{f de probabilidade}} \right.$$

$EX^2 = np((n-1)p+1) = np(np-p+1) = n^2p^2 - np^2 + np$

Agora $\text{Var}\, Y = EX^2 - (EX)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$

c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$

Seja $Y = X - \mu \Rightarrow Y \sim N(0, \sigma^2)$ e $\text{Var}\, Y = \text{Var}\, X$

Então do exercício 20 b) : $EY^2 = \sigma^2$ e $EY = 0 \Rightarrow \text{Var}\, Y = EY^2 - (EY)^2 = \sigma^2$

assim $\text{Var}\, X = \sigma^2$

d) $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Então $EX^2 \overset{\text{teo 31}}{=} \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^\infty \dfrac{x^2 \beta^\alpha x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\,dx = \int_0^\infty \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}\,dx =$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^2} \cdot \int_0^\infty \underbrace{\frac{\beta^{(\alpha+2)} x^{(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} e^{-\beta x}}_{\text{densidade da } \Gamma(\alpha+2,\beta)}\,dx = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$$

Agora do exercício 4, temos: $EX = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Então: $\text{Var}\, X = EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

e) $X \sim U[a,b]$, onde $a < b$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Assim $EX^2 \overset{\text{teo 31}}{=} \int x^2\,dF = \int^b x^2\,dx = \dfrac{1}{(b-a)} \left[\dfrac{x^3}{3}\right]^b = \dfrac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$

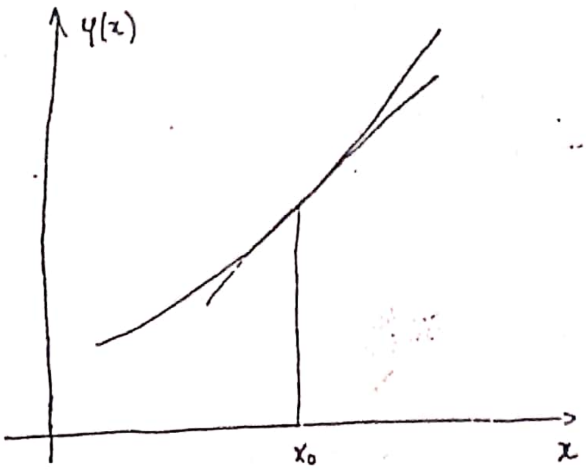
agora $EX = \frac{a+b}{2}$

então: $Var\, X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(b^3-a^3)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^3-4a^3-3b^3-3ab^2+3ba^2+3a^2 b}{12(b-a)}$

$$= \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

25. Demonstre que a desigualdade de Jensen é estrita, i.e, ...X), se a função φ é estritamente convexa e X não constante. (Sugestão. Reveja a prova de E4 e use a consequência (c) de E7. Observe que, pela convexidade estrita, as curvas φ e L da prova de E4 têm apenas um ponto em comum.)

Temos $\varphi(x)$ é estritamente convexa



Então para $X \neq X_0$, temos:

$$\varphi(x) > \varphi(x_0) + \lambda(X - X_0)$$

Agora: fazendo $X_0 = EX$ e como $P(X \neq X_0) = P(X \neq EX) = P(|X-EX|>0$ pois $P(X = X_0) < 1$, $\forall X_0 \in \mathbb{R}$ (X não é constante), então:

$E\varphi(x) > \varphi(x_0) + \lambda E(X-X_0) = \varphi(EX)$

II

26-(a) Sejam X e Y v.a. que só assumem os valores 0 e 1. Mostre que se $EXY = EX.EY$ então X e Y são independentes.

$$\left.\begin{array}{l} EX = P(X=1) \\ EY = P(Y=1) \\ EXY = P(X=1, Y=1) \end{array}\right\} \Rightarrow EXY = EX.EY \Rightarrow P(X=1, Y=1) = P(Y=1).P(Y=1) \quad (I)$$

Agora: $P(X=0, Y=1) = P(Y=1) - P(X=1, Y=1) \overset{(I)}{=} P(Y=1) - P(Y=1).P(Y=1) =$

$= P(Y=1).(1 - P(X=1)) = P(Y=1).P(X=0) \quad (II)$

E também $P(X=1, Y=0) = P(X=1) - P(X=1, Y=1) \overset{(I)}{=} P(X=1)(1 - P(Y=1)) =$

$= P(X=1).P(Y=0) \quad (III)$

e finalmente $P(X=0, Y=0) = P(X=0) - P(X=0, Y=1) \overset{(II)}{=} P(X=0)(1 - P(Y=1)) =$

$= P(X=0).P(Y=0) \quad (IV)$

Agora de (I), (II), (III) e (IV): X e Y são independentes.

(b) Se X assume apenas os valores a e b, Y assume os valores c e d e $Cov(X,Y) = 0$ então X e Y são independentes.

Então X e Y podem ser expressados da seguinte forma:

$X = (b-a)W + a$, onde W é v.a. que assume apenas os valores 0 e 1

$Y = (d-c)Z + c$, onde Z é v.a. que " " " " " "

Então: $X.Y = (b-a)(d-c)WZ + a(d-c)Z + c(b-a)W + ac$

e então $E(XY) = (b-a)(d-c)E(WZ) + a(d-c)EZ + c(b-a)EW + a.c$ (I)

agora: $\left.\begin{array}{l} EX = (b-a)EW + a \\ EY = (d-c)EZ + c \end{array}\right\} EX.EY = (b-a)(d-c)EW.EZ + a(d-c)EZ + ac +$ (II)

Então:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY \overset{(I),(II)}{=} (b-a)(d-c)[EWZ - EW \cdot EZ] = (b-a)(d-c)\operatorname{cov}(W,Z)$$

Agora se $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ então como $(a-b).(d-c) \neq 0$ pois $b>a$ e $d>c$

$$\operatorname{cov}(W,Z)=0 \overset{\text{item (a)}}{\Longrightarrow} W \text{ e } Z \text{ são indep} \overset{\text{propried. hereditária da indep}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow (b-a)W+a \text{ indep } (d-c)Z+c \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ são indep.}$$

27- Sejam $X_1,\dots,X_n$ v.a. independentes com $EX_j=\mu_j$ e $\operatorname{Var} X_j = \sigma_j^2$. Considere combinações lineares $Y=\sum_{j=1}^n p_j X_j$, onde $p_j>0$ e $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Prove que $\operatorname{Var} Y$ é minimizada pela escolha de:

$$p_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}}, \quad j=1,\dots,n$$

Temos, como $X_1,\dots,X_n$ são v.a indep.:

$$\operatorname{Var} Y = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^n p_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n p_j^2 (\operatorname{Var} X_j) = \sum_{j=1}^n p_j^2 \sigma_j^2$$

Então, o nosso problema é de mínimo condicionado, então usaremos o método do Lagrangeano, então:

$$\min_{p_1,p_2,\dots,p_j} \sum_{j=1}^n p_j^2 \sigma_j^2$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

$$\text{e } p_j > 0, \ \forall j=1,\dots,n$$

Então $L = \sum^n p_j^2 \sigma_j^2 + \lambda\left(1 - \sum^n p_j\right)$

I

então $\frac{\partial L}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow 2 p_j \sigma_j^2 - \lambda = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\lambda}{2} \cdot \sigma_j^{-2}$ (I)

assim: $\sum_{j=1}^{n} p_j = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2}}$ que substituindo em I

$p_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. (Que é pto de mínimo, pois $\frac{\partial^2 L}{(\partial p_j)^2} = 2\sigma_j^2 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$)

28- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com variância finita, demonstre que: $Var(XY) = Var(X) \cdot Var(Y) + (EX)^2 Var(Y) + (EY)^2 Var X$

Sol: $Var(XY) = E(XY - EXY)^2 = E\left(X^2Y^2 - 2XY\,EXY + [E(XY)]^2\right) =$

$\overset{\text{indep}}{=} EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2(EY)^2 \overset{\text{variâncias finitas}}{=} [Var X + (EX)^2] \cdot [Var Y + (EY)^2] - (EX)^2(EY)^2$

$= Var X \cdot Var Y + (EX)^2 Var Y + (EY)^2 \cdot Var X$

29- Sejam X e Y v.a. com variâncias finitas. Mostre que se $Var X \neq Var Y$ então $(X+Y)$ e $(X-Y)$ não são independentes:

$E[(X+Y)\cdot(X-Y)] = E[X^2 - Y^2] \overset{\text{variâncias finitas}}{=} EX^2 - EY^2 = Var X + (EX)^2 - Var Y - (EY)^2$

$= (EX + EY)(EX - EY) + (Var X - Var Y) = E(X+Y) \cdot E(X-Y)$

$+ Var X - Var Y$

Agora se $Var X \neq Var Y \Rightarrow X+Y$ e $X-Y$ não são independentes pois $E[(X+Y)(X-Y)] \neq [E(X+Y)][E(X-Y)]$ (Se fossem indep necessariamente a esperança do produto é o produto das esperanças.)

então $\frac{\partial L}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow 2 p_j \sigma_j^2 - \lambda = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\lambda}{2} \cdot \sigma_j^{-2}$ (J)

I

assim: $\sum_{j=1}^{n} p_j = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2}}$ o que substituindo em

$$p_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

(Que é pto de mínimo, pois $\frac{\partial^2 L}{(\partial p_j)^2} = 2\sigma_j^2 > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$)

28- Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com variância finita, demonstre que: $Var(XY) = Var(X) \cdot Var(Y) + (EX)^2 Var(Y) + (EY)^2 Var X$

R: $Var(XY) = E(XY - EXY)^2 = E\left(X^2Y^2 - 2XY\,EXY + [E(XY)]^2\right) =$

$$\overset{indep}{=} EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2(EY)^2 \overset{\text{variâncias finitas}}{=} [Var X + (EX)^2] \cdot [Var Y + (EY)^2] - (EX)^2(EY)^2$$

$$= Var X \cdot Var Y + (EX)^2 Var Y + (EY)^2 Var X$$

29- Sejam X e Y v.a. com variâncias finitas. Mostre que se $Var X \neq Var Y$ então $(X+Y)$ e $(X-Y)$ não são independentes:

$$E[(X+Y)\cdot(X-Y)] = E[X^2 - Y^2] \overset{\text{variâncias finitas}}{=} EX^2 - EY^2 = Var X + (EX)^2 - Var Y - (EY)^2$$

$$= (EX + EY)(EX - EY) + (Var X - Var Y) = E(X+Y) \cdot E(X-Y)$$

$$+ Var X - Var Y$$

Agora se $Var X \neq Var Y \Rightarrow X+Y$ e $X-Y$ não são independentes pois $E[(X+Y)(X-Y)] \neq [E(X+Y)][E(X-Y)]$ (Se fossem indep necessariamente a esperança do produto é o produto das esperanças.)

30. Seja X uma variável aleatória tendo distribuição $b(n,p)$. Mostre que X tem a mesma distribuição que $X_1 + \cdots + X_n$, onde os X_i são v.a. i.i.d que assumem apenas os valores 0 e 1 (Qual é $P(X_i = 1)$?). Utilize este resultado para calcular a esperança e a variância de X

Provaremos que isto vale quando $P(X_i=1) = p$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Agora:

$$[X_1 + \cdots + X_n = K] = \bigcup_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\\ \text{é permutação}\\ \text{de } (1,2,\ldots,n)}} \left([X_{i_1}=1] \cap \cdots [X_{i_K}=1] \cap [X_{i_{K+1}}=0] \cap \cdots [X_{i_n}=0]\right),$$

$K = 0,1,\ldots,n$

Então

$$P(X_1+\cdots+X_n = K) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\text{ é}\\ \text{permut. de } (1,2,\ldots,n)}} [P(X_1=1)]^K \, [1 - P(X_1=1)]^{n-K} =$$

$$= \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}, \quad K = 0,1,\ldots,n.$$

Assim: $X_1 + \cdots + X_n \sim b(n,p)$

Desta maneira: $EX = E(X_1+\cdots+X_n) = n\,E(X_1) = n\,(0\cdot(1-p) + p\cdot 1) = np$

$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}(X_1+\cdots+X_n) \overset{\text{indep}}{=} n \operatorname{Var}(X_1) =$ Agora: $EX_1^2 = 0^2(1-p) + p\cdot 1^2 = p$

então $\operatorname{Var} X_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Então: $\operatorname{Var} X = np(1-p)$

31. Demonstre que a covariancia é bilinear:

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j \operatorname{Cov}(X_i, Y_j),$$

onde os a_i e b_j são números reais. (Suponha que as X_i e Y_j ...

Como as variâncias são finitas então $EX_iY_j < \infty$ pela desigualdade de Schwartz-Cauchy, então existe $cov(X_i, Y_j)$ para todo (i,j). Agora:

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right)\right] - E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right) \cdot E\left(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right)$$

$$= E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j\right] - E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i\right) \cdot E\left(\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) =$$

linearidade da esperança

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j E(X_i Y_j) - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i (EX_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j E(Y_j)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j \left[E(X_i Y_j) - EX_i EY_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j \, cov(X_i, Y_j)$$

32- Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n)$ um vetor aleatório $(m+n)$ dimensional tal que $Var(X_i) = Var(Y_i) = 1$, $\rho(X_i, X_j) = \rho_1$, $\rho(Y_i, Y_j) = \rho_2$ $\forall i \neq j$ e $\rho(X_i, Y_j) = \rho_3$ $\forall i, j$. Se $U = X_1 + \cdots + X_m$ e $V = Y_1 + \cdots + Y_n$, então prove que o coeficiente de correlação entre U e V, $\rho(U,V)$ é igual a

$$\frac{\sqrt{m \cdot n} \, \rho_3}{\sqrt{1+(m-1)\rho_1}\sqrt{1+(n-1)\rho_2}}$$

temos que pelo exercício 31 que a covariança é bilinear, então:

$$cov(U,V) = cov\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, Y_j)$$

$$= m \cdot n \cdot \left(\rho_3 \cdot \sqrt{Var X_1}\sqrt{Var Y_1}\right) = m \cdot n \cdot \rho_3$$

Agora $\sigma_U^2 = Var\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} (Var\, X_i) + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i=1,2,\ldots m \\ j=1,2,\ldots m}} Cov(Y_i, X_j) =$

$$= m + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i=1,2,\ldots m \\ j=1,2,\ldots m}} \rho_1 = m + 2\, \frac{m.(m-1)}{2}\, \rho_1 =$$

$$= m\left(1 + (m-1)\rho_1\right)$$

Analogamente $\sigma_V^2 = Var\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (Var\, Y_j) + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i=1,2,\ldots n \\ j=1,2,\ldots n}} cov(Y_i, Y_j) =$

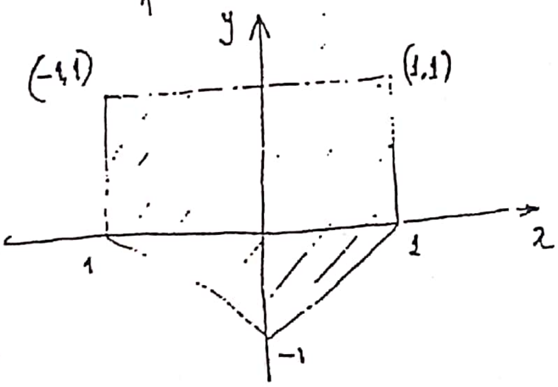
$$= n + 2\, \frac{n.(n-1)}{2}\, \rho_2 = n\left[1 + (n-1)\rho_2\right]$$

Então:

$$\rho(U,V) = \frac{cov(U,V)}{\sigma_U\ \sigma_V} = \frac{m.n\,\rho_3}{\sqrt{m}\sqrt{1+(m-1)\rho_1}\cdot\sqrt{n}\sqrt{1+(n-1)\rho_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m.n}\ \rho_3}{\sqrt{1+(m-1)\rho_1}\cdot\sqrt{1+(n-1)\rho_2}}$$

33- Seja (X,Y) uniformemente distribuído na seguinte região:



Calcule $Cov(X,Y)$

Temos $Cov(X,Y) = E(XY) - EX.EY$. Agora, X é simétrica em

[illegible]

Agora $A = \{(x,y): -1 \leq x \leq 1;\ x-1 \leq y \leq 1\}$ então Área $A = 3$

e $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

E então. $EXY = \int xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{x-1}^{1} xy\,\frac{1}{3}\,dx\,dy =$

$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{1} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x\left[\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2}\right] dx =$

$= \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}(-x^3 + 2x^2)dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right]$

assim $Cov(X,Y) = 2/9$

34. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $U[0,1]$, e sejam $X_{(1)} = \min(X,Y)$, $X_{(2)} = \max(X,Y)$. Calcule o coeficiente de correlação $\rho(X_{(1)}, X_{(2)})$.

Temos pelo exercício 5 que $EX_{(1)} = \frac{1}{3}$, $EX_{(2)} = \frac{2}{3}$

" " " 21 que $Var\,X_{(1)} = Var\,X_{(2)} = \frac{1}{18}$

Agora, pelo exercício 60.L1 do cap 2 que

$$f(x,y) = f_{X_{(1)},X_{(2)}}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

então: $E X_{(1)}X_{(2)} = \int xy\, f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_0^1\int_x^1 xy\,dy\,dx =$

$= 2\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = \int_0^1 x(1-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Assim $\rho(X_{(1)},X_{(2)}) = \frac{Cov(X_{(1)},X_{(2)})}{\ldots} = \frac{E(X_{(1)}X_{(2)}) - E(X_{(1)})E(X_{(2)})}{\ldots}\ \frac{1}{4} - \frac{2}{9}$

Temos: $X \sim U[0,1] \Rightarrow EX = \frac{1}{2}$ e $EX^2 \overset{LEU}{=} \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

Agora: $EW \overset{indep}{=} E(X+Y)\cdot E(Z) \overset{linear}{=} (EX+EY)\cdot EZ = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e $Var[(X+Y)\cdot Z] = Var[XZ+YZ] = Var\,XZ + Var\,YZ + 2\,Cov(XZ,YZ)$,

Mas $Var\,YZ \overset{i.d.}{=} Var(XZ) = E(XZ)^2 - (EXEZ)^2 \overset{indep}{=} E(X^2)E(Z^2) - (EX)^2(EZ)^2 =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{144}$

E $Cov(XZ,YZ) = E(XYZ^2) - E(XZ)E(YZ) \overset{indep}{=} EX\cdot EY\cdot EZ^2 - EX\cdot EY\cdot(EZ)^2$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{48}$

então $Var[(X+Y)\cdot Z] = \frac{2\cdot 7}{144} + \frac{1}{24} = \frac{7}{72} + \frac{1}{24} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$

36- Seja ρ o coeficiente de correlação entre X e Y. Determine $\rho(Z,W)$ em função de ρ, se $Z = aX+b$, $W = cY+d$, onde $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Temos que $Z = aX+b \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} EZ = aEX+b$

$W = cY+d \overset{c\neq 0}{\Longrightarrow} EW = cEY+d$

$EZ\cdot EW = ac\,EX\cdot EY + bc\,EY + da\,EX + bd$ (I)

$ZW = acXY + bcY + daX + bd \overset{a,c\neq 0}{\Longrightarrow} E(ZW) = ac\,E(X\cdot Y) + bc\,EY + da\,EX + bd$ (II)

$Cov(Z,W) = E(ZW) - EZ\cdot EW \overset{(I)e(II)}{=} ac\,E(X\cdot Y) - ac\,EX\cdot EY =$

$= ac(EXY - EXEY) = a\cdot c\cdot Cov(X,Y) = \frac{a\cdot c\,\rho(X,Y)}{\sqrt{Var X}\cdot\sqrt{Var Y}}$ (III)

Agora $a \neq 0$ e $\begin{cases} Var\,Z = a^2\,Var\,X \Rightarrow \sqrt{Var\,Z} = a\sqrt{Var\,X} \\ Var\,W = c^2\,Var\,Y \Rightarrow \sqrt{Var\,W} = c\sqrt{Var\,Y} \end{cases}$ (IV) então de (III) e (IV)

$$\rho(Z,W) = \frac{Cov(Z,W)}{\sqrt{VarZ}\cdot\sqrt{VarW}} = \frac{a\cdot c\ \rho(X,Y)}{a\sqrt{VarX}\cdot c\sqrt{VarY}} = \rho(X,Y) = \rho$$

37. Exiba um exemplo de uma sequência tal que $X_n(w) \to X(w)$ $\forall w \in \Omega$, com EX e EX_n finitos mas $EX_n \not\to EX$ (Sugestão: Seja $Y \sim U[0,1]$ e defina $X_n = nI_{[0<$

Seja $X_n = nI_{[0<y<\frac{1}{n}]} = \begin{cases} n, & 0<y<\frac{1}{n} \text{ então } P(X_n=n) = P(0<y<\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \\ 0, & y \notin (0,\frac{1}{n}) \text{ então } P(X_n=0) = 1-\frac{1}{n} \end{cases}$

Assim $EX_n = n\cdot P(X_n=n) + 0\cdot P(X_n=0) = n\cdot\frac{1}{n} = 1$

Agora $X_n(w) \to 0$, $\forall w \in \Omega$, Pois $[X_n = 0 \text{ para algum } n] =$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}[X_n=0] = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[X_n=0]^c\right)^c = (\emptyset)^c = \Omega$$

Agora $\lim_{n\to\infty} EX_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq EX$, pois $EX = E0 = 0$

Então $EX_n \not\to EX$

Capítulo 4:

Distribuição e esperança condicionais

1- Sejam X_1 e X_2 v.a. indep. cada uma com distribuição geométrica definida por:

$$P(X_i=n)=p(1-p)^n \quad , n=0,1,\dots \quad , i=1,2.$$

onde $0<p<1$ (Observação: esta versão da distribuição geométrica corresponde à distribuição do número de fracassos antes do primeiro sucesso em uma sequência de ensaios de Bernoulli)

(a) Calcule $P(X_1=X_2)$ e $P(X_1<X_2)$

$$P(X_1=X_2)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X_1=X_2=n)\overset{\text{indep}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}P(X_1=n)\cdot P(X_2=n)=\sum_{n=0}^{\infty}p^2\left[(1-p)^2\right]^n=\frac{p^2}{1-(1-p)^2}=\frac{p^2}{-p^2+2p}=\frac{p}{2-p}$$

Agora $P(X_1>X_2)=P(X_2>X_1)$ (simetria) então:

$$P(X_1>X_2)+P(X_2>X_1)+P(X_1=X_2)=1 \rightarrow P(X_1<X_2)=\frac{1-P(X_1=X_2)}{2} \Rightarrow$$

$$P(X_1<X_2)=\frac{\frac{2-p-p}{2-p}}{2}=\frac{2-2p}{4-2p}=\frac{1-p}{2-p}$$

(b) Determine a distribuição condicional de X_1 dado X_1+X_2

$$P(X_1=k/X_1+X_2=n)=\frac{P(X_1=k,X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{P(X_1=k,X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}\overset{\text{indep.}}{=}\frac{P(X_1=k)\cdot P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}$$

Agora: $P(X_1+X_2=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k,X_2=n-k)\overset{\text{indep}}{=}\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)\cdot P(X_2=n-k)=\sum_{k=0}^{n}p^2(1-p)^n=(n+1)p^2(1-p)^n$

Então: $$P(X_1=k/X_1+X_2=n)=\frac{p\cancel{(1-p)^k}\cdot p\cancel{(1-p)^{n-k}}}{(n+1)\cdot\cancel{p^2}\cancel{(1-p)^n}}=\frac{1}{n+1} \quad , k=0,1,\dots,n$$

Assim, esta distribuição é uniforme nos pontos $k=0,1,\dots,n$

2- Uma certa lâmpada tem uma vida, em horas, tendo distribuição exponencial de parâmetro 1. Um jogador acende a lâmpada e, enquanto a lâmpada estiver acesa, lança um dado equilibrado de quinze em quinze segundos. Qual o número esperado de 3's lançados pelo jogador até a lâmpada se apagar?

$$T \sim \exp\left(\frac{1}{3600\,s}\right)$$

$[T/15]$ = número de vezes que o jogador lança o dado enquanto a lâmpada estiver acesa.

O experimento lançamento do dado e obtenção ou não de 3 é um ensaio de Bernoulli condicionado a T.

$$P(X=k/T=t) = \binom{[T/15]}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{[T/15]-k}, \quad k = 0,1,\ldots,[T/15]$$

e $p = \frac{1}{6}$

Então $E(X/T) = p \cdot [T/15]$

e $EX = E\{E(X/T)\} = \frac{1}{6} E([T/15])$. Agora $P([T/15] \geq k) = P(T > 15k) = e^{-\frac{15k}{3600}} = e^{-\frac{1}{240}k}$

Assim: $E([T/15]) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{240}}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-1/240}}$. Assim $EX = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-e^{-1/240}} \cong 40{,}08$

3- Partículas chegam em um contador segundo um processo de Poisson com parâmetro λ. Em um determinado tempo t, produz-se uma voltagem, multiplicando o número de partículas que já entraram no contador por um fator que é independente deste número e que tem densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ache a probabilidade da voltagem produzida ser menor que 1

$$X = N.K \quad \text{onde} \quad \begin{cases} K \text{ tem } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ \text{indep} \\ N \sim \text{Poisson}(\lambda t) \end{cases}$$

Logo $P(X < 1) = P(0 \leq X < 1) = P(X=0) + P(0 < X < 1)$

Agora $P(X=0) = P(N=0, K \text{ qualquer}) + P(N \text{ qualquer}, \overset{\to 0}{K=0}) = e^{-\lambda t}$

Porém se: $0 < X < 1 \iff \begin{cases} 0 < K < \frac{1}{n} \\ n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(0 < K < \frac{1}{n}\right) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \begin{pmatrix} 1+x=y \\ dx = dy \end{pmatrix} = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{y^2}\, dy =$

$$= -\frac{1}{y}\Big|_1^{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Assim: $P(X<1) \overset{\text{indep}}{=} P(X=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(0<K<\frac{1}{n}\right) \cdot P(N=n) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!} e^{-\lambda t} =$

$$= e^{-\lambda t}\left[1 + \frac{1}{\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] = e^{-\lambda t}\left[1 + \frac{1}{\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 1 - \lambda t\right)\right] = \frac{1}{\lambda t}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

4. Mostre que se X é uma v.a. tendo distribuição simétrica em torno de zero, e se $P(X=0)=0$, então a distribuição condicional de X^2 dado que $X>0$ é igual a própria distribuição de X^2

X é s.t.z $\iff P(X \leq -x) = P(X \geq x), \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow P(0 < X \leq x) = P(-x \leq X < 0) \ \forall x > 0.$

e além disto $P(X=0)=0$ (I)

quero provar que:

$$P\left(X^2 \leq x / X>0\right) = P\left(X^2 \leq x\right)$$

Agora:

$$P(X^2\le x / X>0) = \frac{P(X^2\le x, X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(0<X\le\sqrt{x})}{P(X>0)}$$

$$P(X^2\le x / X<0) = \frac{P(X^2\le x, X<0)}{P(X<0)} = \frac{P(-\sqrt{x}\le X<0)}{P(X<0)}$$

são iguais por (I)

então:

$P(X^2\le x / X>0) = P(X^2\le x / X<0)$, $\forall x>0$ (II)

Então:

$$P(X^2\le x) = P(X^2\le x / X>0)\cdot P(X>0) + P(X^2\le x / X=0)\cdot \cancel{P(X=0)} + P(X^2\le x / X<0)P(X<0) =$$

$$= P(X^2\le x / X>0)\cdot\frac{1}{2} + P(X^2\le x / X<0)\cdot\frac{1}{2} \overset{(I)}{=} P(X^2\le x / X>0) \quad \forall x>0$$

(III)

e para $x=0$: $\begin{cases} P(X^2\le 0) = P(X=0) = 0 \\ \text{e } P(X^2\le 0 / X>0) = 0 \end{cases}$ (IV)

De (III) e (IV) temos que X^2 e $X^2/_{X>0}$ são ident. distribuídas (A distribuição é determinada pela f. dist. prob)

5. Partículas radioativas chegam a um contador segundo um processo de Poisson com taxa média de tres por segundo, mas o contador registra somente cada segunda partícula (i.e são registradas somente as partículas $n: 2, 4, 6 \ldots$)

(a) Seja X_t o número de partículas registradas até o tempo t. É $\{X_t : t\ge 0\}$ um processo de Poisson? Se for, qual o parâmetro? Se não for, explique o porquê.

$(Y_t)_{t\ge 0}$ é processo de Poisson $\Leftrightarrow$ $P(Y_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$

Agora,

$$P(X_t = k) = P(Y_t = 2k \text{ ou } Y_t = 2k+1) = \left[\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]e^{-\lambda t}$$

então X_t não é processo de Poisson

(b) Supondo que o contador registrou exatamente uma partícula durante o primeiro segundo, qual a probabilidade de que ele não registre mais partícula alguma antes do tempo 2?

$$P(X_2 = X_1 / X_1 = 1) = ?$$

$$P(X_2 = X_1 / X_1 = 1) = \frac{P(Y_2 - Y_1 = 1)}{P(Y_1 = 1)} = \frac{P(Y_1 = 2, Y_2 - Y_1 = 0) + P(Y_1 = 2, Y_2 - Y_1 = 1) + P(Y_1 = 3, Y_2 - Y_1 = 0)}{P(Y_1 = 2) + P(Y_1 = 3)}$$

Agora $Y_1 \sim \text{poisson}(\lambda)$

$Y_2 - Y_1 \sim \text{poisson}(\lambda)$ e são independentes: Então.

$$P(X_2 = X_1 / X_1 = 1) = \frac{P(Y_1 = 2)\left[P(Y_2 - Y_1 = 1) + P(Y_2 - Y_1 = 0)\right] \cdot P(Y_1 = 3)\, P(Y_2 - Y_1 = 0)}{P(Y_1 = 2) + P(Y_1 = 3)} = \frac{\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda t} (\lambda + 1) \cancel{e^{-\lambda t}} + \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda t} \cancel{e^{-\lambda t}}}{\frac{\lambda^2}{2} \cancel{e^{-\lambda t}} + \frac{\lambda^3}{6} \cancel{e^{-\lambda t}}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} \cancel{\lambda^2} \left(\frac{\lambda + 1}{2} + \frac{1}{6}\right)}{\cancel{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}\right)} = \frac{(3\lambda + 4)}{(\lambda + 3)} e^{-\lambda t}$$

6. Um contador recebe impulsos de duas fontes independentes A e B. Fonte A gera impulsos conforme um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, enquanto a fonte B gera impulsos segundo um processo de Poisson, com parâmetro $\xi > 0$. Suponha que o contador registre todo impulso gerado pelas duas fontes

(a) Seja X_t o número de impulsos registrados pelo contador até o tempo t, $t > 0$ ($X_0 = 0$). Explique porque $\{X_t : t > 0\}$ é um processo de Poisson (basta uma explicação intuitiva). Qual o parâmetro?

É um processo de Poisson porque:

a) incrementos indep

b) " estacionários

c) não chegam 2 simultaneamente e parâmetro $= \lambda + \xi$

(b) Qual a probabilidade de que o primeiro impulso registrado seja da fonte A.

$P(X_\lambda = 1 / X_{\lambda+\xi} = 1) = ?$ Muito similar as variáveis em um processo de Poisson temos.

$\overset{0}{\vdash}\cdots\underset{\lambda}{\vdash}\cdots\underset{\lambda+\xi}{\dashv}$ $\xrightarrow{\text{tempo}}$

X_λ indep $X_{\lambda+\xi} - X_\lambda$

$\downarrow$ Poisson(λ) $\downarrow$ Poisson(ξ)

Então $P(X_\lambda = 1 / X_{\lambda+\xi=1}) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\xi}$

(c) Dado que exatamente 100 impulsos foram contados durante a primeira unidade de tempo, qual a distribuição que você atribuiria ao numero emitido pela fonte A.

$$P(X_\lambda = k / X_{\lambda+\xi=100}) = \binom{100}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\xi}\right)^k \cdot \left(\frac{\xi}{\lambda+\xi}\right)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 100.$$

binomial$\left(100, \dfrac{\lambda}{\lambda+\xi}\right)$

: Diz-se que $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ tem distribuição multinomial com parametros $p_1, \ldots, p_k$ e n. onde $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, se

$$P(\underset{\sim}{X} = (j_1, \ldots, j_k)) = \frac{n!}{j_1! \cdots j_k!} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}$$ para toda escolha

de $j_1, \ldots, j_k$ inteiros não-negativos tais que $\sum_{l=1}^{k} j_l = n$

(a) Prove que $X_i \sim b(n, p_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

temos que: $$P(X_i = m) = \sum_{A} \frac{n!}{j_1! \cdots j_{i-1}!\, m!\, j_{i+1}! \cdots j_k!} p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdots p_i^{m} \cdots p_k^{j_k} =$$

$A \begin{cases} (j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_k) \\ \text{onde } j_l \geq 0 \text{ e} \\ \sum_{l=1, l\neq i}^{k} j_l = n-m \end{cases}$

$$\ldots) = \frac{n!}{m!}\, p_i^{m} \sum_{A} \frac{1}{j_1! \ldots j_{i-1}!\, j_{i+1}! \ldots j_k!}\, p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdots p_{i-1}^{j_{i-1}}\, p_{i+1}^{j_{i+1}} \cdots p_k^{j_k}$$

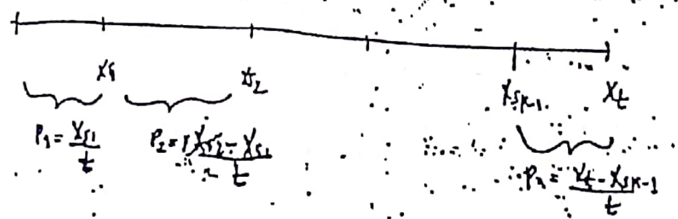
Agora dividindo e multiplicando por $(1-p_i)^{n-m} = (1-p_i)^{[j_1+j_2+\ldots+j_{i-1}+j_{i+1}+\ldots+j_k]}$ temos.

$$P(X_i = m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p_i^{m} (1-p_i)^{n-m} \cdot \underbrace{\sum_{A} \frac{(n-m)!}{j_1! \ldots j_{i-1}!\, j_{i+1}! \ldots j_k!} \left(\frac{p_1}{1-p_i}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{p_{i-1}}{1-p_i}\right)^{j_{i-1}} \left(\frac{p_{i+1}}{1-p_i}\right)^{j_{i+1}} \cdots \left(\frac{p_k}{1-p_i}\right)^{j_k}}_{\text{multinomial, então igual a 1}} =$$

c.q.m. $X_i \sim b(n, p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

13) Sejam $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k = t$. Mostre que no processo de Poisson dado que $X_t = n$ a distribuição condicional de $(X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \ldots, X_t - X_{s_{k-1}})$ é multinomial com parametros $\frac{s_1}{t}, \frac{s_2 - s_1}{t}, \ldots, 1 - \frac{s_{k-1}}{t}$ e n. (Note que essa distribuição não depende do parametro λ do processo)

Dado que até o instante t chegaram n partículas, a distribuição dos tempos de chegada é igual a de uma amostra aleatória de n elementos de uma v.a uniforme em $[0,t]$. Assim, a distribuição em questão será:



$$P(X_{s_1} = j_1, X_{s_2} - X_{s_1} = j_2, \ldots, X_t - X_{s_{k-1}} = j_k \mid X_t = n) = \frac{n!}{j_1! \ldots j_k!}\, p_1^{j_1} \ldots p_k^{j_k}$$ para

$(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ tal que $\sum_{i=1}^{k} j_i = n$ e j_i inteiro não negativo.

$\longrightarrow$ ... 0

7. Uma exposição funciona pelo período de T horas. Visitantes chegam à exposição segundo um processo de Poisson com taxa λ visit/hora. Os visitantes permanecem na exposição até o fim do período. Calcule o tempo médio total gasto pelos visitantes na exposição (Sugestão. Dado que chegou um só visitante durante as T horas, qual a média do tempo que ele permanece na exposição). IV-8

Seja $Y(T)$ = nº de visitantes que chegam até T: $\Rightarrow Y(T) \sim \text{Poisson}(\lambda T)$.

e sendo $T_1, T_2, \ldots, T_n$ os tempos de chegada dos n visitantes,

temos que T_i indep T_j e $T_i \sim U[0,T]$ $i = 1,2,\ldots n$. e $E(T_i) = \frac{T}{2}, \forall i$

então, seja X = tempo médio total gasto pelos visitantes na exposição:

$$X/_{Y=n} = \sum_{i=1}^{n} (T - T_i) = nT - \sum_{i=1}^{n} T_i$$

Agora, então $E(X/_{Y=n}) = nT - \sum_{i=1}^{n} ET_i = nT - n\frac{T}{2} = n\frac{T}{2}$

Então $E(X) = E\{E(X/_{Y=n})\} = \frac{T}{2} En = \lambda \frac{T^2}{2}$

9. Suponha que o número de passas num bolo inglês tenha distribuição de Poisson com parâmetro 60. Um jogador compra um bolo, tira todas as passas uma por uma e reparte as passas entre ele e você da seguinte maneira: depois da extração de cada passa ele joga uma moeda equilibrada dando a passa a você se der cara, ficando ele mesmo se der coroa. Qual a distribuição do nº de passas que você recebe? A esperança?

X = nº de passas que você recebe.

Y ... passas extraídas.

Assim $X/_{Y=n} \sim b(n; \frac{1}{2})$

então: $$P(X=K) = \sum_{n=K}^{\infty} P(X=K/_{Y=n}) \cdot P(Y=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n-K)!\,K!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^K}{K!} \cdot \sum_{n=K}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-K}}{(n-K)!} = \frac{e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^K e^{\frac{\lambda}{2}}}{K!} = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^K e^{-\lambda}}{K!}$$

ou seja: $X \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad \left(\frac{\lambda}{2} = 30\right)$

Agora $E(X/_{Y=n}) = n \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow EX = E\{E(X/_{Y=n})\} = \frac{1}{2} E n = \frac{1}{2} 60 = 30$

10- Sejam X e Y independentes tais que $X \sim b(m,p)$ e $Y \sim b(n,p)$. Obtenha a dist. condicional de X dado $X+Y$. Como se chama essa distribuição.

Sabemos que se $\begin{matrix} X \sim b(m,p) \\ Y \sim b(n,p) \end{matrix}$ indep $\Rightarrow X+Y \sim b(m+n, p)$

Assim: $$P(X=K/_{X+Y=z}) = \frac{P(X=K, X+Y=z)}{P(X+Y=z)} \overset{\text{indep}}{=} \frac{P(X=K) \cdot P(Y=z-K)}{P(X+Y=z)} =$$

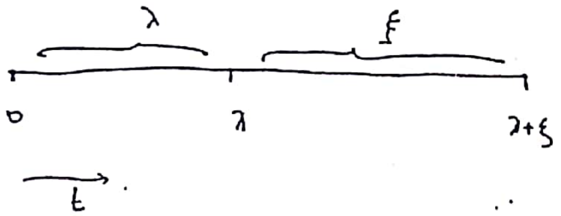
$$= \frac{\binom{m}{K} \cancel{p^K (1-p)^{m-K}} \binom{n}{z-K} \cancel{p^{z-K} (1-p)^{n-(z-K)}}}{\binom{m+n}{z} \cancel{p^z (1-p)^{m+n-z}}} = \frac{\binom{m}{K}\binom{n}{K-z}}{\binom{m+n}{z}}$$

que é uma distribuição hipergeométrica com $N = m+n$ e $D = m$ ∴

11. Duas fontes radioativas, I e II, emitem partículas (independentemente) segundo Processos de Poisson com, respectivamente, parâmetros λ e ξ. Seja Z_t o número total de partículas emitidas até o instante t, para $t>0$. Dado que $Z_t = k$, onde $k>0$, qual a probabilidade condicional da última partícula emitida ter sido da fonte I? (A resposta é igual a do exercício 6(b). Um possível método de verificação: use o exercício 16(e) do cap.1, com A_n o evento "n partículas emitidas até o instante t pela fonte I")

temos $X_{1t} \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X_{2t} \sim \text{Poisson}(\xi)$ indep $\Rightarrow Z_t = X_{1t} + X_{2t} \sim \text{Poisson}(\lambda+\xi)$

Mergulhando no processo de Poisson:



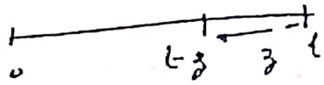
Assim dado que chegam k partículas ($X_{\lambda+\xi} = k$), os tempos de chegada $T_1, T_2, \dots, T_k$ são v.a indep uniformes em $[0, \lambda+\xi]$ então, a probabilidade da última ter sido a fonte I é:

$$P(\text{último é fonte I}) = \frac{\lambda}{\lambda+\xi}$$

12- Considere um processo de Poisson com parâmetro $\lambda>0$.

(a) Para $t>0$ fixo, seja Z_t o tempo transcorrido até o instante t desde a ocorrência (chegada) imediatamente anterior. ($Z_t = t$ se não houve nenhuma chegada em $(0,t]$.) Calcule a distribuição de Z_t. (Note que essa distribuição

Então: $(X_t)_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson



Z_t = tempo transcorrido até o instante t desde a ocorrência imed. anterior

Para $z<0$: $P(Z_t \leq z) = 0$ (pois Z é v.a. não-negativa), $P(Z_t = 0) = P(\text{chega 1 partícula em } t=0) = 0$

Agora para $0<z<t$: $P(Z_t > z) = P(\text{não ocorrer nenhuma chegada em } [t-z, t]) =$

$= e^{-\lambda z}$ então $P(Z_t \leq z) = 1 - e^{-\lambda z}$

Agora para $z \geq t$: $P(Z_t = t) = P(\text{não ocorrer nenhuma chegada em } [0,t]) =$

$= e^{-\lambda t}$ e também $P(Z_t \leq t) = 1 \Rightarrow P(Z_t \leq z) = 1$ para $z \geq t$

Então a distribuição de Z_t será:

$$P(Z_t \leq z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & 0 < z < t \\ 1, & z \geq t \end{cases}$$

Obs: Quando $t \to \infty$, esta distribuição converge fracamente para a distribuição exponencial(λ)

(b) Se T_{n+1} é o tempo transcorrido entre a n-ésima chegada e a chegada $n+1$, qual a distribuição de T_{n+1}? Determine a distribuição de W_t = tempo que transcorre entre o instante t e a próxima chegada.

Sabemos que os tempos de espera são v.a. indep. e ident. distribuídas com distrib. $exp(\lambda)$, então $T_{n+1} \sim exp(\lambda)$, assim:

$$P(T_{n+1} \leq z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z > 0 \end{cases}$$

Agora, veja

W_t é v.a não degenerada e:

$P(W_t = 0) = P(\text{ocorrer uma chegada em } t) = 0$

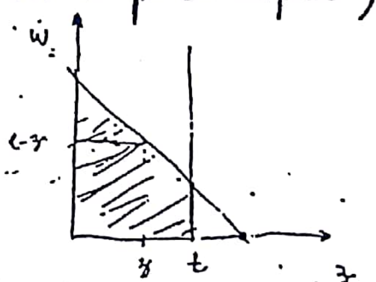
Agora $w > 0$: $\begin{cases} P(W_t > w) = P(\text{não ocorrer nenhuma chegada em } [t, t+w]) = e^{-\lambda w} \\ \Rightarrow P(W_t \leq w) = 1 - e^{-\lambda w} \end{cases}$

então W_t tem distribuição:

$$P(W_t \leq w) = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda w}, & w > 0 \end{cases}$$

(c) Mostre que $Z_t + W_t$, o tempo entre as chegadas que "cercam" o instante t é estocasticamente maior que T_{n+1}, i.e., $P(Z_t + W_t \leq x) < P(T_{n+1} \leq x)$ $\forall x > 0$ (Esse é o "paradoxo do tempo de espera")

temos Z_t e W_t são independentes e então



para $e \leq t$, temos:

$$P(Z_t + W_t \leq e) = \int_0^e \int_0^{e-z} \lambda^2 e^{-\lambda z} e^{-\lambda w}\, dw\, dz =$$

$$= \int_0^e \lambda e^{-\lambda z} \left[-e^{-\lambda z}\right]_0^{e-z} dz = \int_0^e \lambda e^{-\lambda z}\left(1 - e^{-\lambda(e-z)}\right) dz =$$

$$= \int_0^e \lambda e^{-\lambda z} dz - \int_0^e \lambda e^{-\lambda e} dz = 1 - e^{-\lambda e} - \lambda e\, e^{-\lambda e} < 1 - e^{-\lambda e} \quad (I)$$

agora para $e \geq t$, temos

$$P(Z_t + W_t \leq e) = \int^t \int^{e-z} \lambda^2 e^{-\lambda z} e^{-\lambda w} dw\, dz = \int^t \lambda e^{-\lambda z} dz - \int^t \lambda e^{-\lambda e} dz = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda e}$$

Assim $e \geq t$:

$$P(Z_t + W_t \leq e) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda e}$$

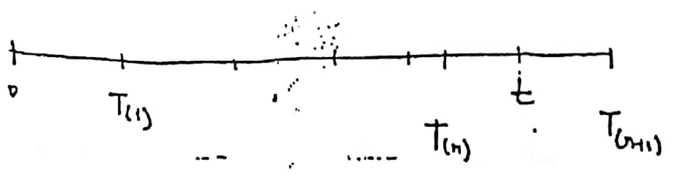
Agora $e \geq t \Rightarrow e^{-\lambda t} \geq e^{-\lambda e}$ então como $\lambda t e^{-\lambda e} > 0$, temos:

$$P(Z_t + W_t \leq e) < 1 - e^{-\lambda e} \qquad (\text{II})$$

Assim de (I) e (II): $Z_t + W_t$ é estocasticamente maior que T_{n+1}.

13- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ uma seq. de v.a iid tendo dist exp com média $\frac{1}{\lambda}$. Para $t > 0$ fixo, seja $N = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, onde $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, de modo que N é o índice da última soma parcial menor ou igual a t. Mostre que N tem distribuição de Poisson com média λt (Sugestão: "Mergulhe" a sequência no processo de Poisson)

X_i é exponencial com média $\frac{1}{\lambda}$ então $X_i \sim exp(\lambda)$, agora "mergulhando" no processo de Poisson $(X_t)_{t \geq 0}$ com parâmetro λ onde $X_i = T_{(i)}$ o tempo decorrido entre a $(i-1)$ésima e a i-ésima chegada. $T_{(1)}, T_{(2)}, \ldots$ são v.a iid com dist $exp($



$$[N = m] = [\max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}] = [T_{(m)} \leq t < T_{(m+1)}] = [X_t = m]$$

então $$P(N = m) = P(X_t = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{\lambda t} \sim \text{poisson}(\lambda t) \Rightarrow$$

$E N = \lambda t$.

14- Suponha que Y possua densidade $f_Y(y)$ e que a distribuição condicional de Y, dado que $Y=y$, possua densidade $f(x/y)$ para todo y (ou pelo menos para "quase todo" valor possível de Y). Demonstre que:

$$f(x,y) = f_Y(y) \cdot f(x/y) \text{ é a densidade conjunta de } X \text{ e } Y.$$

(Obs: foi provado no caso III que $f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ se existe densidade conjunta, de modo que a distribuição conjunta determina $f_Y(y)$ e $f(x/y)$. Este exercício diz que $f_Y(y)$ e $f(x/y)$ determinam $f(x,y)$.)

Temos pela Relação 4.2 que:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} F_X(x/_{Y=y})\, dF_Y(y)$$

Agora se Y e X/y são dist. absol. contínuas então:

$$\begin{cases} dF_Y(y) = f_Y(y)\,dy \\ F_X(x/_{Y=y}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{X/Y=y}(x)\, dx \end{cases}$$

Assim:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{x} f_{X/Y=y}(x)\, dx\right] f_Y(y)\, dy \overset{\text{Linearidade da Integral de Stieltjes}}{=} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X/Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, d$$

Então, pela definição de densidade de probabilidade: $f_{X,Y}(x,y) = f_{X/Y=y}(x) \cdot f(y)$ q.t.p.

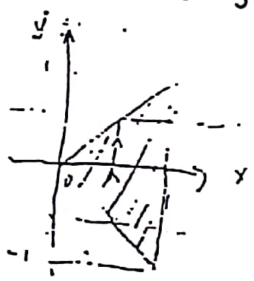
15- Considere o seguinte experimento de duas etapas: primeiro, escolhe-se um ponto x de acordo com a distribuição uniforme em $(0,1)$; depois escolhe-se um ponto de y de acordo com a dist. uniforme em $(-x,x)$. Se o vetor aleatório (X,Y) representar o resultado do experimento, qual será a densidade marginal de Y? A densidade marginal de Y? A densidade condicional de X dado Y? (Sugestão: F v... ...)

temos que $X \sim U[0,1] \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 1, & c.c \end{cases}$

e $Y/_{X=x} \sim U[-x,x] \Rightarrow f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} 0, & x \notin [-x,x] \\ \frac{1}{2x}, & c.c \end{cases}$

Utilizando o exercício 14: $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y/X=x}(y) \cdot f_X(x)$ q.t.p ente

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & x \in A \quad \text{onde } A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -x \leq y \leq x\} \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$



e portanto: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_{|y|}^{1} \frac{1}{2x}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_{|y|}^{1} = -\frac{1}{2}\ln|y|, \quad -1 \leq y \leq 1$$

Agora, aplicando o caso III - X e Y possuem densidade conjunta:

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2x}}{-\frac{1}{2}\ln|y|} = \dfrac{-x^{-1}}{\ln|y|}, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

16. Observam-se duas lâmpadas durante suas vidas úteis. Suponha as vidas independentes e exponenciais de parâmetro λ. Sejam X o tempo de queima da primeira a queimar e Y o tempo da segunda queimar ($X \leq Y$)

(a) Qual a distribuição condicional de X dado Y?

Sejam $Z_1 \sim \exp(\lambda)$, $Z_2 \sim \exp(\lambda)$ indep e $X = \min(Z_1, Z_2)$, $Y = \max(Z_1, Z_2)$

então: $P(X > x) = P(Z_1 > x, Z_2 > x) \overset{\text{indep}}{=} e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} = e^{-2\lambda x} \cdot I_{[x \geq 0]}$

assim: $f_X(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \dfrac{\partial (1 - e^{-2\lambda x})}{\partial x} = 2\lambda e^{-2\lambda x} \cdot I_{[x \geq 0]}$

e: $P(Y \leq y) = P(Z_1 \leq y, Z_2 \leq y) \overset{\text{indep}}{=} (1 - e^{-\lambda y})^2 \cdot I_{[y \geq 0]}$

então $f_Y(y) = \dfrac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left[(1 - e^{-\lambda y})^2\right]}{\partial y} = 2(1 - e^{-\lambda y}) \cdot \lambda e^{-\lambda y} \cdot I_{[y \geq 0]}$

Agora: $P(X \leq x, Y \leq y) = P(Y \leq y) - P(X > x, Y \leq y) = P(Y \leq y) - P(x < Z_1 \leq y, x < Z_2 \leq y)$

$\overset{\text{indep}}{=} P(Y \leq y) - [F_{Z_1}(y) - F_{Z_1}(x)] \cdot [F_{Z_2}(y) - F_{Z_2}(x)] =$

$= [1 - e^{-\lambda y}]^2 - [e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}]^2 \; I_{[0 \leq x \leq y]}$

assim: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2[1 - e^{-\lambda y}]\lambda e^{-\lambda y} - 2[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}]\lambda e^{-\lambda y}\right] =$

$= 2\lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \, I_{[0 \leq x \leq y]}$

então, usando o caso III, temos:

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}}{2(1 - e^{-\lambda y})\lambda e^{-\lambda y}} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{(1 - e^{-\lambda y})}, & 0 \leq x \leq y \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(b) Qual a distribuição de Y/X ?

Novamente usando o caso III :

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}}{2\lambda e^{-2\lambda x}} = \lambda e^{-\lambda(y-x)}, & 0 \leq x \leq y \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

17- Suponha que (X,Y) possua distribuição uniforme em A, onde A é uma região área positiva. Mostre que a distribuição condicional de X dado Y=y é uniforme em A_y, a secção de A por y, onde definimos $A_y = \{x : (x,y) \in A\}$

$$(X,Y) \sim U(A) \iff P(B \subset \mathcal{B}^2) = \frac{\text{área}(B \cap A)}{\text{área}(A)}$$

Agora como área(A) > 0 ⇒ (X,Y) é v. aleatória absolutamente contínua e

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{I_A(x,y)}{\text{área } A} \quad \text{então} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \frac{1}{\text{área } A}\int_{-\infty}^{\infty} I_A(x,y)\,dx = \frac{\text{área } A_y}{\text{área } A}$$

Então, usando novamente o caso III: $\bar{y}$ t.q. área $A_{\bar{y}} > 0$ temos:

$$f_{X/Y=\bar{y}}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,\bar{y})}{f_Y(\bar{y})} = \frac{\dfrac{I_A(x,\bar{y})}{\text{área } A}}{\dfrac{\text{área } A_{\bar{y}}}{\text{área } A}} = \frac{I_{A_{\bar{y}}}(x)}{\text{área } A_{\bar{y}}}$$, então $X/_{Y=\bar{y}}$ é uniforme em $A_{\bar{y}}$

8- Demonstre que se $P(X \in B / Y = y) = P(X \in B)$ para todo $B \in \beta$ e $y \in \mathbb{R}$, então X e Y são independentes, de modo que X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional não depende do valor de Y. (Sugestão. Mostre que a função de distribuição conjunta fatora)

(⇒) Temos que $P(X \leq x / Y=y) = P(X \leq x) \Rightarrow F_{X/Y=y}(x) = F_X(x)$

então, como pela relação 4.2

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} F_{X/Y=y}(x)\, dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} F_X(x)\, dF_Y(y) = F_X(x)\int_{-\infty}^{y} dF_Y(y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

⇒ X e Y são independentes.

Agora, pelo caso II vemos que X, Y independentes $\Rightarrow P(X\in B / Y=y) = P(X\in B)$ $\forall B\in \mathcal{B}$ e $y \in \mathbb{R}$ IV-18

19. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x)$, onde f é contínua. Qual a distribuição condicional de X dada $|X|$? Verifique sua resposta (Observação: a hipótese de continuidade de f não é necessária. Tente verificar a relação 4.1 sem essa hipótese)

Dado que $|Y| = y$ os valores possíveis de X são $-y$ e y então a distribuição de X dado $|X| = y$ deverá ser concentrada nos pontos $-y$ e y e, pelo princípio da preservação das chances relativas:

$$P(X=y / |X|=y) = \frac{f_X(y)}{f_X(y)+f_X(-y)} \quad e \quad P(X=-y / |X|=y) = \frac{f_X(-y)}{f_X(y)+f_X(-y)}$$

Agora, verifiquemos a relação 4.1:

Seja $B \subset \mathcal{B}$ onde B é intervalo aberto de extremos racionais que contém y e $I = (r_1, r_2) \cup (-r_2, -r_1)$ onde $r_1 < y < r_2$

$$\overbrace{\qquad}^{B}$$ $-r_2 \; -y \; -r_1 \qquad r_1 \; y \; r_2$

então $$\lim_{\Delta y \to 0} P(B\in\mathcal{B} / y\in I) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{P(B\in\mathcal{B}, y\in I)}{P(y\in I)}$$

Agora: $$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{P(y\in I)}{\Delta y} = \lim_{\substack{r_1\to y\\ r_2\to y}} \frac{\int_{-r_2}^{-r_1} f_X(y)dy + \int_{r_1}^{r_2} f_X(y)dy}{\Delta y} = f_X(-y) + f_X(y)$$, pois f é contínua em $-y$ e y

e $$\lim_{\Delta y\to 0} P(B\in\mathcal{B}, y\in I) = \lim_{\substack{r_1\to y\\ r_2\to y}} \int_{r_1}^{r_2} f_X(y)dy = f_X(y)$$, pois f é contínua em y.

então $$P(X=y / |X|=y) = \frac{f_X(y)}{f_X(y)+f_X(-y)}$$. Analogamente para $-y$ temos:

$$P(X=-y / |X|=y) = \frac{f_X(-y)}{f_X(y)+f_X(-y)}$$. Isto define a distribuição condicional.

20- Sejam X e Y independentes, cada uma com distribuição $N(0,\sigma^2)$. Qual a distribuição condicional de X dada $\sqrt{X^2+Y^2}$? (Sugestão. Exemplo 10 e o princípio da

Sabemos pelo exemplo 10 que::

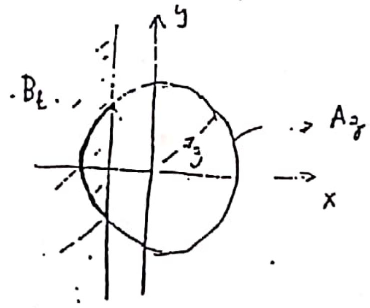
$$(X,Y)/_{\sqrt{X^2+Y^2}=z} \text{ é uniforme em } A_z \text{, onde } \begin{cases} A_z = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = z\} \\ z>0 \end{cases}$$

ou seja $\quad f_{(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}=z}(x,y) =: \frac{1}{2\pi z} I_{A_z}(x,y)$

Agora aplicando o princípio da substituição temos que:

$$(X,Y)/_{\sqrt{X^2+Y^2}=z} \sim \left(X/_{\sqrt{X^2+Y^2}=z} \,,\; Y/_{\sqrt{X^2+Y^2}=z} \right)$$

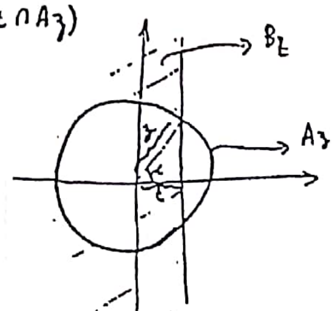
então: $\quad f_{X/z,\,Y/z}(x,y) = f_{(x,y)/z}(x,y) = \frac{1}{2\pi z} I_{A_z}(x,y)$



Agora, como se $B_t = \{(x,y) : x \leq t \text{, } y \text{ qualquer}\}$

então: $\quad F_{X/z}(t) = \int_{B_t} dF_{(X/z,\,Y/z)}(x,y) = \int_{B_t} f_{X/z,\,Y/z}(x,y)\, dx\, dy = \int_{B_t} \frac{1}{2\pi z} I_{A_z}(x,y)\, dx\, dy =$

$$= \frac{1}{2\pi z} \int_{B_t \cap A_z} dx\, dy = \frac{1}{2\pi z} \text{comp}(B_t \cap A_z)$$



Agora para $0 < t < z$, temos que

$$\text{comp}(B_t^c \cap A_z) = z \cdot 2\alpha = 2z \cdot \arccos\left(\frac{t}{z}\right)$$

assim: $\quad F_{X/z}(t) = \dfrac{2\pi z - \text{comp}(B_t^c \cap A_z)}{2\pi z} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{t}{z}\right)$

Então, por analogia, observa-mos que X/z é simétrica em torno de zero e, assim:

$$F_{X/z}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -z \\ \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{t}{z}\right), & -z < t \leq 0 \\ 1 - \arccos(t \ldots & 0 < t < z \ldots \end{cases}$$

Agora como X/Z é simétrica em torno do zero e limitada (então integrável) temos que IV-2

$$E\left(X/\sqrt{X^2+Y^2}\right)=0.$$

21. Explique como as soluções nos casos I e II do § 4.2 podem ser consideradas conseqüência do princípio de preservação das chances relativas.

caso I: Y é v.a discreta e assume os valores $y_1, y_2, \ldots$

Temos que se $B_1=[X\le x_1]$, $B_2=[X\le x_2]$, assim para y_n t.q $P(Y=y_n)>0$:

$$\frac{P(X\le x_1/Y=y_n)}{P(X\le x_2/Y=y_n)}=\frac{\dfrac{P(X\le x_1, Y=y_n)}{P(Y=y_n)}}{\dfrac{P(X\le x_2, Y=y_n)}{P(Y=y_n)}}=\frac{P(X\le x_1, Y=y_n)}{P(X\le x_2, Y=y_n)}$$

Então, as chances relativas são preservadas e podemos considerar a divisão por $P(Y=y_n)$ como uma normalização pois $P(Y=y_n)=\lim_{x\to\infty} P(X\le x, Y=y_n)$

caso II: X e Y são variáveis aleatórias independentes, então se $P(Y=y)>0$

$$\frac{P(X\le x_1/Y=y)}{P(X\le x_2/Y=y)}=\frac{P(X\le x_1)}{P(X\le x_2)}=\frac{P(X\le x_1)\cdot P(Y=y)}{P(X\le x_2)\cdot P(Y=y)}\overset{\text{indep}}{=}\frac{P(X\le x_1, Y=y)}{P(X\le x_2, Y=y)}$$

Então, as chances relativas também neste caso são preservadas e podemos considerar que a normalização é a divisão por $P(Y=y)$ pois $\lim_{x\to\infty} P(X\le x, Y=y)=P(Y=y)$

22- Sejam X e Y o mínimo e o máximo de duas variáveis aleatórias indep com distribuição comum $\exp(\lambda)$, onde $\lambda>0$. Mostre de duas maneiras que $(Y-X)/X \sim \exp(\lambda)$:

(a) A partir da densidade conjunta de X e $Y-X$

temos $T_1\sim \exp(\lambda)$
$T_2 \sim \exp(\lambda)$ indep

Seja $X=\min(T_1,T_2)$ então $P(X\le x)=1-P(X>x)\overset{\text{indep}}{=}1-P(T_1>x)\cdot P(T_2>x)=1-e^{-2\lambda x}$,

$Y = \max(T_1, T_2)$ então $P(Y \le y) \overset{indep}{=} P(T_1 \le y)\, P(T_2 \le y) = \left[1 - e^{-\lambda y}\right]^2$, $y \geq 0$

e também $P(X \le x, Y \le y) = P(Y \le y) - P(X > x, Y \le y) = P(Y \le y) - P(x < T_1 \le y, x < T_2 \le y) =$

$$\overset{indep}{=} P(Y \le y) - \left[F_{T_1}(y) - F_{T_1}(x)\right]^2 = \left[1 - e^{-\lambda y}\right]^2 - \left[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}\right]^2 ,$$

$0 \le x \le y$

então

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[1 - e^{-2\lambda x}\right] = 2\lambda e^{-2\lambda x} , \quad x > 0$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left[1 - e^{-\lambda y}\right]^2\right] = 2\left(1 - e^{-\lambda y}\right)\lambda e^{-\lambda y} , \quad y \geq 0$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left[\left(1 - e^{-\lambda y}\right)^2 - \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y}\right)\lambda e^{-\lambda x}\right) =$$

$$= 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} , \quad 0 \le x \le y$$

Agora, aplicando o método do Jacobiano, obtemos a distribuição conjunta de W e Z onde: $W = X$ e $Z = Y - X \Rightarrow X = W$, $Y = Z + W$

assim: $J_{(x,y)\to(w,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

então:

$$f_{W,Z}(w,z) = \left|J_{(x,y)\to(w,z)}\right| \cdot f_{X,Y}(w, z+w) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(z+2w)} , \quad w \geq 0, \; z \geq 0$$

então, usando o caso III, temos que se $f_W(w) > 0$ (ou seja $w = x > 0$)

$$f_{Z/W=w}(z) = \frac{f_{W,Z}(w,z)}{f_W(w)} = \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda(z+2w)}}{2\lambda e^{-2\lambda w}} = \lambda e^{-\lambda z} ; \quad z \geq 0, \; w \geq 0$$

ou seja: $Z/_{W=w} \sim \exp(\lambda)$ para qualquer $w = x \geq 0$

(b) Utilizando o princípio da substituição e o resultado do exercício 16(b).

Pelo princípio da substituição temos:

$$(Y-X)/_{X=x} \sim Y/_{X=x} - x$$

Então: $P\left(Y-X/_{X=x} \leq w\right) = P\left(Y/_{X=x} - x \leq w\right) = P\left(Y/_{X=x} \leq w+x\right)$

Agora, pelo exercício 11(b), temos que: $f_{Y/_{X=x}}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(y-x)}, & 0 \leq x \leq y \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

Então $P\left(Y/_{X=x} \leq w+x\right) = \displaystyle\int_x^{w+x} \lambda e^{-\lambda(y-x)}\,dy = -e^{-\lambda(y-x)}\Big|_x^{w+x} = 1 - e^{-\lambda w}, \quad w>0$

então: $(Y-X)/_{X=x} \sim \exp(\lambda)$ para todo $x \geq 0$

23- Sejam X e Z variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

(a) Mostre que para A e B borelianos

$$P(Z\in B, X\in A / X=x) = \begin{cases} P(Z\in B / X=x) & \text{se } x\in A \\ 0 & \text{se } x\notin A \end{cases}$$

Agora, aplicando o princípio da substituição, temos:

$$P(Z\in B, X\in A / X=x) = P\left(Z/_{X=x} \in B, X/_{X=x} \in A\right)$$

Porém, pelo exemplo 6 concluímos que $X/_{X=x}$ é distribuição massa ponto em x, i.é, $P\left(X/_{X=x} = x\right) = 1$. Assim

$$P\left(X/_{X=x} \in A\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } x\in A \\ 0, & \text{se } x\notin A \end{cases}$$

Então, se $x\in A \Rightarrow P\left(X/_{X=x} \in A\right) = 1 \Rightarrow P\left(Z/_{X=x} \in B, X/_{X=x} \in A\right) = P\left(Z/_{X=x} \in B\right) =$

agora se $x \notin A$, então: $P(X/_{X=x} \in A) = 0$

então: $P(Z/_{X=x} \in B, X/_{X=x} \in A) \leq P(X/_{X=x} \in A) = 0 \Rightarrow P(Z/_{X=x} \in B, X/_{X=x} \in A) = 0 \Rightarrow$

p. de subst. $P(Z \in B, X \in A / X=x) = 0$.

(b) Mostre que se $P(Z \in B / X=x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in A$, então $P(Z \in B / X \in A) \geq \frac{1}{2}$

temos que:

$$P(Z \in B, X \in A) = \int P(Z \in B, X \in A / X=x)\, dF_X(x) \overset{(a)}{=} \int P(Z \in B / X=x) \cdot I_A(x)\, dF_X(x) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int I_A(x)\, dF_X(x) = \frac{1}{2} P(X \in A).$$

Agora se assumirmos: $P(X \in A) > 0$, então:

$$P(Z \in B / X \in A) = \frac{P(Z \in B, X \in A)}{P(X \in A)} \geq \frac{\frac{1}{2} P(X \in A)}{P(X \in A)} \geq \frac{1}{2}.$$

(c) Sejam X e Y independentes tais que $P(Y \geq 0) \geq \frac{1}{2}$. Demonstre que

$P(X+Y \geq a / X \geq a) \geq \frac{1}{2}$

Assumimos que $P(X \geq a) > 0$ então:

$$P(X+Y \geq a / X \geq a) = \frac{P(X+Y \geq a, X \geq a)}{P(X \geq a)} = \frac{P(Y \geq 0, X \geq a)}{P(X \geq a)} \overset{indep}{=}$$

$$= \frac{P(Y \geq 0) \cdot \cancel{P(X \geq a)}}{\cancel{P(X \geq a)}} = P(Y \geq 0) \geq \frac{1}{2} \quad (\mathrm{I})$$

Agora, se $P(X \geq a) = 0$, podemos definir arbitrariamente e assumimos que $P(X+Y \geq a / X \geq a) = \frac{1}{2}$ (II)

De (I) e (II) a prova está concluída.

24- (a) Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com densidade $f(x_1, \ldots, x_n)$.
... ... das classes relativas para obter

$f(x_1,\dots,x_k \,/\, x_{k+1},\dots,x_n)$, a densidade condicional de $(X_1,\dots,X_k)$ dado que $(X_{k+1},\dots,X_n)=(x_{k+1},\dots,x_n)$. (Não é preciso demonstrar formalmente.)

Usando o princípio da preservação das chances relativas, temos que:

$$f_{(X_1,X_2,\dots,X_k)/(X_{k+1},\dots,X_n)=(x_{k+1},\dots,x_n)}(x_1,\dots,x_k) = \frac{f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\int f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 dx_2\dots dx_k} = \frac{f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{f_{X_{k+1},\dots,X_n}(x_{k+1},\dots,x_n)}$$

(b) Sejam X_1, X_2, X_3 independentes com distribuição comum $U[0,1]$, com $X_{(1)}$, $X_{(2)}$ e $X_{(3)}$ as estatísticas de ordem. Determine a distribuição condicional de $X_{(2)}$ dados $X_{(1)}$ e $X_{(3)}$.

Temos pelo exemplo 22 do cap. 2 que:
$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 6, & 0\leq x_1<x_2<x_3\leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

então
$$f_{X_{(1)},X_{(3)}}(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1,x_2,x_3)\,dx_2 = 6\int_{x_1}^{x_3} dx_2 = 6(x_3-x_1), \quad 0\leq x_1<x_3\leq 1$$

Agora, aplicando o item (a)
$$f_{X_{(2)}/(X_{(1)},X_{(3)})=(x_1,x_3)}(x_2) = \frac{6}{6(x_3-x_1)} = \frac{1}{(x_3-x_1)}, \quad 0\leq x_1<x_2<x_3\leq 1$$

Então $X_{(2)}/X_{(1)},X_{(3)}$ será uma v.a uniforme em $[x_1,x_3]$, no caso de $0\leq x_1<x_3\leq 1$.

25. Sejam $X_1,\dots,X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição contínua F. Seja $X=\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$

(a) Mostre que para todo $k=1,2,\dots,n$
$$P(X_k\leq x \mid X=t) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)}{n}\dfrac{F(x)}{F(t)}, & \text{se } x<t \\ \dots \end{cases}$$

(sugestão: $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.)

temos inicialmente que:

$$P(X \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \overset{indep}{=} P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \overset{ident}{=} [F(x)]^n$$

Agora: $P(X_k \leq x / X = t) = \lim\limits_{\substack{a \to t \\ b \to t}} \dfrac{P(X_k \leq x, X \in I)}{P(X \in I)}$ onde usamos a relação 1 e $I = (a,b)$ onde $a < t < b$.

Tomemos inicialmente $x \in [0, t)$ então:

$[X_k \leq x, X \in I] = [X_k \leq x, a < X < b] = [X_k \leq x] \cap [a < X < b]$

onde: $[a < X < b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left([X_i > a] \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i < b] \right)$

então. $[X_k \leq x, X \in I] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left\{ [X_i > a] \cap [X_k \leq x] \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i < b] \right\}$ para a e b suficientemente próximos de t.

assim: $P([X_k \leq x, X \in I]) \overset{\sigma\text{-adit}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} P\left\{ [X_i > a] \cap [X_k \leq x] \cdot \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i < b] \right\} =$ onde $0 < x < a < t < b$

$$\overset{\substack{indep \\ e\ ident \\ distrib}}{=} (n-1)[F(b^-)]^{n-2} \cdot [F(b^-) - F(a)] \cdot F(x) =$$

$$\overset{F\ é\ contínua}{=} (n-1)[F(b)]^{n-2} \cdot [F(b) - F(a)] \cdot F(x)$$

Agora, temos também que:

$$P(X \in I) = P(a < X < b) = [F(b^-)]^n - [F(a)]^n =$$

$$\overset{F\ é\ contínua}{=} [F(b)]^n - [F(a)]^n$$

então:

$$P(X_k \leq x / X = t) = \lim_{\substack{a \to t \\ b \to t}} \frac{P(X_k \leq x, X \in I)}{P(X \in I)} = \lim_{\substack{a \to t \\ b \to t}} \frac{(n-1)[F(b)]^{n-2}[F(b) - F(a)]F(x)}{[F(b)]^n - [F(a)]^n}$$

$$\overset{\substack{usando\ a \\ sugestão}}{=} \lim_{\substack{a \to t \\ b \to t}} \frac{(n-1) F(b)^{n-2} (F(b) - F(a)) F(x)}{(F(b) - F(a)) \cdot (F(b)^{n-1} + F(b)^{n-2} \cdot F(a) + \dots + F(a)^{n-1})}$$

$$= \frac{(n-1)[F(t)]^{n-2} \cdot F(x)}{\dots} = \frac{(n-1)\ F(x)}{\dots}$$

agora para $x \geq t$, temos analogamente, para a e b tq. próximos de t: $a < t < b < x$

$$P(X_K \leq t,\ X \in I) = \sum_{i=1}^{n} P\left\{[X_i > a] \bigcap_{i=1}^{n} [X_i < b]\right\} = n\,[F(b) - F(a)]\,[F(b)]^{n-1}$$

então:

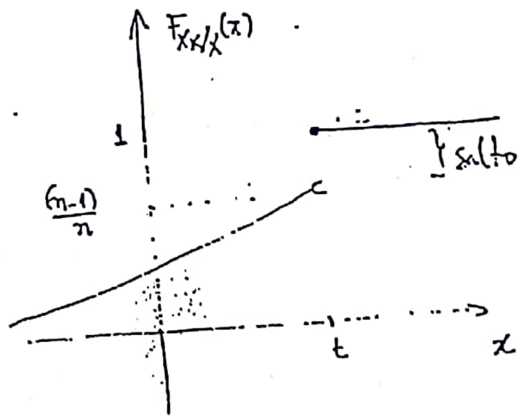
$$P(X_K \leq x \,/\, X = t) = \lim_{\substack{a \uparrow t \\ b \downarrow t}} \frac{n\,(F(b) - F(a))\,[F(b)]^{n-1}}{[F(b)]^n - [F(a)]^n} \overset{\text{analogamente}}{=} \frac{n \cdot F(t)^{n-1}}{n\,F(t)^{n-1}} = 1$$

Agora, como $P(X_K \leq x / X = t)$ é contínua à direita, temos que:

$$F(X_K \leq t \,/\, X = t) = \lim_{h \downarrow t} P(X_K \leq h \,/\, X = t) = 1 \quad \therefore \quad \text{Assim:}$$

$$F_{X_K/X}(x) = P(X_K \leq x \,/\, X = t) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\,F(x)}{n\,F(t)}, & \text{se } x < t \\[2ex] 1, & \text{se } x \geq t \end{cases}$$

Então:



} salto: $P(X_K = t / X = t) = \text{salto} = 1 - \frac{(n-1)}{n} = \frac{1}{n}$

(b) Suponha F diferenciável. Existe densidade condicional no item a.

Como visto no gráfico do item (a) a distribuição de $X_K/_{X=t}$ é mista de discreta e contínua. Assim, a densidade condicional é a densidade da parte contínua e é igual a:

$$f^c(x) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\,f(x)}{\ldots} \end{cases} \quad \text{onde } f(x) = \frac{\partial F(x)}{\ldots}, \quad x < t$$

26. Prove: se X é constante quase certamente, i.e., $P(X=C)=1$, então $P(X=C/Y=y)=1$. (Sugestão. Use a relação 4.1.) Deduza a propriedade EC2.

Tomemos, $I=(a,b)$ onde $a,b \in Q$ e $a<y<b$, então:

$$P(X=C, Y\in I) = P(Y\in I) \quad \text{pois} \quad P(X=C)=1$$, assim, usando a relação 4.1:

$$P(X=C/_{Y=y}) = \lim_{\substack{a\to y\\ b\to y}} \frac{P(X=C, Y\in I)}{P(Y\in I)} = \lim_{\substack{a\to y\\ b\to y}} \frac{P(Y\in I)}{P(Y\in I)} = \lim_{\substack{a\to y\\ b\to y}} 1 = 1$$

então $E(X/_{Y=y}) = C \cdot P(X=C/_{Y=y}) = C$ se $P(X=C)=1$.

27- Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que $EX^2<\infty$ e $EY^2<\infty$. Demonstre que $Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y/X))$.

Inicialmente, temos por Cauchy-Schwarz que XY é integrável, pois:

$$E|X\cdot Y| \leq \sqrt{E(X^2)\cdot E(Y^2)} \leq \infty$$ E naturalmente com $\begin{cases} EX^2<\infty \Rightarrow X \text{ é integrável} \\ EY^2<\infty \Rightarrow Y \text{ é integrável}\end{cases}$

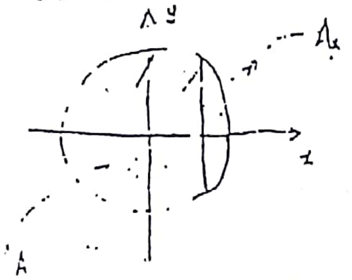
Assim, usando a propriedade básica. $\begin{cases} EY = E\{E(Y/X)\} \\ EXY = E\{E(XY/X)\} \overset{\text{princ. substit.}}{=} E\{X\cdot E(Y/X)\}\end{cases}$

$$Cov(X,Y) = EX\cdot Y - EX\cdot EY = E\{X\cdot E(Y/X)\} - EX\cdot E\{E(Y/X)\} = cov(X, E(Y/X))$$

28 Suponha que X e Y possuam densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Ache a distribuição condicional de Y dado X. Calcule $E(Y/X)$.



usando o exercício 17, onde $A=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$ temos que $Y/_{X=x} \sim$ uniforme em A_x, onde $A_x = \{y: (x,y)\in A\} = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$

assim,

$$f_{Y/_{X=x}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Agora como $Y/_{X=x}$ é simétrica limitada para todo x, temos que $E(Y/X) = 0$

(b) X e Y são independentes? Porque?

Não, pois $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

e analogamente $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$

e então: para $(x,y) \in A$ temos que:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{4}{\pi^2}\left[(1-x^2)(1-y^2)\right]^{1/2} \neq \frac{1}{\pi} = f_{X,Y}(x,y)$$

assim $\{(x,y) : f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)\} \subset A$, e A tem medida de Lebesgue positiva (Area(A) = π) então

X e Y não são independentes

(c) Prove que X e Y são não correlacionadas. (Sugestão. Use o exercício anterior.)

pelo exercício 27: $cov(X,Y) = cov(X, E(Y/X)) = E(X \cdot E(Y/X)) - EX \cdot E(E(Y/X)) =$

$$= E(X \cdot 0) - (EX) \cdot 0 = 0$$

então X e Y não são correlacionados

29- Seja X uma variável aleatória Cauchy-padrão.

(a) Conforme a definição 4.3, qual é $E(X/|X|=y)$?

Como X é simétrica em torno de zero, utilizando o exemplo 8, temos que

$P(X=y/\ldots) = P(X=-y/\ldots) = \frac{1}{\ldots}$

isto é: $E(X/_{|X|=y}) = y \cdot \frac{1}{2} + (-y)\cdot\frac{1}{2} = 0$

(b) Deduza que $E(E(X/|X|)) = 0$.

do item (a). $E(X/_{|X|=y}) = 0 = cte$ então como $E(cte) = cte$, temos:

$$E(E(X/_{|X|})) = E(X/_{|X|}) = 0$$

(c) A propriedade básica $E[E(X|Y)] = EX$ não vale nesse caso. Existe alguma contradição nisso?

Não, ocorre que a propriedade básica foi provada usando a hipótese de que X seja integrável, o que não acontece neste caso

30. Se $X \geq 0$ ocorre que $EX = E[E(X/Y)]$ sem a hipótese de integrabilidade de X (se $EX = +\infty$, então $E[E(X/Y)] = +\infty$ também). Prove este resultado quando X e Y são discretas.

Se X é v.a discreta e $X \geq 0$ então $X/_{Y=y}$ é v.a discreta e não-negativa,

assim:
$$E(X/_{Y=y}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X/_{Y=y} > n)$$

Agora Y é v.a discreta (toma valores y_m, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) então $P(X\in B/_{Y=y_m}) = \dfrac{P(X\in B, Y=y_m)}{P(Y=y_m)}$ para $P(Y=y_m) > 0$,

então:
$$E(X/Y=y_m) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X/_{Y=y_m} > n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(X>n, Y=y_m)}{P(Y=y_m)}$$

E então
$$E(E(X/Y)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^*}{}' P(Y=y_m)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(X>n, Y=y_m)}{P(Y=y_m)} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^*}\sum_{n=0} P(X>n, Y=y_m)$$

Agora, como $P(X>n, Y=y_m) \geq 0$, $\forall n \geq 0$ e $m \in \mathbb{Z}^*$, podemos inverter os somatórios e:

$$E(E(X/Y)) = \sum\sum P(X>n, Y=y_m) = \sum P\left([X>n] \cdot \bigcup_{m\in\mathbb{Z}^*}[Y=y_m]\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P([X>n] \cap \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n) = EX$$

31- O número de acidentes que ocorrem em certa fábrica em uma semana é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Os números de indivíduos feridos nos diferentes acidentes são independentes e identicamente distribuídos com média ξ e variância τ^2, e são independentes do número de acidentes. Determine a média e a variância do número de indivíduos feridos em uma semana.

Sugestão. Use o exercício 30)

Seja N = nº de acidentes em uma semana : v.a. discreta e não-negativa com $\begin{cases} EN=\mu \\ Var N = \sigma^2 \end{cases}$

F_i = nº de feridos no i-ésimo acidente da semana : v.a. discreta e não-negativa, com $\begin{cases} EF_i = \xi \\ Var F_i = \tau^2 \end{cases}$

e $X = F_1 + F_2 + \dots + F_N$: número de feridos em uma semana.

Temos que X também é v.a. discreta e não-negativa e então pelo exercício 30 vale a propriedade básica, então:

$$EX = E\{E(X/_{N=n})\} \therefore \text{Agora } E(X/_{N=n}) = E(F_1 + \dots + F_N) = N \cdot EF_1 = N \cdot \xi$$

então $EX = E(N \cdot \xi) \overset{\text{indep de } N \text{ e } F_i}{=} \xi EN = \xi \cdot \mu$

Temos também que X^2 é v.a. discreta e não-negativa e então:

$$E(X^2) = E\{E(X^2/_{N=n})\} \therefore \text{Agora } E(X^2/_{N=n}) = E[(F_1 + \dots + F_N)^2] =$$

$$= Var(F_1 + \dots + F_N) + [E(F_1 + \dots + F_n)]^2 =$$

$$\overset{\text{independência entre os } F_i}{=} N \, Var F_1 + (N \cdot EF_1)^2 =$$

$$= N\tau^2 + N^2 \xi^2$$

Assim. $E(X^2) = E\{N\tau^2 + N^2\xi^2\} \overset{\text{indep de } N \text{ e } F_i}{=} \tau^2 EN + \xi^2 EN^2 =$

$$= \tau^2 \mu + \xi^2(\sigma^2 + \mu^2)$$

E então. $Var X = E(X^2) - (EX)^2 = \tau^2\mu + \xi^2(\sigma^2+\mu^2) - (\xi\mu)^2 = \tau^2\mu + \xi^2 \cdot \sigma^2$

32. Calcule $E(X_{(2)}/X_{(1)},X_{(3)})$, onde $X_{(1)}, X_{(2)}$ e $X_{(3)}$ são as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de $U[0,1]$. (Veja o exercício 24(b)).

Pelo exercício 24(b), temos que $X_{(2)}/(X_{(1)},X_{(3)})=(x_{(1)},x_{(3)}) \sim U[x_{(1)}, x_{(3)}]$

então $E(X_{(2)}/X_{(1)},X_{(3)}) = E(U[X_{(1)},X_{(3)}]) = \dfrac{X_{(1)}+X_{(3)}}{2}$

33. Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro 1. Seja $t>0$ fixo. Ache $E(X/\max(X,t))$ e $E(X/\min(X,t))$.

Sejam $Z=\max(X,t)$, $W=\min(X,t)$. Vamos obter inicialmente a distribuição de $X/Z=z$.

a1) $0\leq t<z$ então: $\max(X,t)=z>t \Rightarrow X=z$ Assim o nosso candidato a distribuição condicional será: $P(X=z)=1 \Rightarrow E(X/z)=z$

a2) $z=t$ então usando o princípio de preservação das chances relativas, o candidato a distribuição condicional será:

$$f_{X/Z=t}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\int_0^t f_X(x)dx} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}, & 0\leq x\leq t \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Formalmente, deveríamos verificar a relação 41 ou a relação 42 para validar as escolhas das distribuições condicionais, mas supondo que estas sejam mesmo as corretas temos:

$$E(X/Z=z) = \begin{cases} z, & z>t \\ \dfrac{\int_0^t x\, e^{-\lambda x}dx}{1-e^{-\lambda t}} = \begin{pmatrix} x=u \\ \lambda e^{-\lambda x}dx = dv \end{pmatrix} = \dfrac{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x}dx}{1-e^{-\lambda t}} = \\ = \dfrac{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}) - te^{-\lambda t}}{(1-e^{-\lambda t})} = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{te^{-\lambda t}}{(1-e^{-\lambda t})}, & z=t \end{cases}$$

Analogamente, concluímos que a distribuição $X/_{W=w}$ será:

b1) $0 \leq w < t \Rightarrow \min(X,t) = w < t \Rightarrow X = w$. Então $P(X=w)=1$.

b2) $w = t$, pelo princípio da preservação das chances relativas temos:

$$f_{X/W=t}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\int_t^\infty f_X(x)\,dx} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda t}} = \lambda e^{-\lambda(x-t)}, & x \geq t \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Então:

$$E(X/_W) = \begin{cases} w & ; \ 0 \leq w < t \\ \int_t^\infty x \lambda e^{-\lambda(x-t)}\,dx = \begin{pmatrix} v = x-t \\ dv = dx \end{pmatrix} = \int_0^\infty (v+t)\lambda e^{-\lambda v}\,dv = t + \int_0^\infty v\lambda e^{-\lambda v}\,dv \\ = t + \dfrac{1}{\lambda}, & w = t \end{cases}$$

33- Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias, então:

$$F_{X,Y}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x) \cdot F_Y(y)}$$

Tomemos as seguintes variáveis aleatórias: $I_{[X \leq x]}$ e $I_{[Y \leq y]}$

então, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, então:

$$E|I_{[X\leq x]} \cdot I_{[Y\leq y]}| \leq \sqrt{E[I^2_{[X\leq x]}] \cdot E[I^2_{[Y\leq y]}]}$$

Agora como $\begin{cases} |I_{[X\leq x]} \cdot I_{[Y\leq y]}| = I_{[X\leq x, Y\leq y]} \\ I^2_{[X\leq x]} = I_{[X\leq x]} \\ I^2_{[Y\leq y]} = I_{[Y\leq y]} \end{cases}$

então: $E\, I_{[X\leq x, Y\leq y]} \leq \sqrt{E\, I_{[X\leq x]} \cdot E\, I_{[Y\leq y]}}$ Temos que: $E\, I_A = P(A)$

assim: $P(X\leq x, Y\leq y) \leq \sqrt{P(X\leq x) \cdot P(Y\leq y)} \Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x) \cdot F_Y(y)}$

IV-3

15. Seja (X,Y) um vetor aleatório bidimensional. Suponha que (i) X tem distribuição exponencial com parâmetro $\frac{1}{2}$ e (ii) para cada $x>0$, a distribuição condicional de Y dado que $X=x$ é $U[0,x^2]$: em outras palavras $X \sim exp(\frac{1}{2})$ e $Y/_{X=x} \sim U[0,x^2]$

(a) Qual é a distribuição de $Z = Y/_{X^2=t}$

O nosso candidato será $Z \sim U[0,t]$, verificaremos isto usando a relação 4.1.

Seja $I=(a,b)$ onde $0<a<t<b$, assim: $P(X^2 \in I) = P(a<X^2<b) = P(\sqrt{a}<X<\sqrt{b}) = P(X \in (I)^{\frac{1}{2}})$ onde $(I)^{1/2} \overset{def}{=} (a^{1/2}, b^{1/2})$ e $t^{1/2} \in (I)^{1/2}$

$$\lim_{\substack{a\to t\\ b\to t}} \frac{P(Y\in B, X^2\in I)}{P(X^2\in I)} = \lim_{\substack{a\to t\\ b\to t}} \frac{P(Y\in B, X\in I^{1/2})}{P(X\in I^{1/2})} =$$

$$= \lim_{\substack{\sqrt{a}\to\sqrt{t}\\ \sqrt{b}\to\sqrt{t}}} \frac{P(Y\in B, X\in I^{1/2})}{P(X\in I^{1/2})} = P(Y\in B/_{X=\sqrt{t}}) = \left(\begin{matrix}\text{Como}\\ Y/_{X=x} \sim U[0,x^2]\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{comp(B\cap[0,t])}{t}$$. Então $Z = Y/_{X^2=t} \sim U[0,t]$

(b) Calcule EX, EY e $Cov(X,Y)$

Inicialmente: $EX = E(exp(\frac{1}{2})) = 2$

e como Y é v.a não negativa, através da propriedade fundamental (exercício 30) temos:

$EY = E\{E(Y/_{X=x})\}$. Agora $E(Y/_{X=x}) = \frac{x^2}{2}$, então:

$$EY = E\left\{\frac{X^2}{2}\right\} = \frac{1}{2}EX^2 = \left(\begin{matrix}\text{Como}\\ X\sim exp(\frac{1}{2})\\ EX^2 = \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8\end{matrix}\right) = 4$$

Analogamente XY é v.a não negativa, então:

$$E(X,Y) = E\{E(XY/_{X})\} = \left(\begin{matrix}\text{princípio}\\ \text{de substituição}\end{matrix}\right) = E\{X.E(Y/_X)\} = E\left\{X.\frac{X^2}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}E(X^3) = \left(\begin{matrix}\text{Como}\\ X\sim exp(\frac{1}{2})\\ EX^3 = \frac{6}{(\frac{1}{2})^3} = 48\end{matrix}\right) = 24$$

Então: $Cov(X,Y) = E(X.Y) - EX.EY = 24 - 2.4 = 16$

36- Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que Y tem esperança finita.

(a). Mostre que a variância condicional de Y dado X, como definida no exemplo 14 é a variância da distribuição condicional

$$Var(Y/X=x) = E\left[(Y/X=x)^2\right] - \left[E(Y/X=x)\right]^2 = E(Y^2/X=x) - E^2(Y/X=x)$$

(b) Demonstre que $Var\, Y = E[Var(Y/X)] + Var[E(Y/X)]$, i.e., a variância de Y é a soma da esperança da variância condicional e a variância da esperança condicional (Para simplificar a demonstração, pode supor que a variância de Y seja finita).

Suponho que $Var\,Y < \infty \Leftrightarrow EY^2 < \infty$

$$E(Var(X/Y)) = E\left\{E(Y^2/X)\right\} - E\left\{E^2(Y/X)\right\} = \begin{pmatrix}\text{como } EY^2<\infty \\ Y^2 \text{ é integrável} \\ \text{e então usando} \\ \text{a propriedade} \\ \text{básica}\end{pmatrix} = EY^2 - E\left\{E^2(Y/X)\right\} \quad (I)$$

$$Var[E(Y/X)] = E\left\{E^2(Y/X)\right\} - \left[E\left\{E(Y/X)\right\}\right]^2 = E\left\{E^2(Y/X)\right\} - (EY)^2 \quad (II)$$

Agora: $(I)+(II)$: $E(Var(X/Y)) + Var[E(Y/X)] = E(Y^2) - (EY)^2 = Var\,Y$

37- Sejam X e Y variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja Z uma outra variável aleatória. Demonstre a seguinte fórmula:

$$Cov(X,Y) = E\left\{Cov((X,Y)/Z)\right\} + Cov\left(E(X/Z), E(Y/Z)\right),$$

onde: $Cov((X,Y)/Z) \stackrel{def}{=} E(XY/Z) - E(X/Z) \cdot E(Y/Z)$

Como $EY^2<\infty$, $EX^2<\infty$, então Y^2, X^2, Y, X são integráveis, e também por Cauchy-Schwarz XY é integrável

$$E\left\{Cov((X,Y)/Z)\right\} = E\left\{E(XY/Z)\right\} - E\left\{E(X/Z) \cdot E(Y/Z)\right\} = \begin{pmatrix}\text{propriedade} \\ \text{básica}\end{pmatrix} = EXY - E\left\{E(X/Z) \cdot E(Y/Z)\right\} \quad (I)$$

e

$$Cov\left(E(X/Z), E(Y/Z)\right) = E\left\{E(X/Z) \cdot E(Y/Z)\right\} - \left(E\left\{E(X/Z)\right\}\right) \cdot \left(E\left\{E(Y/Z)\right\}\right) = \begin{pmatrix}\text{propriedade} \\ \text{básica}\end{pmatrix} =$$

$$= E\left\{E(X/Z) \cdot E(Y/Z)\right\} - EX \cdot EY \quad (II)$$

de $(I)+(II)$: $E\left\{Cov((X,Y)/Z)\right\} + Cov\left(E(X/Z), E(Y/Z)\right) = EXY - EX \cdot EY = Cov(X,Y)$

31. Suponha que em um temporal, o número X de gotas de chuva que caem no PA durante um segundo, tenha distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, onde λ representa a intensidade de chuva. Suponha que o parâmetro λ seja variável aleatória que tenha distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta = 1$, i.e, que sua densidade seja dada por

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$P(X=k) = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

temos que: $X/_{\Lambda=\lambda} \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então:

$$P(X=k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X=k/_{\Lambda=\lambda})\, dF_{\Lambda}(\lambda) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right) . \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{(k+\alpha)-1} . e^{-2\lambda}}{\Gamma(k+\alpha)} d\lambda = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(k+1)} . \frac{1}{2^{k+\alpha-1}} \int_0^{\infty} \frac{2\lambda^{(k+\alpha)-1} e^{-2\lambda}}{\Gamma(k+\alpha)} d\lambda$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda' = 2\lambda \\ d\lambda' = 2d\lambda \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha-1} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\lambda'^{(k+\alpha)-1} e^{-\lambda'}}{\Gamma(k+\alpha)}}_{\text{densidade da v.a. } \Gamma(k+\alpha,1)} d\lambda' = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha}$$

$k = 0,1,2,\ldots$

(b) Usando métodos probabilísticos, demonstre que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n \quad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

(Sugestão. Calcule a esperança de X de duas maneiras diferentes).

b.1) Como X é v.a. não-negativa, pelo resultado do exercício 30, vale para X a propriedade básica e então:

$$EX = E\{E(X/_{\lambda=\lambda})\}$$, Agora $X/_{\lambda=\lambda} \sim \text{poisson}(\lambda)$ então $E(X/_{\lambda=\lambda}) = \lambda$

então: $$EX = E\{E(X/_{\lambda=\lambda})\} = E\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda \cdot \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)}}_{\text{densidade de v.a } \Gamma(\alpha+1,1)} d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

b.2) Agora, calculando a esperança de X pela definição de esperança, temos:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(k)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+\alpha-1)!}{(\alpha-1)!\,(k-1)!} \frac{1}{2^{k+\alpha}} = \alpha \cdot \frac{1}{2^{\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^k}$$

Agora, de (b.1) e (b.2):

$$\alpha \cdot \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^k} = \alpha \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+\alpha-1}{\alpha} \frac{1}{2^k} = 2^\alpha$$. Agora, fazendo $n=\alpha=1,2,3,\ldots$

temos: $$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

39. Calcule $E(Y_k/X=t)$ no exercício 25.

temos que Y_k v.a com distribuição:

$$P(Y_k \leq x \mid X=t) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\,F(x)}{n\,F(t)}, & \text{se } x < t \\ 1, & \text{se } x \geq t \end{cases}$$

temos que: $$EX = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx + \int_0^{\infty} (1-F_X(x))\,dx$$. Então:

$$E(X_r/_{X=t}) = -\int_{-\infty}^{0} F_{X_r/X=t}(x)\,dx + \int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X_r/X=t}(x)\right)dx$$

Agora, se $t\leq 0$, então:

$$E(X_r/_{X=t}) = -\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{(n-1)F(x)}{n\,F(t)}\,dx + \int_{t}^{0} 1\,dx\right] = t - \frac{(n-1)}{n\,F(t)}\int_{-\infty}^{t}F(x)\,dx$$

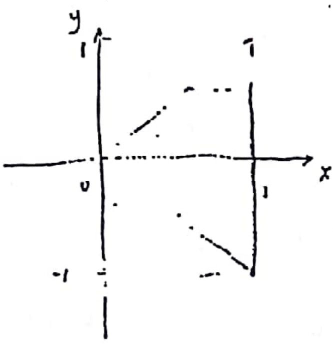
e se $t>0$, temos:

$$E(X_r/X=t) = -\int_{-\infty}^{0}\frac{(n-1)}{n}\frac{F(x)}{F(t)}\,dx + \int_{0}^{t}\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{F(x)}{F(t)}\right)dx = -\frac{(n-1)}{n\,F(t)}\int_{-\infty}^{0}F(x)\,dx + t +$$

$$+ -\frac{(n-1)}{n\,F(t)}\int_{0}^{t}F(x)\,dx = t - \frac{(n-1)}{n\,F(t)}\int_{-\infty}^{t}F(x)\,dx.$$

Considerando a) e b): $E(X_r/_{X=t}) = t - \dfrac{(n-1)}{n\,F(t)}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}F(x)\,dx \quad , \forall t\in\mathbb{R}.$

10. Determine $E(X/Y)$ e $E(Y/X)$ no exercício 15. (Você pode determiná-las só olhando para a densidade conjunta?). Calcule $cov(X,Y)$. X e Y são independentes?



$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2x}$, $(x,y)\in A$, onde $A=\{(x,y):\ 0<x<1,\ -x<y<x\}$

Pelo princípio da preservação das chances relativas, temos que $y\neq 0$:

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{|y|}^{1}f_{X,Y}(x,y)\,dx} = \begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2x}}{\int_{|y|}^{1}\frac{1}{2x}\,dx} = \dfrac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2}\ln x\Big|_{|y|}^{1}} = -\dfrac{x}{\ln|y|}, & |y|<x<1 \\ 0, & c.c.\end{cases}$$

E agora $X/_{Y=0} \sim U[0,1]$

e assim
$$E(X/_{Y=y}) = \begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{X/Y=y}(x)\,dx = \int_{|y|}^{1}\frac{-x^2}{\ln|y|}\,dx = \frac{1}{\ln|y|}\left[-\frac{x^3}{3}\right]_{y}^{1} = \frac{(y^3-1)}{3\ln|y|}, & 0<|y|\leq 1 \\ = \dfrac{1}{2}, & y=0\end{cases}$$

Temos também que: $Y/_{X=x} \sim U[-x,x] \Rightarrow E(Y/_{X=x}) = 0$, $x \in [0,1]$

Agora temos também que $\begin{cases} Y \text{ é integrável pois } |Y| \leq 1 \\ X.Y \text{ é integrável pois } |X.Y| = |X||Y| \leq 1.1 = 1 \end{cases}$. Então usando a propriedade básica:

$$Cov(X,Y) = E(X.Y) - EX.EY = E\left\{E\{XY/_X\}\right\} - EX.E\left\{E(Y/_X)\right\} \overset{\text{e substit.}}{=} E\left\{X.E(Y/_{X=x})\right\} - EX.E\left\{E(Y/_X)\right\} =$$

$$= E(X.0) - EX.E(0) = 0$$

No entanto X e Y não são independentes pois, para $(x,y) \in B = (A^c \cap [0,1]\times[-1,1])$

$f_X(x).f_Y(y) = 1.(-\ln|y|) = -\ln|y| \neq 0 = f_{XY}(x,y)$. Como a medida de Lebesgue de B é não nula então X e Y não são independentes.

41. Seleciona-se ao acaso (i.e conforme a distribuição uniforme) um número entre 0 e 1. Se x é o número selecionado, lança-se n vezes (independentemente) uma moeda com probabilidade x de dar "cara". Seja Y a variável aleatória que representa o número de caras lançadas.

(a) Y é v.a discreta ou contínua?

Y é v.a discreta pois os resultados possíveis de Y são: 0,1,2,3,..... $V(x) = \frac{1^2}{}$

$E(x) = \frac{1}{b-a}$

(b) Calcule a esperança e a variância de Y.

Y e Y^2 são v.a não-negativas então para elas vale a propriedade básica

Temos que $\begin{cases} X \sim U[0,1] & \Rightarrow EX = 1/2 \text{ , } EX^2 = 1/3 \\ Y/_{X=x} \sim b(n,x) & \Rightarrow E(Y/_{X=x}) = nx \quad E(Y^2/_{X=x}) = nx(1-x) + (nx)^2 \end{cases}$

E então: $EY = E\left\{E(Y/_{X=x})\right\} = E(nX) = nEX = \frac{n}{2}$

e $EY^2 = E\left\{E(Y^2/_{X=x})\right\} = E\left\{nX - nX^2 + n^2X^2\right\} = nEX + n(n-1)EX^2 =$

$= \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3}$

portanto:

$$Var\,Y = EY^2 - E^2Y = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n^2}{4} = \frac{6n + 4n^2 - 4n - 3n^2}{12} \Rightarrow Var\,Y = \frac{n(n+2)}{12}$$

- (a) Demonstre que se X e Y são independentes, então:

$$P(X<Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(x))\, dF_X(x)$$

Inicialmente temos que $I_{[X<Y]}$ é v.a não-negativa (vale a propriedade básica)

então:

$$P(X<Y) = E(I_{[X<Y]}) = E\left\{ E\left(I_{[X<Y]}/_{X=x}\right)\right\} \overset{\text{Princípio da subst}}{=} E\left\{E\left(I_{[Y/_{X=x} > x]}\right)\right\} =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{Agora como} \\ X \text{ e } Y \text{ são indep} \\ Y/_{X=x} \sim Y\end{matrix}\right) = E\left\{E\left(I_{[Y>x]}\right)\right\} = E\left\{P(Y>x)\right\} = E\left\{(1 - F_Y(x)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(x))\, dF_X(x)$$

(b) Sejam X e Y independentes, X exponencial de parâmetro λ e Y uniforme em $[0, \lambda]$ onde $\lambda > 0$. Calcule $P(X<Y)$; $P(X>Y)$ e $P(X=Y)$.

Então:
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & c.c \end{cases} \quad \text{e } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y/\lambda, & 0 \leq y < \lambda \\ 1, & y \geq \lambda \end{cases}$$

Assim, usando o item (a), temos:

$$P(X<Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(x))\, dF_X(x) = \int_0^{\lambda} (1 - x/\lambda)\, \lambda e^{-\lambda x} dx + \cancel{\int_{\lambda}^{\infty} (1-1)\, \lambda e^{-\lambda x} dx}^{\,0} =$$

$$= \int_0^{\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\int x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Agora: $\int_0^\lambda x\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{pmatrix} u = x \\ dv = \lambda e^{-\lambda x}dx \\ v = -e^{-\lambda x}\end{pmatrix} = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-\lambda x}dx = -\lambda e^{-\lambda^2} + \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\lambda$

$$= -\lambda e^{-\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda^2}$$

então: $P(X<Y) = 1 - e^{-\lambda^2} + e^{-\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda^2} =$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda^2}\right)$$

Agora:

$$P(Y<X) = \int_{-\infty}^{\infty}(1 - F_X(y))\, dF_Y(y) = \int_0^\lambda e^{-\lambda y}\frac{1}{\lambda}dy = -\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda^2}\Big|_0^\lambda = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda^2}\right).$$

E como $P(X>Y) + P(X<Y) + P(X=Y) = 1$, pois $\Omega = [X>Y] \cup [X<Y] \cup [X=Y]$

temos: $P(X=Y) = 1 - P(X>Y) - P(X<Y) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda^2}) - \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}(1-e^{-\lambda^2}\right) = 0$

13- Fregueses entram em um supermercado conforme um processo de Poisson com parâmetro λ. Há luz no supermercado enquanto não queima um fusível instalado no tempo $t=0$ e cuja vida útil tem distribuição exponencial com parâmetro ξ. Qual o número esperado de fregueses que entram no supermercado enquanto há luz? (Suponha T independente do Processo de Poisson.)

Temos $(X_t)_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson (λ) e T é v.a $exp(\xi)$ então $ET = \frac{1}{\xi}$

$Y =$ nº de fregueses que entram no supermercado enquanto há luz.

Assim $Y = X_T$, onde T = v.a. com distribuição $exp(\lambda)$

Agora: $Y/_{T=t} \overset{\text{princ. subst.}}{=} X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t) \Rightarrow E(Y/_{T=t}) = \lambda t$

Mas Y é v.a não negativa, então para ela vale a propriedade básica e

então: $EY = E\{E(Y/_{T=t})\} = E(\lambda T) \overset{\text{indep}}{=} \lambda ET = \frac{\lambda}{\xi}$

1

Capitulo 5:

A Lei dos grandes números

Scanned with CamScanner

1. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos aleatórios em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, com indicadores $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots$. Mostre que $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ se e somente se $I_{A_n} \xrightarrow{P} 0$

($\Rightarrow$) Sabemos que $E(I_{A_n}) = P(A_n)$, $n = 1, \ldots$

Então se: $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow E(I_{A_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Agora, utilizando a desigualdade de Tchebychev:

$$P(I_{A_n} \geq \varepsilon) = P([I_{A_n} \geq \varepsilon]) \leq \frac{E(I_{A_n})}{\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow I_{A_n} \xrightarrow{P} 0$$

($\Leftarrow$) $0 < \varepsilon \leq 1$: , $P([I_{A_n} \geq \varepsilon]) = P([I_{A_n} = 1]) = P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. indep. com distribuição comum Poisson (λ). Qual o limite em Probabilidade da sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$, onde: $Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}$?

Temos que: $E(X_1^2) = Var(X_1) + [E(X_1)]^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda+1)$.

Agora. Sejam $Z_i = X_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ v.a. que serão independentes pela "propriedade hereditária", ident. distribuidas e integráveis. Então, pela Lei fraca de Khintchin:

$$Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} E(X_1^2) = \lambda(\lambda+1)$$

3- Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a. Prove que se $EX_n \to \alpha$ e $Var(X_n) \to 0$, então $X_n \xrightarrow{P} \alpha$

Sejam: $\varepsilon > 0$ qualquer e $A_n = [|X_n - \alpha| \geq \varepsilon] = [|X_n - EX_n + EX_n - \alpha| \geq \varepsilon]$

$B_n = [(|X_n - EX_n| + |EX_n - \alpha|) \geq \varepsilon]$

Agora: $w \in A_n \Rightarrow w \in B_n$ pois: $|X_n - EX_n| + |EX_n - \alpha| \geq |X_n - \alpha| \geq \varepsilon$.

então: $A_n \subset B_n \Rightarrow P(A_n) \leq P(B_n)$.

... através da desigualdade clássica de Tchebychev, Bienaymé, temos:

$\ldots) \leq P(B_n) = P\left((|X_n - EX_n| + |EX_n - \alpha|) \geq \varepsilon \right) = P\left(|X_n - EX_n| \geq \varepsilon - |EX_n - \alpha| \right) \leq \dfrac{Var\, X_n}{[\varepsilon - |EX_n - \alpha|]^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a indep. tais que $X_1 = 0$ e para $j \geq 2$, X_j é v. discreta satisfazendo:

$$P(X_j = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{j^3} & \text{se } k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j \\ \\ 1 - \dfrac{2}{j^2} & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Prove que $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ $\left(\text{Dado: } \sum_{k=1}^{j} k^2 = \dfrac{j(j+1)(2j+1)}{6} \right)$

Temos:
$$\begin{cases} EX_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots \quad (\text{simetria}) \\ Var\, X_j = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 \dfrac{1}{j^3} = \dfrac{2}{j^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{j(j+1)(2j+1)}{6j^3} = \dfrac{2j^2+3j+1}{3j^2} = \\ \qquad = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{j} + \dfrac{1}{3j^2} \leq 2 \end{cases}$$

Agora: $Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \overset{\text{indep.}}{=} \sum_{j=1}^{n} Var\, X_j \leq 2n$

Aplicando à desigualdade clássica de Tchebychev - Bienaymé temos:

$$P\left(\left| \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n^\alpha} \right| \geq \varepsilon \right) = P\left(\left| \sum_{j=1}^{n} X_j \right| \geq n^\alpha \varepsilon \right) \leq \frac{Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)}{n^{2\alpha}\varepsilon^2} \leq \frac{2}{n^{(2\alpha-1)}\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\alpha > \frac{1}{2}} 0$$

5. Seja S uma seqüência finita de caras e coroas. Demonstre que se uma moeda não necessariamente honesta (com probabilidade de cara igual a p, $0 < p < 1$) for jogada independentemente um número infinito de vezes, então S sairá infinitas vezes na seqüência obtida, com probabilidade 1

Temos: $\Omega = \{ w = (w_1, w_2, \dots), \text{ onde } w_i = 1 \text{ ou } w_i = 0, \text{ todo } i \}$

não enumerável

Seja S_K a seqüência finita (de K elementos) de caras e coroas:

$$S_K = (s_1, s_2, \dots, s_K), \text{ onde } s_i \in \{0,1\}, \; i = 1, \dots, K.$$

Agora, seja a seq. eventos A_1 = a ocorrência da seqüência S_K nos K primeiros ensaios

A_2 = " " " " " nos $K+1$ à $2K$ "

⋮

A_n = " " " " " nos $(n-1)K+1$ a nK "

Ou seja: $A_n = \{ w \in \Omega : w_{(n-1)K+i} = s_i, \; i = 1, \dots, K \}$

Onde: $A_1, A_2, \dots$ são eventos aleatórios independentes pois os ensaios são indep.

Temos: $P(A_n) \overset{\text{indep.}}{=} p^j (1-p)^{K-j} = q$ onde: S_K tem j caras e $K-j$ coroas

Agora: $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q = \infty$, Como $A_1, A_2, \dots$ são event. aleat. indep.,

aplicando-se o lema de Borel-Cantelli..., temos:

$$P(A_n \; i.o.) = 1$$

No entanto, sendo $\mathcal{S}$ o evento "ocorrência de S infinitas vezes", temos

$$\mathcal{S} \supset [A_n \; i.o.] \Rightarrow P(\mathcal{S}) \geq P(A_n \; i.o.) = 1 \Rightarrow$$

$$P(\mathcal{S}) = 1$$

6 Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a. indep. tais que X_n tem distribuição $U[0, a_n]$ onde $a_n > 0$. Mostre que:

V.4

(a) $a_n = n^2$, então com probabilidade 1, somente um número finito das X_n toma valores menores que 1.

Seja: $A_n = [X_n < 1]$. Então $A_1, A_2, \ldots$ são eventos aleatórios independentes

pois $\begin{cases} A_1 \text{ depende de } X_1 \\ A_2 \quad " \quad \text{de } X_2 \\ \vdots \\ A_n \quad " \quad " \; X_n \end{cases}$

E: $P(A_n) = P([X_n < 1]) = \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Então: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \xRightarrow{\text{Borel-Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 0 \Rightarrow$

$P(A_n \text{ f.v.}) = 1$

(b) $a_n = n$, então: $P(A_n) = P([X_n < 1]) = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Então: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \xRightarrow[A_n \text{ são indep.}]{\text{B. Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 1$

7- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. indep tais que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

mostre que $X_n \xrightarrow{P} 0$ mas $P(X_n \to 0) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Seja: $A_n = [X_n \neq 0]$, então $A_1, A_2, \ldots$ são indep pois $\begin{cases} A_1 \text{ depende de } X_1 \\ A_2 \quad " \quad " \; X_2 \\ \vdots \end{cases}$

então: $P(A_n) = P([X_n \neq 0]) = P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$

Logo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \xRightarrow[A_n \text{ indep.}]{\text{B. Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 1$ Então, um:

[illegible] L. d. X. não [illegible]

Então: $P\{w: X_n(w) \not\to 0\} = 1 \Rightarrow P\{w: X_n(w) \to 0\} = 0$

8. Observa-se uma sequência infinita de lançamentos independentes de moedas, onde o n-ésimo lançamento é de uma probabilidade p_n de sair "cara". Determine a probabilidade de cara sair infinitas vezes na sequência observada.

$\Omega = \{ W = (w_1, w_2, \dots),\ w_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\dots \}$, onde $\begin{cases} w_i = 1 & \text{cara no i-ésimo ensaio} \\ w_i = 0 & \text{coroa " "} \end{cases}$

Seja: A_n - evento ocorre "cara" no n-ésimo ensaio, ou seja:

$$A_n = \{ W \in \Omega : w_n = 1 \}$$

Temos: $A_1, A_2, \dots$ sequência eventos aleatórios independentes, pois:

A_1 só depende do 1º ensaio

A_2 " " " 2º "

$\vdots$

A_n " " " nº "

e os ensaios são independentes. E: $P(A_n) = p_n$, $n = 1, 2, \dots$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \xRightarrow{\text{B. Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 0 \Rightarrow P(\text{saírem infinitas "caras"}) = 0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty \xRightarrow[A_1, \dots \text{ indep.}]{\text{B. Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 1 \Rightarrow P(\text{saírem infinitas "caras"}) = 1$

9. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a indep. e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro 1. Mostre que:

(a) $P\left(\left[\frac{X_n}{\log n} > 1\right] \text{ i.v}\right) = 1$

Seja: $A_n = \left[\frac{X_n}{\log n} > 1\right] \Rightarrow A_1, A_2, \ldots$ são indep. pois: $\begin{cases} A_1 \text{ só depende de } X_1 \\ A_2 \text{ " " " } X_2 \\ \vdots \\ A_n \text{ " " " } X_n \\ \text{e } X_1, X_2 \ldots \text{ são v.a indep} \end{cases}$

Agora: $P(A_n) = P\left(\left[\frac{X_n}{\log n} > 1\right]\right) = P(X_n > \log n) = e^{-1 \cdot \log n} = \frac{1}{n}$

então $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \\ A_1, A_2 \ldots \text{ são indep} \end{cases} \xrightarrow{B.\text{Cantelli}} P(A_n \text{ i.v.}) = 1$

(b) $P\left(\left[\frac{X_n}{\log n} > 2\right] \text{ i.v}\right) = 0$

Analogamente, seja:

$B_n = \left[\frac{X_n}{\log n} > 2\right] \Rightarrow B_1, B_2, \ldots$ são indep. pois $\begin{cases} B_1 \text{ só depende de } X_1 \\ B_2 \text{ " " " } X_2 \\ \vdots \\ \text{e } X_1, X_2, \ldots \text{ são indep} \end{cases}$

Agora: $P(B_n) = P\left(\frac{X_n}{\log n} > 2\right) = P(X_n > 2\log n) = e^{-1 \cdot 2\log n} = \frac{1}{n^2}$

então: $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \xrightarrow{B.\text{Cantelli}} P(B_n \text{ i.v.}) = 0$

10- (Exemplo de uma sequência de variáveis aleatórias que converge quase certamente sem a convergência de momento algum). Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a tais que $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Demonstrar que

(a) $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$

Seja $A_n \doteq [X_n \neq 0] \Rightarrow P(A_n) = P(X_n \neq 0) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n^2}$

então $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \xRightarrow{B.Cantelli} P(A_n \ i.o) = 0 \Rightarrow$

$P(X_n \neq 0$ um número finito de vezes$) = 1 \Rightarrow P(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0) = 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{q.c} 0$

(b) $EX_n^m \not\to EX^m$ (limite simples)

$$X_n^m : \begin{cases} P(X_n^m = 0) = P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \\ P(X_n^m = n^{2m}) = P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

então : $E(X_n^m) = n^{2m} \frac{1}{n^2} = n^{2(m-1)}$

$EX^m = E0 = 0$

Agora $\lim_{n\to\infty} E(X_n^m) = \lim_{n\to\infty} n^{2(m-1)} = \begin{cases} 1; & m = 1 \\ \infty, & m = 2, 3, \dots \end{cases}$

então para $m = 1, 2, ..$ temos que: $E(X_n^m) \not\to 0 = EX^m$

11- Sejam $X_1, X_2, \dots$ v aleatórias

(i);

(a) Demonstre que: se $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>n) < \infty$ então $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1$ q.c.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_n|}{n}>1\right) < \infty$. Seja $A_n = \left[\frac{|X_n|}{n}>1\right]$

então pelo Lema de Borel-Cantelli: $P(A_n \text{ i.v.}) = 0 \Rightarrow$

$P\left(\frac{|X_n|}{n} > 1 \text{ f. vezes}\right) = 1 \Rightarrow P\underbrace{\left\{\omega : \frac{|X_n(\omega)|}{n} > 1 \text{ f. vezes}\right\}}_{A} = 1 \Rightarrow$

Agora: $\frac{|X_n(\omega)|}{n} > 1$ f. vezes $\Rightarrow \frac{|X_n(\omega)|}{n} \leq 1$ para n suficientemente grande

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n(\omega)|}{n} \leq 1$. Então: $A \subset B$

$P\underbrace{\left\{\omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n(\omega)|}{n} \leq 1\right\}}_{B} \geq P(A) = 1$

(b) Se as X_n são ident. distribuídas e integráveis, demonstre que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1$ q.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>n) \overset{\text{ident. dist.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1|>n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_1|>n) - P(|X_1|>0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_1|>n) - 1$$

Agora, como X_1 é integrável, temos, pelo critério da

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>n) < \infty \overset{(a)}{\Longrightarrow} P(B)=1$$

#

12. Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a iid tais que $X_1 \sim U[0,1]$. Prove que $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade, mas $n^{-X_n} \overset{q.c}{\not\to} 0$. (Sugestão para a parte quase certa: prove que $P(n^{-X_n} \to 0) = 0$).

(a) $$P(n^{-X_n} \geq \varepsilon) \overset{(n^{-X_n(\omega)} \geq 0,\ \omega\in\Omega)}{=} P(-X_n \log n \geq \log \varepsilon) \overset{ident\ dist}{=} P(-X_1 \log n \geq \log\varepsilon) =$$

$$= P\left(X_1 \leq -\frac{\log \varepsilon}{\log n}\right) = \begin{cases} \dfrac{-\log \varepsilon}{\log n}, & 0<\varepsilon<1 \\[2ex] 0, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

então: $\forall \varepsilon > 0$, $P(n^{-X_n} \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\log \varepsilon}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\log n \cdot \varepsilon$

portanto $n^{-X_n} \xrightarrow{P} 0$

(b) Sejam os eventos: $A_n = [n^{-X_n} \neq 0]$ então $A_1, A_2, \dots$ eventos indep

pois $\begin{cases} A_1 \text{ só depende de } X_1 \\ A_2 \ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{de } X_2 \\ \vdots \\ A_n \ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \ X_n \\ \vdots \\ X_1, X_2, \dots \text{ são indep} \end{cases}$

e $$P(A_n) = P(n^{-X_n} \neq 0) \overset{ident\ dist}{=} P(n^{-X_1} \neq 0) = 1$$

$$= \begin{cases} 1, & n=1 \\ P(-X_1 \neq 0) = P(X_1 \neq 0) = 1, & n: \end{cases}$$

$1 \quad P(A) = 1 \quad \forall n$

então $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$

Agora, como $A_1, A_2 \dots$ são independentes $\xrightarrow{B.\ Cantelli} P(A_n\ i.v) = 1 \Rightarrow$

$P\{w: n^{-X_n(w)} \neq 0\ i.v\} = 1 \Rightarrow P\{w: n^{-X_n(w)} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0\} = 1$

$\Rightarrow P\{w: n^{-X_n(w)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\} = 0 \Rightarrow n^{-X_n} \overset{q.c}{\not\to} 0$

13- Prove que para cada seqüência de variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existe uma seqüência de números reais positivos tal que $\frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{q.c} 0$

(Sugestão: mostrar que para cada n existe b_n tal que $P(|X_n| > \frac{b_n}{n}) < \frac{1}{n^2}$)

a) Provaremos inicialmente que para cada n existe b_n t.q. $P(|X_n| > \frac{b_n}{n}) < \frac{1}{n^2}$

Tomemos um determinado n fixo e seja:

$(y_m^n)_{m\geq 1}$ uma seqüência de números reais onde: $y_m^n = P(|X_n| > \frac{m}{n})$

Temos que $\lim_{m\to\infty} y_m^n = \lim_{m\to\infty} P(|X_n| > \frac{m}{n}) = \lim_{m\to\infty}[P(\frac{m}{n}) - 1 + P(\frac{m}{n})] = 0 - 1 + 1 = 0$

Então todo $\varepsilon > 0$ $\exists\ m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q $m \geq m_0 \Rightarrow |P(|X_n| > \frac{m}{m_0})| < \frac{1}{\varepsilon}$. (I)

Façamos: $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ em (I) e tomemos: $b_n = m_0(\frac{1}{n^2})$ então $P(|X_n| > \frac{b_n}{n}) < \frac{1}{n^2}$

Repetindo o procedimento acima descrito obtemos todos os $b_n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^+_*$

b) Agora temos, fazendo $\forall\ \varepsilon > 0$, qualquer $A_n = [|\frac{X_n}{b_n}| > \varepsilon] \Rightarrow \exists\ n_0(\varepsilon)$ t.q $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$n > n_0$: $w \in [|\frac{X_n}{b_n}| > \varepsilon] \Rightarrow w \in [|\frac{X_n}{b_n}| > \frac{1}{n}] \Rightarrow P(A_n) \leq P(|\frac{X_n}{b_n}| > \frac{1}{n})$

Então:
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{n_0} P(A_n) + \sum_{n>n_0} P(A_n) \leq n_0 + \sum_{n>n_0} P\left(\left|\frac{X_n}{b_n}\right| > \frac{1}{n}\right) \leq n_0 + \sum_{n>n_0} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

então pelo Lema de Borel-Cantelli, temos:

$$P(A_n \text{ i.v.}) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0, P\left(w: \left|\frac{X_n(w)}{b_n}\right| > \varepsilon \text{ , i.v.}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$P\left(w: \left|\frac{X_n(w)}{b_n}\right| \leq \varepsilon \text{, } n \text{ suficiente grande}\right) = 1 \Rightarrow P\left(w: \left|\frac{X_n(w)}{b_n}\right| \longrightarrow 0\right) = 1$$

então $\frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{q.c.} 0$

14- Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a. iid com $X_i \sim U[0,1]$. Ache o limite quase certo da média geométrica $\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{1/n}$. (Sugestão: tome logaritmos)

Seja: $Y_n = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \log Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \log X_k}{n}$

Chamemos: $Z_i = \log X_i$, $i = 1, 2, \dots$ Então, $Z_1, Z_2, \dots$ é uma sequência de v.a. indep e ident. distr. pois:

(i) independência: $\begin{cases} Z_1 \text{ só depende de } X_1 \\ Z_2 \quad " \quad " \quad X_2 \\ \vdots \\ Z_n \quad " \quad " \quad X_n \\ \text{e: } X_1, X_2, \dots \text{ v.a. indep.} \end{cases}$

(ii) ident. distribuídas pois $X_1, X_2, \dots$ são ident. distr.

Agora: $P(Z_1 \leq z) = P(\log X_1 \leq z) = P(X_1 \leq e^z) = \begin{cases} e^z, & z < 0 \\ 0; & \text{c.c.} \end{cases}$

Então: $E Z_1 = \int_{-\infty}^{0} z \, e^z \, dz = \begin{pmatrix} \text{fazendo} \\ t = -z \end{pmatrix} = -\int_0^{\infty} t \, e^{-t} \, dt = \begin{pmatrix} \text{usando o fato} \\ \text{que } E(\exp(1)) = 1 \end{pmatrix} = -1$

Então, aplicando a Lei Forte de Kolmogorov para $Z_1, Z_2, \ldots$ seq v.a i.i.d e integráveis então:

$$\frac{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n}{n} \xrightarrow{q.c} EZ_1 = -1$$

Então: $\quad \log Y_n \xrightarrow{q.c.} -1 \Rightarrow P\{w : \log Y_n(w) \to -1\} = 1$

Agora, como $f(u) = e^u$ é função contínua, então se:

$$\log Y_n(w) \to -1 \Rightarrow e^{\log Y_n(w)} \to e^{-1} \Rightarrow Y_n(w) \to e^{-1}$$

Assim se $w \in [w : \log Y_n(w) \to -1] \Rightarrow w \in [w : Y_n(w) \to e^{-1}]$, então:

$$P\{w : Y_n(w) \to e^{-1}\} \geq P\{w : \log Y_n(w) \to -1\} = 1 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{q.c.} e^{-1}$$

15 - Demonstre: se $X_1, X_2, \ldots$ são indep e ident. distribuídas com $EX_1 = 1 = \operatorname{Var} X_1$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $X_1, X_2, X_3, \ldots$ é seq. v.a i.i.d e integráveis, aplicando a Lei forte de Kolmogorov:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{q.c} EX_1 = 1 \iff P\left\{w : \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} \to 1\right\} = 1$$

Agora seja $Y_i = X_i^2$ $i = 1, 2, \ldots$ então $Y_1, Y_2, \ldots$ é seq v.a indep pois $\begin{cases} Y_1 \text{ só depende de } X_1 \\ Y_2 \text{ " " " } X_2 \\ Y_n \text{ " " " } X_n \\ \text{e } X_1, X_2, \ldots \text{ são indep} \end{cases}$

e também possuem a mesma distribuição, pois $X_1, X_2, \ldots$ são ident. dist.

Além disto, são integráveis, pois $EY_1 = EX_1^2 = \operatorname{Var} X_1 + (EX_1)^2 = 1 + 1 = 2$. Então aplicando a Lei Forte de Kolmogorov a esta sequência,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{n} \xrightarrow{q.c} 2 \iff P\left\{w : \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \to 2\right\} = 1$$

Agora, sendo $A_1 = \left\{w: \frac{\sum Y_i(w)}{n} \to 1\right\}$, $B_1 = \left\{w: \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \to 2\right\}$, então como $P(A) = P(B) = 1$ então: $P(A \cap B_1) = 1 \Rightarrow P\left\{w: \frac{\sum Y_i(w)}{n} \to 1 \text{ e } \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \to 2\right\} = 1$

Agora se w é tal que $\left\{\begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} \to 1 \\ \text{e} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \to 2 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow[\text{é função contínua}]{\text{Justif. Como } f(t)=\sqrt{t}}$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} \to 1 \\ \text{e} \\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}} \to \sqrt{2} \end{array}\right\}$ $\xRightarrow{\text{Justif.: } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}}$ $\left\{\frac{\frac{\sum X_i(w)}{n}}{\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

Então, sendo $C = \left\{w: \frac{\sum X_i}{\sqrt{n \sum X_i^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ temos: $w \in (A \cap B) \Rightarrow w \in C$

assim. $P(C) \geq P(A \cap B) = 1 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{\sqrt{2}}{2}$

16 - Seja $0 < \theta < 1/2$. Prove que se $X_1, X_2, \ldots$ são indep tais que $P(X_n = n^\theta) = \frac{1}{2} = P(X_n = -n^\theta)$ então: $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$

Temos: $E X_n = 0$ (v.a. limitada e simétrica) e $\operatorname{Var} X_n = E X_n^2 = 2 \frac{1}{2} n^{2\theta} = n^{2\theta}$?

e portanto: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} X_n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2(\theta-1)} < \infty$, pois $0 < \theta < 1/2$.

Agora, utilizando a 1ª Lei Forte de Kolmogorov, que diz que se $X_1, X_2 \ldots$ é seq. v.a indep e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} X_n}{n^2} < \infty$ então

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \frac{E(X_1 + \cdots + X_n)}{n} = 0$$

17 - Sejam $X_1, X_2 \ldots$ v.a. iid com densidade comum:

EX

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x+1/2)} & ; \ x \geq -1/2 \\ 0, & x < -1/2 \end{cases}$$

?

Demonstre que $S_n \to +\infty$ q.c. onde $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Temos: $EX_1 = \displaystyle\int_{-1/2}^{\infty} x\, e^{-(x+1/2)}\, dx = \begin{pmatrix} y = x+1/2 \\ dy = dx \\ x = y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \int_0^{\infty} y \underbrace{(e^{-y})}_{\text{densid exp}(1)} dy - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-y}}_{\text{dens exp}(1)} dy =$

$= +1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Então, como $X_1, X_2 \dots$ v.a iid e integráveis, pela lei forte de Kolmogorov

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c} \frac{1}{2} \iff P\left\{w: \frac{X_1(w) + \dots + X_n(w)}{n} \to \frac{1}{2}\right\} = 1$$

Agora seja o evento: $A = \left\{w: \frac{X_1(w) + \dots + X_n(w)}{n} \to \frac{1}{2}\right\}$

Então se $w \in A$ então $\frac{X_1(w) + \dots + X_n(w)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \implies$

$\implies (X_1(w) + \dots + X_n(w)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Assim, sendo $B = \{w: X_1(w) + \dots + X_n(w) \to \infty\}$ temos: $w \in B$

Ou seja: $A \subset B \implies P(B) \geq P(A) = 1 \implies S_n \xrightarrow{qc} +\infty$

II- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d com $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. indep com $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $0 < \sigma_1^2 < \infty$ e $0 < \sigma_2^2 < \infty$. Define-se uma seq. de v.a. $Z_1, Z_2, \ldots$ da seguinte maneira: joga-se uma moeda honesta e definimos $Z_1 = X_1$ se dá cara e $Z_1 = Y_1$ se dá coroa. Após joga-se a moeda de novo, definindo-se $Z_2 = X_2$ se dá cara e $Z_2 = Y_2$ " " ", etc (ad infinitum). Suponha que todas as variáveis X's e Y's são independentes e que os lançamentos da moeda não dependem dos X's e Y's. Explique se a sequência $Z_1, Z_2, \ldots$ obedece a Lei Forte dos Grandes Números. Se obedece, qual o limite de $\bar{Z}_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$?

Seja M_i v.a. que representa o resultado da moeda no i-ésimo ensaio

Fazemos:
$$\begin{cases} M_i = 1 \Rightarrow w = \text{Cara} \\ M_i = 0 \rightarrow w = \text{coroa} \end{cases} \Rightarrow$$ Como a moeda é honesta $P(M_i = 1) = P(M_i = 0) = \frac{1}{2}$

Além disto: $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots$ são v.a independentes

e
$$\left.\begin{cases} Z_1 \text{ só depende de } X_1, Y_1, M_1 \\ Z_2 \quad " \quad " \quad X_2, Y_2, M_2 \\ \vdots \\ Z_n \quad " \quad " \quad X_n, Y_n, M_n \end{cases}\right\} \Longrightarrow Z_1, Z_2, \ldots \text{ são v.a. indep}$$

Agora:
$$P(Z_i \leq z) = P(Z_i \leq z, [M_i = 1] \cup [M_i = 0]) \overset{\text{aditividade}}{=} P(Z_i \leq z, [M_i = 1]) +$$
$$+ P(Z_i \leq z, [M_i = 0]) = P(M_i = 1) \cdot P(Z_i \leq z / M_i = 1) +$$
$$+ P(M_i = 0) \cdot P(Z_i \leq z / M_i = 0) = \frac{1}{2} P(X_i \leq z) + \frac{1}{2} P(Y_i \leq z) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[F_{X_1}(z) + F_{Y_1}(z)\right].$$

Então $Z_1, Z_2 \ldots$ são v.a ident. distribuídas e

$$E(Z_1) = \int^{\infty} z \, dF_Z(z) = \frac{1}{2}\int^{\infty} z \, dF_{X_1}(z) + \frac{1}{2}\int^{\infty} z \, dF_{Y_1}(z) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

e $Z_1, Z_2, \ldots$ são v.a integráveis. Assim, a Lei Forte de Kolmogorov é aplicável e resulta em:

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{q.c} \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

19- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a indep. tais que $X_K \sim b(n_K, p)$ onde $0 < p < 1$ (p fixo)

(a) Qual a distribuição de $S_n = \sum_{K=1}^{n} X_K$?

Vejamos, primeiro $S_2 = X_1 + X_2$ então: Para $0 \le n \le n_1 + n_2$

$$P(S_2 = n) = \sum_{K=1}^{n} P(X_1 = K, X_2 = n-K) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{K=1}^{n} P(X_1 = K) \cdot P(X_2 = n-K) =$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \binom{n_1}{K} p^K (1-p)^{n_1 - K} \cdot \binom{n_2}{n-K} p^{n-K} (1-p)^{n_2 - n - K} =$$

$$= p^n (1-p)^{(n_1+n_2)-K} \cdot \sum_{K=1}^{n} \binom{n_1}{K}\binom{n_2}{n-K} = \binom{n_1+n_2}{n} p^n (1-p)^{(n_1+n_2)-K} \Longrightarrow$$

$\boxed{\text{Obs: Se } X_1 \sim b(n_1,p) \text{ indep. } X_2 \sim b(n_2,p) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim b(n_1+n_2, p)}$. Agora $S_3 = (X_1+X_2) + X_3$ onde (X_1+X_2) indep de X_3 $\overset{\text{utilizando}}{\Longrightarrow}$ obs $(X_1+X_2)+X_3 \sim b(n_1+n_2+n_3, p)$. Por indução

$S_n \sim b\left(\sum_{K=1}^{n} n_K, p\right)$.

(b) Agora $\operatorname{Var} X_K = n_K p(1-p)$ então supondo $n_K \le \sqrt{K}$:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} X_K}{K^2} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{n_K (1-p)p}{K^2} \le \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sqrt{K}\, p(1-p)}{K^2} = p(1-p) \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{3/2}} < \infty$$

Então, aplicando a 1ª Lei Forte de Kolmogorov, temos:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{q.c} 0$$

20- Uma massa radioativa emite partículas segundo um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$. Sejam $T_1, T_2, \ldots$ os tempos transcorridos entre emissões sucessivas. Ache o $\lim_{n \to \infty} \frac{T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2}{n}$

Sabemos que num processo de Poisson $T_1, T_2, \ldots$ é seq. v.a indep. i. distribuídas, com $T_1 \sim \exp(\lambda)$. Então pela propriedade da hereditariedade de indep, $T_1^2, T_2^2, \ldots$ é seq. v.a. indep e também ident. distribuída e:

$$E(T_1^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = Var(T_1) + [E(T_1)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Então, $T_1^2, T_2^2, \ldots$ é uma seq. v.a indep ident dist e integráveis: Aplicando a Lei Forte de Kolmogorov:

$$\frac{T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2}{n} \longrightarrow E(T_1^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

21- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes com distribuição comum $N(0,1)$. Qual o limite quase certo de:

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + \ldots + (X_n-1)^2}$$

Primeiramente temos pela Lei Forte de Kolmogorov que $X_1^2, X_2^2, \ldots$ é seq. de v.a. indep (prop hered) ident distribuídas e integráveis ($EX_i^2 = Var X_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \xrightarrow{q.c.} 1 \Rightarrow P\left\{w : \frac{X_1^2(w) + \ldots + X_n^2(w)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1\right\} = 1$$

Seja $A = \left\{w : \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \to 1\right\}$ então $P(A) = 1$

Agora seja a sequência $(X_1-1)^2, \ldots, (X_n-1)^2, \ldots$ de v.a indep (p. hered.) ident distribuídas e integráveis (pois $E(X_1-1)^2 = E(X_1^2 - 2X_1 + 1) = EX_1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$).

Assim, sendo:

$$B = \left\{w : \frac{(X_1-1)^2(w) + \ldots + (X_n-1)^2(w)}{n} \longrightarrow 2\right\}$$

temos pela Lei Forte de Kolmogorov:

$$\frac{(X_1-1)^2+\dots+(X_n-1)^2}{n} \xrightarrow{q.c} 2 \Rightarrow P(B)=1$$

Agora se $\omega \in (A\cap B)$ então $\begin{cases} \omega\in A \Rightarrow \dfrac{X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega)}{n} \to 1 \\ \omega \in B \Rightarrow \dfrac{(X_1-1)^2(\omega)+\dots+(X_n-1)^2}{n} \to 2 \end{cases}$ então

$$\frac{X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega)}{(X_1-1)^2+\dots+(X_n-1)^2} \to \frac{1}{2}$$

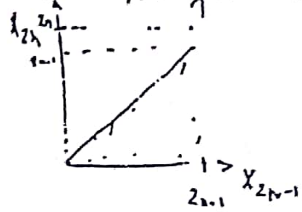
Sendo: $C=\left\{\omega: \dfrac{X_1^2(\omega)+\dots+X_n^2(\omega)}{(X_1-1)^2(\omega)+\dots+(X_n-1)^2(\omega)} \to \dfrac{1}{2}\right\}$. Temos $(A\cap B)\subset C$

e então $P(C) \geq P(A\cap B) = 1$ pois $P(A)=1$ e $P(B)=1$

então: $P(C)=1 \Rightarrow \dfrac{X_1^2+\dots+X_n^2}{(X_1-1)^2+\dots+(X_n-1)^2} \xrightarrow{q.c} \dfrac{1}{2}$

22) Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a indep tais que $X_n \sim U[0,n]$, $n=1,2,\dots$. Chame o n-ésimo ensaio de sucesso se $X_{2n} > X_{2n-1}$, para $n=1,2,\dots$. Determine a prob. de haver sucesso e ache o limite (se existir) de S_n/n, onde S_n = número de sucessos nos primeiros n ensaios. Este limite é em probabilidade e/ou quase certo?

Seja $Y_n = \begin{cases} 1, & X_{2n} \le X_{2n-1} \\ 0, & X_{2n} > X_{2n-1} \end{cases}$



Temos: $p_n = P(Y_n = 1) = P(X_{2n} \le X_{2n-1}) = \displaystyle\int_{B=[X_{2n}\le X_{2n-1}]} f_{X_{2n},X_{2n-1}}(x_{2n},x_{2n-1})\, dx_{2n}\, dx_{2n-1}$

Agora, como X_{2n} indep X_{2n-1} $\Rightarrow$ $f_{X_{2n},X_{2n-1}}(x_{2n},x_{2n-1}) = f_{X_{2n}}(x_{2n})\cdot f_{X_{2n-1}}(x_{2n-1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n(2n-1)}, & (x_{2n},x_{2n-1})\in A, \text{ onde } A=[0,2n]\times[0,2n-1] \\ 0, & c.c. \end{cases}$

1- $p_n = \dfrac{1}{\dots}\, vol(B\cap A) = \dfrac{(2n-1)^2}{\dots} = \dfrac{2n-1}{4n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4n}$

Assim, a sequência $Y_1, Y_2, \ldots$ é r.v.a indep (prop hered.) onde: $\begin{cases} P(Y_n=1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \\ P(Y_n=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \end{cases}$

então $\begin{cases} E\,Y_n = p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \\ Var\,Y_n = p_n(1-p_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16n^2} \end{cases}$

Assim: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\,Y_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4} < \infty$ pois $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} < \infty \\ \text{e} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4} < \infty \end{cases}$

Agora, usando a 1ª Lei Forte de Kolmogorov, temos:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{q.c} \frac{E S_n}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k}}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k}$$

Ou seja. $P(A) = 1$ onde $A = \left\{ w : \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}$

Agora $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = a$ então seja $B = \left\{ w : \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \right\}$

então $w \in A \Rightarrow w \in B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow P(B) \geq P(A) = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c} a$.

23. A Lei Forte para variáveis aleatórias i.i.d e integráveis pode ser extendida ao caso de esperanças infinitas se admitirmos limites infinitos. Em particular, se $X_1, X_2, \ldots$ va iid tais que $EX_n = \infty$ então $S_n/n \to +\infty$ q.c. (Compare com o Teorema 5.3. Qual a diferença?). Prove este resultado em 3 etapas:

(a) Para m inteiro positivo fixo. seja Y_n o truncamento de X_n em m:

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } X_n \leq m \\ 0, & \text{se } X_n > m \end{cases} \Rightarrow F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) \begin{cases} 1, & y \geq m \\ = F_{X_n}(y), & y < m \end{cases}$$

Então $Y_1, Y_2 \ldots$ são variáveis aleatórias indep (prop hered), ident distribuídas.

$\sum \frac{E(A_n)}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(A_1)}{n} = E(A_1)\sum_n \frac{1}{n}$

Então:

$$EY_1 : \mathrm{I} - \mathrm{II} = \underbrace{\int_0^{\infty}(1-F_{Y_1}(x))dx}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{0}F_{Y_1}(x)dx}_{\mathrm{II}}$$

Agora como $EY_1 = +\infty \Rightarrow \mathrm{II} < \infty$ ou seja. $\int_{-\infty}^{0} F_{X_1}(x)\,dx < \infty$

Assim $$EY_1 = \int_0^{\infty}(1-F_{Y_1}(y))dy - \int_{-\infty}^{0}F_{Y_1}(y)dy = \int_0^{m}(1-F_{X_1}(y))dy - \int_{-\infty}^{0}F_{X_1}(y)dz$$

$$0 \leq \int_0^{m}(1-F_{X_1}(y))\cdot dy \leq \int_0^{m} dy = m < \infty \qquad \text{Assim: } EY_1 < \infty$$

Agora, utilizando a Lei Forte de Kolmogorov:

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{q.c.} EY_1 \iff P(A_m) = P\left\{w : \frac{Y_1(w)+\dots+Y_n(w)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} EY_1\right\} = 1$$

onde $EY_1 = \int_{-\infty}^{m} x\, dF_{X_1}(x)$

b) Temos: $X_n(w) \geq Y_n(w)$, $n = 1, 2, \dots$ para todo $w \in \Omega$

$$B = \left\{w : \frac{X_1(w)+\dots+X_n(w)}{n} \geq \frac{Y_1(w)+\dots+Y_n(w)}{n}\right\} = \Omega$$

$$w \in (A \cap B) \begin{cases} w \in B_m \Rightarrow & \dfrac{X_1(w)+\dots+X_n(w)}{n} \geq \dfrac{Y_1(w)+\dots+Y_n(w)}{n} \\ w \in A_m \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Y_1(w)+\dots+Y_n(w)}{n} = EY_1 \end{cases} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{X_1(w)+\dots+X_n(w)}{n} \geq EY_1$$

Sendo: $C_m = \left\{w : \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(w)}{n} \geq EY_1\right\}$, Temos: $C_m \supset (A_m \cap B_m) \Rightarrow$

$P(C_m) \geq P(A \cap B) = 1$ pois $P(A) = P(B) = 1$ Assim:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq EY_1 = \int_{-\infty}^{m} x\, dF_{X_1}(x)$$

(c) Agora, se dado qualquer $M>0$ temos que $\exists\, n_0$ t.q $n > n_0 \Rightarrow$

$$\frac{S_n}{n} > M \quad \text{então} \quad \frac{S_n}{n} \to \infty$$

Como $EY_1(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} EX_1 = +\infty$, então dado $M>0$ $\exists\, m_0$ t.q $m > m_0 \Rightarrow EY_1(m) > M$, $m > m_0$

então: se $w \in C_m$, $m > m_0 \Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(w)}{n} \geq EY_1(m) > M \Rightarrow \frac{S_n(w)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Sendo $D = \left\{ w : \frac{S_n(w)}{n} \to \infty \right\}$, se $w \in C_m \to w \in D \Rightarrow$

$$P(D) \geq P(C_m) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \infty$$

24 Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a iid e int. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_1 / X_1 + \dots + X_n)$. Qual o tipo de convergência?

Como $X_1, X_2, \dots$ são ident. distribuidas: $E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right) = E\left(\frac{X_2}{X_1+\dots+X_n}\right) = \dots = E\left(\frac{X_n}{X_1+\dots+X_n}\right) \rightarrow$

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+\dots+X_n} + \frac{X_2}{X_1+\dots+X_n} + \dots + \frac{X_n}{X_1+\dots+X_n}\right) = n\, E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right)$$

$$E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{X_1+\dots+X_n}\right) = n\, E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right)$$

$$X_1+\dots+X_n = n\, E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right) \Rightarrow E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right) = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$$

Agora, pela Lei Forte de Kolmogorov, temos:

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_n}\right) = \frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{q.c} EX_1$$

5. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, v.a.i. tomando os valores 0 e 1. Suponha $P(X_1=1) = \frac{1}{2} = P(X_1=0)$ e $P(X_{n+1}=X_n / X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = 1-\alpha_n$ para todo $(x_1,\dots,x_n)$, $n=1,2,\dots$

Seja $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Discuta se $Y_n \to \frac{1}{2}$ em prob ou q.c. quando:

(a) $\alpha_n = \frac{1}{2}$ $\forall n$

Agora: $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) = P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}) \cdot P(X_n=x_n / X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{n-1}=x_{n-1})$

Como: $P(X_n=X_{n-1}/ X_1,\dots,X_{n-1}) = \frac{1}{2} = P(X_n \neq X_{n-1}/X_1,\dots,X_{n-1})$ Temos, por indução:

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n) \quad \forall (x_1,x_2,\dots,x_n)$$

então $\forall n$ $\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ são v.a indep $\Rightarrow$ a sequência $X_1, X_2,\dots$ é sq v.a indep, identicamente distribuída e integráveis ($EX_1 = \frac{1}{2}$). Assim, Pela Lei Forte de Kolmogorov temos:

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n) \xrightarrow{q.c} \frac{1}{2}$$

(b) $\sum \alpha_n$ converge $\Rightarrow$ $\forall \epsilon>0$ $\exists n_0$ tq $n>n_0 \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_n < \epsilon$

Seja $A_n = [X_{n+1} \neq X_n]$

$$P(A_n) = P(X_{n+1} \neq X_n) = 1 - P(X_{n+1}=X_n)$$

Agora:
$$P(X_{n+1}=X_n) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)} P(X_{n+1}=X_n / X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)\cdot P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) =$$

$$= (1-\alpha_n)\sum_{(x_1,\dots,x_n)} P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) = 1-\alpha_n$$

Assim. $P(A_n) = \alpha_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \infty \xRightarrow{B.Cantelli} P[A_n \text{ i.o}] = 0$

então: $P[X_{n+1} \neq X_n \text{ i.v.}] = 0 \Rightarrow P[X_{n+1} = X_n,\ n \text{ sufic. grande } (n > n_0)] = 1 \Rightarrow$

$P\{w : X_n(w) \to X_1(w)\} = 1 \Rightarrow P\{w : X_n(w) \to 1 \text{ ou } X_n(w) \to 0\} = 1$

Seja $A = \{w : X_n(w) \to 1 \text{ ou } X_n(w) \to 0\}$, então se $w \in A \Rightarrow$

$\dfrac{S_n(w)}{n} = \dfrac{X_1(w) + \cdots + X_n(w)}{n}$ converge para 0 ou 1, então:

Sendo: $B = \{w : \frac{S_n(w)}{n} \to 0 \text{ ou } \frac{S_n(w)}{n} \to 1\}$ e $C = \{w : \frac{S_n(w)}{n} \to \frac{1}{2}\}$, temos:

$w \in A \Rightarrow w \in B \Rightarrow P(B) \geq P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1$

e $w \in C \Rightarrow w \notin B \Rightarrow (B \cap C) = \emptyset \Rightarrow P(C) \leq 1 - P(B) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

$P(C) = P\left(\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{S_n}{n} \overset{q.c}{\not\to} \dfrac{1}{2}$

Agora, provaremos que também $\dfrac{S_n}{n} \overset{P}{\not\to} \dfrac{1}{2}$ com um contra-exemplo

seja: $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \cdots$ então $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0 < \infty$ (converge) e então

$$\frac{S_n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{se } X_1 = 0 \\ 1, & \text{se } X_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} P\left(\frac{S_n}{n} = 0\right) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \\ P\left(\frac{S_n}{n} = 1\right) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Agora, seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, então:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 1 \quad \text{pois se } \begin{cases} \frac{S_n}{n} = 0 \Rightarrow \left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{S_n}{n} = 1 \Rightarrow \left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim $\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{S_n}{n} \overset{P}{\not\to} \frac{1}{2}$$

IV-24

26. Sejam $X_1, X_2, \dots$ indep. tais que $EX_n = 0$ $\forall n$. Demonstre que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n < \infty$ então $E\left(\sup_{n\geq 1} |S_n|\right) < \infty$ onde $S_n = X_1 + \dots + X_n$. (Sugestão: Use o critério de integrabilidade da §3.3 e a desigualdade de Kolmogorov.)

Do critério de integrabilidade temos que:

$$E\left(\sup_{n\geq 1} |S_n|\right) < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n| > k\right) < \infty$$

Agora, pela desigualdade de Kolmogorov, temos que, como $X_1, X_2, \dots$ v.a. ind. (EX_i = 0 ∀i) então

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n_0} |S_k| > k\right) \leq \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{n_0} \mathrm{Var}\, X_i \quad, \quad k > 0$$

Agora, se $\sup_{n\geq 1} |S_n| > k \overset{\text{definição de supremo}}{\Longrightarrow} \exists n_0$ t.q. $|S_{n_0}| > k \Rightarrow \max_{1\leq k\leq n_0} |S_n| \geq k$. Assim $w \in A = \left[\sup_{n\geq 1} |S_n| > k\right] \Rightarrow w \in \left[\max_{1\leq k\leq n_0} |S_n| \geq k\right]$

então $k > 0$.

$$P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n| > k\right) \leq P\left(\max_{1\leq k\leq n_0} |S_n| \leq k\right) \overset{\text{desigual. Kolmogorov}}{\leq} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{n_0} \mathrm{Var}\, X_i \overset{\text{pois } \mathrm{Var}\, X_i \geq 0\ \forall i}{\leq} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_i$$

Assim: $k > 0 \Rightarrow P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n| > k\right) \leq \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_i$

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n| > k\right) = P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n| > 0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} > k\right) \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_i$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_i < \infty$ então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sup |S_n| > k\right) \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sup_{n\geq 1} |S_n|\right) < \infty$$

2852

Capítulo 6

Funções Características e convergência em distribuição

2 (a) Se $X \sim b(n,p)$ qual a função característica de X?

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{então} \quad \varphi_X(t) = E\, e^{itX} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\,e^{it})^k(1-p)^{n-k}$$

então $\varphi_X(t) = \left(p e^{it} + (1-p)\right)^n$

(b) Mostre usando funções características que se $X \sim b(m,p)$, $Y \sim b(n,p)$, e X e Y são independentes então $X+Y \sim b(m+n,p)$.

Usando FC5, temos $\varphi_{X+Y}(t) \overset{\text{indep.}}{=} \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \left(pe^{it}+(1-p)\right)^m\left(pe^{it}+(1-p)\right)^n = \left(pe^{it}+(1-p)\right)^{m+n}$,

que é a f.c. da $b(m+n,p)$ então pela unicidade de f.c. (FC6) temos $(X+Y) \sim b(m+n,p)$

- Mostre que se $X_1, \dots X_n$ são indep. com, cada uma, distribuição simétrica em torno de zero, então $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ possui d. simét. em torno de zero, para todo $a_j \in \mathbb{R}$.

Temos por FC7: X_i é s.t. zero $\iff \varphi_{X_i}(t) = \overline{\varphi_{X_i}(t)}$, $i = 1, 2, \dots n$

Agora por FC8: $\varphi_{a_jX_j}(t) = \varphi_{X_j}(a_jt) = \overline{\varphi_{X_j}(a_jt)} = \overline{\varphi_{a_jX_j}(t)}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Então por FC5: $\varphi_{\sum a_jX_j}(t) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{j=1}^{n}\varphi_{a_jX_j}(t) = \prod_{j=1}^{n}\overline{\varphi_{a_jX_j}(t)} = \overline{\prod_{j=1}^{n}\varphi_{a_jX_j}(t)} \overset{\text{FC}}{=} \overline{\varphi_{\sum a_jX_j}(t)}$, $\sum a_jX_j$ é s.t. zero

3- Seja φ uma função característica. Mostre que $\psi(t) = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$ onde $\lambda > 0$ também é função característica. (Sugestão: Sejam $N, X_1, X_2 \dots$ independentes tais que $N \sim$ Poisson(λ) e as X_n são ident. distrib. com $\varphi_{X_n} = \varphi$. Defina $Y = S_N$, onde $S_n = X_1 + \dots + X_n$; N é um "tempo de parada" para a sequência de somas parciais. Então $\varphi_Y = \psi$. A distribuição de Y é chamada distribuição composta de Poisson. A distribuição comum de Poisson corresponde ao caso $X_n = 1$, i.e., $P(X_n=1)=1$.)

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{N=n} X_i$ então: $S_n = (Y/_{N=n})$.

agora... $\varphi_Y(t) = E e^{itY} = E\left\{E\left(e^{itY}/_{N=n}\right)\right\} = E\left\{E\left(e^{itS_n}\right)\right\}$ pois $\begin{cases} e^{itS_n} \text{ é integrável} \\ \text{caso } |e^{itS_n}| = 1 \end{cases}$

Agora pela FCs: $E e^{itS_n} = \varphi_{S_n}(t) \overset{indep.}{=} [\varphi(t)]^n$

então $\varphi_Y(t) = E[\varphi(t)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(t)]^n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda\varphi(t)} = e^{\lambda(\varphi(t)-1)} = \psi(t)$

4. Calcule EY^3 e EY^4 onde $Y \sim (\mu, \sigma^2)$. (Sugestão. Calcule primeiro para $N(0,1)$ e use linearidade).

Se $X \sim N(0,1) \iff \varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$

Então: $\varphi_X^{(1)}(t) = -t e^{-t^2/2} \Rightarrow \varphi_X^{(2)} = -e^{-t^2/2} + t^2 e^{-t^2/2} = (t^2-1)e^{-t^2/2}$

$\Rightarrow \varphi_{X(t)}^{(3)} = 2t\, e^{-t^2/2} - (t^2-1)t\, e^{-t^2/2} = (3t - t^3)e^{-t^2/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_{X(t)}^{(4)} = (3-3t^2)e^{-t^2/2} - t(3t-t^3)e^{-t^2/2} = (t^4 - 6t^2 + 3)e^{-t^2/2}$

Assim: $\varphi_X^{(1)}(0) = i\, EX' = 0 \Rightarrow EX = 0$

$\varphi_X^{(2)}(0) = i^2 EX^2 = -1 \Rightarrow EX^2 = 1$

$\varphi_X^{(3)}(0) = i^3 EX^3 = 0 \Rightarrow EX^3 = 0$

$\varphi_X^{(4)}(0) = i^4 EX^4 = 3 \Rightarrow EX^4 = 3$

Agora, seja $Y = \sigma X + \mu$ então $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y^3 = (\sigma X + \mu)^3 = \sigma^3 X^3 + 3\sigma^2 X^2 \mu + 3\sigma X \mu^2 + \mu^3$

então: $EY^3 = \sigma^3 EX^3 + 3\sigma^2 \mu EX^2 + 3\sigma\mu^2 EX + \mu^3 =$

$= 3\sigma^2\mu + \mu^3$

$E(Y^4) = E[(\sigma X + \mu)^4] = \sigma^4 EX^4 + 4\sigma^3\mu EX^3 + 6\sigma^2\mu^2 EX^2 + 4\mu^3\sigma EX + \mu^4 =$

$= 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$

5. (a) Mostre que se X tem distribuição Cauchy padrão então $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X^2(t)$

(Ainda mais ... $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx = e^{-|t|}$) Utilize este resultado para provar que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \not\Rightarrow X$ e Y indep e portanto:

$$F_{X+Y}(z) = F_X * F_Y(z),\ \forall z \in \mathbb{R} \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ indep.}$$

Como X tem distribuição simétrica em torno de zero temos que:

$$\varphi_X(t) = Ee^{itX} = E(\cos tX) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx = e^{-|t|}$$

Agora $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X(2t) = e^{-|2t|} = \left[e^{-|t|}\right]^2$

então $\varphi_{2X}(t) = \varphi_{X+X}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(t)\ \forall t$ com X e X não independentes, assim

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t),\ \forall t \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ indep}$$

(b) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d com dist. Cauchy-padrão. Demonstre que a média amostral S_n/n é também Cauchy-padrão.

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) \overset{\text{indep}}{=} \left[\varphi_{X_1}(t/n)\right]^n = \left[e^{-\frac{|t|}{n}}\right]^n = e^{-|t|} \xrightarrow[\text{f.c}]{\text{(F11) unicidade da}} \Rightarrow \frac{S_n}{n} \sim \text{Cauchy-padrão}$$

6- Sejam X e Y variáveis aleatórias com a mesma distribuição. Demonstre

(a) X e Y são indep, então X-Y tem dist. simet em torno de zero

Temos, X e -Y são indep, então $\varphi_{X-Y}(t) \overset{(F5)}{=} \varphi_X(t)\cdot\varphi_{-Y}(t) \overset{\text{ident dist.}}{=} \varphi_X(t)\cdot\varphi_{-X}(t) \overset{(F8)}{=} \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(-t) =$

$$\overset{(F3)}{=} \varphi_X(t)\cdot\overline{\varphi_X(t)} = |E(\cos tX)|^2 \in \mathbb{R} \overset{F7}{\Rightarrow} X-Y \text{ é s. t. zero}$$

(b) Se X e Y tomam só dois valores, então X-Y tem distribuição simétrica em torno a zero:

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = Ee^{itX} = pe^{ita} + (1-p)e^{itb}.$$

$= (1-2p_1) + p_1\left(E\cos(a-b)t + iE\,\mathrm{sen}(a-b)t\right) + p_1\left(E\cos(b-a)t + iE\,\mathrm{sen}(b-a)t\right) =$

$= 1 - 2p_1 + 2p_1 E(\cos(a-b)t) \in \mathbb{R}, \forall t \Rightarrow X-Y$ é s l. zero.

7 (a) Suponha que $X \sim \exp(\lambda)$ e mostre que a função característica de X é $\varphi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it} = \dfrac{\lambda^2 + it\lambda}{\lambda^2 + t^2}$

$$\varphi(t) = Ee^{itX} = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \lambda e^{x(it-\lambda)}dx = \frac{\lambda}{it-\lambda}e^{x(it-\lambda)}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - it} + \lim_{u\to\infty}\frac{\lambda}{it-\lambda}e^{u(it-\lambda)}$$

Agora: $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\lambda}{it-\lambda}e^{u(ti-\lambda)} = \lim\limits_{u\to\infty}\underbrace{\dfrac{\lambda}{it-\lambda}}_{\text{constante}}\cdot \underbrace{e^{uti}}_{\text{f. limitada } \forall t}\cdot \underbrace{e^{-\lambda u}}_{\lim_{u\to\infty} e^{-\lambda u} = 0} = 0$

então: $\varphi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it} = \dfrac{\lambda^2 + i\lambda}{\lambda^2 + t^2}$

(b) Seja Y exponencial dupla com densidade $f_Y(y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}, y \in \mathbb{R}$

Calcule a função característica de Y (Sugestão. Use a simetria e o item a

Como Y é s.l.z então $\varphi_Y(t) = E\cos(ty) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ty)\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}dy =$

$$= \int_0^\infty(\cos ty)\lambda e^{-\lambda y}dy \overset{\text{item (a)}}{=} \text{parte real da f.c. da } \exp(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$$

(c) Se Z e W são independentes e identicamente distribuídas com $Z \sim \exp(\lambda)$ então $Z-W$ é exp dupla.

$$\varphi_{Z-W}(t) \overset{FC5}{=} \varphi_Z(t)\cdot\varphi_{-W}(t) \overset{FC3}{=} \varphi_Z(t)\cdot\overline{\varphi_W(t)} \overset{\text{ident dist}}{=} \varphi_Z(t)\cdot\overline{\varphi_Z(t)} \overset{\text{ab(a)}}{=} \frac{\lambda}{\lambda-it}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$$

$\overset{(\Gamma(6)}{\Rightarrow}$ Z-W é exp dupla.

8) Use a função característica do exercício anterior para mostrar que se

$X \sim \Gamma(n,\beta)$ então $\varphi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-it}\right)^n$

Sejam $X_1, X_2, \dots$ v.a iid com dist. $\exp(\beta)$ então $X_1+\dots+X_n \sim \Gamma(n,\beta)$

Assim: $\varphi_X(t) \overset{\text{mesma distrib.}}{=} \varphi_{X_1+\dots+X_n}(t) \overset{\text{indep e ident dist}}{=} [\varphi_{X_1}(t)]^n = \left[\frac{\beta}{\beta-it}\right]^n$

9. Demonstre:

(a) Se φ é função característica e existe $\lambda \neq 0$ tal que $\varphi(\lambda)=1$ então a distribuição correspondente a φ está concentrada nos pontos $\pm k\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, $k=0,1,\dots$

$\varphi(\lambda)=1 \Rightarrow E(\cos\lambda X)=1 \Rightarrow E(1-\cos\lambda X)=0$. Como $0 \leq (1-\cos\lambda x) \leq 2$ então

$P(1-\cos\lambda X=0)=1 \Rightarrow P(\cos\lambda X=1)=1$. Agora $\cos\lambda x=1 \Rightarrow \lambda x = \pm k\pi$, $k=0,1,2,\dots$

$\Rightarrow x = \frac{\pm k\pi}{\lambda}$, $k=0,1,\dots$ Assim $P\left(X=\frac{\pm k\pi}{\lambda},\ k=0,1,2,\dots\right)=1$

(b) Se φ_X é uma função característica e existe $\delta>0$ tal que $\varphi_X(t)=1$ para todo t com $|t|<\delta$, então $\varphi_X(t)=1$, $\forall t$ (Qual a distribuição correspondente a φ?).

Inicialmente para $t=\pm\delta \overset{\text{FC4 continuidade}}{\Longrightarrow} \varphi(\delta)=\varphi(-\delta)=1$

Seja t onde $|t|>\delta$ então $\exists\ n\in\mathbb{N}$ e $x\in(-\delta,\delta)$ onde $t=nx$ pois $(-\delta,\delta)$ é denso

Assim $\varphi_X(t)=\varphi_X(nx)$.

Agora como $\varphi_X(x)=1 \overset{\text{item (a)}}{\Longrightarrow} P\left(X=\pm k\frac{2\pi}{x},\ k=0,1,2,\dots\right)=1$

Assim $\varphi_X(t) = \varphi_X(n\chi) = E\cos n\chi X + i\, E \operatorname{sen} n\chi X$

Agora: $E\cos n\chi X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \cdot \cos n\chi \cdot \frac{2\pi k}{\chi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$

$E \operatorname{sen} n\chi X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \operatorname{sen} n\chi \frac{2\pi k}{\chi} = 0$

então $\varphi_X(t) = 1, \forall t \implies X = 0$ i.e., $P(X=0)=1$.

10. A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é definida por $\psi_X(t) = E e^{tX}$, $t \in \mathbb{R}$. (É permitido a ψ_X assumir o valor $+\infty$)

Demonstre que se $E e^{\delta|X|} < \infty$ p/ algum $\delta > 0$, então

(a) $\psi(t)$ é finito para $t \in [-\delta, \delta]$

$$\psi(t) = E e^{tX} = \int e^{tx}\, dF_X(x) \leq \int e^{|tx|}\, dF_X(x) \overset{|t|\leq\delta}{\leq} \int e^{\delta|x|}\, dF_X(x) = E e^{\delta|X|} < \infty$$

(b) todos os momentos de X são finitos

A expansão em série de Taylor da função $e^{\delta|X|}$ no ponto $X=0$ temos:

$$e^{\delta|X|} = 1 + \frac{\delta^2|X|^2}{2!} + \frac{\delta^3|X|^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k |X|^k}{k!}$$

Temos que:

$$E e^{\delta|X|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta|x|}\, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k |x|^k}{k!}\, dF_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_X =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} E|X|^k < \infty$$

... como $\frac{\delta^k E|X|^k}{k!} > 0 \ \forall k$ ...

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k E|X|^k}{k!} < \infty \Rightarrow \frac{\delta^k E|X|^k}{k!} < \infty \Rightarrow E|X|^k < \infty$$

2) φ possui derivadas contínuas de toda ordem em $(-\delta,\delta)$, e

$\varphi^{(k)}(0) = EX^k$ para $k = 1, 2, \dots$ (Sugestão: Use o método da prova da propriedade FC9)

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\int \frac{e^{(t+h)x} - e^{tx}}{h}\, dF_X(x) = \lim_{h\to 0}\int e^{tx}\,\frac{e^{hx}-1}{h}\, dF_X(x)$$

Mas: $\lim_{h\to 0} \frac{e^{tx}(e^{hx}-1)}{h} = xe^{tx}$.

Agora: para $t\in[-\delta,\delta]$, temos: seja h tal que $|t+h|<\delta$ (como $h\to 0$ isto sempre pode ser feito), então $\left|\frac{e^{tx}(e^{hx}-1)}{h}\right| = \left|\frac{e^{tx}\int_0^h xe^{sx}\,ds}{h}\right| = \left|\frac{X\cdot\int_0^h e^{(s+t)X}\,ds}{h}\right| \le$

$\le |X\cdot e^{|\delta X|}| =$ (usando a expansão em série de Taylor de e^{tx} no ponto zero) $= \left|X\cdot\left(1+\frac{\delta X^2}{2!}+\frac{\delta |X|^3}{3!}+\dots\right)\right| =$

$= \left||X| + \frac{\delta|X|^3}{2!} + \frac{\delta|X|^4}{3!}\dots\right|$ que é integrável pois X tem todos os momentos finitos.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada:

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} E\left(\frac{e^{tx}(e^{hx}-1)}{h}\right) = E\left[\lim_{h\to 0} \frac{e^{tx}(e^{hx}-1)}{h}\right] = E(xe^{tx}) \Rightarrow \varphi'(0) = EX$$

e também para $t\in(-\delta,\delta)$: $\lim_{s\to t}\varphi'(s) = \lim_{s\to t} E(xe^{sx})$

Mas para $t\in[-\delta,\delta]$ temos que $|xe^{tx}| \le |X|\cdot e^{|\delta X|}$ que é integrável

e usando novamente o T.C.D: $\lim_{s\to t}\varphi'(s) = E\left(\lim_{s\to t} xe^{sx}\right) = E\,Xe^{tX} = \varphi'(t)$

e então $\varphi'(t)$ é contínua para $t\in(-\delta,\delta)$.

por indução, podemos provar isto para $\varphi^{(k)}$

11) Obtenha a função geradora de momentos (definida no exercício anterior) das variáveis aleatórias seguintes.

(a) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ onde $\lambda > 0$

$$\varphi_X(t) = E\,e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot e^{tk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

(b) $X \sim$ Cauchy-padrão

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx}_{I_2}$$

$t > 0$:

$$I_1: \quad 0 \leq I_1 \leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2} \quad \text{(por simetria)}$$

$$I_2 = \left(\begin{array}{l} \text{fazendo} \\ e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2} + \dots \end{array} \right) \geq \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx + t \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} + \infty$$

$t < 0$: $0 \leq I_2 \leq \frac{1}{2}$ (simetria)

$\therefore \quad I_1 \leq \frac{1}{2} - \infty$

$$t = 0 \therefore \varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = 1$$

então $\varphi_X(t) = +\infty$, $t > 0$ e $\varphi_X(0) = 1$

$\varphi_X(t) = -\infty$, $t < 0$

(c) $X \sim \exp(\lambda)$, onde $\lambda > 0$. Utilize o resultado para calcular os momentos EX^k, $k = 1, 2, \dots$. Confira com os momentos obtidos no exemplo 5 do capítulo 3 (§3.4)

$$\varphi_X(t) = E\, e^{tX} = \int \lambda e^{-\lambda x} e^{tx}\, dx = \lambda \int e^{(t-\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{t-\lambda}\, e^{(t-\lambda)x}\Big|_0 = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t}, & t < \lambda \\ \infty, & t \geq \lambda \end{cases}$$

assim $\varphi_X^{(1)}(t) = \frac{+\lambda}{(\lambda-t)^2}$, $\varphi_X^{(2)}(t) = \frac{+2\lambda\cancel{(\lambda-t)}}{(\lambda-t)^4} = \frac{+2\lambda}{(\lambda-t)^3}$

e por indução $\varphi_X^{(k)}(t) = \frac{+k!\,\lambda}{(\lambda-t)^{k+1}} \Rightarrow \varphi_X^{k+1}(t) = \frac{+(k+1)!\,\lambda(\lambda-t)^k}{(\lambda-t)^{2(k+1)}} = \frac{-(k+1)!\,\lambda}{(\lambda-t)^{k+2}}$.

então $\varphi_X^{(k)}(0) = \frac{+k!}{\lambda^k}$ $k = 1, 2, \ldots$

12- Verifique se $c_1, c_2, \ldots$ e c são números complexos tais que $c_n \to c$, então $\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n \to e^c$ (Sugestão: Considere o logaritmo principal de $1 + \frac{c_n}{n}$)

Temos que se $c_n \to c$ então $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |c_n - c| < \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon < c_n < c + \varepsilon$

e também $\frac{c_n}{n} \to 0$ pois c_n é limitada para n suficient. grande. Assim:

Seja: $\ln\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)$, Como $\frac{c_n}{n} \to 0$ para n suficient. grande $\frac{c_n}{n} \in (-1, 1]$ e

então aplicando a fórmula de série do logaritmo: $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

$$\ln\left(1 + \frac{c_n}{n}\right) = \frac{c_n}{n} - \frac{c_n^2}{2n^2} + \frac{c_n^3}{3n^3} - \frac{c_n^4}{4n^4} + \ldots \quad , n \text{ suficient. grande}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{c_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{ c_n - \frac{c_n^2}{2n} + \frac{c_n^3}{3n^2} - \frac{c_n^4}{4n^3} + \ldots \right\} = \lim_{n\to\infty} c_n = c$$

Agora, como a função e^x é contínua, então: $\lim_{n\to\infty} e^{\ln\left[\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\right]} = e^{\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\right]} = e^c$

13- (a) Suponha que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$, $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ e, para todo n, X_n seja independente de Y_n. Mostre que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,2)$.

Temos que para todo n: $\varphi_{X_n}(t) = e^{-t^2/2}$; $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2}$

X_n, Y_n indep. $\xrightarrow{FCS}$ $\varphi_{X_n+Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t)\cdot\varphi_{Y_n}(t) = e^{-2t^2/2} = e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} =$

$= \varphi_{X_n}(\sqrt{2}\cdot t) = \varphi_{\sqrt{2}X_n}(t)$.

Agora, $\sqrt{2}X_n \sim N(0,2)$. Assim, pelo teorema de unicidade, temos que $X_n+Y_n \sim N(0,2)$ $\forall n$. Então: $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,2)$

(b) Generalize (a), provando que se $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G$, onde X_n e Y_n são indep. $\forall n$, então $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F*G$. Aqui F e G são funções de distribuição e $F*G$ é a sua convolução...

Temos que se X_n e Y_n indep $\xrightarrow{(FCS)}$ $\varphi_{X_n+Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t)\cdot\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_F(t)\cdot\varphi_G(t)$ $\left\{\begin{array}{l} \text{Teo. Helly-Bray} \\ X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F \Rightarrow \varphi_{X_n}(t)\to\varphi_F(t) \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G \Rightarrow \varphi_{Y_n}(t)\to\varphi_G(t) \end{array}\right.$

então pelo teorema da unicidade: $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} F*G$

14- Qual a distribuição de X se X tem função característica $\varphi_X(t) = \cos^2(t)$? (Veja o exemplo 3)

temos que se X e Y são indep e $\left\{\begin{array}{ll} P(X=1) = \frac{1}{2} = P(X=-1) & \Rightarrow \varphi_X(t) = \cos t \\ P(Y=1) = \frac{1}{2} = P(Y=-1) & \Rightarrow \varphi_Y(t) = \cos t \end{array}\right.$

então $Z = X+Y$ terá distribuição: $\left\{\begin{array}{l} P(Z=0) = P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P(Z=2) = P(X=1,Y=1) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{4} \\ P(Z=-2) = P(X=-1,Y=-1) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{4} \end{array}\right.$

então:

$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t) \overset{(FCS)}{=} \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = \cos^2 t$

Assim, $\varphi_Z(t) = \cos^2 t$ $\xRightarrow[\text{Unicidade}]{\text{Teorema da}}$ Z tem f. distribuição $\left\{\begin{array}{l} P(Z=-2) = \frac{1}{4} \\ P(Z=0) = \frac{1}{2} \\ P(Z=2) = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

15- Mostre que é possível para uma sequência de funções de distribuição convergir em todo ponto sem o limite ser uma função de distribuição. (Sugestão. Considere as variáveis aleatórias constantes $X_n = n$)

Temos que

$$X_n = n \Rightarrow F_{X_n} = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0, & x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

Assim. $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 0$ para $\forall x$, pois dado x $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n > x$ e $F_{X_n}(x) = 0$.

Portanto $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(x)$ e $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ então $\begin{cases} F \text{ não é f. distribuição,} \\ \text{pois } \lim_{x\to\infty} F(x) \neq 1 \end{cases}$

16. Prove: se $F_n \to F$ fracamente e F é contínua então $F_n(x)$ converge para $F(x)$ uniformemente na reta.

Dado $\varepsilon > 0$

Como F é contínua posso escolher: $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, $\begin{cases} x_1 = -\infty, \; F(x_1) = 0 \\ x_N = \infty, \; F(x_N) = 1 \end{cases}$

$|F(x) - F(x_i)| < \varepsilon$ para todo $x \in (x_i, x_{i+1})$

Então, como F_{X_n} é função não decrescente então F (que existe $\forall x \in \mathbb{R}$) também será não decrescente, então:

$x_i \leq x \leq x_{i+1} \Rightarrow F(x_i) \leq F(x) \leq F(x_{i+1})$ Agora $\begin{cases} F(x_{i+1}) - F(x_i) < \varepsilon \Rightarrow \\ G = F(x_{i+1}) - F(x_i) - \varepsilon \leq 0 \end{cases}$

$\therefore$ $F(x) \geq F(x_i) \geq F(x_i) + G = F(x_{i+1}) - \varepsilon$

$F(x) \leq F(x_{i+1}) \leq F(x_{i+1}) - G = F(x_i) + \varepsilon$

então $F(x_{i+1}) - \varepsilon \leq F(x) \leq F(x_i) + \varepsilon$, $x \in (x_i, x_{i+1})$ (I)

Agora como $F_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} F \Rightarrow$ todo ponto de continuidade de F (como F é contínua todo $x \in \mathbb{R}$)

temos $F_{X_n}(x) \to F(x)$. Assim.

18 Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s, cada uma tendo distribuição simétrica em torno de zero. Demonstre que se $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ então X tem distribuição simétrica em torno de zero

X_i tem dist s.t. zero $\overset{FC7}{\Rightarrow}$ $\varphi_{X_i}(t) \in \mathbb{R}$, todo $t \in \mathbb{R}$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \xRightarrow{\text{Teorema de Helly-Bray}} \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X(t)$, todo $t \in \mathbb{R}$ (I)

Agora se $\varphi_{X_i}(t) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$ Então se existe $\lim_{i\to\infty} \varphi_{X_i}(t)$ (e no caso existe por (I)) então $\lim_{i\to\infty} \varphi_{X_i}(t) \in \mathbb{R}$ (Pois o limite de uma sequência de números reais se existe é também real).

E portanto $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ todo $t \in \mathbb{R} \overset{(FC7)}{\Longrightarrow}$ X tem dist s t zero

19. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ indep e ident distribuidas, com $X_n \sim U[0,1]$ e sejam $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $U_n = nY_n$, $V_n = n(1 - Z_n)$. Mostre que

$n(1 - Z_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} W \Rightarrow Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}}$

$n - nZ_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$

(a) $Y_n \xrightarrow{P} 0$ e $Z_n \xrightarrow{P} 1$

$$P(Y_n \geq y) = P(X_1 \geq y, \ldots, X_n \geq y) \overset{\text{indep ident dist}}{=} [P(X_1 \geq y)]^n \Rightarrow F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1 - (1-y)^n, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$P(Z_n \leq z) = P(X_1 \leq z, \ldots, X_n \leq z) \overset{\text{indep ident dist}}{=} [P(X_1 \leq z)]^n \Rightarrow F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z^n, & 0 < z \leq 1 \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

a.1) Assim $0 < \varepsilon < 1$;

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) = P(Y_n \geq \varepsilon) \leq (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e $\varepsilon > 1$: $\quad P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$

então $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Y_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} 0$

a.2) $0 < \varepsilon < 1$: $\quad P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) = P(-Z_n + 1 \geq \varepsilon) = P(Z_n \leq 1 - \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

e $\varepsilon > 1$: $\quad P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$

$\Longrightarrow Z_n \xrightarrow{P} 1$

x_i : $\exists\, n_{0i} \in \mathbb{N}$, $n > n_{0i} \Rightarrow |F(x_i) - F_{X_n}(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, N$

Seja $n_0 = \max\{n_{01}, n_{02}, \ldots, n_{0N}\}$ então $n > n_0 \Rightarrow |F(x_i) - F_{X_n}(x_i)| < \varepsilon$ $i = 1, \ldots, N$

(II)

Como F_{X_n} é função distribuição, então é não decrescente $\Rightarrow$ $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$\left.\begin{array}{l} F_{X_n}(x_i) \leq F_{X_n}(x) \leq F_{X_n}(x_{i+1}) \\ \text{De (I)} \; F(x_{i+1}) - \varepsilon \leq F(x) \leq F(x_i) + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow F(x_{i+1}) - F_{X_n}(x_{i+1}) - \varepsilon \leq F(x) - F_{X_n}(x) \leq F(x_i) - F_{X_n}(x_i) + \varepsilon$$

e então de III, fazendo $n > n_0$

$$\begin{cases} F(x) - F_{X_n}(x) \leq F(x_i) - F_{X_n}(x_i) + \varepsilon \leq |F(x_i) - F_{X_n}(x_i)| + \varepsilon \leq 2\varepsilon \\ F(x) - F_{X_n}(x) \geq F(x_{i+1}) - F_{X_n}(x_{i+1}) - \varepsilon \geq -|F(x_{i+1}) - F_{X_n}(x_{i+1})| - \varepsilon \geq -2\varepsilon \end{cases}$$

Assim $|F(x) - F_{X_n}(x)| < \varepsilon$, $n > n_0$ $x \in (x_i, x_{i+1})$ (IV)

Portanto de (IV) e (II) $F_{X_n}(x) \xrightarrow{\text{converge uniformemente}} F_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

17. Utilize funções características para provar: se $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma seq. de números reais tal que $a_n \to a$ finito, então $X_n + a_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(a, 1)$

Agora, se $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \Rightarrow \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

No entanto: $\varphi_{X_n+a_n}(t) \overset{FC8}{=} \varphi_{X_n}(t) \cdot e^{ita_n}$

Então $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n+a_n}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) \cdot e^{ita_n}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{-t^2/2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} e^{ita_n} = e^{ita} \quad \text{pois} \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \text{e} \\ \text{a função } e^{itx} \\ \text{é contínua} \end{cases} \end{cases}$$

então: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n+a_n}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} e^{ita_n} = e^{ita} \cdot e^{-t^2/2}$.

como $Y \sim N(a,1) \Rightarrow \varphi_Y(t) = e^{ita} e^{-t^2/2}$. Então, pelo Teorema de Paul Lévy,

$X_n + a_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(a, 1)$

VI-

(b) $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ e $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$ onde W tem distribuição exponencial de parametro 1

$$F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u) = P(nY_n \leq u) = P\left(Y_n \leq \frac{u}{n}\right) = F_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1 - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n, & 0 < u \leq n \\ 1, & u > n \end{cases}$$

então $F_W(w) = \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(w) = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1-\frac{w}{n}\right)^n = 1 - e^{-w}$, $0 < w < \infty$

então Como $F_W(w)$ é f. distribuição de uma v.a exp(1) então $U_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$

$$F_{V_n}(v) = P(V_n \leq v) = P(n(1-Z_n) \leq v) = P\left(1-Z_n \leq \frac{v}{n}\right) = P\left(Z_n \geq 1-\frac{v}{n}\right) = \begin{cases} 1, & 1-\frac{v}{n} < 0 \Rightarrow v > n \\ 1-\left(1-\frac{v}{n}\right)^n, & 0 < 1-\frac{v}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < v \leq n \\ 0, & \left(1-\frac{v}{n}\right) > 1 \Rightarrow v < 0 \end{cases}$$

assim, analogamente. $F_W(w) = \lim_{n\to\infty} F_{V_n}(w) = 1 - e^{-w}$, $0 \leq w < \infty$

então $V_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$

20- Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a indep ident. dist., tais que $P(X_n = 1) = \frac{1}{2} = P(X_n = -1)$ e seja

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} X_k$$

Mostre que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} U[-1,1]$ (Sugestão: Use a igualdade $\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta / 2\operatorname{sen}\theta$)

temos que (exemplo 3) $\Rightarrow \varphi_{X_1}(t) = \cos t$

$X_1, \dots, X_n$ indep $\Rightarrow$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{\sum \frac{1}{2^k} X_k}(t) \overset{(FC5)}{=} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\frac{1}{2^k}X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) \overset{\text{ident dist}}{=} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{2^k}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = 1 \text{ se } t = 0$$

E para $t \neq 0$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2t}{2^k}\right)}{2\operatorname{sen}(t/2^k)} = \frac{\operatorname{sen} t}{2\operatorname{sen}(t/2)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(t/2)}{2\operatorname{sen}(t/4)} \cdots \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}{2\operatorname{sen}(t/2^n)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} t}{2^n \operatorname{sen}(t/2^n)}$$

Agora $\varphi_Y(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{2^n \operatorname{sen}(t/2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t / t}{\operatorname{sen}(t/2^n)/(t/2^n)} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} t}{t}, & t \neq 0 \end{cases}$ (I)

Para: $Z \sim U[-1,1] \overset{FC7\ \text{sIgno}}{\Longrightarrow} Z = E\cos tX = \int_{-1}^{1} \frac{\cos tx}{2}\, dx = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \dots \end{cases}$ (II)

VI-1.

Agora de (I): $\varphi_Y(t)$ é função característica, pois é contínua para $t=0$ $\left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \cos 0 = 1\right)$ e então pelo Teorema de Paul Lévy. $Y \xrightarrow{\mathcal{D}} F$ onde $\varphi_F(t) = \varphi_Y(t) \overset{\text{(II) Teorema da Unicidade}}{\Longrightarrow} Y \xrightarrow{\mathcal{D}} U[-1,1]$

21. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias cujas funções características $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ convergem pontualmente. Mostre que se existe $\delta > 0$ tal que $\varphi_n(t) \to 1$ para todo t com $|t| < \delta$, então $X_n \xrightarrow{P} 0$ (Sugestão. Use o resultado do exercício 9)

Agora $\varphi_X(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 1$, $|t| < \delta$ $\Rightarrow$ $\varphi_X(t)$ é contínua no ponto $t = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pelo Teorema de Paul Lévy: $\exists$ F_X f.dist tal que φ_X é f.c. de F_X e $F_{X_n} \to F_X$ fracamente, ou seja $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Agora, pelo exercício 9 $\varphi_X(t)$ é função característica da distribuição massa ponto em zero. Então, pelo Teorema da Unicidade:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \text{ onde } P(X=0) = 1 \to F_X = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

E assim: $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$, $x \neq 0$, e então

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n| \geq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon < X_n < \varepsilon) = 1 - \left[-P(X_n = \varepsilon) + P(X_n \leq \varepsilon) - P(X_n \leq -\varepsilon)\right]$

Agora: $x = \varepsilon$ é pto de continuidade de F_X

então $P(X_n \leq \varepsilon) = F_{X_n}(\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(\varepsilon) = 1$

e $P(X_n = \varepsilon) = F_{X_n}(\varepsilon) - F_{X_n}(\varepsilon^-) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(\varepsilon) - F_X(\varepsilon^-) = 0$

$x = -\varepsilon$ é também pto de continuidade de F_X

então $P(X_n \leq -\varepsilon) = F_{X_n}(-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(-\varepsilon) = 0$

Assim: $\forall \varepsilon > 0$: $\left\{ P(|X_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right.$

Então $X_n \xrightarrow{P} 0$.

22 Suponha que $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_K)$ tem distribuição simétrica em torno de zero se $\underset{\sim}{X}$ e $-\underset{\sim}{X}$ possuem a mesma distribuição. Demonstre que $\underset{\sim}{X}$ tem distribuição simétrica em torno de zero se, e somente se, $\varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t})$ é real para todo $\underset{\sim}{t} \in \mathbb{R}^K$.

Agora se $\underset{\sim}{X}$ e $-\underset{\sim}{X}$ tem mesma distribuição $\overset{\text{Teorema de}}{\underset{\text{unicidade}}{\Longleftrightarrow}}$ $\varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \varphi_{-\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) \overset{F7}{=} \varphi_{\underset{\sim}{X}}(-\underset{\sim}{t}) = \overline{\varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t})} \Longleftrightarrow$

$\varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t})$ é real para todo $\underset{\sim}{t} \in \mathbb{R}^K$

23- Sejam X, Y, U e V variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Suponha que os vetores (X,Y) e (U,V) sejam independentes, que X seja independente de Y e que U seja independente de V. Mostre que X, Y, U e V são coletivamente independentes. Generalize este resultado para o caso de n vetores aleatórios independentes, cada qual composto de componentes independentes.

$$(X,Y) \text{ indep } (U,V) \overset{\text{Prop 6.2}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{X,Y,U,V}(x,y,u,v) = \varphi_{X,Y}(x,y) \cdot \varphi_{U,V}(u,v) \quad \forall (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \quad (\mathrm{I})$$

$$X \text{ indep } Y \overset{\text{Prop 6.2}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\, \varphi_Y(y) \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{II})$$

$$U \text{ indep } V \overset{\text{Prop 6.2}}{\Longleftrightarrow} \varphi_{U,V}(u,v) = \varphi_U(u) \cdot \varphi_V(v) \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{III})$$

Então: $\varphi_{X,Y,U,V}(x,y,u,v) \overset{(\mathrm{I})}{=} \varphi_{X,Y}(x,y) \cdot \varphi_{U,V}(u,v) \overset{(\mathrm{II})}{=} \varphi_X(x)\, \varphi_Y(y) \cdot \varphi_{U,V}(u,v) \overset{(\mathrm{III})}{=} \varphi_X(x)\, \varphi_Y(y) \cdot \varphi_U(u) \cdot \varphi_V(v)$, $\forall (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$

$\overset{\text{Prop 6.2}}{\Longrightarrow}$ X, Y, U, V são colet. indep.

Generalizando sejam $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \dots, \underset{\sim}{X}_n$ vetores aleatórios cujas componentes são variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se estes vetores aleatórios são independentes, cada qual composto de componentes independentes, então $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^{k_1}, X_2^1, \dots, X_2^{k_2}, \dots, X_n^1, \dots, X_n^{k_n}$ são coletivamente independentes onde $\underset{\sim}{X}_j = (X_j^1, X_j^2, \dots, X_j^{k_j})$ $j = 1, \dots, n$

24- Sejam X, Y, U e V variáveis aleatórias, e sejam $Z = X + iY$ e $W = U + iV$. Demonstre

(a) Se os vetores (X,Y) e (U,V) são independentes então Z e W são independentes

$$\text{Se } (X,Y) \text{ indep. } (U,V) \overset{\text{Prop 6.2}}{\Longrightarrow} \varphi_{X,Y,U,V}(x,y,u,v) = \varphi_{X,Y}(x,y) \cdot \varphi_{U,V}(u,v) \quad \forall (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$$

Então: $\varphi_{X,0,U,0}(x,0,u,0) = \varphi_{X,U}(x,u) = \varphi_{X,0}(x,0)\cdot\varphi_{U,0}(u,0) = \varphi_X(x)\cdot\varphi_U(u)\ \forall (x,u)\in\mathbb{R}^2 \overset{\text{Prop 62}}{\Longrightarrow} X$ e U são independentes

Analogamente X e V são indep, Y e U são indep e Y e V são indep.

(b) Se (X,Y) e (U,V) são independentes e X,Y,U e V são integráveis então $E(ZW) = EZ\cdot EW$

Temos: $Z\cdot W = (X+iY)(U+iV) = XU + iXV + iUY - YV$

De (a) usando o fato que X,Y,U,Z são integráveis e indep temos

$$\left\{ EXU \overset{\text{indep}}{=} EX.EU\ ,\ EXV \overset{\text{indep}}{=} EX.EV\ ,\ EYU \overset{\text{indep}}{=} EY.EU\ ,\ EYV \overset{\text{indep}}{=} EY.EV \right. \quad (\mathrm{I})$$

Então: $E(ZW) = E(XU + iXV + iYU - YV) = E(XU) - E(YV) + i(EXV + EYU) \overset{(\mathrm{I})}{=}$

$= EX.EU - EY.EV + iEX.EV + iEY.EU = EX.(EU + iEV) + iEY(EU + iEV)$

$= (EX + iEY)(EU + iEV) = EZ\cdot EW$

25. Prove a proposição 62 para m e n quaisquer (Pode usar o seguinte fato, sem prová-lo: se $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ são vetores aleatórios independentes, então $g_1(\underset{\sim}{X})$ e $g_2(\underset{\sim}{Y})$ são indep., onde g_1 e g_2 são funções reais mensuráveis. (*)

Sejam $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_m)$ e $\underset{\sim}{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)$ vetores aleatórios onde $m\geq 1$ e $n\geq 1$. $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ são independentes se e só se $\varphi_{X_1,X_2,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n}(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = \varphi_{X_1,X_2,\dots,X_m}(x_1,x_2,\dots,x_m)\cdot\varphi_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)\ \forall (x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^{m+n}$

($\Longrightarrow$) $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ são independentes:

$$\varphi_{X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) = E\, e^{i\left[\sum_{j=1}^m x_j X_j + \sum_{k=1}^n y_k Y_k\right]} = E\left[e^{i\sum_{j=1}^m x_j X_j}\cdot e^{i\sum_{k=1}^n y_k Y_k}\right] = \quad \left(\begin{array}{l}\text{Fazendo}\\ a = \sum_{j=1}^m x_j X_j\\ b = \sum_{k=1}^n y_k Y_k\end{array}\right)$$

$$= E\left[e^{ia}\, e^{ib}\right] = E\left[(\cos a + i\,\mathrm{sen}\,a)\cdot(\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b)\right] =$$

$$= E\left[\cos a\cos b + i\cos a\,\mathrm{sen}\,b + i\,\mathrm{sen}\,a\cos b + i^2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\right]$$

Agora fazendo: $g_1(\underset{\sim}{X}) = \cos a = \cos\left(\sum_{j=1}^m x_j X_j\right)$, $g_2(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{sen}\left(\sum_{j=1}^m x_j X_j\right)$

$g_3(\underset{\sim}{Y}) = \mathrm{sen}\left(\sum_{k=1}^n y_k Y_k\right)$, $g_4(\underset{\sim}{Y}) = \cos\left(\sum_{k=1}^n y_k Y_k\right)$ então $g_1(\underset{\sim}{X}), g_2(\underset{\sim}{X}),$

usando o fato (*) temos $g_1(\underset{\sim}{X})$ indep $g_3(\underset{\sim}{Y})$, $g_1(\underset{\sim}{X})$ " $g_4(\underset{\sim}{Y})$, $g_2(\underset{\sim}{X})$ " $g_3(\underset{\sim}{Y})$, $g_2(\underset{\sim}{X})$ " $g_4(\underset{\sim}{Y})$

Agora como g_1, g_2, g_3, g_4 são limitadas $\Longrightarrow$ g_1, g_2, g_3 e g_4 são integráveis

$$\Rightarrow \begin{cases} E(g_1 g_3) = Eg_1\, Eg_3 \\ E(g_1 g_4) = Eg_1\, Eg_4 \\ E(g_2 g_3) = Eg_2\, Eg_3 \\ E(g_2 g_4) = Eg_2\, Eg_4 \end{cases}$$

Assim: $$\varphi_{X_1,X_2,\dots X_m,Y_1,\dots Y_n}(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,\dots y_n) = E\left(g_1g_4 + ig_1g_3 + g_2g_4 + i^2 g_2g_3\right) =$$

$$= \left(Eg_1g_4 + iEg_1g_3 + Eg_2g_4 + i^2 Eg_2g_3\right) =$$

$$= \left(Eg_1Eg_4 + iEg_1Eg_3 + Eg_2Eg_4 + i^2Eg_2Eg_3\right) = \left(Eg_1 + iEg_2\right)\left(Eg_4 + iEg_3\right) =$$

$$= E(g_1 + ig_2)\cdot E(g_4 + ig_3) = E\, e^{i\sum_{j=1}^{m} x_j X_j} \cdot E\, e^{i\sum_{r=1}^{n} y_r Y_r} =$$

$$= \varphi_{X_1,X_2,\dots X_m}(x_1,x_2,\dots,x_m)\cdot \varphi_{Y_1,Y_2,\dots Y_n}(y_1,y_2,\dots y_n) \quad \forall\, (x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,\dots y_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$\Rightarrow$: A prova de suficiência é feita através do Teorema da unicidade, usando o resultado acima. Suponha por absurdo que $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ não são indep. então pelo teorema da unicidade $\varphi_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}} \neq \varphi_{\underset{\sim}{X}}\cdot\varphi_{\underset{\sim}{Y}}$ para algum $(x_1,\dots x_m,y_1,\dots y_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$ (absurdo, pois supomos $\varphi_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}} = \varphi_{\underset{\sim}{X}}\cdot\varphi_{\underset{\sim}{Y}}$ em todo $\mathbb{R}^{n+m}$).

26. (Propriedade FC9 para vetores). Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_K)$ um vetor aleatório. Sob condições de regularidade, o momento misto $E(X_1^{m_1}X_2^{m_2}\dots X_K^{m_K})$, onde os m_j são inteiros não-negativos, poderá ser obtido derivando-se a função característica de $\underset{\sim}{X}$.

$$\left.\frac{\partial^{m_1+\dots+m_K}}{\partial t_1^{m_1}\dots\partial t_K^{m_K}}\varphi_{\underset{\sim}{X}}(t_1,\dots,t_K)\right|_{\underset{\sim}{t}=\underset{\sim}{0}} = i^{m_1+\dots m_K}\, E(X_1^{m_1}\dots X_K^{m_K})$$

Demonstre este resultado no caso em que $K=2$ e $m_1=m_2=1$, sob a condição de que EX_1, EX_2 e EX_1X_2 sejam finitas, i.e., demonstre que

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2)\right|_{t_1=t_2=0} = -EX_1X_2$$

Como $\varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \int e^{i(t_1x_1+t_2x_2)} dF_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$

Se pudéssemos diferenciar dentro do sinal de integração, teríamos

$$\frac{\partial \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \int_{\mathbb{R}^2} i x_1 e^{i(t_1x_1+t_2x_2)} dF_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \int_{\mathbb{R}^2} i^2 x_1 x_2 e^{i(t_1x_1+t_2x_2)} dF_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

e então

$$\left.\frac{\partial \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{\underset{\sim}{t}=0} = -\int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \, dF_{X_1X_2}(x_1,x_2) = -E(X_1X_2)$$

Agora, justificaremos o procedimento acima adotado através do Teorema da Convergência Dominada.

$$\frac{\partial \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{X_1,X_2}(t_1+h,t_2)-\varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)}{h} = \lim_{h\to 0} E\left(\frac{e^{i[(t_1+h)X_1+t_2X_2]} - e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}}{h}\right)$$

Agora $\left|\frac{e^{i[(t_1+h)X_1+t_2X_2]} - e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}}{h}\right| = \left|e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}\right| \cdot \left|\frac{e^{ihX_1}-1}{h}\right| \leq \left|\frac{e^{ihX_1}-1}{h}\right|$.

e $\left|\frac{e^{ihX_1}-1}{h}\right| = \left|\frac{\int_0^h iX_1 e^{isX_1}ds}{h}\right| = |X_1| \cdot \left|\frac{\int_0^h e^{isX_1}ds}{h}\right| \leq |X_1|$ que é integrável

Então, pelo Teorema da convergência dominada, está justificada a 1ª diferenciação dentro da integral. Analogamente pode-se justificar a 2ª diferenciação (pois $|X_2|$ é integrável ($EX_2<\infty$, $E X_1X_2 < \infty$))

27- Suponha que $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ tenha distribuição multinomial com parâmetros $p_1, \dots, p_k$ e n (esta distribuição é definida no exercício 7 do capítulo 4)

(a) Mostre que a função característica de $\underset{\sim}{X}$ é

$$\varphi_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^n, \quad \underset{\sim}{t} \in \mathbb{R}^k$$

Scanned with CamScanner

$l, \dots, n;\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1, \quad p_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$

$$f(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} (p_1)^{n_1} \dots (p_k)^{n_k} & , \sum_{j=1}^{K} n_j = n, \ n_j \in \mathbb{N} \ j = 1, 2, \dots k \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$S = \{(n_1, \dots, n_k) : \sum_{j=1}^{k} n_j = n, \ n_j \in \mathbb{N}\}$

Assim: $\varphi_{\underset{\sim}{X}}(t_1, t_2, \dots, t_k) = E\left[e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_k X_k)}\right] = \sum_{S} e^{i(t_1 n_1 + \dots + t_k n_k)} \cdot \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} (p_1)^{n_1} \dots (p_k)^{n_k} =$

$$= \sum_{S} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} (p_1 e^{it_1})^{n_1} \cdot (p_2 e^{it_2})^{n_2} \dots (p_k e^{it_k})^{n_k} =$$

$$= (p_1 e^{it_1} + p_2 e^{it_2} + \dots + p_k e^{it_k})^{n} \quad \forall (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

(b) Utilize o exercício 26 para calcular a covariância entre X_j e X_l, $j \neq l$.

temos: $\operatorname{cov}(X_l, X_j) = E X_l X_j - E X_l E X_j$

Supondo as condições de regularidade necessárias: $E X_l < \infty$ $E X_j < \infty$ e $E X_l X_j < \infty$ e usando o exercício 26 temos:

$$i\, E X_l = \left.\frac{\partial \varphi(t_1, \dots, t_k)}{\partial t_l}\right|_{\underset{\sim}{t}=0} = \frac{\partial}{\partial t_l}\left[(p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^{n}\right]\Bigg|_{\underset{\sim}{t}=0} = \left[n (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^{n-1} \cdot p_l\, i\, e^{it_l}\right]\Bigg|_{\underset{\sim}{t}=0} =$$

$$= i\, n\, p_l$$

Assim: $E X_l = n p_l$ e analogamente $E X_j = n p_j$

E: $i^2 E X_j X_l = \dfrac{\partial}{\partial t_j}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_l}(t_1, \dots, t_k)\right)\Bigg|_{\underset{\sim}{t}=0} = \dfrac{\partial}{\partial t_j}\left(n p_l\, i\, e^{it_l} (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^{n-1}\right)\Bigg|_{\underset{\sim}{t}=0} =$

$= \left\{-n(n-1) p_l p_j\, e^{it_l} \cdot e^{it_j} (p_1 e^{it_1} + \dots + p_k e^{it_k})^{n-2}\right\}\Big| \quad = -n(n-1) p_l p_j$

então: $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = n(n-1)p_i p_j - n^2 p_i p_j = -n p_i p_j$.

7- (Generalização da proposição 6.3) (a) Demonstre que se $Y_1, Y_2, \dots$ e X tomam somente os valores $x_1, x_2, \dots$ então convergência pontual das funções de probabilidade implica convergência em distribuição.

Para $\varepsilon > 0$ escolhemos N tal que $\sum_{k=1}^{N} p(x_k) \geq 1 - \varepsilon \Rightarrow \sum_{k>N} p(x_k) < \varepsilon$ (I).

Agora $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_{Y_n}(x) = \sum_{x_k \leq x} p_n(x_k) = \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p_n(x_k) + \sum_{k > N:\, x_k \leq x} p_n(x_k)$ (II) Onde:

$$\sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) \qquad \begin{array}{l}\forall \varepsilon>0 \\ n \text{ suf. grande}\end{array}: -\varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) < \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p_n(x_k) < \varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) \quad \text{(III)}$$

e $$\sum_{k > N:\, x_k \leq x} p_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k > N:\, x_k \leq x} p(x_k) \leq \sum_{k>N} p(x_k) \overset{(I)}{<} \varepsilon \Rightarrow \begin{array}{l} n \text{ suficient.} \\ \text{grande}\end{array}: 0 \leq \sum_{k > N:\, x_k \leq x} p_n(x_k) < \varepsilon \quad \text{(IV)}$$

Agora de (III) e (IV) em (II) temos: n suficient. grande

$$-\varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) < F_{Y_n}(x) < 2\varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) \quad \text{(V)}$$

Agora, como: $F_X(x) = \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) + \sum_{k > N:\, x_k \leq x} p(x_k) \leq \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) + \sum_{k>N} p(x_k) \overset{(I)}{<} \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) + \varepsilon$

e portanto: $-2\varepsilon + F_X(x) < -2\varepsilon + \varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k) = -\varepsilon + \sum_{k \leq N:\, x_k \leq x} p(x_k)$ (VI)

$2\varepsilon + \sum p(x_k) \leq 2\varepsilon + \sum p(x_k) = 2\varepsilon + F_X(x)$

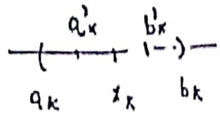
De (VI) em (V), temos que para n suficientemente grande: $\forall \varepsilon > 0$

$$-2\varepsilon + F_X(x) \leq -\varepsilon + \sum_{k \leq N : x_k \leq x} p(x_k) < F_{X_n}(x) < 2\varepsilon + \sum_{k \leq N : x_k \leq x} p(x_k) \leq 2\varepsilon + F_X(x)$$

$$-2\varepsilon + F_X(x) < F_{X_n}(x) < 2\varepsilon + F_X(x) \Rightarrow |F_X(x) - F_{X_n}(x)| < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} F_X(x) \quad \overset{\forall x \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

(b) Demonstre que vale a recíproca de (a) se os pontos x_k são isolados, i.e., se para todo k existe um intervalo aberto (a_k, b_k) que contém x_k e não contém outro x_j.



Tomando a'_k e b'_k tais que: $a_k < a'_k < x_k$ e $x_k < b'_k < b_k$ (isto pode ser feito pois $a_k < x_k < b_k$)

então:

$$P_n(x_k) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$$

Agora a e b são pontos de continuidade de F_X pois $P(X=a) = P(X=b) = 0$,

então $F_{X_n}(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(b)$ e $F_{X_n}(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(a)$ pois $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, então:

$$P_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(b) - F_X(a) = P(x_k) \quad \text{para todo } k = 1, 2, \ldots$$

29- Cem mil passas são misturadas em uma massa que posteriormente será dividida em partes iguais para fazer dez mil bolos tipo inglês. Mais tarde um bolo será escolhido ao acaso e será contado o número de passas contido nele.

(a) Explique porque você pode modelar este experimento usando (a). Posso modelar este experimento usando a distribuição de Poisson, e assumir que:

1) Duas passas não ocupam o mesmo espaço

2) O número de passas depende apenas do volume de massa escolhido, não do local, ou seja a mistura é homogênea (incrementos estacionários)

3) O número de passas em um determinado volume é indep do número de passas em outro volume que não intersecciona o anterior, ou seja quantidade de massa é muito grande (incrementos independentes)

então $\lambda = \dfrac{100\,000}{2.000} \dfrac{\text{passa}}{\text{Volume total dos bolos}} = 50$

assim: $P(N=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 100.000$

(b) o modelo em (a) é uma aproximação. Qual seria a distribuição exata do resultado do experimento.

Para cada um dos possíveis bolos escolhidos supomos que as passas são lançadas de uma maneira uniforme na massa e independentemente então a v.aleatória nº de passas num bolo será uma soma independente de v.a com probabilidade $\frac{1}{2000}$ de sucesso e $\frac{1999}{2000}$ de insucesso. Então:

$$P(N=k) = \binom{100.000}{k} \cdot \left(\frac{1}{2000}\right)^k \left(\frac{1999}{2000}\right)^{100000-k}$$

(c) Qual a probabilidade de não encontrar passa alguma no bolo, segundo cada um dos modelos? As duas probabilidades são realmente iguais?

no primeiro caso temos: $P(X=0) = \frac{50^0}{0!} e^{-50} = e^{-50} = 1{,}93 \times 10^{-22}$

no segundo: $P(X=0) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2000}\right)^0 \cdot \left(\frac{1999}{2000}\right)^{100.000} = 1{,}90 \times 10^{-22}$

30- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuidas tais que $X_n \sim U[0,\theta]$, onde $\theta > 0$. Demonstre que $Y_n = \sqrt{n}\{\log(2\bar{X}_n) - \log\theta\}$ converge em distribuição para $N(0, \frac{1}{3})$, onde $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

temos que: $EX_1 = \frac{\theta}{2}$ $\quad EX_1^2 = \int_0^\theta x^2 \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta^2}{3} \Rightarrow \operatorname{Var} X_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

Agora $X_1, X_2, \ldots$ v.a iid e integráveis então pelo Teorema Central do Limite.

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2) \quad \text{então} \quad \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)$$

Agora usando o Teorema de Slutsky ou a proposição 6.7:

$$\sqrt{n}(2\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$$

?

Desta vez usando a proposição 6.8, sendo $g(x) = \log x$ contínua e $g'(\theta) = \frac{1}{\theta}$:

$$\sqrt{n}(2\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right) \xRightarrow{\text{Prop 6.8}} \sqrt{n}(\log 2\bar{X}_n - \log\theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\theta^2}{3\theta^2}\right)$$

então $\sqrt{n}(\log 2\bar{X}_n - \log\theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{1}{3}\right)$

31- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. indep e ident dist tais que $EX_1 = 0$. Ache o limite quando $n \to \infty$ da f.c. de $Y_n = \cos(\bar{X}_n)$ onde $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

Pela Lei Forte de Kolmogorov $\bar{X}_n \xrightarrow{q.c.} EX_1 = 0$. O que pela proposição 6.5 $\Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \xRightarrow[\text{como } \cos x \text{ é f. contínua}]{\text{Prop. 6.7}} \cos(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \cos(0) = 1$

Agora usando o Teorema de Helly-Bray então: $\varphi_{\cos(\bar{X}_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_1(t) = Ee^{it1} = e^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

32. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. com $EX_1 = 0$ e $EX_1^2 = 2$. Ache o limite em distribuição das seguintes seqüências:

(a) $Y_1, Y_2, \ldots$ onde $Y_n = \dfrac{\sqrt{n}\,(X_1 + \cdots + X_n)}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$

temos: Pelo Teorema Central do Limite aplicado a seq. $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. integráveis, então:

$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n)}{\sqrt{n}\,\sqrt{\operatorname{Var} X_1}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \Rightarrow \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1) \overset{\text{prop 6.7 ou Slutsky}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,2) \qquad (\text{I})$$

agora seja $X_1^2, X_2^2, \ldots$ então esta é uma seq. v.a. indep (propriedade hereditária) e indep. dist. e integráveis, então pela Lei Fraca de Khintchin:

$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} EX_1^2 = 2 \qquad (\text{II})$$

Agora, pelo Teorema de Slutsky e (I) e (II), como $2 \neq 0$ e $P\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \neq 0\right) = 1$:

$$\frac{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}}{\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}} = \frac{\sqrt{n}\,(X_1 + \cdots + X_n)}{(X_1^2 + \cdots + X_n^2)} \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

(b) $Z_1, Z_2, \ldots$ onde $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}}$

Temos através de (II), usando a prop. 6.7 onde $g(x) = \sqrt{x}$, que é contínua em toda reta.

então: $$\sqrt{\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}} \xrightarrow{P} \sqrt{2} \qquad (\text{III})$$

Agora de (I) e (III) usando o Teorema de Slutsky, como $\sqrt{2} \neq 0$ e $P\left(\sqrt{\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}} \neq 0\right) = 1$

$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\ldots} \quad X_1 + \cdots + X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

VI:2

33- Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ e $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. tais que $P(X_n=0)=0=P(X=0)$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, onde c é constante. Mostre que $\dfrac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dfrac{c}{X}$

Seja $g(x)=\frac{1}{x}$ contínua em $\mathbb{R}-\{0\}$. Mas $P(X_n \neq 0)=P(X=0)=0$. Então pela prop. 6.7, temos:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow \frac{1}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{X}$$

Agora aplicando o Teorema de Slutsky temos:

Como $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dfrac{1}{X}$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$: $\dfrac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dfrac{c}{X}$

34- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. iid tais que $EX_1=0$ e $Var X_1=\sigma^2$, onde $0<\sigma^2<\infty$. Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. iid tais que $EY_1=\mu$ onde $\mu \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\overline{Y}_n + \sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(\mu, \sigma^2) \text{ onde } \overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots X_n}{n}, \quad \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$$

temos que $X_1, X_2 \ldots$ v.a. iid e integ. então pelo teorema central do limite:

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2) \quad (\text{I})$$

temos que $Y_1, Y_2 \ldots$ v.a. iid e integrante pela Lei Fraca de Khintchin:

$$\overline{Y}_n \xrightarrow{P} EY_1 = \mu \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) pelo Teorema de Slutsky: $\overline{Y}_n + \sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(\mu, \sigma^2)$

35- Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. iid com $EX_1=\mu_X$, $Var X_1=\sigma_X^2<\infty$ e $Y_1, Y_2 \ldots$ v.a. iid com $EY_1=\mu_Y$, $Var Y_1=\sigma_Y^2<\infty$

Suponha que os X_j e Y_k sejam independentes e que $\mu_X \neq 0$. Ache o limite em distribuição de

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right) \text{ onde } \begin{cases} \overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \\ \overline{Y}_n = \dfrac{Y_1 + \cdots Y_n}{n} \end{cases}$$

(Sugestão. $Z_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{\mu_X \overline{Y}_n - \mu_Y \overline{X}_n}{\mu_X \overline{X}_n}\right)$. Use o exercício 13) primeiramente de (ii), temos:

$$\frac{E(T_n-S_n)^2}{Var\,T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \xRightarrow[\text{em } \mathbb{R}]{\text{Como } g(x)=\sqrt{x} \text{ é f contínua}} \frac{\sqrt{E(T_n-S_n)^2}}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (I)$$

Agora, usando a desigualdade de Jensen, temos para $h(x)=x^2$, função convexa em $\mathbb{R}$:

$$E(T_n-S_n)^2 \geq [E(T_n-S_n)]^2 \quad \text{então de (I):}$$

$$\frac{E(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} = \frac{\sqrt{[E(T_n-S_n)]^2}}{\sqrt{Var\,T_n}} \leq \frac{\sqrt{E(T_n-S_n)^2}}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{E(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (II)$$

Também temos de (ii) que, usando a desigualdade clássica de Tchebychev.

$$P\left(\left|\frac{T_n-S_n}{\sqrt{Var\,T_n}}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(|T_n-S_n| \geq \varepsilon\sqrt{Var\,T_n}\right) \leq \frac{Var(T_n-S_n)}{\varepsilon^2\,Var\,T_n} \leq \frac{E(T_n-S_n)^2}{\varepsilon^2\,Var\,T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{(ii)} 0$$

então: $\frac{(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow{P} 0 \quad (III)$

Agora de (i): $\frac{T_n-ET_n}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

e de (II) $\frac{E(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{E(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad (IV)$

agora de (IV) e (III), usando o Teorema de Slutsky, temos:

$$\frac{E(T_n-S_n)-(T_n-S_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \xRightarrow[c=0]{\text{Prop. 6.6}} \frac{S_n-ES_n-(T_n-ET_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} \xrightarrow{P} 0 \quad (V)$$

então de (i) e (V), usando o Teorema de Slutsky, temos:

$$\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{V.T_n}} = \frac{S_n-ES_n-(T_n-ET_n)}{\sqrt{V.T_n}} + \frac{T_n-ET_n}{\sqrt{V.T_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

Temos para $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. i.i.d e integráveis, pelo T.C.L: $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2)$

e daí para $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a. i.i.d e integráveis pelo T.C.L. $\sqrt{n}(\overline{Y}_n - \mu_Y) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_Y^2)$

Agora pelo teorema de Slutsky ou pela proposição 6.7 temos:

$$V_n = \sqrt{n}(\mu_X \overline{Y}_n - \mu_X \mu_Y) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu_X^2 \sigma_Y^2)$$

$$W_n = \sqrt{n}(\mu_X \mu_Y - \mu_Y \overline{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu_Y \sigma_Y^2)$$

Agora como V_n indep W_n todo n então pelo exercício 13 temos:

$$V_n + W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu_X^2 \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_Y^2) \quad \text{ou seja:}$$

$$\sqrt{n}(\mu_X \overline{Y}_n - \mu_Y \overline{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \mu_X^2 \sigma_X^2 + \mu_Y^2 \sigma_Y^2) \quad (\mathrm{I})$$

Por outro lado para $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d e integ., aplicando a Lei Fraca dos grandes números:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} EX_1 = \mu_X \quad \xrightarrow[\text{Slutsky}]{\text{prop. 6.7 ou}} \quad \mu_X \overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu_X^2 \quad (\mathrm{II})$$

Agora usando o Teorema de Slutsky a (I) e (II) e lembrando que $\mu_X \neq 0$ e $P(X_n \neq 0) = 1$ (pois por absurdo $P(X_n = 0) = 1 \Rightarrow \mu_X = 0$ (absurdo!)) então

$$\sqrt{n}\left(\frac{\mu_X \overline{Y}_n - \mu_Y \overline{X}_n}{\mu_X \overline{X}_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2}\sigma_Y^2\right)$$

36. (Este resultado é útil na Estatística Não-Paramétrica) Sejam $T_1, T_2, \ldots$ e $S_1, S_2, \ldots$ seq. de v.a. Mostre que se (i) $\frac{T_n - ET_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, T_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ e (ii) $\frac{E(T_n - S_n)^2}{\mathrm{Var}\, T_n} \to 0$, segue-se que $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

(Sugestão. Prove primeiro de (ii) que $\frac{ET_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\, T_n}} \to 0$ e $\frac{(T_n - S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, T_n}} \xrightarrow{P} 0$. Depois, a desigualdade do triângulo várias vezes para provar que $\frac{\mathrm{Var}\, S_n}{\mathrm{Var}\, T_n} \to 1$.)

Agora, temos também que:

$$\frac{Var(T_n-S_n)}{Var\,T_n} \leq \frac{E(T_n-S_n)^2}{Var\,T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (VII)$$

Porem:
$$Var(T_n-S_n) = E\left(\left[(T_n-S_n)-E(T_n-S_n)\right]^2\right) = E\left(\left[(T_n-ET_n)-(S_n-ES_n)\right]^2\right) =$$

$$= E\left((T_n-ET_n)^2+(S_n-ES_n)^2-2\left[(T_n-ET_n)(S_n-ES_n)\right]\right) =$$

$$= Var\,T_n + Var\,S_n - 2E\left[(T_n-ET_n)(S_n-ES_n)\right]$$

Agora, usando a desigualdade triangular:

$$E\left[(T_n-ET_n)\cdot(S_n-ES_n)\right] \leq E\left|(T_n-ET_n)(S_n-ES_n)\right| \leq \sqrt{E(T_n-ET_n)^2\cdot E(S_n-ES_n)^2} = \sqrt{Var\,T_n\,Var\,S_n}$$

Assim:
$$Var(T_n-S_n) \geq Var\,T_n + Var\,S_n - 2\sqrt{Var\,T_n\cdot Var\,S_n} = \left(\sqrt{Var\,S_n}-\sqrt{Var\,T_n}\right)^2$$

assim
$$\frac{\left(\sqrt{Var\,S_n}-\sqrt{Var\,T_n}\right)^2}{Var\,T_n} = \left(\sqrt{\frac{Var\,S_n}{Var\,T_n}}-1\right)^2 \leq \frac{Var(T_n-S_n)}{Var\,T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{(VII)} 0$$

então:
$$\left(\sqrt{\frac{Var\,S_n}{Var\,T_n}}-1\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Como $\sqrt{x}$ é f contínua em $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{Var\,S_n}{Var\,T_n}}-1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

e portanto
$$\sqrt{\frac{Var\,S_n}{Var\,T_n}} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{Var\,T_n}{Var\,S_n}} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{Var\,T_n}{Var\,S_n}} \xrightarrow{P} 1 \quad (VIII)$$

Agora, Usando o Teorema de Slutsky em (VIII) e (VI), temos:

$$\sqrt{\frac{Var\,T_n}{Var\,S_n}}\cdot\frac{(S_n-ES_n)}{\sqrt{Var\,T_n}} = \frac{S_n-ES_n}{\sqrt{Var\,S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

37- (Continuação do exemplo 10). (a) Dê uma demonstração alternativa do fato de que $\sum p_n\varphi_n$ é função característica, provando que $\sum p_n F_n$ é função de distribuição, onde F_n é a função de distribuição correspondente a φ_n.

Sabemos que para qualquer função de distribuição existe uma variável aleatória que II-31
possua esta distrib de probabilidade. Suponos inicialmente que $\sum p_n F_n$ seja f.d.
se F_n é f dist. para todo n, $p_n \geq 0$ $\forall n$ e $\sum p_n = 1$. Então, sejam:

X_1 v.a com f d. F_1 e f.c φ_1
X_2 v.a com f d F_2 e f.c φ_2
⋮

e Y v.a com f d $F_Y(y) = \sum p_n F_n(y) \Rightarrow dF_Y(y) = \sum p_n dF_n(y)$

assim: $$\varphi_Y(t) = E e^{itY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \cdot \sum p_n dF_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum e^{ity} p_n dF_n(y).$$

Agora como $e^{ity} p_n$ é contínuo e limitado pois $|e^{ity} \cdot p_n| = |e^{ity}| \cdot |p_n| \leq 1$ então:

$$\varphi_Y(t) = \sum p_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} dF_n(y) = \sum p_n \varphi_{X_n}(t) = \sum p_n \varphi_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Assim $\sum p_n \varphi_n$ é f. característica, pois é f.c. da distribuição $F_Y(y)$.

Resta provar $F = \sum p_n F_n$ é função de distribuição de probabilidade, ou seja

F é tal que:

a.1) F é não decrescente

a.2) F é contínua a direita

a.3) $F(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$; $F(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$

a.1. $x > y \Rightarrow F(x) - F(y) = \sum p_n F_n(x) - \sum p_n F_n(y) = \sum p_n (F_n(x) - F_n(y)) =$

agora como F_n é f.d $\Rightarrow (F_n(x) - F_n(y)) \geq 0, \forall n$, então como $p_n \geq 0$ $\forall n$:

$F(x) - F(y) \geq 0 \quad \forall x > y, \; x, y \in \mathbb{R}$

a.2 $$\lim_{t \downarrow x} F(t) = \lim_{t \downarrow x} \sum p_n F_n(t) \overset{\substack{\sum p_n F_n \text{ é limitada } |\sum p_n F_n(t)| \leq 1, \forall t \\ \downarrow}}{=} \sum p_n \lim_{t \downarrow x} F_n(t) = \left(\begin{array}{c}\text{Como } F_n \text{ é} \\ \text{contínua a} \\ \text{direita}\end{array}\right) =$$

$= \sum p_n F_n(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \sum p_n F_n(x) = \sum p_n \lim_{x\to-\infty} F_n(x) = \left(\begin{array}{c} F_n \text{ é tal que} \\ F_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0, \forall n \end{array} \right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \sum p_n F_n(x) = \sum p_n \lim_{x\to\infty} F_n(x) = \left(\begin{array}{c} F_n \text{ é tal que} \\ F_n(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1, \forall n \end{array} \right) = \sum p_n = 1$$

b) Prove que $\varphi(t) = \frac{1+e^{-t^2/2}}{2}$ é uma função característica. Exiba a função de distribuição correspondente. Essa distribuição é de que tipo?

Seja $\begin{cases} \varphi_{X_1}(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R} \text{ então pelo exercício 9 b) } P(X_1 = 0) = 1 \text{ ou seja a distribuição é massa ponto em zero.} \\ \varphi_{X_2}(t) = e^{-t^2/2}, t \in \mathbb{R}, \text{ então } X_2 \sim N(0,1) \end{cases}$

E fazendo $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = \frac{1}{2}$ e usando o item (a); como:

$$\frac{1+e^{-t^2/2}}{2} = \varphi(t) = \sum_{n=1}^{2} p_n \varphi_{X_n} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-t^2/2}\right)$$ então $\varphi(t)$ é função característica

da distribuição $F = p_1 F_1 + p_2 F_2 \Rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{2}\left[F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x)\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x), & x < 0 \\ \frac{1}{2}(1+\Phi(x)), & x \geq 0 \end{cases}$

F_{X_1} F_{X_2}

que é uma distribuição mista de discreta e absolutamente contínua.

c) Mostre que φ definida por $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(a_n t)$ é função característica, onde $a_n \in \mathbb{R}$, $p_n \geq 0$ e $\sum p_n = 1$

Sejam as seguintes funções características:

$\varphi_{X_1}(t) = \cos(a_1 t) \xrightarrow[\text{Unicidade e exemplo 3}]{\text{Teor. da}} P(X_1 = a_1) = P(X_1 = -a_1) = \frac{1}{2}$

$\vdots$ $\vdots$

$\varphi_{X_n}(t) = \cos(a_n t) \xrightarrow{\text{Idem}} P(X_n = a_n) = P(X_n = -a_n) = \frac{1}{2}$

$\vdots$ $\vdots$

então pelo item a). $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \varphi_{x_n}(t)$ também é f.c. Assim IV-3

$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(a_n t)$ é f.c.

38. O resultado do exemplo 10 e o exercício 37(a) pode ser ainda demonstrado por um terceiro método: sejam $X_1, X_2, \ldots$ e X variáveis aleatórias independentes tais que X é discreta com $P(X=n) = p_n$, $n \geq 1$ e X_n possue função de distribuição F_n, $n \geq 1$. Seja Y a variável aleatória que é igual a X_n quando $X = n$, de modo que $Y = \sum_{n\geq 1} X_n I_{[X=n]}$

Mostre que $\varphi = \sum p_n \varphi_n$ é a função característica de Y, usando esperança condicional.

Temos que $\varphi_Y(t) = E e^{itY} = E(g(Y))$ onde $g(y) = e^{ity}$

e $g(Y)$ é integrável pois é dominada por uma v aleatória integrável:

$$|g(Y)| = |e^{itY}| = 1$$

Assim, temos do Capítulo 4 que:

$$E(g(Y)) = E\left\{ E\left(g(Y)/X \right) \right\}$$

Agora $g(Y)/_{X=n} = e^{itY/_{X=n}} = e^{itX_n} \Rightarrow E\left(g(Y)/X\right) = E\left(e^{itX_n}\right) = \varphi_n(t)$

Então $\varphi_Y(t) = E(g(Y)) = E(\varphi_n(t)) = \sum p_n \varphi_n(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

então $\varphi = \sum p_n \varphi_n$

Capítulo 7:

Teorema Central do Limite

Capítulo 7

(1) (i) $X_i \sim U[0,1]$

(ii) independência

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a satisfazendo (i), (ii) então

LGN: $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c} \dfrac{1}{2}$

TCL. $\dfrac{(X_1 + \ldots + X_n) - n\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

(2) $(X_t)_{t \geq 0} \sim$ Poisson (λ) $\quad \lambda = 10/_{min}$

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ são v.a iid com $T_1 \sim exp(\lambda)$ $\quad E T_1 = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad E T_1^2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$

a) então T.C.L: $\dfrac{(T_1 + \ldots + T_n) - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$ $\quad \text{Var } T_1 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}.$

Supomos para $n = 1000$ que: $\dfrac{T_1 + \ldots + T_{1000} - 100}{\sqrt{10}} \sim N(0,1)$

então $P(T_1 + \ldots + T_{1000} > 100) = P\left(\dfrac{T_1 + \ldots + T_{1000} - 100}{\sqrt{10}} > \dfrac{100 - 100}{\sqrt{10}} = 0\right) = \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$

b) temos $\left.\begin{array}{l} T_i \sim exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda) \\ \text{indep.} \end{array}\right\}$ então $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

então $T_1 + \ldots + T_{1000} \sim \Gamma(\overset{\alpha}{1000}, \overset{\beta}{10})$: $\left\{ f(x) = \dfrac{(10)^{1000} (10x)^{999}}{\Gamma(1000)} e^{-10x} \right.$, $0 \leq x < \infty$

então $P(T_1 + \ldots + T_{1000} > 100) = \displaystyle\int_{100}^{\infty} \dfrac{(10)^{1000} (10x)^{999}}{\Gamma(1000)} e^{-10x} \, dx$

③ $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indep $X_n \sim U[-0, n]$, $\forall n$ $\quad EX_n = \frac{n}{2}$ $\quad Var X_n = \frac{n^2}{12}$

então $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \cdot 12}$

Objetivo: $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_k| \geq \varepsilon s_n} |x_k - \mu_k|^2 \, dF_X(x) \qquad f_{X_n}(x_n) = \frac{1}{n}$$

agora:

$$\int_{|x-\mu_k| \geq \varepsilon s_n} |x_k - \mu_k|^2 \, dx = \int_{|x-\frac{k}{2}| \geq \varepsilon s_n} (x - k/2)^2 \frac{1}{k} \, dk = \frac{1}{k} \int_0^k \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 I_{\{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{k}{2}| \geq \varepsilon s_n\}} \, dx$$

Agora: $\left|x - \frac{k}{2}\right| > \varepsilon s_n \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{k}{2} \geq \varepsilon s_n \Rightarrow x \geq \varepsilon s_n + k/2 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ -x + \frac{k}{2} \geq \varepsilon s_n \Rightarrow x \leq k/2 - \varepsilon s_n & \text{(II)} \end{cases}$

A integral será nula se: $\begin{cases} \text{(I)}: & n < \varepsilon s_n + n/2 \\ & \text{e} \\ \text{(II)}: & n > n/2 - \varepsilon s_n \text{ (ivale sempre)} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{n}{2} < \varepsilon s_n$, $\quad \frac{n}{2} > -\varepsilon s_n$

então $\frac{n}{2 s_n} < \varepsilon$ (III)

$E X_k = \frac{k}{2}$ $\quad \frac{k^2}{12} - \frac{k}{2}$

$E X_k^2 =$ $\quad \frac{k^2 - 6k}{12}$

Agora $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2 s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2 \cdot \sum \frac{n^2}{12}} = 0$ então (III) vale para n suficientemente grande, então $(n > n_0)$

dado $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\mu_k| \geq \varepsilon s_n} |x - \mu_k|^2 dF_i(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n_0} \int_{|x-\mu_k| \geq \varepsilon s_n} |x-\mu_k|^2 dF_X}_{K_{n_0}} \Bigg) + \sum_{k=n_0}^{n} \int_{|x-\mu_k| \geq \varepsilon s_n} |x - \mu_k|^2 dF_X(x) \right] \frac{1}{s_n^2} =$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{n_0}}{s_n^2} = 0$. $\Rightarrow$ então pelo T.C.L de Linderberg,

$$\frac{(X_1 + \cdots X_n) - \frac{\sum n}{2}}{\sqrt{\sum n^2/12}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$

④ Suponha que $X_1, X_2, \ldots$ v.a independentes

$$P(X_n = -n) = \frac{1}{2} = P(X_n = n) \quad \therefore \quad E(X_n) = 0 \quad Var X_n = E X_n^2 = n^2$$

então

a) C. Lindenberg

$$q_n = \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_k - \mu_k| \geq \varepsilon s_n} |X_k - \mu_k|^2 \, dF_{X_k}(x)$$

$|X - \mu_n| \geq \varepsilon s_n$

$|X| \geq \varepsilon s_n \Rightarrow X \geq \varepsilon s_n$ ou $X \leq -\varepsilon s_n$

$-X \geq \varepsilon s_n$

$m \leq \varepsilon s_n$ ou $m < \varepsilon s_n$

$\varepsilon < \frac{n}{s_n}$

Agora:

$$\int_{|X - \mu_K| \geq \varepsilon s_n} |X_K - \mu_K|^2 \, dF_{X_K}(x) = 0 \quad x : \quad n < \varepsilon s_n \Rightarrow \frac{n}{s_n} < \varepsilon \quad (1)$$

No entanto $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{s_n} = \frac{n}{\sum n^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, então, para n suficientemente grande ($n > n_0$) temos que a integral é nula e

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^{n} K^2$$

assim: $\lim_{n\to} q_n = 0 \xRightarrow{\text{T.C.L Lindenberg}} \frac{(X_1 + \cdots + X_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} n^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

b) Lei dos Grandes Números:

$$\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n} \not\to 0 \quad q.c$$

Seja: $\frac{X_i}{n}$ temos $\begin{cases} A_n = [\frac{X_i}{n} \geq \varepsilon] \\ 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$, A_1, A_2 são indep

$$P(A_n) = P(X_1 \geq n\varepsilon) = 1 \quad \text{então} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1$$

$\xRightarrow{\text{B.C.}}$ $\frac{X_i}{n} \not\to 0$ q.c então $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \not\to 0$ q.c

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \max\left(0, \lim_{n\to\infty} \max_{N+1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \max_{N+1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \quad (II)$$

$$(II) \text{ então } \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n^2}{s_n^2} = 0 \Rightarrow \overset{\forall \varepsilon>0}{\exists n > n_0} \text{ t.q. } \left|\frac{\sigma_n^2}{s_n^2}\right| < \varepsilon \quad (III)$$

$(\Leftarrow)$ $A = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le N} \left(\frac{\sigma_k^2}{s_n^2}\right) = 0$ (IV) $\left(\text{pois } s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\right)$

Agora seja $\varepsilon > 0$, e faça $N = n_0$

$$\left|\max_{N+1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2}\right| = \max\left|\frac{\sigma_{n_0+1}^2}{s_{n_0+1}^2}, \ldots\right| \overset{(III)}{\le} \varepsilon$$

então $\lim \max_{N+1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0$ (V) $\Rightarrow \big((I)+(IV)+(V)\big) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0$

⑦ Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independentes com X_n tendo densidade:

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-|x|/n}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_n \text{ é exponencial dupla} \\ \text{com parametro } \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

$$EX_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n} e^{-|x|/n} dx = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{n} e^{-x/n} dx}_{E(exp(1/n))} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{n} e^{x/n} dx}_{E(-exp(\frac{1}{n}))}\right\} = 0$$

$$\text{Var } X_n = EX_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2n} e^{-|x|/n} dx = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^2}{n} e^{-x/n} dx}_{E(exp(\frac{1}{n}))^2 = \frac{2}{(\frac{1}{n})^2} = 2n^2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{n} e^{x/n} dx}_{E((-exp(\frac{1}{n}))^2 = 2n^2}\right\}$$

então

$\text{Var} X_n = EX_n^2 = 2n^2$

para $\delta = \kappa 2$

$$E|X_k - \mu_k|^4 = E(X_k)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{2n} e^{-|x|/n} dx = \frac{1}{2}\left\{ \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^4}{n} e^{-x/n} dx}_{X \sim \exp(1/n)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{x^4}{n} e^{x/n} dx}_{Y = -\exp(1/n)} \right\} =$$

$$E[(X)^4] = \frac{4!}{(1/n)^4} = 4!\, n^4 \qquad E(Y^4) = \frac{4!}{(1/n)^4} = 4$$

Agora $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ e assim $\sigma(s_n^2) = 3 \Rightarrow$

$\sigma(s_n) = 3/2$

Agora: $a = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} E|X_k - \mu_k|^4}{(s_n)^4} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4! \sum_{k=1}^{n} n^4}{s_n} \Rightarrow a = \sigma\left(\dfrac{n^5}{n^{3/2 \cdot 4}} = n^{-1}\right)$

então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} E|X_k - \mu_k|^4}{(s_n)^4} = 0 \xRightarrow{\text{T.C.L. Liapunov}} \dfrac{(X_1 + \dots + X_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

(8). Sejam $Y_1, Y_2, \dots$ v.a. independentes

$$P(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{2} = P(X_n = -n^\alpha) \Rightarrow EX_n = 0 \quad \operatorname{Var} X_n = EX_n^2 = n^{2\alpha}.$$

para $\delta = 1$ temos.

$$E|Y_k - \mu_k|^3 = E|X_k|^3 = n^{3\alpha} \quad , \quad S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} \Rightarrow \sigma(S_n^2) = 2\alpha$$

$\alpha > -\frac{1}{3}$ para α

$\sigma(\Sigma) = (2\alpha + 1)$

$\Rightarrow \sigma(s_n) = \left(\dfrac{2\alpha+1}{2}\right) = (\alpha +$

então $a = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} E|Y_k - \mu_k|^3}{(s_n)^3} \Rightarrow \sigma(s_n)^3 = \left(\dfrac{2\alpha+1}{2}\right)^3$

$\alpha > -1/2$ $\quad$ $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\text{ordem}(a) = \sigma\left(\frac{\sum n^{3\alpha}}{(s_n)^3}\right) = \sigma\left(\frac{3\alpha + 1}{3\alpha + 1/2}\right) = \sigma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

então $\lim_{n\to\infty} a = 0 \xRightarrow{\text{T.C.L. Liapunov}} \dfrac{(X_1 + \dots + X_n)}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}\right)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

(8) Seja $X_1, Y_1, X_2, \ldots$ v.a indep. sendo $\begin{cases} X_n \sim U[0,1] & n = 1, \ldots \\ Y_n \sim U[0,2] & n = 1, \ldots \end{cases}$

a) $Z_{2n-1} = X_n$ $\quad E(Z_{2n-1}) = E(X_n) = \frac{1}{2}$, $Var(Z_{2n-1}) = var(X_n) = \frac{1}{12}$

$Z_{2n} = Y_n$ $\quad E(Z_{2n}) = E(Y_n) = 1$, $var(Z_{2n}) = var(Y_n) = \frac{1}{3}$

Agora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Z_n)}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(Z_{2n-1})}{(2n-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{var(Z_{2n})}{2n^2} =$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{12(2n-1)^2}}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3.2n^2}}_{<\infty} < \infty$$

aplicando a 1ª lei forte de Kolmogorov, temos:

$$\frac{\sum Z_n - E(\sum Z_n)}{n} \xrightarrow{q.c} 0$$

Agora $E\left(\sum_{k=1}^{k} Z_n\right) = \begin{cases} \frac{k}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}k & k \text{ par} \\ \frac{(k-1)}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3(k-1)}{4} + \frac{1}{2} & k \text{ impar} \end{cases}$

Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E(\sum_{1:1}^{k} Z_n)}{k} = \begin{cases} \dfrac{\frac{3}{4}k}{k} = \frac{3}{4} & k \text{ par} \\ \dfrac{3(k-1)}{4k} + \dfrac{1}{2k} \to \frac{3}{4} & k \text{ impar} \end{cases}$

então $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c} \dfrac{3}{4}$

b) $\delta = 1$ $\quad E|X_n - \frac{1}{2}|^3 \leq E|X_n|^3 = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

$E|Y_n - 1|^3 \leq E|Y_n|^3 = 2\int_0^2 x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} E|Z_k - \mu_{Z_k}|^3 \leq \frac{n}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3n}{8}$$

agora $s_n^2 = Var\, S_n \geq \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24}(n-1) \Rightarrow \theta(s_n) = n^{1/2}$

assim $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum E|Z_k - \mu_{Z_k}|^3}{(s_n)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{k.n}{(n^{1/2})^3} = 0$

(12) Sim, pois: $Z_1, Z_2, \dots$ v.a iid com:

$$P(Z_1 \leq z) = P(X_1 \leq z)\frac{1}{2} + P(Y_1 \leq z)\frac{1}{2} \Rightarrow F_{Z_1}(z) = \frac{1}{2}\left(F_{X_1}(z) + F_{Y_1}(z)\right)$$

então: $$E Z_1 = \int z \, dF_{Z_1}(z) = \int z \left\{\frac{1}{2} dF_{X_1}(z) + \frac{1}{2} dF_{Y_1}(z)\right\} = \frac{1}{2}\left(EX_1 + EY_1\right)$$

e $$E Z_1^2 = \int z^2 \, dF_{Z_1}(z) = \frac{1}{2} EX_1^2 + \frac{1}{2} EY_1^2$$

portanto: $$\mathrm{Var}\, Z_1 = EZ_1^2 - (EZ_1)^2 = \frac{1}{2}\left(EX_1^2 + EY_1^2\right) - \frac{1}{4}\left(EX_1 + EY_1\right)^2 < \infty$$

assim: sendo $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, usando o T.C.L temos:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n - nEZ_1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\mathrm{Var} Z_1}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$$