1. Informes (Carteir, Lista de Vreo, e Bolsistas)

2. Sobre o curso
Página, Listas, Provas, Crit. Aprov.
Livros, "Cronograma em aberto",
Monitoria, Começar + cedo
. Introdução: Fen. determ. e aleatór.
Contar elementos de conjunto finito
Hist. sobre Combin. (Ler Cap. I)

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Maicon A. Pinheiro

Cronograma

1. Revisão de Conjuntos 4
2. Princípio Aditivo, Multiplicativo e Permutações Simples 5
3. Arranjos Simples e Combinações Simples 8
4. Permutações Circulares, Permutações com elementos nem todos distintos 9
5. Combinações Completas 10
6. Princípio da Inclusão-Exclusão 11
7. Permutações Caóticas 12
8. Lemas de Kaplansky 15
9. Princípio da Reflexão 16
10. Princípio das Gavetas de Dirichlet 17
11. Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton 18
12. Aula de Exercícios 19
13. Monitoria 22
14. Prova 1 23
15. Aula de Revisão 24
16. Probabilidade 29
17. Propriedades da Probabilidade 30
18. Probabilidade Condicional 31
19. Teorema de Bayes e Independência 1
20. Independência e Independência Condicional 2
21. Exercícios 5
22. Variável Aleatória 6
23. Distribuição de Variável Aleatória, Esperança e Variância 7
24. Propriedades da Variância, Variáveis Aleatórias Bivariadas 8
25. Principais Modelos Discretos: Uniforme, Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica 9
26. Geométrica, Binomial Negativa, Poisson 19
27. Exercícios 20
28. Prova 2 21
29. Revisão 22
30. Prova 3 23

A. INFORMES GERAIS

Bom dia pessoal. Meu nome é Maicon Aparecido Pinheiro. Sou aluno do programa de doutorado em Estatística e serei o professor responsável pelo curso. Antes de começar o conteúdo, darei alguns recados:

- Não será aceita a troca de turma;
- Não serão permitidos alunos ouvientes;
- Caso não encontre o nome na lista, coloque-o no final da lista e ao término da aula. Procure a secretaria do verão;
- Para receber o certificado, precisa-se de frequência mínima de 85% (4 faltas) e nota final maior que 5;
- Os certificados para os aprovado poderão ser retirados a partir de agosto de 2017 na secretária de verão;
- Os alunos bolsistas deverão comparecer a secretária de verão, sala 14-B, para retirar a **ficha de acompanhamento**, que deverá ser assinada, semanalmente, pelo ministrante do curso;
- Os tickets serão vendidos na secretaria de verão, no valor de R$ 6,00 cada.

B. SOBRE O CURSO

Em relação ao curso, nós teremos quatro Listas ao todos. A primeira já está disponível no site `www.ime.usp.br/~pinheiro`. Aliás, nesse endereço vocês encontrarão um calendário com as datas das atividades. Além das quatro listas, haverá duas provas: a primeira no dia 26/01 e a segunda em 14/02. A média final MF será dada por

$$MF = \overset{0,85}{0,8}MP + \overset{0,15}{0,2}ML, \tag{0.1}$$

em que MF e MP são médias aritméticas das provas e das listas, respectivamente.

Vocês terão também monitorias a cada semana. Amanhã, caso não ocorra algum imprevisto, ele virá se apresentar e definir os horários com vocês. A proposta inicial é

terça e quinta, das $\overset{:30}{14}$ *às* $\overset{,30}{15}hs$.

Em função disso, já peço que vocês pensem um pouco sobre opções.

Ah, outra coisa: o curso está marcado para começar às $08hs$ e termina em torno das $09:55hs$. Na semana passada recebi um e-mail em que um dos alunos precisaria sair um pouco mais cedo por causa do trabalho. Alguém teria dificuldades caso o curso começasse uns 10 minutos mais cedo? Caso um não possa, segue como combinado.

Nesse curso, nos veremos métodos de contagem e aplicaremos os mesmos no estudos de probabilidades em espaços discretos. Para vocês terem uma ideia do panorama geral, vamos pensar um pouquinho... Alguns fenômenos da natureza podem ser modelados por algumas equações matemáticas de maneira determinística (um ciclista com velocidade fixa de 20Km/h terá percorrido 100km após 5 horas de percurso). Esse é um exemplo de fenômeno determinístico, isto é, se repetirmos o mesmo sob as mesmas condições, teremos os mesmos resultados. Por outro lado, quando escolhemos seis de sessenta números (Mega-Sena), não conseguimos prever qual será o resultado. Algumas vezes, há tantas variáveis ou fatos que ainda não entendemos bem que fazem com que o experimento leve a resultados distintos mesmo quando repetido sob as mesmas condições. Tais fenômenos são ditos aleatórios.

No caso de fenômenos aleatórios, para cada fenômeno, imaginamos um conjuntos com todos os resultados possíveis (Espaço Amostral Ω) e atribuímos chances a cada um dos resultados. A partir daí, podemos responder muitas perguntas de interesse. Quando o número de resultados do fenômeno é finito e todos são equiprováveis, podemos determinar probabilidades de interesse apenas pela contagem de elementos de conjuntos.

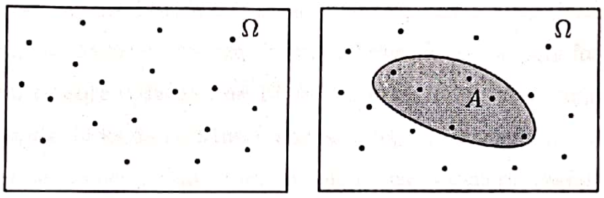


Figura 1: Representação gráfica do espaço amostral e eventos.

Nesse ponto, torna-se crucial dominar algumas ferramentas de Análise Combinatória. Na verdade, a Análise Combinatória tem ainda muitas outras utilidades. Segundo Morgado et al, de modo geral a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições,

2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Estudos sobre combinatória datam de antes de Cristo com matemáticos e astrônomos indus, como podemos ver na seção Hitórico e no primeiro capítulo de . Recomendo que leiam ainda hoje o primeiro capítulo do livro do Morgado (Morgado et al., 2006).

Como disse há pouco, antes de qualquer passo, precisamos contar elementos de um conjunto. Mais do que isso, precisamos rever o conteúdo elementar da Teoria de Conjuntos.

C. HISTÓRICO

Matemáticos e astrônomos indus ocuparam-se de questões relativas à Análise Combinatória.

Em 1150, na obra de Siddanta S'iromani (Diadema de um Sistema Astronômico), Baskara Acarya ensina calcular o npumero das permutações e das combinações, simples e completas.

Na Europa, ocuparam-se destas questões, os algebristas italianos Lucas Pacioli, Cardan e Tartaglia.

Como corpo orgênico, as origens deste ramo de Análise remontam ao século XVII e se encontram nas obras de Pascal (Traîté du Triangle Aritmétique; opera posth), Leibniz (Dissertatio de Arte Combinatória; Werke Math. Schriften), Wallis (Treatese of Algebra; opera Mathematica), Frenicle de Bessy (Abrégé des Combinaisons; Mem. Ac. Sc. Paris), Jacomo Bernoulli (Ars Conjectandi) e A. De Moivre (Doctrine of Chances).

Atualmente, o tratado mais completo de Análise Combinatória é o de E. Netto (Lehrbuck der Combinatorik).

No tomo II (Arithmetica Prática) do Cursus Mathematic de Herigone, encontram-se as fórmulas das permutações e combinações; a fórmula das combinações é também encontrada na Arithmetica Memorativa de Buckley.

As propriedades do produto de um binômio de forma $x+a$ foram estudadas por Pascal e, por ele expostas, no Traîté du Triangle Arithmétique; Fermat também tratou do assunto.

A fórmula geral da potência de um binômio (para expoente qualquer), foi dada por Newton, entre os anos de 1665 a 1669, sem que demonstrasse os limites de sua validez. Essa fórmula foi comunicada a Oldemberg, em uma carta que se tornou célebre e datada de 13 de junho de 1676. A fórmula, para o caso de expoente inteiro e positivo, era conhecida antes de Newton e por isso, há impropriedade na denominação - binômio de Newton. Assim, na Àlbegra de Omar Alkhayyami, encontramos as generalizações das fórmulas do quadrado e do cubo de um binômio (que na época eram conhecidos dos Indus) e, nas Regras de Cálculo de Mohamed Bakir, é dada a regra para o cálculo dos coeficientes, no desenvolvimento da potência inteira e positiva de um binômio. Tais regras e o uso do triângulo chamado de Pascal eram também conhecidos dos chineses, desde 1303, pelo menos.

No ocidente, o trinângulo aritmético era conhecido de Pietro Apiano (1527), Michel Stifel, Tartaglia e Pascal.

O quadro dos coeficientes binomiais diz-se triângulo, porque sua forma lembra a de um triângulo e de Pascal, porque se encontra no Traîte Arithmétique desse matemático francês; ele, porém, é encontrado ainda em Stifel (Aritmética Integra), em Tartaglia (General Tratado dei Númeri e Misure) e, segundo K.L. Biernatzki, encontra-se também em um escrito chinês de Tschuh-Shi-Kih. Segundo Cassina, sua origem é mais remota ainda.

O nome de combinação é devido a Pascal; as permutações eram chamadas variações por Leibniz e a palavra permutação é devida a Jacomo Bernoulli.

A fórmula para permutações com elementos iguais, e as fórmulas para disposições simples e completas são encontradas no Abrégé des Combinations de Frénicle de Bessy (1605-1670) e no De Combinationibus Alternatiobus de J. Wallis (1616-1703).

No Ars Conjectandi de Jácomo Bernoulli (1654-1705) encontramos a fórmula para combinações completas; é nessa obra de Bernoulli, que aparece, pela primeira vez, a palavra permutação.

A notação $n!$ é devida a Kramp (sec. XIX), e o símbolo $\binom{n}{k}$ é atribuído a Ettinghausen (sec. XIX) e também a Euler.

1 AULA 01

Nessa aula (ministrada no dia 09/01/207), revisamos os conceitos elementares da Teoria de Conjuntos. Para mais detalhes acerca da Teoria de Conjuntos, recomendamos (Halmos, 1974). Para o estudo de Análise Combinatória, recomendamos (Morgado et al., 2006), (de Oliveira et al., 2002) e (Roberts, 1984). Em um nível mais elementar, recomendamos (Hazzan).

1.1 CONJUNTOS

Teoria dos Conjuntos é a fundação da probabilidade e estatística, e o é para quase todo ramo da matemática (a partir da axiomatização ZFC).

~~**Definição 1.**~~ Um conjunto é uma coleção de objetos/elementos distintos.

Exemplo 1. Elenco de uma peça de teatro, baralho, coleção de símbolos distintos.

Em geral, representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ... e seus elementos por letras minúsculas a, b, c, ...

Notação 1. $a \in A$: a pertence ao conjunto A (a é um elemento do conjunto A).
$a \notin A$: a não pertence ao conjunto A.

Por definição, um conjunto é completamente determinado por seus elementos. Desse modo, os conjuntos A e B são ditos iguais se possuem os mesmos elementos.

Definição 2. Sejam A e B conjuntos. O conjunto A é dito subconjunto do conjunto B se todo elemento de A é elemento de B.

Notação 2. $A \subseteq B$.

Note que

a) $A \subseteq A$; (reflexiva)

b) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. (anti-simétrica)

c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$. (prop. transitiva)

Comentário: Apesar de parecer tudo em ordem nessa versão ingênua, precisamos ser cuidadosos na construção de conjuntos para evitar paradoxos, como o Russel, por exemplo. Para interessados, recomendo a pesquisa sobre os axiomas ZFC.

Para evitar objetos que não estejam bem definidos, consideramos em cada contexto um conjunto previamente especificado e bem definido, que contém todos os elementos de interesse. Chamamos esse conjunto de **conjunto universo** ou **conjunto universal** e o representamos de maneira especial por $\mathcal{U}$. Todos os os conjuntos sob discussão no contexto particular são subconjuntos de $\mathcal{U}$.

Diagrama de Venn para subconjuntos

Em contraste com o conjunto universal, o **conjunto vazio**, denotado por $\emptyset$, é o conjunto sem elementos.

Proposição 1. $\emptyset \subseteq A$, para todo $A \subseteq \mathcal{U}$

Demonstração. Suponha que $\emptyset \not\subseteq A$. Nesse caso, existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas isso é um absurdo, pois por definição o conjunto $\emptyset$ não possui nenhum elemento. □

Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, escrevemos por vezes $A \subset B$ e dizemos que A é um subconjunto estrito de B. Se $\emptyset \subset A \subset B$, então A é dito um subconjunto próprio de B.

1.1.1 Representação de Conjuntos

Podemos representar um conjunto A listando seus elementos. Essa é uma **representação explícita** do conjunto.

Exemplo 2. Considere o algarismos indo-arábicos e seja A o conjunto cujos elementos são 4, 5 e 6. Nesse caso, a representação explícita A é dada por

$$A = \{4, 5, 6\}. \tag{1.1}$$

Por outro lado, podemos também definir um conjunto por meio de uma propriedade $s(x)$ em $\mathcal{U}$ (isto é, uma declaração matemática que verdadeira ou falsa para cada $x \in \mathcal{U}$). Essa é a **representação implícita** do conjunto.

Exemplo 3. No Exemplo 2,

$$A = \{x \in \mathcal{U} : 3 < x < 7\}. \tag{1.2}$$

em que $\mathcal{U}$ é o conjunto dos algarismo indo-arábicos.

Vale ressaltar que um conjunto pode ter como elementos outros conjuntos. Por exemplo, $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Se A é um conjunto, o conjunto de todos os subconjuntos de A é conhecido por conjunto potência (conjunto das partes) de A e é denotado por $\mathcal{P}(A)$.

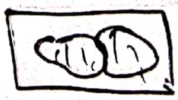
Ex. $A = \{1,2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

1.1.2 Operações com Conjuntos

Para as seguintes definições, A e B são subconjuntos de um conjunto universal $\mathcal{U}$.

Definição 3. A união dos conjuntos A e B, denotado por $A \cup B$, é o conjunto obtido pela reunião dos elementos de A e B:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Venn

Definição 4. A intersecção dos conjuntos A e B, denotado por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos comuns a A e B:

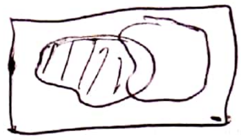
$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Venn

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são disjuntos.

Definição 5. A diferença de A e B, denotado por $A \setminus B$, é o conjunto dos elementos que estão em A que não são elementos de B:

$$A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$



Venn

Algumas vezes (particularmente em trabalhos antigos e quando $A \subseteq B$), usa-se a notação $A - B$ em vez de $A \setminus B$. Quando $A \subseteq B$, $A - B$ é conhecida como diferença própria de A e B.

Definição 6. O complementar de A, denotado por A^c, é o conjunto dos elementos que não estão em A:

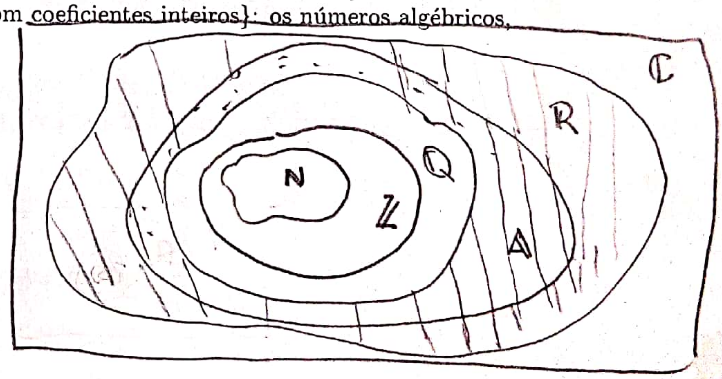
$$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}.$$

Venn

1.1.3 Conjuntos Especiais

- $\mathbb{R}$: os reais
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: os naturais
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \}$: os inteiros
- $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$: os inteiros positivos sem o zero,
- $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \ x = m/n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_+^*\}$: os racionais,
- $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) = 0$ para algum polinômio p com coeficientes inteiros$\}$: os números algébricos,
- $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: os irracionais,
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$: o conjunto dos números transcendentes.
- $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, $i = \sqrt{-1}$: os complexos.

Note que $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



1.1.4 Propriedades

Das definições, para A, B e C subconjuntos de um conjunto universo $\mathcal{U}$, temos as seguinte propriedades:

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
   . $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Logo por def. $A \cap B \subseteq B$.
   . $x \in A$. Se $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, o que é absurdo.
2. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{U} = A$ (Leis identidades)
3. $A \cup A = A \cap A = A$ (Leis idempotentes)
4. $A \cup A^c = \mathcal{U}$, $A \cap A^c = \emptyset$ (Leis complementares)
5. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva)

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ e ou $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$, ou, $x \in A$ e $x \in C \Leftrightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leis de DeMorgan)

$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c$

9. As seguinte sentenças são equivalentes

   (a) $A \subseteq B$ $\rightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$

   (b) $B^c \subseteq A^c$ contraposit. $\Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

   (c) $A \cup B = B$ Se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$. Por outro lado suponha $A \cup B = B$, se $x \in A$, $x \in A \cup B = B$.

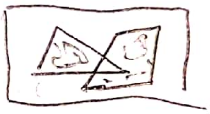
   (d) $A \cap B = A$ Se $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. Por outro lado, suponho $A \cap B = A$. Se $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ e assim $x \in B$.

   (e) $A \setminus B = \emptyset$ Suponha $A \subseteq B$. Se $x \in A \Rightarrow x \in B$, $x \notin A \setminus B$. Se $x \notin A$, $x \notin A / B$. Daí, $A \setminus B = \emptyset$. Por outro lado, suponha $A \setminus B = \emptyset$. Se $x \in A$, então $x \notin A \setminus B$ de modo que $x \in B \Rightarrow A \subseteq B$.

10. $A \setminus B = A \cap B^c$ $A \setminus B = \{x \in S : x \in A$ e $x \notin B\} = A \cap B^c$

11. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. $I = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \overset{\text{DeMorg}}{=} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$

   O conjunto na Propriedade acima é dito diferença simétrica de A e B $(A \triangle B)$. Os elementos desse conjunto pertence a A ou a B, mas não à ambos. $= A \setminus B \cup B \setminus A$



12. $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$

1.1.5 Operações Gerias

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos do conjunto universo $\mathcal{U}$, a união e intersecção desses conjuntos são dadas, respectivamente, por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algum } i, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.4}$$

Se considerarmos uma coleção infinita enumerável $A_1, A_2, \ldots,$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algum } i, i \in \mathbb{N}^*\} \tag{1.5}$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i, \ \forall\, i \in \mathbb{N}^*\} \tag{1.6}$$

De modo mais geral, dada uma coleção $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de $\mathcal{U}$, em que I é um conjunto de índices (nos casos acima, $I = 1, \ldots, \mathbb{N}$ e $I = \mathbb{N}^*$), a união e intersecção dos conjuntos em $\mathcal{A}$ é dada por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algum } i, i \in I\} \tag{1.7}$$

e

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i, \ \forall\, i \in I\} \tag{1.8}$$

Definição 7. Uma coleção $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ é disjunta dois-a-dois se

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall\, i, j \in I,\ i \neq j. \tag{1.9}$$

Definição 8. Uma coleção $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ é dita uma partição do conjunto B se é disjunta dois-a-dois e

$$\bigcup_{i \in I} A_i = B \tag{1.10}$$

Propriedades

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ e $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$ (Distributiva Geral)
2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ e $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ (Leis de DeMorgan - Geral)

1.1.6 Exercícios

Exercício 1. Dados os conjuntos A e B tais que $A \cap B \neq \emptyset$, liste todos os conjuntos distintos que podem ser formados a partir das operações entre A e B. **Diagrama de Venn.**

Ex. 3. Dados $A_1, \ldots A_n$, tais que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ e $A_i \neq A_j$ $\forall\, i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Quantos subsets?

Exercício 2. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção que particiona $\mathcal{U}$. Mostre que para todo $B \subseteq \mathcal{U}$, a coleção $\{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ particiona B.

Exercício 3. Suponha que $\{A_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{U}$. Tentem mostrar e pensem um pouco sobre as seguintes afirmações

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_k$ para infinitos $k \in \mathbb{N}^*\}$=:$\{A_k$ infinitas vezes$\}$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_k$ para todo exceto um número finito de $k \in \mathbb{N}^*\}$

Produto Cartesiano.

Dados A e B conjuntos, o produto cartes. entre A e B é ~~dado pelo~~ o cjto de pares ordenados (a,b) em que $a \in A$ e $b \in B$, isto é,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

P. ex. $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$.

De modo mais geral, dados $A_1, \ldots, A_n$,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 02

10/03/17

Lembretes: $A^c := \mathcal{U} \setminus A = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$: complementar de A

A lista 01 já está disponível

Comentário:
- Introduziremos os princípios aditivo e multiplicativo por meio de um exemplo (Jogo Clue)
- A partir daí, os apresentaremos e tbm as principais const. de análise comb. (permuts., arran, comb.)
- Essas últimas 3, bem entendidas, simplificam a solução de vários problemas.

Ex: Em um jogo de tabuleiro, o senhor X foi assassinado. Há ~~dois~~ 3 suspeitos, 2 possíveis armas e 2 possíveis lugares para o assassinato.

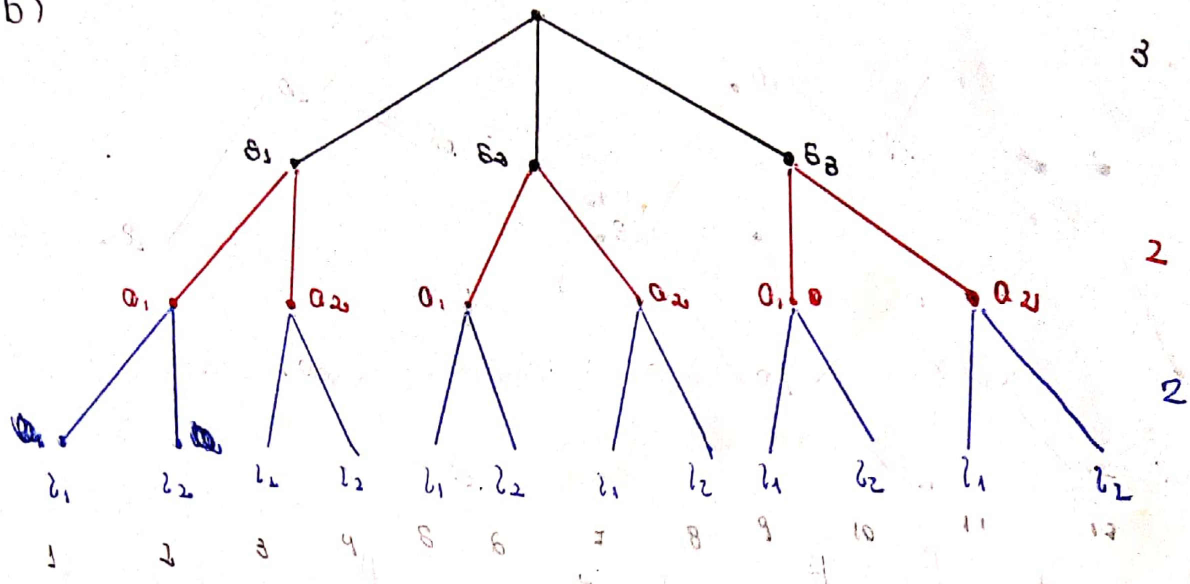
a. O jogo inclui um baralho de cartas: uma para cada suspeito, cada arma e cada lugar. Quantas cartas tem o baralho?

b. O resulado do jogo é uma sequência de um suspeito, uma arma e uma local. Quantos resultados possíveis?

Respostas: a) Como há 3 suspeitos, 2 possíveis armas e 2 possíveis locais, o baralho tem

$$3 + 2 + 2 = 7 \text{ cartas}$$

b)



. Há $12 = 3 \times 2 \times 2$ resultados possíveis.

Obs.: O jogo mencionado é uma versão do jogo Clue, onde há 6 suspeitos, 6 possíveis armas e 9 possíveis cartas.

Comentário Para a solução, usamos intuitivamente os princípios multiplicativo e aditivo. Mas antes de apresentá-los, vamos voltar à questão sob um novo olhar:

Seja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ o conjunto dos suspeitos, $A = \{a_1, a_2\}$ o conjuntos dos possíveis armas e $L = \{l_1, l_2\}$ o conj. dos possíveis lugares.

Depois de enunciar o PM

Note que S, A e L são conjuntos disjuntos. (Note tbm que todas os possíveis resultados para o jogo é dado pelo conjunto $S \times A \times L = \{(s, a, l) : s \in S, a \in A \text{ e } l \in L\}$)

As respostas para a) e b) são dadas respectivamente por

$$|S \cup A \cup L| = |S| + |A| + |L|$$

e

$$|S \times A \times L| = |S| \times |A| \times |L|,$$

em que, para todo conjunto A, $|A|$ é dito o cardinal de A e é o número de elementos de A.

Comentário: Pois bem, aguçada a intuição, vamos a definição.

Princípio aditivo para partes disjuntas: Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

~~Princípio multiplicativo:~~ (Decorrente do PM) Se o conjunto A_i é tal que $|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, então

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$$

Em palavras, temos a seguinte versão do pr. mult. ~~podemos dizer o seguinte: uma tarefa deve ser executada em r etapas; para cada uma das n maneiras~~

Princípio multiplicativo: Uma tarefa deve ser executada em r eta pas. Existem n_1 maneiras de realizar a primeira etapa; para cada uma dessas n_1 maneiras, existem n_2 maneiras de realizar a segunda etapa; para cada uma dessas n_2 maneiras, existem n_3 maneiras de realizar a terceira etapa, e assim por diante. Então, o número total de maneiras de efetuar a tarefa completa é dado por

$$n_1 \times n_2 \times \dots n_r.$$

Obs: É importante notar que o conjunto de opções disponíveis na k-ésima etapa pode depender das anteriores; a suposição é que apenas o número de opções disponíveis não depende das etapas anteriores.

Com: O ponto principal em contagem é definir um algoritmo de contagem usando os dois princípios dados acima sem contar a mais ou a menos.

Ex: Q tos são os nº naturais de 3 algarismos distintos?

- Queremos determinar quais as maneiras de realizar uma tarefa: obter um nº de 3 alg dist.

Podemos dividi-la em 3 etapas.

Etapas: 1. escolher o primeiro digito das centenas
2. " " segundo " " dezenas
3. " " terceiro digito " unidades

1º digito		
9	9	8
(ñ pode ser zero)		

$\rightarrow 9 \times 9 \times 8 = 648$

- Se começassemos pela 3ª casa, isto é, Tarefas: 1. escolher o 3º dig.
2. " " 2º "
3. " " 1º "

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$
$$?\quad 9\quad 10$$

8 ou 7

caso o zero esteja nos anteriores

Nesse caso, teríamos que resolver o probema de outra forma

a) Separando em casos

I) Se o zero ñ está na 2° ou 3ª casa, temos

$$\underline{7}\ \underline{8}\ \underline{9} = 504 \text{ possibilidades}$$

(II) Se o zero está na 2° ou 3ª casa, temos

São disjuntos

$$\underline{8}\times\underline{9}\times\underline{1} \quad + \quad \underline{8}\ \underline{1}\ \underline{9} = 2\times 8\times 9 = 144 \text{ possibilidades}$$

Pelo Princípio Aditivo, temos $504 + 144 = 648$ nº distintos.

Obs: Tarefas mais complicadas vem primeiro. (Nesse caso, o primeiro dígito não pode ser zero)

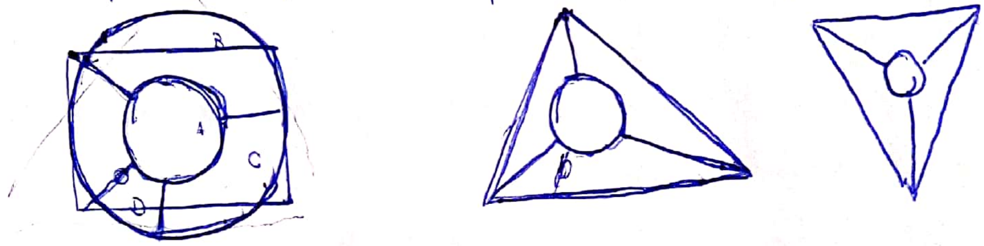
b) Ignorando uma das restrições. (técnica bastante usada)

$$\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{10} - \underline{1}\ \underline{8}\ \underline{9}$$

$720 - 72 = 648$ possibilidades.

~~Permutações Simples~~

Ex: De quantas formas podemos pintar o símbolo



com n cores distintas de modo que regiões que fazem fronteiras não podem ter a mesma.

Há λ maneiras de pintar a região central, $\lambda-1$ a região A, $\lambda-2$ a região B e $\lambda-3$ a região C. Port.,

$$p(n) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Daí, podemos notar que $\lambda=0$, $p(n)=0$

$n=1$, $p(n)=0$

$n=2$, $p(n)=0$

$n=3$, $p(n)=0$.

Se $n=4$, $p(n) = 4\times3\times2\times1 = 24$. Isto é, precisamos de no mínimo 4 cores para colorir o símbolo.

Com: Quando $n=4$, estamos permutando 4 (rearr. em ordens dif.) cores distintas.

Permutações Simples

Pergunta: ~~Dados n objetos distintos $a_1, \dots, a_n$ de quantos~~ De quantas maneiras podemos ordenar n objetos distintos

(Reagrupar os obj.; a dif. é a ordem)

Por exemplo, considere que os objetos de interesse são A, B e C.
Temos as ~~seguintes~~ seis ordenações:

A B C ACB B A C BC A CAB C B A

Com.: Poderíamos prever o resultado ao considerar o princípio mult.: há 3 maneiras de escolher o elemento na 1ª posição, 2 na 2ª e 1 na 3ª

Tais ordenação são ditas permutações.

Permutações: cada agrupamento que podemos formar com um certa quantidade de elementos distintos, que se diferenciam apenas pela ordem dos elementos.

De modo mais formal: Dado D um cjto com n elementos, uma permutação a partir dos elementos de D é uma sequência da forma

$$(x_1, \dots, x_n), \; x_i \in D \text{ para cada } i \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j.$$

O numero de permutações de n elem. distintos é dado por

$$P_n = n \times (n-1)(n-2) \dots 1 = n!.$$

com a convenção $0! = 1$.
Prova: Há n modos de escolher o primeiro elemento, n-1 de escolher o segundo, e assim por diante. Pelo PM, o n. de perm. é $n \times (n-1) \times \dots \times 1$.

ELVIS

Ex: Quantos anagramas da palavra ~~[illegible]~~ ELVIS que começam e terminam por consoantes?

. A cons. inicial pode ser escolhida de 3 maneiras, a cons. final de 2 maneiras e as 3 letras rest. podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_3 = 3!$ modos. A resposta é

$$3 \times 2 \times 6 = 36.$$

. ELVIS LIVES

Scanned by CamScanner

Análise Combinatória, Probabilida e Aplicações

Aula 03

11/03/17

:. Permutações Simples (há Perm. circul. , com el. rep. ...)
: Como prometido.

Ex: Qtos anagramas da palavra ELVIS começam e terminar por consoantes?

A consoante inicial pode ser escolhida de 3 maneiras; a consoante final de 2 maneiras e as 3 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas de $P_3 = 3! = 6$ modos.
A resposta é $3 \times 2 \times 6 = 36$.

Ex: Os números de cinco algarismos distintos formados a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

- Quanto é a soma desses números?

Sabemos que há $P_5 = 5! = 120$ números que satisfazem a condição do enunciado. Agora, note que

$$\begin{array}{r} 32145 \\ +\ 34521 \\ \hline 66666 \end{array}$$

Podemos agrupar tais números em 60 pares, juntando a cada número o que dele se obtém trocando 1 e 5, 2 e 4 e conser vando a posição do 3. Em cada por a soma vale 66666.

A resposta é $60 \times 66666 = 3.999.960$.

- Q tos satisfazem a seguinte condição: o k-ésimo algarismo é menor que $k+3$, $k = 1, \dots, 5$.

Condições	< 4	< 5	< 6	< 7	< 8
	3	3	3	2	1
Posições	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª

C: A tarefa pode ser dividida em 5 etapas: a k-ésima etapa será a escolha do alg. para a k-ésima posição.

Pelo PM, há $3^2\, 3!$ números que satisfazem a prop. dada em b).

Arranjos Simples

C: Nas permutações, reagrupamentos de objetos (ñ descartamos nenhum)

Arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, (de classe p) onde $n \geq 1$ e p é um natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo.

Em linguagem de conjuntos:

Seja D um conjunto com n elementos.

Um arranjo simples dos elementos de D tomados p a p, $p \leq n$ é uma sequência

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p), \; x_i \in D, \; x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j, \; i, j \in \{1, \ldots, p\}$$

Obs:

Note que quando $p = n$, um arranjo simples é uma permutação simples.

Propriedade: Dado D um conjunto com $|D| = n$,

~~Propriedade~~: O número de arranjos simples dos elementos de ~~um conjunto~~ D. é

$$A_n^p := n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Prova: Há n maneiras de escolher o primeiro elemento, $n-1$ de escolher o segundo e assim por diante. ~~O resultado segue~~ Pelo PM, segue o resultado.

$$\underset{1}{\underline{n}} \quad \underset{2}{\underline{\overset{2-1}{\overset{\shortparallel}{n-1}}}} \quad \underset{3}{\underline{\overset{3-1}{\overset{\shortparallel}{n-2}}}} \quad \underset{4}{\underline{\overset{4-1}{\overset{\shortparallel}{n-3}}}} \quad \ldots \quad \underset{p-1}{\underline{n-(p-2)}} \quad \underset{p}{\underline{n-(p-1)}}$$

Exemplo: Em uma corrida com ~~10~~ 5 cavalos, o primeiro, segundo e terceiro ~~são~~ ~~e terceiro~~ ~~lugar~~ mais velozes ~~são reg.~~ ~~ganharam prêmios distintos~~ são registrados.

Quantas são os possíveis registros?

Seja $D = \{c_1, \ldots, c_5\}$.

Devemos escolher 3 dos ~~10~~ 5 cavalos, que ocuparão as ~~três~~ melhores posições. ~~Nesse caso~~ a ordem de chegada é relevante, observar $c_1 c_2 c_3$ é diferente de $c_2 c_1 c_3$, por ex.

A ~~coleção~~ Cada registro é um arranjo dos elementos de $D=\{c_1, c_2, \dots, c_6\}$ tomado 3 a 3. Logo, pela P1, o número de registros possíveis é

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = 120$$

Ex: Suponha ~~agora~~ que todos os 6 cavalos serão examinados em 3 horários distintos, pelos organizadores do evento ~~corrida~~. ~~Por questões de estrutura, os cavalos são examinados de dois em dois, no modo simultâneo~~ ~~tomasse sem examinarmos~~ três de cada vez. ~~Anotar as~~ possibilidades

Quantas são as possíveis escolhas para o exame do 1º horário?

Aqui, devemos escolher 3 dos 6 para o primeiro exame, mas a ordem deles não é relevante, isto é, tomar $c_1 c_2 c_3$ é equival. a escolher $c_2 c_1 c_3$. Se considerass. os arranjos, cada resultado seria contado [illegible] vezes assim, o n. de interesse é

$$\frac{A_6^3}{3!} = \frac{120}{6} = 20.$$

Combinações Simples

Uma Combinação simples de n elementos distintos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um natural tal que $p \leq n$, é uma escolha não ordenada de p desses n elementos.

De modo mais formal, dado D um conj. com n elementos, $n \geq 1$, uma comb. simples dos elem. de D tomados p a p, $p \leq n$ é um subconjunto de D dado por

$$\{x_1, \dots, x_p\},\ x_i \in D \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j,\ i, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Prop. Dado D um conj com $|D| = n \geq 1$, O nº de combin. simples dos ele. de D ~~tomados~~ p a p, $p \leq n$ é dado por

$$C_n^p := \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} =: \binom{n}{p}$$

Prov. Um algoritmo para gerar todos os arranjos de el. de D ~~tomados~~ p a p é selecionar um combinação ~~dos~~ el. de D tom p a p e então selecionar uma ordenação. Pelo PM, segue que

$$A_n^p = C_n^p \, k!$$ ∎

E^+

Ex: Qtos são os subconjuntos de $\{a_1, \dots, a_n\}$ com p elementos tais que:

a) a_1 pertence

Escolhemos o primeiro elemento (a_1): 1 maneira

Escolhemos os p-1 restantes dos n-1 que sobram: C_{n-1}^{p-1}

Pelo PM,

$$\binom{1}{1}\binom{n-1}{p-1}$$

b) $a_1 \bar{n}$ pertence

Basta esc. p dos n-1 possíveis: C_{n-1}^{p}

c) a_1 e a_2 pertencem

- Escolhemos os dois primeiros: a_1 e a_2: 1 maneira
- Esc. os p-2 rest. dos n-2 res: $\binom{n-2}{p-2}$

Em part. $\binom{n}{p} - \binom{n-2}{p}$

d) Pelo menos um dos el. a_1 e a_2 pert.

a_1	a_1	a_1 e a_2
$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-2}{p-2}$

$$\Rightarrow 2\binom{n-1}{p-1} - \binom{n-2}{p-2}$$

e) Exat. um dos el. a_1 ou a_2

$$2\left[\binom{n-1}{p-1} - \binom{n-2}{p-2}\right]$$

Ex. Marcam-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 ptos sobre uma reta R' paralela a R. Q tos triâng existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

$5\,C_8^2 + 8\,C_5^2 = \ldots = 220$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 04

12/01

C: Sobre como somar os números que são permutações de 1, 2, 3, 4 e 5.

- Relação de equivalência ⇒ Classes de equivalência

- Somar todos os números de 5 algarismos - teríamos que descontar muitos, já que lidamos com 1, ..., 5

- Quantas vezes o 1 aparece na casa das unidades

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{P_4}\ \underline{1} \Rightarrow 24 \text{ vezes}$$

Assim o é para o 2, 3, 4, 5. A soma das unidades é

24 (1+2+3+4+5) = 24 × 15 = 360. A soma das dezenas é, de modo análogo, igual à 3600. Seguindo o raciocínio,

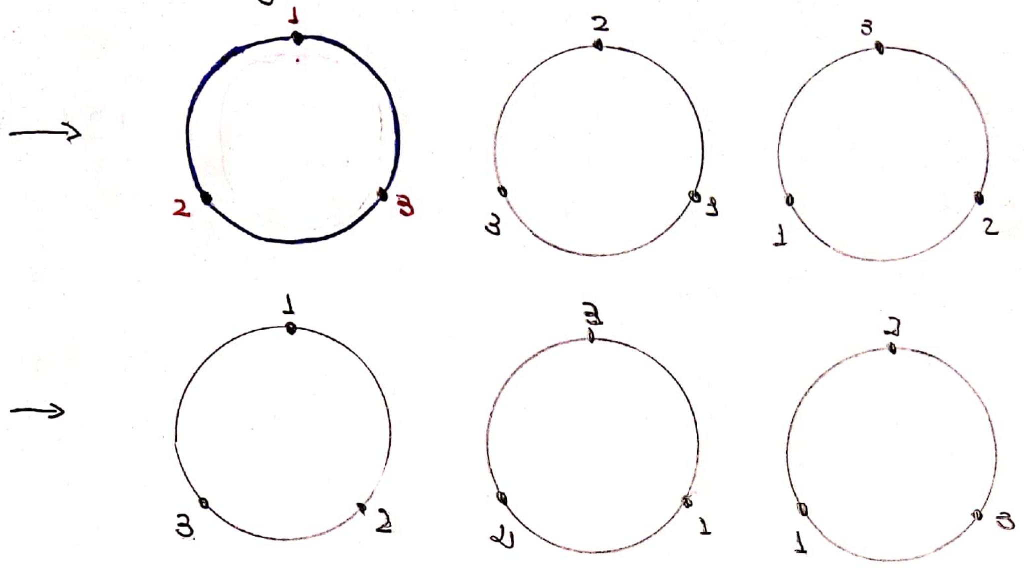
$$\begin{array}{r} 3600000 \\ 360000 \\ 36000 \\ 3600 \\ 360 \\ \hline 3\,999\,960 \end{array}$$

Permutações Circulares

De quantas maneiras podemos alocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, considerando equivalentes as disposições que coincidem por rotação?

Ex: Considere o caso em que $n = 3$.

Temos 3 lugares distintos: há $3! = 6$ modos de alocarmos 3 objetos em 3 locais distintos



Desconsiderando as permutações que coincidem por rotações, obtemos a resposta de interesse: $2 = 3!/3$.

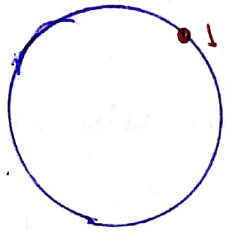
~~Note que~~ Cada disposição de n objetos dist. em torno de um círculo pode ser rotacionada n vezes. Assim, o número de permutações circulares de n elementos distintos é

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

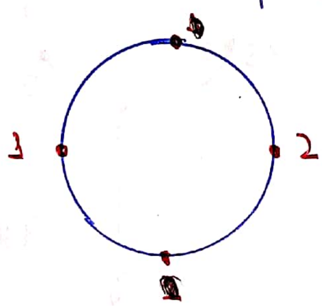
- Outra forma de imaginarmos esta situação é a alocação dos objetos de maneira sequencial.

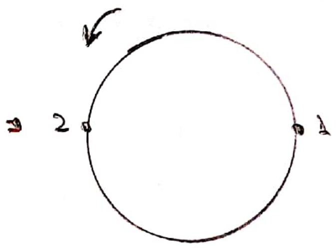
Análise Combinatória
Probabilidade e Aplicações

- O primeiro objeto pode ser alocado no circulo de uma maneira (se temos apenas um objto no circulo, podemos rotacioná-lo para qqer posição)

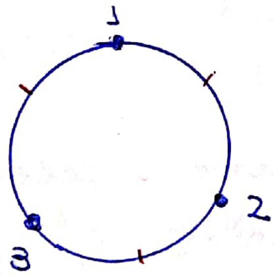


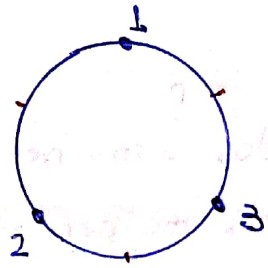
- O segundo objeto tbm só pode ser colocado de uma maneira:





- O terceiro obj. pode ser alocado de 2 maneira: ~~após~~ imediatamente após o primeiro ou imediatamende após o 2°





- O quarto de três (1) e assim por diante. Temos

$$(PC)_n = 1 . 1 . 2 . 3 \dots (n-1) = (n-1)!$$

Ex: De quantos modos 7 crianças podem formar uma roda?

- sem restrições

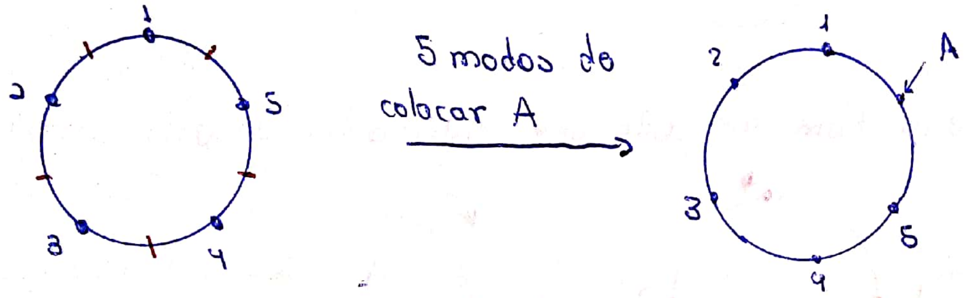
Como a roda gira, o que importa não é o lugar de cada

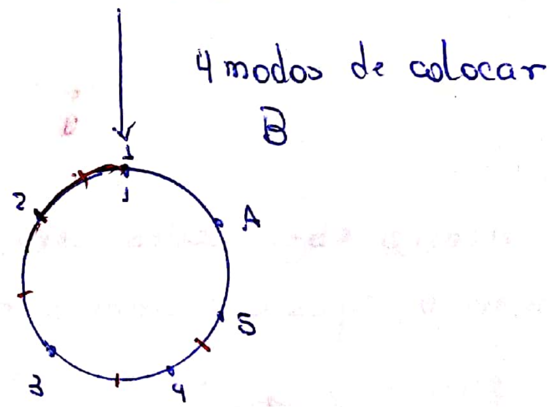
criança e sim a posição relativas das crianças entre si.
A resposta é

$$(PC)_7 = (7-1)! = 720$$

• de modo que 2 crianças <u>não</u> fiquem juntas?

Temos 5 crianças que podemos alocar de $(PC)_5 = 4!$ modos.





$\Rightarrow 4!.5.4 = 480$ modos.

<u>Ex 2</u>. De quantos modos $\overset{n}{5}$ mulheres e $\overset{m}{6}$ homens podem formar roda de modo que as mulheres fiquem juntas.

1. Org. os homens 2. Adicionar o grupo de mulheres

i. Podemos formar $(PC)_{\underset{m}{6}} = \underset{(m-1)!}{5!} = 120$ rodas com os cinco homens

ii. para cada roda dos $\overset{m}{6}$ H, podemos colocar as $\overset{n}{5}$ mulheres, que estão agrupadas, em $\overset{m}{6}$ posições diferentes

iii. para cada roda formada pelos $\overset{m}{6}$ H e pelo grupo de mulheres, podemos permutar o grupo de $\overset{n}{5}!$ formas $\Rightarrow \underset{m.(m-1)!.n!}{5!.6.5!} = 86400$ modos

Permutações com elementos nem todos distintos

Até aqui, estudamos situações nas quais ~~reagrupamos n elementos distintos e interessa~~ estamos interessados em sequências ou conjuntos formados a partir de n elementos distintos.

Agora vamos estudar situações em que nem ~~tos~~ os elementos são ~~são todos~~ distintos.

Ex: Quantos anagramas existem para a palavra BANANA?

→ 1 letra B

→ 2 letras N

→ 3 letras A

_ _ _ _ _ _

Temos $\binom{6}{3}$ modos de escolher a posição das letras A.

Fixados os A's, temos $\binom{3}{2}$ modos possíveis de posicionar os N's.

Fixadas as letras A e N, temos um modo de posicionar B.

$$\Rightarrow \binom{6}{3}\binom{3}{2}\cdot 1 = \frac{6!}{\cancel{3!}(6-3)!}\,\frac{\cancel{3!}}{2!\;1!}\cdot 1 = \frac{6!}{3!\,2!\,1}$$

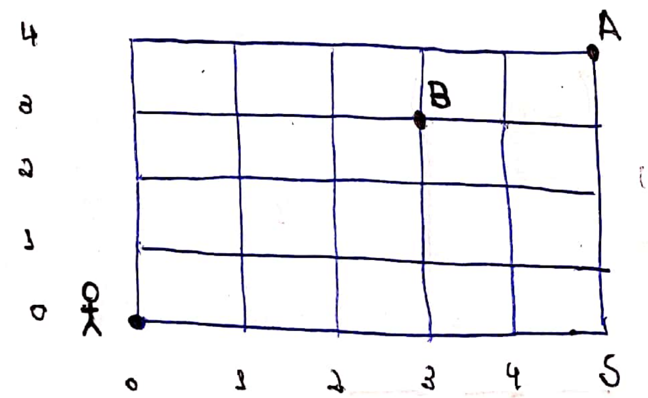
De forma geral, se temos um grupo de n objetos, divididos em k tipos de tal forma que n_1 são do tipo 1, n_2 do tipo 2,

... n_k do tipo k com $n_1+n_2+\dots+n_k=n$, existem

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} := \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} =: \binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

formas de permutarmos esses elementos.

Ex: Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal, como mostra a figura



a) ~~De~~ ~~posso~~ Quantos são os traj. de comp. mínimo para que o levam a ponto A?

Note inicialmente que ele terá que dar 9 passos (5 para leste (L) e 4 para norte (N))

Cada traj. é então uma seq. de 9 elementos, sendo 5 L's e 4 N's.

Logo, a resp. é

$$P_9^{5,4} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126.$$

b) Passando por B: $P_6^{3,3} \times P_3^{2,1} =$ $\frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{5!}{2!} = 60.$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 05

13/01

R: $P_6^{3,3} \, P_3^{2,1} = 60$

P. De quantos modos podemos comprar 5 sorvetes em uma loja que oferece 8 sabores?

Nesta situação, a resposta não é $\binom{8}{5}$, pois podemos comprar vários sorvetes do mesmo sabor. (este seria o nº de modos de escolher 5 sabores diferentes entre os 8 sabores oferecidos)

A resposta para esse problema é representada por CR_7^4, número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos.

De modo geral, C_n^p é a quantidade de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados. Por outro lado, CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos, distintos ou não, a partir de n objetos distintos dados.

Ex: As combinações completas de classe 2 dos objetos a, b, c, d são

aa	ab	bc	cd
bb	ac	bd	
cc	ad		
dd			

= 10 formas possíveis

$= \binom{4+2-1}{2}$

Voltando à pergunta inicial, definimos

x_1: nº sorvetes do sabor 1 comprados

⋮

x_8: nº de sorvetes do sabor 8 comprados

Sabemos que $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 5$, $x_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, 8$.

Em outras palavras, o nº de modos de comprar 5 sorvetes a partir 8 opções é a quantidade de soluções inteiras não negativas ($x_i \geq 0$) da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 5$$

Para calcular a quantidade de interesse, vamos representar cada situação possível por meios dos símbolos

- • para cada sorvete escolhido
- | divide os sabores

Por exemplo

	x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6		x_7		x_8
3 do tipo 1, 2 do tipo 2	• • •	|	• •	|		|		|		|		|		|	
1 do tipo 2, 3, 6 e 8		|	•	|	•	|		|		|	•	|		|	•

Cada escolha é uma seq. de 7 + 5 símbolos (7 traços e 5 bolinhas), isto é, uma permutação de 12 elementos nem todos distintos.

$$\Rightarrow P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7!\,5!} = C_{12}^{5} = C_{8+5-1}^{5}.$$

Scanned by CamScanner

De modo geral, se queremos selecionar p objetos (distintos ou não) a partir de n objetos distintos, podemos fazer isso de

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{p} = \binom{p+n-1}{p} \text{ formas,}$$
$$= P_{n+p-1}^{p,\,n-1}$$

o que, de modo análogo, o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p.$$

Ex: Qtas soluções inteiras não negativas de $x+y+z=5$?

Nesse caso, $n=3$ e $p=5$.

$$\Rightarrow (CR)_3^5 = C_{5+3-1}^{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \text{ soluções}$$

* e de $x+y+z \leq 5$?

$$\begin{cases} x+y+z=0 \;\; \begin{smallmatrix} p=0 \\ n=3 \end{smallmatrix} \Rightarrow \binom{2}{0} = 1 \\ x+y+z=1 \;\; \begin{smallmatrix} p=1 \\ n=3 \end{smallmatrix} \Rightarrow \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3 \\ x+y+z=2 \;\; \begin{smallmatrix} p=2 \\ n=3 \end{smallmatrix} \Rightarrow \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6 \\ \vdots \\ x+y+z=5 \;\; \begin{smallmatrix} p=5 \\ n=3 \end{smallmatrix} \Rightarrow \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} CR_3^0 & CR_3^1 & CR_3^2 & CR_3^3 & CR_3^4 & CR_3^5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} = 56$$

$$= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$$

Outra solução: Definimos a folga f da equação

$x + y + z = 3$ como $f = 3 - (x+y+z)$.

x	y	z	$x+y+z$	f
1	1	3	5	0
2	0	2	4	1
2	1	0	3	2

$\Rightarrow$ relação biunívoca com $x+y+z+f=5$

- Existe uma ~~relação~~ corresp. biunívoca entre as soluções int. ñ-negativas de $x+y+z \leq 5$ e $x+y+z+f=5$, isto é, basta determinar o nº de sol. int. ñ neg. de $x+y+z+f=5$, que é dado por

$$CR_4^5 = C_8^5 = \binom{8}{5} = 56.$$

Ex: Qtas soluções para $x+y+z=20$, $x \geq 2$, $y \geq 2$?

Def. novas variáveis

$$a = x - 2, \quad b = y - 2$$

$$\Rightarrow x = a + 2, \quad y = b + 2$$

Scanned by CamScanner

Assim

$$x + y + z = 20 \iff$$

$$(a+2) + (b+2) + z = 20 \iff$$

$$a + b + z = 16$$

que tem $CR_3^{16} = \cancel{\binom{18}{16}} \binom{16+3-1}{16} = \binom{18}{16} = 153$ soluções.

Ir O probl. que sab. resolver é contar as soluções inteiras com as variáveis sendo maiores ou iguais a zero. Para fazer um recair no outro fazemos o "truque acima" ⇓

Ex Qtos anagramas de ESTATÍSTICA que não possuem 2 letras T's seguidas?

Fixamos os T's

$$\underset{\geq 0}{\_\_} \ T \ \underset{\geq 1}{\_\_} \ T \ \underset{\geq 1}{\_\_} \ T \ \underset{\geq 1}{\_\_} \ T \ \underset{\geq 0}{\_\_}$$

$$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$ letras rest.

$a = x_2 - 1 \geq 0$, $b = x_3 - 1 \geq 0$

$$x_1 + (a+1) + (b+1) + x_4 = 8 \iff$$

$$x_1 + x_4 + a + b = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

Escolhidos quantos vão, basta arranjar as demais

$$\_\ \_\ \_\ T\ \_\ T\ \_\ \_\ T\ \_\ \_$$ de $P_8^{2,2,2,1,1} = 5040 \Rightarrow 84 \times 5040 = 423360$

Tbm poderiamos arranjar as letras excluindo os A's, de

$$P_8^{2;2;2,1,1} = 5040$$

P/ cada

$$\underset{1}{\_}\ E\ \underset{2}{\_}\ S\ \underset{3}{\_}\ A\ \underset{4}{\_}\ I\ \underset{5}{\_}\ S\ \underset{6}{\_}\ I\ \underset{7}{\_}\ C\ \underset{8}{\_}\ A\ \underset{9}{\_}$$

Escolhemos 3 dos 8 posi para os T's.

$$\Rightarrow 5040 \binom{9}{3} = 5040 \times 84 = 423\,360$$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 06

16/12/17

Obs: Na sexta, queríamos determinar a qtde de anagramas da palavra ESTATÍSTICA em que as letras T's não apareciam seguidas. Vimos duas maneiras. Um terceira seria ignorar as restrições e retirar as contadas indevidamente. Nesse caso, note que é preciso retirar as que TTT aparecem todos juntos e quando aparecem em duplas.

. Além disso, uma outra observação: no est. de comb. completos, est. interessados na quantidade comprada, fazendo um paralelo ao exemplo do sorvetes e não no momento da compra, por exemplo.

Caso cons.

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\qquad x+y+z=5,\ x\geq 2,\ y\geq 1$

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

$\binom{5}{3}$ $\quad \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}\ \underline{z}$

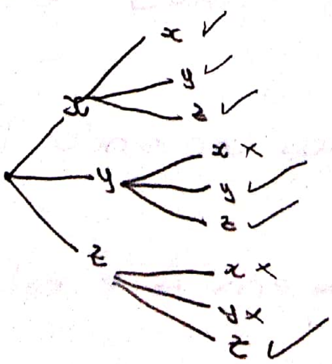
b_1 b_2 b_3 } mesmas compras

$\underline{z}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}$

Seguindo o rac.,

, Fixamos as 3 prim.

$\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{2}\ \underline{3}$



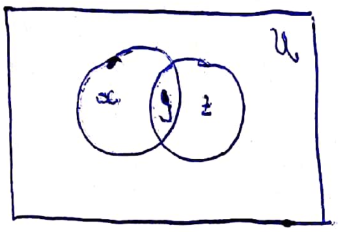
6 $\Rightarrow a+b+z=2.$

Princípio da Inclusão - Exclusão

- Generalização do princípio aditivo: fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos, não necessariamente disjuntos.

- 2 conjuntos

y elementos estão em A e em B simultaneamente
x el. " A que não estão em B
z " " " B " " " " A



$$|A \cup B| = x + z + y = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|$$

ou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= (x+y) + (z+y) - y = x+z+y$$

Para contarmos os elementos de $A \cup B$ somamos $|A|$ e $|B|$, mas ao fazermos isso estamos contando $|A \cap B|$ duas vezes pois os elementos de $A \cap B$ estão em A e estão em B. Dessa forma, é preciso descontá-los uma vez.

Ex: Quantos inteiros em 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7 ?

Sejam .

$A = \{$ inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3 $\}$

e

$B = \{$ int. entre 1 e 1000 div. por 7 $\}$

Temos que

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

Obs: $\lfloor a \rfloor$ = piso de a, i.e., maior inteiro menor ou igual a a

Ex: $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$.

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \times 7} \right\rfloor = 41$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 333 + 142 - 47 = 428 .$$

— " —

3 Conjuntos: $|A \cup B \cup C| = ?$

Tome $D = A \cup B$.

$$|A \cup B \cup C| = |D \cup C| = |D| + |C| - |C \cap D|$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap B) \cup (B \cap C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap B| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ex 2: Qutos anag. de CAPÍTULO que têm C em 1º lugar ou A em 2º lugar ou P em 3º?

A_1: {ana. com C em 1º}
A_2: { " " A em 2º} ⇒ quer. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$
A_3: { " " P em 3º}

$$|A_1| = 7! = |A_2| = |A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2| = 6! = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5!$$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 7! + 7! + 7! - (6! + 6! + 6!) + 5!$$

$$= 3.5040 - 3 \times 720 + 120$$

$$= 13080 \text{ anagramas.}$$

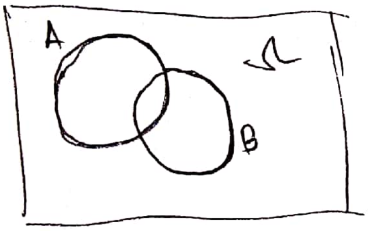
Aula 7

Princípio da Inclusão - Exclusão

Generalização do Princípio aditivo

fórmula p/ contar a # de elementos que pertencem à união de vários conjuntos, não necessariamente disjuntos

2 conjuntos



y elementos estão em A e em B simultaneamente
x elementos em A que ñ estão em B
z " em B que $\notin$ A

$$\#(A \cup B) = \overset{A\setminus B}{x} + \overset{B\setminus A}{z} + \overset{A\cap B}{y}$$

ou $\#(A\cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A\cap B)$

$$= (x+y) + (z+y) - y = x+z+y$$

Para contarmos os elementos de $A\cup B$ somamos $\#A$ e $\#B$ mas ao fazer isso estamos contando $\#(A\cap B)$ duas vezes pois os elementos de $A\cap B$ estão em A e estão em B. Desse forma, é preciso descontá-los uma vez.

Ex 1: Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7?

A = { inteiros (entre 1 e 1000) divisíveis por 3}

B = { " " por 7}

Obs $\lfloor a \rfloor$ = maior inteiro menor ou igual a a

Ex: $\lfloor 3{,}14 \rfloor = 3$

$\#(A) = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$ $\quad \#(B) = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$

$\#(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{3.7} \right\rfloor = 47$

$\Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#A\cap B$

$= 333 + 142 - 47 = 428$

3 Conjuntos: Qual o cardinal de $\# A \cup B \cup C$

$\#(A \cup B \cup C) = ?$

tome $D = A \cup B$

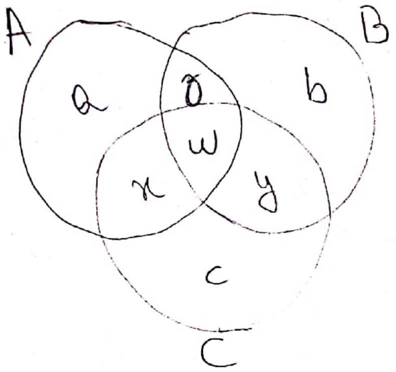
$\rightarrow \#(D \cup C) = \#(D) + \#(C) - \# D \cap C$

$= \#(A \cup B) + \#(C) - \#((A \cup B) \cap C)$

$= \#(A) + \#(B) - \# A\cap B + \#(C) - \#((A\cap C) \cup (A \cap B))$

$\rightarrow \#A + \#B + \#C - \# A\cap B - [\#(A\cap C) + \#(A\cap B) - \#(A\cap B)\cap(A\cap C)]$

$= \#A + \#B + \#C - \#A\cap B - \#A\cap C - \#(B\cap C) + \# A\cap B \cap C$ //



Ex 4) Quantos anagramas de CAPITULO que têm C em 1º lugar ou A em 2º ou P em 3º?

A_1 : C em 1º

A_2 : A em 2º $\rightarrow$ queremos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

A_3 : P em 3º

$\# A_1 = 7! = \# A_2 = \# A_3$

$\# A_1 \cap A_2 = 6! = \# A_1 \cap A_3 = \# A_1 \cap A_2$

$\# A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 5!$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 7! + 7! + 7! - (6! + 6! + 6!) + 5!$$

$$= 3 \cdot 5040 - 3 \cdot 720 + 120$$

$$= 13080 \text{ anagramas}$$

Teorema: Seja Ω um cjto e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subcjtos de Ω e

$$S_0 = \# \Omega$$

$$S_1 = \# A_1 + \# A_2 + \ldots + \# A_n = \sum_{i=1}^{n} \# A_i$$

$$S_2 = \# A_1 \cap A_2 + \# A_1 \cap A_3 + \ldots + \# (A_{n-1} \cap A_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \# A_i \cap A_j$$

$$S_3 = \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \# A_1 \cap A_2 \cap A_4 + \ldots + \# A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \# A_i \cap A_j \cap A_k$$

$\vdots$

Então:

(a) O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p $(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k}{k} S_{p+k}$$

(b) O número de elementos que pertencem a pelo menos p $(p \leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{p+k-1}{k} S_{p+k}$$

(c) # de elementos de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} S_j$$

Exemplo 3) Quantos inteiros, entre 1 e 1000, são divisíveis p.

(a) exatamente 2 dos números 2, 3, 7 e 10?

$\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000\}$ $\quad \# \Omega = 1000$

$A_1 = \{x \in \Omega \mid x$ é divisível por $2\}$ $\Rightarrow \# A_1 = 500$

$A_2 = \{x \in \Omega \mid$ " " por $3\}$ $\quad \# A_2 = 333$

$A_3 = \{$ " $\mid$ " " por $7\}$ $\quad \# A_3 = 142$

$A_4 = \{ x \mid$ " " por $10\}$ $\quad \# A_4 = 100$

$S_1 = \# A_1 + \# A_2 + \# A_3 + \# A_4 = 500 + 333 + 142 + 100 = 1075$

$S_2 = \# A_1 \cap A_2 + \# A_1 \cap A_3 + \# A_1 \cap A_4$
$+ \# A_2 \cap A_3 + \# A_2 \cap A_4$
$+ \# A_3 \cap A_4$

$= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor$

$= 166 + 71 + 100 + 47 + 33 + 14 = 431$

$S_3 = \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \# A_1 \cap A_2 \cap A_4 + \# A_1 \cap A_3 \cap A_4$
$+ \# A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 74$

23 33 14 4

$S_4 = \# A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \frac{1000}{210} = 4$

$$\Rightarrow a_2 = \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k \binom{2+k}{k} S_{2+k}$$

$$= 1\binom{2}{0} S_2 + (-1)\binom{3}{1} S_3 + 1\binom{4}{2} S_4$$

$$= S_2 - 3S_3 + 6S_4$$

$$= 431 - 3 \cdot 74 + 6 \cdot 4 = 233$$

- Pelo menos 2 dos números 2, 3, 7 e 10?

$$b_2 = \sum_{k=0}^{4-2} (-1)^k \binom{2+k-1}{k} S_{2+k}$$

$$= 1 \cdot \binom{1}{0} S_2 + (-1)\binom{2}{1} S_3 + 1 \cdot \binom{3}{2} S_4$$

$$= S_2 - 2S_3 + 3S_4$$

$$= 431 - 2 \cdot 74 + 3 \cdot 4 = 295$$

Análise Combinatória
Probabilidade e Aplicações

Aula 07 17/01/17

Permutações Caóticas

Def: Uma permutação simples dos objetos $a_1, a_2, \dots, a_n$, é chamada caótica quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição, $i = 1, \dots, n$.

Ex: As permutações simples de a_1, a_2 e a_3 são

$a_1\, a_2\, a_3$ $\quad$ $a_2\, a_1\, a_3$ $\quad$ $\underline{a_3\, a_1\, a_2}$
$a_1\, a_3\, a_2$ $\quad$ $\underline{a_2\, a_3\, a_1}$ $\quad$ $a_3\, a_2\, a_1$

Dessas, apenas as duas grifadas são caóticas, isto é, o número de permutações caóticas de 3 elementos distintos é igual a 2.

Teorema: O número de permutações caóticas dos objetos distintos $a_1, a_2, \dots, a_n$ é dado por

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Prova: Definimos A_i como o conjunto das permutações simples de $a_1, a_2, \dots, a_n$ tendo a_i no i-ésimo lugar, $i = 1, \dots, n$.

Note agora que $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ é o número de permutações em que pelo menos um dos a_is permanece na posição original.

Como ao todo são $n!$ permutações simples, segue que

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

$$\overset{*}{=} n! - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n \qquad (1)$$

Nesse caso,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n(n-1)! = n!$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = C_n^2 (n-2)!$$

$$= \frac{n!}{\cancel{(n-2)!}\, 2!} \times (n-2)! = \frac{n!}{2}$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = C_n^3 (n-3)! = \frac{n!}{3};$$

$\vdots$

$$S_n = C_n^n (n-n)! = \frac{n!}{n!}.$$

Scanned by CamScanner

Substituindo os valores encontrados em (1), temos que

$$D_n = n! - n! + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

Ex: Quantas permutações dos inteiros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 têm exatamente quatros dos números em suas posições originais?

Como não são fixados os 4 números que permanecem nas posições originais, devemos escolher estes 4 números, o que pode ser feito de C_9^4 maneiras distintas, e, em seguida, permutar os 5 restantes caoticamente. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, a resposta é

$$C_9^4 D_5 = C_9^4\, 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right)$$

$$= C_9^4 \times 44$$

$$= 126 \times 44 = 5544$$

Observação: É interessante observar que D_n é o inteiro mais próximo de $n!/e$, $e = 2{,}718281828459\ldots$ (irracional e transcendente)

n	D_n	$n!/e$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
⋮		

Na verdade, a observação acima é um fato e útil para encontrarmos o inteiro D_n. Já vimos que vale para $n=1$ e $n=2$. Basta garantir o resultado para $n > 2$.

Teorema. Para todo inteiro $n > 2$, temos

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{2}$$

Obs: $|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Ex: $|-1| = 1$, $|2| = 2$.

Demonstração: Como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

temos

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots .$$

Logo,

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| = \left| n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) - n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) \right|$$

$$= \left| n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} - n! \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \right|$$

$$= \left| n! \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \right|$$

$$= n! \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \right|$$

$$\leq n! \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

P.G.

$$= \frac{1/_{n+1}}{1 - 1/_{n+1}} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \quad \text{para } n > 2.$$

Este fato mostra ser D_n o inteiro mais próximo de $n!/e$. ■

Ex: ~~[illegible]~~

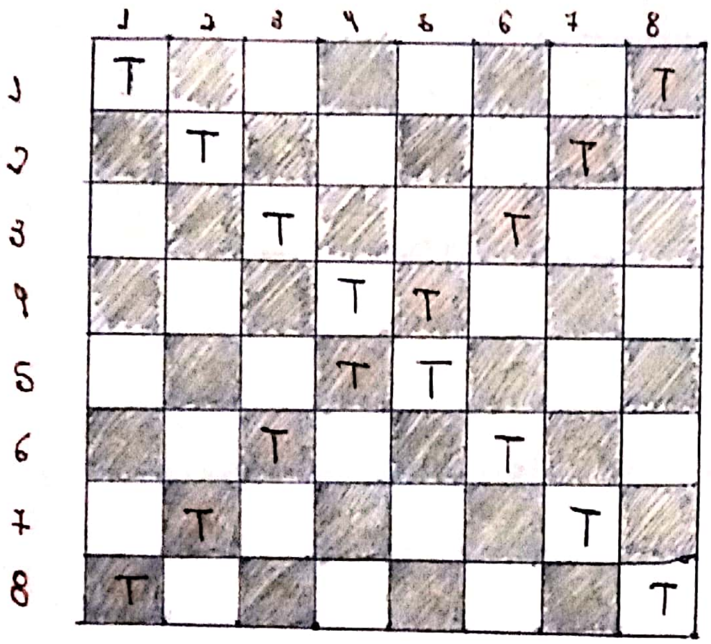
Determine o número de permutações caóticas de 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nas quais os números 1,2,3,4,5,6 ocupam, em alguma ordem, os seis primeiros lugares.

Nesse, permutamos caoticamente 1,2,3,4,5 e 6 nas primeiras seis posições e, em seguida os demais nas últimas posições. Daí, o número de interesse é

$$D_6 \cdot D_3 \qquad \text{logo, } 265 \cdot 2 = 530$$

Como $\frac{6!}{e} = 264{,}87$ e $\frac{3!}{e} = 2{,}207$, segue pelo Teo, que $D_6 = 265$ e $D_3 = 2$.

Ex.: De quantos modos é possível colocar 8 torres brancas em um tabuleiro de xadrez 8x8 de modo que nenhuma torre fique na diagonal branca e não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna?



Como são 8 torres e o tab. é 8x8, em cada linha (e em cada coluna) do tab. haverá uma única torre.

Para colocar as torres devemos escolher $c(1)$ (coluna em q. se encontra na primeira linha), $c(2), \dots, c(8)$, com $c(1) \neq 1$, $c(2) \neq 2, \dots, c(8) \neq 8$, ou seja, uma perm. caótica de $1, 2, 3, \dots, 8$.

Como $\frac{8!}{e} = 14832{,}89$, segue que há $D_8 = 14833$ modos.

Aula 08

18/01/17

Ex: Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de 2 elementos nos quais não haja números consecutivos?

Vamos enumerar esses subconjuntos:

6 subconj. nas cond. impostas pelo prob.

$\{1, 3\}$	+ − + − −
$\{1, 4\}$	+ − − + −
$\{1, 5\}$	+ − − − +
$\{2, 4\}$	− + − + −
$\{2, 5\}$	− + − − +
$\{3, 5\}$	− − + − +

No caso não foi trabalhoso determinar e contar tais subconjuntos. Entretanto, para um conj. com 10 elementos, por exemplo, a solução não seria tão fácil de ser determinada.

- Vamos encontrar uma maneira de determinar o número de subconj. sem que haja a necessidade de explicitá-los.

Vamos marcar com o sinal (+) os elementos que farão parte do subconjunto e com o sinal (−) os que não forem parte do subconjunto.

Assim, {1,3} pode ser representado por

+ − + − −

{3,4}, que não é válido pois 3 e 4 são consecutivos, é repres. por

− − + + −

Voltar aos subconj. e fazer com eles a representação.

Então, para formar um subconjunto com 2 elementos não-consecutivos devemos 3 sinais (−) e 2 sinais (+) em fila, sem que haja 2 sinais (+) consecutivos.

Para isso, colocamos os 3 sinais (−) e deixamos espaços entre eles, onde eventualmente colocaremos os dois sinais (+)

_ − _ − _ − _

Agora, basta escolher 2 das 4 posições vazias para os dois sinais (+), o que pode ser feito de $C_4^2 = 6$ modos.

Logo, como já constatado no início da aula, há 6 subconjuntos de 2 ele. não consecutivos de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Primeiro Lema de Kaplansky: O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$, $p < n$, nos quais não há números consecutivos é

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p}.$$

Basta generalizar o argumento visto no Ex.

Dem: No caso geral, temos p sinais $+$, $n-p$ sinais $-$ para arrumar sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Temos um modo de colocar os sinais $-$ e C^{p}_{n-p+1} modo de colocar os sinais $+$. $\square$

Ex: 2 provas de vestibular tem que ser realizadas na mesma semana. De quantos modos podemos escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos?

Devemos dois dias não consecutivos da semana, o que equivale a

$$\Rightarrow f(7,2) = \binom{7-2+1}{2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

↳ tomar um subconjunto com 2 elementos ñ consec. de $\{1,2,\dots,7\}$.

Ex: De quantos modos podemos formar uma sequência com n_1 elementos iguais a 1, n_2 elementos iguais a 2 e n_3 elementos iguais à 3 se dois elementos iguais a 3 não podem ser adjacentes?

Temos ao todo $n = n_1 + n_2 + n_3$ posições. Escolho do conjunto das posições $\{1,\dots,n\}$ um subconjunto com n_3 elementos não consecutivos para posicionar os 3. Podemos fazer isso de

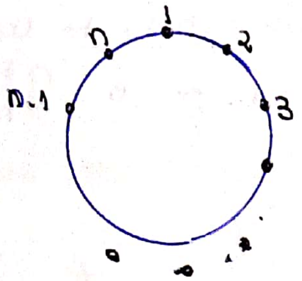
$$f(n, n_3) = \binom{n-n_3+1}{n_3} \text{ modos.}$$

Em seguida, basta permutar os demais, o que pode ser feito de

$$P^{n_1,n_2}_{n_1+n_2} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\,n_2!}$$, já que nem todos os el. são distintos

$$\Rightarrow f(n,n_3)\,P^{n_1,n_2}_{n_1+n_2}$$

Suponha agora que $\{1, \dots, n\}$ estão arrumados em um circulo



isto é, os elementos "1" e "n" são consecutivos.

Segundo Lema de Kaplansky: O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n consecutivos, igual a

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}.$$

Demonstração: Há os p-subconjuntos de interesse em que

- O elemento "1" figura: para formá-los, devemos escolher $p-1$ elementos em $\{3, 4, \dots, n-1\}$ ~~para~~ são consecutivos. O número de modos de fazer isso é

1 e n não podem

$$f(n-3, p-1) = C_{n-3-(p-1)+1}^{p-1} = C_{n-p-1}^{p-1}$$

- o elemento "1" não figura: para formá-los, devemos escolher p elementos não consec. de $\{2, \dots, n\}$, o que pode ser feito de

$$f(n-1, p) = C_{n-1-p+1}^{p} = C_{n-p}^{p} \text{ modos.}$$

Portanto, a quantidade de interesse é dada por

$$C^{p-1}_{n-p-1} + C^{p}_{n-p} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= \frac{p\,(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)\,(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!}$$

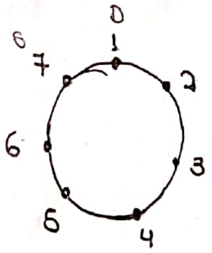
$$= \frac{(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!} \times n \cdot \frac{(n-p)}{(n-p)}$$

$$= \frac{n}{n-p}\,\frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{n}{n-p}\,C^{p}_{n-p}.$$

$\blacksquare$

Ex: Hugo terá aulas de tênis 3 vezes por semana. De quantos modos ele pode escolher os dias de aula, sem que tenha aulas em dias consecutivos?

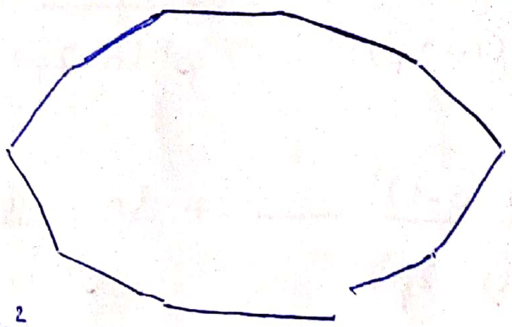
Agora,

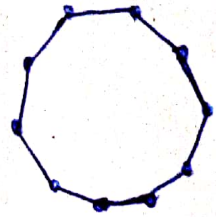


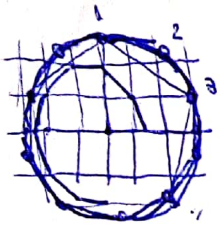
temos que selecionar 3 dos sete dias sem que haja dias consec., sendo que domingo (1) e sábado (7) são consecutivos. De outra forma, devemos selecionar um subc. com 3 el. ñ cons. de $\{1,\ldots,7\}$ em que 7 e 1 são consectivos. A resp. é dada por

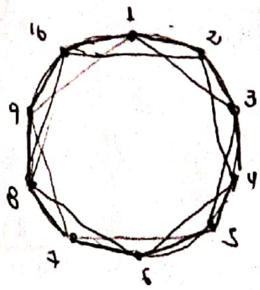
$$g(7,3) = \frac{7}{7-3}\binom{7-3}{3} = \frac{7}{4}\,\frac{4!}{1!\,3!} = 7.$$

Ex: Dado um decágono, qtos são os triângulos cujos vértices são vértices não-consecutivos do décagono?









Basta escolher 3 não consecutivos de 1, 2, ..., 10, com 1 e 10 consec., o que pode ser feito de

$$g(10,3) = \frac{10}{10-3}\, C^{3}_{10-3} = \frac{10}{7}\,\frac{7!}{3!\,4!} = 50.$$

Análise Combinatória
Probabilidade e Aplicações

Aula 09

18/03/17

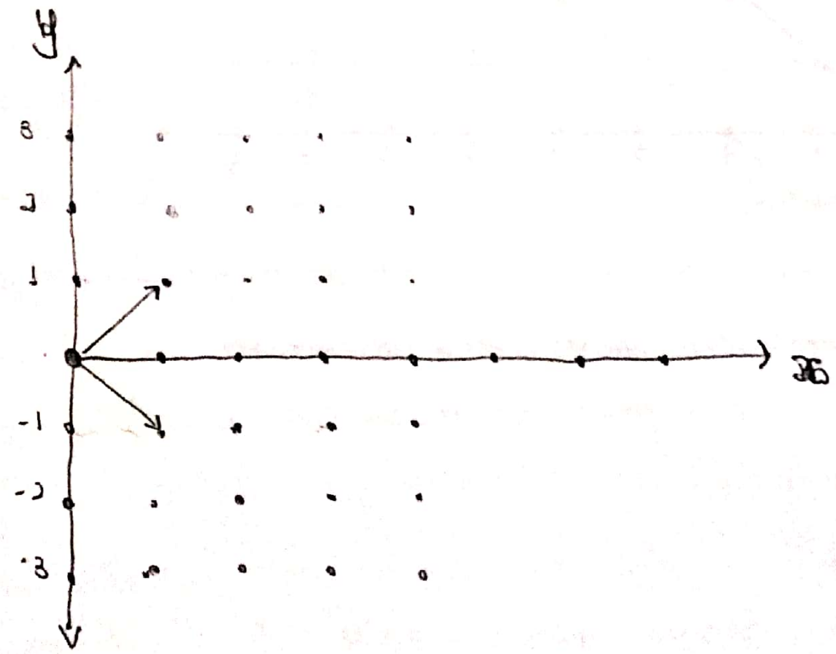
Princípio da Reflexão

Uma partícula faz um passeio na grade $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ segundo as seguintes regras:

~~1. Inicialmente, ela está em (0,0)~~

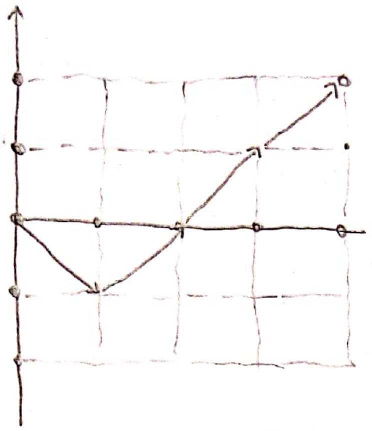
1. A partir do ponto (x, y), $x \in \mathbb{Z}_+$ e $y \in \mathbb{Z}$, pode ir

à $(x+1, y+1)$ ou $(x+1, y-1)$



Em uma releitura, a cada passo (indexados pelo eixo das abscissas) ~~pode~~ a partícula pode subir (S) ou descer (D).

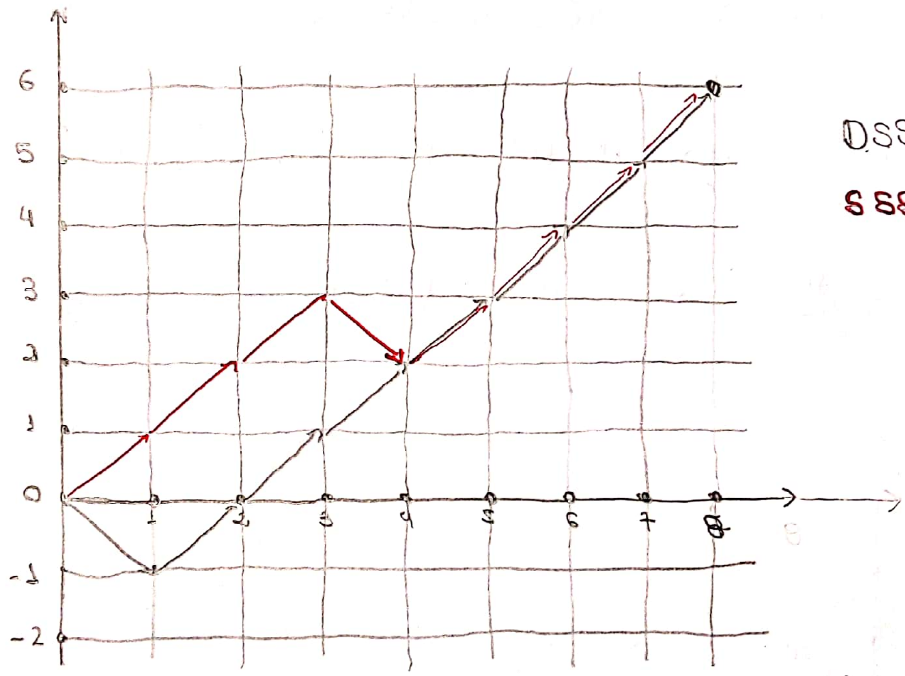
Nesse sentido, o trajeto na figura abaixo



pode ser representado por

DSSS e

Exercício. Quantos são os trajetos possíveis do (0,0) a (8,6)?



DSSSSSSS

SSSDSSSS

Sabemos que cada trajeto, se possível, será um arranjos de S's e D's. Basta descobrir quantos são os S's e D's.

Para tal, vamos denotar por s o número de vezes que a partícula subiu e por d " " " " " " " desceu

Como são 8 passos, temos que $s + d = 8$

Por outro lado, como a partícula subiu, em relação ~~à origem~~ início, 6 unidades, na ordenada

$$s - d = 6$$

cada movim. de subida (decida) a ordenada aumenta (diminui) uma unidade

Daí, $\begin{cases} s+d = 8 \\ s-d = 6 \end{cases} \Rightarrow s = 7$ e $d = 1$

Daí, os caminhos de interesse são filas com 8 elementos, sendo 7 S's e 1 D.

Logo, o número de trajetos de interesse é

$$P_8^{7,1} = \frac{8!}{7!\,1!} = 8.$$

Ex: Quantos são os trajetos de (0,0) a (10,4)?

Sabemos que

$$\begin{cases} s+d = 10 \\ s-d = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, segue que $S=7$ e $D=3$. Portanto há

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120 \text{ trajetos.}$$

Obs: Na estrutura dada, em um número par de passos, a ordenada da posição da partícula será par e em um número ímpar de passos, a ordenada da posição da partícula será ímpar.

Ex: Quantos são os trajetos de (0,0) à (2,1)?

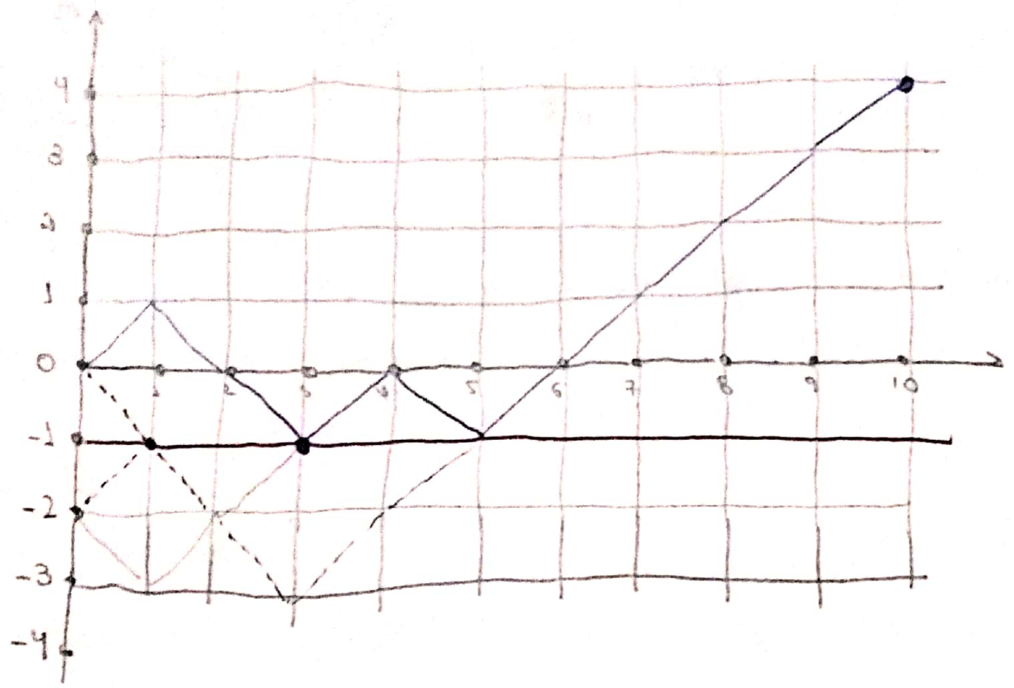
Nessa situação

$$\begin{cases} s+d = 2 \\ s-d = 1 \end{cases} \Rightarrow s = 1,5 \text{ e } d = 0,5$$, o que indica a impossibilidade.

A resposta correta é nenhum, dada a regra do passeio.

Ex: Quantos trajetos de (0,0) a (10,4) tocam a reta y = -1?

Vamos analisar um possíveis caminhos



O trajeto de (0,0) até o 1º toque em y = -1 pode ser refletido em torno da reta y = -1, começando do ponto (0,-2)

Sempre que vamos de (0,-2) a (10,4) passamos obrigatoriamente pela reta y = -1!

Todo trajeto de (0,0) a (10,4) que toque na reta y = -1 equivale à um trajeto de (0,-2) à (10,4) e vice-versa.

~~Em outras palavras~~ Assim, o nº de traj. de (0,0) a (10,4) que tocam a reta y = -1 é igual ao número de caminhos de (0,-2) a (10,4). Esse último é fácil de calcular. Temos

$$\begin{cases} s + d = 10 \\ s - d = 6 \end{cases} \Rightarrow s = 8 \text{ e } d = 2$$

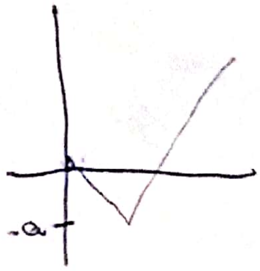
$$\Rightarrow P_{10}^{8,2} = 45.$$

1.) De modo geral, dados $(m,n) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, m e n com mesma paridade, o número de caminhos de (0,0) à (m,n) que tocam a reta $y = a, a > 0$,

$\left(N_{(0,0)}^{(m,n)}(a) \right)$ é equivalente ao número de caminhos de $(0,-2a)$

à (m,n) $\left(N_{(0,-2a)}^{(m,n)} \right)$

$$N_{(0,0)}^{(m,n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} M_{(0,0)}^{(k,a)} \, N_{(k,a)}^{(m,n)}$$



$$= \sum_{k=0}^{n} M_{(0,-2a)}^{(k,-a)} \, N_{(k,-a)}^{(m,n)}$$

$$= N_{(0,-2a)}^{(m,n)},$$

em que $M_{(x,y)}^{(c,d)}$ ind. o n° de traj. que saem de (x,y) e tocam a reta $y=d$ em exatos $c-a$ $(c>0)$ passos.

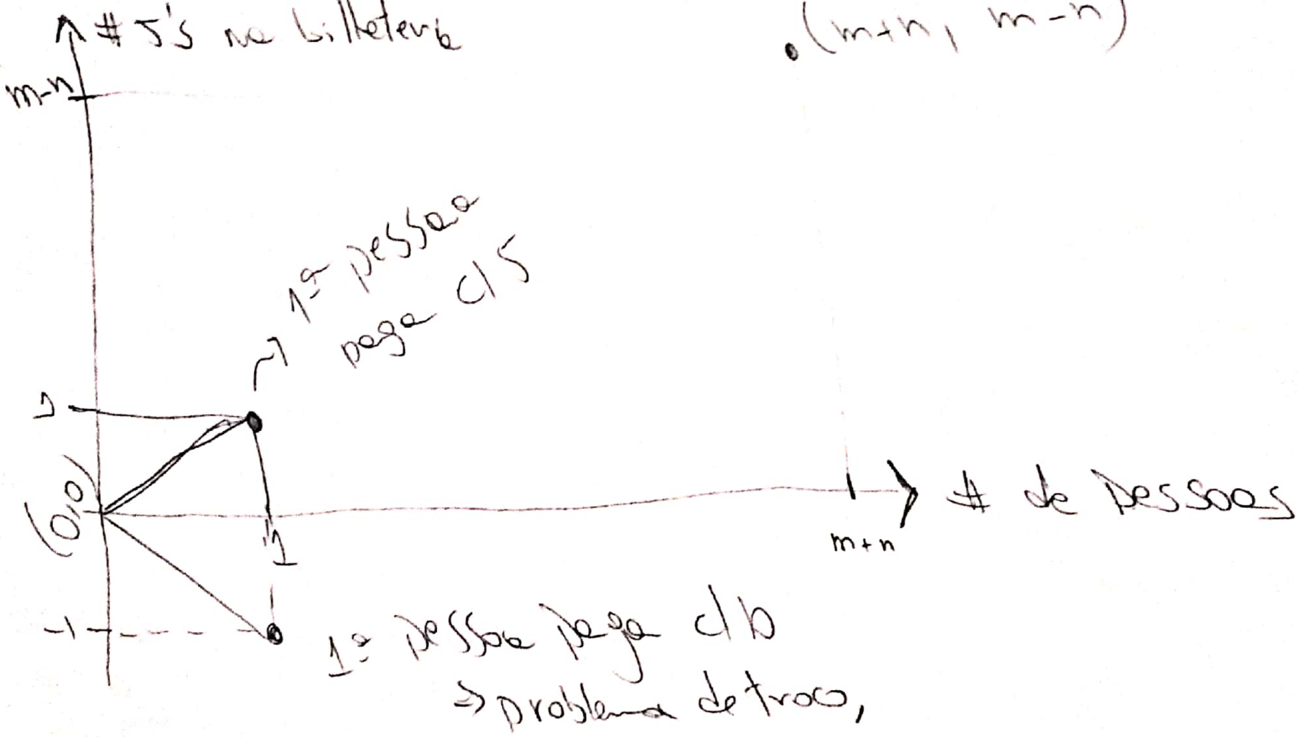
De modo análogo, segue o resul. quando $n<0$ e $a<0$; e também para quando a posição inicial é $(x,y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ qqer.

(x) Uma fila c/ m pessoas c/ notas de 5 e n notas de 10. decinema
A entrada custa 5. U $(m \geq n)$

(a) Quantas filas?

$(m+n)!$

(b) Em quantas filas haverá problema de troco?



Qdo todas as pessoas entrarem no cinema teremos m+n pessoas e a bilheteria terá m-n notas de 5. Sempre que ~~a quantidade de 5's~~ $y = -1$ representa que a bilheteria tem "-1 notas de 5", i.é, há problema de troco.

(S) cam de (0,0) até (m+n, m-n+...)

Refletindo na reta $y=-1$, o caminho de $(0,0)$ até o 1º toque nessa reta, correspondem aos caminhos de $(0,-2)$ a $(m+n, m-n)$

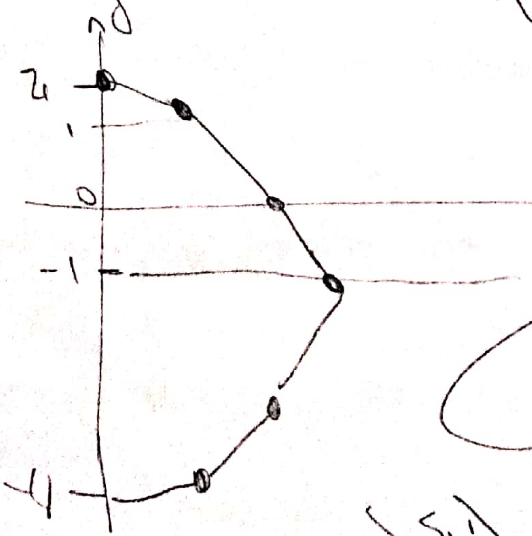
$$\Rightarrow \begin{cases} S+D = m+n \\ S-D = m-n+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = m+1 \\ D = n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{S,D}_{S+D} = P^{m+1,n-1}_{m+n} = \frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n-1)!}$$

Podemos permutar as pessoas q pagam c/ 5 e com 10 de $m!\,n!$ formas

$$\Rightarrow \text{total} = m!\,n!\,\frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n-1)!} = \frac{n\,(m+n)!}{m+1}$$

(c) $(0,2)$ a $(m+n, m-n+2)$ tocando $y=-1$



$\Rightarrow (0,-4)$ até $(m+n, m-n+2)$

$$\begin{cases} S+D = m+n \\ S-D = m-n+2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = m+3 \\ D = n-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m!\,n!\,P^{S,D}_{S+D} = \frac{(m+n)!}{(m+3)!\,(n-3)!}\,m!\,n!$$

Scanned by CamScanner

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 10

20/01

Em combinatória existem, basicamente, dois tipos de problemas: os de cont. e os de exist. Vimos ferramentas simples que são úteis na resol. de prob. de cont. Agora, vamos ver uma ferr. de fundamental importância na resolução de vários prob. de existência.

Teo.
Princípio das gavetas de Dirichlet: Se n objetos forem alocados aleatoriamente em, no máximo n-1 gavetas, então pelo menos uma delas deverá conter 2 ou mais objetos.

Dem: Se nenhuma contiver 2 ou mais, i.e, se em cada gaveta foi colocado no máximo 1 objeto, teremos distribuído no máximo n-1 objetos, o que é uma contradição.

Ex: Mostrar que, dentre quaisquer sete inteiros positivos distintos não maiores do que 126, sempre é possível encontrar dois deles, x e y, tais que $1 \leq y/x \leq 2$.

Vamos dividir os 126 números em 6 conjuntos, de modo que o último elemento de cada conjunto seja igual ao dobro do primeiro

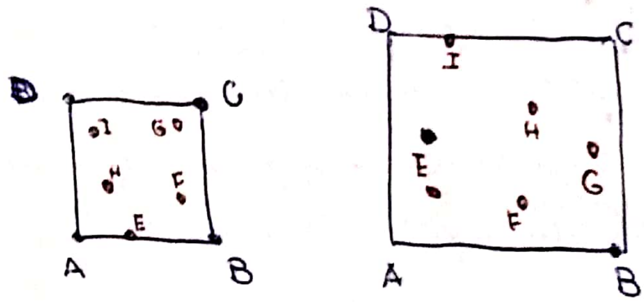
$\{1,2\}$; $\{3,4,5,6\}$; $\{7,\ldots,14\}$; $\{15,\ldots,30\}$, $\{31,\ldots,62\}$, $\{63,\ldots,126\}$

Note que dois número no mesmo cjto terão razão máxima igual a 2.
Tomando esses conjuntos como gavetas e os 7 inteiros como objetos,

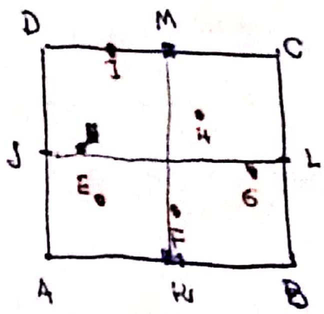
temos que pelo menos dois destes núm. serão escolhidos de um mesmo conjunto, o que encerra a demostração.

Ex: Mostre que se 5 ptos pertencem à superfície de um quadrado de lado 1, então algum par desses pontos determinará um segmento de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}/2$.

Solução: Seja A, B, C, D um quadrado de lado 1 e E, F, G, H e I cinco ptos qqers pertencentes a ele. Uma possível figura é



Dividindo esse quadrado em quatro quadrados menores, todos de lado $1/2$, temos



Tomando esses quatro menores como as gavetas e os cinco pontos como objetos, é fácil ver que pelo menos dois desses pontos pertencerão a um desses quadrados. Como o lado vale $1/2$, a maior dist. entre dois ptos será uma diagonal, cuja medida é $\sqrt{2}/2$.

Ex: Num grupo de n pessoas ($n \geq 2$) existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos. (Assumimos que Se a conhece b, então b conhece a)

Note que

1. Cada pessoa conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ das demais;

2. Se alg pessoa conhece todas as outras $n-1$, então não existe uma pessoa que não conheça ninguém.

Vamos agora considerar as seguintes gavetas:

gaveta 1: destinada à pessoas que não conhecem ninguém
gaveta 2: " à " " conhecem 1 pessoa
gaveta 3: " " " " " 2 pessoas
⋮
gaveta n: " " " " " $n-1$ pessoas

Pela obs. 2, as gavetas 1 e n não podem ser ocupadas simult., de modo que devemos dist. as n pessoas em $n-1$ gavetas. Pelo Princípio de Dirichlet, alguma das gavetas deve conter mais de uma pessoa.

O Princípio de Dirichlet pode ser reformulado da seguinte modo:

Teorema: Se colocarmos m objetos em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $\left\lfloor \frac{(m-1)}{n} \right\rfloor + 1$ objetos.

Demonst. Se cada gaveta contiver no máximo $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ objetos, então o número de objetos será no máximo

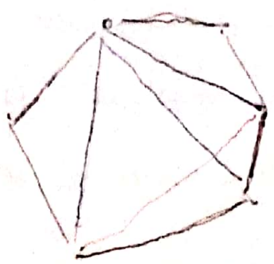
$$n \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1 < m,$$

o que é uma contradição. ∎

Ex: Em qqer grupo de 20 pessoas, pelo menos 3 nasceram no mesmo dia da semana.

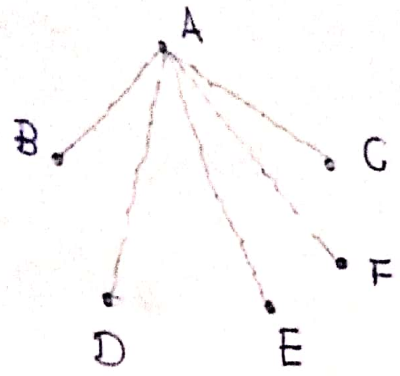
Há 7 gavetas (os dias da semana) e 20 objetos (as pessoas). No Teo. ant., tomamos $m = 20$ e $n = 7$. Logo, pelo menos uma gaveta conterá

$$\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{19}{7} \right\rfloor + 1 = 2+1 = 3 \text{ objetos}.$$



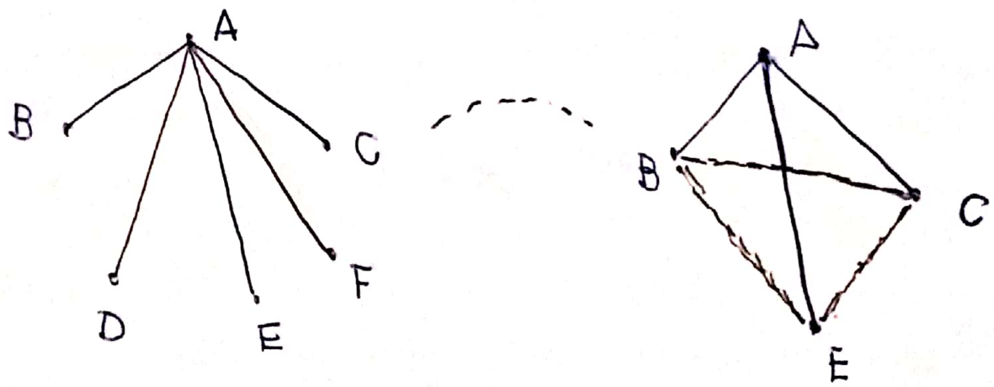
Ex: Suponhamos 6 pontos no espaço não havendo 3 numa mesma linha. Cada dois pontos ligados por um segmento de reta e cada um desses 15 segmentos pintado de uma cor dentre duas, azul e vermelho. Provar que qualquer que seja a escolha destas duas cores na pintura dos segmentos sempre existirá um triângulo com todos os lados de uma mesma cor.

Suponhamos



Qqer pto, ~~em especial~~ o A por exemp., está ligado a 5 outros por 5 segmentos de reta.

Existem duas cores (caixas) disponíveis para estes 5 segmentos (objetos), logo devemos ter pelo menos 3 segm. com a mesma cor.



Para ñ fecharmos um triâng. dev. colorir as demais arestas com vermelho → BCE

!

→ ~~BCE~~ Basta pintar uma das 3 arestas BC, BE ou CE de azul, ~~o que vai ocorrer, já que temos~~ e obtemos o triângulo.

Paralelo: 6 pessoas → 3 se conhecem ou são totalmente estranhas.

Há ainda outra formulação:

Teo. Sejam n gavetas e seja μ um inteiro positivo dado. Coloquemos a_1 objetos na 1ª gaveta, a_2 objetos na 2ª gaveta e assim sucessivamente até a_n objetos na n-ésima gaveta. Então se a média $(a_1+a_2+\dots+a_n)/n$ for maior que μ, uma das gavetas conterá pelo menos $\mu+1$ objetos.

Prova: Se todos os a_i fossem menores que $\mu+1$, teríamos

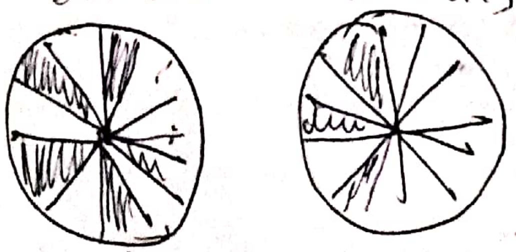
$$\begin{array}{l} a_1 \le \mu \\ a_2 \le \mu \\ \vdots \\ a_n \le \mu \end{array} \Rightarrow a_1+\dots+a_n \le n\mu \Rightarrow \frac{a_1+\dots+a_n}{n} \le \mu,$$

o que é uma contradição.

Em suma, se a média aritmética de números for maior que μ, então pelo menos um dos números é maior que μ.

Tarefa: Vejam Ex. 3.15 Morgado.

200 setores   200 setores



100 pretos   ? pretos

100 brancos   200-? brancos

Sobrepor – rotacionar

⇒ conf. com match de 100 setores

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 11

28/01/17

- Guarda-chuva
- 8 Lista 2 - 40 eleitores
- Triângulo de Pascal

Chamamos de Triângulo de Pascal o triângulo

$$
\begin{array}{ccccc}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

formado pelos <u>coeficientes</u> <u>binomiais</u> C_n^p, $n \geq 0$, $p \geq 0$, $p \leq n$. Se contarmos as linhas e colunas começando em zero, o elem. da linha n e col. p é C_n^p, $n \geq 0$, $p \geq 0$, $p \leq n$.

O Triângulo de Pascal pode ser construído rapidamente por meio da Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad (1)$$

Argumento Combinatório para (1): Deve-se escolher $p+1$ pessoas de um grupo de $n+1$, em que n são homens e 1 ~~são~~ mulher. $\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{com a mulher}} + \underbrace{\binom{n}{p+1}}_{\text{sem mulher}} = \binom{n+1}{p+1}$

Ex. 25, seção 4.1

Algumas outras relações úteis:

- Relação das Combinações Complementares: (simetria)

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}, \quad n \geq p \geq 0.$$

- Teorema das Linhas:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Justificativa: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ é o número de subconjuntos de A. Mas para formar um subconjunto de $A = \{1, 2, \dots, n\}$, devemos incluir ou não cada um de seus n elementos, o que pode ser feito, pelo P.M., de 2^n modos.

Ex: Qual o valor de $S = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k$?

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}\right) = n\, 2^{n-1}$$

- Teorema das Diagonais

$$\sum_{i=0}^{p} C^{i}_{n+i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Justificativa:

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+p}^p \overset{\text{Comb. Comp.}}{=} C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+p}^n$$

$$\overset{\text{T. Col.}}{=} C_{n+p+1}^{n+1} \overset{\text{Com. Comp.}}{=} C_{n+p+1}^{p} .$$

Teorema: $C_n^p < C_n^{p+1}$ se $p < (n-1)/2$ e $C_n^p > C_n^{p+1}$ se $p > (n-1)/2$.

Justificativa: Basta ver que $C_n^{p+1} - C_n^p > 0$ se $n-1-2p > 0$ e

$C_n^{p+1} - C_n^p < 0$ " " < 0.

Detalhes no livro.

Obs: Usando a def.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1))}{p!}$$

· Teorema das Colunas

$$\sum_{i=0}^{n} C_{p+i}^{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & \boxed{1} \\
1 & 3 & \boxed{3} & 1 \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Soma dos elem. de uma coluna p a partir do início até a linha p+n é dada pelo elemento na linha n+1+p e coluna p+1.

Justificativa. Pela Relação de Stiefel, temos

$$C_{p+1}^{p+1} = C_{p}^{p+1} + C_{p}^{p}$$
$$C_{p+2}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^{p}$$
$$\vdots$$
$$C_{p+n}^{p+1} = C_{p+n-1}^{p+1} + C_{p+n-1}^{p}$$
$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n}^{p+1} + C_{p+n}^{p}$$

Observando $C_{p}^{p+1} = 0$, o resultado segue facilmente a partir da soma das eq. ao lado.

Ex Qual o valor de $S = 1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \dots + 50\times51\times52$?

$$S = \sum_{i=1}^{50} i(i+1)(i+2)$$

$$\binom{i+2}{3} = \frac{(i+2)!}{3!\,(i-1)!} = \frac{i(i+1)(i+2)}{3!}$$

$$\Rightarrow 3!\binom{i+2}{3} = i(i+1)(i+2)$$

$$= \sum_{i=1}^{50} 3!\binom{i+2}{3}$$

$$= 6\left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{52}{3}\right) \overset{\text{Teo. Col.}}{=} 6\cdot\binom{52+1}{3+1} = 1756950$$

podemos calcular $\binom{n}{p}$ p/ qqr $n \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{Z}_+$.

Ex:

a. $\binom{1/2}{3} = \dfrac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \dfrac{1/4 \cdot 3/4}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{16}$

b. $\binom{-5}{4} = \dfrac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!} = 70$

c. $\binom{3}{5} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{5!} = 0$.

Binômio de Newton

Teo: Sejam x e y números reais, n inteiro positivo. Então

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Prova: Temos

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um x ou um y e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \leq k \leq n$, se escolhermos y em k dos parênteses, x será escolhido nos $n-k$ demais e o produto será igual a $y^k x^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(x+y)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a $y^k x^{n-k}$, i.e.,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, y^k x^{n-k}$$

Obs.

a) O des. de $(x+y)^n$ tem $n+1$ termos

b) Os coef. binomiais de $(x+y)^n$ são os el. da linha n do Δ de Pascal

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \vdots & & & \end{array}$$

$(x+y)^2 = \underline{1}x^2 + \underline{2}xy + \underline{1}y^2$

$(x+y)^3 = \underline{1}x^3 + \underline{3}x^2y + \underline{3}xy^2 + y^3 . \underline{1}$

c) Escrevendo os termos da soma em ordem decrescente da potência x, o termo de ordem $k+1$ é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} y^k x^{n-k}.$$

Ex. Determine o coef. de x^2 em $(x^3 - 1/x^2)^9$.

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k (x^3)^{9-k}$$

$$= \binom{9}{k} \frac{(-1)^k}{x^{2k}} x^{27-3k}$$

$$= \binom{9}{k} (-1)^k x^{27-5k}$$

$\Rightarrow 27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$

$\Rightarrow T_{k+1} = T_6 = \binom{9}{5} (-1)^5 x^2 = -126x^2.$

Ex: Qual a soma dos coef. de $(x^3 - 2x^2)^{15}$?

$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$

$\Rightarrow P(1) = A_0 + A_1 + \dots + A_n$ é a soma dos coef.

Logo, a resp. é $(1^3 - 2 \times 1^2)^{15} = (-1)^{15} = -1$.

Alguns casos particulares

a) $x = y = 1$

P. dos Linhas.

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

b) $x = 1$, $y = -1$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 1^{n-k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

c) $y = 1$,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

Polinômio de Leibniz Podemos obter uma gen. do B-N.

Teorema:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{A} \frac{n!}{a_1! \dots a_p!} x_1^{a_1} \dots x_p^{a_p} \text{, em que}$$

$A = \{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p ; a_1 + \dots + a_p = n \}$.

Prova:

$$(x_1+x_2+\dots+x_p)^n = (x_1+\dots+x_p)(x_1+\dots+x_p)\times\dots\times(x_1+\dots+x_p)$$

O termo genérico é obtido escolhendo-se em cada parêntese. Escolhendo x_1 em α_1 dos par., x_2 em α_2, ..., x_n em α_n, obtemos o termo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1,\dots,\alpha_n$ int. ñ-negati e $\alpha_1+\dots+\alpha_n=n$).

O termo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ aparece tantas vezes quantos são os modos de escolhermos nos n par. α_1 deles para pegarmos os x_1 p/ fator, α_2 dentre os que sobrarem p/ pegarmos x_2 como fator, etc...

Mas isso pode ser feito de

$$C_n^{\alpha_1}\,C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2}\dots C_{n-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_n!} \text{ modos.}$$

Ex $(x+y+z)^2=?$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \Rightarrow \binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6 \text{ fatores}$$

α_1	α_2	α_3
2	0	0
0	2	0
0	0	2
1	1	0
1	0	1
0	1	1

$$\Rightarrow \frac{2!}{2!\,0!\,0!}(x^2+y^2+z^2)+\frac{2!}{0!\,1!\,1!}(xy+xz+yz)$$

$$= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Obs: Use arg. combinatório p/ mostrar que (Ex 25 seção 4.1)

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{k-2}+\dots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{k}$$

Análise Combinatoria, Probabilidade e Aplicações

Aula 12

27/01/17

1. Vimos que

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^{n-i} \, y^i$$

Nessa ordenação, o termo de ordem $k+1$ é

$$T_{k+1} = C_n^k \, y^k \, x^{n-k} \qquad , \; k = 0, \dots, n.$$

Por outro lado,

$$(y+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, y^{n-i} \, x^i$$

Nessa ordenação, o termo de ordem $k+1$ é

$$T_{k+1} = C_n^k \, x^k \, y^{n-k}$$

No Exemplo da Aula 11,

- Pela primeira ordenação

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k (x^3)^{9-k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k} \Rightarrow k=5 \Rightarrow T_6 = -126x^2$$

- Pela segunda ordenação

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} (x^3)^k \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{9-k} = (-1)^{9-k} \binom{9}{k} x^{5k-18} \Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow T_5 = -126x^2.$$

Em relação à prova.

1. Cada círculo pode ou não ser salientado. Pelo P.M., 2^n configurações possíveis. Para tornar o código mais coerente, descartamos a que nenhuma das regiões foi salientada.

2. a) Se as caixas fossem diferentes, teríamos

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) \text{ possibilidades}$$

Como as caixas são iguais, basta dividir a qtde acima por dois. A resposta é

$$2^{n-1} - 1.$$

b) Se as caixas fossem diferentes, teríamos

caixa 1	$\cancel{0}$	1	2	...	$\cancel{n}$
caixa 2	$\cancel{n}$	$n-1$	$n-2$		$\cancel{0}$

$n-1$ possibilidades.

- Quando n é ímpar, para cada duas das $n-1$ possibilidades acima temos apenas uma de interesse. Daí, $(n-1)/2$.
- Se n é par,

caixa 1	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	$n/2$	$n/2 - 1$	...	1
caixa 2	1	2	3	...	$n/2$	$n/2 + 1$	...	$n-1$.

as dist. são $[n-1, 1]$, $[n-2, 2]$, ..., $[n/2, n/2]$, que são em número $n/2$.

3a) Para chegar ao formigueiro, a formiga precisa ir de (0,0) à (10,2). Sabemos que

$$\begin{cases} s + d = 10 \\ s - d = 2 \end{cases} \Rightarrow s = 6 \text{ e } d = 4$$

Logo, há

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210 \text{ caminhos possiveis.}$$

b) No problema, os caminhos inseguros são aqueles que tocam a reta $y = -2$. Usando o Princípio da Reflexão, sabemos que estes são em número iguais ao número de caminhos de (0, -4) à (10, 2). Nesse último cenário,

$$\begin{cases} s + d = 10 \\ s - d = 6 \end{cases} \Rightarrow s = 8 \text{ e } d = 2$$

$$\Rightarrow P_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45.$$

Assim, o número de caminhos seguros é

$$P_{10}^{6,4} - P_{10}^{8,2} = 210 - 45 = 165.$$

4. a) Basta ver que cada situação possivel está associada a uma permutação caótica de $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ $(a_1 \dots a_n)$.

Assim, o número de interesse é D_4. Como $\frac{4!}{e} = 8,83$, a resposta é $D_4 = 9$.

b) $D_n = \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$

Scanned by CamScanner

5. Como $p \geq n > 0$,

- Há aquelas em que $n-1$ ~~das~~ ~~nulas~~ das incógnitas são nulas

$$C_n^{n-1}\ CR_{1}^{p-1}\ 2^1$$

- Há aquelas em que $n-2$ das inc. são nulas

$$C_n^{n-2}\ CR_{2}^{p-2}\ 2^2$$

- Há aquelas em que $n-3$ das inc. são nulas

$$C_n^{n-3}\ CR_{3}^{p-3}\ 2^3$$

⋮

- Há aquelas em que 1 das inc. é nula

$$C_n^1\ CR_{n-1}^{p-(n-1)}$$

- Há aquelas em que nenhuma das inc. é nula

$$CR_n^{p-n}\ 2^n$$

Logo, a resposta é

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{n-k}\ CR_{k}^{p-k}\ 2^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{p-1}{p-k} 2^k$$

$$\binom{n}{k}\binom{p-1}{p-k}$$

• Aproveitando o gancho da última questão, vamos falar de uma das principais ferramentas de problemas de contagem, especialmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais repetição é repetida.

Antes, vimos como determinar o número de soluções int. ñ neg. de equações do tipo

$$x_1 + \dots + x_n = p,$$

sem restrições nas variáveis x_i's.

Consideremos, agora, o seguinte problema:

Encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, onde as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao cjto $\{2,3,4\}$, e a variável x_3 pertence ao conjunto $\{5,6,7\}$. Definimos

$$p_1 = x^2 + x^3 + x^4$$
$$p_2 = x^2 + x^3 + x^4$$
$$p_3 = x^5 + x^6 + x^7$$

Obs. que os expoentes de x em p_i são os elementos do cjto ao qual x_i pertence.

Agora,

$$p(x) = p_1 p_2 p_3 = (x^2 + x^3 + x^4)^2 (x^5 + x^6 + x^7) \qquad (1)$$
$$= x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + \underline{7}x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$$

A resposta é $\underline{7}$. Cada solução do problema corresponde a uma maneira de se obter x^{12} no produto de $p_1 p_2 p_3$.

Na vdd, o pol. em (1) gera o nº de sol. p/ todas as eq. $x_1 + x_2 + x_3 = p$, $p \in \{9, \dots, 15\}$, com as restrições impostas às variáveis x_i's.

1. Semelhante ao feito em aula: Para chegar à B, serão necessários ~~sete~~ sete passos, sendo 4 deleles da forma → e 3 da forma ↑. Logo,

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.3!} = 35$$

caminhos de A à B.

Para a segunda questão, temos pelo PM.

$$P_4^{2,2} \times P_3^{2,1} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{2!\,\cancel{2!}} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \times 6 = 18.$$

↑ ↑

A → O → B

2- a) Se as caixas fossem diferentes, teríamos

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) \text{ possibilidades }, n \geq 2.$$

Como as caixas são iguais, basta dividir o resultado acima por 2. A resp. é

$$2^{n-1} - 1.$$

b) Se as caixas fossem diferentes, teríamos

caixa 1	~~0~~	1	2	...	n-1	~~n~~
caixa 2	~~n~~	n-1	n-2		1	~~0~~

n-1 possibilidades.

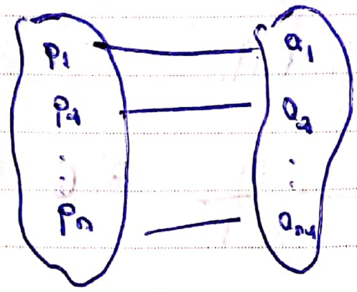
• Qdo n é ímpar, para cada duas das n-1 possibilidades acima temos apenas uma de interesse. Daí $(n-1)/2$.

• Se n é par

cx 1	$n-1$	$n-2$	...	$n/2$	$n/2-1$	...	1
cx 2	1	2		$n/2$	$n/2+1$		$n-1$

as distintas são $[n-1, 1], [n-2, 2], \dots, [n/2, n/2]$, que são em nº $n/2$.

3. A cada pessoa devemos associar um ~~elevador~~ andar de tal modo que para cada ~~elevador~~ andar, exista ao menos uma pessoa que salte nele.



O problema equivale à contar o nº de f. sobrejetoras de $\{p_1, \dots, p_n\}$ em $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Pelo exercício da lista,

$$\underbrace{C_n^2 \times (n-1)}_{\text{escolher os dois necess. associados ao mesmo andar}} \times \underbrace{(n-2)!}_{\text{relação biunívoca entre os demais}}$$

4. Basta ver que cada situação possível está associada a uma permutação caótica de $a_1 a_2 a_3 a_4$. $(a_1 \dots a_n)$.

Assim, o número de interesse é D_4. Como $\frac{4!}{e} = 8{,}83$, a resposta é 9.

b) $D_n = \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$

5. Escolhemos 6 das 8 cores para pintar os retângulos, o que pode ser feito de

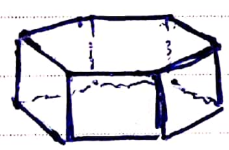
$$C_8^6 = \frac{8!}{6!\,2!} = 28 \text{ modos e,}$$

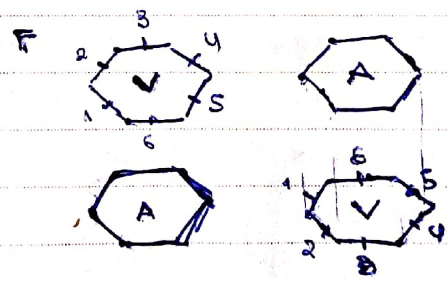
em seguida, colorimos as seis faces retangulares com estas 6 cores, o que pode ser feito de

$$(PC)_6 = 5! = 120.$$

Por fim, usamos as duas restantes para pintar os hexágonos, o que pode ser feito de $\underline{1}$ modo (devido à natureza do sólido).
Daí, pelo P.M.,

$28 \times 120 = 3860$ formas de colorir um prisma hexagonal regular





as rotações já foram contempladas pelas perm. circulares

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 13

30/01/17

Obs: Prova Alia Garrudo   Com: Na segunda parte: 1. Ross
2. Exercícios de Prob.
3. Morgado

Introdução: A def. de prob. como quociente do nº de "casos favoráveis" foi a primeira definição formal de prob., e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra Liber Ludo Aleae de Jerónimo Cardano (1501 - 1576).

Consideremos o experimento: jogue um dado e observe o nº mostrado na face de cima.

1. possíveis resultados do experimento:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, \quad |\Omega| = 6$$

os elementos do esp. amostral são chamados eventos elementares. Os subconj. serão chamados eventos. Por exemplo $A = \{2, 4, 6\}$ é o evento que acontece se o nº most. na face de cima é par.

2. calcular a prob. de um evento A: somos os eventos elementares são todos igualmente prováveis, $|A|/|\Omega|$ (Laplace). Caso contrário

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Probabilidade

Método para quantificar o quão plausível é a ocorrência de algum acontecimento.

Def: Um experimento é aleatório se, ao ser repetido nas mesmas condições, é impossível prever antecipadamente o resultado.

A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos / fenômenos aleatórios.

Def: Denominamos espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e o denotamos por Ω.

Def: Um subconjunto $A \subset \Omega$ é chamado evento.

Exemplos:

• Experimento	• Espaço Amostral (Ω)
1. Lançamos um dado	$\{1,2,3,4,5,6\}$
2. Mega Sena	$\{A \subseteq \{1,\dots,60\} : \lvert A \rvert = 6\}$
3. Temperatura	$[10, 40]$ - um dos cjtos possíveis p/ Ω

• Evento

par: $\{2,4,6\}$, maior que 3: $\{3,4,5,6\}$

$\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$ (premiado ser) $\{\{1,2,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7,8\},\dots\}$ (ser seq.)

Em geral, associamos probabilidades aos eventos de interesse. Sendo assim, precisamos antes de mais nada construir um cjto que contenha os eventos de interesse. É suficiente pensar em tal conjunto de eventos como uma subcoleção $\mathcal{F}$ de todos os subcjtos de Ω. Esta subcoleção deve ter algumas propriedades:

- Ω é um evento (evento ~~certo~~)
- Se A é evento, então A^c tbm é
- Se $A_1, A_2, \dots$ é uma col. en. de ev., $\bigcup_i A_i$ tbm é evento

Def: Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é chamada σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições:

a. $\Omega \in \mathcal{F}$ $(\mathcal{F})$

b. Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$.

c. Se $A_1, A_2, \dots$ pertencem a $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Obs: • Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$, então $\overset{\text{por b.}}{A_i^c} \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots \overset{c}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$

$\overset{b}{\Rightarrow} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^c\right)^c \overset{\text{D.M}}{=} \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$. • $\Omega \in \mathcal{F} \overset{b}{\Rightarrow} \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$.

Ex: 1. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ (Dado)

$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{2,4,6\}, \{1,2,3\}\}$ é σ-álgebra

a. $\Omega \in \mathcal{F}$

b. Se $A \in \mathcal{F}$,

$A = \Omega$, $A^c = \emptyset \in \mathcal{F}$.

$\emptyset$, $A^c = \Omega$

$\{2,4,6\}$, $A^c = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\}$, $A^c = \{2,4,6\}$

c. Dados A_i's,

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1,2,3\}$,

$\{2,4,6\}$,

Ω ou $\emptyset$.

$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \{3,4\}, \{1,2,5,6\}\}$

$\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{1,3\}, \{2,4\}\}$

2. $\Omega = \{(C,C), (C,\bar{C}), (\bar{C},C), (\bar{C},\bar{C})\}$ "Lanç. de duas moedas"

$= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \underset{\text{prob. de duas caras}}{\{\omega_1\}}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$ é σ-álgebra

3. Ω

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_0$ é σ-álgebra de subconjuntos de Ω (σ-álgebra trivial)

4. Ω

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F}$ é σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

5. $A \subseteq \Omega$, $A \neq \emptyset$

$\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ é σ-álgebra de subcjtos de Ω (menor σ-álg. que contem A.)

6. $\Omega = \mathbb{N}$

$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A$ ou A^c é finito$\}$

$A_n = \{2n\}, n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \geq 1$.

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ e $\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c$ não são finitos e, portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{F}$.

pares impares

Logo, $\mathcal{F}$ não é σ-álgebra.

Comentário: Sendo $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas σ-álg. de subcjtos de Ω, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é σ-álgebra.

a. $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

$\left.\begin{array}{l}\Omega \in \mathcal{F}_1 \\ \Omega \in \mathcal{F}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

b. $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

$A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_1$, $A \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_2$ $\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

c. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_1 \\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}_1 \\ \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}_2 \end{array} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2.$

De modo geral, dada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ uma coleção enumerável ou não-enumerável de σ-álgebras $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ é uma σ-álgebra.

No entanto, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ não é σ-álgebra.

Ex: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

Notemos que

$\{1,2,3\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. No entanto, $\{1,2,3\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,5\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

$\{1,3,5\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

Logo, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ não é σ-álgebra de conjuntos de Ω.

Dado um experimento, ~~xxxx~~ consideramos $(\Omega, \mathcal{F})$, um espaço mensurável. Para cada $A \in \mathcal{F}$, associamos um número $\mathbb{P}(A)$, o qual indica a prob. de A ocorrer.

Provas: Allan dos Santos

Luis Eduardo Frighetto Pereira

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 14 31/01/17

Def: Dado um espaço amostral Ω, e uma σ-álgebra $\mathcal{F}$, uma medida de probabilidade é uma função $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$, tal que

i. $P(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{F}$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

Obs: Se A e B em $\mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplos: 1. Probabilidade de Laplace:

Dado $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, tome

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \left(A = \{1,2\} \Rightarrow P(A) = \frac{|\{1,2\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \right)$$

i. $|A| \geq 0 \Rightarrow \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6} \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{6}{6} = 1$.

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots| = \sum_{i=0}^{+\infty} |A_i|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots|}{|\Omega|}}_{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Exemplo 1.1. Dois dados são lançados.

a) Qual a probabilidade de que o maior número observado seja menor que 3.

Nesse caso,

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \quad , \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
$$(2,1), (2,2), \dots, (2,6),$$
$$\vdots$$
$$(6,1), (6,2), \dots, (6,6) \}$$

e o evento de interesse é

$$A = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \} \quad - \max < 3$$

Logo, ~~uma vez que os resultados em Ω são equiprováveis.~~

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

b) Qual a prob. de ocorrer dois nºs iguais?

Nesse caso, o evento de interesse é

$$B = \{ (1,1), (2,2), (3,3), \dots, (6,6) \}$$

Logo, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

Exemplo 1.2.

20 Boas
15 Def.

Prob. de sair uma com defeito em uma

a) Amostra s/ reposição de tamanho 1? ~~Prob. de sucesso?~~

$$\Omega_1 = \{ b_1, \dots, b_{20}, d_1, \dots, d_{15} \} \quad , \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
$$D_1 = \{ d_1, \dots, d_{15} \}$$
$$P_1(A) = |A| / |\Omega| = 15/35 = 3/7$$

b) Amostra s/ rep. de tamanho 10?

$$\Omega = \{ A \subseteq \Omega_1 : |A| = 10 \}$$
$$D_{10} = \{ \{d_1, \dots\}, \{d_2, \dots\}, \dots \{ \; \} \}$$

$$P(D) = \frac{\binom{15}{1}\binom{20}{9}}{\binom{35}{10}}$$

c) $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{35}{10}}$, $B = \{A \subseteq \{b_1, \dots, b_{20}\} : |A| = 10\}$

Exemplo 1.3. Num grupo de 20 pessoas, qual a probabilidade de pelo menos duas delas celebrarem o aniversário no mesmo dia?

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{20}) : a_i \in \{1, \dots, 365\}, i = 1, \dots, 20\}$

$A = \{(a_1, \dots, a_{20}) \in \Omega : a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \dots \neq a_{20}\}$ (não celebrarem)

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 346}{365^{20}}$

$B = \Omega \setminus A \qquad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0{,}4114$

De modo geral, se há $r \leq 365$ pessoas,

r	P(E)
10	0.1169
20	0,4114
30	0,7063
40	0,8912
50	0,9704
60	0,9941

Exemplo 2: $(\Omega, \mathcal{F})$. Sejam $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ prob. e $\alpha \in (0,1)$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$A \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}(A) = \alpha \mathbb{P}_1(A) + (1-\alpha)\mathbb{P}_2(A)$ é probabilidade.

1. $\mathbb{P}(A) = \overset{>0}{\alpha}\overset{\geq 0}{\mathbb{P}_1(A)} + \overset{>0}{(1-\alpha)}\overset{\geq 0}{\mathbb{P}_2(A)} \geq 0$

2. $\mathbb{P}(\Omega) = \alpha \mathbb{P}_1(\Omega) + (1-\alpha)\mathbb{P}_2(\Omega) = \alpha + (1-\alpha) = 1$

3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \alpha \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) + (1-\alpha)\mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)$$

$$= \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_1(A_i)}_{\text{converg.}} + (1-\alpha)\underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_2(A_i)}_{\text{conver}}$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha \mathbb{P}_1(A_i) + (1-\alpha)\mathbb{P}_2(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) .$$

Exercício: Como no Exemplo anterior, defina, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_1(A) + \mathbb{P}_2(A)$. $\mathbb{P}(\cdot)$ é probabilidade?

i. $\mathbb{P}_1(\Omega) + \mathbb{P}_2(\Omega) = 2 \neq 1$ $\therefore$ Não é!!!

Obs: Ao trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dá-se o nome espaço de probabilidade, ou modelo probabilístico.

Propriedades da Probabilidade

2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

1. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

3. $A, B \in \mathcal{F}$, com $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

4. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

5. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

6. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Em geral, para $A_1, \dots, A_n$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = i}} P\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right)$$

modelos discretos:

Nesse curso, estudaremos casos em que Ω é enumerável. De modo geral, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ e tomamos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ como a σ-álgebra de eventos de interesse. Para cada resultado ω_i, associamos um valor p_i, com

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

~~Então~~, Para $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \sum_{\{i \geq 1 : \omega_i \in A\}} p_i \quad (\text{que é uma prob.})$$

Quando Ω é finito com n elementos, obtemos o modelo de Laplace ao tomar $p_i = 1/n$.

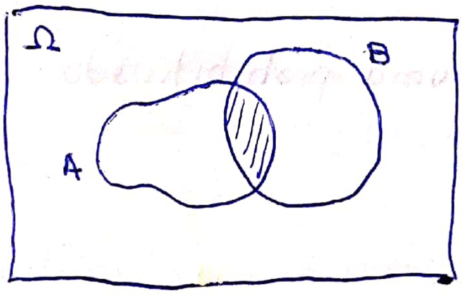
Scanned by CamScanner

Análise Combinatória,
Probabilidade e Aplicações

Aula 15 Probabilidade Condicional — 01/02/17

Como usual, ~~começamos~~ Considere com um modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Suponha que sabemos que o evento $B \in \mathcal{F}$ ocorreu. Em geral, ~~esta~~ informação deve alterar a probab. que associamos aos demais eventos. Se $A \in \mathcal{F}$ é outro evento, então A ocorre se e somente se $A \cap B$ ocorrem: o espaço amostral é reduzido à B. Deste modo, a prob. de A dado a ocorrência de B, deveria ser proporcional à $P(A \cap B)$.



Como a probab. condicional, dado que B ocorreu, deve ainda ser uma medida de prob., segue que a const. de proporcionalidade deve ser $1/P(B)$.

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Def: Sejam A e B eventos ~~em um experimento aleatório~~ $\mathcal{F}$ com $P(B) > 0$.
A prob. condicional de A dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ex. Lançamento de um dado

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$
$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$$

Sejam

$B = \{2, 4, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$

As respect. prob. são

$\to P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Suponha que sabemos que o resultado é par (B ocorreu). A probabilidade de A dado B fica dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

Vamos agora ver que $P(A/B)$ é uma probabilidade.

Temos $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ prob.

$B \in \mathcal{F}$ t.q. $P(B) > 0$

Definimos $P(\cdot /B) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

i. $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$, pois $P(A\cap B) \geq 0$

ii. $P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

iii. $A_1, A_2, A_3, \dots$ em $\mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

Scanned by CamScanner

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i / B\right) = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \cap B\right] \Big/ P(B)$$

$$= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overset{\text{diss.}}{\widetilde{(A_i \cap B)}}\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i / B).$$

~~De forma alternativa~~

Da Definição, temos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \qquad \cancel{\text{(Regra do Produto)}}$$

donde segue que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 / A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_3 / A_1 \cap A_2)\, P(A_2 / A_1) \cdot P(A_1)$$

A seguinte generalização é conhecida com Regra do Produto:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, vale que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n / A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Ex Selecionamos 3 cartas de um baralho ao acaso sem reposição. Qual a prob. de retirarmos 3 reis.

Seja A_i o evento repres. a retirada de um rei na i-ésima seleção, $i = 1, 2, 3$.

. O evento de interesse é

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Pela Regra do Produto,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = 0{,}018\%.$$

Ex Uma urna

10 azuis
15 verm

A_i : azul na i-ésima extração, B_i : verm. na i-ésima extra

$\mathbb{P}(A_1, B_2, A_3, B_4)$

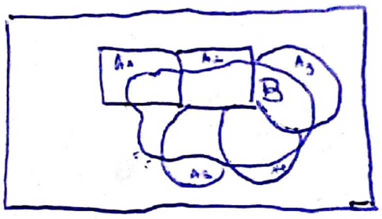
$$\mathbb{P}(A_1, B_2, A_3, B_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2 / A_1)\mathbb{P}(A_3 | B_2 \cap A_1)\mathbb{P}(B_4 | A_1 \cap B_2 \cap A_3)$$
$$= \frac{10}{10+15} \times \frac{15}{10+15-1} \times \frac{9}{10+15-2} \times \frac{14}{10+15-3}$$
$$= \frac{18900}{303600} = 0{,}095.$$

Teorema da Probabilidade Total: Sejam $A_1, \ldots, A_n$ ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ eventos disjuntos e ~~[illegible]~~ B, todos em $\mathcal{F}$, tais que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\mathbb{P}(A_i) \geq 0 \ \forall i$. Então

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B/A_2)\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B/A_n)\mathbb{P}(A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Prova:

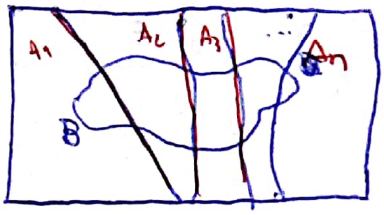
Basta ver que $\{A_i \cap B : i = 1, \ldots, n\}$ particiona B. Assim,



$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i).$$



Ex

1	2
60L	10L
40L	20C

Paraf longos e curtos

Selecionamos aleatoriamente um parafuso de uma caixa. Qual a prob. de que o escolhido seja um paraf. longo?

Sejam os eventos

L : o parafuso é longo
C_1: a caixa 1 foi escolhida
C_2: " " 2 " "

$$P(L) = P(L \mid C_1) P(C_1) + P(L \mid C_2) P(C_2)$$

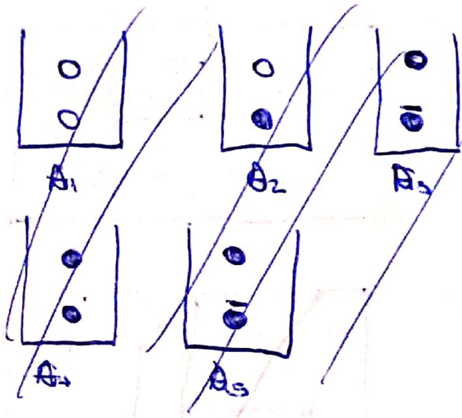
$$= \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{30} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{15}$$

~~Ex: ⊗ ⊗ ⊗ O O~~

~~De cinco moedas, 3 desonestas e 2 honestas, selecionam-se 2. Das 2 selecionadas, escolhe-se uma e esta é lançada. Qual a prob. de o resultado ser cara?~~

1.



~~C: o resultado é cara~~

~~C_i: a amostra i foi escolhida~~

$$P(C) = P(A_1)P(C/A_1) + P(A_2)P(C/A_2) + \dots + P(A_5)P(C/A_5)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times$$

Ex: Seleciona-se 1 de 9 moedas, sendo 3 com 2 caras, 4 com duas coroas e apenas 2 honestas. Qual a prob. de o result. do lanç. da moeda escolhida seja cara?

Sejam M_1: umas das 3 moedas com 2 caras é escolhida

M_2: " 4 moedas " 2 coroas ~

M_3: 2 moedas honestas ~

C: o result. do lanç é cara

$$P(C) = P(C/M_1)P(M_1) + P(C/M_2)P(M_2) + P(C/M_3)P(M_3)$$

$$= 1\cdot\frac{3}{9} + 0\times\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{9}$$

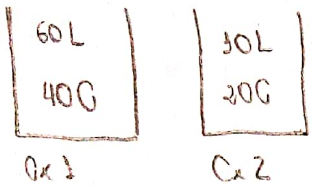
$$= \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 16

02/02/17

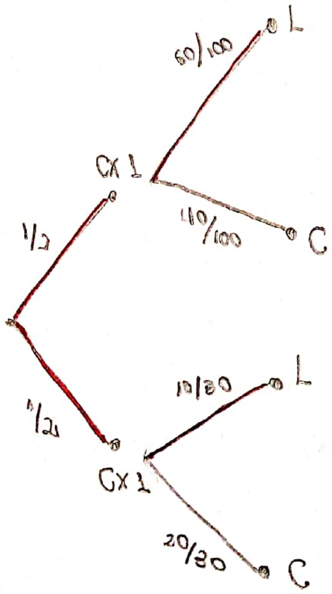
Na aula de ontem,



$$P(L) = P(L|C_1)P(C_1) + P(L|C_2)P(C_2)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{30}\,\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{18+10}{60} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$



Agora, qual $P(C_1 / L)$?

Por definição

$$P(C_1|L) = \frac{P(L \cap C_1)}{P(L)}$$

$$= \frac{P(L|C_1)P(C_1)}{P(L)} = \frac{3/5 \times 1/2}{7/15} = \frac{9}{14}$$

- Para o cálculo de $P(C_1/L)$, usamos o Teorema de Bayes.

Teorema de Bayes: Sejam $A_1, \ldots, A_n$ e B eventos em $\mathcal{F}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $P(A_i) > 0\ \forall i$ e $P(B) > 0$ e $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}.$$

~~Exemplo: Moedas. (3 com 2 caras, 4 com 2 coroas, 2 honestas)~~

Prova: Por definição

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

Pela regra do produto,

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)\,P(B/A_i) \qquad (2)$$

e pelo Teo. do Prob. Total,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i) \qquad (3)$$

Subst. (2) e (3) em (1) segue que

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}$$

Exemplo: Moedas (3 com 2 caras, 4 com 2 coroas, 2 honestas)

Eventos:

C: o resultado é cara

M_1: uma moeda com 2 caras foi selecionada

M_2: " " " " coroas " "

M_3: " " honesta foi selecionada.

Qual a prob. de ter sido escolhida uma moeda honesta, dado que o resultado foi cara?

$$P(M_3/C) = \frac{P(M_3 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/M_3)\,P(M_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(C/M_i)\,P(M_i)} = \frac{1/2 \cdot 2/9}{4/9} = \frac{1}{4}.$$

exemplo: Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença qdo essa doença existe de fato. Entretanto o teste aponta um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual a prob. de uma pessoa ter a doença dado que seu exame foi positivo?

Sejam os eventos

D: a pessoa tem a doença

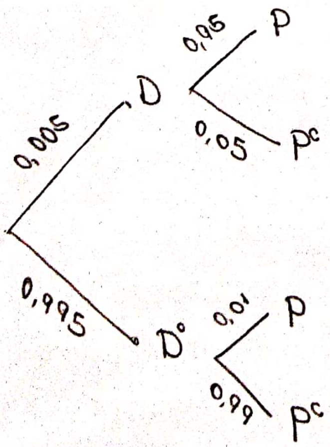
P: o resultado do exame é positivo

$P(P/D) = 0{,}95$; $P(P/D^c) = 0{,}01$ $P(D) = 0{,}005$

$P(D/P)$?

$$P(D/P) = \frac{P(P/D)\,P(D)}{P(P/D)\,P(D) + P(P/D^c)\,P(D^c)}$$

$$= \frac{0{,}95 \times 0{,}005}{0{,}95 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}995} = \frac{0{,}0475}{0{,}0147} = 0{,}323$$



Independência

Os eventos A e B são ditos independentes, ~~se~~, denotamos isso por $A \perp B$, se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Obs. 1. $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega)$, i.e., $A \perp \Omega$,

2. $\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(A)$. $A \perp \emptyset$

Se A e B são independentes, então $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$. De fato,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}} = \mathbb{P}(A).$$

Ex: Lançamento do dado

$A = \{2, 4, 6\}$ $\quad \mathbb{P}(A) = 1/2$ $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = 1/6 = 1/2 \times 1/3 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$B = \{5, 6\}$ $\quad \mathbb{P}(B) = 1/3$

$C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad \mathbb{P}(C) = 5/6$ $\quad$ logo A e B são independentes

$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$. Logo A e C não são independentes.

Obs. 3. Se A e B são independentes então

- A e B^c são independentes

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
$$= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

- A^c e B são independentes

Análogo.

- A^c e B^c são independentes

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{1 - \mathbb{P}(A)}_{\mathbb{P}(A^c)} - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^c)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 17

03/02/17

. Três eventos A_1, A_2 e A_3 são independentes $(A_1 \perp A_2 \perp A_3)$ se

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$$
$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

<u>Ex</u>: $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/4$.

$A = \{1,3\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{2,3\}$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Mas $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, i.e.

A, B e C, são independentes dois-a-dois, mas não são independentes. //

De modo geral, para n eventos, temos

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se

nº de igualdades a serem verificadas

$2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1}$

$$\forall B \subseteq \{1, \ldots, n\},\ |B| \geq 2,\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in B} A_j\Big) = \prod_{j \in B} \mathbb{P}(A_j)$$

Ademais, $A_1, \ldots, A_n$ são ind. dois a dois se

$\forall B \subseteq \{1, \ldots, n\}$, t.q. $|B| = 2$, $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in B} A_j) = \prod_{j\in B} \mathbb{P}(A_j)$

$(\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots, n$, com $i \neq j)$

Exemplo. Lançamento de dois dados (um branco e outro vermelho)

$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ $|\Omega| = 36$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{36}$

A : soma 7

B : Dado branco resulta em face par

C : Dado vermelho resulta valor maior que 4

D : Soma par

E : Dado vermelho resulta face par

F : soma igual à 9

G : Dado branco resulta face maior que 3.

A, B e C são independentes

$\mathbb{P}(A) = 6/36$ $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/36$ $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/36$

$\mathbb{P}(B) = 18/36$ $\mathbb{P}(A \cap C) = 2/36$

$\mathbb{P}(C) = 12/36$ $\mathbb{P}(B \cap C) = 6/36$

Fazendo-se as checagens, conclui-se que A, B e C são independentes.

B, D, E

$\mathbb{P}(B) = 6/36$ $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}(B \cap E) = \mathbb{P}(D \cap E) = 1/4$

$\mathbb{P}(D) = 18/36$ B, D e E são ind. dois-a-dois

$\mathbb{P}(E) = 12/36$ Mas $\mathbb{P}(B \cap D \cap E) = \dfrac{1}{36} \neq \dfrac{1}{8} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(E)$.

B^c, G, F

$P(B^c) = 18/36$ $\quad$ $P(B^c \cap F \cap G) = 1/36 = P(B^c)P(F)P(G)$

$P(F) = 4/36$

$P(G) = 18/36$ $\quad$ No entanto,

$P(B^c \cap G) = 6/36 \neq 1/4 = P(B^c)P(G)$

Logo, B^c, F e G não são independentes.

Independência Condicional

$A_1, \dots, A_n$ são condicionalmente independentes dado B se para toda subcoleção $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, $2 \leq k \leq n$, vale

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \mid B) = P(A_{i_1} \mid B) \dots P(A_{i_k} \mid B).$$

Exercícios

1. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$, $P(A \cap B) = 1/5$. Calcule a prob. de

a) A não ocorre

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1/2$$

b) pelo menos um de A e B ocorre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/4 - 1/5 = 11/20$$

c) A não ocorre, B sim

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 1/4 - 1/5 = 0{,}05 = 1/20$$

d) Não ocorre nenhum de A e B

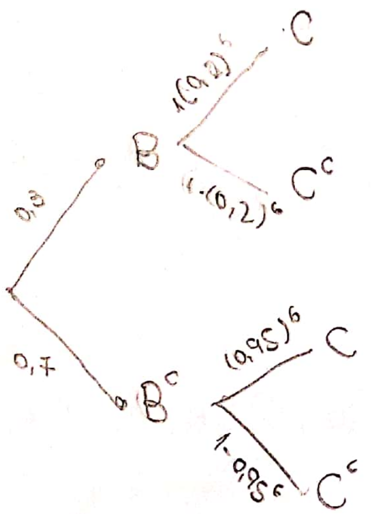
$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 9/20$$

e) Ocorre exat. um de A e B

$$P(A^c \cap B) + P(B^c \cap A) = \frac{1}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{20}$$

2. Em um julgamento criminal, o réu é condenado se e somente se todos os 6 jurados votem culpado. Suponha que se o réu é realmente culpado, os jurados votam culpado, de forma independentes com probabilidade 0,95, enquanto se o réu é realmente inocente, os jurados votam não culpado, de forma independente com prob. 0,8. Suponhamos que 70% dos réus que são julgados sejam culpados.

a) Encontre a probabilidade do réu ser condenado



$P(C) = 0,3 \times (0,2)^6 + 0,7 \times (0,95)^6$

$= 0,51458$

b. Dado que o réu é condenado, qual a prob. do réu ser culpado?

$$P(B^c / C) = \frac{P(B^c)P(C/B^c)}{P(C)} = \frac{0,7 \times 0,95^6}{0,51458} = \frac{0,51456}{0,51458}$$

$= 0,99996$

c. Comente a suposição de que os jurados decidem independent--

A suposição é ridícula, já que os jurados trabalham em o

Análise Combinatória
Probabilidade e Aplicações

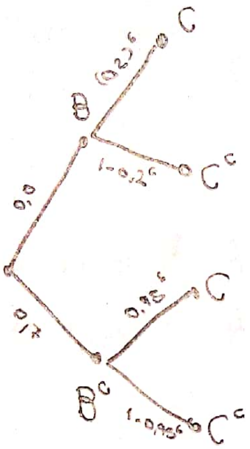
Aula 18

06/02/17

. réu condenado $\Leftrightarrow$ todos 6 jurados votam culpado

Suposições:
70% dos réus são culpados
Se realm. culpado, jurados vot. culp. de forma ind. por culp. 0,95
Se " inocente, " " " inocent. " 0,8.

Na aula de sexta, vimos um exercício sobre um julgamento.



C: condenado
B: réu inocente
V_1: declarado culpado pelo juiz 1
V_2: " " " " 2
V_3: " " " " 3
V_4: " " " " 4
V_5: " " " " 5
V_6: " " " " 6

. $P(C/B^c) = P(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_6 / B^c) = P(V_1/B^c) \ldots P(V_6/B^c)$
$= (0,95)^6$

. Por outro lado, sabemos que $V_1^c, \ldots, V_6^c$ são condicionalmente independentes dado B, donde segue que $V_1, \ldots, V_6$ tbm o são. Logo,

$$P(C/B) = P(V_1 \cap \ldots \cap V_6/B) = P(V_1/B) \ldots P(V_6/B) = (0,2)^6,$$

uma vez que $P(V_i/B) = 1 - P(V_i^c/B) = 1 - 0,8 = 0,2$, $i = 1, \ldots, 6$.

Assim

$$P(C) = P(B)P(C/B) + P(B^c)P(C/B^c)$$

$$= 0,51458$$

b) Dado que o réu é condenado, qual a probabilidade do réu ser culpado?

$$\mathbb{P}(B^c|C) = \frac{\mathbb{P}(B^c \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C|B^c)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}95^6}{0{,}51458}$$

$$= \frac{0{,}51456}{0{,}51458} = 0{,}99996.$$

c. Comente a suposição de que os jurados decidam independentemente.
A suposição é ridícula, já que os jurados interagem.

○ Antes de seguir vamos resolver um exercício visando ajudá-los na lista e a recordar os def.

Exercício: Suponham $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um modelo probabilístico e A, B eventos em $\mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(A) = 1/2$; $\mathbb{P}(B) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/5$. Calcule a probabilidade de.

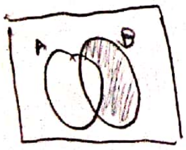
a) A não ocorrer.

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1/2.$$

b) pelo menos um de A e B ocorrer.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/2 + 1/4 - 1/5 = \frac{10+5-4}{20} = 11/20$$

c) A não ocorrer, B sim.



$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 - 1/5 = 1/20$$

d) não ocorrer nenhum de A e B

$$\mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - 11/20 = 9/20$$

e) ocorrer exatamente um de A e B

$$P(A^c \cap B) + P(B^c \cap B) = \frac{1}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{20}$$

f) de A ocorrer dada a ocorrência de B. A e B são independentes?

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/5}{1/4} = \frac{4}{5}.$$

Como $P(A/B) \neq P(A)$, segue que A e B ñ são independentes.

Exercício: 60% das pessoas estão inscritas na rede social A
40% " " " " " " B
30% " " " " em ambas

a) Selecionando ao acaso uma pessoa inscrita em pelo menos uma das redes, qual a probabilidade de que participe de A?

Sejam os eventos

I: inscrita em pelo menos uma de A e B
A: inscrito em A
B: " em B

Queremos

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A)}{P(I)} = \frac{0,6}{P(I)}$$

Mas

$$P(I) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,4 - 0,3 = 0,7$$

Logo,

$$P(A/I) = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7}.$$

b) Dado que não participa de A, prob. de ñ participar de B?

$$P(B^c/A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P((B \cup A)^c)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(I)}{1 - P(A)} = \frac{1-0,7}{1-0,6} = \frac{3}{4}.$$

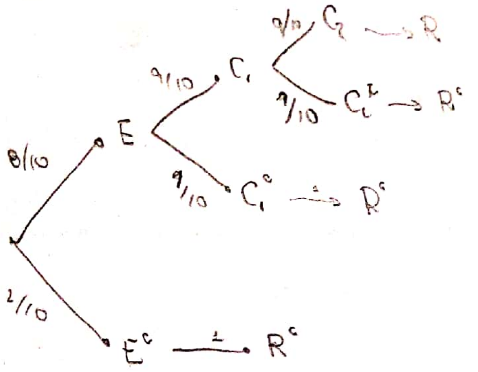
Ex: Marina quer enviar uma carta a Verônica. A prob. de que Marina escreva a carta é de 8/10. A probabilidade de que o correio não perca é de 9/10. A prob. de que o cart. a entregue é de 9/10. Dado que Verônica ñ recebeu a carta, qual a prob. condicional de que Marina não a tenha escrito?

E: a carta é escrita

C_1: o correio não perde a carta

C_2: o carteiro entrega a carta

R: a carta chega ao destino

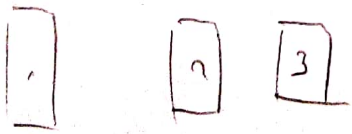


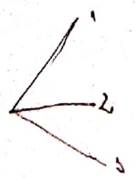
$$P(E^c \mid R^c) = \frac{P(E^c \cap R^c)}{P(R^c)}$$

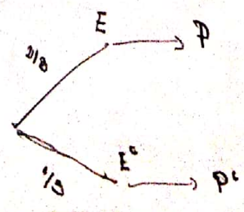
$$= \frac{P(E^c)}{P(E^c) + P(E \cap C_1^c) + P(E \cap C_1 \cap C_2^c)}$$

$$= \frac{2/10}{2/10 + 8/10 \times 1/10 + 8/10 \times 9/10 \times 1/10} = \frac{25}{44}$$

Ex: Em um programa de TV, o apresentador apresenta 3 portas ao concorrente, sabendo que atrás de uma delas há um prêmio. Em busca do prêmio, o jogador escolhe uma porta. O apresent. abre então uma outra porta revelando que ela não tem o prêmio e oferece ao jogador a possibilidade de trocar. Ele deve fazer a troca?







Análise Combinatória,
Probabilidade e Aplicações

Aula 19 07/02/17

Def: Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

é uma função $X: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \quad \forall A \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

ou, de forma equival., $\to \{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega) = \omega$; $Y: \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{2,4,6\} \\ 0, & \omega \in \{1,3,5\} \end{cases}$

$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 1 \\ \{1\}, & 1 \leq x < 2 \\ \{1,2\}, & 2 \leq x < 3 \\ \{1,2,3\}, & 3 \leq x < 4 \\ \{1,2,3,4\}, & 4 \leq x < 5 \\ \{1,2,3,4,5\}, & 5 \leq x < 6 \\ \{1,2,3,4,5,6\}, & x \geq 6 \end{cases}$$

Como $\{X \leq x\} \in \mathcal{F} \ \forall x \in \mathbb{R}$, X é v.a.

$$\{Y \leq y\} = \begin{cases} \emptyset, & y < 0 \\ \{1,3,5\}, & 0 \leq t < 1 \\ \Omega, & t \geq 1 \end{cases}$$

Como $\{Y \leq y\} \in \mathcal{F} \ \forall y \in \mathbb{R}$, Y é v.a.

2. Agora supondo

$\mathcal{F}' = \{\emptyset, \Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\}$

Como $\{X \leq 1\} = \{1\} \notin \mathcal{F}'$, X não é variável aleatória.

Por outro lado, $\{Y \leq y\} \in \mathcal{F}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Logo, Y é variável aleatória.

Obs: 1. De modo mais formal, uma v.a. é uma função $\mathcal{F}$-mensurável.

2. Nesse curso, estudaremos modelos discretos. Assim, podemos tomar $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, nesse caso, uma variável aleatória é uma função real definida em Ω.

Ex 3. Lançar uma moeda honesta 10 vezes.

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{10}) : \omega_i \in \{C, \bar{C}\}, \ i = 1, \ldots, 10\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \in \Omega \longmapsto X(\omega) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{1}\{\omega_i = C\}$$

"X representa o número de caras"

Se $\omega^* = CC\bar{C}\bar{C}CC\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}$, então $X(\omega^*) = 4$.

Aqui, X é uma função real def. em Ω, que assume os valores $0, 1, \ldots, 10$. Como $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, X é v.a.

Distribuição de uma variável aleatória.

Seja X uma variável aleatória, definida em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \text{ é um evento em } \mathcal{F}.$$

$\{X \in A\}$ representa os result. do esp. amost. t.q. $X(\omega) \in A$.

No Exemplo 1., para $A = [1/2, 9/4]$,

$$\{X \in A\} = \{X \in [1/2, 9/4]\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [1/2, 9/4]\} = \{1, 2\}$$
$$\{Y \in A\} = \{Y \in [1/2, 9/4]\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in [1/2, 9/4]\} = \{1, 3, 6\}$$

Assim, da equivalência, temos que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{1,2\}) = 1/3$$
$$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = 1/2.$$

Def: Se X uma v.a. em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A dist. de X é a coleção de todas as probabilidades da forma $\mathbb{P}(X \in A)$ tais que $\{X \in A\}$ é um evento.

Ex 4: Lançamento de 10 moedas.

X : número de caras, $X \in \{0, \dots, 10\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \dots, 10$$

Def. X é uma va. discreta se assume valores em um conjunto finito ($\{x_1, \dots, x_n\}$) ou infinito enumerável ($\{x_1, x_2, \dots\}$).

Nesse caso, a dist. de X fica determinada pela lista $((x_n, p_n))_{n \geq 1}$, $p_n := \mathbb{P}(X = x_n)$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{n \geq 1} p_n \mathbb{1}_A(x_n)$

Obs. Variáveis aleatórias que assumem valores em um intervalo da reta são chamadas contínuas. Ex.: X : peso (altura) de uma pessoa selecionada ao acaso de uma dada população.

Ex 5: X e Y definidas no Exemplo 1. X assume valores no cjto finito $\{1, \dots, 6\}$ e Y no cjto finito $\{0, 1\}$.

Ex 6: Seja X o nº de chamadas telefônicas que chegam a uma central. Nesse caso, X assume os valores no conjto. infinito enumerável $\{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. X é discreta.

Def: Seja X uma v.a. discreta em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A <u>função de probabilidade</u> de X é definida por

$$f_X(x) = \mathbb{P}(\{X = x\}) := \mathbb{P}(X = x)$$

O conjunto $\mathcal{X}_X = \{x : f_X(x) > 0\}$ é dito <u>suporte</u> (da distribuição) de X.

Seja X uma v.a. discreta em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Obs: Se x' não é um dos possivel valores de X ($\nexists\, \omega \in \Omega : X(\omega) = x_i$), então $f_X(x') = 0$. Se a seq. $\{x_i\}_{i \geq 1}$ inclui todos os valores possíveis de X, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) = 1.$$

Ex 7: X v.a. com f. prob.

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, & x = 1, \dots, 5 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Encontre c.

Os possiveis valores de X são $1, 2, \dots, 5$.

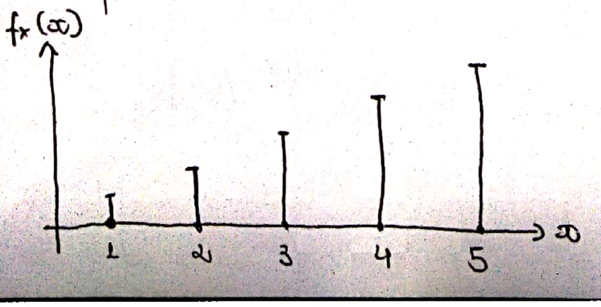
Assim,

$$\sum_{i=1}^{5} f_X(i) = \sum_{i=1}^{5} ci = c \cdot \frac{5 \times 6}{2} = 15c = 1 \Rightarrow c = 1/15$$

Logo, a função de prob. de X é dada pela tabela abaixo

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

Tbm pode ser representado graficamente da seguinte forma



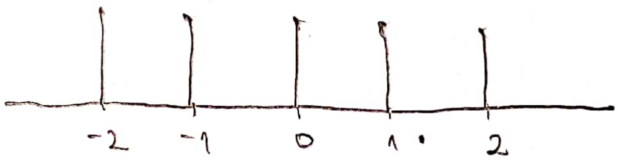
Ex 9: Suponha que X assuma os valores $-2, -1, 0, 1$ e 2 de modo equiprovável. Determine a função de prob. de x.

Sabemos que $f_X(-2) = f_X(-1) = \dots = f_X(2) = c$ e que

$$\sum_{i=-2}^{2} f_X(i) = \sum_{i=-2}^{2} c = 5c = 1 \Rightarrow c = 1/5$$

Logo

x	-2	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$



Def: A função dist. acumulada (f.d.a) de uma var. discreta X em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dada por

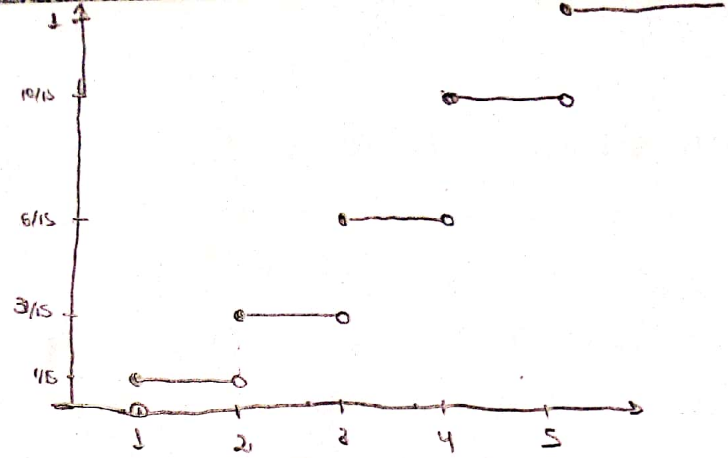
$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k;\, k \leq x} \mathbb{P}(X = k), \quad x \in \mathbb{R}$$

Ex 10: No Exemplo 8,

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

Daí

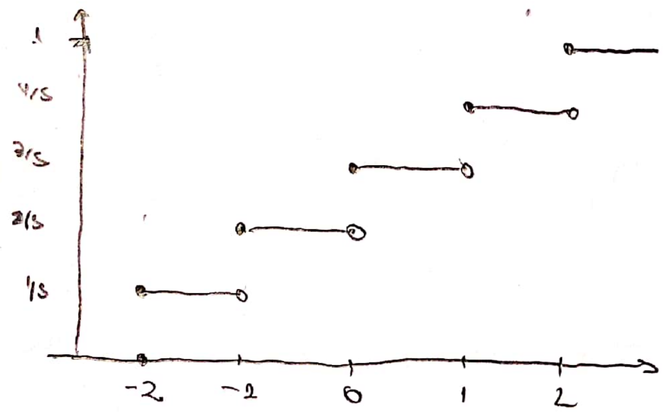
x	1	2	3	4	5
$F_X(x)$	$1/15$	$3/15$	$6/15$	$10/15$	$11/15$



No Exemplo 9:

x	-2	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

x	-2	-1	0	1	2
$F_X(x)$	$1/5$	$2/5$	$3/5$	$4/5$	$5/5$



Propriedades da $F_X(.)$

i) $F_X(.)$ é não-decrescente; se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

iii) $F_X(x)$ é contínua à direita

Note que $P(X = x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t)$ e que $P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} f_X(x_i)$, $B \subset \mathbb{R}$ (boreliano).

Análise Combinatória,
Probabilidade e Aplicações

Aula 20

08/02

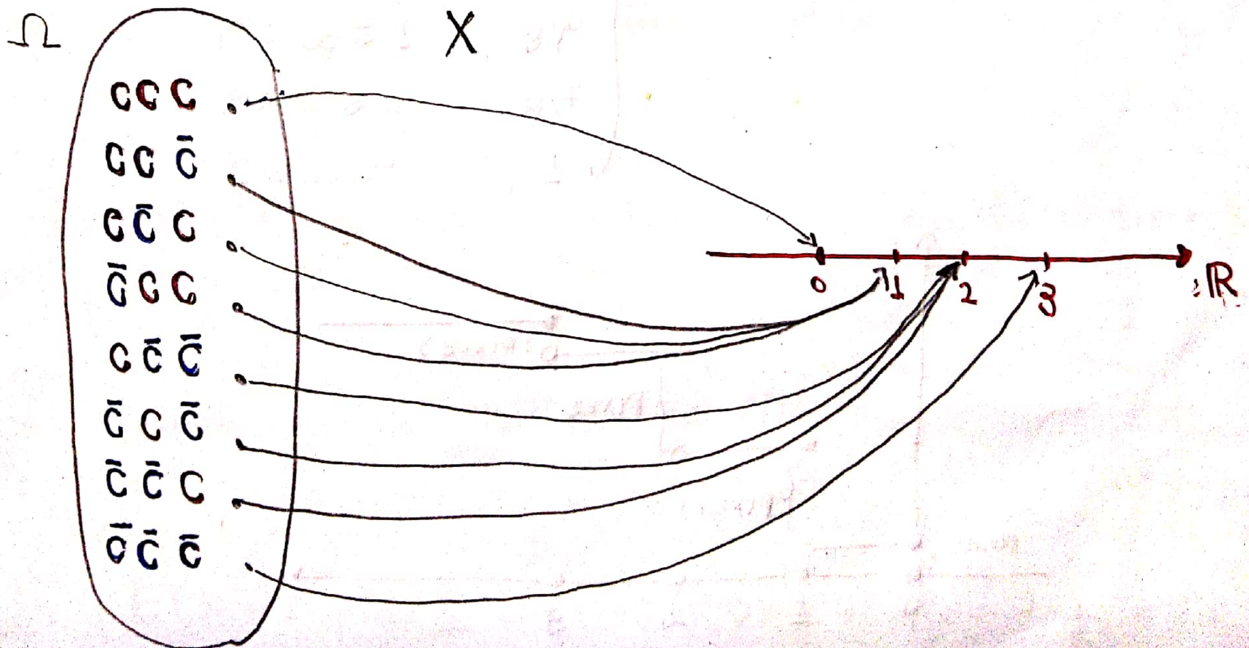
Para recapitular os elementos principais da aula de ontem consideremos o seguinte exemplo

Exemplo 1. Lançamento de três moedas honestas

Nesse caso

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{C, \bar{C}\}\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \text{ t.q. } \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Seja X uma variável aleatória que representa o número de coroas observados.



Aqui, os valores possíveis para X são 0, 1, 2 e 3. Logo X é discreta.

Temos que

primeiro casos

$f_X(0) := P(X=0) = P(\{CCC\}) = \frac{1}{8}$

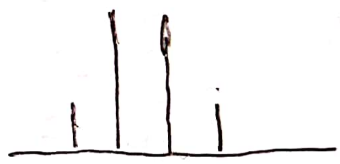
$f_X(1) := P(X=1) = P(\{CC\bar{C}, C\bar{C}C, \bar{C}CC\}) = \frac{3}{8}$

$f_X(2) := P(X=2) = P(\{C\bar{C}\bar{C}, \bar{C}C\bar{C}, \bar{C}\bar{C}C\}) = \frac{3}{8}$

$f_X(3) := P(X=3) = P(\{\bar{C}\bar{C}\bar{C}\}) = \frac{1}{8}$

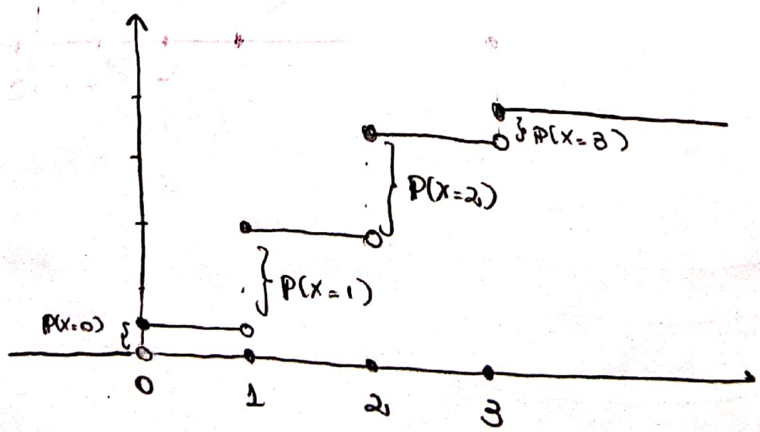
Assim a função de prob. de X é dada por

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8



Daqui, podemos obter a f.d.a de X, dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



Propriedades da $F_X(\cdot)$

i) $F_X(\cdot)$ é não decrescente, i.e., se $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

ii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

iii) $F_X(x)$ é contínua à direita

Note que $P(X=x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t)$ e que, de modo geral,

$$P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} f_X(x_i), \quad B \subset \mathbb{R} \text{ (boreliano)}.$$

Def Seja X uma v.a. discreta com f.p. $f_X(\cdot)$. A esperança (média) de X é definida por

$$E(X) = \sum_{x} x\, f_X(x),$$

sendo que a soma é feita para todos os valores no suporte de X.

Ex: • No Exemplo 8 da aula de ontem, X é uma v.a. discreta com f.p.

x	-2	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

Daí

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{5} + -1 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 0$$

• No Exemplo 7 da aula de ontem, X é uma v.a. disc. com f.p.

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$1/15$	$2/15$	$3/15$	$4/15$	$5/15$

Daí,

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15} = \frac{55}{15} \approx 3{,}6$$

Obs: Note que $\mathbb{E}(X)$ não precisa ser um valor possível de X. A ideia é uma medida p/ apresentar informações sobre X de modo resumido. ~~uma medida de~~

Propriedades

a) $\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$

No Ex1, $Y = 2X + 5$

$$E(Y) = 2EX + 5 = 2 \times 0 + 5 = 5.$$

$$E(aX + b) = \sum_{x : f_X(x) > 0} (ax + b) f_X(x)$$

$$= a \underbrace{\sum_{x : f_X(x) > 0} x f_X(x)}_{} + b \underbrace{\sum_{x : f_X(x) > 0} f_X(x)}_{1}$$

$$= a\,\mathbb{E}(X) + b$$

Logo, se $Y = aX + b$, então $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}X + b$.

b) De modo geral, dada $Y = g(X)$, em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

uma função a valores reais

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Obs: Essa propriedade permite a obtenção da esperança de Y mesmo que não se conheça a distr. de Y.

No Exemplo 1, suponha $Y = X^2$, $EY = \sum_x x^2 f_X(x) = \dfrac{4+1+1+4}{5} = 2$

c) Se X for uma var. não negativa, i.e., assume valores em um subconjunto $\mathcal{X}_x \subset \{0,1,2,\dots\}$, então

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

No Exemplo 2, vimos que $\mathbb{E}X = 55/15$.

Lembrete:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

$$E(X) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \dots + P(X \geq 5)$$
$$= \frac{1}{15}(15 + 14 + 12 + 9 + 5) = \frac{55}{15} \,//$$

d) Dados $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.s, vale que $\mathbb{E}(X_1 + \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$.

Variância

→ dá ideia do quão "espalhada" é a distrib. de X

Def: Se X é uma v.a. com $\mu = \mathbb{E}X$ então a var. de X é dada por

$$Var(X) = \mathbb{E}\{(X-\mu)^2\}$$
$$= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Def: O DP de X é dado pela raiz quadrada (não-negativa) da variân. de X
$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$.

No Ex 1, $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 2 - 0^2 = 2$.

Def $DP(X) = \sqrt{Var\,X} = \sqrt{2} = 1,4142$.

Propriedades:

i. $Var(X) \geq 0$, pois $E(X^2) \geq E^2(X)$.

ii. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $P(X=c)=1$

iii. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

$$
\begin{aligned}
Var(aX+b) &= \mathbb{E}(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2 \\
&= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2aXb + b^2) - (aEX+b)^2 \\
&= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2aXb + \cancel{b^2}) - (a^2(EX)^2 + 2ab\,EX + \cancel{b^2}) \\
&= a^2\,\mathbb{E}X^2 + 2a\cancel{b}\,\mathbb{E}X - a^2(EX)^2 + 2a\cancel{b}\,\mathbb{E}X \\
&= a^2(\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2) \\
&= a^2\,Var\,X.
\end{aligned}
$$

Exemplo: Uma concessionária tem disponível, para um certo automóvel,

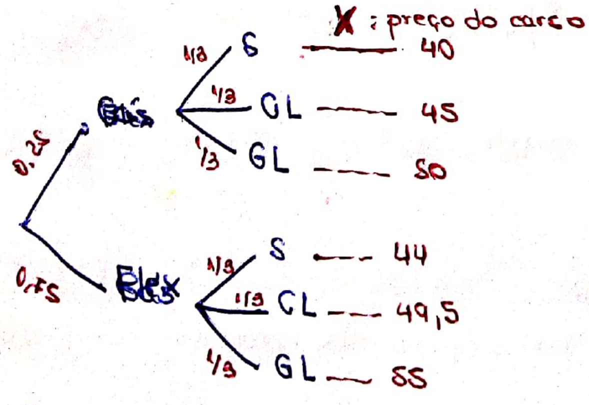
• 3 modelos S CL GL

• ~~Cada modelo~~ com as versões de combustível, gás ou flex

• Com o motor a gás os preços são 40, 45 e 50 mil para os modelos S, CL e GL, respectivamente. Esses preços são 10% superiores se o carro for flex. A procura por carros a gás é de 25% e flex é 75%. Qualquer que seja o combustível escolhido, há igual pref. entre os modelos.

a. Ache a ~~f~~ função de prob. do preço desse imóvel

X: preço do carro



x	40	44	45	49,5	50	55
$f_X(x)$	1/12	3/12	1/12	3/12	1/12	3/12

b. Calcule o preço médio do automóvel.

$$EX = 40 \times \frac{1}{12} + 44 \times \frac{3}{12} + 45 \times \frac{1}{12} + 49{,}5 \times \frac{3}{12} + 50 \times \frac{1}{12} + 55 \times \frac{3}{12} = 48{,}375$$

c) Calcule a Variância e o desvio padrão do preço desse aut.

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$; $EX^2 = 40^2 \times \frac{1}{12} + 44^2 \times \frac{3}{12} + \dots + 55^2 \times \frac{3}{12} = 2363{,}23 \Rightarrow Var X = 23{,}088$

$DP X = \sqrt{} = 4805$

Análise Combinatória,
Probabilidade e Aplicações

Aula 21

09/02/2017

Propriedades da Variância

i. $Var(X) \geq 0$, pois $E(X^2) \geq E^2(X)$ ($(X-\mu)^2$ é positiva)

ii. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{P}(X=c) = 1$.

iii. $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$

$$
\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2 \\
&= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2 \\
&= a^2 E(X^2) + \cancel{2ab\,E(X)} + \cancel{b^2} - a^2(E(X))^2 - \cancel{2ab\,E(X)} - \cancel{b^2} \\
&= a^2\left(E(X^2) - (E(X))^2\right) = a^2\, Var(X).
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias Bivariadas

Exemplo: Selecionamos ao acaso 10 pessoas de um teatro com 200 pessoas.
Definimos as v.a.

X : nº de pessoas na amostra com mais de 60 anos

Y : " " " " " que moram a mais de 10km do teatro

Para cada par ordenado (x, y), temos interesse na quantidade $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$, a prob. de que há x pessoas c/ + de 60 e y que moram a mais de 10 km do teatro.

Def: A função de probabilidade conjunta de duas v.a. discretas X e Y é definida por

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

Nesse caso, temos que

$$\sum_{x \in \chi_x} \sum_{y \in \chi_y} f_{X,Y}(x,y) = 1.$$

De modo geral, a f. de prob. conj. de n v.a. discretas $X_1, \dots, X_n$ é dada por

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1,\dots,X_n)$$

com

$$\sum_{x_1 \in \chi_{x_1}} \dots \sum_{x_n \in \chi_{x_n}} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = 1.$$

Ex: X: número de carros em uma casa
Y: " " TVs " " "

tais que a a func de prob. conj. é dada por

x \ y	1	2	3	4
1	0,1	0	0,1	0
2	0,3	0	0,1	0,2
3	0	0,2	0	0

a) Qual a prob. de 2 carros e 4 TVs?

$$P(X=2, Y=4) = f_{X,Y}(2,4) = 0,2$$

b) Qual a prob. de pelo menos 2 carros e 2 TVs?

$$P(X \geq 2, Y \geq 2) = f_{X,Y}(2,2) + f_{X,Y}(2,3) + f_{X,Y}(2,4) + f_{X,Y}(3,2) + f_{X,Y}(3,3) + f_{X,Y}(3,4)$$

$$= 0 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0 + 0 = 0,5.$$

Def: A função de distribuição acumulada conjunta das v.a.'s X e Y é dada por

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Ex. No Exemplo anterior, qual a prob. de no máximos 2 carros e 2 TV's.

$$\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 2) = F_{X,Y}(2,2) = f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(2,2)$$

$$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0 + 0 = 0{,}4$$

Teorema: Se X e Y são v.a. discretos com f.p. conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ então a função de probabilidade (marginal) de X é

$$f_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}_Y} f_{X,Y}(x,y)$$

De modo análogo, a marginal de Y é

$$f_Y(y) = \sum_{y \in \mathcal{X}_X} f_{X,Y}(x,y)$$

Prova: Suponhamos que $\mathcal{X}_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Basta ver que

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x, Y = y_1) + \mathbb{P}(X = x, Y = y_2) + \dots$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{X}_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{X}_Y} f_{X,Y}(x,y)$$

O resultado p/ $f_Y(\cdot)$ é análogo.

De modo geral, dados $X_1, \dots, X_n$, a marginal de X_i é dada por $f_{X_i}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sum_{x_j \in \mathcal{X}_j} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, \overset{\text{fixo}}{x_i}, \dots, x_n)$

Ex: No Exemplo 2, determine as f.p. marg. de X e Y.

$x \backslash y$	1	2	3	4	
1	0,1	0	0,1	0	0,2
2	0,3	0	0,1	0,2	0,6
3	0	0,2	0	0	0,2
	0,4	0,2	0,2	0,2	

x	1	2	3
$f_X(x)$	0,2	0,6	0,2

y	1	2	3	4
$f_Y(y)$	0,4	0,2	0,2	0,2

Def. X e Y são independentes se

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall\, (x,y) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y$$

Nesse caso, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$.

Ex

$x \setminus y$	1	2	3	4	$f_X(x)$
1	0,1	0	0,1	0	0,2
2	0,3	0	0,1	0,2	0,6
3	0	0,2	0	0	0,2
$f_Y(y)$	0,4	0,2	0,2	0,2	1

(I)

Caso X e Y fossem independentes, dev. ter

$x \setminus y$	1	2	3	4	$f_X(x)$
1	0,08	0,04	0,04	0,04	0,2
2	0,24	0,12	0,12	0,12	0,6
3	0,08	0,04	0,04	0,04	0,2
$f_Y(y)$	0,4	0,2	0,2	0,2	1

Como $f_{X,Y}(1,1) \neq f_X(1)\, f_Y(1)$, segue que X e Y não são ind.

Def: $X_1, \ldots, X_n$ são ind. se

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n) \quad \forall\, (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{V}_{X_1} \times \ldots \times \mathcal{V}_{X_n}$$

Def A dist. condicional de X dado $Y = y$ é, se $f_Y(y) > 0$, dado por

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

• Ex: Determine $f_{X|Y=2}(x)$.

Como $f_Y(2) = P(Y=2) = 0,2 > 0$,

Temos que

$$f_{X|Y=2}(1) = \frac{\overset{=0}{f_{X,Y}(1,2)}}{f_Y(2)} = 0$$

$$f_{X|Y=2}(2) = \frac{\overset{=0}{f_{X,Y}(2,2)}}{f_Y(2)} = 0$$

$$f_{X|Y=2}(3) = \frac{\overset{=0,2}{f_{X,Y}(3,2)}}{\underset{=0,2}{f_Y(2)}} = 1$$

x	1	2	3
$f_{X\|Y=2}(x)$	0	0	1

Obs. De modo geral, $f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$, desde que $P(Y=y) > 0$.

Podemos, a partir da def. de prob. cond., tbm calcular

$$P(X \in A \mid Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$, desde que $P(Y \in B) > 0$, $A \subseteq \mathcal{Y}_X$ e $B \subseteq \mathcal{Y}_Y$.

Ex. $P(X \geq 3 \mid Y \geq 2) = \dfrac{P(X \geq 3, Y \geq 2)}{P(Y \geq 2)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$.

<u>Def.</u> Sejam X e Y v.a. com f.p. conj. $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ com $E(X) = \mu_X$ e $E(Y) = \mu_Y$. A covariância entre X e Y é dada por

$$Cov(X,Y) = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y) \quad \in \mathbb{R}$$

e a correlaç. entre X e Y é dada por

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X)\,DP(Y)} \in (-1,1).$$

Prop. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes

i) $Cov(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$ (Def)
ii) $Corr(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$ (Def)
iii) $Var(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \overset{0}{Cov(X_i, X_j)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Exercício: Lançamos dois dados, um branco e o outro vermelho, Seja X_1 o resultado do dado branco e X_2 o res. de dado vermelho. Defina $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.

a) Ache a dist. cjta de Y_1 e Y_2.

b) Determine as margi de Y_1 e Y_2.

c) Determine a dist. cond. de Y_1 dado $Y_2 = 5$.

d) Y_1 e Y_2 são independentes?

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

Aula 22 — 10/02/17

Principais Modelos Discretos.

1. Uniforme

Dizemos que X é distribuída segundo o modelo UNIFORME em $\{x_1, \dots, x_k\}$ ($\mathcal{X}_X$) se

$$P(X = x_i) = \frac{1}{k}, \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

Notação: $X \sim U(\{x_1, \dots, x_k\})$ (uniforme).

Ex 1: Seja X uma v.a. representando o número na face superior do dado após o lançamento (Lançamos um dado). $X \sim \text{Uniforme}(\{1, 2, \dots, 6\})$

2. Bernoulli

Tais experimentos são ditos ensaios de Bernoulli.

Considere um experimento com apenas 2 possíveis resultados: sucesso (S) (com prob p) ou Fracasso (F) ($1-p$, $p \in (0,1)$). Seja X uma v.a. que associa o valor 1 ao "S" e 0 ao "F". Temos que

$$P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X = 0) = 1 - p,$$

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \mathcal{X}_X = \{0, 1\}.$$

Dizemos que X é distribuída segundo o modelo Bernoulli de parâmetro p, $0 < p < 1$, se

Notação: $X \sim Ber(p)$

Ex 2: X: número de caras em um lançamento de uma moeda $\Rightarrow X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$

X: 1 se o resultado do lanç. de um dado é menor que 2 e 0 c.c. $\Rightarrow X \sim Ber(1/6)$

- $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p$
  $= 0^2 \times P(X=0) + 1^2 P(X=1) = E(X^2)$
- $Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$

8. Binomial

Considere $n \geq 1$ realizações independentes de um ensaio de Bernoulli. Seja $Y_i \sim Ber(p)$ a v.a. indicando o resultado no i-ésimo ensaio. Defina

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , \text{ o nº de sucessos nos n ensaios}$$

Segue que:

$$f_X(j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad , j \in \chi_X = \{0, \ldots, n\} \qquad (1)$$

Dizemos que X é dist. segundo o modelo Binomial com parâmetros n e p, $n \geq 1$ e $p \in (0,1)$, se sua f.p. é dada por (1).

Notação: $X \sim Bin(n, p)$

- $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np$
- $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) = np(1-p)$.

Ex 3: Lançamos 10 moedas de modo independente. Seja X o número de caras observadas. $X \sim Binomial(10, 1/2)$.

Ex 4: São selecionados ao acaso 10 pacotes de um dado biscoito para inspeção. Cada pacote contém 8 biscoitos e sabe-se que cada um deles será adequado ao consumo, independentemente dos demais, com prob. 0,9. O pacote é dito inadequado se conter algum biscoito inadequado ao consumo.

a) Determine o nº esp. de biscoitos inadequados nos 10 pacotes.

X_i: nº de bisc. inadeq. no pacote i $\quad X_i \sim Bin(8, 0{,}1) \quad E(X_i) = 8 \times 0{,}1 = 0{,}8$

$Y = X_1 + \ldots + X_n \Rightarrow E(Y) = 10 \times 0{,}8 = 8$

b) Se algum dos pacotes é inadequado, o produto não recebe um determinado selo de qualidade. Qual a prob. do prod. ñ receber o selo?

Seja

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o i-ésimo pacote é inadeq} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - (0,9)^8, \quad i = 1, \ldots, 8$$

Note que a Y_i's são Bernoullis $(1-(0,9)^8)$ independentes). ~~Seja~~ X nº de pac. inadq., então

$$X = \sum_{i=1}^{8} Y_i \sim Bin(10, 1-(0,9)^8)$$

Daí, a prob. de int. é

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-(0,9)^8)^{10} \approx 0,996$$

4. ~~Bonus~~.

Obs 1. Seleciona-se n bolas ao acaso e com reposição de uma urna com N nº bolas, M vermelhas e $N-M$ brancas. Seja X, o nº de bolas vermelhas na amostra. $X \sim Bin(n, M/N)$

4. Hipergeométrica.

Suponha que na Obs 1 acima, a amostragem é feita sem reposição. Neste caso, perde-se a independência e a igualdade de condições entre os ensaios de Bernoulli (bola i é vermelha ou não). Assim

$$f_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{x}}, \quad x \in \mathcal{X}_X. \qquad (2)$$

Nesse caso, $\mathcal{X}_X = \{\max(0, n-N+M), \ldots, \min(n, M)\}$.

Dizem que X tem dist. hiperg. com parâm. N, M e n se sua f.p. é dada por (2)

Notação: $X \sim HG(N, M; n)$

Segue que

$\circ$ $EX = n \times \frac{M}{N}$ $\quad$ e $Var(X) = n\frac{M}{N}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $\quad$ ← igual à BN com $p = \frac{M}{N}$

$= n \times p$ $\quad\quad\quad\quad\quad = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Obs: Qdo N é muito grande em relação a n, a
distrib. ≈ Bin.

5. ~~Poisson~~. Geométrica

Dizemos que a v.a. X é distr. segundo o modelo geométrico de parametro p, $0<p<1$, se

$$f_X(j) = (1-p)^{j-1}p \quad , j \in \mathcal{X}_X = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Notação: $X \sim Geo(p)$.

Com: X é o nº de ensaios necessários p/ obter o primeiro sucesso qdo se realiza uma seq. de ensaios de Bernoulli ind. com prob. de sucesso p em cada ensaio.

$$\circ\ E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = \frac{1}{p}$$

$$P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p(1-p)^{n-1}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^n}_{\frac{1}{p}} = (1-p)^{n-1}$$

$$\circ\ Var(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \left(E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(1-p)^{n-1}p = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}p + n(1-p)^{n-1}p \right.$$

$$= \dots + \frac{1}{p}$$

6. Binomial Negativa

Dizemos que a v.a. X é distr. segu o modelo Binomial Negativo com parâm $r \geq 1$ e $0 \leq p \leq 1$ se

$$f_X(j) = \binom{j-1}{r-1}(1-p)^{j-r}p^r \quad , j \in \mathcal{X}_X = \{r, r+1, \dots\}$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$.

Obs 1: X é o nº de ensaios nec. para se obter o r-ésimo sucesso qdo se realiza uma seq. de ensaios de Bernoulli ind. com prob. do suc. p em cada ensaio.

2. $X = X_1 + \dots + X_r$, em que $X_i \sim Geo(p)$ $\forall i = 1, \dots, r$ são independentes.

. $E(X) = E(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \frac{r}{p}$, $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} Var(X_i) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Ex: Seja X o nº de lanç. indep.

a) de dois dados p/ se obter: (6,6). Qual a dist. de X? $X \sim Geo(1/36)$

b) de uma moeda p/ se obter 7 caras. Qual o tempo médio até a ocorrência de 7 caras? $X \sim BN(7, 1/2) \Rightarrow EX = 7 \times \frac{1}{1/2} = 14$.

7. Poisson

Dizemos que X é distribuída segundo o modelo de Poisson de parâmetro λ, $\lambda > 0$, se

$$f_X(j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}, \quad j \in V_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Notação: $X \sim Poi(\lambda)$

$$. E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \overbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^\ell}{\ell!}}^{1} = \lambda$$

$$. Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda$$

$$\left(E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = \dots = \lambda(\lambda+1) \right.$$

Usada para modelar a ocorrência de eventos raros. Um evento é raro é um v. de prob pequena.

Com:

n eventos, λ ocorrências

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

Há uma relação com a Binomial. Basta tomar n muito grande e p, em função de n, bem pequeno.

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \left[\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}\right]\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} 1 \times 1 \times \cdots = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Média de 2.

<u>Ex</u>: Terremotos no México p/ semana. Sabe-se que tal número segue uma dist. de Poisson. Determine a prob. de mais de 2 terr. na semana!

$X \sim \text{Poisson}(2)$

$$\mathbb{P}(X>2) = 1 - \mathbb{P}(X\leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2)$$

$$= 1 - e^{-2} - \frac{e^{-2}\,2^1}{1} - \frac{e^{-2}\,2^2}{2!}$$

$$= 1 - \{e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2}\} = 0{,}3232.$$