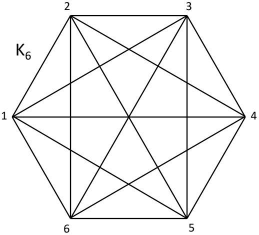
Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

Grafo aleatório de Erdős e Rényi

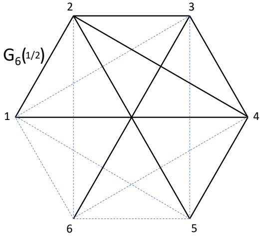
Seja $K_n = (V_n, E_n)$ o grafo com n sítios (vértices): $V_n = \{1, \dots, n\}$; e elos entre cada par de sítios: $E_n = \{\langle i, j \rangle : i, j \in V_n, i \neq j\}$



O grafo aleatório de Erdős e Rényi consiste, fixado $p \in [0, 1]$, no grafo

$$G_n(p) := (V_n, E_n(p)),$$

onde $E_n(p)$ é uma amostra de elos de E_n escolhida por meio da seguinte família de va's iid $\{\eta_e;\ e \in E_n\}$ com distr de Bernoulli de parâmetro p: $E_n(p) = \{e \in E_n :\ \eta_e = 1\}^*$.



$^*\mathbb{P}(\eta_e = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\eta_e = 0)$; se $\eta_e = 1$, diz-se que e está *aberto* ou *presente*; do contrário, *fechado* ou *ausente*

Regime crítico; Transição de fase

Regime: $p = \lambda/n$, $\lambda > 0$ e $n > \lambda$.

Interesse na ocorrência ou não de *componente gigante* (com $\sim n$ sítios) *com alta probabilidade* (c.a.p.), dependendo do valor de λ.

c.a.p. : com probabilidade $\to 1$ qdo $n \to \infty$

Teorema 1. Seja $\lambda = np$, com $\lambda > 0$ fixo.

(i) Se $\lambda < 1$, então c.a.p. o maior componente de $G(n, p)$ tem no máximo $\frac{3}{(1-\lambda)^2} \log n$ sítios.

(ii) Se $\lambda > 1$ e $\beta = \beta(\lambda) > 0$ for a prob de sobrevivência de um processo de ramificação com distribuição de prole de Poisson(λ), então c.a.p. o *maior componente* de $G(n, p)$ tem

$$(1 + o(1))\, \beta n \text{ sítios;}$$

além disto, o *segundo maior componente* tem no máximo $\frac{16\lambda}{(\lambda-1)^2} \log n$ sítios.

Teo 1 (Obs)

A noção de conectividade é a natural (e usual): dois sítios x e y de V_n estão conectados se $x = y$ ou se houver um caminho de elos abertos ligando x a y; em outras palavras, se existirem $\ell \geq 1$ e

$$x = x_0, \dots, x_\ell = y \in V_n \text{ tq } \eta_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} = 1,\ i = 1, \dots, \ell.$$

Sejam $\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*$ o primeiro e segundo maiores componentes, respectivamente (segundo o número de sítios; com algum critério de desempate, se necessário).

Então, fixado $\varepsilon > 0$ arbitrário, as afirmações do Teo 1 dizem que as seguintes probabilidades se anulam no limite qdo $n \to \infty$:

(i) $\mathbb{P}\left(|\mathcal{C}_1^*| > \frac{3}{(1-\lambda)^2} \log n\right)$;

(ii) $\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1^*| < (1-\varepsilon)\beta n)$, $\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1^*| > (1+\varepsilon)\beta n)$,

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{C}_2^*| > \frac{16\lambda}{(1-\lambda)^2} \log n\right)$$

Lembrete: Processo de Ramificação

Modela os tamanhos de sucessivas gerações de uma família:

$Z_0 =$ tamanho inicial; para $k \geq 1$,

$$Z_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{Z_{k-1}} X_{kj}, & \text{se } Z_{k-1} > 0; \\ 0, & \text{se } Z_{k-1} = 0, \end{cases} \text{ onde}$$

$\{X_{ij};\ i,j \geq 1\}$ é uma família de v.a.'s iid inteiras não negativas;

Z_k representa o tamanho da k-ésima geração, $k \geq 1$;

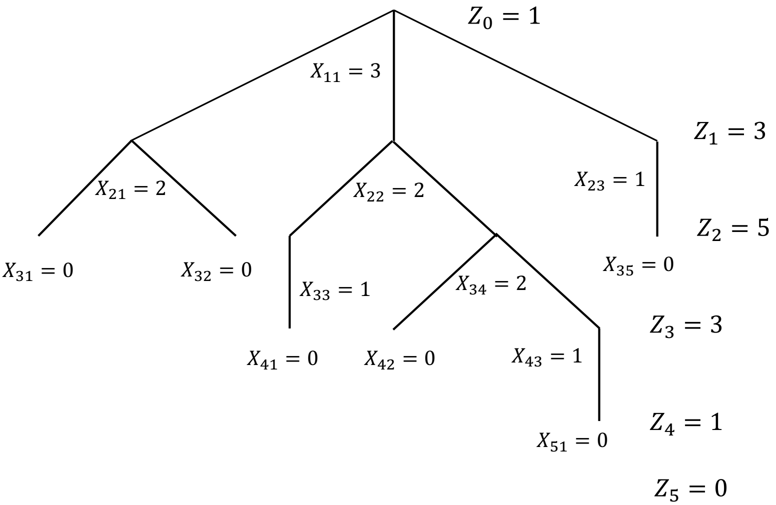
X_{ij} representa(ria) o número de filhos do j-ésimo indivíduo da $i-1$-ésima geração (se ele estiver presente naquela geração);

Note que se $Z_\ell = 0$ para algum $\ell \geq 0$, então, $Z_i = 0$, $i > \ell$,

e dizemos que a família se extingue;

Seja $\beta = \mathbb{P}(\text{sobrevivência})$; no caso de $X_{11} \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, denotamos $\beta = \beta(\lambda)$. Sabe-se que $\beta > 0$ sse $\mathbb{E}(X_{11}) > 1$.

Simulação do proc ramificação



Processo de crescimento para um aglomerado de $G_n(p)$

Seja $x \in V_n$, e $\mathcal{C}_x$ o *aglomerado de* x, ie,

$$\mathcal{C}_x = \{y \in V_n : \ y \text{ está conectado a } x\}.$$

Vamos construir $\mathcal{C}_x$ por um processo de crescimento a ser subsequentemente comparado com processos de ramificação:

Começamos com $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{W}_0 = \{x\}$;

para $k \geq 1$, enqto $\emptyset \neq \mathcal{Z}_{k-1} = \{y_1^{k-1}, \dots, y_{r_{k-1}}^{k-1}\}$, façamos

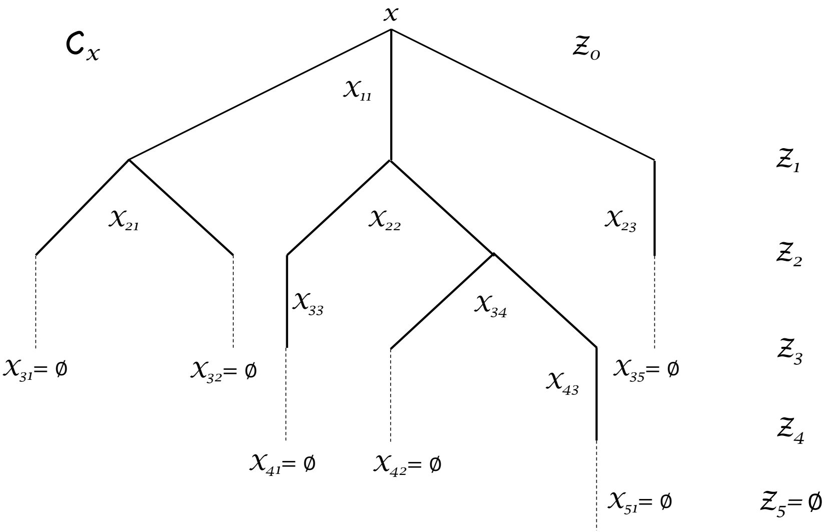
$$\mathcal{Y}_0^k = \emptyset, \text{ e para } j = 1, \dots, r_{k-1}:$$

$$\mathcal{X}_{kj} = \{y \in V_n \setminus \mathcal{W}_{k-1} \setminus \mathcal{Y}_{j-1}^k : \langle y_j^{k-1}, y \rangle \text{ aberto}\};$$

$$\mathcal{Y}_j^k = \mathcal{Y}_{j-1}^k \cup \mathcal{X}_{kj}; \ \ \mathcal{Z}_k = \mathcal{Y}_{r_{k-1}}^k; \ \ \mathcal{W}_k = \mathcal{W}_{k-1} \cup \mathcal{Z}_k.$$

Seja $\mathcal{K} = \mathcal{K}_x = \min\{k \geq 1 : \ \mathcal{Z}_k = \emptyset\}$. Então, $\mathcal{C}_x = \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$.

Simulação do proc crescimento



Processo de adição e saturação

Vamos pensar no processo de crescimento como feito passo a passo, com os passos sucessivos

$$0, R_0 = 1, R_0 + 1, \dots, R_1, R_1 + 1, \dots, R_{\mathcal{K}},$$

onde $R_k = r_0 + \cdots + r_k$, $k = 0, \dots, \mathcal{K}$.

No passo 0/inicial, começamos com o aglomerado inicial $\{x\}$; em dado passo seguinte $R_0, R_0 + 1, \dots$:

(i) *adicionamos* novos sítios, a saber, os elementos de $\mathcal{X}_{kj}$, para certos $1 \le k \le \mathcal{K}$, $1 \le j \le r_{k-1}$[†], ao aglomerado do passo anterior: $\mathcal{W}_{k-1} \cup \mathcal{Y}^k_{j-1}$ — o que resulta no aglomerado do passo atual: $\mathcal{W}_{k-1} \cup \mathcal{Y}^k_j$ —, e

(ii) declaramos y^{k-1}_j *saturado*.

[†]segundo a ordem natural do proc cres, como descrito no slide 7

Obs.

1) Pode (e vai) acontecer de em dado passo, o correspondente $\mathcal{X}_{kj}$ ser vazio; neste caso, na prática não há adição, mas de toda forma há saturação de y_j^{k-1};

2) A cada passo do proc cresc após o passo inicial, o correspondente y_j^{k-1} pertence ao aglomerado anterior $\mathcal{W}_{k-1} \cup \mathcal{Y}_{j-1}^k$;

3) No final do procedimento (completado o passo $R_\mathcal{K}$), $\mathcal{C}_x$ consiste exatamente de todos os sítios saturados pelo procedimento.

No i-ésimo passo do procedimento, $i \geq 1$, seja $\mathcal{A}_i$ o aglomerado do passo anterior, ie, para os correspondentes k, j na rotulagem original, $\mathcal{A}_i = \mathcal{W}_{k-1} \cup \mathcal{Y}_{j-1}^k$; e sejam

$$A_i = |\mathcal{A}_i| \text{ e } X_i = |\mathcal{X}_{kj}|.$$

4) a) Para $i \geq 1$, $A_i = \sum_{\ell=0}^{i-1} X_\ell$, onde $X_0 = 1$;

   b) dado que $A_i = m$, com $1 \leq m < n$, $X_i \sim \text{Bin}(n-m, p)$;

   note que, se $m = o(n)$, então $X_i \approx \text{Poisson}(\lambda)$;

5) Podemos obter, aumentando o esp de prob subjacente, se necessário, para dada realização de $X_1, X_2, \ldots$, uma seq de v.a.'s $X_1^+, X_2^+, \ldots$ iid com $X_1^+ \sim \text{Bin}(n, p)$ e $X_i \leq X_i^+$, $i \geq 1$.

$G_n(p)$ e Ramificação

Vamos usar o proc ramif para analisar $G_n(p)$ com desc Poisson(λ) a partir dos aglomerados de sítios de $G_n(p)$, cujos primeiros estágios de crescimento, como indicado acima, tem adições X_i com distr aprox $\text{Bin}(n, p) \sim \text{Poisson}(\lambda)$ enqto A_i não for muito grande.

Quando $\lambda < 1$, os aglomerados do proc ramif nunca são muito grandes, então esta estratégia funciona bem neste caso.

Quando $\lambda > 1$, há sobrevivência (família com infinitas gerações) com prob > 0, e se dada geração da família for bastante grande, então haverá alta prob de sobrevivência da família.

Ideia da dem do Teo 1 (ii): como há muitos sítios em V_n, e enqto os respectivos aglomerados não forem muito grandes, tudo se passa como na ramif: a prob de pelo menos um aglomerado atingir tamanho bastante grande é próx de 1; além disto, dado o confinamento de $G_n(p)$ (algo que não ocorre na ramif), se dois aglomerados atingem um tamanho bastante grande, então subsequentemente coalescem com alta prob.

Teo 1 — Dem de (i)

Basta mostrar que a prob com $\mathcal{C}_1$ no lugar de $\mathcal{C}_1^*$ é $o(1/n)$, pois, fazendo $\ell = \lceil \frac{3}{(1-\lambda)^2} \log n \rceil$, temos que

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1^*| > \ell) = \mathbb{P}(\cup_{x \in V_n} \{|\mathcal{C}_x| > \ell\}) \le n \, \mathbb{P}(|\mathcal{C}_1| > \ell).$$

Segundo o procedimento de construção descrito anteriormente, temos $R_{\mathcal{K}} > \ell$, e logo ao menos $\ell + 1$ sítios adicionados nos passos de 1 a $\ell + 1$ (pois os sítios saturados em dado passo foram incluídos até aquele passo — de fato, antes). Logo

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_1| > \ell) \le \mathbb{P}(\textstyle\sum_{i=0}^{\ell+1} X_i > \ell) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{\ell+1} X_i \ge \ell) \le \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{\ell+1} X_i^+ \ge \ell) \ (*)$$

Note que $\sum_{i=1}^{\ell+1} X_i^+ \sim \text{Bin}((\ell+1)n, p)$.

Poderíamos agora prosseguir usando cotas de Chernoff para a cauda da distr binom (note que $(\ell + 1)np \sim \lambda\ell \ll \ell$, pois $\lambda < 1$).

Em vez disto, vamos comparar a distr binom com a distr Poisson, e obter cotas + diretas para a esta.

Comparação da distr binom com a Poisson

Fatos: (i) Dado $p \in (0, \frac{1}{2})$, seja $\tilde{p} = -\log(1-p)$, e $Y_1, Y_2, \dots$ va's iid $\sim$ Poisson$(\tilde{p})$. Então, para $N \geq 1$,

$$B := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{Y_i > 0\}} \sim \text{Bin}(N, p) \text{ (verifique) e, claramente,}$$

$$B \leq S := \sum_{i=1}^{N} Y_i \sim \text{Poisson}(N\tilde{p}). \tag{1}$$

(ii) Por outro lado $\{S > B + 5\}$ está contido em

$$\Big\{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{Y_i \geq 4\}} \geq 1\Big\} \cup \Big\{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{Y_i = 2\}} \geq 6\Big\}$$
$$\cup \Big\{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{Y_i = 3\}} = 1; \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{Y_i \geq 2\}} \geq 3\Big\}$$

Subadtvdd: probs dos eventos da união acima podem ser cotados por

$$N\mathbb{P}(Y_1 \geq 4),\ N^6\mathbb{P}(Y_1 = 2)^6 \text{ e } N^3\mathbb{P}(Y_1 = 3)\mathbb{P}(Y_1 \geq 2)^2, \text{ resp;}$$

por sua vez, estas expr podem ser cotadas por, a menos de cte mult,

$$Np^4, (Np^2)^6 \text{ e } N^3p^7, \text{ resp.}$$

$$\therefore \mathbb{P}(S > B + 5) \leq \text{const } \{Np^4 + (Np^2)^6 + N^3p^7\}. \tag{2}$$

Corolário. Do fato (1), temos a seguinte cota superior para a última prob em $(*)$ no slide anterior: $\mathbb{P}(S^+ \geq \ell)$, onde $S^+ \sim$ Poisson$((\ell+1)n\tilde{p})$.

Estimação de $\mathbb{P}(S^+ \geq \ell)$

$$\mathbb{P}(S^+ \geq \ell) = e^{-M} \sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{M^i}{i!} = e^{-M} \frac{M^M}{M!} \overbrace{\sum_{i=\ell}^{\infty} \prod_{j=M+1}^{i} \frac{M}{j}}^{s_1}, \text{ onde}$$

$M = (\ell+1)n\tilde{p} \sim \lambda\ell$, e por Stirling, $e^{-M}\frac{M^M}{M!} \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{M}} \leq 1$. Agora,

$$s_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\prod_{j=M+1}^{\ell} \frac{M}{j}}_{\text{ñ dep de } k} \underbrace{\prod_{j=\ell+1}^{\ell+k} \frac{M}{j}}_{\leq (M/\ell)^k} \leq exp\Big\{ - M \underbrace{\sum_{j=M+1}^{\ell} \log(\frac{j}{M})\frac{1}{M}}_{s_2} \Big\} \underbrace{\frac{1}{1 - M/\ell}}_{\sim 1/(1-\lambda)},$$

e temos que $s_2 \approx \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \log x \, dx = \frac{1-\lambda}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda} \geq \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

Como $M \sim \lambda \frac{3}{(1-\lambda)^2} \log n$, segue que para n grande

$$s_1 \leq \frac{\text{const}}{1-\lambda} n^{-2} = o(1/n)$$

$\square$Teo 1 (i)

Obs. Note que obtemos igualmente a cota de $o(1/n)$ se substituirmos 3 por qualquer const > 1, e logo o Teo 1 (i) é válido com esta substituição.

Dem. Teo 1 (ii) — Lema 1

Sejam $k_- = \frac{16\lambda}{(\lambda-1)^2} \log n$ e $k_+ = n^{2/3}$.

Lema 1 C.a.p., para todo $k \in [k_-, k_+]$ e todo sítio $x \in V_n$, ou o proc cresc de $\mathcal{C}_x$ descrito acima termina antes de k_- passos ou há pelo menos $(\lambda - 1)k/2$ sítios *não saturados* gerados pelo proc cresc até aí. Em particular, c.a.p. , nenhum aglomerado de $G_n(p)$ tem (exatamente) k sítios com $k \in [k_-, k_+]$.

Dem. Dado $x \in V_n$, se $R_{\mathcal{K}} \geq k$, então no (final do) passo k do proc de cresc de $\mathcal{C}_x$ temos $k+1$ sítios sat, e $N_k := \sum_{\ell=1}^{k} X_\ell - k$ sítios não sat. No evento $E_k^x = \{R_{\mathcal{K}} \geq k,\, N_k \leq (\lambda - 1)k/2\}$, temos que

$$\sum_{\ell=1}^{k} X_\ell \leq k + (\lambda - 1)k/2 = (\lambda + 1)k/2,$$

e logo, supondo ainda $k \leq k_+$, temos que $A_\ell \leq \frac{\lambda+1}{2} k_+$, $1 \leq \ell \leq k$.

Da 1^a parte da Obs. 4b no slide 10, obtemos a existência de va's

$$X_1^-, \ldots, X_k^- \text{ iid} \sim \mathrm{Bin}(n - \tfrac{\lambda+1}{2} k_+, p) \text{ tq } X_\ell^- \leq X_\ell,\ \ell \leq k.$$

Dem. Lema 1 (cont)

A prob de E_k^x é então limitada para $k \in [k_-, k_+]$ por

$$\mathbb{P}(\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} X_\ell^- \le \frac{\lambda+1}{2} k) \le \mathbb{P}(S_- \le K') + o(1/n^{5/3}), \tag{1}$$

onde $K' = \frac{\lambda+1}{2} k + 5$, $S_- \sim \mathrm{Po}(K)$, $K = k(n - \frac{\lambda+1}{2} k_+)\tilde{p}$.

Obs. Usamos (2) do slide 13 com $N = k(n - \frac{\lambda+1}{2} k_+) \le n^{5/3}$.

Estimação de $\mathbb{P}(S_- \le K')$

Obs. $K' \sim \lambda' k, K \sim \lambda k$, $\lambda' = \frac{\lambda+1}{2} < \lambda$, logo $K' \ll K$ para n gde.

Dados a, b tq $\lambda' < a < b < \lambda$, se n gde, $\mathbb{P}(S_- \le K')$ é cotada por

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{ak} e^{-bk} \frac{(bk)^i}{i!} &\le \left(\frac{b}{a}\right)^{ak} e^{-bk} \sum_{i=1}^{ak} \frac{(ak)^i}{i!} \le \left(\frac{b}{a}\right)^{ak} e^{-bk} e^{ak} \\ &= \left(\frac{b}{a} e^{1-\frac{b}{a}}\right)^{ak} \le \left(\frac{b}{a} e^{1-\frac{b}{a}}\right)^{ak_-} = n^{-2\mathcal{P}}, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\mathcal{P} = \frac{8\lambda}{(\lambda-1)^2} a \left(\frac{b}{a} - 1 - \log(\frac{b}{a})\right)$.

Est. $\mathbb{P}(S_- \leq K')$ (cont.)

Lema 1′. Dado $\lambda > 1$, existem a, b como acima tq $\mathcal{P} > 1$.

Dem. Por continuidade, basta tomar $a = \lambda'$, $b = \lambda$.

Neste caso, fazendo $\delta = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, temos que

$$\mathcal{P} = (1+\delta)\,\frac{2}{\delta^2}\,(\delta - \log(1+\delta)).$$

Note que $\delta = \delta(\lambda) : (1, \infty) \to (0, 1)$.

Expandindo o log em Taylor em torno de 0 e rearranjando:

$$\mathcal{P} = 1 + \sum_{j\geq 1} \frac{(1-\delta)j+1}{j(j+1)(2j+1)}\,\delta^{2j-1} > 1 \text{ se } \delta > 0. \qquad \square$$

Dem. Lem 1 (cont)

De volta à dem Lema 1, usando o Lema 1′ em (2), subst em (1), temos que

$$\mathbb{P}(E_k^x) = o(1/n^{5/3}). \tag{3}$$

Agora, o evento E_n em que o proc de cresc de algum sítio de V_n chegou algum passo $k \in [k_-, k^+]$ com menos do que $\frac{\lambda-1}{2}k$ sítios não saturados satisfaz

$$E_n \subset \cup_{x \in V_n} \cup_{k \in [k_-, k^+]} E_k^x.$$

Por subadtvdde — $|V_n| = n$, $k^+ = n^{2/3}$ — e (3), temos que

$$\mathbb{P}(E_n) \leq n \times n^{2/3} \times o(1/n^{5/3}) = o(1) \qquad \square_{\text{Lema 1}}$$

Lema 2

Se $x, y \in V_n$ são tais que $|\mathcal{C}_x|, |\mathcal{C}_y| \geq k_+$, então c.a.p. $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$.

Dem. Dados $x \neq y \in V_n$, se $R_{\mathcal{K}_x}, R_{\mathcal{K}_y} \geq k_+$, sejam $\mathcal{N}_z$ o conjunto de sítios não saturados no passo k_+ do proc cresc de $\mathcal{C}_z$, $z = x, y$. Note que $|\mathcal{N}_z| = N_z$ (vide 1^o par dem Lema 1, slide 15). Pelo Lema 1, no evento

$$\hat{E}_{xy} := \{R_{\mathcal{K}_x}, R_{\mathcal{K}_y} \geq k_+\}, \text{ temos que c.a.p. } N_z \geq \tfrac{\lambda-1}{2} k_+, \; z = x, y.$$

Em $\{R_{\mathcal{K}_z} \geq k_+\}$, seja $\mathcal{S}_z$ o conjunto de sítios saturados no passo k_+ do proc cresc de $\mathcal{C}_z$, $z = x, y$. Temos então que, em $\{R_{\mathcal{K}_x}, R_{\mathcal{K}_y} \geq k_+\}$, ou $\{\mathcal{N}_x \cup \mathcal{S}_x\} \cap \{\mathcal{N}_y \cup \mathcal{S}_y\} \neq \emptyset$, e neste caso $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$; se não, $\mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y = \emptyset$.

Logo, em $\hat{E}_{xy}$, para que $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y$, é preciso que ocorra o evento $\tilde{E}_{xy}$ de que os elos (u, w), $u \in \mathcal{N}_x$, $w \in \mathcal{N}_y$ devem estar todos fechados. Como neste caso nenhum destes elos terá sido ainda examinado até o passo k_+, temos que, fazendo $E^*_{xy} = \hat{E}_{xy} \cap \tilde{E}_{xy}$,

$$\mathbb{P}(E^*_{xy}) \leq (1-p)^{\left(\frac{\lambda-1}{2} k_+\right)^2} = \left[\left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^n\right]^{\frac{(\lambda-1)^2}{4} n^{1/3}} \leq e^{-\frac{\lambda(\lambda-1)^2}{4} n^{1/3}} = o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

$\therefore$ a prob de que $\exists\ x, y \in V_n$ tq $|\mathcal{C}_x|, |\mathcal{C}_y| \geq k_+$ e $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y$ é cotada por

$$\mathbb{P}(\cup_{x,y \in V_n} E^*_{xy}) \leq n^2 \times o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \to 0 \text{ qdo } n \to \infty. \qquad \square_{\text{Lema 2}}$$

Dem. Teo 1 (ii) — Lema 3

Dos lemas anteriores, temos que c.a.p. cada sítio x de V_n pode ser classificado ou como

pequeno: se $|\mathcal{C}_x| \leq k_-$; ou como

grande: se $|\mathcal{C}_x| \geq k_+$; todos os sítios gdes num mesmo aglom

Para completar a prova do teo:

estimar $Y := \#\{\text{sítios pequenos de } G_n(p)\}$

Lema 3. C.a.p. $Y = [1 - \beta - o(1)]n$

Dem. Dado $x \in V_n$, seja $\rho = \rho(n,p) =$ prob de que x seja peq.

Então $\rho \leq \rho_+(n,p) =$ prob ext proc ram c/desc $\text{Bin}(n - k_-, p)$.

(Pois, como apontado na situação similar no final do slide 15, podemos obter a existência de va's $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots$ iid com distr $\text{Bin}(n - k_-, p)$ tq $\tilde{X}_\ell \leq X_\ell$, $\ell \leq R_\mathcal{K}$, em $\{|\mathcal{C}_x| \leq k_-\}$; logo, $|\mathcal{C}_x| \leq k_- \Rightarrow$ tamanho da família do proc ram com desc $\tilde{X} \leq k_-$.)

Dem. Lem 3 (cont)

Por outro lado, como $X_\ell \le X_\ell^+$, se ocorrer o evento

$$A = \{\text{proc ram c/desc } X^+ \text{ se extingue até passo } k_-\}^\ddagger,$$

então $|\mathcal{C}_x| \le k_-$; logo

$$\begin{aligned}\rho \ge \mathbb{P}(A) = {} & \overbrace{\mathbb{P}(\text{proc ram c/desc } X^+ \text{ se extingue})}^{:=\rho_-} \\ & -\mathbb{P}(\text{proc ram c/desc } X^+ \text{ se extingue após } k_- \text{ passos}) \\ & = \rho_- + o(1)\end{aligned}$$

Obs. $\rho_+, \rho_- \to 1 - \beta$ qdo $n \to \infty$

Segue que $\mathbb{E}(Y) = n\rho = n(1 - \beta + o(1))$.

Note agora que $Y^2 = \left(\sum_{x \in V_n} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{C}_i| \le k_-\}}\right)^2 =$

$$= \sum_{x \in V_n} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{C}_x| \le k_-\}} \Big[\underbrace{\sum_{y \in \mathcal{C}_x} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{C}_y| \le k_-\}}}_{|\mathcal{C}_x|} + \sum_{y \notin \mathcal{C}_x} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{C}_y| \le k_-\}} \Big]$$

‡ mesmo proc cresc p/proc ram do que p/$\mathcal{C}_x$

Dem. Lem 3 (cont)

$$\therefore \mathbb{E}(Y^2) \le n\rho k_- + \sum_{x \in V_n} \mathbb{E}\Big[\sum_{y \notin \mathcal{C}_x} \mathbb{1}_{\{|\mathcal{C}_y| \le k_-\}};\ |\mathcal{C}_x| \le k_- \Big] \qquad (1)$$

Obs. $\{\mathcal{C}_y,\ y \notin \mathcal{C}_x\}$: componentes de $G_{n-|\mathcal{C}_x|}(p)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\cdots] &= \sum_{C \subset V_n : |C| \le k_-} \sum_{y \notin C} \mathbb{P}(|\mathcal{C}_y| \le k_-; \mathcal{C}_x = C) \\
&= \sum_{k=1}^{k_-} \sum_{C:|C|=k} \sum_{y \in V_{n-k}} \underbrace{\mathbb{P}(|\mathcal{C}_y^k| \le k_-)}_{\rho(n-k,p)} \mathbb{P}(\mathcal{C}_x = C) \\
&\le \max_{1 \le k \le k_-} \rho(n-k, p)\, n\rho \\
&= n\rho\rho(n - k_-, p) \le n\rho\rho_+(n - k_-, p), \qquad (2)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_y^k$ é o aglomerado de y em $G_{n-k}(p)$.

Subst (2) em (1):

$$\mathbb{E}(Y^2) \le n^2\rho\rho_+(n - k_-, p) \le (1 + o(1))[\mathbb{E}(Y)]^2 \qquad (3)$$

Dem. Lem 3 (cont)

Tchebichev:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| > \varepsilon\mathbb{E}(Y)) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2(\mathbb{E}(Y))^2} = \frac{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2}{\varepsilon^2(\mathbb{E}(Y))^2}$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} \frac{o(1)}{\varepsilon^2} \to 0 \text{ qdo } n \to \infty \ \forall\ \varepsilon > 0,$$

e, logo, podemos tomar $\varepsilon = o(1)$.

$\square_{\text{Lema 3, Teo 1 (ii)}}$