MAE 312 - Introdução aos processos estocásticos - Coleção de Exercícios 1

1. Sejam X, Y duas v.a. independentes, $X \sim U[0,3]$, $Y \sim U[1,5]$. a) Calcule $\Pr[X < Y - 1]$. b) Determine a distribuição de $X + 2Y$.

2. Num lago há N peixes. Um biologo coletou b peixes, identificou-os com uma pequena e inofensiva marca e os devolveu ao lago. No dia seguinte, passou a rede no lago e encontrou n peixes. Faça as hipóteses que achar necessárias e determine a probabilidade dele encontrar k peixes marcados dentre os n pescados em função de N e b. Suponha agora que N, o número de peixes no lago é desconhecido mas que esse biólogo sabe que $b = 100$ (há 100 peixes marcados no lago), $n = 100$ (na segunda coleta foram pescados 100 peixes) e que ele observou $k = 10$ (10 peixes marcados dentre os 100 pescados). Qual é sua estimativa de N a partir desses dados? Justifique sua estimativa.

3. Sejam X_0, X_1 v.a. independentes, $X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Qual é a distribuição de probabilidade de $Z = X_0 + X_1$?

4. Uma galinha poedeira bota N ovos por dia, onde N tem distribuição Binomial, $B(n,p)$, com $n = 4$ e $p \in (0,1)$. Cada ovo gera uma nova galinha com probabilidade $q \in (0,1)$, independentemente dos demais. Seja K o número de novas galinhas geradas pelos ovos botados em um particular dia. Determine a distribuição de probabilidade de K.

5. Sejam T_1, T_2 e T_3 três v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente, λ_1, λ_2 e λ_3. a) Determine $P(T_1 < \min\{T_2, T_3\})$. b) Determine $P(T_1 < T_2 | \min\{T_1, T_2\} \leq t)$.

6. Sejam U_1, U_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $[0,3]$. a) Denote $X = \min\{U_1, U_2\}$ e $Y = U_1 + U_2$. Determine as distribuições marginais de X e Y.

7. Um dado honesto é lançado repetidas vezes. Sejam X e Y as variáveis aleatórias definidas da seguinte forma. X é igual ao número de lançamentos até que a face 6 apareça pela primeira vez e Y é igual ao número de lançamentos até que uma face par apareça pela primeira vez. a) Determine a distribuição conjunta de X e Y. Elas são independentes? b) Determinine $E(X + Y)$. c) Seja $Z = \min\{X, Y\}$ (ou seja, Z é igual ao menor valor entre X e Y). Determine a distribuição de probabilidade de Z.

8. O tempo de funcionamento de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial de média 100 horas. Suponha também que os tempos de funcionamento de lâmpadas distintas sejam independentes. (lembre que, se T é uma variável aleatória com distribuição exponencial então sua função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ e $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.) a) Uma lâmpada é acesa. Qual é a probabilidade de que ela funcione por mais de 100 horas? b) Três lâmpadas são acesas no mesmo instante. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma delas funcione por mais de 100 horas? c) Numa caixa há 5 lâmpadas sendo

que 2 estão queimadas e 3 estão funcionando normalmente. Escolho uma dessas lâmpadas ao acaso. Qual é a probabilidade que esta lâmpada funcione por mais de 100 horas?

9. Após um discussão política, três indivíduos, digamos, srs. A, B e C, decidem resolver sua desavença através de um "duelo triplo". Sr. A acerta seu alvo com probabilidade $\frac{3}{4}$ em cada tiro; sr. B acerta com probabilidade $\frac{1}{2}$ e o sr. C acerta com probabilidade $\frac{1}{4}$. Assuma independência e que, em cada rodada deste duelo triplo, cada participante sobrevivente atira no melhor oponente vivo, ou seja, atira naquele que acerta seu alvo com maior probabilidade. Portanto, na primeira rodada, B e C atiram em A e A atira em B. Os tiros sao simultâneos. Descreva a cadeia de Markov correspondente, com espaço de estados = "conjunto dos indivíduos sobreviventes numa dada rodada" (portanto, há 8 estados). Qual é a probabilidade de que o sr. C sobreviva o duelo?

10. Um sistema de comunicação é tal que, se um símbolo é transmitido corretamente, a probabilidade de que o símbolo seguinte seja correto é de 0,9. Se, no entanto, um símbolo for transmitido incorretamente, a probabilidade de o próximo também o seja é de 0,5. A transmissão pode ser modelada pela sequência markoviana, $\{X_1, X_2, \ldots\}$ onde $X_i = 1$ se o i-ésimo símbolo for transmitido corretamente, e $X_i = 0$ se o i-ésimo símbolo for incorreto. Suponha que a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente seja 0,7. a) Calcule a Matriz de transição. b) Calcule $P(X_3 = 1|\pi_0)$, onde π_0 é a distribuição inicial dada(a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente é 0,7). c) Após muito tempo qual é a proporção de símbolos transmitida corretamente?

11. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4
0	1/3	0	2/3	0	0
1	1/3	0	0	2/3	0
2	0	1/5	3/5	1/5	0
3	0	3/4	0	1/4	0
4	0	0	1/2	0	1/2

a) Determine $P(X_4 = 0|X_2 = 4)$. b) Determine $P(X_4 = 0|X_2 = 4, X_5 = 1)$. c) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? d) Estime $P(X_n = 1|X_0 = 0)$ para n grande.

12. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0,1,2\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2
0	1/3	1/3	1/3
1	1/2	1/2	0
2	0	1/2	1/2

a) Classifique os estados desta cadeia. b) Determine $P(X_3 = 1|X_2 = 0)$ e $P(X_5 = 1|X_3 = 0)$. c) Determine $P(X_5 = 1|X_3 = 0, X_6 = 2)$. d) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única?

13. Três bolas numeradas de 1 até 3 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 3, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 4, 5 ou 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ o número de bolas na urna A no instante n. a) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$. b) Seja π a distribuição de probabilidade em $\{0, 1, 2, 3\}$ dada por $\pi(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$. Essa distribuição é estacionária?

14. Certo aparelho pode estar em três estados: 0=funcionando, 1=quebrado e aguardando início de serviço de reparo e 2=quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias μ_a min, μ_b min e μ_c min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por $Q(0, 1) = Q(1, 2) = Q(2, 0) = 1$ e $Q(i, j) = 0$ caso contrário. Se X_n = estado do aparelho ("funcionando", "quebrado e aguardando início de serviço de reparo" ou "quebrado e sendo consertado"), mostre que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov e determine sua matrix de transição.

15. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3
0	1/3	0	2/3	0
1	0	1/3	1/3	1/3
2	1/3	0	2/3	0
3	1/3	0	0	2/3

a) Classifique esta cadeia. b) Determine: $P(X_7 = 0|X_5 = 1)$. c) Determine $P(X_7 = 0|X_5 = 1, X_8 = 0)$. d) Estime $P(X_{5724659} = 0|X_0 = 2)$.

16. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma cadeia de Markov em tempo discreto no espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ com matriz de transição $\mathbf{P}$ dada por

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	2/3	1/3	0
4	0	0	0	2/3	1/3	0
5	0	0	1/3	0	1/3	1/3

a) Determine as classes de estados irredutíveis, classifique a cadeia de Markov em tempo discreto $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e determine os períodos dos estados.
b) Determine $P(X_{10} = 1|X_0 = 5, X_7 = 2)$. c) Determine $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4|X_0 = 5)$.

Beatriz, Brenda, Lais, Rebeca
bia.miazaki@hotmail.com

MAE 312 - Introdução aos processos estocásticos - Coleção de Exercícios 2

1. Um servidor da rede USP recebe solicitações de acesso, das 6 horas até as 18 horas, conforme um processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ com taxa $\lambda = 20$ horas $^{-1}$. A probabilidade de cada solicitação ser proveniente de uma localidade brasileira é de 3/4. Assuma independência. a) Qual é o número médio de solicitações no intervalo de 14 até as 16 horas? b) Determine a probabilidade de não ter havido nenhuma solicitação proveniente de localidade brasileira entre 15 e 17 horas. c) Determine $P(N(9,12) = 4|N(8,18) = 10)$.

2. Seja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ um processo estocástico em tempo contínuo com espaço de estados $S = \{0,1,2,3\}$ no qual: 1) os sucessivos tempos de permanência em cada estado $i \in S$ são v.a. $\{T_i^j\}_{j\geq 1}$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial (T_i^j indica a duração da j-ésima permanência no estado i) com $E(T_i^j) = \frac{1}{\mu_i} > 0$; 2) nos momentos de transição os sucessivos saltos são determinados pela matriz de transição **Q** dada por

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}$$

a) Determine as taxas do processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se $\mu_0 = 1$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$.
b) Determine $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2|X_0 = 3)$.

3. Numa repartição pública há 3 funcionários identificados por funcionários A, B e C. Cada um deles trabalha durante um tempo que é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 10 minutos e sai para " tomar um café" sendo que o tempo até seu retorno ao trabalho também tem distribuição exponencial com média 15 min. Assuma independência. Denote por X_t o número de funcionários trabalhando no instante t. a) Determine as taxas de transição desta cadeia. b) Considere apenas o funcionário A. Seja $\{Y_t\}$ a cadeia de Markov que assume o valor 1 no instante t (isto é, $Y_t = 1$) se o funcionário A estiver trabalhando nesse instante e o valor zero caso contrário. A distribuição uniforme no espaço de estados desta cadeia ($S = \{0,1\}$) é estacionária?

4. O conserto de um carro numa oficina envolve duas etapas, executadas por dois funcionários diferentes. A primeira etapa é executada pelo funileiro e demora um tempo que é uma v.a. com uma distribuição de probabilidade exponencial com média a horas. A segunda etapa é executada pelo pintor e seu tempo de execução é uma v.a. independente da primeira com distribuição também exponencial com média b horas. A oficina é pequena e só pode atender um carro por vez, de forma que se um cliente em potencial chega ao sistema e o encontra ocupado, ele vai embora. Clientes em potencial chegam conforme um processo de Poisson com taxa λ clientes por hora. a) Represente este sistema como uma cadeia de Markov em tempo contínuo. b) No regime estacionário, qual é a proporção do tempo na qual o funileiro está trabalhando?

MAE0312 - Lista 01 30/03/2017

	Q3	Q4	Q5	Q7	
Grupo 1 4 integrantes	2,3	2,5	1,2	2,3	8,3
Grupo 2 6	2,5	2,5	2,5	2,5	10.0
Grupo 3 6	2,5	2,0	1,0	2,0	7,5
Grupo 4 5	2,5	2,4	1,8	1,8	8,5
Grupo 5 6	2,5	2,5	1,8	2,3	9,1
Grupo 6 6	2,5	2,2	2,5	1,8	9,0

Qtde	Min	Med	Méd.	Máx	Var	DP
6	7,5	8,75	8,73	10.0	0,6	0,77

Lista 01 - MO312

Para entregar: 3, 4, 5 e 7

3. Para $k \geq 0$,

$$P(Z=k) = \sum_{m=0}^{k} P(X_0 = m, X_1 = k-m)$$

$$\overset{ind.}{=} \sum_{m=0}^{k} P(X_0=m)\, P(X_1 = k-m)$$

$$\overset{def}{=} \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \frac{\lambda_2^{k-m} e^{-\lambda_2}}{(k-m)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \lambda_1^m \lambda_2^{k-m}$$

$$= (\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} / k!.$$

$\therefore$ $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a's i.i.d's com

$$P(X_i = 1) = q \text{ e } P(X_i = 0) = 1-q, \quad q \in (0,1)$$

Temos que

$$K = \sum_{n=1}^{N} X_n, \text{ em que } N \sim \text{Binomial}(4,p),\ p \in (0,1),$$

e $X_1, X_2, \ldots$ independentes de N. Temos que

$$G_K(s) = E(s^K) = E\left(s^{\sum_{n=1}^{N} X_n}\right)$$

$$= E\left(E\left(s^{\sum_{n=1}^{N} X_n} / N\right)\right)$$

$$= E\left(E(s^{X_1})^N\right)$$

$$= G_N(G_{X_1}(s))$$

Mab

$$G_{X_1}(s) = qs + (1-q)$$

e

$$G_N(s) = (ps + (1-p))^4.$$

Dai,

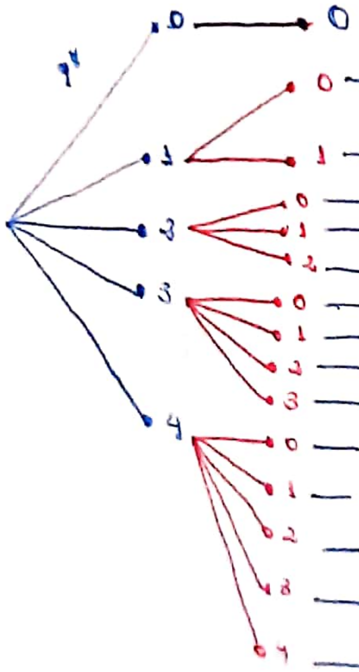
$$G_K(s) = ((1-p) + p(qs + (1-q)))^4$$

$$= (1 - p + pqs + p - pq)^4$$

$$= (1 - pq + pqs)^4$$

$$= ((1-pq) + pqs)^4$$

$\therefore\ K \sim \text{Binomial}(4, pq)$



$(1-p)^4$

$4 \times p(1-p)^3 \cdot (1-q)$

$4 \times p(1-p)^3 \times q$

$6 \times p^2 (1-p)^2 \cdot (1-q)^2$

$6 \times p^2 (1-p)^2\ 2 \cdot q(1-q)$

$6 \times p^2 (1-p)^2\ q^2$

$4p^3(1-p) \cdot (1-q)^3$

$4p^3(1-p)\ 3 \cdot q(1-q)^2$

$4p^3(1-p)\ 3 \cdot q^2(1-q)$

$4p^3(1-p)\ q^3$

$p^4(1-q)^4$

$p^4\ 4q(1-q)^3$

$p^4\ 6q^2(1-q)^2$

$p^4\ 4q^3(1-q)$

$p^4 q^4$

$$(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 \cdot (1-q) + 6p^2(1-p)^2 \cdot (1-q)^2 + 4p^3(1-p) \times (1-q)^3 + p^4(1-q)^4$$

$$= \sum_{k=0}^{4} (p(1-q))^k (1-p)^{4-k} \times \binom{4}{k}$$

$$= (p(1-q) + (1-p))^4$$

$$= (p - pq + 1 - \cancel{p})^4$$

$$= (1-pq)^4$$

5. a) Primeiramente, notemos que, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{T_2, T_3\} > x) &= \mathbb{P}(T_2 > x, T_3 > x) \\
&\overset{\text{ind.}}{=} \mathbb{P}(T_2 > x)\,\mathbb{P}(T_3 > x) \\
&= e^{-\lambda_2 x}\, e^{-\lambda_3 x} \\
&= e^{-(\lambda_2 + \lambda_3) x},
\end{aligned}$$

i.e., $\min\{T_2, T_3\} \sim \text{Exp}(\lambda_2 + \lambda_3)$ e é ind. de T_1. Agora, basta ver que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 < \min\{T_2, T_3\}) &= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f_{T_1, \min\{T_2, T_3\}}(x, y)\, dy\, dx \\
&\overset{\text{ind}}{=} \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, (\lambda_2 + \lambda_3)\, e^{-(\lambda_2+\lambda_3) y}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, e^{-(\lambda_2 + \lambda_3) x}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) x}\, dx \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.
\end{aligned}$$

b) Por definição,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 < T_2 \mid \min\{T_1, T_2\} \leq t) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 < T_2, \min\{T_1, T_2\} \leq t)}{\mathbb{P}(\min\{T_1, T_2\} \leq t)} \\
&= \frac{\int_0^t \int_x^{+\infty} f_{T_1, T_2}(x, y)\, dx\, dy}{1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}} = \frac{\int_0^t \int_x^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2\, e^{-\lambda_1 x}\, e^{-\lambda_2 y}\, dy\, dx}{1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}} \\
&= \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, e^{-\lambda_2 x} \Big/ \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right) \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \text{i.e. } \{T_1 < T_2\} \text{ é indep de } \{\min\{T_1, T_2\} \leq t\}
\end{aligned}$$

De outra forma,

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2, \min\{T_1, T_2\} \leq t) = \mathbb{P}(T_1 < T_2, T_1 \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 > t)$$

$$= \int_0^t \int_x^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, dy \, dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \right].$$

7. Sabemos que

$$X \sim \text{Geométrica}(1/6)$$

e

$$Y \sim \text{Geométrica}(1/2).$$

Para $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, com $n < m$,

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) =$$

$$= \mathbb{P}(E_1 \notin \{2,4,6\}, \ldots, E_n \in \{2, 4\}, E_{n+1} \neq 6, \ldots, E_{m-1} \neq 6, E_m = 6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^m \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{5}{3} \cdot \frac{6^2}{5^2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 6}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^m \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{2}{15}$$

~~Nota que~~

- para $n = m$,

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) = \mathbb{P}(E_1 \notin \{2,4,6\}, \ldots, E_{n-1} \notin \{2,4,6\}, E_n = 6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{6}$$

- para $n > m$,

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) = 0$$ Não são independentes.

b) Pela linearidade da esperança,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{1/6} + \frac{1}{1/2} = 6 + 2 = 8$$

c) Basta ver que, para $k \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} = k)$$

$$= \mathbb{P}(X_2 = k) \quad , \text{ uma vez que } \{X_1 = m\} \Rightarrow \{X_2 \leq m\}$$

Logo,

$$Z \sim \text{Geométrica}(1/2).$$

Na vdd, basta ver que, para $k \in \mathbb{N}_*$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y = k) + \mathbb{P}(X > k, Y = k)$$

$$\overset{a)}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{x = k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x, Y = k)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{x=k+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^k \frac{2}{15}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{15}\left(\frac{3}{5}\right)^k \sum_{x=k+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{15}\left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} \frac{1}{1 - 5/6}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}_*$$

1a) Como X e Y são indep.,

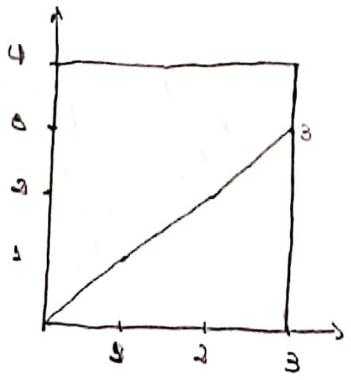
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{12}, \quad 0 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le 5$$

• Seja agora $Z = Y - 1$. Como

$$P(Z \le z) = P(Y-1 \le z) = P(Y \le z+1)$$
$$= \frac{(z+1)-1}{4} = \frac{z}{4}, \quad 0 \le z \le 4,$$

segue que $Z \sim \mathcal{U}(0,4)$ e é ind. de X, de modo que

$$f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{12}, \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le z \le 4$$



Agora, basta ver que

$$P(X < Y-1) = P(X < Z)$$
$$= \int_0^3 \int_x^4 f_{X,Z}(x,z)\,dz\,dx$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^3 4-x\,dx$$
$$= \frac{1}{12}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{1}{12}(12 - 9/2) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{15}{24}$$

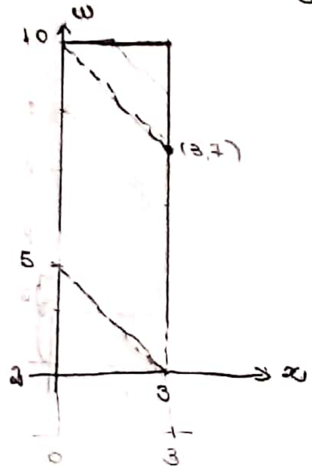
Outra forma:

$$P(X<Y-1) = P(X<Z) = \frac{|\{X<Z\}|}{|\Omega|} = \frac{(4+1)\cdot 3/2}{12} = \frac{15}{24}$$

b) Agora, seja $W = 2Y$. É fácil ver que $W \sim \mathcal{U}(2,10)$
Vamos determinar a distribuição de

$$V = X + W$$

Primeiramente, observamos que (X,W) é um vetor aleat. unif. distrib. em $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 10\}$.



Agora, basta ver que

. Para $v \in [2,5]$,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \left((v-2)^2/2\right)/24 = (v-2)^2/48$$

. Para $v \in [5,10]$,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \frac{((v-2)+((v-3)-2))3}{48} = \frac{2v-7}{16}$$

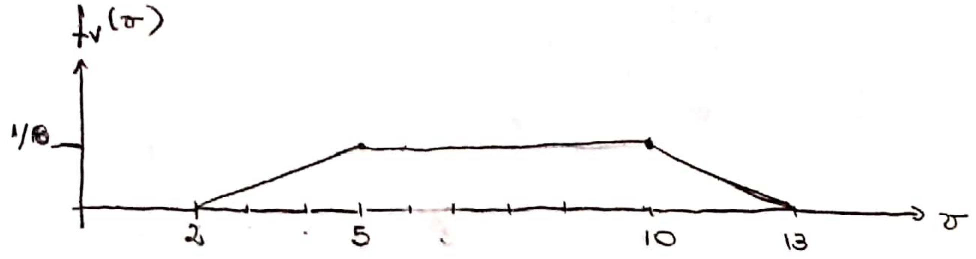
. Para $v \in [10,13]$

$$\mathbb{P}(V \leq v) = \left(24 - \frac{(10-(v-3))^2}{2}\right) / 24$$

$$= 1 - \frac{(13-v)^2}{48}$$

Daí,

$$f_V(v) = \begin{cases} (v-2)/24, & v \in [2,5) \\ 1/8, & v \in [5,10) \\ (13-v)/24, & v \in [10,13) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



2. Temos

N: nº de peixes no lago
b: nº de peixes marcados
n: nº de peixes pescados no dia posterior

Supondo N fixo e que os peixes tenham se espalhado pelo lago de modo que cada peixe pescado tenha ou não a marca independente dos demais,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{b}{N}\right)^{k}\left(1-\frac{b}{N}\right)^{n-k}, \quad k \in \{0,\dots,n\},$$

em que X é o nº de marcados nos n pescados. Supondo n fixo, é razoável supor que

$$\frac{b}{N} = \frac{X}{n}$$

Supondo N aleatório, X, b e n fixo, segue que

$$N = b \cdot \frac{n}{X} \Rightarrow E(N) = 100 \times \frac{100}{10} = 1000 \text{ peixes.}$$

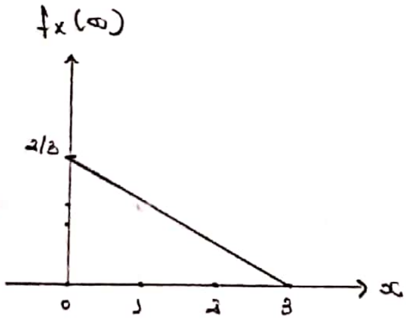
5. Para $0 \leq x \leq 3$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > x) &= \mathbb{P}(\min\{U_1, U_2\} > x) \\ &= \mathbb{P}(U_1 > x, U_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(U_1 > x)\,\mathbb{P}(U_2 > x) \\ &= \frac{(3-x)^2}{9} \end{aligned}$$

donde segue que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{(3-x)^2}{9}\right] = \frac{2}{9}(3-x) = \frac{6-2x}{9}\,\mathbb{I}_{[0,3]}(x)$$

$$= \left(2/3 - 2/9\,x\right)\mathbb{I}_{[0,3]}(x)$$



Para determinar a dist. de $Y = U_1 + U_2$, basta seguir o mesmo raciocínio dado na solução do exercício 1b).

8. a) A prob. de int. é dada por

$$P(T > 100) = e^{-\lambda 100} = e^{-\frac{1}{100}\cdot 100} = e^{-1}.$$

b) Sejam T_i, $i = 1, 2, 3$ os tempos das lâmpadas 1, 2 e 3 respec. Sejam tbm

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a lamp. } i \text{ funciona por mais de 100 horas}, i = 1,2,3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

Note que $X \sim Bin(3, e^{-1})$ e que a prob de int. é dado por

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0)$$
$$= 1 - (1 - e^{-1})^3.$$

c) Seja Y uma v.a. auxiliar em que

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se escolhemos uma lamp. boa} \\ 0, & \text{" " " " queimada} \end{cases}$$

Seja T o tempo de vida da lamp. escolhida. Segue que

$$\mathbb{P}(T > 100) = \mathbb{P}(T > 100, Y=0) + \mathbb{P}(T > 100, Y=1)$$
$$= \mathbb{P}(T > 100 / Y=0)\,\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(T > 100 / Y=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$$
$$= 0 \times \frac{2}{5} + e^{-1} \times \frac{3}{5}$$
$$= \frac{3}{5} e^{-1}.$$

——— " ——— " ———

9. Vamos modelar o problema por uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$ em $S = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C, \emptyset\}$, com $X_n = A$ indicando que na n-ésima etapa, há apenas o indivíduo A. É fácil ver que a resp matriz de trans. é

$$P = \begin{array}{c} \\ ABC \\ AB \\ AC \\ BC \\ A \\ B \\ C \\ \emptyset \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ABC & AB & AC & BC & A & B & C & \emptyset \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \; & \; & \; & \; & \; & \; & \; & \; \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

Detalhes na pasta amarela. Lista anterior.

▶ MAE0312 - Lista 02 03/04/2017

	Q9	Q12	Q13		
Grupo 1	3,0	3,2 a* descritiva	3,3	9,5	(6)
Grupo 2	1,8	2,7 a*, d•	3,3	7,8	(4)
Grupo 3	2,5	2,7 a*, d*	3,3	8,5	(6)
Grupo 4	2,5	3,0 a*	3,3	8,8	(3)
Grupo 5	2,0	2,9 a*	3,3	8,2	(5)
Grupo 6	3,0	2,8 a°, d*	3,2*	9,0	(3)
Grupo 7	3,0	2,6 a*	3,3	8,9	(6)

• Perron-Frobenius

Discos de Gershgorin

* justificar um pouco mais

• É única?

□ incompleta

Lista 02 - MAE0312

Para entregar: 9, 12, 13

9. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma C.M. em $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7\} := \{\{A,B,C\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{A\},\{B\},\{C\},\emptyset\}$ com $X_0 = \{A,B,C\}$ e cujas probabilidades de transição são dadas por

$P(A\to) = 3/4$

$P(B\to) = 1/2$

$P(C\to) = 1/4$

$p_{00} = P(A \not\to B,\ B \not\to A,\ C \not\to A) = 1/4 \cdot 1/2 \cdot 3/4 = 3/32$

$p_{01} = 0$ (A e B não atiram em C)

$p_{02} = P(A \to B,\ B \not\to A,\ C \not\to A) = 3/4 \cdot 1/2 \cdot 3/4 = 9/32$

$$p_{03} = P(A \not\to B,\ B \to A,\ C \not\to A) + P(A \not\to B,\ B \not\to A,\ C \to A) + P(A \not\to B,\ B \to A,\ C \to A) = 3/32 + 1/32 + 1/32 = 5/32$$

$p_{04} = 0$ (A e B ñ atiram em C)

$p_{05} = 0$ (" " " ")

$$p_{06} = P(A \to B,\ B \to A,\ C \not\to A) + P(A \to B,\ B \not\to A,\ C \to A) + P(A \to B,\ B \to A,\ C \to A) = 9/32 + 3/32 + 3/32 = 15/32$$

$p_{07} = 0$

Seguindo o raciocínio acima, segue que $(X_n)_{n\geq 1}$ tem matriz de transição

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} ABC & AB & AC & BC & A & B & C & \emptyset \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{c} ABC\ 0 \\ AB\ 1 \\ AC\ 2 \\ BC\ 3 \\ A\ 4 \\ B\ 5 \\ C\ 6 \\ \emptyset\ 7 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 3/32 & 0 & 9/32 & 5/32 & 0 & 0 & 15/32 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 3/8 & 1/8 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 3/16 & 0 & 9/16 & 0 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 0 & 0 & 3/8 & 0 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Seja $f(x)$ a probabilidade de, a partir de $x \in S$, chegar à 6. Se chegarmos a 6, significa que C sobreviveu!

Como $X_0 = 0$, queremos determinar $f(0)$

$$f(0) = \frac{3}{32} f(0) + \frac{9}{32} f(2) + \frac{5}{32} f(8) + \frac{15}{32} f(6)$$

Mas $f(6) = 1$ e $f(4) = f(5) = f(7) = 0$, de modo que

$$f(2) = \frac{3}{16} f(2) + \frac{9}{16} \overset{0}{f(4)} + \frac{1}{16} \overset{1}{f(6)} + \frac{3}{16} \overset{0}{f(7)} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{13} \ ;$$

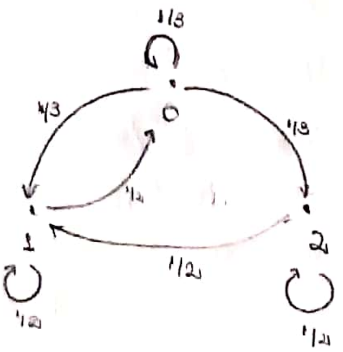
$$f(8) = \frac{3}{8} f(8) + \frac{3}{8} \overset{0}{f(5)} + \frac{1}{8} \overset{1}{f(6)} + \frac{1}{8} \overset{0}{f(7)} \Rightarrow f(8) = \frac{1}{5}$$

Logo,

$$f(0) = \frac{32}{29} \left(\frac{9}{32} \times \frac{1}{13} + \frac{5}{32} \times \frac{1}{5} + \frac{15}{32} \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{1}{29} \left(\frac{9 + 13 + 195}{13} \right) = \frac{217}{377} .$$

12.



a) Como todos os estados se comunicam e o espaço de estados é finito, segue que todos os estados são recorrentes positivos.

b) Dada a homogeneidade temporal,

$$P(X_3 = 1 \,/\, X_2 = 0) = P(X_1 = 1 \,/\, X_0 = 0)$$

$$= p_{0,1} = 1/3$$

e $P(X_3 = 1 \,/\, X_1 = 0) = P(X_2 = 1 \,/\, X_0 = 0) = \sum_{k=0}^{2} P(X_2 = 1, X_1 = k \,/\, X_0 = 0)$

$$= \sum_{k=0}^{2} P(X_2 = 1 / X_1 = k)\, P(X_1 = k / X_0 = 0)$$

$$= p_{00}\, p_{01} + p_{01}\, p_{11} + p_{02}\, p_{21} = 1/3 \times 1/3 + 1/3 \times 1/2 + 1/3 \times 1/2$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{6} = \frac{4}{9}.$$

c)

$$P(X_5 = 1 / X_3 = 0, X_6 = 2) = \frac{P(X_5 = 1, X_3 = 0, X_6 = 2)}{P(X_3 = 0, X_6 = 2)}$$

$$= \frac{P(X_3 = 0)\, P(X_5 = 1 / X_3 = 0)\, P(X_6 = 2 / X_5 = 1)}{P(X_6 = 2 / X_3 = 0)\, P(X_3 = 0)}$$

$$= \frac{p_{01}^{(2)}\, \overset{=0}{p_{12}}}{p_{02}^{(3)}} = 0$$

d) Queremos $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ t.q.

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \quad e \sum_{i \in E} \pi_i = 1, \text{ i.e.}$$

$$\begin{cases} 1/3\, \pi_0 + 1/2\, \pi_1 = \pi_0 & \Rightarrow \quad \pi_1 = 4/3\, \pi_0 \\ 1/3\, \pi_0 + 1/2\, \pi_1 + 1/2\, \pi_2 = \pi_1 & \\ 1/3\, \pi_0 + 1/2\, \pi_2 = \pi_2 & \Rightarrow \quad \pi_2 = 2/3\, \pi_0 \end{cases}$$

Daí

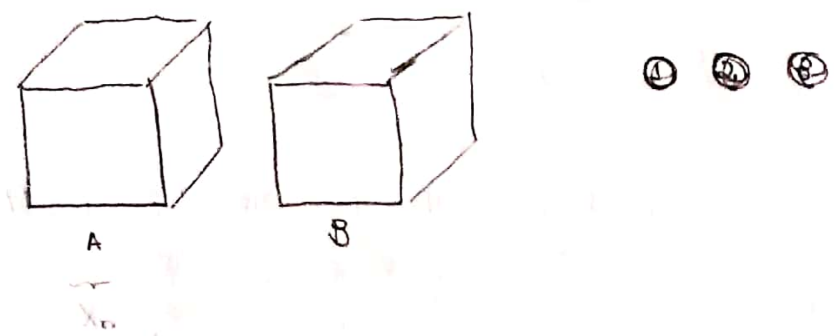
$$\frac{3}{3}\pi_0 + \frac{4}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_0 = \frac{9}{3}\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{3}{9}, \; \pi_1 = \frac{4}{9}, \; \pi_2 = \frac{2}{9}$$

Logo,

$$\pi = \left(\frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

Como a cadeia é ergódica, π é única.

13.



Seja $\mathbb{P}$ a matriz de transição associada à $(X_n)_{n\geq 1}$. Note que

$$p_{00} = \mathbb{P}(Y_n \in \{4,5,6\}) = 1/2$$

$$p_{01} = \mathbb{P}(Y_n \in \{1,2,3\}) = 1/2$$

$$p_{10} = \mathbb{P}(\qquad\qquad)$$

Segue que

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 1/2 & 2/6 & 0 \\ 2 & 0 & 2/6 & 1/2 & 1/6 \\ 3 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Assim, sendo

$$\pi(k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{, i.e., } \pi = (1/8, 3/8, 3/8, 1/8),$$

segue que π é estacionária, pois

$$\pi \mathbb{P} = \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{48}, \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{6}{48}, \frac{6}{48} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}, \frac{3}{48} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) = \pi$$

MAE0212 - Lista 03

	Q08	Q10	Q11	
Grupo 01	2,1	2,6	3,3	8,0
Grupo 02	2,7	3,0	2,6	8,3
Grupo 03	2,6	2,7	3,0	8,3
Grupo 04	2,9	3,0	3,0	8,9
Grupo 05	3,3	3,0	2,6	8,9
Grupo 06	2,6	2,6	2,8	8,0
Grupo 07	2,4	2,2	2,9	7,5

Lista 03 - MAE0312

Para entregar: 8, 10 e 11

8. a) A prob. de int. é dada por

$$P(T > 100) = e^{-\frac{1}{100} \cdot 100} = e^{-1}.$$

b) Seja Y o nº dentre as 3 lâmpadas que funcionam por mais de 100 horas. Temos que $Y \sim Bin(3, e^{-1})$. Daí, a prob. de int. é dada por

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y=2) + P(Y=3) \\ &= \binom{3}{2} (e^{-1})^2 (1-e^{-1}) + \binom{3}{3} (e^{-1})^3 (1-e^{-1})^0 \\ &= 3e^{-2}(1-e^{-1}) + e^{-3} \\ &= 3e^{-2} - 3e^{-3} + e^{-3} \\ &= 3e^{-2} - 2e^{-3} \\ &= e^{-2}(3 - 2e^{-1}) \end{aligned}$$

(⇒) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (1-e^{-1})^3$.

c) Sejam T, o tempo de vida da lâmpada escolhida e

$$X = \begin{cases} 0, & \text{se a lâmpada escolhida é def.} \\ 1, & \text{" " " " boa} \end{cases}$$

A prob. de int. é dada por

$$\begin{aligned} P(T > 100) &= P(T > 100, X = 0) + P(T > 100, X = 1) \\ &= P(T > 100 / X = 0) P(X=0) + P(T > 100 / X = 1) P(X=1) \\ &= 0 \times \frac{2}{5} + e^{-1} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{5} e^{-1}. \end{aligned}$$

10. a) A MT é dada por

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Temos a medida inicial dada por

$$\pi_0 = (0,3 \,;\, 0,7)$$

Assim,

$$P(X_3 = 1/\pi_0) = P(X_3 = 1 / X_0 = 0)\,\pi_0(0) + P(X_3 = 1 / X_0 = 1)\,\pi_0(1)$$
$$= P^{(3)}_{0,1}\, 0,3 + P^{(3)}_{1,1}\, 0,7$$

Mas

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{(3)} = P^{(2)} P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,156 & 0,844 \end{pmatrix} \end{array}$$

Logo, $P(X_3 = 1/\pi_0) = 0,78 \times 0,3 + 0,844 \times 0,7 = 0,8248$.

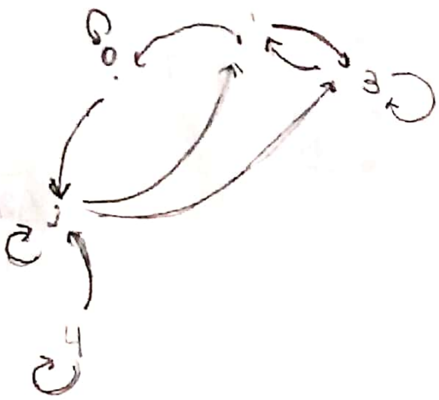
c) Como a cadeia é ergódica, após muito tempo a prop. de símbolos transmiti-da corr. é dada por $\pi(1)$, em que π é a única med. inv. do processo. Nesse caso

$$\pi = \left(\frac{1/10}{6/10} \,,\, \frac{5/10}{6/10} \right) = \left(\frac{1}{6} \,,\, \frac{5}{6} \right)$$

$\therefore$ A resp é $5/6$.

11. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ em $S=\{0,1,2,3,4\}$ com

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



a) $P(X_4=0 / X_2=4) \overset{h.t}{=} P(X_2=0 / X_0=4)$

$=0$, uma vez q. ñ existe um caminho de 2 passos de 4 à 0 com prob. positiva de ocorrência.

b) $P(X_4=0 / X_2=4, X_5=1)$ tbm vale zero dada a imposs. de $\{X_4=0\}$ uma vez que ocorra $\{X_2=4\}$

c) Nessa sit., o est. 4 é transitório e eventualmente saímos dele, de modo que a cadeia fica reduzida à subclasse $\{0,1,2,3\}$. Nessa, todos são recorrentes e a única medida da cadeia fica dada por

$$\pi = (\pi', 0), \quad \pi' = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

e π' é t.q. $\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ e

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3)$$

donde segue que

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{3} = \pi_0 \Rightarrow \pi_1 = 2\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{4}{3}\left(2\pi_0 - \frac{1}{3}\pi_0\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{5\pi_0}{3}\right) = \frac{20}{9}\pi_0$$

$$\frac{\pi_2}{5} + \pi_3\frac{3}{4} = \pi_1 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\pi_0 + \frac{3}{5}\pi_2 = \pi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{5}{3}\pi_0$$

Como

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_0 + 2\pi_0 + \frac{5}{3}\pi_0 + \frac{20}{9}\pi_0$$

$$= \pi_0\left(3 + \frac{5}{3} + \frac{20}{9}\right) = \pi_0\frac{62}{9} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{9}{62}$$

Daí,

$$\pi_1 = \frac{18}{62}, \quad \pi_2 = \frac{15}{62} \quad e \quad \pi_3 = \frac{20}{62}$$

$\therefore$

$$\pi = \left(9/62,\ 18/62,\ 15/62,\ 20/62,\ 0\right)$$

MAE 0812 - Lista 04

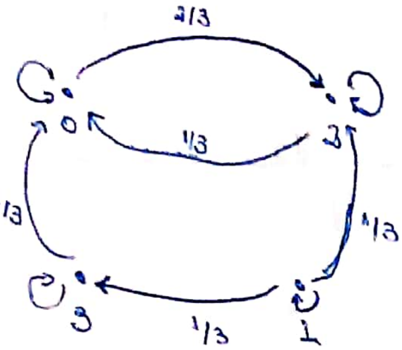
	Q 14	Q 15	Q 16	
Grupo 01	~~[illegible]~~ 0,0*	2,7	2,6	5,3
Grupo 02	3,3	3,0	2,3	8,6
Grupo 03	2,8	2,3	2,2	7,3
Grupo 04	2,7	2,7	2,6	8,0
Grupo 05	[illegible]	2,8	2,1	6,0
Grupo 06	2,8	2,9	2,1	7,8
Grupo 07	2,0 ~~[illegible]~~	2,8	2,2	7,0

$$\psi_{EE} = \frac{1}{2}\psi_{WS}^{\;0} + \frac{1}{2}\psi_{[illegible]} + \frac{1}{2}\psi_{YS}^{\;0}$$

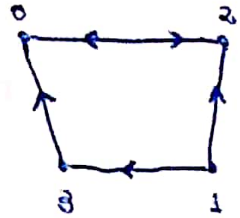
$$\psi_{EE} = \frac{1}{2}\psi_{EE} \Rightarrow \psi_{EE} = 0/2$$

MAE0312 - Lista 04

15. A cadeia pode ser representada, pictorialmente, do seguinte modo



ou



a) {1} e {3} são classes transitórias enquanto que {0,2} é uma classe recorrente positiva.

b) $P(X_7=0 / X_5=1) = P(X_2=0/X_0=1) = P_{12}P_{20} + P_{13}P_{30}$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

c) $P(X_7=0 / X_5=1, X_8=0) = \dfrac{P(X_8=0/X_7=0)P(X_7=0/X_5=1)}{P(X_8=0/X_5=1)}$
$$= \frac{P(X_1=0/X_0=0)P(X_2=0/X_0=1)}{P(X_3=0/X_0=1)}$$
$$= \frac{1/3\times 2/9}{P_{11}P_{12}P_{20} + P_{11}P_{13}P_{30} + P_{12}P_{22}P_{20} + P_{13}P_{33}P_{30} + P_{12}P_{20}P_{00} + P_{13}P_{30}P_{00}}$$
$$= \frac{2/27}{1/3\cdot 1/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 1/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 2/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 2/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 1/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 1/3\cdot 1/3}$$
$$= \frac{2/27}{8/27} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

d) A partir de $X_0=2$, a cadeia se comp. como uma cadeia ergódica ...

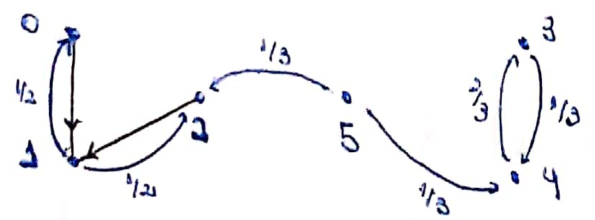
Daí, para tempos muitos grandes, em especial 5724659, sabemos que

$$|P(X_n = i_n / X_0 = i_0) - \pi(i_n)| < e^{-\gamma n},$$

γ é gap espectral $|1-\lambda_2|$, λ_2 é o segundo maior auto-valor de P. Daí, uma estimativa p/ $P(X_{5724659} = 0 / X_0 = 2)$ é dada por

$$\pi(0) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = \frac{1}{3}.$$

16. Pictorialmente



a) Há três classes: $\{0,1,2\}$, $\{3,4\}$ e $\{5\}$

As duas primeiras são rec. posit. e a última é transiente. Ademais

$d_1 = mdc\{n \geq 1 : p_{11}^n > 0\}$
$= mdc\{2,4,6,\ldots\} = 2$

O mesmo vale para 0 e 2.

Os demais tem período 1.

b) $P(X_{10} = 1 / X_0 = 5, X_7 = 2)$

$= P(X_{10} = 1 / X_7 = 2)$ ~~[illegible]~~
$= P(X_3 = 1 / X_0 = 2)$
$= P_{21} P_{12} P_{21} + P_{21} P_{10} P_{01} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$ ~~[illegible]~~.

$= 1$

c) Seja $L = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 4 / X_0 = 5)$. Note que, para $n > 1$,

$$P(X_n = 4 / X_0 = 5) = P(X_n = 4, X_1 = 4 / X_0 = 5)$$
$$+ P(X_n = 4, X_1 = 5 / X_0 = 5)$$
$$+ P(X_n = 4, X_1 = 2 / X_0 = 5)$$

Daí

$$P(X_n=4 / X_0=5) = P(X_n=4 / X_1=4) P_{54} + P(X_n=4 / X_1=5) P_{5,5} + P(X_n=4 \mid X_1=2) P_{5,2}$$

Assim

$$L = \frac{1}{3} L + \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} P(X_n=4 / X_1=4), \text{ i.e.}$$

$$\frac{2}{3} L = \frac{1}{3} \times \frac{1/3}{1/3+2/3} \Rightarrow L = \frac{1}{6}.$$

14. i Primeiramente, note que dados $i_{n+1}, i_n, \dots, i_0 \in \{0,1,2\}$, $n \geq 0$, para algum $n_0 \in \{0, \dots, n\}$,

- Se $i_{n+1} = i_n$

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} / X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) = P(T_{i_{n_0}} \geq n-n_0+1 / T_{i_{n_0}} \geq n-n_0)$$

$$= \frac{P(T_{i_{n_0}} \geq n-n_0+1, T_{i_{n_0}} \geq n-n_0)}{P(T_{i_{n_0}} \geq n-n_0)} = \frac{P(T_{i_{n_0}} \geq n-n_0+1)}{P(T_{i_0} \geq n-n_0)}$$

$$= \frac{\sum_{k=n-n_0+1}^{+\infty} p_{i_{n_0}} (1-p_{i_{n_0}})^k}{\sum_{m=n-n_0}^{+\infty} p_{i_{n_0}} (1-p_{i_{n_0}})^m} = \frac{(1-p_{i_{n_0}})^{n-n_0+1}}{(1-p_{i_{n_0}})^{n-n_0}} = (1-p_{i_{n_0}}) = (1-p_{i_n}),$$

que depende apenas de i_n e equivale à $P(X_1=i_{n+1} / X_0=i_n)$.

Daí, se $i_{n+1} \neq i_n$,

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} / X_n=i_n \dots) = 1 - P(X_{n+1}=i_n / X_n=i_n \dots)$$
$$= 1 - (1-p_{i_n}) = p_{i_n}$$

A MT é dada por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 \\ 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mu_i = \frac{1-p_i}{p_i}$

$p_i(\mu_i+1) = 1 \Rightarrow p_i = \frac{1}{1+\mu_i}$

• MAE0212 - Lista 05

	Q1	Q2	Q7	
Grupo 1	3,0	3,3	3,3	9,6
Grupo 2	2,2	1,7	1,6	5,5
Grupo 3	2,9	1,2	1,6	5,7
Grupo 4	3,3	3,0	3,0	9,4
Grupo 5	3,1	2,9	2,9	8,9
Grupo 6	2,7	1,9	1,7	6,3
Grupo 7	1,2	1,6	1,7	4,5

Lista 05 - MAE0312

Para entregar: 1, 2 e 7.

Ex. 1

a) Seja $N(s,t)$ o número de solicitações no intervalo $(s,t]$, $s<t$. Como visto em aula,

$$N(s,t) \sim Poi(\lambda(t-s)).$$

No nosso caso, $s=14$, $t=16$ e $\lambda=20$. Daí

$$E(N(14,16)) = 20\cdot(16-14) = 20\cdot 2 = 40.$$

b) Dados s,t reais, $0\leq s<t$,

$$N(s,t) = N_B(s,t) + N_o(s,t),$$

em $N_B(s,t)$ é o nº de solicitações oriundas do Brasil no int. $(s,t]$ e $N_o(s,t)$ o nº de solicitações de outras localidades no mesmo intervalo. Como cada solicitação é do Brasil com probabilidade $3/4$, assumindo independência, segue que $(N_B(t))_{t\geq 0} \sim P.P.P(3/4 \cdot \lambda)$, i.e., $(N_B(t))_{t\geq 0} \sim P.P.P(15)$. Logo

$$P(N_B(15,17)=0) = \frac{(30)^0 e^{-30}}{0!} = e^{-30}.$$

c) Basta ver que $N(9,12) / N(8,18)=10 \sim Binomial((3/10))$. Assim,

$$P(N(9,12)=4 / N(8,18)=10) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{10}\right)^4\left(\frac{7}{10}\right)^6$$

Ex 2. O tempo de permanência T_j no estado $j \in S = \{0,1,2,3\}$ é dado por

$$T_j = \sum_{k=1}^{N_j} T_j^k \quad , \; N_j \sim \text{Geométrica}(p_j) \, ,$$

$p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 2/3$. Daí, $T_0 \sim \exp(1/2\,\mu_0)$, $T_1 \sim \exp(1/2\,\mu_1)$, $T_2 \sim \exp(2/3\,\mu_2)$ e $T_3 \sim \exp(2/3\,\mu_3)$. Supondo $\mu_0 = 1$ e $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, temos que

$$q_0 = 1/2 \; , \; q_1 = 1 \; , \; q_2 = 4/3 \text{ e } q_3 = 4/3 .$$

Ademais, a matriz de transição associada a cadeia imersa é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí, segue pela relação $q_{ii} = -q_i$ e $q_{ij} = q_i \, p_{ij}$, $i,j \in S$, que

$$L = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$ é a matriz de taxas do processo.

b) Uma vez que a cadeia é irredutível e S é finito e aperiódica, existe uma única medida invariante π e $\lim_{t\to\infty} P(X_t = 2 / X_0 = 3) = \pi(2)$. Sabemos que

$\pi L = 0$, donde segue que $\pi_2 = \frac{3}{22}$ (cálculos já feitos monit. ant.)

7. Análogo ao exc. 2. Agora

$$T_0 \sim Exp(2/3 \mu_0) \,,\ T_1 \sim Exp(2/3 \mu_1) \,.\ T_2 \sim Exp(2/3 \mu_2) \,,\ T_3 \sim Exp(2/3 \mu_3)$$

Se $\mu_i = 1$, $i \in S$,

a)
$$Q = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

b)
$$\lim_{t \to +\infty} P(X_t = 2 / X_0 = 3) = \pi(2) = 1/4.$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2/3\, \pi_0 = -2/3\, \pi_3 \Rightarrow \pi_0 = \pi_3 \\ 2/3\, \pi_0 = 2/3\, \pi_1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 \\ 2/3\, \pi_1 = 2/3\, \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \pi_1 = \pi_0 \end{cases} \Rightarrow \pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$$

Lista II . Processos Estocásticos

Exercício 1.

Sejam

T_i: variável aleatória representado o tempo durante o qual o funcionário i, $i=1,2,3$, trabalha;

S_i: variável aleatória representando o tempo até o retorno do café vinculado ao funcionário i, $i=1,2,3$.

+ Nossa construção, $T_1 = T_A$, $T_2 = T_B$, $T_3 = T_C$, onde os subscritos indicam of

Pelo enunciado, temos que

$T_i \sim \exp(1/10)$, $i=1,2,3$;

$S_i \sim \exp(1/15)$, $i=1,2,3$;

e todas são independentes entre si.

Sendo agora X_t = número de funcionários trabalhando no instante t, é fácil ver que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ em $S=\{0,1,2,3\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo. (a)

Pictorialmente, ~~temos~~ em função das taxas, temos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "3\mu"] & 1 \arrow[l, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend left, "2\mu"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\lambda"] \arrow[r, bend left, "\mu"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Como, nesse caso, $\mu = 1/15$ e $\lambda = 1/10$, segue que

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6/30 & 6/30 & 0 & 0 \\ 3/30 & -7/30 & 4/30 & 0 \\ 0 & 6/30 & -8/30 & 2/30 \\ 0 & 0 & 9/30 & -9/30 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Considerando agora só o funcionário A, temos que

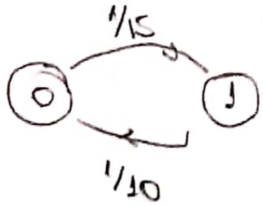
$\{Y_t\}_{t \geq 0}$ em $S = \{0, 1\}$ é uma cadeia de Markov de dois estados em tempo contínuo

com

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{se of. A está trab. no inst. } t \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Lembramos aqui que $T_A \sim \exp(1/10)$ e $S_A \sim \exp(1/15)$.

Aqui, a cadeia pode ser representada em função das taxas pelo pictograma abaixo



Daí,

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} -2/30 & 2/30 \\ 3/30 & -3/30 \end{bmatrix}$$

. Como visto em aula, π será estacionária se $\pi \mathbb{L} = 0$. Nesse caso, obtivemos

$$\pi = \left(\frac{1/10}{1/10 + 1/15}, \frac{1/15}{1/10 + 1/15} \right) = \left(\frac{3/30}{5/30}, \frac{2/30}{5/30} \right) \Rightarrow$$

$\pi = (3/5, 2/5)$ é a ~~distr~~ distribuição estacionária, e única, já que a cadeia é irredutível.

Assim, a dist. uniforme no esp. de estados $\pi_U = (1/2, 1/2)$ não é estacionária.

De fato, $\pi_U \mathbb{L} = [1/2 \;\; 1/2] \begin{bmatrix} -2/30 & 2/30 \\ 3/30 & -3/30 \end{bmatrix} = [1/60, -1/60] \neq Q = [0, 0]$.

Exercício 3.

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ em $S=\{0,1,2,3\}$. Seja T_i o tempo de perm. no estado $i\in S$

Temos que

$$T_0 = \min\{S_1, S_2, S_3\} \sim \exp(3/15)$$

$$T_1 = \min\{R_1, S_1, S_2\} \sim \exp\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}\right)$$

$$T_2 = \min\{R_1, R_2, S_1\} \sim \exp\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}\right)$$

$$T_3 = \min\{R_1, R_2, R_3\} \sim \exp(3/10)$$

Ademais

- $p_{01} = 1.$
- $p_{12} = P(\min\{S_1,S_2\} < R_1) = \dfrac{2/15}{2/15 + 1/10}$

  $\exp(2/15)$

  $= \dfrac{2/15}{\frac{7}{30}} = \dfrac{4}{7}$

$p_{10} = \dfrac{1/10}{7/30} = \dfrac{3}{7}$

- $p_{21} = \dfrac{2/10}{4/15} = 3/4$, $p_{23} = \dfrac{1/15}{4/15} = 1/4$

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/7 & 0 & 4/7 & 0 \\ 2 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

- $p_{32} = 1$

Daí, Q.

$$L = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -3/15 & 3/15 & 0 & 0 \\ 1 & 3/30 & -7/30 & 4/30 & 0 \\ 2 & 0 & 3/15 & -4/15 & 1/15 \\ 3 & 0 & 0 & 3/10 & -3/10 \end{array}$$

b) Nesse caso,

$$\mathbb{L} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -1/15 & 1/15 \\ 1/10 & -1/10 \end{bmatrix} \end{array}$$

$T_a \sim exp(1/10)$

$D_a \sim exp(1/15)$

A med est será t q

$$\pi \mathbb{L} = 0 \; (1), \quad e \quad \pi_0 + \pi_1 = 1 \; (2)$$

Daí,

$$(\pi_0, \pi_1) \begin{bmatrix} -1/15 & 1/15 \\ 1/10 & -1/10 \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi_1}{10} = \frac{\pi_0}{15} \Rightarrow \pi_0 = \frac{15}{10} \cdot \pi_1 \quad \text{Por (2),}$$

$$\frac{15}{10}\pi_1 + \pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow \pi_0 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \text{ isto é,}$$

$$\pi = \left(\overset{3/5}{\frac{15}{25}}, \overset{2/5}{\frac{10}{25}}\right).$$

$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ não é estacionária pois

$$(1/2, 1/2) \begin{bmatrix} -1/10 & 1/10 \\ 1/15 & -1/15 \end{bmatrix} = (1/30 - 1/20, 1/20 - 1/30)$$

$$= (-1/60, 1/60) \neq (0, 0)$$

Introdução Aos Processos Estocásticos

Lista 2

Maicon Aparecido Pinheiro

1.

Entendendo o problema:

Estamos em uma repartição pública que possui 3 funcionários: A, B e C. Cada um deles trabalha durante um tempo que é uma v.a. com distribuição exponencial com média 10 (isto é, $\lambda = 1/10$) e sai para tomar um café sendo que o tempo até o retorno ao trabalho também tem distrib. exponencial, só que com média 15 min (ou seja, $\mu = 1/15$).

Assumindo independência e denotando por X_t o número de funcionários trabalhando no instante t,

1. a) Determine as taxas de transição desta cadeia.

Por definição, sabemos que as taxas de interesse são dadas por

$$q_{ij} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t) \quad , \quad i,j \in S = \{0,1,2,3\}$$

Mas antes de computar q_{ij}, vamos entender melhor esta cadeia de Markov de tempo contínuo. Como X_t representa o nº de funcionários trabalhando no instante t, temos que X_t pode ser

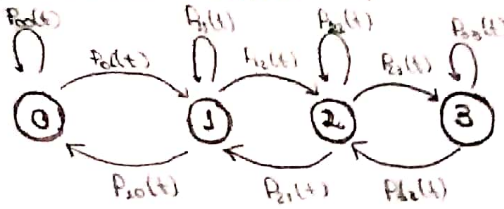
0, A, B e C estão "no café"   2, 2 dos três estão trab.

1, Um dos três está trabalhando   3, todos estão trabalhando

Logo, o espaço de estados para esta cadeia é $S=\{0,1,2,3\}$.

$\therefore$ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ em $S=\{0,1,2,3\}$ é um cadeia de Markov de tempo contínuo

Pictorialmente, temos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ representada da seg. forma



Sabemos que

$$P_{00}(h) = P(\text{"todos estarem no café e não voltarem antes do tempo } h\text{"}) +$$

$$+ P(\text{"outras coisas"}) =$$

$$= P(\underbrace{\min\{\xi_A, \xi_B, \xi_C\}}_{\sim exp(3\lambda)} > h) + P(\text{"outras coisas"}) =$$

$$= e^{-3\lambda h} + o(h) = \quad \text{(exp. em série de Taylor)}$$

$$= \left(1 - 3\mu h\right) + o(h)$$

$$\Rightarrow q_{00} = -3\mu$$

Usando o mesmo raciocínio, computamos os demais e obtemos

$P_{01}(h) = 3\mu h + o(h) \Rightarrow q_{01} = 3\mu$

$P_{10}(h) = \quad = \lambda$

$P_{11}(h) = \quad = -2\mu - \lambda$

$P_{12}(h) = \quad = 2\mu$

$P_{21}(h) = \quad = 2\lambda$

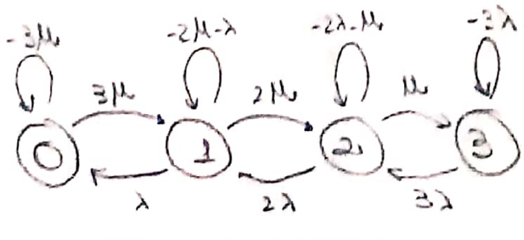
$P_{22}(h) = \quad = -2\lambda - \mu$

$P_{23}(h) = \quad = \mu$

$P_{32}(h) = \quad = 3\lambda$

$P_{33}(h) = \quad = -3\lambda$

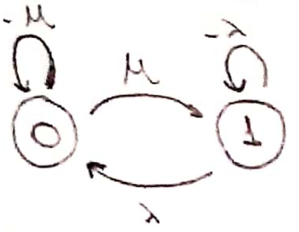
Ou seja,



1b)

$\{Y_t\}$ em $S=\{0,1\}$ é um cadeia de markov em t. contínuo

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{, se o funcionário A está trab.} \\ 0 & \text{, se não} \end{cases}$$



A dist. será estacionaria se e somente se

$$\pi \mathbb{L} = 0 \text{ , onde}$$

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-\mu}{2} & \frac{\mu-\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

Concluimos que a distribuição uniforme não é estacionária. Poderia ser apenas se $\lambda = \mu$.

2.

Entendendo o Problema: Um servidor da USP que recebe solicitações de acesso, das 6 às 18, conf. um Processo de Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ com taxa $\lambda = 1/20$. A prob. de cada solicitação ser prov. de uma localidade brasileira é de 3/4. Estamos interessados em.

2.a) Qual é o numero médio de solicitações no intervalo de 14 até as 16 horas?

Queremos calcular

$$E[N[14,16]].$$

mas, pela definição de um Processo de Poisson, segue que $N(14,16) \sim Poisson(2\lambda)$

Logo,

$$E[N(14,16)] = 2\lambda = 2 \cdot 20 \text{ horas}^{-1} = 40 / \text{hora}$$

2.b.)

Das solicitações feitas, a probabilidade de cada uma delas ser ~~da~~ proveniente de uma localidade brasileira é 3/4. Assim, podemos pensar no número de solicitações até o tempo t como o número de solicitações até o tempo t oriundas do Brasil mais o nº de solicitações oriundas de outros lugares, isto

$$N(t) = N_B(t) + N_O(t)$$

Como as solicitações são independentes, sabemos por resultados visto em aula que

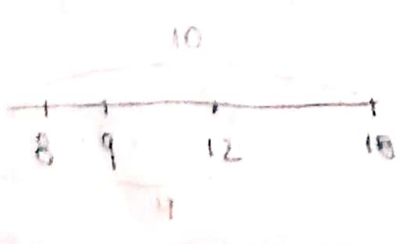
$$\left.\begin{array}{l} N_B(t) \sim PPP(3/4\,\lambda) \\ N_O(t) \sim PPP(1/4\,\lambda) \end{array}\right] \text{independentes}$$

Logo, estamos interessados em

$$P(N_B(15,17)=0) = \frac{e^{-\lambda\frac{3}{4}(17-15)}\left(2\lambda\frac{3}{4}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{3}{2}\lambda} = e^{-\frac{3}{2}20} = e^{-30}.$$

2.c.)

$$P(N(9,12)=4 / N(8,18)=10) = \binom{10}{4}\left(\frac{4}{10}\right)^4\left(\frac{6}{10}\right)^{10}$$



▸ MAE0212 - <u>Lista 06</u>

	Q_3	Q_4	Q_5	Q_{10}	
G_1	0,4	2,0	1,6	2,2	6,2
G_2	2,0	2,1	2,0	1,9	8,0
G_3	2,0	2,2	2,5	1,2	7,9
G_4	2,4	2,4	1,7	2,2	8,7
G_5	2,0	2,4	2,3	1,9	8,6
G_6	1,7	2,4	2,3	1,9	8,3

Lista 06 - MAE0312

Para entregar: 3, 4, 6 e 10

3. Nesse caso, a matriz de taxas para $(X_t)_{t\geq 0}$ é dada por

a)
$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -3/15 & 3/15 & 0 & 0 \\ 1 & 1/10 & -7/30 & 2/15 & 0 \\ 2 & 0 & 2/10 & -8/30 & 1/15 \\ 3 & 0 & 0 & 3/10 & -3/10 \end{array}$$

b) Nas cond. do enunciado, a matriz de taxas para $(Y_t)_{t\geq 0}$ é

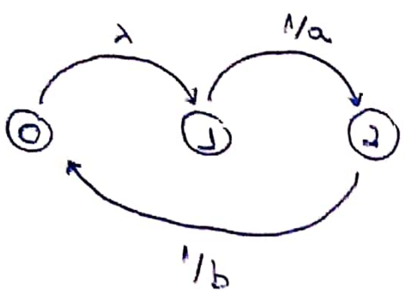
$$Q = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1/15 & 1/15 \\ 1 & 1/10 & -1/10 \end{array}$$

Como

$$(1/2 \;\; 1/2)\begin{pmatrix} -1/15 & 1/15 \\ 1/10 & -1/10 \end{pmatrix} = (1/60, -1/60) \neq (0,0),$$

$(1/2, 1/2)$ não é estacionária.

4. Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ uma C.M.T.C. em $S = \{0,1,2,3\}$, em que $\{X_t = 0\}$, $\{X_t = 1\}$, $\{X_t = 2\}$ indicam respec., que no tempo t, ninguém, o funileiro, o pintor estava ocupado. É fácil ver que



Temos que

$$\pi Q = 0 \Leftrightarrow (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \\ 1/b & 0 & -1/b \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

Uma vez que $\sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1$, segue que

$$\pi_0 = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + a + b}, \quad \pi_1 = \frac{a}{1/\lambda + a + b} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \frac{b}{1/\lambda + a + b}.$$

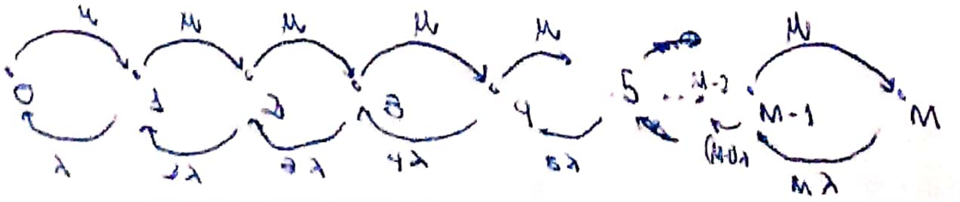
b) A prop. de interesse é dada por $\pi_1 = a \,/\, (1/\lambda + a + b)$.

6. Seja X_t o nº de máq. func. em t. $(X_t)_{t \geq 0}$ é uma C.M.T.C em $S = \{0, \dots, M\}$

com

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & M-1 & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 & & 0 & 0 \\ \lambda & -(\mu+\lambda) & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -(\mu+2\lambda) & \mu \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M\lambda & -M\lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

Pictorialmente,



Seja $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_M)$ uma med. de prob. em $S = \{0, \dots, M\}$, Estacionária.

Sabemos que

$$\pi Q = 0 \quad \text{e que} \quad \sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1.$$

Daí,

1. $\pi_0 \mu = \pi_1 \lambda \Rightarrow \pi_1 = (\mu/\lambda)\pi_0$

2. $2\lambda \pi_2 = -\mu\pi_0 + (\mu+\lambda)\pi_1 = -\cancel{\mu\pi_0} + \frac{\mu^2}{\lambda}\pi_0 + \cancel{\mu\pi_0} = \frac{\mu^2}{\lambda}\pi_0$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2 2}\pi_0$$

3. $\pi_3 3\lambda = -\mu\pi_1 + (\mu+2\lambda)\pi_2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}\pi_0 + \frac{\mu^3}{2\lambda^2}\pi_0 - \frac{\mu^2}{\lambda}\pi_0$

$$\Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu^3}{3!\,\lambda^3}\pi_0$$

$\vdots$

- $k \Rightarrow \pi_k = \frac{\mu^k}{k!\,\lambda^k}\pi_0$

- $\sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{M} \frac{\mu^i}{\lambda^i i!}\pi_0 = 1 \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{M} \frac{\mu^i}{\lambda^i i!}}$

$\therefore$

$$\pi_k = \frac{\mu^k / \lambda^k k!}{\sum_{i=0}^{M} \frac{\mu^i}{\lambda^i i!}}$$

Assim, no reg. estacionário, o nº médio de máq func. é dado por

$$\sum_{k=0}^{M} k \cdot \pi_k = \sum_{k=0}^{M} \frac{k \, (\lambda/\mu)^k \, 1/k!}{\sum_{i=0}^{M} (\lambda/\mu)^i \frac{1}{i!}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=0}^{M} (\lambda/\mu)^i \, 1/i!} \; (\lambda/\mu) \underbrace{\sum_{k=1}^{M} (\lambda/\mu)^{k-1} \, 1/(k-1)!}_{\sum_{l=0}^{M-1} (\lambda/\mu)^{l} \, 1/l!}$$

$$= \frac{\rho}{\sum_{i=0}^{M} \rho^i/i!} \cdot \sum_{l=0}^{M-1} \rho^l / l!$$

$$= \rho - \frac{\rho \times \rho^M/M!}{\sum_{i=0}^{M} \rho^i/i!} = \rho\left(1 - \frac{\rho^M}{M! \sum_{i=0}^{M} \rho^i/i!}\right)$$

b) A prop de interesse é dada por

$$\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{\sum_{i=0}^{M} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!} .$$

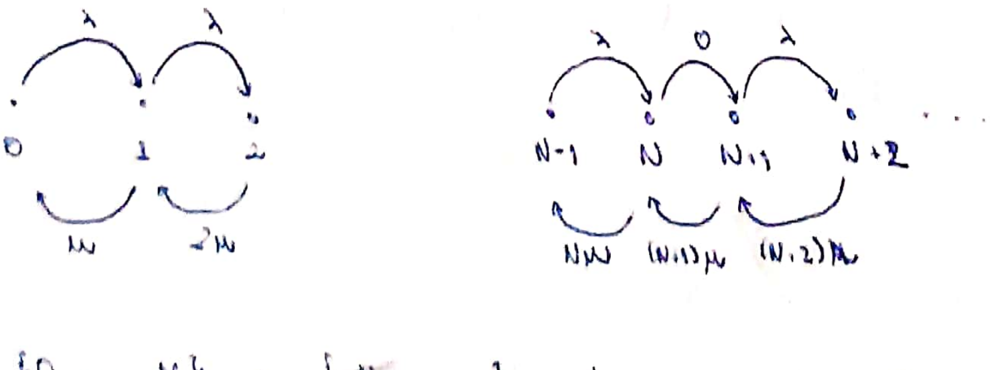
⌈ Na vdd, seja M_1 o ev. a máq 1 estar f

$$P(M_1) = \sum_{i=0}^{M} P(M_1 \mid \;) \, \pi(n)$$

$$= \sum_{i=0}^{M} \frac{n}{M} \pi(n) = \ldots$$

⌋

10.



a) $\{0, \ldots, N\}$ e $\{N+1, \ldots\}$. A primeira classe é recorr. pos. e a seg. transiente

b) A med. dada est. é dada pela med das restritas à subclasse rec. positiva, i.e.,

$$\pi = (\pi_0, \dots, \pi_N, 0, 0, \dots)$$

em que

$$\pi_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \pi_0 \quad , \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

e

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}}$$

- Os 3 prisioneiros

Para a solução desse problema, considere os seguintes eventos.

E_i: o prisioneiro "i" é executado, $i \in \{A, B, C\}$

S_j: o prisioneiro A fica sabendo pelo carcereiro que o prisioneiro j não será executado, $j \in \{B, C\}$

Note que

$$P(E_A | S_B) = \frac{P(E_A \cap S_B)}{P(S_B)}$$

$$= \frac{P(E_A)P(S_B/E_A)}{P(E_A)P(S_B/E_A) + P(E_B)P(S_B|E_B) + P(E_C)P(S_B|E_C)}$$

$$= \frac{1/3 \times 1/2}{1/3 \times 1/2 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1} = \frac{1/3 \times 1/2}{1/3\,(3/2)} = \frac{1}{3}.$$

De modo análogo, segue que $P(E_A | S_C) = P(E_A) = 1/3$. Logo, o prisioneiro A está correto.

- Embaralhamento

Supondo que o método de embaralhar seja eficaz, isto é, cada uma das permutações de 1, 2, 3, ..., 52 tenham a mesma probabilidade de ocorrência, podemos modelar o problema da seguinte modo.

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_{52});\ a_n \in \{1, \ldots, 52\},\ a_i \neq a_j,\ i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, 52\}\}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

∘ $\mathbb{P}$ em $(\Omega, \mathcal{F})$ t.q.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{(52)!}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Nessas condições seja A o evento de interesse, i.e.,

$$A = \{(c_1, \dots, c_{52}) \in \Omega : c_i \neq i, \; i \in \{1, \dots, 52\}\}$$

Note que A é composto pelas permutações caóticas de $1, 2, \dots, 52$. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, segue que

$$|A| = 52!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{52!}\right)$$

Daí,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{52!} = 0{,}36787944117144245$$

$$\approx e^{-1}.$$

Obs. Supondo n o nº de cartas, $\mathbb{P}(A) \to e^{-1}$ qdo $n \uparrow \infty$.

▸ $N = \min\{n : X_1 + \dots + X_n > 1\}$

Basta ver que, para $n > 0$,

$$\mathbb{P}(N > n) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq 1) \overset{(*)}{=} \frac{1}{n!}$$

Daí, para $n > 0$,

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N > n-1) - \mathbb{P}(N > n) = 1/(n-1)! - 1/n! = (n-1)/n!$$

Assim,

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = e,$$

Isto é, o nº médio de unif. ind. que devem ser somados até o ultrapasse de 1 é igual à e.

★ Suponha $X_1, \dots, X_n$ uniformes em $[0,1]$ independentes. Para $0 \leq x \leq 1$,

$$F_n(x) := \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Prova: Obviamente vale para $k = 1$. Suponha válido para $k = n-1$, i.e.,

$$F_{n-1}(x) = x^{n-1} / (n-1)!, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n,$$

para $0 \leq x \leq 1$, segue que

$$F_n(x) \overset{*}{=} \int_0^x F_{n-1}(x-y) f_{X_n}(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left[-\frac{(x-y)^n}{n} \right] \Big|_0^x$$

$$= \frac{x^n - (x-x)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}.$$

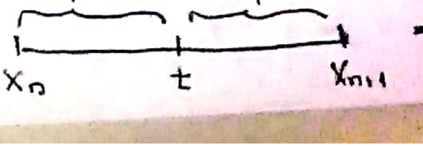
$$* \; F_n(x) = \int_0^1 \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x, X_n = y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x / X_n = y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n-1} \leq x-y)\, dy$$

$$= \int_0^x \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n-1} \leq x-y)\, dy$$

Obs.: Paradoxo da Inspeção



- Ruína do jogador

Se X_n é a grana do jogador depois da n-ésima aposta, então $(X_n)_{n\geq 1}$ é um C.M. em $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ com prob. de trans.

$$p_{00} = p_{NN} = 1 \quad , \; p_{i,i+1} = p \;\; e \;\; p_{i,i-1} = q \; . \; e \; p_{ij} = 0 \text{ para } |i-j| > 1$$

Esta cadeia possui 3 classes. $\underset{r.p.}{\{0\}}$. $\underset{trans.}{\{1, \dots, N-1\}}$ $\underset{r.p}{\{N\}}$

Seja

$$P_i = P\{\exists n : X_n = N \mid X_0 = i\}$$

Condicionando no res. da primeira jogada,

$$P_i = p P_{i+1} + q P_{i-1} \, , \; i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Reescrevemos isso de outra forma, usando o fato de que $p+q=1$

$$(p+q) P_i = p P_{i+1} + q P_{i-1} \Rightarrow P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p} (P_i - P_{i-1}) \, , \; i = 1, \dots, N-1$$

Como $P_0 = 0$,

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p} (P_1 - P_0) = \frac{q}{p} P_1$$

$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p} (P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$

$$\vdots$$

$$P_N - P_{N-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1 \qquad , \; i = 1, \dots, N$$

Daí,

$$P_i - P_1 = P_1 \left[\left(q/p\right) + \left(q/p\right)^2 + \dots + \left(q/p\right)^{i-1} \right]$$

ou

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)} P_1 & , \text{ se } q/p \neq 1 \\ i P_1 & , \text{ se } q/p = 1 \end{cases}$$

Usando $P_N = 1$, obtemos

$$P_1 = \begin{cases} (1-(q/p))/(1-(q/p)^N) & , \text{ se } p \neq 1/2 \\ 1/N & , \text{ se } p = 1/2 \end{cases}$$

$\therefore$

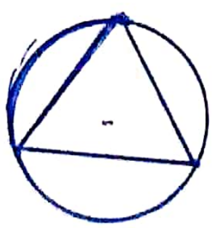
$$P_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & , \text{ se } p \neq 1/2 \\ \dfrac{i}{N} & , \text{ se } p = 1/2 \end{cases}$$

Notamos que se $N \uparrow +\infty$,

$$P_i \to \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^i & , \text{ se } p > 1/2 \\ 0 & , \text{ se } p \leq 1/2 \end{cases}$$

▸ Paradoxo de Bertrand (Magalhães, pg. 13)

Dado um círculo de raio 1 e um triângulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ inscrito no mesmo, qual a prob. de sel. um segmento com comp. maior que $\sqrt{3}$



Há algumas formas de interpretação. Dependendo da escolhida, seguem respostas distintas. ∎

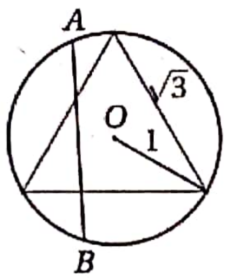
Notas de aula

Jair Donadelli

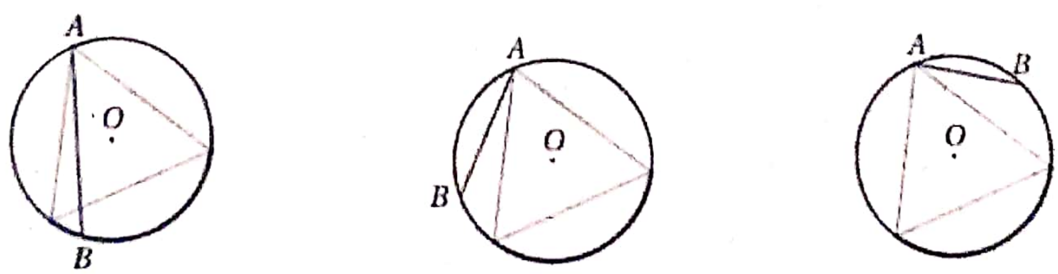
Paradoxo de Bertrand

Publicado em **08/10/2014**

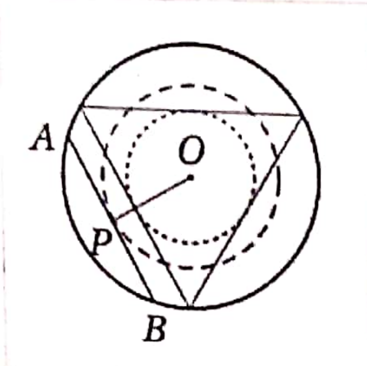
O seguinte problema, conhecido como Paradoxo de Bertrand, que a rigor não é um paradoxo, é passível de mais de uma interpretação. Numa circunferência de raio 1, um triângulo equilátero inscrito tem lado $\sqrt{3}$. Qual é a probabilidade de que uma corda AB escolhida ao acaso tem comprimento maior que $\sqrt{3}$?



1ª interpretação: a escolha da corda é por tomarmos A e B escolhidos aleatoriamente dentre os pontos da circunferência. Imaginemos o triângulo rotacionado de modo que um de seus vértices coincida, s.p.g., com o ponto A. A corda tem comprimento maior que o lado do triângulo se B está no arco da circunferência entre os dois outros vértices do triângulo, o que ocorre com probabilidade $1/3$.

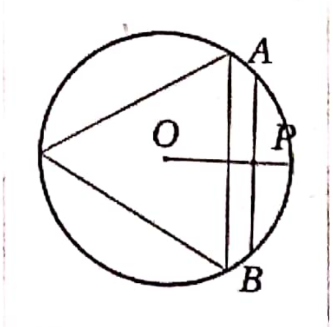


2ª interpretação: a escolha da corda é por tomarmos P no interior da circunferência aleatoriamente e AB é a corda cujo ponto médio é P.



A corda é maior que o lado do triângulo se P está no interior da circunferência de centro O e raio $1/2$, o que ocorre com probabilidade $1/4$.

3ª interpretação: Fixamos um raio. A corda é obtida escolhendo um ponto P aleatoriamente no raio e tomando a corda que passa por P perpendicular ao raio.



A corda é maior do que um lado do triângulo, se o ponto escolhido está mais próximo do centro do círculo, que o ponto onde o lado do triângulo intersecta o raio, logo se $|OP| \in (0, 1/2)$ o que ocorre com probabilidade $1/2$.

2. Bertrand's Paradox

Preliminaries

Statement of the Problem

Bertrand's problem is to find the probability that a "random chord" on a circle will be longer than the length of a side of the inscribed equilateral triangle. The problem is named after the French mathematician Joseph Louis Bertrand, who studied the problem in 1889.

It turns out, as we will see, that there are (at least) three answers to Bertrand's problem, depending on how one interprets the phrase "random chord". The lack of a unique answer was considered a paradox at the time, because it was assumed (naively, in hindsight) that there should be a single *natural* answer.

1. Run Bertrand's experiment 100 times for each of the following models. Do not be concerned with the exact meaning of the models, but see if you can detect a difference in the behavior of the outcomes

   a. Uniform distance
   b. Uniform angle
   c. Uniform endpoint

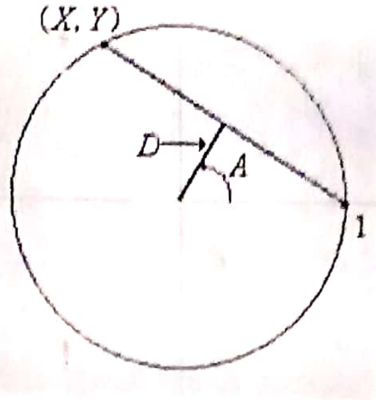
Mathematical Formulation

To formulate the problem mathematically, let us take $(0,0)$ as the center of the circle and take the radius of the circle to be 1. These assumptions entail no loss of generality because they amount to measuring distances relative to the center of the circle, and taking the radius of the circle as the unit of length. Now consider a chord on the circle. By rotating the circle, we can assume that one point of the chord is $(1,0)$ and the other point is (X,Y) where $Y>0$ and $X^2+Y^2=1$.

2. With these assumptions, the chord is completely specified by giving any one of the following variables

   a. The (perpendicular) distance D from the center of the circle to the midpoint of the chord. Note that $0 \le D \le 1$.
   b. The angle A between the x-axis and the line from the center of the circle to the midpoint of the chord. Note that $0 \le A \le \pi/2$.
   c. The horizontal coordinate X. Note that $-1 \le X \le 1$.

A chord in the circle



3. The variables are related as follows:

a. $D = \cos(A)$
b. $X = 2D^2 - 1$
c. $Y = 2D\sqrt{1 - D^2}$

4. The inverse relations are given below. Note again that there are one-to-one correspondences between X, A, and D.

a. $A = \arccos(D)$
b. $D = \sqrt{\frac{1}{2}(x + 1)}$
c. $D = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - y^2}}$

If the chord is generated in a probabilistic way, D, A, X, and Y become random variables. In light of the previous results, specifying the distribution of any of the variables D, A, or X completely determines the distribution of all four variables.

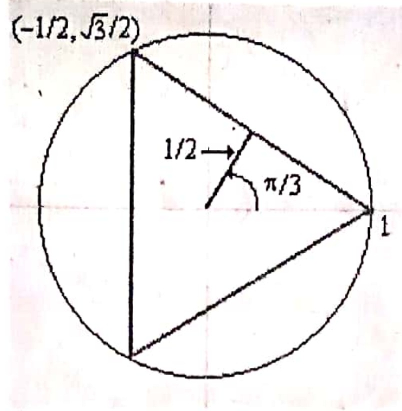
5. The angle A is also the angle between the chord and the tangent line to the circle at $(1, 0)$.

Now consider the equilateral triangle inscribed in the circle so that one of the vertices is $(1, 0)$. Consider the chord defined by the upper side of the triangle.

6. For this chord, the angle, distance, and coordinate variables are given as follows:

a. $a = \pi/3$
b. $d = 1/2$
c. $x = -1/2$
d. $y = \sqrt{3}/2$

The inscribed equilateral triangle



Now suppose that a chord is chosen in probabilistic way.

7. The length of the chord is greater than the length of a side of the inscribed equilateral triangle if and only if the following equivalent conditions occur:

a. $0 < D < 1/2$
b. $\pi/3 < A < \pi/2$
c. $-1 < X < -1/2$

Models

When an object is generated "at random", a sequence of "natural" variables that determines the object should be given an appropriate uniform distribution. The coordinates of the coin center are such a sequence in Buffon's coin experiment; the angle and distance variables are such a sequence in Buffon's needle experiment. The crux of Bertrand's paradox is the fact that the distance D, the angle A, and the coordinate X each seems to be a natural variable that determine the chord, but different models are obtained, depending on which is given the uniform distribution.

The Model with Uniform Distance

Suppose that D is uniformly distributed on the interval $[0, 1]$.

8. The solution of Bertrand's problem is

$$\mathbb{P}\left(D < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

9. In Bertrand's experiment, select the uniform distance model. Run the experiment 1000 times and compare the relative frequency function of the chord event to the true probability.

10. The angle A has probability density function

$$g(a) = \sin(a), \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

▼ *Proof:*
This follows from the standard the change of variables formula.

11. The coordinate X has probability density function

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{8(x+1)}}, \quad -1 < x < 1$$

▼ *Proof:*

This follows from the standard the change of variables formula.

Note that A and X do not have uniform distributions. Recall that a *random number* is a simulation of a variable with the standard uniform distribution, that is the continuous uniform distribution on the interval $[0, 1)$.

12. Show how to simulate D, A, X, and Y using a random number.

▼ *Answer:*

$A = \arccos(D)$, $X = 2D^2 - 1$, $Y = 2D\sqrt{1 - D^2}$, where D is a random number

The Model with Uniform Angle

Suppose that A is uniformly distributed on the interval $(0, \pi/2)$.

13. The solution of Bertrand's problem is

$$\mathbb{P}\left(A > \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

14. In Bertrand's experiment, select the uniform angle model. Run the experiment 1000 times and compare the relative frequency function of the chord event to the true probability.

15. The distance D has probability density function

$$f(d) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - d^2}}, \quad 0 < d < 1$$

▼ *Proof:*

This follows from the standard change of variables formula.

16. The coordinate X has probability density function

$$h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

▼ *Proof:*

This follows from the change of variables formula.

Note that D and X do not have uniform distributions.

17. Show how to simulate D, A, X, and Y using a random number.

▼ *Answer:*

$A = \frac{\pi}{2}U$, $D = \cos(A)$, $X = 2D^2 - 1$, $Y = 2D\sqrt{1 - D^2}$, where U is a random number.

The Model with Uniform Endpoint

Suppose that X is uniformly distributed on the interval $(-1, 1)$.

18. The solution of Bertrand's problem is

$$\mathbb{P}\left(-1 < X < -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

19. In Bertrand's experiment, select the uniform endpoint model. Run the experiment 1000 times and compare the relative frequency function of the chord event to the true probability.

20. The distance D has probability density function

$$f(d) = 2d, \quad 0 < d < 1$$

▼ *Proof:*
This follows from the change of variables formula.

21. The angle A has probability density function

$$g(a) = 2\sin(a)\cos(a), \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

▼ *Proof:*
This follows from the change of variables formula.

Note that D and A do not have uniform distributions; in fact, D has a beta distribution with left parameter 2 and right parameter 1.

Physical Experiments

22. Suppose that a random chord is generated by tossing a coin of radius 1 on a table ruled with parallel lines that are distance 2 apart. Which of the models (if any) would apply to this physical experiment?

▼ *Answer:*
Uniform distance

23. Suppose that a needle is attached to the edge of disk of radius 1. A random chord is generated by spinning the needle. Which of the models (if any) would apply to this physical experiment?

▼ *Answer:*
Uniform angle

24. Suppose that a thin trough is constructed on the edge of a disk of radius 1. Rolling a ball in the trough generates a random point on the circle, so a random chord is generated by rolling the ball twice. Which of the models (if any) would apply to this physical experiment?

▼ *Answer:*

Uniform angle