S T Q Q S S D

04/03/2009

Séries e equações diferenciais

1. Sequências Numéricas

Def: Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \to a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Notação: a_n (a índice n): usada para indicar o valor que a sequência assume no nº natural n; usaremos a_n como termo geral da sequência.

EXEMPLOS:

1) Seja $a_n = 2^n$. A seguir, temos alguns termos da sequência.

$(2^0, 2^1, 2^2, \ldots)$ ou $(1, 2, 4, \ldots)$

A medida que n aumenta, 2^n também aumenta.

2. Seja $a_n = 10^n + 1$. Alguns termos da sequência são:

$(2, 11, 101, \ldots)$

3. Consideremos a sequência de termo geral

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} t^k, \quad t \neq 0 \text{ e } t \neq 1$$

Mostraremos que $S_n = \dfrac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$

$(t^0, t^0+t^1, \ldots, t^0+t^1+\ldots+t^n, \ldots)$

Resolução

$S_n = 1+t+t^2+\ldots+t^n \quad (\cdot t)$ ①

$tS_n = t+t^2+t^3+\ldots+t^{n+1}$ ②

① - ② $\Leftrightarrow (1-t)S_n = 1-t^{n+1} \Leftrightarrow$

$S_n = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$ // (S. P.G)

Obs: S_n é a soma dos termos da P.G $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$.

Def: Sejam a_n o termo geral de uma sequência e $a \in \mathbb{R}$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a_n$ é convergente

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow a_n$ é divergente,

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow a_n$ é divergente.

Exemplo

4 - Seja a sequência $a_n = \frac{n^2+3n-1}{2n^2+5}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+3/n-1/n^2)}{\cancel{n^2}(2+5/n^2)}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}\right)}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Relembrando

→ sequência

$f(n) = a_n$

$D = \mathbb{N}$

$I = \mathbb{R}$

Def: Dizemos que a sequência a_n é monótona crescente se, $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

$$m < n \Rightarrow a_m \leq a_n$$

Ex: $(2, 4, 6, 8, \ldots)$

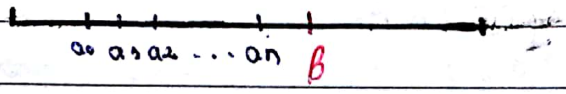
Se: $m < n \Rightarrow a_m \geq a_n$, então a_n é monótona decrescente.

Ex: $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$

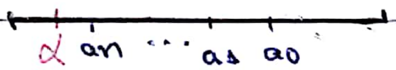
→ constante : (2, 2, 2, ...)

→ alternada: $f(n) = (-1)^n \cdot n$ $(-1, 2, -3, ...)$

A sequência a_n é limitada superiormente se existir $\beta \in \mathbb{R} / \forall n, a_n \leq \beta$.



Dizemos que a_n é limitada inferiormente se existir $\alpha \in \mathbb{R} / \forall n, a_n \geq \alpha$



Dizemos que a_n é limitada se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R} / \forall n, \alpha \leq a_n \leq \beta$.

Obs: a_n é limitada $\Leftrightarrow$ é limitada superiormente e inferiormente.

Teorema 1: Seja a_n uma sequência crescente.

a) Se a_n for limitada superiormente, então a_n será convergente

b) Se a_n não for limitada superiormente, então a_n será divergente para $+\infty$.

S T Q Q S S D

/ /

Teorema 2. Seja a_n uma sequência decrescente

a) se a_n for limitada inferiormente, então a_n será convergente.

b) se a_n for limitada inferiormente, então a_n será divergente p/ $-\infty$.

Exemplos:

1. A seq. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ é convergente ou divergente? Justifique.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$

$S_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$

$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Podemos perceber que p/ $m < n$, teremos $S_m \leq S_n$, pois

$$S_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

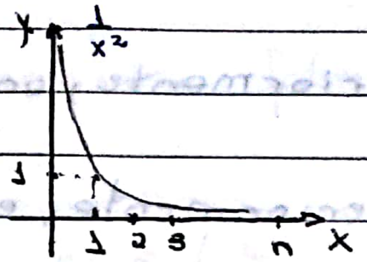
Logo, S_n é uma sequência crescente.

Agora vamos provar que S_n é limitada superior

Sulamericana

Scanned by CamScanner

mente.



Temos:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx$$

Mas

$$\int_1^m \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^n x^{-2} = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^n = -\frac{1}{x}\Big|_1^n =$$

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{n}$$

$\therefore$ $S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$

$S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

Quando $n \to \infty$

$S_n \leq 2$

Como Sn é crescente e limitada superior-

S T Q Q S S D

/ /

mente por 2, segue que S_n é convergente.

2 - A seq. $a_n = \frac{1}{n}$ é convergente ou divergente? Justifique.

$a_1 = 1$
$a_2 = 1/2$
$\vdots$
$a_3 = 1/n$

Como vemos
$a_n < a_{n-1}$

Logo, a sequência é decrescente.

Basta saber apenas se ela é limitada inferiormente

Para isso fazemos
$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Logo, S_n é decrescente e limitada inferiormente, logo, converge.

3 - A seq. $a_n = n$ é convergente ou divergente? Justifique

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$ $\Rightarrow$ $a_2 > a_1$ $\Rightarrow$ $a_n > a_{n-1}$
$a_n = n$

/ /

Logo, Sn é crescente.

Basta agora saber se an é limitada superiormente.

Percebemos que $a_n = n$. Como n aumenta an também aumentára na mesma quantia.

∴

an é divergente para $+\infty$.

Solução pela professora

2)

$a_1 = 1$

$a_2 = 1/2$ Seja $m < n$ $(m,n > 0)$

$a_3 = 1/3$

⋮ Objetivo: $a_m > a_n$

$a_n = 1/n$

$$a_m = \frac{1}{m} \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

$$m < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \Rightarrow a_n < a_m \Rightarrow a_m > a_n$$

Logo, an é decréscente.

Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Assim, $a_n > 0$, $\forall n$, ou seja, 0 é o limite inferior

Sulamericana

Scanned by CamScanner

S T Q Q S S D

/ /

da sequência $1/n$.

Portanto, como a_n é decrescente e limitada inferiormente, segue que a_n é convergente.

Obs: a seq. a_n é limitada $(0 \leq a_n \leq 1)$

Séries Numéricas

Def: Sejam a_n uma sequência numérica. A sequência de termo geral

$$S_n = \sum_{k=q}^{n} a_k \quad , \; n \geq q \qquad (1)$$

é chamada de série numérica associada à sequência a_n. Os números a_n, $n \geq q$, são os termos da série; a_n é o termo geral da série.

(1): soma parcial de ordem n da série $(S_1, S_2, \dots)$

O limite da série, quando existe (finito ou infinito), denomina-se soma da série e é indicado por

$$\sum_{k=q}^{\infty} a_k \quad . \quad \text{Assim}$$

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=q}^{n} a_k$$

Se a soma for finita, dizemos que a série é convergente; se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, dizemos que a série é divergente.

Usaremos o símbolo $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ para representar a própria série (entendo que se trata da série cuja soma parcial de ordem n é $S_n = \sum_{k=q}^{n} a_k, n \geq q$).

Exemplos:

1- (Série geométrica): Mostre que, para $0 < |r| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

Resolução

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n$$

$$= \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-r} \right) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^{n+1}}{1-r} \right)$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-r} - 0 = \frac{1}{1-r} \quad //$$

∴

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

2 - Consideremos a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Verifique se esta série é convergente ou divergente.

$$S_n = 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \dots + 1/\sqrt{n}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim S_n.$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

∴ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ é divergente.

/ /

S T Q Q S S D

18/03/2009

Exemplo: Seja a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Verifique se esta série converge ou diverge.

Resolução:

Observamos que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{(k+1)} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} = \frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-A=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Então

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$S_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$S_n = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ é convergente e sua soma é 1.

Esta série é chamada de série telescópica.
Séries telescópicas são séries cujo termo a_n se pode escrever na forma $b_k - b_{k+j}$, com $j \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{k(k+1)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+j}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Exemplo: (Série harmônica). Consideremos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

a) Se $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente;

b) Se $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty \Rightarrow$ casa.

/ /

S T Q Q S S D

Resolução.

a) Seja $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}}$

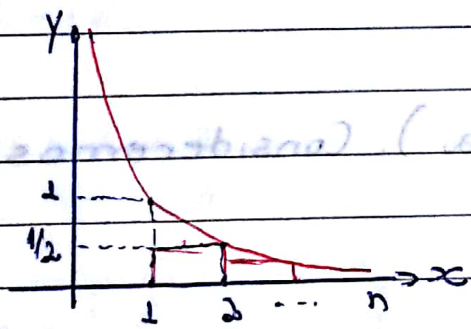
$\vdots$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}}$

Observemos que S_n é uma sequência crescente, pois para $m \leq n$, $S_m \leq S_n$.

Além disso, S_n é limitada superiormente, pois

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \quad (1)$$



$$\int_1^n \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} =$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

S T Q Q S S D

Substituindo em I temos:

$$1+\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 1 - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

$\therefore$ S_n é convergente $\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$, $\alpha > 1$ então $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente.

Propriedades

a) Seja $\beta \in \mathbb{R}$. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente então $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta . a_k$ será convergente e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta a_k = \beta \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

b) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ forem convergentes, então $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ será convergente e $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

EXEMPLO:

Verifique se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)(k+6)}$$ converge

Resolução.

Observemos que

Sulamericana

Scanned by CamScanner

/ /

S T Q Q S S D

$$\frac{1}{K(K+3)(K+6)} = \frac{A}{K} + \frac{B}{K+3} + \frac{C}{K+6}$$

$$1 = A(K+3)(K+6) + B\,K(K+6) + C\,K(K+3)$$

Se $K = 0$

$$1 = 18A$$

$$A = \frac{1}{18}$$

Se $K = -3$

$$1 = -9B$$

$$B = -\frac{1}{9}$$

Se $K = -6$

$$1 = 18C$$

$$C = \frac{1}{18}$$

Logo

$$\frac{1}{K(K+3)(K+6)} = \frac{1}{18K} - \frac{2}{18(K+3)} + \frac{1}{18(K+6)}$$

Outra forma (Mais correta)

$$0K^2 + 0K + 1 = A(K^2 + 9K + 18) + B(K^2 + 6K) + C(K^2 + 3K)$$

$$0K^2 + 0K + 1 = K^2(A + B + C) + K(9A + 6B + 3C) + 18A$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 9A + 6B + 3C = 0 \\ 18A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B + C = -1/18 & (-3) \\ 6B + 3C = -9/18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3B - 3C = 3/18 \\ 6B + 3C = -9/18 \end{cases}$$

$$3B = -6/18 \qquad B + C = -\frac{1}{18}$$

$$B = \frac{-6}{18 \cdot 3} \qquad C = -\frac{1}{18} + \frac{2}{18}$$

$$B = -\frac{2}{18} \qquad C = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{k(k+3)(k+6)} = \frac{1}{18k} - \frac{2}{18(k+3)} + \frac{1}{18(k+6)}$$

$$= \frac{1}{18}\underbrace{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)}_{1} - \frac{1}{18}\underbrace{\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6}\right)}_{2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$ e $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6}\right)$ são séries telescópicas.

Vamos analisar 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$S_1 = 1 - \frac{1}{4}$

$S_2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

$S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$

$S_5 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$

$\vdots$

$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$

Logo

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ //

S T Q Q S S D   / /

Vamos analisar (2):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6} \right)$$

$$S_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$$

$$S_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$$

$$S_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10}$$

$\vdots$

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}$$

Logo

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)(k+6)} = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6} \right)$$

$$= \frac{1}{18} \left(\frac{11}{6} \right) - \frac{1}{18} \left(\frac{37}{60} \right)$$

/ /

$= \dfrac{73}{1080}$ //

é uma série convergente.

25/03/2008

Séries Alternadas

Def: Uma série diz-se alternada se os seus termos são alternadamente positivos e negativos.

Supondo que o primeiro termo da série é positivo, podemos escrevê-la na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad , \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

TEOREMA 1 (Critério de Leibnitz). Se a_n é uma sequência decrescente de termos positivos e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ é convergente.

Exemplo: Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (série harmônica alternada).

Verifique se esta série é convergente.

Resolução

Observamos que a sequência geral $a_n = 1/n$

S T Q Q S S D

/ /

é decrescente, pois

$$m < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow a_n < a_m$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Logo, pelo critério de Leibnitz a série

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente.

EXEMPLO: Verifique se a série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)}{\sqrt{n}}\right)$ é convergente ou divergente

Resolução

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)}{\sqrt{n}}.$$

Sulamericana

/ /

S T Q Q S S D

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \approx 2$

Como an não é ~~dec~~ decrescente

Como an não é decrescente pelo ~~crit~~ critério de Leibnitz nada podemos concluir

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} , \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) =$$

S/E

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{\sqrt{n}}}_{①} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{②}$$

S T Q Q S S D

/ /

Vamos analisar ①

seja $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$b_1 = 1$

$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7\ldots$

$b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57\ldots$

Vamos provar que b_n é decrescente. De fato, para $m < n$, temos:

$m < n \Leftrightarrow \sqrt{m} < \sqrt{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow b_n < b_m$

$\therefore m < n \Rightarrow b_n < b_m$

$\therefore$ A seq. de termo geral b_n é decrescente

Além disso,

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pelo critério de Leibnitz, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

é convergente.

Vamos analisar a série ②.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série harmônica.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. (exemplo da última aula).

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

é divergente, pois é a soma de uma série convergente com uma divergente.

Critério para Convergência e divergência

Teorema: Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for ~~convergente~~ convergente, então

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Critério do termo geral para divergência.

Seja a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Se

$\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$ ou se $\lim_{k \to \infty} a_k$ não existir, então a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será divergente.

S T Q Q S S D   / /

Exemplo. A série

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{k^2+3}$ é convergente ou divergente? Justifique.

$\lim_{n\to\infty} \frac{k^2}{k^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+3/k^2} = 1$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{k^2}{k^2+3} \neq 0$, pelo critério de divergência segue que a série analisada é divergente e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3} = +\infty$.

Obs: Toda $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ convergente acarreta que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mas nem toda a_n / $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ~~não~~ faz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergir.

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Critérios de convergência para séries de termos positivos.

Critério da razão: Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, onde $a_k > 0$. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ exista, finito

/ /

S T Q Q S S D

ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Então,

a) $L < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.

b) $L > 1$ ou $L = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é divergente;

c) se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo:

A série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente ou divergente?

Justifique.

$$a_k = \frac{2^k}{k!}$$

$$a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = \underline{0 < 1}.$$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente de acordo com o critério da razão.

Critério da raiz: Seja a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, com $a_k > 0$. Suponhamos que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Então:

a) $L < 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.

b) $L > 1$ ou $L = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é divergente;

c) Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: A série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é convergente ou divergente? Justifique:

$a_k = \frac{k^3}{3^k}$ $\quad \sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{\sqrt[k]{k^3}}{\sqrt[k]{3^k}} = \frac{\sqrt[k]{k^3}}{3}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k^3}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} k^{3/k} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} e^{3\frac{\ln k}{k}}$

$= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ ///

/ /

Do critério da raiz segue que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é convergente.

01/04/08

Trabalho (valendo 2 pontos) P1 - 8,0

Título: Outros critérios de convergência e divergência para séries de termos positivos.

→ Critério da Integral
→ " da Comparação
→ " do Limite
→ " de Comparação de razões

→ Apresentar o enunciado e pelo menos 2 exemplos de cada.

29/04 - prova e entrega do trabalho.

Séries absolutamente convergentes. Critério da razão da raiz para séries de termos quaisquer.

Def: Dizemos que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ é absolutamente convergente se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ for convergente.

S T Q Q S S D

/ /

Exemplos:

1- Verifique se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é absolutamente convergente.

Observemos que:

$$|a_k| = \left|\frac{k^3}{3^k}\right| = \frac{k^3}{3^k} = a_k$$

Para verificar se $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k^3}{3^k}\right|$ é convergente, vamos usar o critério da razão

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}}{\frac{k^3}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{3k^3} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+3k^2+3k+1}{k^3}$$

$$\frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k^3\left(1+3/k+3/k^2+1/k^3\right)}{k^3}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \,//$$

Logo, $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{k^3}{3^k}\right|$ é convergente.

/ /

S T Q Q S S D

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ é absolutamente convergente.

2. Verifique se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é absolutamente convergente.

Resolução:

Para verificar se $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é absolutamente convergente, vamos analisar se

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right|$ é convergente

Mas

$$\left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente.

Logo, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ não é absolutamente convergente.

Observemos que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ é convergente (critério de Leibnitz), mas não é absolutamente convergente.

Uma série que é convergente, mas não é absolutamente convergente, é chamada de condicionalmente convergente.

Logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é condicionalmente convergente.

TEOREMA: Se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ for convergente, então $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ também será convergente.

Obs: A recíproca deste teorema não é válida, pois a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é convergente mas não é absolutamente convergente.

Critério da razão para séries de termos quaisquer:

Seja a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ com $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que

$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ exista, finito ou infinito.

Seja

$$L = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \text{Então:}$$

a) Se $L < 1$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ será convergente,

b) Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ será divergente.

c) Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: Determine x para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ seja convergente.

Resolução

Para $x = 0$, a soma da série é 0, e então a série é convergente.

Para $x \neq 0$, pelo critério da razão, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)\, x^{n+1}}{n\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot x \right| =$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot |x| = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = |x|$$

Para $|x| < 1$, a série é convergente.
Para $|x| > 1$, a série é divergente.
Para $|x| = 1$

- $x = 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} n = +\infty$ Obs: (Critério do termo geral p/ a divergência)

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

Neste caso, a série é divergente

- $x = -1$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n n$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$ não existe.

Neste caso, a série também é divergente.

Logo, a série

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ é convergente p/ $|x| < 1$.

Critério da raiz para séries de termos quaisquer:

Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Suponha que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ exista, finito ou infinito.

/ /

S T Q Q S S D

Seja $L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Então

a) se $L < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty}$ é convergente.

b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série é divergente.

c) se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo: Determine x para que seja convergente a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Resolução

Para $x = 0$, a soma da série é 0. Logo, a série é convergente.

Para $x \neq 0$, pelo critério da raiz, temos:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|x^k|}{|k|}} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{|x|^k}{k}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{|k|^{1/k}} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{1/k}}$$

$= |x| \cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} k^{1/k}} \Big\} I$

I

$\lim\limits_{k\to\infty} k^{1/k} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln k^{1/k}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{\ln k}{k}} = 1$

Voltando

$= |x| \cdot \dfrac{1}{1} = |x|$,,

Para $|x| < 1$, a série é convergente

Para $|x| > 1$, a série é divergente.

Para $|x| = 1$:

- $x = 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ é divergente.

$x = -1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \dfrac{1}{k}$ é convergente (pelo critério de Leibnitz)

Sulamericana

/ /

Logo $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ é convergente para $|x| \leq 1$ e $x = -1$

07/04

Série de Potências

Def: Seja a_n, $n \geq 0$, uma sequência numérica e $x_0 \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ recebe o nome de série de potências, com coeficientes a_n, em volta de x_0 (ou centrada x_0). Se $x_0 = 0$, temos a série de potências em volta de 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Exemplo: Nas séries abaixo, identifique a_n e x_0:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad x_0 = 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} (x-2)^n$ $\quad a_n = \frac{n+2}{3^n}$ $\quad x_0 = 2$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n (n+1)}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n}{3^n (n+1)}$ $\quad x_0 = 0$

Uma série de potências pode ser encarada como uma função na variável x. Segundo essa interpretação, o conjunto de valores de x para os quais a série é convergente representa o domínio dessa função. Esse conjunto é também chamado de intervalo de convergência.

Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, existem 3 possibilidades:

a) a série converge apenas para $x = x_0$;

b) a série converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) Existe um $R > 0$ tal que a série converge absolutamente $\forall x$ tal que $|x - x_0| < R$ e diverge $\forall x$ tal que $|x - x_0| > R$. R é o raio de convergência e $]x_0 - R, x_0 + R[$ é o intervalo de convergência. Nos extremos $x_0 - R$ e $x_0 + R$ a série poderá convergir ou não.

Obs: O raio de convergência da série é dado por

$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, desde que esse limite exista, finito ou infinito.

Exemplos:

Determine o intervalo de convergência das séries:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

c)

Resolução:

a) $a_n = \frac{1}{n!}$ $\quad x_0 = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty$$

Como $R = +\infty$, o intervalo de convergência é $]-\infty, +\infty[$, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Então o domínio da função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é $\mathbb{R}$.

b) $a_n = \frac{1}{n+2}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2}$$

S T Q Q S S D

/ /

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3/n}{1 + 2/n} = 1$$

Logo, a série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$.

Para $|x| = 1$, temos

$\rightarrow x = -1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$ é uma série alternada.

Observe que $a_n = \frac{1}{n+2}$ é decrescente pois para

$m < n$ temos

$$m < n$$

$$m+2 < n+$$

$$\frac{1}{m+2} < \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n_2}$$

$$a_n < a_m$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

/ /

S T Q Q S S D

Portanto pelo critério de Leibnitz, segue que a série é convergente.

$\rightarrow \quad x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}$$

Vamos mostrar que S_n é crescente

$m < n$

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m+2}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \dots + \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = S_m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

ou

$\therefore \; S_n > S_m \quad S_m < S_n$

Logo, S_n não é limitada superiormente e então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ é divergente.

Portanto:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ converge para p/

$-1 \leq x < 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 1\}$

Já vimos que uma série de potências pode representar uma função quando for convergente.
Mas como associar uma função a uma série?
⇒ Série e Polinômio de Maclaurin.

Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

- $f(0) = a_0$ $\qquad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$
- $f'(0) = a_1$ $\qquad f''(x) = 2a_2 + 3 \times 2 a_3 x^2 + \ldots$
- $f''(0) = 2 \times 1 \, a_2$
- $f'''(0) = 3 \times 2 \times 1 \, a_3$
- $\vdots$
- $f^{(k)}(0) = k! \, a_k$ $\quad \therefore \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

/ /

S T Q Q S S D

A forma geral da série de Maclaurin é, então

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

ou

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Observe que para ser possível a expansão em série de Maclaurin:

→ a função tem que estar definida em $x=0$;

→ a série deve ser convergente.

Exemplo: Obtenha a série de Maclaurin para as funções:

a) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x$

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k$$

S T Q Q S S D

/ /

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f''''(x) = \operatorname{sen} x$	$f''''(0) = 0$
$f'''''(x) = \cos x$	$f'''''(0) = 1$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{1!} x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots$$

Polinômio de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

/ /

S T Q Q S S D

• Série e Polinômio de Taylor

A forma geral de Taylor com centro x_0 é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Observe que para ser possível a expansão em série de Taylor:

→ a função precisa estar definida em $x = x_0$.
→ a série deve ser convergente.

Obs: polinômio de Taylor de grau n:

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Exemplo: Obtenha a série de Taylor para a função $f(x) = \cos x$ com centro $x_0 = \pi$.

$f(x) = \cos x$	$f(\pi) = 1$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f'(\pi) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(\pi) = -1$
$f'''(x) = \operatorname{sen} x$	$f'''(\pi) = 0$
$f''''(x) = \cos x$	$f''''(\pi) = 1$

$$\cos x = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = (-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\pi)^{2n}\,(-1)^{n+1}}{(2n)!}$$

Outra forma:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\pi)^{2n}\,(-1)^{n+1}}{(2n)!}$$

EXEMPLO: SÉRIE BINOMIAL

Obtenha a série de Maclaurin para

$f(x) = (x+1)^m, \; m \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = m\,(x+1)^{m-1}$ $\quad f'(0) = m$

$f''(x) = m(m-1)(x+1)^{m-2}$ $\quad f''(0) = m(m-1)$

$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(x+1)^{m-3}$ $\quad f'''(0) = m(m-1)(m-2)$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))(x+1)^{m-k}$

$f^{(k)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

Logo

$$(x+1)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{m-k} x^k$$

Se m é inteiro e não negativo, todas as derivadas $(m+1)$-ésimas são nulas e a série se reduz à expressão binomial familiar:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots + x^m,$$

ou seja,

$$(1+x)^m = \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1}x + \dots + \binom{m}{0}x^m$$

Vamos determinar o intervalo de convergência da série binomial para determinar o domínio da função.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}}{\dfrac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)\,.\,(n+1)(n!)}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)n!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{m-n}{n}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{m}{n}-1} \right| = |-1| = 1$$

/ /

S T Q Q S S D

Logo, a série binomial é convergente em $|x| < 1$.

Para $x = 1$.

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{m-k}$$

Exemplo: Uma maneira de obtermos um valor aproximado de $\sqrt{1+x}$, para $x \in]-1,1[$, é usando a série binomial. Para $m = 1/2$.

Temos:

S T Q Q S S D / /

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}x^2$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

Para $x = 0{,}2$, por exemplo, temos

$$\sqrt{1{,}2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{8}(0{,}2)^2$$

$$= 1{,}095$$

Através da calculadora, temos: (com 4 casas decimais)

$$\sqrt{1{,}2} = 1{,}0954$$

O erro de aproximação é dado por

$$1{,}0954 - 1{,}0950 = 4 \times 10^{-4}$$

Exercícios (entregar)

Obtenha a série de Maclaurin para as funções abaixo e em seguida determine o intervalo de convergência da série

a) $f(x) = \ln(1+x)$ b) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Sulamericana

S T Q Q S S D

/ /

nome: Maicon Aparecido Pinheiro
matéria: Séries e Equações Diferenciais
profª: Vanessa.

Obtenha a série de Maclaurin para as funções abaixo e em seguida determine o intervalo de convergência da série.

a) $f(x) = \ln(1+x)$

$f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $f'''(0) = 2$

$f''''(x) = \frac{-3(1+x)^{\cancel{2}} \cdot 2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4}$ $f^{IV}(0) = -6$

$f^{V}(x) = \frac{+6 \cdot 4\,(1+x)^3}{(1+x)^8} = \frac{24}{(1+x)^5}$ $f^{V}(0) = 24$

Sulamericana

/ /

S T Q Q S S D

Por Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1x}{1!} - \frac{1x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!\,x^n}{n!} \;//$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}}{(-1)^{n+2} \frac{(n)!}{(n+1)!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}} (n-1)!\,(n+1)!}{\cancel{(-1)^{n+2}}\, n!\,n!} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| -\frac{(n-1)!\,(n+1)}{n\,(n-1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{(n+1)}{n} \right|$$

S T Q Q S S D

/ /

nome: Maicon Aparecido Pinheiro

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -1 - \frac{1}{n} \right|$$

$$= |-1| = 1$$

Logo a série converge em $|x| < 1$

Para $x = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$a_n = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

E dado $m > n$

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Logo, pelo critério de Leibnitz, a série converge p/ $x = 1$.

Para $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)}{n}$$

como $\frac{(-1)}{n}$ é crescente, concluímos pelo critério de Leibnitz que a série não converge para $x = -1$.

Logo a série $\sum_{n=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} x^n$ é convergente

p/ $|x| < 1$ e $x = 1$.

b) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$

$f''(x) = \frac{(2 - 2x^2 + 8x^2)(1-x^2)}{(1-x^2)^4}$

$f''(x) = \frac{(6x^2+2)}{(1-x^2)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{12x(1-x^2)^3 - 3(1-x^2)^2(-2x)(6x^2+2)}{(1-x^2)^6}$

$f'''(x) = \frac{12x(1-x^2)(1-x^2)^2 + 6x(6x^2+2)(1-x^2)^2}{(1-x^2)^6}$

S T Q Q S S D

/ /

$$f'''(x) = \frac{(12x - 12x^3 + 36x^3 + 12x)(1-x^2)^2}{(1-x^2)^6}$$

$$f'''(x) = \frac{24x^3 + 24x}{(1-x^2)^4} \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{(72x^2+24)(1-x^2)^4 - 4(1-x^2)^3(-2x)(24x^3+24x)}{(1-x^2)^8}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{(72x^2+24)(1-x^2)(1-x^2)^3 + 8x(24x^3+24x)(1-x^2)^3}{(1-x)^8}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{(72x^2 - 72x^4 + 24 - 24x^2 + 192x^4 + 192x^2)(1-x^2)^3}{(1-x)^8}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{192x^4 - 72x^4 + 240x^2 + 24}{(1-x^2)^5}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{120x^4 + 240x^2 + 24}{(1-x^2)^5} \qquad f^{(iv)}(x) = 24$$

logo

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 \ldots$$

Sulamericana

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

Logo a série é convergente em $|x| < 1$.

Para $x = 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$ diverge

Para $x = -1$

$\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$ diverge

Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty}$

S T Q Q S S D

/ /

Critério de Raabe

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ para todo n natural.
Suponhamos que:

$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ existe, finito ou infinito.

Seja:

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Então:

a) $L > 1$ ou $L = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

b) $L < 1$ ou $L = -\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

c) $L = 1$, o critério nada revela.

Lema: Seja a_n, $a_n > 0$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L, \ L \neq 0.$$

Se $L < 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Série Binomial

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

/ /

ou

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

Seja $m \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ (pois m é inteiro e não negativo, todas as $(m+1)$-ésimas derivadas são nulas e a série se reduz à expansão binomial).

Já vimos que o raio de convergência da série é 1.

Vamos mostrar que:

a) Se $m > 0$, a série binomial converge para $|x| = 1$.

b) Se $-1 < m < 0$, a série binomial converge em $]-1, 1]$.

c) Se $m \leq -1$, a série diverge em $x = -1$ e em $x = 1$.

De fato:

a) Seja $m > 0$

→ Para $x = 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!}$$

S T Q Q S S D

/ /

Seja $a_k = \left| \dfrac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))}{k!} \right|$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left| \dfrac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))(m-k)}{(k+1)!} \right|}{\left| \dfrac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))}{k!} \right|}$$

$$= \left| \frac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))(m-k)\,k!}{m(m-1)\ldots(m-(k-1))\,(k+1)!} \right|$$

$$= \left| \frac{m-k}{k+1} \right| = \frac{|m-k|}{|k+1|} \overset{k\to\infty}{=} \frac{k-m}{k+1}$$

Então:

$$L = \lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{(k-m)}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{k+1-k+m}{k+1}\right) =$$

/ /

S T Q Q S S D

$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \cdot (m+1) = (m+1) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+1/k} = m+1$

Como $m > 0$, segue $L = m+1 > 1$.

Como $L = m+1 > 1$. Logo pelo critério de Raabe a série é convergente.

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}$, $m > 0$ converge em $x = 1$.

Para $x = -1$, temos a série

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (-1)^k$

Considerando

$a_k = \left| \binom{m}{k} (-1)^k \right|$ e utilizando o mesmo raciocínio

do caso em que $x = 1$, segue que a série

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (-1)^k$ converge.

$\therefore$ p/ $m > 0$, a série binomial é convergente p/ $|x| \leq 1$.

S T Q Q S S D

/ /

b) Seja $-1 < m < 0$

Para $x=1$, temos a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}$$

Mas

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2} + \ldots$$

Para $-1 < m < 0$, temos uma série alternada.

Logo, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left|\binom{m}{k}\right|$

Observemos que

$$a_k = \left|\binom{m}{k}\right| = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))}{k!}\right|$$

é uma sequência decrescente pois dados $p < q$ naturais, temos:

$$p < q \Rightarrow -p > -q$$

$$|m(m-1)\ldots(m-(p-1))| > |m(m-1)\ldots(m-(q-1))|$$

/ /

S T Q Q S S D

$$\frac{|m(m-1)\dots(m-(p-1))|}{p!} > \frac{|m(m-1)\dots(m-q-1))|}{q!}$$

$a_p > a_q$

Logo, a_k é uma sequência decrescente.

Além disso,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k\cdot(k-1)\cdot\dots\cdot 1}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{m}{k}\cdot\frac{m-1}{1}\cdots\frac{m-(k-1)}{k-1}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{m}{k}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\dots\cdot\left(\frac{m}{k}-1\right)\right| = 0$$

Como a_k é decrescente e $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, pelo critério de Leibnitz segue que a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left|\binom{m}{k}\right|$ é convergente onde $-1 < m < 0$ e $x = 1$.

~~Como $-1 < m < 0$,~~ ~~então~~ ~~$m+1 > 1$~~, ou ~~seja~~ ~~$L > k$ e então pelo critério de Raabe~~, a

S T Q Q S S D

/ /

Para $x = -1$, temos a série $\sum (-1)^k \left| \binom{m}{k} \right| (-1)^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{m}{k} \right|$

No item a, vimos que

$$L = \lim_{k \to \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = m + 1.$$

Como $-1 < m < 0$, então $m+1 < 1$, ou seja, $L < 1$, e então, pelo critério de Raabe, a série é divergente. Logo p/ $-1 < m < 0$, a série binomial converge em $]-1, 1]$.

c) Seja $m \leq -1$

c1) para $m < -1$

Usar Raabe

$$\lim_{k \to \infty} k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = m + 1 < 0$$

Como $L < 0$, do lema segue que $\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0$.

Então, pelo critério do termo geral para divergência segue que a série diverge para $x = 1$ e $x = -1$.

Sulamericana

/ /

c2) $m = -1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!} x^k$$

$$\frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-k)}{k!} =$$

$$(-1)^k \frac{k!}{k!} = (-1)^k$$

Logo temos a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$\Rightarrow x = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \qquad \nexists \lim_{k \to \infty} (-1)^k$$

A série diverge (critério do termo geral p/ a divergência).

$\Rightarrow x = -1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \qquad \lim_{k \to \infty} 1 = 1$$

diverge (C.T.G. p/ D)

S T Q Q S S D

/ /

2° Bimestre 06/05/09

Equações Diferenciais Ordinárias

Equações diferenciais são equações que contém derivadas da função incógnita (equações contendo derivadas).

Exemplos:

a) Decaimento com o tempo de uma quantidade $R(t)$ de uma substância radioativa.

$$\frac{dR}{dt} = -k.R(t)$$

b) Lei de Newton:

$$m.\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right)$$, onde

u = posição da particula

F = força

t = tempo

Quando a função incógnita depende de uma variável independente, chamamos a equação de diferencial ordinária, se a função depende

/ /

S T Q Q S S D

de várias variáveis independentes, dizemos que a equação é diferencial parcial.

Os itens a) e b) do exemplo são equações diferenciais ordinárias (EDO's).

Exemplo de equação diferencial parcial (EDP).

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

A ordem de uma EDO é a derivada de maior ordem contida na equação.

Exemplos:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

2º grau

b) $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{dy}{dx} = 2$ 3ª ordem

A solução de uma EDO é uma função que satisfaz a equação. Por exemplo, consideremos a equação.

$$\frac{dR}{dt} = -kR \quad (1)$$

Vamos resolvê-la:

$$\frac{dR}{dt} = -KR \Leftrightarrow$$

$$\frac{dR}{R} = -K\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dR}{R} = \int -K\,dt \Leftrightarrow$$

$$\ln R = -Kt + K_1 \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln R} = e^{-Kt+K_1} \Leftrightarrow$$

$$R = e^{-Kt+K_1} \Leftrightarrow$$

$$R = e^{-Kt} \cdot e^{K_1} \Leftrightarrow$$

$$R = ce^{-Kt},$$

Logo, $R(t) = ce^{-Kt}$ é solução de (1).
Porém, existem EDO's que não têm solução. Além disso, uma EDO pode possuir infinitas soluções. Adiante analisaremos questões sobre existência e unicidade de soluções.
Dizemos que a EDO $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ é linear se F é uma função linear das variáveis $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, ou seja, F é da forma

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = g(x)$$

Exemplos:

a) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2e^x\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = x^4$

É não linear (por causa do termo $y\dfrac{dy}{dx}$)

b) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2y = 0$

É linear

EDO de 1ª ordem

Seja (2) a EDO de 1ª ordem

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

Qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça (2) é solução de (2).

→ Equações lineares com coeficientes variáveis.

S T Q Q S S D

/ /

Primeiramente, consideremos a EDO linear de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \qquad (3) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Podemos resolver (3) da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay + b$$

$$\frac{dy}{-ay+b} = dx$$

$$\int \frac{dy}{-ay+b} = \int dx$$

$$\int \frac{-a}{-ay+b}\,dy = \int -a\,dx$$

$$\ln(-ay+b) = -ax + k_1$$

$$e^{\ln(-ay+b)} = e^{-ax} \cdot e^{k_1}$$

$$-ay + b = e^{-ax} \cdot e^{k_1}$$

$$ay = b - e^{-ax} \cdot e^{k_1}$$

$$y = \frac{b}{a} - \underbrace{\frac{e^{K_1}}{a}}_{c} e^{-ax}$$

$$y = \frac{b}{a} - c e^{-ax}$$

$\therefore$ $y = \frac{b}{a} + c e^{-ax}$ é solução de (3)

Por exemplo, se $a = 2$ e $b = 3$, temos a EDO

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3,$$

cuja solução geral (solução que contém todas as soluções possíveis da EDO) é

$$y(x) = \frac{3}{2} + c e^{-2x}$$

Resolução da Prova - 1ª Avaliação

1.

a)

(F) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ diverge $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sulamericana

S T Q Q S S D

/ /

b)

(V) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge

Critério da razão.

$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

$L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} > 1 \Rightarrow$ diverge.

c)

(V) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ é decrescente.

$m > n$

$2m > 2n$

$2m-1 > 2n-1$

$\frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2n-1}$

$a_m < a_n$ $\therefore$ a_n é decrescente.

d)

(F) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ é convergente.

$\rightarrow S_n$ é crescente

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$m < n$

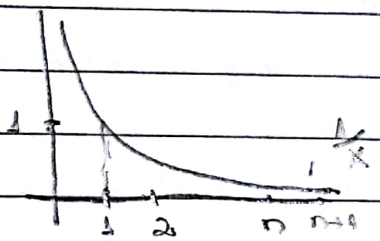
$$S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}}_{S_m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_n = S_m + \sum_{k=m+1}^{n} 1/k$$

$\therefore\ S_n > S_m$

$S_m < S_n \Rightarrow S_n$ é crescente.

Mostrar que não é limitada superiormente



$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1)$$
$$= \ln(n+1).$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

S T Q Q S S D / /

$\therefore$ Sn não é limitada superiormente

$\therefore$ é divergente

2).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{n^n\,(n+1)\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

diverge.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,3^n}{5^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\,3^{n+1}}{5^n}}{\frac{n\,3^n}{5^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,3^{n+1}}{n\,3^n} \cdot \frac{5^{n-1}}{5^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,3}{n\,5} = \frac{3}{5} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{3}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{3}{5} < 1$$

converge.

Sulamericana

/ /

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n} (x-5)^n$

→ $x = 5$ → converge

→ $x \neq 5$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+2} = 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}} x^n$

→ $x = 0$ → converge

→ $x \neq 0$:

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 9$

$|x| < 9$ – converge

$|x| > 9$ – diverge

p/ $x = 9$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2n-1}$ converge

p/ $x = -9$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2n-1}$ diverge

S T Q Q S S D

converge em $]-9, 9]$

4.
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Cont. EDO's

13/05/2009

Encontramos uma infinidade de soluções da EDO (4), correspondente à infinidade de valores possíveis que a constante arbitrária c pode assumir.

Mas muitas vezes, vamos querer focalizar nossa atenção num único elemento dessa família infinita de soluções especificando o valor da constante arbitrária. Por exemplo, dada a EDO

$$\frac{dR}{dt} = -2R(t)$$

(decrescimento radioativo)

poderíamos determinar que num instante inicial, a concentração R da substância radioativa é 100 mg, ou seja, $R(0) = 100$ (5)

Sulamericana

/ /

S T Q Q S S D

Assim,

$$\frac{dR}{dt} = -2R(t) \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{R(t)} \frac{dR}{dt}\, dt = \int -2\, dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{R(t)}\, dR = -2 \int dt \Leftrightarrow$$

$$\ln R(t) = -2t + K \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln R(t)} = e^{\overbrace{-2t+K}^{e^{-2t} \cdot e^{K}}} \Leftrightarrow R(t) = c\, e^{-2t}$$

$R(0) = 100$

$$c\, e^{-2 \times 0} = 100$$
$$c = 100$$

$$\therefore R(t) = 100\, e^{-2t}$$

A condição adicional ⑤ é um exemplo de condição inicial. Então

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = -2R(t) \\ R(0) = 100 \end{cases}$$ é um problema de valor inicial (P.V.I)

S T Q Q S S D

/ /

Consideremos, agora, a EDO de 1ª ordem geral na forma

$\frac{dy}{dx} + p(x)y =$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \qquad (6)$$

onde p e g são funções da variável x.

Para resolvê-la, utilizaremos um método que envolve multiplicar a eq. (6) por uma determinada função $\mu(x)$, escolhida de modo que a eq. resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(x)$ é chamada de fator integrante. Antes de mostrar um método geral para determinar $\mu(x)$, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo: Resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3$$

encontrando um fator integrante.

Resolução:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + 2\mu(x)y = 3\mu(x) \qquad (7)$$

/ /

S T Q Q S S D

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x) . y\right] = \frac{d\,\mu(x)}{dx} . y + \frac{dy}{dx} . \mu(x)$$

$$= \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx} . y$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 2\mu(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu(x)}\, d\mu(x) = \int 2\, dx.$$

$$\ln \mu(x) = 2x + K$$

$$\mu(x) = e^{2x+K} = c\, e^{2x} = e^{-2x}$$

$$\therefore\ \mu(x) = e^{2x}$$

S T Q Q S S D

/ /

Voltando à EDO (7)

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}y] = 3e^{2x}$$

$$\int de[e^{2x}.y] = \int 3e^{2x}$$

$$e^{2x} + y = \frac{3}{2}^{2x} + K$$

$$y = \frac{3}{2} + k e^{-2x}$$

ou

$y = \frac{3}{2} + c e^{-2x}$, $c \in \mathbb{R}$ que é solução geral da EDO.

Generalizando, seja a EDO

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = g(x) \quad (9)$$

Multiplicando-a pelo fator integrante, temos:

/ /

S T Q Q S S D

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = g(x)\mu(x) \quad (8)$$

Mas

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \frac{dy}{dx}\mu(x) + \frac{d\mu(x)}{dx}\cdot y$$

Logo,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu(x)}d\mu = \int p(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\ln \mu(x) = \int p(x)dx + K \quad (\text{supondo } K=0)$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{d\mu}{dx}}_{p(x)\mu(x)}y$$

Voltando à equação (8).

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = g(x)\mu(x) \Leftrightarrow$$

$$\int d[\mu(x)\cdot y] = \int g(x)\mu(x)\,dx + K$$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

S T Q Q S S D

/ /

$$\Leftrightarrow \mu(x) \cdot y = \int g(x)\,\mu(x)\,dx + K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int g(x)\,\mu(x)\,dx + K\right]$$

↳ sol. geral de ③

Exemplos:

PVI - Problema do Valor Inicial

1- Resolva os PVI's.

a) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = x - 1 + \dfrac{1}{x} \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$

Resolução:

a)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\int 4x\,x^2\,dx + K\right]$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\int 4x^3\,dx + K\right] \iff$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[4\int x^3\,dx + K\right] \iff$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left[4\left(\frac{x^4}{4}\right) + K\right] \iff$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^4 + K\right) \iff$$

$$y(x) = \frac{x^4}{x^2} + \frac{K}{x^2} \iff$$

$$y(x) = x^2 + \frac{K}{x^2} \quad \text{(sol. geral)}$$

$$y(1) = 2 \iff$$

$$1^2 + \frac{K}{1^2} = 2 \iff K = 1$$

$\therefore$

$y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ é sol. do P.V.I.

S T Q Q S S D

/ /

a)

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3 \iff$$

$$\frac{d}{dx}[x^2 y] = 4x^3 \iff$$

$$\int \left(\frac{d}{dx}[x^2 y] \right) dx = \int 4x^3 \, dx$$

$$x^2 y = x^4 + K \iff$$

$$y = \frac{x^4 + K}{x^2} \iff$$

$$y = x^2 + \frac{K}{x^2}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \left[\int \left(x - 1 + \frac{1}{x} \right) x^2 \, dx + K \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2} \left[\int x^3 - x^2 + x \, dx + K \right]$$

/ /

S T Q Q S S D

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + K\right)$$

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{K}{x^2}$$ Sol. geral

$y(1) = 1/2 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + K = \frac{1}{2}$$

$$K = -\frac{1}{12}$$

$\therefore$

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{2}$$

EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Já vimos exemplos onde é possível resolver uma EDO atráves da integração direta. Vamos mostrar que esse processo pode ser utilizado para uma classe maior de equações (como as não lineares).

Consideremos a EDO geral de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Suponhamos que seja possível colocar a equação acima na forma.

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \qquad (10)$$

A equação (10) recebe o nome de equação separável

Para resolvê-la basta integrar (10).

Exemplos:

1- Resolva

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = (1-2x)y^2$

Resolução

a) $(1-y^2)\,dy = x^2\,dx \Leftrightarrow$

$$\int (1-y^2)\,dy = \int x^2\,dx \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{y^3}{3} + K_1 = \frac{x^3}{3} + K_2$$

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \underbrace{K_2 - K_1}_{K} \quad \text{, Sol. geral}$$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

$y(0) = 1 \Leftrightarrow$

$$y(0) - \frac{(y(0))^3}{3} = \frac{0^3}{3} + k$$

$$1 - \frac{1}{3} = k$$

$$k = \frac{2}{3}$$

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^2 + 2}{3} \Leftrightarrow$$

$$3y - y^3 = x^2 + 2$$

Sol. do PVI.

Obs: a equação obtida é uma representação implícita da solução do PVI dado. Você deve ter em mente que, para a determinação de uma fórmula explícita para a solução, é necessário a solução do PVI seja resolvida para y como função de x. Infelizmente, é muitas vezes impossível fazer isso analiticamente; em tais casos, pode-se recorrer a métodos numéricos.

S T Q Q S S D   / /

b) $\frac{dy}{dx} = (1-2x)y^2$

$\frac{dy}{y^2} = (1-2x)\,dx$ forma separável

$\int \frac{dy}{y^2} = \int (1-2x)\,dx$

$\int y^{-2}\,dx = \int 1-2x\,dx$

$-\frac{1}{y} = x - x^2 + K$

$y = \frac{1}{x^2 - x - K}$ → solução geral

26/05/2009

Equações Exatas

$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$

$M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$: contínuas

Exemplo:

/ /

S T Q Q S S D

1- Resolva

$(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)\frac{dy}{dx} = 0$

$M(x,y) = y\cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y$

$N(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$

$\therefore$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ a eq. é exata

Vamos encontrar uma função $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

— " —

Obs:

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

Pela regra da cadeia

$\frac{d}{dx}(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

S T Q Q S S D

/ /

$\therefore \frac{d}{dx}(\varphi(x,y)) = 0$

$\therefore \varphi(x,y) = c$

— " —

Integrando em relação à x:

$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx = \int M(x,y)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = \int (y\cos x + 2x\,e^y)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = y\,\mathrm{sen}\,x + x^2 e^y + g(y)$

$\therefore$

$\varphi(x,y) = y\,\mathrm{sen}\,x + x^2 e^y + g(y)$

Usando 2:

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\mathrm{sen}\,x} + \cancel{x^2 e^y} + g'(y) = \cancel{\mathrm{sen}\,x} + \cancel{x^2 e^y} - 1$

$g'(y) = -1$

$\frac{dg}{dy} = -1$

$dg = -dy$
$\int dg = -\int dy$

~~g(y) = -y~~ $g(y) = -y$

$\therefore \ \varphi(x,y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y$ ~~+y~~ $\operatorname{sen} x + x^2 \ldots - y = c$

$\therefore \ \varphi(x,y) = y$ ~~sen x~~ ~~sen~~

$\therefore \ \varphi(x,y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - \ldots$
└ solução implícita

2- Resolva a EDO

$3xy + x^2 \frac{dy}{dx} = -y^2 - xy \frac{dy}{dx}$

$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

$\therefore$

$M = 3xy + y^2 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y$

$N = x^2 + xy \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = 2x + y$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, então não temos uma equação exata.

Vamos encontrar um fator integrante $\mu(x)$ para a equação de forma que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Obs: Desenvolvendo a equação acima, temos:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)}{N}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}{N} \cdot \mu$$

/ /

STQQSSD

E:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+yx} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}\mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln(\mu) = \ln(x)$$

$$\mu = x \;//$$

Logo, multiplicando a equação por $\mu(x) = x$, temos:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

→ Obs: Se definimos μ em função de x e encontramos μ em função de outra além de x, significa que não existe μ que torne a eq. exata.

Agora:

$M = 3x^2y + xy^2$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2yx$

$N = x^3 + x^2y$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$

Sulamericana

S T Q Q S S D

/ /

Devemos encontrar $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$$

—

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)\, dx \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x,y) = \int 3x^2y + xy^2\, dx$$

$$\varphi(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

Usando ②

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$$

$$x^3 + yx^2 + g'(y) = x^3 + x^2y$$

$$g'(y) = 0$$

$$\int g'(y)\, dy = \int 0\, dy$$

$$\therefore g(y) = K$$

Assim:

$$\therefore f(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + K$$

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + K = c$$

$$\boxed{x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = a}$$

Sol. implícita da equação

Existência e Unicidade de Soluções

Teorema 1 - Se as funções p e g são contínuas em $I =]\alpha, \beta[$ contendo o ponto $x = x_0$, então existe uma única função $y = \phi(x)$ que satisfaz a EDO

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = g(x)$$

para cada $x \in I$ e que também satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

Exemplo: Encontre o intervalo no o p.v.i

$$\begin{cases} x\,y' + 2y = 4x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução.

Resolução

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x$$

$p(x) = \frac{2}{x}$ é contínua para $x > 0$ ou $x < 0$

$g(x) = 4x$ é contínua $\forall x$.

Resolvendo

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left[\int 4x\, x^2\,dx + k\right] \Longleftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left[4\int x^3\,dx + k\right] \Longleftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left[4\frac{x^4}{4} + k\right] \Longleftrightarrow$$

$$y = x^2 + \frac{k}{x^2}$$

Mas

/ /

S T Q Q S S D

$y(1) = 2$

$\therefore$

$$2 = 1 + \frac{K}{1}$$

$K = 2 - 1$
$K = 1$ //

$\therefore$

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

Outra forma:

$\mu(x) = x^2$

Mult. a equação por $\mu(x)$ temos

$$\underbrace{x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy}_{} = 4x^3$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = 4x^3$$

está em função de x

$$\int \frac{d}{dx}(x^2y)\,dx = \int 4x^3\,dx$$

$$x^2y = x^4 + c$$

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

$y(1) = 2$

$$1^2 + \frac{c}{1^2} = 2$$

$c = 1$

$\therefore$

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

O intervalo $x > 0$ contém a condição inicial. Logo, o teorema garante a existência de uma única solução em $]0, +\infty[$, que é

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Se a condição for modificada para $y(-1) = 2$, temos:

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

/ /

S T Q Q S S D

Logo, teríamos a existência de uma única solução em $]-\infty, 0[$.

Teorema 2 - Suponha que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam contínuas em um retângulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (x_0, y_0). Então, em algum intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ contido em $\alpha < x < \beta$, existe uma única solução do p.v.i.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

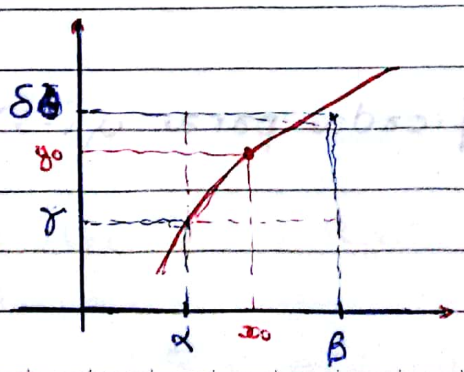
$$y(x_0) = y_0$$

Observe que, comparando com o Teorema 1, temos:

$$f(x,y) = -p(x)y + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$$

que é equivalente à continuidade de p e g.



Scanned by CamScanner

→ Pesquisa
(Valendo 1 ponto, no máximo, a ser somado a P2)

→ Equação homogênea de 1º ordem

→ Equações de Bernoulli

→ Equações de Ricatti

P/ 10/06.

27/05/2009

Equações Diferenciais Lineares de 2ª ordem

Teorema: O p.v.i

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + g(x)\,y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \,,\quad y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(x)$, $g(x)$ e $f(x)$ funções contínuas em um intervalo aberto contendo x_0, tem uma única solução em I.

Exemplo: Vamos determinar o intervalo máximo em que o p.v.i

$$\begin{cases} (x^2-4)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)\, y = \dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = y_0 \quad , \quad y'(1) = y_0' \end{cases}$$

tem solução:

Resolução:

Observe que

$p(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ é contínua p/ $x \neq \pm 2$.

$g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-4}$ é contínua p/ $x \neq \pm 2$,

$f(x) = \dfrac{e^x}{x(x^2-4)}$ é contínua p/ $x \neq \pm 2$, $x \neq 0$

$x_0 = 1$

$\therefore\ 1 \in I$

$\Rightarrow\ I =]0, 2[$

I é o maior intervalo contendo $x_0 = 1$ onde $p(x)$, $g(x)$ e $f(x)$ são contínuas.

Equações Homogêneas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + g(x)\, y = 0 \qquad (1)$$

S T Q Q S S D

/ /

$(f(x)=0)$

Principio da superposição:

$y_1(x)$, $y_2(x)$: soluções de 1

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad 2$$

também é solução de 1.

2) é combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$

$\Rightarrow y_1$ é solução

$$y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 = 0$$

$\Rightarrow y_2$ é solução

$$y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2 = 0$$

Vamos mostrar que 2 também é solução de 1:

$$(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + g(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$= c_1\big((y_1'' + p(x)y_1' + g(x)\big).y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2)$$

0

Teorema: (Princípio da superposição): se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de Δ então

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Também o é onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

~~Seja o pi~~

~~Então para y~~

$$y''(x) + p(x)y + g(x)y$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \ldots$$

Então para

$y(x) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x)$, temos:

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$\therefore \; c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'_0$$

$\therefore$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'_0$$

Logo

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

ou

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

Então se $\det A \neq 0$, para todo par de condições iniciais (y_0, y'_0), existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que

/ /

S T Q Q S S D

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

é solução do problema de valor inicial.

Def: O determinante $W(y_1, y_2)(x_0) =$

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$$

é chamado Wronskiano das funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ em x_0.

Se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (1) são tais que o seu Wronskiano é diferente de 0 em x_0, dizemos que elas são soluções fundamentais de (1).

A família de soluções

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

é chamada de solução geral de (1).

Exemplo: Seja $b \in \mathbb{R}^*$. Mostre que $y_1(x) = \cos bx$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} bx$ são soluções fundamentais da EDO

$$y'' + b^2 y = 0.$$

Resolução:

S T Q Q S S D   / /

p/ y_1

$y_1'' + b^2 y_1 = 0$

$(\cos bx)'' + b^2 \cos bx = 0 \iff$

$(-b \operatorname{sen} bx)' + b^2 \cos bx = 0 \iff$

$-b^2 \cos bx + b^2 \cos bx = 0 \implies$

$0 = 0 \iff$ verdade

para y_2

Maicon

$y_2'' + b^2 y = 0$

Conjunto

$(\operatorname{sen} bx)'' + b^2 \operatorname{sen} bx = 0$

$(b \cos bx)' + b^2 \operatorname{sen} bx = 0$

$-b^2 \operatorname{sen} bx + b^2 \operatorname{sen} bx = 0$

$0 = 0 \iff$ verdade

Calculando o Wronskiano

$$\begin{vmatrix} \cos bx & \operatorname{sen} bx \\ -b \operatorname{sen} bx & b \cos bx \end{vmatrix} = b(\cos^2 bx) + b(\operatorname{sen}^2 bx)$$

$$= b(\cos^2 bx + \operatorname{sen}^2 bx)$$

$$= b$$

Sulamericana

/ /

Como Wronskiano $\neq 0$, pois $b \in \mathbb{R}^*$ concluímos que

y_1 e y_2 são soluções fundamentais.

e

$y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx$ é uma solução geral.

Dependência Linear

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são l.d. num intervalo I se

$y_1(x) = \alpha y_2(x)$ ou

$y_2(x) = \alpha y_1(x)$, $\forall x \in I$.

Caso contrário, são l.i.

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são l.d, então

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

TEOREMA: se $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$ então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são l.i em I.

Obs:

a) as soluções fundamentais formar um base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea

1

b) $W(y_1, y_2)(x) = c\, e^{-\int p(x)dx}$

Exemplo: Mostre que as funções e^t e e^{2t} são linearmente independentes em qualquer intervalo.

$$W(e^x, e^{2x})(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= 2e^{2x} \cdot e^x - e^x e^{2x}$$

$$= 2e^{3x} - e^{3x}$$

$$= e^{3x}.$$

Como $e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

concluímos que

$y_1 = e^t$ e $y_2 = e^{2t}$ são linearmente independentes em qualquer intervalo.

Fórmula de Euler

$\rightarrow y(x) = e^{rx}$

$r = a + ib \quad , a, b \in \mathbb{R}$

/ /

S T Q Q S S D

$y_3(x) = e^{ibx}$ é solução de

$$y'' + b^2 y = 0 \quad , \text{ pois}$$

$y_3'(x) = ib\,e^{ibx}$

$y_3''(x) = (ib)^2 e^{ibx} = -b^2 e^{ibx}$

$y_3'' + b^2 y_3 = -b^2 e^{ibx} + b^2 e^{ibx} = 0$

Assim, $y_3(x) = e^{ibx}$ é solução do pvi

$$\begin{cases} y'' + b^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = ib. \end{cases}$$

No exemplo anterior temos que $y_1(x) = \cos bx$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} bx$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2 y = 0$.

Logo, existem constantes c_1 e c_2 tais que $y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

$$y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$e^{ibx} = c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx$$

Para $x = 0$

Sulamericana

$1 = c_1$

Como y' ~~...~~ $y'(0) = ib$, temos:

$ibe^{ibx} = -c_1 b \operatorname{sen} bx + bc_2 \cos bx$

$ib = c_2 \Rightarrow c_2 = i$

Logo

$e^{ibx} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx$

Mas

$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$

Para $x = 1$

$e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$

$$e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

$e^{i\pi} = e^{0}(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1$

Sulamericana

S T Q Q S S D

18/06/09

EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM MAIS ALTA

EDO linear de ordem n:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x) \quad (1)$$

Condições Iniciais:

$$y(x_0) = y_0 \;,\; y'(x_0) = y_0' \;,\; \dots \;,\; y^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

TEOREMA: Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ e g são contínuas num intervalo I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(x)$ de (1) que também satisfaz (2).

EQUAÇÃO HOMOGÊNEA

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (3)$$

TEOREMA: Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ são contínuas em I, se as funções $y_1, y_2, \dots, y_n$ são soluções de (3) e se

$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0$ para pelo menos um ponto de I, então toda solução de (3) pode ser expressa como combinação linear das soluções $y_1, y_2, \dots, y_n$.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

y_i t.q. $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0$: é o conjunto fundamental de soluções.

Sol. Geral: combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$.

EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = g(x)$$

Solução:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) + Y(x)$$

$Y(x)$: alguma solução particular da equação não homogênea.

EXEMPLOS

Encontre a solução geral das equações:

a) $y''' - y'' - y' + y = 0$

b) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$

c) $y^{vi} - y^{v} = 0$

d) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 3\operatorname{sen} x - 5\cos x$

e) $y''' - y' = x$

S T Q Q S S D

/ /

a) $y''' - y'' - y' + y = 0$ $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=1 \end{cases}$

Polinômio característico

Observe que $r=1$ é raiz do polinômio característico.

$$\begin{array}{l|l} r^3 - r^2 - r + 1 & r-1 \\ \hline -r^3 + r^2 & r^2 - 1 \\ \quad -r + 1 & \\ \quad +r - 1 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

Temos que

$r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(r-1)(r+1)(r-1) = 0$

$\therefore$ Raízes

$r_1 = 1,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1$

$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$ → sol. geral

$y'(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} + c_2 x e^{x} - c_3 e^{-x}$

$y''(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$

$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$ $y''(0) = 1$

$c_1 + c_3 = 0$ $c_1 + c_2 - c_3 = 0$ $c_1 + 2c_2 + c_3 = 1$

Sulamericana

$$\begin{cases} c_1 + \quad c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \quad L_1 \Leftrightarrow L_3$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 \quad + c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 \quad = 1 \\ \quad -2c_2 \quad = -1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1/2$$

$2c_1 + 3c_2 = 1$

$2c_1 = 1 - \frac{3}{2}$

$c_1 = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow c_3 = \frac{1}{4}$

Logo

$$\begin{cases} c_1 = -1/4 \\ c_2 = 1/2 \\ c_3 = 1/4 \end{cases}$$

$\therefore$

$$y = -\frac{1}{4} e^{x} + \frac{1}{2} x e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x} \,//$$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

S T Q Q S S D

/ /

b) $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$

$r^4 - 4r^3 + 4r^2 = 0$

$r^2(r^2 - 4r + 4) = 0$

$r = \pm 0$ ou $r^2 - 4r + 4 = 0$

$r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$

$r = \dfrac{4 \pm 0}{2}$ $r = 2$

Portanto

$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 2 \\ r_3 = 2 \end{cases}$

Assim

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 x . e^{2x}$ // sol. geral.

c) $y^{vi} - y'' = 0$

$r^6 - r^2 = 0$

$r^2(r^4 - 1) = 0$

$r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(r^2 - 1)(r^2 + 1)$

$r^2 = 0 < \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ $r^2 - 1 < \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$ $r^2 + 1 < \begin{matrix} i \\ -i \end{matrix}$

/ /

S T Q Q S S D

$\therefore$

$r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 1,\ r_4 = -1,\ r_5 = i,\ r_6 = -i.$

$r = \alpha \pm i\beta$

$e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \operatorname{sen} x$

d) $y^{iv} + 2y'' + y = 3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$

$y^{iv} + 2y'' + y = 0$

$r^4 + 2r^2 + \cancel{1} = 0$

$t = r^2$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$

$t = \dfrac{-2}{2} = -1$

$t = r^2$

$r^2 = -1$

$r = \pm\sqrt{-1} \left\langle \begin{matrix} i \\ -i \end{matrix} \right.$

Última folha

S · T · Q · Q · S · S · D

/ /

Determine FI p/

$$(2y^2 - 6xy)\,dx + (3xy - 4x^2)\,dy$$

!

0

$$\frac{2y^2 - 6xy}{5xy^2 - 10x^2y} = \frac{(4y - 6x) - (10xy - 10x^2)}{(5xy^2 - 10x^2y)^2}$$

$$\frac{3xy - 4x^2}{5xy^2 - 10x^2y} = \frac{(3y - 8x) - (5y^2 - 20xy)}{}$$

$$y(2y - 6x)\,dx + x(3y - 4x)\,dy = 0$$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

2º caso)

$g(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) e^{\alpha x}$

$a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = x^s (A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n) e^{\alpha x}$

s: menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea $A_0, \ldots, A_n$: coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(x)$ na EDO.

EXEMPLO: Determine a solução da equação

$$y'' + 2y' + y = (2+x) e^{-x}$$

Resolução

$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.1}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm 0}{2} \rightarrow r = -1$$

$\therefore y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

S T Q Q S S D

/ /

→ Solução Particular

$$y_p(x) = x^s (A_0 + A_1 x) e^{-x}$$

- $s = 0 \Rightarrow y_p(x) = \underbrace{A_0}_{c_1} e^{-x} + \underbrace{A_1}_{c_2} x e^{-x}$

- $s = 1$

$$y_p(x) = x (A_0 e^{-x} + A_1 x e^{-x}) =$$

$$= \underbrace{A_0 x}_{c_2} e^{-x} + A_1 x^2 e^{-x}$$

- $s = 2$

$$y_p(x) = x^2 (A_0 e^{-x} + A_1 x e^{-x}) =$$
$$= A_0 x^2 e^{-x} + A_1 x^3 e^{-x}$$

Observe que $s=2$, pois para $s=0$ as parcelas $A_0 e^{-x}$ e $A_1 x e^{-x}$ são soluções da equação homogênea e para $s=1$ a parcela $A_0 x e^{-x}$ é solução da equação homogênea.

Logo,

$$y_p(x) = (A_0 x^2 + A_1 x^3) e^{-x}$$

$$y'_p(x) = (2A_0 x + 3A_1 x^2) e^{-x} - e^{-x}(A_0 x^2 + A_1 x^3)$$
$$= (2A_0 x + (3A_1 - A_0) x^2 - A_1 x^3) e^{-x}$$

$$y''_p(x) = \left(2A_0 + (6A_1 - 2A_0)x - 3A_1x^2\right)e^{-x} -$$
$$e^{-x}\left(2A_0x + (3A_1 - A_0)x^2 - A_1x^3\right)$$

$$y''_p(x) = \left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)x + (A_0 - 6A_1)x^2 + A_1x^3\right)e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = (2 + x)e^{-x}$$

$$e^{-x}\left(2A_0 + (6A_1 - 4A_1)x + (A_0 - 6A_1)x^2 + A_1x^3 + 4A_0x\right.$$
$$\left. + (6A_1 - 2A_0)x^2 - 2A_1x^3 + A_0x^2 + A_1x^3\right] = (2 + x)e^{-x}$$

$$2A_0 + 6A_1x = 2 + x$$

$2A_0 = 2$ e $6A_1 = 1$

$A_0 = 1$ $A_1 = 1/6$

$$y_p(x) = \left(x^2 + 1/6\, x^3\right)e^{-x}$$

$\therefore$

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-x} + \left(x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^{-x}$$

S T Q Q S S D   / /

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 + c_2 + x^2 + \frac{1}{6}x^3\right),$$

3º Caso) $g(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)\, e^{\alpha x} \cos\beta x$
$+ (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$y_p(x) = x^s \left[(A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_q x^q)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + (B_0 + B_1 x + \dots + B_q x^q)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x \right]$

$q = \text{máx}\{m, n\}$

s = menor inteiro não negativo que garante que nenhuma parcela de $y_p(x)$ seja solução da equação homogênea.

A_i, B_i: coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(x)$ na EDO.

Exemplo: Encontre a solução da EDO.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{x}\cos x$$

Resolução

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$
$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

/ /

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$r = \frac{-2 \pm 2i}{2}$ $\begin{cases} \frac{-2+2i}{2} = -1+i \\ \frac{-2-2i}{2} = -1-i \end{cases}$

$y_H(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$

→ Sol. particular $y_p(x)$

$q = 0$

$y_p(x) = x^s e^{x} [A_0 \cos x + B_0 \operatorname{sen} x]$

• $s = 0$

$y_p(x) = A_0 e^{x} \cos x + B_0 e^{x} \operatorname{sen} x$

Observe que $s=0$, pois nenhuma parcela de y_p é solução de y_H (por causa de e^x).

$\therefore y_p(x) = e^{x} (A_0 \cos x + B_0 \operatorname{sen} x)$

S T Q Q S S D

/ /

Logo:

$y'p(x) = e^x(A_0\cos x + B_0 \operatorname{sen} x) + (B_0\cos x - A \operatorname{sen} x)e^x$

$y'p(x) = e^x[(A_0+B_0)\cos x + (B_0 - A_0)\operatorname{sen} x]_{//}$

e

$y''p(x) = e^x[(A_0+B_0)\cos x + (B_0 - A_0)\operatorname{sen} x] + e^x$

$[(B_0 - A_0)\cos x - (A_0+B_0)\operatorname{sen} x]$

$y''p(x) = e^x[2B_0\cos x - 2A_0\operatorname{sen} x]$

e

$y'' + 2y' + 2y = e^x\cos x$

$\cancel{e^x}[2B_0\cos x - 2A_0\operatorname{sen} x + (2A_0+2B_0)\cos x +$

$(2B_0 - 2A_0)\operatorname{sen} x + 2A_0\cos x + 2B_0\operatorname{sen} x] = \cancel{e^x}\cos x$

$(4A_0 + 4B_0)\cos x + (-4A_0 + 4B_0)\operatorname{sen} x = \cos x$

$$\begin{cases} 4A_0 + 4B_0 = 1 \\ -4A_0 + 4B_0 = 0 \end{cases}$$

$8B_0 = 1 \Rightarrow B_0 = 1/8_{//}$

Sulamericana

/ /

S T Q Q S S D

$-4A_0 + 4B_0 = 0$

$A_0 = B_0$

$\therefore A_0 = 1/8$

$\therefore$

$$y_p(x) = e^{x}\left(\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} x\right)$$

$\therefore$

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\operatorname{sen} x + \frac{e^{x}}{8}(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

Método da Variação dos Parâmetros

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$: soluções fundamentais da equação homogênea.

$$W[y_1, y_2](x) \neq 0, \ \forall x \in I$$

Solução da equação homogênea correspondente:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

S T Q Q S S D

/ /

Vamos procurar uma solução particular da equação não-homogênea que tenha a forma da solução geral da homogênea, mas substituindo-se as constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ a determinar:

$$y(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

Observe que

$$y'(x) = u_1'(x) y_1(x) + u_1(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2(x) + u_2(x) y_2'(x)$$

Consideraremos:

$$y'(x) = u_1(x) y_1'(x) + u_2(x) y_2'(x),$$

ou seja,

$$u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) = 0. \quad (1)$$

Assim,

$$y''(x) = u_1'(x) y_1'(x) + u_1(x) y_1''(x) + u_2'(x) y_2'(x) + u_2(x) y_2''(x).$$

Substituindo-se y, y' e y'' na equação, obtemos:

$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + p[u_1 y_1' + u_2 y_2']$

$+ q[u_1 y_1 + u_2 y_2] = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1[y_1'' + p y_1' + q y_1] + u_2[y_2'' + p y_2' + q y_2] +$

$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)_{\,//} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$ ②

Assim (① e ②)

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

$AX = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Como $\det A = W[y_1, y_2] \neq 0$, segue que:

S T Q Q S S D

/ /

$X = A^{-1} B$

Mas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Como

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}$$

temos:

$$X = \frac{1}{W[y_1, y_2]} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W[y_1, y_2]} \cdot \begin{pmatrix} -y_2 \cdot f(x) \\ y_1 \cdot f(x \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W[y_1, y_2]} \begin{pmatrix} -y_2 f(x) \\ y_1 f(x) \end{pmatrix}$$

/ /

$u_1' = -\dfrac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}$ e $u_2' = \dfrac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}$

$\therefore$

$u_1(x) = -\displaystyle\int \frac{y_2(x) f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx$ e

$u_2(x) = \displaystyle\int \frac{y_1(x) f(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx$

Exemplo: Resolva a equação

$y'' + y = \sec x$

Resolução:

Sol. da equação homogênea

$y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow r = \pm i$

$\therefore$

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

S T Q Q S S D

/ /

Solução geral da EDO não homogênea:

$y(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\operatorname{sen} x$

Mas

$y'(x) = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x$

onde:

$u'_1 \cos x + u'_2 \operatorname{sen} x = 0$

e

$y''(x) = -u_1 \operatorname{sen} x - u'_1 \cos x + u'_2 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x$

Substituindo

$-u'_1 \operatorname{sen} x - u_1 \cos x + u'_2 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x + u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x = \sec x$

$-u'_1 \operatorname{sen} x + u'_2 \cos x = \sec x$.

Logo,

$$\begin{cases} u'_1 \cos x + u'_2 \operatorname{sen} x = 0 \\ -u'_1 \operatorname{sen} x + u'_2 \cos x = \sec x \end{cases}$$

$X = A^{-1} . B$

/ /

S T Q Q S S D

$X = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \sec x \end{pmatrix}$

$W[\cos x, \operatorname{sen} x] = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} =$

$= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$

Assim,

$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x \sec x \\ \cos x \sec x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow u_1(x) = \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \ln|\cos x| + k_1$

$u_2'(x) = 1 \Rightarrow u_2(x) = \int dx = x + k_2$

$k_1 = k_2 = 0$

$u_1(x) = \ln|\cos x|$

$u_2(x) = x$

$\therefore$

$y(x) = (\ln|\cos x|)\cos x + x \operatorname{sen} x$

S T Q Q S S D

/ /

17/06

Assim

$r_1 = i$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$, $r_4 = -i$

$y^N = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x$

→ Sol. Particular

Pelo 3° CASO

$y_p(x) = x^s [A_0 \cos x + B_0 \operatorname{sen} x]$

$y_p(x) = x^2 [A_0 \cos x + B_0 \operatorname{sen} x]$

$y_p(x) = A_0 x^2 \cos x + B_0 x^2 \operatorname{sen} x$

$y'_p(x) = 2x A_0 \cos x - x^2 A_0 \operatorname{sen} x + 2x B_0 \operatorname{sen} x + x^2 B_0 \cos x$

$y'_p(x) = \cos x (2x A_0 + x^2 B_0) + \operatorname{sen} x (2x B_0 - x^2 A_0)$

$y''_p(x) = -\operatorname{sen} x (2x A_0 + x^2 B_0) + (2A_0 + 2x B_0) \cos x$
$+ \cos x (2x B_0 - x^2 A_0) + (2B_0 - 2x A_0) \operatorname{sen} x$

$y''_p(x) = \cos x (2A_0 + 4x B_0 - x^2 A_0) + \operatorname{sen} x (2B_0 - x^2 B_0 -$
$4x A_0)$.

$y'''_p(x) = -\operatorname{sen} x (2A_0 + 4x B_0 - x^2 A_0) + (4B_0 - 2x A_0) \cos x$
$+ \cos x (2B_0 - x^2 B_0 - 4x A_0) + (-2x B_0 - 4A_0) \operatorname{sen} x$

$$y'''_p(x) = \operatorname{sen}x(-6A_0 - 6xB_0 + x^2A_0) + \cos x(6B_0 - 6xA_0 - x^2B_0)$$

$$y^{IV}_p(x) = \cos x(-6A_0 - 6B_0x + A_0x^2) + (-6B_0 + 2A_0x)\operatorname{sen}x$$
$$-\operatorname{sen}x(6B_0 - 6A_0x - B_0x^2) + \cos x(-6A_0 - 2B_0x)$$

$$y^{IV}_p(x) = \operatorname{sen}x(B_0x^2 + 8A_0x - 12B_0) + \cos x(A_0x^2 - 8B_0x - 12A_0)$$

Substituindo em

$y^{IV} + 2y'' + y = 3\operatorname{sen}x - 5\cos x$, temos

$$\cos x(\cancel{A_0x^2} - \cancel{8B_0x} - 12A_0 + 4A_0 + \cancel{8xB_0} - \cancel{2x^2A_0} + \cancel{A_0x^2})$$

$$+ \operatorname{sen}x(\cancel{B_0x^2} + \cancel{8A_0x} - 12B_0 + 4B_0 - \cancel{2x^2B_0} - \cancel{8xA_0} + \cancel{B_0x^2})$$

$$= 3\operatorname{sen}x - 5\cos x$$

$$\operatorname{sen}x(-8B_0) + \cos(-8A_0) = 3\operatorname{sen}x - 5\cos x$$

Pela igualdade de Polinômios

$-8B_0 = 3$ $\qquad\qquad$ $-8A_0 = -5$

$B_0 = -3/8$ $\qquad\qquad$ $A_0 = 5/8$

$$y_p(x) = x^2\left[\frac{5\cos x}{8} - \frac{3\operatorname{sen}x}{8}\right]$$

$$y_p(x) = \frac{5x^2\cos x - 3x^2\operatorname{sen}x}{8}$$

S T Q Q S S D

/ /

Conclusão

$$y(x) = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x\cos x + c_4 x \operatorname{sen} x + \frac{5x^2\cos x}{8} - \frac{3x^2 \operatorname{sen} x}{8}$$ //

e) $y''' - y' = x$

- Variação dos parametros

$y''' - y' = 0$

$r^3 - r = 0$

$r(r^2 - 1) = 0$

$r = 0 \qquad r^2 - 1 = 0 \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

Raizes

$r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$

$y_H(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

→ solução particular

$y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)e^{x} + u_3(x)e^{-x}$

$y'_p(x) = u_1' + u_2' e^{x} + u_2 e^{x} + u_3' e^{-x} - u_3 e^{-x}$

Mas

$y'_p = u_2 e^{x} - u_3 e^{-x}$, onde

$u_1' + u_2' e^{x} + u_3' e^{-x} = 0 \quad (1)$

$y''_p(x) = u_2' e^{x} + u_2 e^{x} - u_3' e^{-x} + u_3 e^{-x}$

Mas

$y''_p(x) = u_2 e^{x} + u_3 e^{-x}$

onde

$u_2' e^{x} - u_3 e^{-x} = 0 \quad (2)$

$y'''_p = u_2' e^{x} + u_2 e^{x} + u_3' e^{-x} - u_3 e^{-x}$

Substituindo na EDO dada

$y''' - y' = x \Rightarrow$

$u_2' e^{x} + \cancel{u_2 e^{x}} + u_3' e^{-x} - \cancel{u_3 e^{-x}} - \cancel{u_2 e^{x}} + \cancel{u_3 e^{-x}} = x$

$u_2' e^{x} + u_3' e^{-x} = x \quad (3)$

$\therefore$

$$\begin{cases} u_1' + u_2' e^{x} + u_3' e^{-x} = 0 & (1) \\ u_2' e^{x} - u_3' e^{-x} = 0 & (2) \\ u_2' e^{x} + u_3' e^{-x} = x & (3) \end{cases}$$

S T Q Q S S D

/ /

② + ③

$2u_2' e^{x} = x$

$u_2' = \frac{1}{2} x e^{-x}$

$u_2 = \int \frac{1}{2} x e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{x e^{-x} dx}_{I}$

I

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = e^{-x}(-x-1)$

$= -x e^{-x} - e^{-x}$

∴

$u_2 = \frac{-x e^{-x} - e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2} e^{-x}(x+1)$ //

②:

$u_3' = u_2' e^{2x}$

$u_3' = \frac{1}{2} x e^{-x} e^{2x}$

$u_3' = \frac{1}{2} x e^{x}$

$u_3 = \int \frac{1}{2} \underbrace{x e^{x} dx}_{II} =$

Sulamericana

Scanned by CamScanner

/ /

S T Q Q S S D

$$\int \frac{1}{2} x e^{x} dx = \frac{1}{2} \int x e^{x} dx$$

$u = x \quad du = dx$

$dv = e^{x} dx \quad v = e^{x} \qquad \int x e^{x} dx = x e^{x} - e^{x}$

$$u_3 = \frac{1}{2} e^{x} (x-1) //$$

①:

$u'_1 = - u'_2 e^{x} - u'_3 e^{-x}$

$$u'_1 = -\frac{1}{2} x e^{-x} e^{x} - \frac{1}{2} x e^{x} e^{-x} = -x$$

$u'_1 = -x$

$$u_1 = \int -x \, dx = -\frac{x^2}{2} //$$

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} e^{-x}(x+1) e^{x} + \frac{1}{2} e^{x}(x-1) e^{-x}$$

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{1}{2} x} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2} x} - \frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - 1 //$$

$$\therefore y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} - \frac{x^2}{2} - 1 //$$

S T Q Q S S D

/ /

Sistemas de EDO's de 1ª ordem

$Ax = y$: transformação linear

Para $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

Esta equação tem soluções não-nulas $\Leftrightarrow$

$\det(A - \lambda I) = 0$ ①

λ : autovalores

v = ~~autovalores~~ autovetores associados aos autovalores.

Exemplo: Encontre os autovalores e autovetores da matriz A: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

/ /

S T Q Q S S D

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0$$

$$-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$

λ_1, λ_2: autovalores de A

$(A - \lambda I)x = 0$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda = \lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 4x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_2 = 2$

$$A - \lambda I = A - 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_2 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de EDO's de 1ª ordem

$$\begin{cases} x_1'(t) = p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t) + \dots + p_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2 \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n + g_n \end{cases}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Sistemas Lineares Homogêneas com coeficientes constantes.

$$X' = A \cdot X$$

Exemplos:

① Encontre a solução do sistema:

a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

com $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

ou seja,

$x(0) = 0$ e $y(0) = 1$

→ Autovalores de A

$$(A - \lambda I)v = 0$$

S T Q Q S S D

/ /

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ \lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

→ Auto vetores

- $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -2a$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \therefore v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2a$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

conjunto fundamental de soluções

Sol. geral

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

ou

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) = -2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} \end{cases}$$

Condição inicial : $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} x(0) = 0 \Leftrightarrow \\ y(0) = 1 \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & \Rightarrow c_2 = 1/4 \\ -2c_1 + 2c_2 = 1 & \Rightarrow c_1 = -1/4 \end{cases}$$

$$\therefore X(t) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad //$$

S T Q Q S S D

/ /

b) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = -x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(A - \lambda I)v = 0$

$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1/2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + 5/4 = 0$

$\lambda = \dfrac{-1 \pm 2i}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} + i \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} - i \end{cases}$

- $\lambda_1 = -1/2 + i$

$\begin{pmatrix} -1/2 + 1/2 - i & 1 \\ -1 & -1/2 + 1/2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -ai + b = 0 \\ -a - bi = 0 \quad (\times i) \end{cases} \Leftrightarrow b = ai$

$\begin{pmatrix} a \\ ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \therefore v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\cdot\ \lambda_2 = -1/2 - i$

$$(A - \lambda I)\, v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 + 1/2 + i & 1 \\ -1 & -1/2 + 1/2 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ai + b = 0 & \Rightarrow \quad ai + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -ai \\ bi - a = 0 \quad (i) & \quad -ai - b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore v_2 = \begin{pmatrix} a \\ -ai \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} X^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2 + i)t} \\ X^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2 - i)t} \end{aligned} \right\} \text{conjunto fundamental de soluções}$$

Sol. geral (complexa)

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2 + i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2 - i)t}$$

Vamos procurar uma solução real:

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t} = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} e^{-1/2t} (\cos t + i \,\text{sen}\, t)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} e^{-1/2t} \cos t + \begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix} e^{-1/2t} \,\text{sen}\, t =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos t\\-\text{sen}\, t\end{pmatrix} e^{-1/2t} + i \begin{pmatrix}\text{sen}\, t\\\cos t\end{pmatrix} e^{-1/2t}$$

Solução geral real:

$$X = c_1 e^{-1/2t} \begin{pmatrix}\cos t\\-\text{sen}\, t\end{pmatrix} + c_2 e^{-1/2t} \begin{pmatrix}\text{sen}\, t\\\cos t\end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{-1/2t} \cos t + c_2 e^{-1/2t} \,\text{sen}\, t$$
$$y(t) = -c_1 e^{-1/2t} \,\text{sen}\, t + c_2 e^{-1/2t} \cos t$$

$$x' = -\frac{1}{2} x + y$$

$$y' = -x - \frac{1}{2} y$$

/ /

S T Q Q S S D

c) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$ $\quad \lambda_1 = \dfrac{4-0}{2} = 2$ $\quad \lambda_2 = \dfrac{4+0}{2} = 2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$(A - \lambda I)\, v = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

STQQSSD

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \therefore v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$X^{(2)} = \overset{\text{vetor}}{\alpha}\, t\, e^{2t}$$

$$\alpha e^{2t} + 2\alpha t e^{2t} = A.(\alpha t e^{2t})$$

$$\alpha e^{2t} + (2\alpha - A\alpha) t\, e^{2t} = 0$$

$\alpha = 0 \leftarrow$

$2\alpha - A\alpha = 0$ — não soluciona

Outra solução

$$X^{(2)} = \alpha t e^{2t} + \eta e^{2t} \qquad , \alpha, \eta : \text{vetor}$$

$$X' = AX$$

$$\alpha e^{2t} + 2\alpha t e^{2t} + 2\eta e^{2t} = A(\alpha t e^{2t} + \eta e^{2t})$$

$$e^{2t}(\alpha - A\eta + 2\eta) + t e^{2t}(2\alpha - A\alpha) = 0$$

/ /

$\alpha - A\eta + 2\eta = 0 \Leftrightarrow A\eta - 2\eta = \alpha \Leftrightarrow (A-2I)\eta = \alpha$

$2\alpha - A\alpha = 0 \Leftrightarrow A\alpha - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow A\alpha - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$(A-2I)\alpha = 0$

$\lambda = 2, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(A-2I)\eta = \alpha$

$\left(\begin{array}{cc:c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -\eta_1 - \eta_2 = 1 \\ \eta_1 + \eta_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \eta_1 + \eta_2 = -1$

$\eta_1 = k, \quad k \in \mathbb{R}$

$\eta_2 = -1 - k$

$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

S T Q Q S S D

/ /

Sol. Geral

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

3ª Lista

Nos problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$

Resolução:

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}.$$

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Resolvendo a eq. do segundo grau, temos que:

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (4.1.2)}}{2.1} \iff r = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

∴

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$ ▪

3 - $6y'' - y' - y = 0$

$$6r^2 - r^2 - 1 = 0$$

Assim:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{12} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} \begin{cases} r_1 = \frac{13}{6} \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

Logo:

$$y(t) = c_1 e^{13/6\, t} + c_2 e^{-2t}$$ ▪

4 - $2y'' - 3y' + y = 0$

$$2r^2 - 3r + 1 = 0$$

Daí temos:

$$r^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} \Leftrightarrow$$

$$r^2 = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1/2 \end{cases}$$

Concluímos então que

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$$ ▪

5. $y'' + 5y' = 0$

Temos:

$$r^2 + 5r = 0$$
$$r(r+5) = 0$$

Ou seja:

$r_1 = 0$ ou $r_2 + 5 = 0 \Rightarrow r_2 = -5$

Solução

$$y(t) = c_1 e^0 + c_2 e^{-5t} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-5t} \blacksquare$$

6- $4y'' - 9y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{9}{4} y = 0$

Tem-se:

$$r^2 - \frac{9}{4} r = 0$$
$$r(r - 3/2) = 0$$

Daí, vêm

$r_1 = 0$ ou $r = 3/2$

Logo

$$y(t) = c_1 e^0 + c_2 e^{3/2 t} \Leftrightarrow y(t) = c_1 + c_2 e^{3/2 t} \blacksquare$$

7- $y'' - 9y' + 9y = 0$

Temos:

$$r^2 - 9r + 9 = 0$$

Logo

$$r = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4.1.9}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{9 \pm \sqrt{81-36}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{2}$$

$$r_1 = \frac{9+\sqrt{45}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{9-\sqrt{45}}{2}$$

Logo

$$y(t) = c_1 e^{\frac{9+\sqrt{45}}{2}t} + c_2 e^{\frac{9-\sqrt{45}}{2}t} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = c_1 e^{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}t}$$

8 - $y'' - 2y' - 2y = 0$

temos

$$r^2 - 2r - 2 = 0$$

E

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-2)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \begin{cases} r_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1+\sqrt{3} \\ r_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Conclusão:

$$y(t) = c_1 e^{(1+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(1-\sqrt{3})t}$$

EQUAÇÕES HOMOGENEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad (1)$$

Onde f é alguma função dada.

A equação é dita linear se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \quad (2)$$

isto é, se f é linear em y e y'. Na eq. 2, g, p e q são funções especificadas da variável independente t, mas não dependem de y. Nesse caso, reescrevemos, em geral, a Eq. (1) como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (3)$$

onde a linha denota diferenciação em relação a t. No lugar da Eq. (3), encontramos, com frequência, a equação

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (4)$$

É claro que, se $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Eq. 4 por P(t) obtendo assim, a Eq. 3 com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \quad (5)$$

- Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial, como as Eq.s (1), (3) ou (4), junto com um par de condições

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (6)$$

onde y_0 e y'_0 são números dados.

Duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes.

Uma equação linear de segunda ordem é dita homogênea se a função $g(t)$ na Eq. (3), ou $G(t)$ na eq. 4, for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita não homogênea. Em consequência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes de termo não-homogêneo. Vamos começar nossa discussão com equações homogêneas, que escrevemos na forma

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \qquad (7)$$

O problema de resolver equações homogêneas é o mais fundamental.

Vamos concentrar nossa atenção, ~~nas equações~~ em equações, nas quais P, Q e R são constantes. Nesse caso, a Eq. 7 torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (8)$$

onde a, b e c são constantes dadas.

A equação 8 tem coeficientes reais arbitrários. Baseados em nossa Experiência com a Eq. (9), vamos procurar, também, soluções exponenciais para a Eq. 8. Suponhamos, então, que $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo y, y' e y'' na Eq. 8 por essas expressões temos:

$$(ar^2+br+c)e^{rt}=0,$$

ou, como $e^{rt}\neq 0$,

$$ar^2+br+c=0 \qquad (9)$$

A equação 9 é chamada de equação característica da equação diferencial 8.

Como a eq. 9 é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas.

segue que

$$y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

é solução da equação 9.

Ex.
Encontre a solução geral de

$$y''+5y'+6y=0.$$

Vamos supor que $y=e^{rt}$, então, r tem que ser raiz da equação característica

$$r^2+5r+6=0=(r+2)(r+3)=0$$

Assim, os valores de r são $r_1=-2$ e $r_2=-3$; a solução geral é

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}.$$

Scanned by CamScanner

Nos problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1- e^{2t}, $e^{-3t/2}$

O wronskiano das funções e^{2t} e $e^{-3t/2}$ em t_0 é dado por:

$$W(e^{2t}, e^{-3t/2})(t_0) = \begin{vmatrix} e^{2t_0} & e^{-3t/2} \\ (e^{2t})' & (e^{-3t/2})' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-3t/2} \\ 2e^{2t} & -\frac{3}{2} e^{-3t/2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} e^{2t} \cdot e^{-3t/2} - 2e^{2t} e^{-3t/2} =$$

$$= \left(-\frac{3}{2} - 2\right) e^{2t - \frac{3t}{2}} = \left(-\frac{7}{2}\right) e^{\frac{t}{2}} = -\frac{7}{2} e^{t/2}.$$

cost, sent

$$W(\cos t, \operatorname{sen} t) = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t' & \operatorname{sen} t' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} =$$

$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1_{//}$

Scanned by CamScanner

3 - e^{-2t}, te^{-2t}

$$W(e^{-2t}, te^{-2t}) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ (e^{-2t})' & (te^{-2t})' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{vmatrix} = e^{-2t}(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 2e^{-2t}te^{-2t}$$

$$= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t}.$$

Conclusão

$$W(e^{-2t}, te^{-2t}) = e^{-4t}$$

4 - x, xe^{x}

$$W(x, xe^{x}) = \begin{vmatrix} x & xe^{x} \\ x' & (xe^{x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & xe^{x} \\ 1 & e^{x} + xe^{x} \end{vmatrix} =$$

$$x(e^{x} + xe^{x}) - xe^{x} = xe^{x} + x^2e^{x} - xe^{x} = x^2e^{x}$$

Portanto

$$W(x, xe^{x}) = x^2e^{x}$$

5 - $e^t \operatorname{sen} t$, $e^t \cos t$

$$W(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t) = \begin{vmatrix} e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t \\ (e^t \operatorname{sen} t)' & (e^t \cos t)' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^t \operatorname{sen} t & e^t \cos t \\ e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t & e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t \end{vmatrix} =$$

$$= e^t \operatorname{sen} t \,(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t) - e^t \cos t\,(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t) =$$

$$= e^{2t} \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} - e^{2t} \operatorname{sen}^2 t - e^{2t} \cancel{\cos t \operatorname{sen} t} - e^{2t} \cos^2 t =$$

$$= -e^{2t} \operatorname{sen}^2 t - e^{2t} \cos^2 t = -e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = -e^{2t}$$

Portanto

$$W(e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t) = -e^{2t} \blacksquare$$

6 - $\cos^2 \theta$, $1 + \cos 2\theta$

$$W(\cos^2 \theta, 1 + \cos 2\theta) = \begin{vmatrix} \cos^2 \theta & 1 + \cos 2\theta \\ (\cos^2 \theta)' & (1 + \cos 2\theta)' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^2\theta & 1+\cos 2\theta \\ -2\cos\theta \operatorname{sen}\theta & -2\operatorname{sen}2\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2\theta(-2\operatorname{sen}2\theta) + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta(1+\cos 2\theta) =$$

$$= \cos^2\theta(-2\operatorname{sen}2\theta) + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta(1+2\cos^2\theta-1) =$$

$$= \cos^2\theta(-2\operatorname{sen}2\theta) + \operatorname{sen}2\theta(2\cos^2\theta) =$$

$$= -2\cos^2\theta\operatorname{sen}2\theta + 2\cos^2\theta\operatorname{sen}2\theta =$$

$$= 0.$$

Portanto

$W(\cos^2\theta, 1+\cos 2\theta) = 0$

Nos problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7- $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

Devemos deixar a equação na forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t).$$

Para isso, divide-se a equação dada por t encontrando-se

$$y'' + \frac{3}{t} = 1$$

Logo:

$p(t) = 0$, $q(t) = \frac{3}{t}$ e $g(t) = 1$.

Scanned by CamScanner

Observemos que:

$p(t) = 0$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$

$g(t) = \frac{3}{t}$ é " para $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$

$g(t) = 1$ é " $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Logo os intervalos onde a equação dada é contínua são

$]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$

Conclusão

$I = 0 < t < \infty$ pois este é o intervalo que contém o ponto inicial $t = 1$, no qual todos os coeficientes são contínuos.

8- $(t-1)y'' - 3t\,y' + 4y = \text{sen}\,t$ $\quad y(-2) = 2 \quad y'(-2) = 1$

Colocando na forma adequada, temos:

$$y'' - \frac{3t}{t-1} y' + \frac{4}{t-1} y = \frac{\text{sen}\,t}{t-1}$$

Observemos que

$\frac{-3t}{t-1}$ é contínua p/ todo $t \neq 1$

$\frac{4}{t-1}$ " " " " " "

$\frac{\text{sen}\,t}{t-1}$ " " " " "

Assim sendo, o intervalo que contém o ponto inicial e que todos os coeficientes são contínuos é

$]-\infty, 1[$ ■

9- $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3)=0$, $y'(3)=-1$

Na forma adequada:

$$y'' + \frac{3\cancel{t}}{\cancel{t}(t-4)}y' + \frac{4}{t(t-4)}y = \frac{2}{t(t-4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'' + \frac{3}{t-4}y' + \frac{4}{t(t-4)}y = \frac{2}{t(t-4)}$$

Observa-se que

→ $\frac{3}{t-4}$ é contínua p/ todo $t \neq 4$.

→ $\frac{4}{t(t-4)}$ é contínua p/ $t \neq 0$ e $t \neq 4$

→ $\frac{2}{t(t-4)}$ é contínua p/ $t \neq 0$ e $t \neq 4$

Assim concluímos que o maior intervalo que contém o ponto inicial e que os coeficientes são contínuos é:

$0 < t < 4$ ■

10- $y'' + \cos t\, y' + 3\ln|t|\, y = 0$, $\quad y(2) = 3$, $y'(2) = 1$

Basta verificar a continuidade dos coeficientes

Observa-se que
$\cos t$ é contínua $\forall t \in \mathbb{R}$.
$3\ln|t|$ é contínua p/ todo $t \neq 0$.

0 é contínua $\forall t \in \mathbb{R}$.

Assim sendo concluímos que o maior intervalo que contém o ponto inicial é

$0 < t < \infty$.

11- $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$, ? $\quad y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

Devemos colocar a equação diferencial dada na forma padrão. Para isto divide-se ambos os lados por $x-3$, obtendo o seguinte:

$$y'' + \frac{x}{x-3}y' + \frac{\ln|x|}{x-3}y = 0$$

Verifiquemos agora a continuidade dos coeficientes:

Coeficiente	Continuidade
$\frac{x}{x-3}$	$x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3$
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x-3}$	$x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0$ e $x \neq 3$
0	$\mathbb{R}$
Todos	$]-\infty, 0[$, $]0, 3[$ e $]3, +\infty[$

Daí concluímos que o maior intervalo que contém o ponto inicial e que todos os coeficientes são contínuos é expresso por:

$$0 < x < 3$$ ■

12 - $(x-2)y'' + y' + (x-2)(tg\,x)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$

Dividindo e equação diferencial por $(x-2)$ obtemos:

$$y'' + \frac{1}{(x-2)}y' + (tg\,x)y = 0$$

Estudemos a continuidade dos coeficientes:

$\frac{1}{(x-2)}$ é contínua $\forall\ x \neq 2$

$tg(x)$ é contínua $\forall\ x \neq 0$ e $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ e k ímpar

Assim sendo, o maior intervalo que contém o ponto incial e que os coeficientes são são contínuos é

$$2 < t < \frac{3\pi}{2}$$ ■

Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas.

Na seção anterior, mostra-se como resolver algumas equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

onde a, b e c são constantes. A partir desses resultados, vamos obter uma visão mais clara das soluções de

todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem.
Essa compreensão irá nos auxiliar, por sua vez, a resolver outros problemas que encontraremos mais tarde.

Ao desenvolver a teoria das equações diferenciais lineares, é conveniente usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I, isto é, para $\alpha < t < \beta$. Os casos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$ estão incluídos. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I, definimos o operador diferencial L pela fórmula

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \qquad (1)$$

Note que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor de $L[\phi]$ em um ponto t é

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi' + q(t)\phi t.$$

Vamos estudar, nesta seção, a equação linear homogênea de segunda ordem $L[\phi](t) = 0$. Como é costume usar o símbolo y para denotar $\phi(t)$, escreveremos, normalmente, essa equação na forma

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y \qquad (2)$$

TEOREMA
Considere o problema de valor inicial

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \qquad (3)$$

onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto

Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ desse problema, e a solução existe em todo o intervalo I.

Enfatizamos que o teorema diz três coisas:

1- O problema de valor inicial tem uma solução; em outras palavras, existe uma solução.

2- O problema de valor inicial tem apenas uma solução isto é, a solução é única.

3- A solução ϕ está definida em todo o intervalo I, onde os coeficientes são contínuos e onde é, pelo menos, duas vezes diferenciável.

Ex.

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \quad y(1) = 2 \text{ e } y'(1) = 1$$

certamente existe.

Se a equação diferencial dada for colocada na forma (4), então $p(t) = 1/(t-3)$, $q(t) = -(t+3)/t(t-3)$ e $g(t) = 0$. Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são $t = 0$ e $t = 3$. Logo, o maior intervalo, contendo o ponto inicial $t = 1$, no qual todos os coeficientes são contínuos é $0 < t < 3$. Portanto, esse é o maior intervalo no qual o teorema 3.2.1 garante que a solução existe.

Vamos supor, agora, que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2); em outras palavras,

$$L[y_1] = y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0, \qquad (4)$$

e analogamente para y_2. Então, como nos exemplos da seção anterior, podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2. Enunciamos este resultado como um teorema.

TEOREMA 3.2.2

(Princípio da Superposição) Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

TEOREMA

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e que o Wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

não se anula no ponto t_0, onde são dadas as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'.$$

Então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais.

EXEMPLO 3.

Vimos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções da equação diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Encontre o Wronskiano de y_1 e y_2.

O Wronskiano dessas duas funções é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}$$

Como W é diferente de zero para todos os valores de t, as funções y_1 e y_2 podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada junto com quaisquer condições iniciais prescritas para qualquer valor de t.

TEOREMA

Considere a equação diferencial (a)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

cujos coeficientes p e q são ~~constantes~~ contínuos em algum intervalo aberto I. Escolha algum ponto t_0 em I. Sejam y_1 a solução da Eq. (2) que satisfaz, também, as condições iniciais

$$y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0,$$

e seja y_2 a solução da Eq (2) que satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 1.$$

Então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

- Podemos resumir a discussão dessa seção da seguinte maneira: para encontrar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad \alpha < t < \beta,$$

precisamos, primeiro, encontrar duas soluções y_1 e y_2 que satisfazem a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Depois precisamos nos certificar de que existe um ponto no intervalo onde o wronskiano de y_1 e y_2 não se anula. Nessas circunstâncias, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral é

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Se as condições iniciais são dadas em um ponto em $\alpha < t < \beta$ onde $W \neq 0$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidos de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas.

Seção 3.3

Nos problemas de 1 a 8, determine se o par de funções dadas é linearmente independente ou linearmente dependente.

1 - $f(t) = t^2 + 5t$, $g(t) = t^2 - 5t$

$$W(t^2+5t, t^2-5t)(t) = \begin{vmatrix} t^2+5t & t^2-5t \\ 2t+5 & 2t-5 \end{vmatrix} =$$

$$(t^2+5t)(2t-5) - (t^2-5t)(2t+5) =$$

$$= 2t^3 - 5t^2 + 10t^2 - 25t - 2t^3 - 5t^2 + 10t^2 + 25t =$$

$$= 10t^2$$

Como $W(t^2+5t, t^2-5t) = 10t^2$ concluímos que W não é sempre nulo e $\therefore$ $f(t) = t^2+5t$ e $g(t) = t^2-5t$ são linearmente independentes

2) $f(\theta) = \cos 3\theta$, $g(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$W(\cos 3\theta, 4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \begin{vmatrix} \cos 3\theta & 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ -3\,\text{sen}\,3\theta & -12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos 3\theta\,(-12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) + 3\,\text{sen}\,3\theta\,(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)(-12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) + 3(-4\,\text{sen}^3\theta + 3\,\text{sen}\,\theta)$$

$$(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$= \cos 3\theta\,(-12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) + \cos 3\theta\,(-12\,\text{sen}^3\theta + 9\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= \cos 3\theta\,(-12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta) + \cos 3\theta\,(-12\,\text{sen}\,\theta\,(1 - \cos^2\theta) + 9\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= \cos 3\theta\,(-12\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + \cancel{3\,\text{sen}\,\theta} - \cancel{12\,\text{sen}\,\theta} + \cancel{12\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta} + 9\,\text{sen}\,\theta)$$

$$= \cos 3\theta\,(0) = 0$$

Logo, conclui-se que $f(\theta) = \cos 3\theta$ e $g(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ são linearmente independentes.

3- $f(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t$, $g(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t$, $\mu \neq 0$

$$W(e^{\lambda t}\cos \mu t, e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t) =$$

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos \mu t & e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t \\ \lambda e^{\lambda t} \cos \mu t - \mu e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t & \lambda e^{t} \operatorname{sen} \mu t + \mu e^{\lambda t} \cos \mu t \end{vmatrix} =$$

$$e^{\lambda t} \cos \mu t (\lambda e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t + \mu e^{\lambda t} \cos \mu t) - e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t (\lambda e^{\lambda t} \cos \mu t - \mu e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t) =$$

$$= \lambda e^{2\lambda t} \cos \mu t \operatorname{sen} \mu t + \mu e^{2\lambda t} \cos^2 \mu t - \lambda e^{2\lambda t} \operatorname{sen} \mu t \cos \mu t + \mu e^{2\lambda t} \operatorname{sen}^2 \mu t$$

$$= \lambda e^{2\lambda t} (\cos \mu t \operatorname{sen} \mu t - \operatorname{sen} \mu t \cos \mu t) + \mu e^{2\lambda} (\cos^2 \mu t + \operatorname{sen}^2 \mu t) =$$

$$= \lambda e^{2\lambda t} (0) + \mu e^{2\lambda t} (1) =$$

$= \mu e^{2\lambda t}$. Logo, como $\mu e^{2\lambda t}$ não é nula $\forall t \in \mathbb{R}$ então $f(t)$ e $g(t)$ são L.I.

Scanned by CamScanner

4 - $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = e^{3(x-1)}$

$$W(e^{3x}, e^{3(x-1)}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{3x-3} \\ 3e^{3x} & 3e^{3x-3} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}(3e^{3x-3}) - 3e^{3x}(e^{3x-3}) =$$

$$= 3e^{6x-3} - 3e^{6x-3} = e^{6x-3}(3-3) = e^{6x-3} \cdot 0 = 0$$

Como $W(e^{3x}, e^{3(x-1)}) = 0$, conclui-se que $f(x) = e^{3x}$ e $g(x) = e^{3(x-1)}$ são linearmente dependentes $\forall x \in \mathbb{R}$.

5 - $f(t) = 3t - 5$, $g(t) = 9t - 15$

$$W(3t-5, 9t-15) = \begin{vmatrix} 3t-5 & 9t-15 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$(3t-5)9 - 3(9t-15) = 27\cancel{t} - 4\cancel{5} - 2\cancel{7}t + \cancel{4}5 = 0$$

Logo $f(t) = 3t - 5$ e $g(t) = 9t - 15$ são linearmente dependentes para todo t perencendo aos reais.

Scanned by CamScanner

6 - $f(t)=t, \quad g(t)=t^{-1}$

$$W(t,t^{-1}) = \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{t}{t^2} - \frac{1}{t} =$$

$$-\frac{1}{t} - \frac{1}{t} = -\frac{2}{t}.$$

Como $W(t,t^{-1})$ não é nula p/ todo $t \in \mathbb{R}$ conclui-se que $f(t)=t$ e $g(t)=t^{-1}$ são linearmente independentes

7 - $f(t)=3t \quad , \quad g(t)=|t|$

$$W(3t,|t|) = \begin{cases} W(3t,t) & p/\ t>0 \\ W(3t,-t) & p/\ t<0 \end{cases}$$

. $t>0$

$$W(3t,t) = \begin{vmatrix} 3t & t \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3t - 3t = 0 \ //$$

. $t<0$

$$W(3t,-t) = \begin{vmatrix} 3t & -t \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3t + 3t = 0$$

Dúvida — Conferir resposta?

8- $f(x) = x^3, \quad g(x) = |x|^3$

$$W(x^3, |x|^3) = \begin{cases} W(x^3, x^3) & \text{se } x \geq 0 \quad \text{I} \\ W(x^3, (-x)^3) & \text{se } x < 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

I

$$W(x^3, x^3) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$W(x^3, -x^3) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Conclusão:

9. O Wronskiano de duas funções é $W(t) = t\,sen^2 t$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?

São linearmente independentes pois $W(t) = t\,sen^2 t$ não é sempre nula.

10- O wronskiano de duas funções é $W(t) = t^2 - 4$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?

Scanned by CamScanner

Resposta idêntica à do exercício 9.

3.3 Independência Linear e o Wronskiano

Nesta seção vamos relacionar as idéias de uma solução geral e um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear, ao conceito de independência linear, que é contral ao estudo de álgebra linear.

TEOREMA.

Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo aberto I e se $W(f,g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I, em $W(f,g)(t) = 0$ para todo t em I.

TEOREMA DE ABEL

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad (7)$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo aberto I, então o Wronskiano $W(y_1,y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1,y_2)(t) = c\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \qquad (8).$$

onde c é uma constante determinada que depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é zero $\forall t$ em I (se $c=0$) o nunca se anula em I (se $c \neq 0$).

TEOREMA

Seja y_1 e y_2 soluções da Eq. 7,

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I. Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I, se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I. De outro modo, y_1 e y_2 são linearmente indenpendentes em I se, e somente, $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula em I.

3.4

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + ib$.

1. $\exp(1+2i)$

$$e^{1+2i} = e^1(\cos 2 + i \operatorname{sen} 2) =$$

$$= e\cos 2 + i e \operatorname{sen} 2 //$$

2. $\exp(2-3i)$

$$e^{2-3i} = e^{2}(\cos 3 - i\cos 3) =$$

$$= e^{2}\cos 3) - e^{2}i\cos 3$$

3. $e^{i\pi}$

$$e^{i\pi} = e^{0}(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = 1(-1 + i.0) = -1$$

4 – $e^{2-(\pi/2)i}$

$$= e^{2}(\cos \pi/2 - i\,\mathrm{sen}\,\pi/2) = e^{2}(0 - i) = -ie^{2}$$

5. 2^{1-i}

$$2^{1-i} = e^{\ln 2^{1-i}} = e^{(1-i)\ln 2} = e^{\ln 2 - i\ln 2} =$$

$$e^{\ln 2}(\cos \ln 2 - i\,\mathrm{sen}\ln 2) = 2\cos(\ln 2) - 2i\,\mathrm{sen}(\ln 2)$$

6. π^{-1+2i}

$$\pi^{-1+2i} = e^{\ln\pi^{(-1+2i)}} = e^{(-1+2i).\ln\pi} = e^{-\ln\pi + 2i\ln\pi} =$$

$$= e^{-\ln\pi}(\cos(\ln\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\ln\pi))$$ $\ast\ -\ln\pi = \ln\pi^{-1}$

$$= \pi^{-1}\cos(\ln\pi) + \pi^{-1}i\,\mathrm{sen}(2\ln\pi)$$

Scanned by CamScanner

Nos problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7- $y'' - 2y' + 2y = 0$

Eq. característica

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

Assim

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.2}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{2 \pm 2i}{2} \begin{cases} r_1 = 1 + i \\ r_2 = 1 - i \end{cases}$$

Logo

sol. geral

$$y = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t} =$$

$$y = c_1 e^{t+ti} + c_2 e^{t-ti} =$$

$$y = c_1 e^t e^{it} + c_2 e^t e^{-ti} =$$ Pela Fórmula de Euler

$$y = c_1 e^t (\cos t + i\,\text{sen}\,t) + c_2 e^t (\cos t - i\,\text{sen}\,t)$$

$$y = c_1 e^t \cos t + c_1 e^t i\,\text{sen}\,t + c_2 e^t \cos t - c_2 i\,\text{sen}\,t\, e$$

$$y = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \cos t + c_1 e^t i\,\text{sen}\,t - c_2 i\,\text{sen}\,t\, e^t$$

$$y = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \,\text{sen}\,t$$

8. $y'' - 2y' + 6y = 0$

Eq. característica.

$$r^2 - 2r + 6 = 0$$

Raízes:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.6}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

$r_1 = 1 + \sqrt{5}\,i$

$r_2 = 1 - \sqrt{5}\,i$

Solução geral

$$y = c_1 e^{(1+\sqrt{5}i)t} + c_2 e^{(1-\sqrt{5}i)t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 e^t e^{\sqrt{5}it} + c_2 e^t . e^{-\sqrt{5}it}$$ $\Leftarrow$ Pela Fórmula de Euler

$$y = c_1 e^t (\cos\sqrt{5}t - i\,\text{sen}\sqrt{5}t) + c_2 e^t (\cos\sqrt{5}t - i\,\text{sen}\sqrt{5}$$

$$y = c_1 e^t \cos t\sqrt{5} - c_1 e^t i\,\text{sem}\sqrt{5}t + c_2 e^t \cos t\sqrt{5} - c_2 e^t i\,\text{sen}t\sqrt{5}$$

$$y = c_1 e^t \cos t\sqrt{5} + c_2 e^t \cos t\sqrt{5} - c_1 e^t i\,\text{sen}\sqrt{5}t - c_2 e^t i\,\text{sen}t\sqrt{5}$$

$$y = k_1 e^t \cos t\sqrt{5} + k_2 e^t \text{sen}\sqrt{5}t$$

9- $y'' + 2y' - 8y = 0$

Eq. característica

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$

Raízes

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-8)}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -4 \end{cases}$$

Portanto,

$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}$ é a sol. geral. da

10 - $y'' + 2y' + 2y = 0$

Eq. característica

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

Raízes

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.2}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -1 + i \\ r_2 = -1 - i \end{cases}$$

Assim a solução geral é

$$y = c_1 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t} e^{it} + c_2 e^{-t} e^{-it} \Leftrightarrow$$

Pela formula de Euler

$$y = c_1 e^{-t}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) + c_2 e^{-t}(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$y = c_1 e^{-t}\cos t + c_1 e^{-t} i\,\mathrm{sen}\,t + c_2 e^{-t}\cos t - c_2 e^{-t} i\,\mathrm{sen}\,t$$

$$y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\cos t + c_1 e^{-t} i\,\mathrm{sen}\,t - c_2 e^{-t} i\,\mathrm{sen}\,t$$

$$y = K_1 e^{-t}\cos t + K_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t \blacksquare$$

11 - $y'' + 6y' + 13y = 0$

Eq. caracteristica

$$r^2 + 6r + 13 = 0$$

Raízes

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.1.13}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-6 \pm 4i}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -3 + 2i \\ r_2 = -3 - 2i \end{cases}$$

Solução geral

$$y = c_1 e^{(-3+2i)t} + c_2 e^{(-3-2i)t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 e^{-3t} \cdot e^{2it} + c_2 e^{-3t} e^{-2it} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = c_1 e^{-3t}(\cos 2t + i\,\mathrm{sen}\,2t) + c_2 e^{-3t}(\cos 2t - i\,\mathrm{sen}\,2t)$$

$\Leftrightarrow \; y = c_1 e^{-3t}\cos 2t + c_1 e^{-3t} i \,\text{sen}\, 2t + c_2 e^{-3t}\cos 2t - c_2 e^{-3t} i\,\text{sen}\, 2t$

$y = c_1 e^{-3t}\cos 2t + c_2 e^{-3t}\cos 2t + c_1 e^{-3t} i\,\text{sen}\, 2t - c_2 e^{-3t} i\,\text{sen}\, 2t$

$y = (c_1 + c_2) e^{-3t}\cos 2t + (c_1 i - c_2 i) e^{-3t}\,\text{sen}\, 2t$

Sendo $K_1 = c_1 + c_2$ e $K_2 = c_1 i - c_2 i$ temos

$y = K_1 e^{-3t}\cos 2t + K_2 e^{-3t}\,\text{sen}\, 2t \;\blacksquare \Rightarrow$ Sol. geral.

12 - $4y'' + 9y = 0$

Supondo e^{rt} solução da edo dada, temos a seguinte eq. característica

$4r^2 + 9 = 0 \;\Leftrightarrow$

$4r^2 = -9$

$r = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$

$r = \pm \frac{3}{2} i \quad \begin{cases} r_1 = \frac{3}{2} i \\ r_2 = -\frac{3}{2} i \end{cases}$

Assim a solução geral é dada por

$y = c_1 e^{\frac{3}{2} i t} + c_2 e^{-\frac{3}{2} i t} \Rightarrow$ Pela Fórmula de Euler

$y = c_1 \left(\cos \frac{3t}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3t}{2}\right) + c_2\left(\cos\frac{3t}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{3t}{2}\right)$

$y = c_1 \cos\frac{3t}{2} + c_1 i\,\text{sen}\,\frac{3t}{2} + c_2\cos\frac{3t}{2} - c_2 i\,\text{sen}\,\frac{3t}{2}$

$y = (c_1 + c_2)\cos\frac{3t}{2} + (c_1 i - c_2 i)\,\text{sen}\,\frac{3t}{2}$

$y = K_1 \cos 3t/2 + K_2\,\text{sen}\, 3t/2 \;//$

13- $y'' + 2y' + 1,25y = 0$

Supondo e^{rt} solução da equação dada temos a seguinte eq. característica

$$r^2 + 2r + 1,25 = 0$$

Assim

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.1,25}}{2.1} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{2} \begin{cases} r_1 = -1 + \frac{i}{2} \\ r_2 = -1 - \frac{i}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{(-1 + i/2)t} + c_2^{(-1 - i/2)t} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t + ti/2} + c_2 e^{-t - ti/2} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t} \cdot e^{ti/2} + c_2 e^{-t} \cdot e^{-t/2 i} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t} (\cos t/2 + i \operatorname{sen} t/2) + c_2 e^{-t} (\cos t/2 - i \operatorname{sen} t/2)$$

$$y = c_1 e^{-t} \cos t/2 + c_1 e^{-t} i \operatorname{sen} t/2 + c_2 e^{-t} \cos t/2 - c_2 e^{-t} i \operatorname{sen} t/2$$

$$y = c_1 e^{-t} \cos t/2 + c_2 e^{-t} \cos t/2 + c_1 e^{-t} i \operatorname{sen} t/2 - c_2 e^{-t} i \operatorname{sen} t/2$$

$$y = (c_1 + c_2) e^{-t} \cos t/2 + (c_1 i - c_2 i) \operatorname{sen} t/2$$

$$y = k_1 e^{-t} \cos t/2 + k_2 e^{-t} \operatorname{sen} t/2 \,\|$$

14- $9y'' + 9y' - 4y = 0$

Supondo e^{rt} solução da EDO, temos:

Eq característica

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

Raízes:

$$r = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4.9.(-4)}}{18}$$

$$r = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 144}}{18}$$

$$r = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{18}$$

$$r = \frac{-9 \pm 15}{18} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{1}{3} \\ r_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{1/3 t} + c_2 e^{-4/3 t}$$

15- $y'' + y' + 1,25y = 0$

Eq. característica

$$r^2 + r + 1,25 = 0$$

Raízes

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.1,25}}{2}$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} + i \\ r_2 = -\frac{1}{2} - i \end{cases}$$

Solução geral

$$y = c_1 e^{(-1/2 + i)t} + c_2 e^{(-1/2 - i)t}$$

$$y = c_1 e^{-1/2 t} \cdot e^{it} + c_2 e^{-t/2} e^{-it} \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t/2} (\cos t + i \operatorname{sen} t) + c_2 e^{-t/2} (\cos t - i \operatorname{sen} t) \Leftrightarrow$$

$$y = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_1 i e^{-t/2} \operatorname{sen} t + c_2 e^{-t/2} \cos t - c_2 i e^{-t/2} \operatorname{sen} t$$

$$y = (c_1 + c_2) e^{-t/2} \cos t + (c_1 i - c_2 i) e^{-t/2} \operatorname{sen} t \rightarrow$$

$$y = k_1 e^{-t/2} \cos t + k_2 e^{-t/2} \operatorname{sen} t$$

16- $y'' + 4y' + 6{,}25 y = 0$

$$r^2 + 4r + 6{,}25 = 0$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{-9}}{2} \Leftrightarrow r = \frac{-4 \pm 3i}{2} \begin{cases} r_1 = -2 + \frac{3}{2} i \\ r_2 = -2 - \frac{3}{2} i \end{cases}$$

Sol. geral

$$y = c_1 e^{\left(-2 + \frac{3}{2} i\right) t} + c_2 e^{\left(-2 - \frac{3}{2} i\right) t}$$

$$y = c_1 e^{-2t} \cdot e^{3/2 it} + c_2 e^{-2t} e^{-3/2 it}$$

Scanned by CamScanner

$$y = c_1 e^{-2t}\left(\cos 3t/2 + i \operatorname{sen} 3t/2\right) + c_2 e^{-2t}\left(\cos 3t/2 - i \operatorname{sen} 3t/2\right)$$

$$y = c_1 e^{-2t}\cos 3t/2 + c_1 i e^{-2t}\operatorname{sen} 3t/2 + c_2 e^{-2t}\cos 3t/2 - c_2 i e^{-2t}\operatorname{sen} 3t/2$$

$$y = (c_1 + c_2)e^{-2t}\cos(3t/2) + (c_1 i - c_2 i)e^{-2t}\operatorname{sen} 3t/2$$

Sendo $c_1 + c_2 = K_1$ e $c_1 i - c_2 i = K_2$ então

$$y = K_1 e^{-2t}\cos 3t/2 + K_2 e^{-2t}\operatorname{sen} 3t/2 \quad \blacksquare$$

RAÍZES COMPLEXAS DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Vamos continuar nossa discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

onde a, b e c são números reais dados. Vimos, na seção 3.1, que, se procurarmos soluções da forma $y = e^{rt}$, então r tem que ser raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (2)$$

Se as r_1 e r_2 são reais e distintas, o que ocorre sempre que o discriminitante $b^2 - 4ac$ for positivo, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \qquad (3)$$

Suponha, agora, que $b^2 - 4ac$ é negativo. Então, as raizes da Eq. (2) são números complexos negativos; vamos denotá-los por

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad r_2 = \lambda - i\mu , \qquad (4)$$

onde λ e μ são reais. As expressões correspondentes para y são

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t] \quad , \quad y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \qquad (5)$$

Nossa primeira tarefa é explorar o significado dessas expressões, o que envolve o cálculo de uma função exponencial com expoente completo.

O QUE SIGNIFICA ELEVAR O NÚMERO e a UMA POTÊNCIA COMPLEXA?

A resposta é dada por uma relação importante conhecida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler:

Lembre-se ~~que~~ do cálculo que a série de Taylor para e^t em torno de $t = 0$ é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad -\infty < t < \infty \qquad (7)$$

Se supusermos que podemos substituir t por it na Eq.(7), teremos

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (8)$$

onde separamos a soma em suas partes real e imaginária, usando o fato de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, i e assim por diante. A primeira série na eq. 8 é precisamente a série de Taylor para $\cos t$ em torno de $t = 0$, e a segunda é a série de taylor para $\operatorname{sen} t$ em $t = 0$. Temos, então,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \qquad (9).$$

A eq. 9 é conhecida como fórmula de Euler.

Existem algumas variantes da fórmula de Euler que vale a pena notar. Substituindo t por $-t$ na Eq. 9 e lembrando que $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, temos

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t.$$

Nota:

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t$$

$$e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) =$$

$$= e^{\lambda t} \cos \mu t + e^{\lambda t} i \operatorname{sen} \mu t$$

Seção 3.5

Nos problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + 2y = 0$

$r^2 - 2r + 2 = 0$

$r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.1}}{2}$

$r = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1. \end{cases}$

2 -

Sol. geral

$y = c_1 e^t + c_2 t e^t$

2 - $9y'' + 6y' + y = 0$

$9r^2 + 6r + 1 = 0$

$r = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.9.1}}{18}$

$r = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{18}$ $\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{3} \\ r_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Sol. geral

$y = c_1 e^{-t/3} + c_2 t e^{-t/3}$

3- $4y'' - 4y' - 3y = 0$

$4r^2 - 4r - 3 = 0$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}$$

$$r = \frac{4 \pm 8}{8} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{3}{2} \\ r_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Solução geral

$$y = c_1 e^{3/2 t} + c_2 e^{-1/2 t}$$

4 - $4y'' + 12y' + 9y = 0$

$4r^2 + 12r + 9 = 0$

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4.4.9}}{8}$$

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$r = \frac{-12 \pm 0}{8} \quad \begin{cases} r_1 = -\frac{3}{2} \\ r_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{-3/2 t} + c_2 t e^{-3/2 t}$$

5- $y'' - 2y' + 10y = 0$

$r^2 - 2r + 10 = 0$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.10}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \begin{cases} r_1 = 1 + 3i \\ r_2 = 1 - 3i \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{(1+3i)t} + c_2 e^{(1-3i)t}$$

$$y = c_1 e^t e^{3it} + c_2 e^t e^{-3it}$$

$$y = c_1 e^t (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + c_2 e^t (\cos -3t + i \operatorname{sen} -3t)$$

$$y = c_1 e^t \cos 3t + c_1 i e^t \operatorname{sen} 3t + c_2 e^t \cos 3t - c_2 i e^t \operatorname{sen} 3t$$

$$y = (c_1 + c_2) e^t \cos 3t + (c_1 i - c_2 i) e^t \operatorname{sen} 3t$$

$$y = K_1 e^t \cos 3t + K_2 e^t \operatorname{sen} 3t \ //$$

6- $y'' - 6y' + 9y = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.9}}{2}$$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

sol: $y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

7- $4y'' + 17y' + 4y = 0$

$4r^2 + 17r + 4 = 0$

$$r = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4.4.4}}{8}$$

$$r = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8}$$

$$r = \frac{-17 \pm \sqrt{225}}{8}$$

$$r = \frac{-17 \pm 15}{8} \begin{cases} r_1 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \\ r_2 = \frac{-32}{8} = -4 \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{-t/4} + c_2 e^{-4t} \;//$$

8- $16y'' + 24y' + 9y = 0$

$16r^2 + 24r + 9 = 0$

$$r = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4.16.9}}{32}$$

Logo

$$y = c_1 e^{-3t/4} + c_2 t e^{-3t/4}$$

$$r = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$r = \frac{-24 \pm 0}{32} \begin{cases} r_1 = -\frac{3}{4} \\ r_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

9- $25y'' - 20y' + 4y = 0$

$$25r^2 - 20r + 4 = 0$$

$$r = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4.25.4}}{50}$$

$$r = \frac{20 \pm 0}{50} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{2}{5} \\ r_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Sol.

$$y = c_1 e^{2/5 t} + c_2 t e^{2/5 t}$$

10- $2y'' + 2y' + y = 0$

$$2r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.2.1}}{4}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

$$r = \frac{-2 \pm 2i}{4} \quad \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \\ r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{(-1/2 + i/2)t} + c_2 e^{(-1/2 - i/2)t}$$

$$y = c_1 e^{-t/2} e^{\frac{ti}{2}} + c_2 e^{-t/2} e^{-ti/2}$$

$$y = c_1 e^{-t/2} (\cos t/2 + i \operatorname{sen} t/2) + c_2 e^{-t/2} (\cos t/2 - i \operatorname{sen} t/2)$$

$$y = c_1 e^{-t/2} \cos t/2 + c_1 e^{-t/2} i \,\text{sen}\, t/2 + c_2 e^{-t/2} \cos t/2 - c_2 e^{-t/2} i \,\text{sen}\, t/2$$

$$y = (c_1 + c_2) e^{-t/2} \cos t/2 + (c_1 i - c_2 i) e^{-t/2} \,\text{sen}\, t/2$$

$$y = C_1 e^{-t/2} \cos t/2 + C_2 e^{-t/2} \,\text{sen}\, t/2 \quad \blacksquare$$

Nos problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando.

11 - $9y'' - 12y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 2, \; y'(0) = -1$

$$9r^2 - 12r + 4 = 0$$

$$r = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18}$$

$$r = \frac{12 \pm 0}{18} \rightarrow r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{2}{3}$$

Sol.

$$y = c_1 e^{2t/3} + c_2 t e^{2t/3}, \quad y' = c_1 e^{2t/3} \cdot \frac{2}{3} + c_2 e^{2t/3} + c_2 t e^{2t/3} \cdot \frac{2}{3}$$

• $y(0) = 2$

$$2 = c_1 \Rightarrow c_1 = 2$$

• $y'(0) = -1$

$$-1 = \frac{2}{3} c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -1 - \frac{4}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{-7}{3}$$

Logo $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3} t e^{2t/3}$, vemos que quando $t \to \infty$ $y \to -\infty$

Scanned by CamScanner

12 - $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.9}}{2}$$

$$r = \frac{6 \pm 0}{2} \begin{cases} \to r_1 = 3 \\ \to r_2 = 3 \end{cases}$$

$y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

$y' = 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} + 3t c_2 e^{3t}$

• $y(0) = 0$

$0 = c_1$

• $y'(0) = 2$

$2 = 3c_1 + c_2$

$c_2 = 2$ //

Logo
$y = 2t e^{3t}$ // $y \to \infty$ quando $t \to \infty$

3 - $9y'' + 6y' + 82y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

$9r^2 + 6r + 82 = 0$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4.9.82}}{18}$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{2916}}{18}$$

Scanned by CamScanner

$$r = \frac{-6 \pm 54i}{18} \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{3} + 3i \\ r_2 = -\frac{1}{3} - 3i \end{cases}$$

Logo

$$y = c_1 e^{(-1/3 + 3i)t} + c_2 e^{(-1/3 - 3i)t}$$

$$y = c_1 e^{-t/3} e^{3ti} + c_2 e^{-t/3} \cdot e^{-3ti}$$

$$y = c_1 e^{-t/3} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + c_2 e^{-t/3} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = K_1 e^{-t/3} \cos 3t + K_2 e^{-t/3} \operatorname{sen} 3t$$

$\therefore$

$$y' = -\frac{K_1}{3} e^{-t/3} \cos 3t - K_1 3 \operatorname{sen} 3t \, e^{-t/3} - \frac{K_2}{3} e^{-t/3} \operatorname{sen} 3t + 3K_2 e^{-t/3} \cos 3t$$

$y(0) = -1$

$-1 = K_1$

$y'(0) = 2$

$$2 = -\frac{K_1}{3} + 3K_2$$

$$3K_2 = 2 - \frac{1}{3}$$

$$K_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}$$

$\therefore$

$$y = -e^{-t/3} \cos 3t + \frac{5}{9} e^{-t/3} \operatorname{sen} 3t$$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$

14- $y'' + 4y' + 4y = 0 \quad , \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.1.4}}{2}$$

$$r = \frac{-4 \pm 0}{2} \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

$\therefore$

$$y' = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t}$$

- $y(-1) = 2$

$$2 = c_1 e^2 - c_2 e^2$$

- $y'(-1) = 1$

$$1 = -2c_1 e^2 + c_2 e^2 + 2c_2 e^2$$

$$1 = -2c_1 e^2 + 3c_2 e^2$$

$$\begin{cases} c_1 e^2 - c_2 e^2 = 2 \\ -2c_1 e^2 + 3c_2 e^2 = 1 \end{cases} \overset{L_1 = 2L_1}{\approx} \begin{cases} 2c_1 \cancel{e^2} - 2c_2 e^2 = 4 \\ -2c_1 \cancel{e^2} + 3c_2 e^2 = 1 \end{cases}$$

$$c_2 e^2 = 5$$

$$c_2 = \frac{5}{e^2}$$

$$c_1 e^2 = 2 + 5$$

$$c_1 = \frac{7}{e^2}$$

$$y = 7 e^{-2(t+1)} + 5t e^{-2(t+1)}$$

$y \to 0$ quando $t \to \infty$

Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$

RESUMO

Podemos resumir, agora, os resultados obtidos para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (1)$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio característico correspondente

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

Se r_1 e r_2 são reais distintos, então a sol. geral da equação diferencial (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \qquad (24)$$

Se r_1 e r_2 são complexos conjugados $\lambda \pm \mu i$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t \qquad (25)$$

se $r_1 = r_2$, então a solução é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} \qquad (26).$$

Seção 3.6

Nos problemas de 1 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1- $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$

$y_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

$y_p(t) = t^s A e^{2t}$

$s = 0$ $y_p(t) = A e^{2t}$

$y'_p(t) = 2A e^{2t}$

$y''_p(t) = 4A e^{2t}$

$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

$\cancel{e^{2t}} (4A - 4A - 3A) = \cancel{e^{2t}} (3)$

$-3A = 3$

$A = -1$

$y_p(t) = -e^{2t}$

$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$ //

2- $y'' + 2y' + 5y = 3\,\text{sen}\,2t$

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm 4i}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -1 + 2i \\ r_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

$$y_H(x) = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2 e^{(-1-2i)t}$$

$$y_H(x) = c_1 e^{-t} e^{2it} + c_2 e^{-t} e^{-2it}$$

$$y_H(x) = c_1 e^{-t} (\cos 2t + i\,\text{sen}\,2t) + c_2 e^{-t} (\cos 2t - i\,\text{sen}\,2t)$$

$$y_H(x) = K_1 e^{-t} \cos 2t + K_2 e^{-t}\,\text{sen}\,2t$$

-1,925

$$y_p(x) = t^s (A_0 e^{0t} \cos 2t + B_0 e^{0t}\,\text{sen}\,2t)$$

-67

$$y_p(x) = t^s (A_0 \cos 2t + B_0\,\text{sen}\,2t)$$

0,035

- $s = 0$

$$y_p(x) = A_0 \cos 2t + B_0\,\text{sen}\,2t$$

$$y'_p(x) = -2A_0\,\text{sen}\,2t + 2B_0 \cos 2t$$

$$y''_p(x) = -4A_0 \cos 2t - 4B_0\,\text{sen}\,2t$$

$$y'' + 2y' + 5y = 3\,\text{sen}\,2t$$

$$(-4A_0 \cos 2t - 4B_0\,\text{sen}\,2t) + 2(-2A_0\,\text{sen}\,2t + 2B_0 \cos 2t) +$$

$$5(A_0 \cos 2t + B_0\,\text{sen}\,2t) = 3\,\text{sen}\,2t \iff$$

$$\iff \cos 2t(-4A_0 + 4B_0 + 5A_0) + \text{sen}\,2t(-4B_0 - 4A_0 + 5B_0) =$$

$$3\,\text{sen}\,2t \iff$$

$$\iff (A_0 + 4B_0)\cos 2t + (B_0 - 4A_0)\,\text{sen}\,2t = 3\,\text{sen}\,2t \iff$$

$$\begin{cases} A_0 + 4B_0 = 0 \\ -4A_0 + B_0 = 3 \end{cases} \approx \begin{cases} -4A_0 + 16B_0 = 0 \\ -4A_0 + B_0 = 3 \end{cases}$$

$$17B_0 = 3$$

$$B_0 = \frac{3}{17} \qquad A_0 + 4B_0 = 0$$

$$A_0 = -\frac{12}{17}$$

$$y_p(x) = -\frac{12}{17}\cos 2t + \frac{3}{17}\,\text{sen}\,2t$$

$$y(x) = K_1 e^{-t}\cos 2t + K_2 e^{-t}\,\text{sen}\,2t - \frac{12}{17}\cos 2t + \frac{3}{17}\,\text{sen}\,2t$$

$$y(x) = \cos 2t\left(K_1 e^{-t} - \frac{12}{17}\right) + \text{sen}\,2t\left(K_2 e^{-t} + \frac{3}{17}\right)$$

3- $y'' - 2y' - 3y = -3t\,e^{-t}$

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_H(x) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

$$y_p(x) = t^s (A_0 + A_1 t)\, e^{-t}$$

$s = 0$

$$y_p(x) = A_0 e^{-t} + A_1 t e^{-t} \qquad \tilde{N}$$

$s = 1$

$$y_p(x) = A_0 t e^{-t} + A_1 t^2 e^{-t}$$

$$y'p(x) = A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t} + 2t A_1 e^{-t} - A_1 t^2 e^{-t}$$

$$y'p(x) = e^{-t}(A_0 + (2A_1 - A_0)t - A_1 t^2)$$

$$y''p(x) = e^{-t}(2A_1 - A_0 - 2A_1 t) - e^{-t}(A_0 + (2A_1 - A_0)t - A_1 t^2)$$

$$y'' - 2y' - 3y = -3t\,e^{-t}$$

$$e^{-t}(2A_1 - 2A_0 + (A_0 - 4A_1)t + A_1 t^2 - 2A_0 + (-4A_1 + 2A_0)t$$
$$+ 2A_1 t^2 - \cancel{3A_0 t} - 3A_1 t^2) = e^{-t} - 3t$$

$2A_1 - 4A_0 - 8A_1 t = -3t$

$2A_1 - 4A_0 = 0$

$-8A_1 = -3$ $\qquad$ $2A_1 = 4A_0$

$A_1 = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $A_0 = \frac{1}{2} A_1$

$A_0 = \frac{3}{16}$

$y_p(t) = \frac{3}{16} te^{-t} + \frac{3}{8} t^2 e^{-t}$

Logo

$y(x) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{3}{16} te^{-t} + \frac{3}{8} t^2 e^{-t}$

4 - $y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2t$

$y'' + 2y' = 0$

$r^2 + 2r = 0$

$r(r+2) = 0$

$r_1 = 0$ e $r_2 = -2$

$y_H(t) = c_1 e^0 + c_2 e^{-2t} = c_1 + c_2 e^{-2t}$

$y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2t$

fazendo $w = y'$

$w' + 2w = 3 + 4\,\text{sen}\,2t$

Resolvendo.

$$\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$$

$$w(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left[\int (3 + 4\,\text{sen}\,2t)\,e^{2t}\,dt + K\right]$$

$$w(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left[3\int e^{2t}\,dt + 4\int \text{sen}\,2t\,e^{2t}\,dt + K\right]$$

$$w(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left[\frac{3}{2}e^{2t} + 4\underbrace{\int \text{sen}\,2t\,e^{2t}\,dt}_{I} + K\right]$$

$I - \int \text{sen}\,2t\,e^{2t}\,dt$

$dv = e^{2t}dt \quad v = \frac{e^{2t}}{2}$

$u = \text{sen}\,2t \quad du = 2\cos 2t$

$$\int \text{sen}\,2t\,e^{2t}\,dt = \frac{\text{sen}\,2t\,e^{2t}}{2} - \underbrace{\int e^{2t}\cos 2t\,dt}_{II}$$

II

$$\int e^{2t}\cos 2t\,dt$$

$dv = e^{2t} \quad v = \frac{e^{2t}}{2}$

$u = \cos 2t \quad du = -2\,\text{sen}\,2t$

$$\int e^{2t}\cos 2t\,dt = \frac{\cos 2t\,e^{2t}}{2} + \int e^{2t}\,\text{sen}\,2t\,dt$$

$$\int \operatorname{sen}2t\, e^{2t}dt = \frac{\operatorname{sen}2t\, e^{2t}}{2} - \frac{\cos 2t\, e^{2t}}{2} - \int e^{2t}\operatorname{sen}2t\, dt$$

$$2\int \operatorname{sen}2t\, e^{2t}dt = \frac{e^{2t}(\operatorname{sen}2t - \cos 2t)}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}2t\, e^{2t}dt = \frac{e^{2t}(\operatorname{sen}2t - \cos 2t)}{4}$$

$$w(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left[\frac{3e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}(\operatorname{sen}2t - \cos 2t)}{8e^{2t}} + K\right]$$

$$w(t) = \frac{3}{2} + \operatorname{sen}2t - \cos 2t + \frac{K}{e^{2t}}$$

mas $w(t) = y'(t)$

Logo

$$y(t) = \int w(t)\,dt$$

$$y(t) = \int \frac{3}{2} + \operatorname{sen}2t - \cos 2t + Ke^{-2t}\, dt$$

$$y(t) = \frac{3}{2}t - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\operatorname{sen}2t}{2} + c_2e^{-2t} + c_1$$

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t$$

Scanned by CamScanner

5 - $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6$

Considerando

$$y'' + 9y = 0$$

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r = \pm\sqrt{-9}$$

$$r = \pm 3i \quad \begin{cases} r_1 = 3i \\ r_2 = -3i \end{cases}$$

$$y_H(t) = a_1 e^{3it} + a_2 e^{-3it}$$

$$y_H(t) = a_1 (\cos 3t + i\,\text{sen}\,3t) + a_2 (\cos 3t - i\,\text{sen}\,3t)$$

$$y_H(t) = c_1 \cos 3t + c_2\,\text{sen}\,3t$$

$$y'' + 9y = 6$$

$$y_p(t) = A_0$$

$$y'_p(t) = 0$$

$$y''_p(t) = 0$$

Sub. em $y'' + 9y = 6$ temos

$$0 + 9A_0 = 6$$

$$A_0 = 2/3$$

$$y'_p(t) = \frac{2}{3}$$

$$y'' + 9y = t^2 e^{3t}$$

$$y_p(x) = e^{3t} (A_0 t^2 + B_0 t + C_0)$$

Scanned by CamScanner

$$y'p(x) = 3e^{3t}(A_0t^2 + B_0t + C_0) + (2tA_0 + B_0)e^{3t}$$

$$y''p(x) = 9e^{3t}(A_0t^2 + B_0t + C_0) + (2tA_0 + B_0)3e^{3t} + 3e^{3t}(2tA_0 + B_0) + 2A_0e^{3t}$$

$$y''p(x) = 9A_0t^2e^{3t} + (9B_0 + 12A_0)te^{3t} + (9C_0 + 6B_0 + 2A_0)e^{3t}$$

Substituindo na eq.

$$y'' + 9y = t^2e^{3t}$$

$$18A_0t^2e^{3t} + (18B_0 + 12A_0)te^{3t} + (18C_0 + 6B_0 + 2A_0)e^{3t} = t^2e^{3t}$$

$$18A_0 = 1$$

$$A_0 = \frac{1}{18}$$

$$18B_0 + 12A_0 = 0$$

$$18B_0 = -12A_0$$

$$B_0 = -\frac{12}{18} \cdot \frac{1}{18} = -\frac{12}{324} = -\frac{1}{27}$$

$$18C_0 + 6B_0 + 2A_0 = 0$$

$$18C_0 = -6B_0 - 2A_0$$

$$C_0 = -\frac{1}{3}B - \frac{1}{9}A_0$$

$$C_0 = \frac{1}{81} - \frac{1}{162} \Rightarrow C_0 = \frac{1}{162}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{18} t^2 e^{3t} - \frac{1}{27} t e^{3t} + \frac{1}{162} e^{3t}$$

$$y_p(x) = e^{3t} \left(\frac{1}{18} t^2 - \frac{1}{27} t + \frac{1}{162} \right)$$

$$y_p(x) = e^{3t} \left(\frac{9t^2 - 6t + 1}{162} \right)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{162} e^{3t} (9t^2 - 6t + 1),$$

Logo

$$y(x) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{162} e^{3t} (9t^2 - 6t + 1) + \frac{2}{3},$$

6 - $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \quad r_1 = -1 \quad r_2 = -1$$

$$y_H(x) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

$$y_p(x) = t^s (A_0) e^{-t}$$

$s = 0$

$$y_p(x) = A_0 e^{-t} \qquad \tilde{N}$$

$s=1$ - $A_0 t e^{-t}$ $\tilde{N}$

$s=2$ $y_p = A_0 t^2 e^{-t}$

$y_p(t) = A_0 t^2 e^{-t}$

$y'_p(t) = 2t A_0 e^{-t} - A_0 t^2 e^{-t}$

$y''_p(t) = 2A_0 e^{-t} - 2t A_0 e^{-t} - 2t A_0 e^{-t} + A_0 t^2 e^{-t}$

$y''_p(t) = A_0 e^{-t} t^2 - 4 A_0 e^{-t} t + 2 A_0 e^{-t}$

subst em

$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

$\cancel{A_0 e^{-t} t^2} \cancel{-4 A_0 e^{-t} t} + 2A_0 e^{-t} \cancel{-2A_0 t^2 e^{-t}} \cancel{+4t A_0 e^{-t}} + \cancel{A_0 t^2 e^{-t}} = 2e^{-t}$

$2A_0 \cancel{e^{-t}} = 2\cancel{e^{-t}}$

$2A_0 = 2$

$A_0 = 1$

$y_p(t) = t^2 e^{-t}$

Logo

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t^2 e^{-t}$

7 - $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\,\text{sen}\,t$

Consideremos a eq. homogênea

$$2y'' + 3y' + y = 0$$

Supondo e^{rt} solução então deve-se ter

$$2r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.2}}{4}$$

$$r = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

Logo

$$y_H(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t}$$

Consideremos agora os casos

(I) $2y'' + 3y' + y = t^2$ e $2y'' + 3y' + y = 3\,\text{sen}\,t$ (II)

$$y_{p1}(t) = A_0 + B_0 t + C_0 t^2$$

$$y'_{p1}(t) = B_0 + 2t C_0$$

$$y''_{p1}(t) = 2C_0$$

Substituindo em I temos

$$4C_0 + 3B_0 + 6tC_0 + A_0 + B_0 t + C_0 t^2 = t^2$$

$$(A_0 + 3B_0 + 4C_0) + t(B_0 + 6C_0) + C_0 t^2 = t^2$$

$C_0 = 1$, $B_0 + 6C_0 = 0 \Rightarrow B_0 = -6$, $A_0 + 3B_0 + 4C_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 14$

$Y_I p(t) = 14 - 6t + t^2$

$Y_{II}(t) = (A_0 \cos t + B_0 \operatorname{sen} t)$

$Y'_{II}(t) = -A_0 \operatorname{sen} t + B_0 \cos t$

$Y''_{II}(t) = -A_0 \cos t - B_0 \operatorname{sen} t$

Substituindo em

$2y'' + 3y' + y = 3 \operatorname{sen} t$ temos

$-2A_0 \cos t - 2B_0 \operatorname{sen} t - 3A_0 \operatorname{sen} t + 3B_0 \cos t + A_0 \cos t + B_0 \operatorname{sen} t = 3 \operatorname{sen} t$

$\cos t (3B_0 - A_0) + \operatorname{sen} t (-B_0 - 3A_0) = 3 \operatorname{sen} t$

Daí

$$\begin{cases} -B_0 - 3A_0 = 3 & (\times 3) \\ 3B_0 - A_0 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} -3B_0 - 9A_0 = 9 \\ 3B_0 - A_0 = 0 \end{cases}$$

$-10A_0 = 9$

$A_0 = -\dfrac{9}{10}$

$3B_0 - A_0 = 0$

$B_0 = \dfrac{A_0}{3}$

$B_0 = -\dfrac{3}{10}$

$Y_{II} p(t) = -\dfrac{9}{10} \cos t - \dfrac{3}{10} \operatorname{sen} t$

$\therefore$

$y(t) = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t} - \dfrac{3}{10}(3\cos t + \operatorname{sen} t) + t^2 - 6t + 14$ //

Scanned by CamScanner

8 - $y'' + y = 3\,sen\,2t + t\cos t$

$y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r^2 = -1$

$r = \pm\sqrt{1}$

$r_1 = i$

$r_2 = -i$

$y_H(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$

$y_H(t) = c_1 \cos t + c_2\,sen\,t$

$y_p(t) = (A_0 + A_1 t)(M_0 \cos t + M_1\,sen\,2t)$

$y_p(t) = B_0 \cos 2t + B_1\,sen\,2t + C_0 t \cos 2t + C_1 t\,sen\,2t$

$y_p'(t) = -2B_0\,sen\,2t + 2B_1 \cos 2t + C_0 \cos 2t - 2C_0 t\,sen\,2t$

$+ C_1\,sen\,2t + 2C_1 t \cos 2t$

$y_p''(t) = -4B_0 \cos 2t - 4B_1\,sen\,2t - 2C_0\,sen\,2t - 2C_0\,sen\,2t$

$-4C_0 t \cos 2t + 2C_1 \cos 2t + 2C_1 \cos 2t - 4C_1 t\,sen\,2t$

substituindo em $y'' + y = 3\,sen\,2t + t\cos t$

$\cos 2t(-3B_0 + 4C_1) + t\cos t(-3C_0) + sen\,2t(-3B_1 - 4C_0)$

$+ t\,sen\,2t(-4C_1) = 3\,sen\,2t + t\cos t$

Daí, temos:

Scanned by CamScanner

$-3B_0 + 4C_1 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$

$-3C_0 = 1 \Rightarrow C_0 = -1/3$

$-3B_1 - 4C_0 = 3 \Rightarrow B_1 = -5/9$

$-4C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Logo

$$y_p(t) = -\frac{5}{9}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3} t \cos 2t$$

Portanto

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{3} t \cos 2t - \frac{5}{9}\operatorname{sen} 2t \;//$$

9 - $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t \qquad \omega^2 \neq \omega_0^2$

$u'' + \omega_0^2 u = 0$

$r^2 + \omega_0^2 = 0$

$r^2 = -\omega_0^2$

$r = \pm\sqrt{-\omega_0^2}$

$r = \pm \omega_0 i \; \begin{cases} r_1 = \omega_0 i \\ r_2 = -\omega_0 i \end{cases}$

$y_H(t) = a_1 e^{\omega_0 i t} + a_2 e^{-\omega_0 i t}$

$y_H(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t.$

$y_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t$

$y'_p(t) = -\omega A_0 \operatorname{sen} \omega t + \omega B_0 \cos \omega t$

$y''_p(t) = -\omega^2 A_0 \cos \omega t - \omega^2 B_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$u'' + w_0^2 u = \cos wt$$

$$-w^2 A_0 \cos wt - w^2 B_0 \operatorname{sen} wt + w_0^2 A_0 \cos wt + w_0^2 B_0 \operatorname{sen} wt = \cos wt$$

$$\cos wt \left(w_0^2 A_0 - w^2 A_0 \right) + \operatorname{sen} wt \left(w_0^2 B_0 - w^2 B_0 \right) = \cos wt$$

$$w_0^2 A_0 - w^2 A_0 = 1 \qquad B_0 = 0$$

$$A_0 = \frac{1}{w_0^2 - w^2}$$

$$y_p(t) = (w_0^2 - w^2)^{-1} \cos wt$$

Sol.

$$y(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \operatorname{sen} w_0 t + (w_0^2 - w^2)^{-1} \cos wt$$

10. $u'' + w_0^2 u = \cos w_0 t$.

$$u'' + w_0^2 u = 0$$

$$r^2 + w_0^2 = 0$$

$$r^2 = -w_0^2$$

$$r = \pm \sqrt{-w_0^2}$$

$r_1 = w_0 i$

$r_2 = -w_0 i$

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \operatorname{sen} w_0 t$$

$$y_p(t) = A_0 t \operatorname{sen} w_0 t + B_0 t \cos w_0 t$$

$$y'_p(t) = A_0 \operatorname{sen} w_0 t + A_0 w_0 t \cos w_0 t + B_0 \cos w_0 t - w_0 B_0 t \operatorname{sen} w_0 t$$

$$y''_p(t) = w_0 A_0 \cancel{\cos} w_0 t + A_0 \cancel{w_0} \cos w_0 t - A_0 w_0^2 t \operatorname{sen} w_0 t - w_0 B_0 \operatorname{sen} w_0 t$$

Scanned by CamScanner

$$-\cancel{w_0 B_0 \operatorname{sen} w_0 t} - w_0^2 B_0 t \cos w_0 t$$

Mas

$$w'' + w_0^2 w = \cos w_0 t$$

$$\operatorname{sen} w_0 t\left(-A_0 \cancel{w_0^2} t - 2w_0 B_0 + \cancel{w_0^2 A_0 t}\right) + \left(\cos w_0 t\left(2w_0 A_0 - \cancel{w_0^2 t B_0} + \cancel{w_0^2 t B_0}\right)\right)$$

$$\operatorname{sen} w_0 t\,(-2w_0 B_0) + \cos w_0 t\,(2w_0 A_0) = \cos w_0 t$$

$$\rightarrow B_0 = 0$$

$$2w_0 A_0 = 1$$

$$A_0 = \frac{1}{2w_0}$$

$$y_p(t) = \frac{t \operatorname{sen} w_0 t}{2w_0}$$

$\therefore$

$$y(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \operatorname{sen} w_0 t + \frac{t \operatorname{sen} w_0 t}{2w_0}$$ ■

11- $y'' + y' + 4y = 2 \operatorname{sen} wt$

$$y'' + y' + 4y = 0$$

$$r^2 + r + 4 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{15}\, i}{2} \begin{cases} r_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{15}\, i}{2} \\ r_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{15}\, i}{2} \end{cases}$$

Logo

$$y_H(t) = a_1 e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i\right)t} + a_2 e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i\right)t}$$

$$y_H(t) = a_1 e^{-t/2} e^{\frac{\sqrt{15}}{2} it} + a_2 e^{-t/2} \cdot e^{-\frac{\sqrt{15}}{2} it}$$

$$y_H(t) = a_1 e^{-t/2}\left(\cos \frac{\sqrt{15}}{2}t + i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + a_2 e^{-t/2}\left(\cos \frac{\sqrt{15}}{2}t - i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$y_H(t) = c_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$

Voltando

$$y'' + y' + 4y = 2 \operatorname{senh} t$$

$$y'' + y' + 4y = \cancel{2}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{\cancel{2}}\right)$$

$$y'' + y' + 4y = e^t - e^{-t}$$

$$y_p(t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t}$$

$$y'_p(t) = A_0 e^t - B_0 e^{-t}$$

$$y''_p(t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t}$$

$$y'' + y' + 4y = e^t - e^{-t}$$

$$e^t(A_0 + A_0 + 4A_0) + e^{-t}(\cancel{B_0} - \cancel{B_0} + 4B_0) = e^t - e^{-t}$$

$$e^t(6A_0) + e^{-t}(4B_0) = e^t - e^{-t}$$

$6A_0 = 1$ $\qquad$ $4B_0 = -1$

$A_0 = 1/6$ $\qquad$ $B_0 = -1/4$

$\therefore$

$$y_p(t) = \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} \,//$$

12 - $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_H(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}.$$

Voltando.

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2t$$

$$y'' - y' - 2y = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$

$$* \quad 2y'' - 2y' - 4y = e^{2t} + e^{-2t}$$

$\therefore$

$$y_p(t) = A_0 t e^{2t} + B_0 e^{-2t}$$

$$y_p(t) = A_0 \cancel{t e^{2t}} + B_0 e^{-2t}$$

$$y'_p(t) = A_0 \cancel{e^{2t}} + 2A_0 \cancel{t e^{2t}} - 2B_0 e^{-2t}$$

$$y''_p(t) = 2\cancel{A_0 e^{2t}} + 2\cancel{A_0 e^{2t}} + 4\cancel{A_0} t e^{2t} + 4B_0 e^{-2t}$$

Mas

$$2y'' - 2y' - 4y = e^{2t} + e^{-2t}$$

$$y'' - y' - 2y = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$

$$e^{2t}(4A_0 + 4\cancel{A_0 t} - A_0 - 2\cancel{A_0 t} - 2\cancel{A_0 t}) + e^{-2t}(4B_0 + \cancel{2B_0 - 2B_0}) =$$

$$\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

$$e^{2t}(3A_0) + e^{-2t}(4B_0) = \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

Daí

$$3A_0 = \frac{1}{2} \qquad 4B_0 = \frac{1}{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{6} \qquad B_0 = -\frac{1}{8}$$

Portanto

$$y_p(t) = \frac{1}{6} t e^{2t} - \frac{1}{8} e^{-2t}$$

Conclusão

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{6} t e^{2t} - \frac{1}{8} e^{-2t}.$$

Nos problemas de 13 a 18, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2t, \qquad y(0) = 0 \; , \; y'(0) = 1$

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$r^2 + r - 2 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_H(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y_p(t) = (A_0 + A_1 t)$$

$$y'_p(t) = A_1$$

$$y''_p(t) = 0$$

$$y'' + y' - 2y = 2t$$

$$0 \quad A_1 - 2A_0 - 2A_1 t = 2t$$

$$A_1 - 2A_0 = 0$$

$$-2A_1 = 2 \Rightarrow A_1 = -1 \quad e \quad A_1 = 2A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{A_1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Logo

$$y_p(t) = -\frac{1}{2} - t$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} - t$$

$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} - t$

$y'(t) = c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-2t} - 1$

$y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{matrix} 0 = c_1 + c_2 - 1/2 \\ 1 = c_1 - 2c_2 - 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1/2 & (-1) \\ c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -c_1 - c_2 = -1/2 \\ \cancel{c_1} - 2c_2 = 2 \end{cases}$$

$-3c_2 = \frac{3}{2}$

$c_2 = -\frac{1}{2}$

$c_1 + c_2 = 1/2$

$c_1 = 1/2 - c_2$

$c_1 = 1/2 - (-1/2)$

$c_1 = 1$

Conclusão

$y(t) = e^{t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$ //

4 - $y'' + 4y = t^2 + 3e^{t}$ $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

$y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0$

$r^2 = -4$

$r_1 = 2i$

$r_2 = -2i$

$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$

I

$y'' + 4y = t^2$

$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$

$y'_p(t) = A_1 + 2A_2 t$

$y''_p(t) = 2A_2$

$y'' + 4y = t^2$

$2A_2 + 4A_0 + 4A_1 t + 4A_2 t^2 = t^2$

$\Rightarrow$

$4A_2 = 1$

$A_2 = \frac{1}{4}$

$A_1 = 0$

$2A_2 + 4A_0 = 0$

$4A_0 = -2A_2$

$A_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$A_0 = -\frac{1}{8}$

$\therefore$

$y_p(t) = -\frac{1}{8} + \frac{t^2}{4}$

II $y'' + 4y = 3e^t$

$y_p(t) = A_0 e^t$

$y'_p(t) = A_0 e^t$

$y''_p(t) = A_0 e^t$

$y'' + 4y = 3e^t$

$A_0 e^t + 4A_0 e^t = 3e^t$

$5A_0 = 3$

$A_0 = \frac{3}{5}$ $\therefore y_p(t) = \frac{3}{5} e^t$

Assim

$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{8} + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{5} e^t$

$\therefore$

$y'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{t}{2} + \frac{3}{5} e^t$

$y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$

$\Rightarrow$

$0 = c_1 + 3/5 - 1/8 \Rightarrow c_1 = -3/5 + 1/8 \Rightarrow c_1 = \frac{-24+5}{40} \Rightarrow c_1 = -19/40$

$2 = 2c_2 + 3/5 \Rightarrow 2c_2 = 2 - \frac{3}{5} \Rightarrow 2c_2 = \frac{7}{5} \Rightarrow c_2 = \frac{7}{10}$

Conclusão

$y(t) = -\frac{19}{40} \cos 2t + \frac{7}{10} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{8} + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{5} e^t$

15 - $y'' - 2y' + y = t e^t + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Homogênea

$y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$ $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

$Y_H = c_1 e^t + c_2 t e^t$

I

$$y'' - 2y' + y = t\,e^t$$

$$y_p(t) = e^t\,(A_0 t^2 + A_1 t^3) = e^t \cancel{A_0} t^2 + e^t \cancel{A_1} t^3$$

$$y'_p(t) = e^t \cancel{A_0} t^2 + 2t\,\cancel{e^t} A_0 + e^t \cancel{A_1} t^3 + 3\cancel{t^2} e^t A_1$$

$$y''_p(t) = e^t \cancel{A_0} t^2 + 2t\,\cancel{e^t} A_0 + 2t\,\cancel{e^t} A_0 + 2e^t A_0 + e^t \cancel{A_1} t^3 + 3t^2 \cancel{e^t} A_1$$
$$+ 3t^2 \cancel{e^t} A_1 + 6t\,\cancel{e^t} A_1$$

Como

$$y'' - 2y' + y = t\,e^t \quad \text{então}$$

$$e^t\,(A_1 \cancel{t^3} - 2\cancel{A_1} t^3 + \cancel{A_1} t^3 + A_0 \cancel{t^2} + 6\cancel{A_1} t^2 - 2\cancel{A_0} t^2 - 6\cancel{A_1} t^2 + \cancel{A_0} t^2$$
$$+ 4\cancel{A_0} t + 6A_1 t - 4\cancel{A_0} t + 2A_0) = t\,e^t$$

$$e^t\,(6A_1 t + 2A_0) = t\,e^t$$

$2A_0 = 0$ $\qquad$ $6A_1 = 1$

$A_0 = 0$ $\qquad$ $A_1 = 1/6$

$$y_p(t) = \frac{t^3 e^t}{6}$$

II

$$y'' - 2y' + y = 4$$

$y_p(t) = A_0 + A_1 t$

$y'_p(t) = A_1$

$y''_p(t) = 0$

$y'' - 2y' + y = 4$

$-2A_1 + A_0 + A_1 t = 4$

$A_0 = 4$ e $A_1 = 0$

$y_p(t) = 4$

Logo

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^3 e^t}{6} + 4$$

$\Rightarrow$

$$y'(t) = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^2 e^t}{2} + \frac{t^3 e^t}{6}$$

Como $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ temos:

$$1 = c_1 + 4 \Rightarrow c_1 = -3$$

$$1 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - c_1$$

$$c_2 = 1 + 3 = 4$$

Conclusão

$$y = -3e^t + 4te^t + \frac{t^3 e^t}{6} + 4$$

16. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

$$y_p(t) = e^{2t}(A_0 + A_1 t)$$

$$y_p'(t) = 2e^{2t}(A_0 + A_1 t) + A_1 e^{2t}$$

$$y_p'(t) = e^{2t}(2A_0 + A_1 + 2A_1 t)$$

Scanned by CamScanner

$$y_p''(t) = 2e^{2t}(2A_0 + A_1 + 2A_1 t) + 2A_1 e^{2t}$$

$$y_p''(t) = e^{2t}(4A_0 + 4A_1 + 4A_1 t)$$

E

$$y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$$

$$e^{2t}(-3A_0 + 2A_1 - 3A_1 t) = 3te^{2t}$$

$$-3A_1 = 3 \qquad -3A_0 + 2A_1 = 0$$

$$A_1 = -1 \qquad 3A_0 = 2A_1$$

$$A_0 = \frac{2}{3} A_1 = -\frac{2}{3}$$

$$y_p(t) = -\frac{2}{3} e^{2t} - te^{2t}$$

Logo

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - te^{2t} - \frac{2}{3} e^{2t}$$

Assim

$$y' = 3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - e^{2t} - 2te^{2t} - \frac{4}{3} e^{2t}$$

Como $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 - 2/3 \\ 0 &= 3c_1 - c_2 - 1 - 4/3 \end{aligned} \approx \begin{cases} c_1 + c_2 = 5/3 \\ 3c_1 - c_2 = 7/3 \end{cases}$$

$$4c_1 = 4$$

$$c_1 = 1$$

$$c_1 + c_2 = 5/3$$

$$c_2 = 5/3 - 1$$

$$c_2 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

Conclusão

$$y(t) = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$$

17 - $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\,2t\,,\quad y(0) = 2\,,\quad y'(0) = -1$

$$r^2 + 4 = 0$$

$$r = \pm\sqrt{-4} \quad \begin{cases} r = 2i \\ r = -2i \end{cases}$$

$$y_H = a_1 e^{2it} + a_2 e^{-2it}$$

$$y_H = c_1 \cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t$$

$$y_P(t) = A_0 t \cos 2t + B_0 t\,\text{sen}\,2t$$

$$y_P'(t) = A_0 \cos 2t - 2A_0 t\,\text{sen}\,2t + B_0\,\text{sen}\,2t + 2B_0 t \cos 2t$$

$$y_P'(t) = \cos 2t\,(A_0 + 2B_0 t) + \text{sen}\,2t\,(B_0 - 2A_0 t)$$

$$y_P''(t) = -2\,\text{sen}\,2t\,(A_0 + 2B_0 t) + 2B_0 \cos 2t + 2\cos 2t\,(B_0 - 2A$$
$$- 2A_0\,\text{sen}\,2t$$

$$y_P''(t) = \cos 2t\,(4B_0 - 4A_0 t) + \text{sen}\,2t\,(-4A_0 + 2B_0 t)$$

E $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\,2t$

$$\text{sen}\,2t\,(-4A_0 + 6B_0 t) + \cos 2t\,(4B_0) = 3\,\text{sen}\,2t$$

$$4B_0 = 0 \qquad -4A_0 + 6B_0 t = 3$$

$$B_0 = 0 \qquad -4A_0 = 3$$

$$A_0 = -\frac{3}{4}$$

$$y_p(t) = -\frac{3}{4} t \cos 2t$$

Assim

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$$

$$\Rightarrow$$

$$y'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t - \frac{3}{4} \cos 2t + \frac{3}{2} t \operatorname{sen} t$$

Como

$y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$ vem:

$$2 = c_1 \qquad \Rightarrow c_1 = 2$$

$$-1 = 2c_2 - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow 2c_2 = -1 + \frac{3}{4} \Rightarrow 2c_2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{8}$$

Logo

$$y(t) = 2\cos 2t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t \blacksquare$$

18 - $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$r = \frac{-2 \pm 4i}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -1 + 2i \\ r_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

$\therefore$

$$y = c_1 e^{(-1+2i)t} + c_2^{(-1-2i)t}$$

$y = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\,\text{sen}\,2t$

$y_p(t) = e^{-t}(A_0 t\cos 2t + B_0 t\,\text{sen}\,2t)$

$y_p(t) = e^{-t}A_0 t\cos 2t + e^{-t}B_0 t\,\text{sen}\,2t$

$y'_p(t) = \cancel{-e^{-t}A_0 t\cos 2t} + \cancel{e^{-t}A_0\cos 2t} - \cancel{2e^{-t}A_0 t\,\text{sen}\,2t}$

$\cancel{-e^{-t}B_0 t\,\text{sen}\,2t} + \cancel{e^{-t}B_0\,\text{sen}\,2t} + \cancel{2e^{-t}B_0 t\cos 2t}$

$y''_p(t) = e^{-t}\cancel{A_0 t\cos 2t} - \cancel{e^{-t}A_0\cos 2t} + \cancel{2e^{-t}A_0 t\,\text{sen}\,2t}$

$\cancel{-e^{-t}A_0\cos 2t} - \cancel{2e^{-t}A_0\,\text{sen}\,2t} + 2e^{-t}A_0 t\,\text{sen}\,2t$

$-\cancel{2e^{-t}A_0\,\text{sen}\,2t} - \cancel{2e^{-t}A_0 t\cos 2t} + \cancel{e^{-t}B_0 t\,\text{sen}\,2t}$

$\cancel{-e^{-t}B_0\,\text{sen}\,2t} - 2e^{-t}\cancel{B_0 t}\cos 2t - \cancel{e^{-t}B_0\,\text{sen}\,2t} +$

$2e^{-t}\cancel{B_0\cos 2t} - \cancel{2e^{-t}B_0 t\cos 2t} + \cancel{2e^{-t}}B_0\cos 2t$

$\cancel{-2e^{-t}B_0 t\,\text{sen}\,2t}$

E $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t$

$e^{-t}\cos 2t\,(4B_0 - 4\cancel{B_0}t - 2A_0 t - 2\cancel{A_0} + 4\cancel{B_0}t + 2\cancel{A_0} + 2A_0 t + 5A_0 t)$

$+ e^{-t}\,\text{sen}\,2t\,(-\cancel{4B_0} + \cancel{B_0}t - 2\cancel{A_0} + 2\cancel{A_0}t + 2\cancel{B_0} - 2\cancel{B_0}t - 4\cancel{A_0}t + 5\cancel{B_0}t)$

$= 4e^{-t}\cos 2t$

$e^{-t}\cos 2t\,(6A_0 t + 4B_0) + e^{-t}\,\text{sen}\,2t\,(4B_0 t - 2B_0 - 2A_0 - 2A_0 t) =$

$4e^{-t}\cos 2t$

Daí temos que

$A_0 = 0 \qquad B_0 = 1$

$\therefore$

$$y_p(t) = e^{-t}\, t \,\text{sen}\, 2t$$

Logo

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + e^{-t}\, t\,\text{sen}\, 2t$$

$\therefore$

$$y'(t) = -c_1 e^{-t}\cos 2t - 2c_1 e^{-t}\,\text{sen}\, 2t - c_2 e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + 2c_2 e^{-t}\cos 2t$$
$$- e^{-t}\, t\,\text{sen}\, 2t + e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + 2e^{-t}\, t\cos 2t$$

Como $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ temos

$$1 = c_1 \qquad \Rightarrow c_1 = 1$$

$$0 = -c_1 + 2c_2 \qquad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusão:

$$y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t}\,\text{sen}\, 2t + e^{-t}\, t\,\text{sen}\, 2t \quad //$$

EQUAÇÕES NÃO-HOMOGÊNEAS; MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

TEOREMA

A solução geral da equação não-homogênea (1) pode ser escrita na forma

$$y = \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t) \qquad (7)$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação não-homogênea.

Seção 3.7

Nos problemas de 1 a 4, use o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial. Depois verifique sua resposta usando o método dos coeficientes indeterminados

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$

sol. da eq. homogênea

$y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2}$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$r = \frac{5 \pm 1}{2} \quad r_1 = 3 \quad r_2 = 2$$

$y_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$

sol. geral da EDO não homogênea

$y(t) = u_1(t)\, e^{3t} + u_2(t)\, e^{2t}$

$y(t) = u_1 e^{3t} + u_2 e^{2t}$

Mas

$y'(t) = 3u_1 e^{3t} + u_1' e^{3t} + 2u_2 e^{2t} + u_2' e^{2t}$

$y'(t) = 3u_1 e^{3t} + 2u_2 e^{2t}$

onde

$$u_1' e^{3t} + u_2' e^{2t} = 0 \qquad (1)$$

e

$y''(t) = 9u_1 e^{3t} + 3u_1' e^{3t} + 4u_2 e^{2t} + 2u_2' e^{2t}$

Substituindo $\quad y'' - 5y' + 6y = 2e^{2t}$

$\cancel{9u_1 e^{3t}} + 3u_1' e^{3t} + \cancel{4u_2 e^{2t}} + 2u_2' e^{2t} - \cancel{15u_1 e^{3t}} - \cancel{10u_2 e^{2t}}$
$+ \cancel{6u_1 e^{3t}} + \cancel{6u_2 e^{2t}} = 2e^t$

$3u_1' e^{3t} + 2u_2' e^{2t} = 2e^t$

Logo

$$\begin{cases} u_1' e^{3t} + u_2' e^{2t} = 0 \\ 3u_1' e^{3t} + 2u_2' e^{2t} = 2e^t \end{cases}$$

$X = A^{-1} B$

$$X = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 3e^{3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$$

$$W[e^{3t}, e^{2t}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 3e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} =$$

$$= 2e^{5t} - 3e^{5t} = -e^{5t}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = -\frac{1}{e^{5t}} \bar{A}^t$$

$$\Delta_{11} = 2e^{2t}$$

$$\Delta_{12} = -3e^{3t} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -3e^{3t} \\ -e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}, \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -3e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{21} = -e^{2t}$$

$$\Delta_{22} = e^{3t}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-e^{5t}} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -3e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 3e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Assim

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 3e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$u'_1 = 2e^{-2t} \qquad u'_2 = -2e^{-t}$$

$$u_1 = -e^{-2t} \qquad u_2 = 2e^{-t}$$

$$y(t) = -e^{-2t} e^{3t} + 2e^{-t} e^{2t} = -e^{t} + 2e^{t} = e^{t}$$

$$y'' \cancel{+} 5y + 6y = 2e^t$$

$$y_H = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

$$y_p = A_0 e^t$$

$$y'_p = A_0 e^t$$

$$y''_p = A_0 e^t$$

$$e^t (A_0 - 5A_0 + 6A_0) = 2e^t$$

$$\cancel{e^t} (2A_0) = \cancel{e^t}$$

$$A_0 = 1$$

$$y'_p = e^t$$

2 - $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$r = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_H = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

suponho $c_1 = u_1(t)$ e $c_2 = u_2(t)$

Scanned by CamScanner

$$y(t) = u_1 e^{2t} + u_2 e^{-t}$$

$$y'(t) = 2u_1 e^{2t} + u_1' e^{2t} - e^{-t} u_2 + u_2' e^{-t}$$

tomemos

$$y'(t) = 2u_1 e^{2t} - e^{-t} u_2$$

sendo

$$u_1' e^{2t} + u_2' e^{-t} = 0 \qquad (1)$$

Continuando

$$y''(t) = 4u_1 e^{2t} + 2u_1' e^{2t} + e^{-t} u_2 - u_2' e^{-t}$$

substituindo os resultados em

$$y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$$

$$\cancel{4u_1 e^{2t}} + 2u_1' e^{2t} \cancel{+ u_2 e^{-t}} - u_2' e^{-t} \cancel{- 2u_1 e^{2t}} \cancel{+ e^{-t} u_2}$$

$$\cancel{-2u_1 e^{2t}} - \cancel{2u_2} e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$2u_1' e^{2t} - u_2' e^{-t} = 2e^{-t} \qquad (2)$$

Daí temos:

$$\begin{cases} u_1' e^{2t} + u_2' e^{-t} = 0 \\ 2u_1' e^{2t} - u_2' e^{-t} = 2e^{-t} \end{cases}$$

$$3u_1' e^{2t} = 2e^{-t}$$

$$3u_1' = 2e^{-3t}$$

$$u_1' = \frac{2}{3} e^{-3t}$$

$$u_1 = -\frac{2}{9} e^{-3t}$$

$$u_2' = -\frac{2}{3}$$

$$u_2 = -\frac{2}{3} t$$

$\therefore \quad \underset{\sim}{A}$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$W[e^{2t}, e^{-t}] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{t} - 2e^{t} = -3e^{t}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3e^{t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^{t} & -\frac{1}{3}e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3\, e^{-2t} & 1/3\, e^{-2t} \\ 2/3\, e^{t} & -1/3\, e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3\, e^{-3t} \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$u_1' = \frac{2}{3}e^{-3t} \quad u_2' = -\frac{2}{3}$

$u_1 = -\frac{2e^{-3t}}{9} \quad u_2 = \frac{-2}{3}t$

$Y = -\frac{2}{9}e^{3t}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}t = -\frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-t}t =$

$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$

$y_p = A_0 t e^{-t}$

$y'_p = A_0 e^{-t} - A_0 t e^{-t}$

$y''_p = -A_0 e^{-t} - A_0 e^{-t} + A_0 t e^{-t}$

e $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$

$e^{-t}(-2A_0 + \cancel{A_0 t} - A_0 + \cancel{A_0 t} - 2\cancel{A_0 t}) = 2e^{-t}$

$e^{-t}(-3A_0) = 2e^{-t}$

$-3A_0 = 2$

$A_0 = -\frac{2}{3}$

$y_p = -\frac{2}{3} t e^{-t}$

3 - $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$

$y'' + 2y' + y = 0$

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$ $r_1 = -1$, $r_2 = -1$

$y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

Agora

$y = u_1 e^{-t} + u_2 t e^{-t}$

$y = u_1 e^{-t} + u_2 t e^{-t}$

$y' = u_1' e^{-t} - e^{-t} u_1 + u_2' t e^{-t} + (t e^{-t})' u_2$

$y' = u_1' e^{-t} - e^{-t} u_1 + u_2' t e^{-t} + e^{-t} u_2 - t e^{-t} u_2$

$y' = u_1' e^{t} - e^{-t} u_1 + u_2' t e^{-t}$

$y' = -e^{-t} u_1 + e^{-t} u_2 - t e^{-t} u_2$

onde

$u_1' e^{t} + u_2' t e^{-t} = 0 \qquad (2)$

$y'' = e^{-t} u_1 - u_1' e^{-t} + u_2' e^{-t} - e^{-t} u_2 + t e^{-t} u_2 - u_2 e^{-t}$
$- t u_2' e^{-t}$

substituindo em

$y'' + 2y' + y = 3e^{-t} \Rightarrow$

$\cancel{e^{-t} u_1} - u_1' e^{-t} + u_2' e^{-t} - \cancel{e^{-t} u_2} + \cancel{t e^{-t} u_2} - \cancel{u_2 e^{-t}} - t u_2' e^{-t}$
$- \cancel{2 e^{-t} u_1} + \cancel{2 e^{-t} u_2} - \cancel{2 t e^{-t} u_2} + \cancel{u_2 e^{-t}} + \cancel{u_2 t e^{-t}} = 3e^{-t}$

$-u_1' e^{-t} + u_2' e^{-t}(1-t) = 3e^{-t}$

Daí

$$\begin{cases} u_1' e^{-t} + u_2' t e^{-t} = 0 \\ u_1' e^{-t} + u_2' e^{-t}(1-t) = 3e^{-t} \end{cases}$$

$u_2' e^{-t} = 3e^{-t}$

$u_2' = 3$

$u_2 = 3t$

$u_1' e^{-t} = -t u_2' e^{-t}$

$u_1' = -t u_2'$

$u_1' = -3t$

$u_1' = -3t$

$u_1 = -\frac{3}{2} t^2$

$$Y = -\frac{3}{2}t^2e^{-t} + 3t^2e^{-t}$$

$$Y = \frac{3}{2}t^2e^{-t} \,//$$

4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-4.4.1}}{8} \quad \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \\ r_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}$$

$$Y = u_1 e^{t/2} + u_2 t e^{t/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}u_1 e^{t/2} + \frac{1}{2}u_2 t e^{t/2} + u_2 e^{t/2} + u_1' e^{t/2} + u_2' t e^{t/2}$$

Tomemos

$$y' = \frac{1}{2}u_1 e^{t/2} + \frac{1}{2}u_2 t e^{t/2} + u_2 e^{t/2}$$

Assim

$$u_1' e^{t/2} + u_2' t e^{t/2} = 0 \qquad (1)$$

Prosseguindo:

$$y'' = \frac{1}{4}u_1 e^{t/2} + \frac{1}{4}u_2 t e^{t/2} + \frac{1}{2}u_2 e^{t/2} + \frac{1}{2}u_2 e^{t/2}$$

$$+ \frac{1}{2}u_1' e^{t/2} + \frac{1}{2}u_2' t e^{t/2} + u_2' e^{t/2}$$

Scanned by CamScanner

substituindo os resultados em

$4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$ temos

$\cancel{u_1 e^{t/2}} + \cancel{u_2 t e^{t/2}} + \cancel{2u_2 e^{t/2}} + \cancel{2u_2 e^{t/2}} + 2u_1' e^{t/2} + 2u_2' t e^{t/2}$
$+ 4u_2' e^{t/2} - \cancel{2u_1 e^{t/2}} - \cancel{2u_2 t e^{t/2}} - \cancel{4u_2 e^{t/2}} + \cancel{u_1 e^{t/2}} +$
$\cancel{u_2 t e^{t/2}} = 16e^{t/2}$

$$2u_1' e^{t/2} + u_2' e^{t/2}(2t+4) = 16e^{t/2}$$

$$u_1' e^{t/2} + u_2' e^{t/2}(t+2) = 8e^{t/2} \quad (2)$$

Daí, com (1) e (2) temos

$L_1 = L_1 \cdot (-1)$

$$\begin{cases} u_1' e^{t/2} + u_2' t e^{t/2} = 0 \\ u_1' e^{t/2} + u_2' e^{t/2}(t+2) = 8e^{t/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u_1' e^{t/2} - u_2' t e^{t/2} = 0 \\ u_1' e^{t/2} + u_2' e^{t/2}(t+2) = 8e^{t/2} \end{cases}$$

$2u_2' e^{t/2} = 8e^{t/2}$

$2u_2' = 8$

$u_2' = 4$

$u_2 = \int u_2' dt$

$u_2 = 4t$

$u_1' e^{t/2} = -4t e^{t/2}$

$u_1' = -4t$

$u_1 = -2t^2$

Logo

$$y = -2t^2 e^{t/2} + 4t\, t e^{t/2} = 2t^2 e^{t/2}$$

Nos problemas de 5 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

5 - $y'' + y = tgt \qquad 0 < t < \pi/2$

$r^2 + 1 = 0$

$r = \sqrt{-1} \quad \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$

$y_h = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

$y_p = u_1 \cos t + u_2 \operatorname{sen} t$

$y'_p = -u_1 \operatorname{sen} t + u_2 \cos t + u'_1 \cos t + u'_2 \operatorname{sen} t$

Façamos

$y'_p = u_2 \cos t - u_1 \operatorname{sen} t$

Então

$u'_1 \cos t + u'_2 \operatorname{sen} t = 0 \qquad (1)$

Prosseguindo

$y''_p = -u_2 \operatorname{sen} t - u_1 \cos t + u'_2 \cos t - u'_1 \operatorname{sen} t$

Sub. os results em

$y'' + y = tgt$ têm-se

$-u_2 \cancel{\operatorname{sen} t} - u_1 \cancel{\cos t} + u'_2 \cos t - u'_1 \operatorname{sen} t + u_1 \cancel{\cos t} + u_2 \cancel{\operatorname{sen} t} = tgt$

$-u_1' \operatorname{sen} t + u_2' \cos t = \operatorname{tg} t$ (2)

De ① e ② temos

$$\begin{cases} u_1' \cos t + u_2' \operatorname{sen} t = 0 \\ -u_1' \operatorname{sen} t + u_2' \cos t = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Logo $\underbrace{}_{A}$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{W[\cos t, \operatorname{sen} t]} (\bar{A})^t$$

$$\text{e } \bar{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\Delta_{11} = (-1)^2 A_{11} = \cos t$

$\Delta_{12} = (-1)^3 A_{12} = \operatorname{sen} t$

$\Delta_{21} = (-1)^3 A_{21} = -\operatorname{sen} t$

$\Delta_{22} = (-1)^4 A_{22} = \cos t$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Assim:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{sen^2 t}{cos t} \\ sen t \end{pmatrix}$$

$$u'_1 = -\frac{sen^2 t}{cos t}$$

$$u'_2 = sen t$$

$$\int u'_2 \, dt = \int sen t \, dt$$

$$u'_1 = \frac{cos^2 t - 1}{cos t}$$

$$u_2 = -cos t$$

$$u'_1 = cos t - \frac{1}{cos t}$$

$$\int u'_1 \, dt = \int cos t \, dt - \int \frac{1}{cos t} \, dt$$

$$u_1 = sen t - \ln(tg t + sec t)$$

Logo

$$y(t) = c_1 cos t + c_2 sen t + sen t \cancel{cos t} - cos t \ln(tg t + sec t)$$
$$- cos t \cancel{sen t}$$

$$y(t) = c_1 cos t + c_2 sen t - cos t \ln(tg t + sec t) \,/\!/$$

Scanned by CamScanner

SEQUENCIAS

E

SERIES

Definição de Sequência:

Sequência é uma função cujo domínio é o conjunto

$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

de todos os números inteiros positivos.

A sequência $\{a_n\}$ tem o limite L se para qualquer $\epsilon > 0$ existir um $N > 0$, tal que se n for um inteiro e

se $n > N$, então $|a_n - L| < \epsilon$

e escrevemos

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$.

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ e f estiver definida para todo inteiro positivo, então também $\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$ quando n for um inteiro positivo qualquer.

Definição

Se a sequencia $\{a_n\}$ tiver um limite, dizemos que ela é <u>convergente</u>, e a_n converge para o limite. Se a sequência não for convergente, ela será <u>divergente</u>.

TEOREMA

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ forem sequências convergentes e c for uma constante, então

(i) a sequência constante $\{c\}$ tem c como seu limite

(ii) $\lim_{n \to +\infty} c a_n = c \lim_{n \to +\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n + \lim_{n \to +\infty} b_n$;

(iv) $\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)\left(\lim_{n \to +\infty} b_n\right)$;

(v) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to +\infty} a_n}{\lim_{n \to +\infty} b_n}$ se $\lim_{n \to +\infty} b_n \neq 0$. e tod $b_n \neq 0$.

SEQUÊNCIAS MONÓTONAS E LIMITADAS

Definição.

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é

(i) crescente, se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n;

(ii) decrescente, se $a_n \geq a_{n+1}$ paro todo n.

Chamamos de <u>monótona</u> uma sequência que seja crescente ou decrescente.

No caso de $a_n < a_{n+1}$ a sequência é estritamente crescente; se $a_n > a_{n+1}$, a sequência é estritamente decrescente.

Definição

O número C é chamado de limitante inferior da sequência $\{a_n\}$ se $C \leq a_n$ para todo n inteiro positivo, e o número D é chamado de limitante superior da seqüência $\{a_n\}$ se $a_n \leq D$ para todo n inteiro positivo.

Definição

Se A for um limitante inferior de uma sequência $\{a_n\}$ e se A satisfazer a propriedade de que para todo limitante inferior de C de $\{a_n\}$, $C \leq A$, então A será chamado de limitante inferior máximo da sequência. Analogamente, se B for um limitante superior de uma sequência $\{a_n\}$ e se B satisfizer a propriedade de que todo limitante superior D de $\{a_n\}$, $B \leq D$, então B será chamado limitante superior mínimo da sequência.

Definição

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é limitada se e somente se ela tiver limitantes superior e inferior.

AXIOMA DO COMPLETAMENTO

Todo conjunto não vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo. Da mesma forma, todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante superior possui um limite superior mínimo.

TEOREMA

Uma sequência monótona limitada é convergente.

TEOREMA

Seja $\{a_n\}$ uma sequência crescente, e suponhamos que D seja um limitante superior da sequência. Então, $\{a_n\}$ será convergente e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \leq D.$$

Seja $\{a_n\}$ uma sequência decrescente, e suponhamos que C seja um limitante inferior da sequência. Então, $\{a_n\}$ será convergente e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \geq C.$$

TEOREMA

Uma sequência convergente é limitada.

$$\sum_{K=0}^{n} t^K, \ t \neq 0 \text{ e } t \neq 1$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

Supondo $0 < t < 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t}{1-t}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^2} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} a\,a_K = a \sum_{K=0}^{+\infty} a_K$$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} (a_K + b_K) = \sum_{K=0}^{+\infty} a_K + \sum_{K=0}^{+\infty} b_K$$

Série Geométrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k .$$

Se $0 < |r| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$.

SÉRIE HARMÔNICA

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

a) $\alpha > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge

b) $\alpha \leq 1 \rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$

Série Telescópica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ , onde } a_k = b_1 - b_{k+1}$$

Critério de Convergência p/ série alternada

- Leibnitz

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Se

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0 \quad \text{e} \quad a_k \text{ decrescente}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k \quad \text{converge}$$

Uma condição Necessária para que uma série seja convergente. Critério do termo geral para divergência.

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Critério do termo geral para divergência.

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Se $\lim_{k \to +\infty} a_k \neq 0$ ou $\lim_{k \to +\infty} a_k$ não existir, então $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.

CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS.

Critério da Integral.

Critério da Comparação

Critério do Limite

.) se $L > 0$, L real, ou ambas convergem ou ambas divergem.

..) se $L = +\infty$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for divergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será divergente.

...) Se $L = 0$ e se $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ for convergente, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ também será convergente.

Critério de Comparação de Razões

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

Critério da Razão

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$L < 1 \Rightarrow \sum_{k=0} a_k$ é convergente

$L > 1 \Rightarrow$ " " divergente

$L = 1 \Rightarrow$ nada revela.

Critério da Raiz

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. $L = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k}$

$L < 1$. converge

$L > 1$. diverge

$L = 1$. nada revela.

Critério de Raabe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

a) $L > 1$ ou $L = +\infty \Rightarrow \sum a_k$ converge

b) $L < 1$ ou $L = -\infty \Rightarrow \sum a_k$ diverge

c) $L = 1$, nada revela.

S.A.C - C.R.S.T.Q

SAC $\Leftrightarrow \sum a_k$ e $\sum |a_k|$ convergem

$\sum |a_k|$ convege $\rightarrow \sum a_k$ converge

C. R. S. T. Q

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad , \quad a_k \neq 0 \;.$$

$$L = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$L < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

$L > 1$ ou $L = +\infty$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será divergente.

$L = 1$, nada revela.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

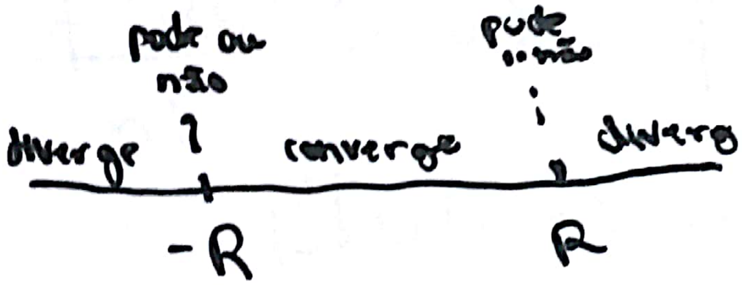
SÉRIES DE P. RAIO DE CONVERGÊNCIA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

I) ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge p/ $x = 0$.

II) ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ " absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

III)



$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

SÉRIE de

Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

SÉRIE DE TAYLOR

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \dots$$

UNIDADE UNIVERSITÁRIA: [illegible]

CURSO: [illegible]

HABILITAÇÃO: [illegible]

OPÇÃO:

DEPARTAMENTO RESPONSÁVEL: [illegible]

IDENTIFICAÇÃO

CÓDIGO	DISCIPLINA OU ESTÁGIO	SERIAÇÃO IDEAL
[illegible]	SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	2º ano
OBRIG./OPT./EST.	PRÉ/CO-REQUISITOS	ANUAL/SEMESTRAL
Obrigatória	Cálculo Diferencial e Integral II (PRÉ)	1º Semestre

CRÉDITOS	CARGA HORÁRIA TOTAL	DISTRIBUIÇÃO DA CARGA HORÁRIA			
		TEÓRICA	PRÁTICA	TEO/PRAT	OUTRAS
04	60 h	60 h			

NÚMERO MÁXIMO DE ALUNOS POR TURMA			
AULAS TEÓRICAS	AULAS PRÁTICAS	AULAS TEÓRICO/PRÁTICAS	OUTRAS

OBJETIVOS (ao término da disciplina o aluno deverá ser capaz de:)

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO (título e discriminação das Unidades)

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]
7. [illegible]

METODOLOGIA DO ENSINO

- [illegible]
- [illegible]

BIBLIOGRAFIA BÁSICA

[illegible]

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

[illegible]

EMENTA

[illegible]

Horário de atendimento ao aluno

[illegible]

Aulas previstas

[illegible]

Datas das provas

[illegible]

nome: Maicon Aparecido Pinheiro

curso: Estatística ano: 2º

Séries e Equações Diferenciais

A sequência $a_n = n$ é divergente ou convergente? Justifique.

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$\vdots$
$a_n = n$

a_n é crescente se e somente se:

Dado $m < n$ $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow a_m < a_n$

Como $a_m = m$ e $a_n = n$ temos:

$$\begin{matrix} m & < & n \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_m & < & a_n \end{matrix}$$

Logo a_n é crescente.

Observamos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Portanto, a_n é crescente e divergente pois não apresenta limite superior.

Scanned by CamScanner

Verificar se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)(k+6)} \text{ converge.}$$

Solução.

Observemos que

$$\frac{1}{k(k+3)(k+6)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+3} + \frac{C}{k+6}$$

Logo

$$\frac{1}{k(k+3)(k+6)} = \frac{A(k+3)(k+6) + B(k)(k+6) + C(k)(k+3)}{k(k+3)(k+6)}$$

Ou seja:

$$1 = A(k^2+9k+18) + B(k^2+6k) + C(k^2+3k)$$

$$1 = Ak^2 + A9k + 18A + Bk^2 + 6Bk + k^2C + 3Ck$$

$$1 = k^2(A+B+C) + k(9A+6B+3C) + 18(A)$$

Representando 1 ~~como~~ eq. de segundo grau, temos:

$$0k^2 + 0k + 1 = k^2(A+B+C) + k(9A+6B+3C) + 18A$$

Assim

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 9A + 6B + 3C = 0 \\ 18A = 1 \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$A = \frac{1}{18}$$

E, em função disso, temos o novo sistema:

$$\begin{cases} B + C = -1/18 \quad (-3) \\ 6B + 3C = -9/18 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -3B \cancel{-3C} = 3/18 \\ 6B \cancel{+3C} = -9/18 \end{cases}$$

$$3B = -6/18$$

$$B = -\frac{2}{18} \quad \text{e} \quad B + C = -\frac{1}{18} \Leftrightarrow C = \frac{1}{18}.$$

Dessa forma:

$$\sum_{K=2}^{\infty} \frac{1}{k(K+3)(K+6)} = \frac{1}{18K} - \frac{2}{18(K+3)} + \frac{1}{18(K+6)}$$

$$= \frac{1}{18}\underbrace{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+3}\right)}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{18}\underbrace{\left(\frac{1}{K+3} - \frac{1}{K+6}\right)}_{\mathrm{II}}$$

Analisando I

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

Assim

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} = \lim_{n \to \infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Analisando II

$$II = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6}$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+6}$$

Logo

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}$$

Assim

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+6} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{15+12+10}{60} = \frac{37}{60}$$

Com isso:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)(k+6)} = \frac{1}{18}\left(\frac{11}{6}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{37}{60}\right)$$

$$= \frac{11}{108} - \frac{37}{1080}$$

$$= \frac{110-37}{1080} = \frac{73}{1080}$$

Scanned by CamScanner

NOME: Maicon Aparecido Pinheiro

PROFª: VANESSA ESTATÍSTICA 2º ANO

SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

SÉRIE HARMÔNICA. Considere a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}},$$

Mostre que, se $\alpha \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = +\infty$

Seja $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ e $\alpha = 1$, temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 1/2$

$S_3 = 1 + 1/2 + 1/3$

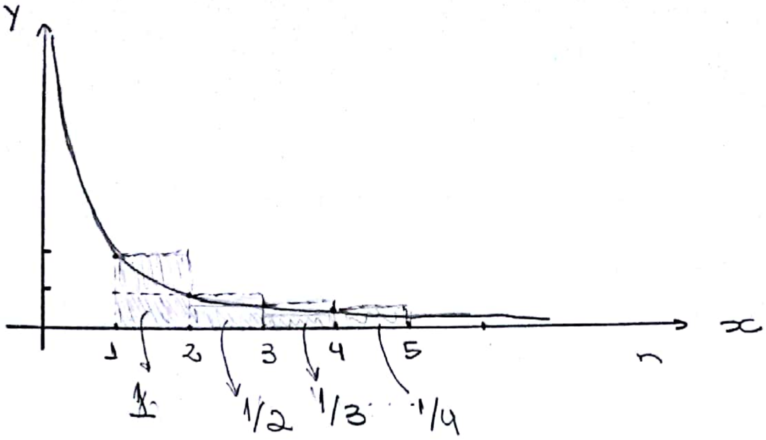
$\vdots$

$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$

Observamos que dado $m > n$, $a_m > a_n$, ou seja S_n é crescente.

E:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\, dX$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to\infty} \ln(x)\Big|_1^n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \lim_{n\to\infty} (\ln(n) - \ln(1))$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \infty$$

Logo, concluímos que para $\alpha = 1$,

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$, diverge para $+\infty$.

. Basta agora verificar para $\alpha < 1$.
Utilizando o mesmo raciocínio, temos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geq \int_1^n \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

81

FCT - UNESP - Campus de Presidente Prudente
2ª Lista de Exercícios de Séries e Equações Diferenciais
2º Estatística - diurno
Profª Vanessa Avansini Botta

1. Mostre que a série dada é convergente:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} sen \frac{1}{k}$;

   (b) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k^3}{k^4+3}$;

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}2^{-k}$.

2. Estude a convergência das seguintes séries e, em caso de convergência, se esta é absoluta ou condicional:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$;

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} sen \frac{1}{k}$;

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2k+1}{k(k+1)}$;

   (d) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{(k+1)^2}$.

3. Estude a convergência das séries abaixo através do Critério da Raiz:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k4^k}$;

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$;

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{2k}$.

4. Estude a convergência das séries abaixo através do Critério da Razão:

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{k!}$;

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{(2k)!}$;

Pasta 26

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$;

(d) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots$;

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

5. Indique os valores de x para os quais convergem as seguintes séries:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{k^3+1}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$;

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{(x+1)^{3k}}$.

$(k+1)^{k+1} = (k+1)^k \cdot (k+1)$

1 - Mostre que a série dada é convergente.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \text{sen} \frac{1}{k}$;

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \text{sen} \frac{1}{k}$ é uma série alternada, onde $a_n = \text{sen} \frac{1}{k}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \text{sen} \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k \ \text{sen} 1/k}{1/k}$$

Façamos $u = 1/k$. Se k diverge para $+\infty$, u converge p/ 0.

$$\lim_{u\to 0} \frac{u \ \text{sen} u}{u} = \lim_{u\to 0} u \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen} u}{u} = 0 \cdot 1 = 0$$

Vamos mostrar que $\text{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ é decrescente.

Dado $k+1 > k$, deve-se ter $a_{k+1} < a_k$

$$a_{k+1} < a_k$$

$$\text{sen}\left(\frac{1}{k+1}\right) < \text{sen}\left(\frac{1}{k}\right) \quad [\text{arcsen}]$$

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$$

$$k+1 > k$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \text{sen} \frac{1}{k}$ é convergente pelo critério de Leibnitz.

b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \dfrac{k^3}{k^4+3}$

Como se trata de uma série alternada, podemos utilizar o critério de Leibintzs.

$$a_k = \frac{k^3}{k^4+3}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3}{k^4+3} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{k^3}}{\cancel{k^3}(k+3/k^3)} = 0 \,//$$

Vamos verificar se a_k decresce p/ $k \geq 2$.

$k \geq 2$

$m < n$

$m^3 < n^3$

$m^4+3 < n^4+3$

$$= \frac{m^3}{m^4+3} - \frac{n^3}{n^4+3} = \frac{m^3(n^4+3) - n^3(m^4+3)}{(m^4+3)(n^4+3)} =$$

$$= \frac{m^3n^4 + 3m^3 - n^3m^4 - 3n^3}{(m^4+3)(n^4+3)} = \frac{m^3n^3(n-m) + 3(m^3-n^3)}{\underbrace{(m^4+3)}_{>0}\underbrace{(n^4+3)}_{>0}}$$

Basta estudar então

$$m^3n^3(n-m) + 3(m^3-n^3)$$

$$= \underbrace{(n-m)}_{>0}[m^3n^3 - 3(m^2+n^2+mn)]$$

$m^3 n^3 - 3m^2 - 3n^2 - 3mn$

$mn(m^2n^2 - 3) - 3(m^2 + n^2)$

como m no mínimo é igual à 2, n será 3 e $mn = 6$ que é maior que 3.

$mn > 3$.

Basta estudar

$m^2n^2 - 3 - m^2 - n^2$

$m^2n^2\left(1 - \frac{3}{m^2n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

$\frac{1}{m^2}$ apresenta valor máximo em $m=2 \Rightarrow \frac{1}{4}$

$\frac{1}{n^2}$ " " " " $n=3 \Rightarrow \frac{1}{9}$

$\frac{3}{m^2n^2}$ " " " " $m=2$ e $n=3 \Rightarrow \frac{3}{36}$

temos:

$m^2n^2\left(1 - \frac{3}{36} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)$

$= m^2n^2\left(\frac{36 - 3 - 4 - 9}{36}\right)$

$= \frac{m^2n^2\, 20}{36} \geq 0$

Como $\frac{m^2 n^2 20}{36} \geq 0$ temos que

$$\frac{m^3}{m^4+3} - \frac{n^3}{n^3+4} > 0$$

$$a_m - a_n > 0$$

$a_m > a_n$ para $m < n$ e $m \geq 2$.

Logo

$\frac{K^3}{K^4+3}$ é decrescente.

Portanto, pelo critério de Leibnitz, a série

$\sum_{K=2}^{\infty} (-1)^K \frac{K^3}{K^4+3}$ é convergente.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, 2^{-k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{\lim_{k \to \infty} e^{k \ln 2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

e

dado $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$

$$2^m > 2^n$$

$$\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow a_n \text{ decrescente.}$$

Pelo critério de Leibnitz, mostramos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, 2^{-k}$ é convergente.

2. Estude a convergência das séries seguintes, e em caso de convergência, se esta é absoluta ou condicional:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$;

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0 \\ \\ \text{Dado } m > n \\ \quad \frac{1}{m} < \frac{1}{m} \\ \\ \quad a_m < a_n \end{array}\right\}$$

$\therefore$ Pelo critério de Leibnitz vemos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é convergente.

Basta saber agora se $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é absolutamente ou condicionalmente convergente. Para isso deve-se verificar se $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right|$ diverge ou converge.

$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ } diverge devido $\frac{1}{k}$ ser uma série harmônica com $\alpha = 1$.

Portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ é condicionalmente convergente.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$

Sabe-se pelo item a do exercício 1 que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$ é convergente.

Para verificar se esta é absolutamente ou condicionalmente convergente. Basta então verificar se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ converge ou não.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{1}{k} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$$

Façamos o critério do limite

$a_k = \operatorname{sen}(1/k)$ $\quad b_k = 1/k$ (diverge)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\operatorname{sen}(1/k)}{1/k} \qquad w = 1/k, \ k \to \infty \Rightarrow w \to 0$$

$$= \lim_{w \to 0} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} = 1$$

Como $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$ e b_k é divergente, temos pelo critério da comparação do limite que a_k também diverge.

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(1/k)$ é condicionalmente convergente.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2k+1}{k(k+1)}$

Ela será absolutamente convergente e em consequência convergente, se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} \right| \text{ convergir}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty$$

Logo ela não é absolutamente convergente.

Suponhamos $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2k+1}{k(k+1)}$ convergente. Prova:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2k+1}{k^2+k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k(2+1/k)}{k(k+1)} = 0 \,//$$

Dado $m > n$, a_n é decrescente se

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} > \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

$$(2n+1)\, m(m+1) > (2m+1)\, n(n+1)$$

$$(2n+1)(m^2+m) > (2m+1)(n^2+n)$$

$$2nm^2 + 2nm + m^2 + m > 2mn^2 + 2mn + n^2 + n$$

$$\underbrace{2nm^2 + m^2 + m}_{>} - 2mn^2 - n^2 - n > 0 \quad ✓$$

Portanto, pelo critério de Leibnitz, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$ 8

é condicionalmente convergente

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{(k+1)^2}$ 9

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 0$$

Dado $n > m$

$n+1 > m+1$

$(n+1)^2 > (m+1)^2$

$$\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{1}{(m+1)^2}$$

Logo, pelo critério de Leibnitz, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{(k+1)^2}$ é convergente.

$$\sum_{k=1}^{n} \left| (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Pelo critério do limite

$a_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ e $b_k = \dfrac{1}{k^2}$ (convergente)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2+2k+1} \cdot k^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+2k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}(1+2/k+1/k^2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+2/k+1/k^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ é convergente e $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 1$, $b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(k+1)^2}$

também é convergente.

Assim, a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}$ é absolutamente convergente.

3- Estude a convergência das séries abaixo através do critério da raiz: 11

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k4^k}$;

$$L = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k4^k}} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{4^k}} \cdot \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{k \to \infty} \left(1/k\right)^{1/k}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{k \to \infty} e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)^{1/k}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{k \to \infty} e^{\frac{\ln(1/k)}{k}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Logo, como $L < 1$, concluímos pelo critério da raiz que

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k4^k}$ é convergente.

b) $\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{K^2}$

$$L = \lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{\left(\frac{K}{K+1}\right)^{K^2}}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{K}$$

$$= \lim_{K\to\infty}\frac{K^K}{(K+1)^K} = \lim_{K\to+\infty}\frac{1}{\frac{(K+1)^K}{(K)^K}}$$

$$= \lim_{K\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{K+1}{K}\right)^K}$$

$$= \lim_{K\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{K}\right)^K}$$

$$= \frac{1}{e} \;//$$

Como $L = 1/e$ e $L < 1$, concluímos pelo critério da raiz que $\sum_{K=2}^{\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^{K^2}$ é convergente.

c) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^K}{2K}$

$$L = \lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{\frac{K^K}{2K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{K}{\sqrt{2}^1 K^{1/K}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{K\to\infty} \frac{K}{K^{1/K}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lim_{K\to\infty} K}{\lim_{K\to\infty} K^{1/K}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot +\infty = +\infty$$

Como $L = +\infty$, $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^K}{2^K}$ diverge (de acordo com o critério da raiz).

4) Estude a convergência das séries abaixo através do critério da razão:

a) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^3}{K!}$

$$L = \lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{(K+1)^3}{(K+1)!}}{\frac{K^3}{K!}} = \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^3}{(K+1)!} \cdot \frac{K!}{K^3}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^3}{(K+1)\cancel{K!}} \frac{\cancel{K!}}{K^3} = \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^2}{K^3} = \lim_{K\to\infty} \frac{K^2+2K+1}{K^3}$$

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\cancel{K^2}\left(1 + 2/K + 1/K^2\right)}{\cancel{K^2}\,(K)} = \lim_{K\to\infty} \frac{1 + 2/K + 1/K^2}{K} = 0$$

Como $L < 1$, a série $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^3}{K!}$ é convergente.

b) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^K}{(2K)!}$

$$L = \lim_{K\to+\infty} \frac{\frac{(K+1)^{K+1}}{(2K+2)!}}{\frac{K^K}{(2K)!}}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^{K+1}}{(2K+2)!} \cdot \frac{(2K)!}{K^K}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^{K+1}}{(2K+2)(2K+1)\cancel{(2K)!}} \frac{\cancel{(2K)!}}{K^K}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^{K+1}}{(2K+2)(2K+1)K^K}$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^{K+\cancel{1}}}{2(\cancel{K+1})(K+1)K^K}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{(K+1)^K}{2(K+1)K^K}$$

$$= \lim_{K\to+\infty} \frac{1}{2(K+1)} \cdot \lim_{K\to\infty} \frac{(K+1)^K}{K^K}$$

$$0 \cdot \lim_{K\to\infty} \left(1+\frac{1}{K}\right)^K$$

$$0 \cdot e = 0$$

Como $L < 1$, a série $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^K}{(2K)!}$ é convergente.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$,

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k!}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\cancel{(k+1)}\,\cancel{k!}}{(k+\cancel{1})^2} \frac{k^2}{\cancel{k!}}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{k+1}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\cancel{k}\,(k)}{\cancel{k}\,(1+1/k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{1+1/k} = +\infty$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}$ é divergente.

d) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots$;

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}$$

$a_k = \frac{k}{3^k}$

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k+1}{3k} = \lim_{k \to \infty} \frac{k(1+1/k)}{k(3+1/k)} = \frac{1}{3}$$

Como $L < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ é convergente.

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

$a_k = \frac{k!}{k^k}$ $\quad L = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} =$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{(k+1)}\cancel{k!}\, k^k}{(k+1)^{k+\cancel{1}}\cancel{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\frac{(k+1)^k}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} \;//$$

Como $\frac{1}{e} < 1$, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ é convergente.

5. Indique os valores de x para os quais convergem as seguintes séries:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$;

Para $x=0$, a série é convergente pois

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, com $x=0$, é 0.

Scanned by CamScanner

Para $x \neq 0$, pelo critério da raiz para séries de termos quaisquer temos:

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k}\right|} = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt[k]{|x|^k}}{\sqrt[k]{|k|}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x|}{\sqrt[k]{|k|}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x|}{|k|^{1/k}}$$

$$= |x| . \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^{1/k}} = \frac{|x|}{\lim\limits_{k \to \infty} e^{\frac{\ln k}{k}}} = |x|$$

Para $|x| < 1$, a série é convergente.

Para $|x| > 1$, a série é divergente.

Para $|x| = 1$

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente (série harmonica de ordem 1)

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ é convergente (critério de Leibnitz)

Logo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ é convergente para $|x| < 1$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{k^3 + 1}$

Para $x = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{k^3+1} = 0$, portanto ela é convergente neste caso.

Para $x \neq 0$, pelo critério da raiz p/ séries de termos quaisquer:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{kx^k}{k^3+1}\right|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{|kx^k|}}{\sqrt[k]{|k^3+1|}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{k^3+1}} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{k^{1/k}}{(k^3+1)^{1/k}} =$$

$$|x| \cdot \frac{\lim_{k\to\infty} k^{1/k}}{\lim_{k\to\infty} (k+3)^{1/k}} = |x| \cdot \frac{\lim_{k\to\infty} e^{\frac{\ln k}{k}}}{\lim_{k\to\infty} e^{\frac{\ln(k+3)}{k}}} = |x|_{//}$$

Para $|x| < 1$, a série converge.

" $|x| > 1$, " " diverge.

" $|x| = 1$

∘ $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$$

te

Utilizando o critério do limite

$a_k = \dfrac{k}{k^3+1}$ $b_k = \dfrac{1}{k^2}$ } converge (harmônica de ordem 2)

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^3+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^3+1} \cdot \frac{k^2}{1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3}{k^3+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^3}(1)}{\cancel{k^3}(1+1/k^3)} = \frac{1}{1} = 1$$

Como limite $\frac{a_k}{b_k} = 1$, e b_k converge então a_k também converge.

• $x = -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{k^3+1}$$ Isto converge $\Leftrightarrow$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^3+1} \right|$$ convergir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$$ Utilizando o critério do limite

$a_k = \frac{k}{k^3+1}$, $b_k = \frac{1}{k^2}$ } converge

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^3+1}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^3+1} \, k^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^3+1}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{k^3}}{\cancel{k^3}(1+1/k^3)} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^3+1}$$ converge

Conclusão : $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{k^3+1}$$ converge para $|x| \leq 1$.

Scanned by CamScanner

20) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$;

Para $x = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ converge para 0.

Para $x \neq 0$, pelo critério da razão para termos quaisquer.

$$L = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{x^k}{k^k}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{x^k} \right|$$

$$= |x| . \lim_{k \to \infty} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = |x| \lim \frac{k^k}{(k+1).(k+1)^k} =$$

$$|x| \left(\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k+1} . \lim_{k \to \infty} \frac{1}{(1+1/k)^k} \right) = 0 \,//$$

Como $L < 1$, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ é convergente para qualque x real.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{(x+1)^{3k}}$?

Observemos que para $x=-1$, a série é indefinida.

Para outros, façamos o critério da razão + quaisquer.

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\dfrac{8^{k+1}}{(x+1)^{3k+3}}}{\dfrac{8^k}{(x+1)^{3k}}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{8^{k+1}}{(x+1)^{3(k+1)}} \cdot \frac{(x+1)^{3k}}{8^k} \right|$$

$$= 8 \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{(x+1)^3} \right| = 8 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|x+1|^3}$$

$$= 8 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|x+1|^2\,|x+1|} = 8 \left[\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(x+1)^2\,|x+1|} \right] =$$

$$\frac{8}{(x+1)^2\,|x+1|}$$

- $\dfrac{8}{(x+1)^2\,|x+1|} < 1$, converge

$8 < (x+1)^2\,|x+1|$ ou $8 < (x^2+2x+1)(-x-1)$

$8 < (x^2+2x+1)(x+1)$ $\quad$ $8 < -x^3-2x^2-x-x^2-2x-1$

$8 < x^3+2x^2+x+x^2+2x+1$ $\quad$ $8 < -x^3-3x^2-3x-1$

$8 < x^3+3x^2+3x+1$ $\quad$ $-8 > (x+1)^3$

$8 < (x+1)^3$ $\quad$ $-2 > x+1$

$2 < x+1$, $1 < x$, $x > 1$ $\quad$ $-3 > x$

$x < -3$

Scanned by CamScanner

ou seja $[-\infty, -3] \cup [1, \infty]$

Para $\frac{8}{(x+1)^2|x+1|} > 1$, diverge.

Para $\frac{8}{(x+1)^2|x+1|} = 1$.

$8 = (x+1)^2|x+1|$

$8 = (x+1)^2(x+1)$ ou $8 = (x+1)^2(-x-1)$

$8 = (x+1)^3$. $8 = -(x+1)^3$

$2 = x+1$ $-8 = (x+1)^3$

$x = 1$ $x+1 = -2$

$x = -3$

. $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{2^{3k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{8^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1, \text{ diverge}$$

. $x = -3$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{(-3)^{3k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{(-27)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8^k}{27^k}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{8}{27}\right)^k$ converge $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \left(\frac{8}{27}\right)^k\right|$ converge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^k$ Usando critério da raiz

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{8}{27}\right)^k} = \frac{8}{27}$$

Com $L < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{8}{27}\right)^k$ converge

Assim

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{(x+1)^k}$ converge para $x \leqslant -3$ ou para $x \, 7$ //

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_1^n x^{-\alpha}\, dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \lim_{n \to +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right)$$

Como estamos supondo $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-\alpha+1} = +\infty$.

Assim

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty$$

E:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad , \forall\, \alpha < 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant +\infty$$

E portanto, concluimos que dado $\alpha \leqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty.$$

3ª LISTA DE SÉRIES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.

FCT - UNESP - Campus de Presidente Prudente
3^a Lista de Exercícios de Séries e Equações Diferenciais
2^o Estatística - diurno
Prof^a Vanessa Avansini Botta

1. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$;

   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$;

   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$;

   (d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$;

   (e) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$.

2. Encontre a série de Maclaurin de cada função dada a seguir:

   (a) $f(x) = \sin 4x$;

   (b) $f(x) = e^{-x^2}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$;

   (d) $f(x) = \cos x$.

3. Obtenha a série de Taylor para as funções abaixo nos pontos indicados:

   (a) $f(x) = \sin x$ com $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

   (b) $f(x) = e^{1-x}$ com $x_0 = 1$;

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ com $x_0 = 1$.

4. Usando a série binomial para $\sqrt[3]{1+x}$, calcule o valor de $\sqrt[3]{25}$ com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido em uma calculadora.

$2 - 1 + 1$

$2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \frac{16-2+1}{8} = \frac{15}{8} =$

$2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{54-3+1}{27} = \frac{52}{27} =$

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$;

Solução:

$\sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n$ é uma série de potências com $a_n = n^n$. Determinemos seu raio de convergência.

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

resulta

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Portanto a série converge apenas para $x=0$. O domínio de f é $\{0\}$. Tal função só está definida para $x=0$.

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$;

$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ é uma série de potências com $a_n = n$.

Temos

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n}{n(1+1/n)} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{1 + 1/n} \right| = |1| = 1.$$

A série é convergente p/ todo $x \in]-1, 1[$ $(|x| < 1)$ e divergente para $|x| > 1$.

Para $|x| = 1$, temos:

- $x = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n = +\infty$ diverge

- $x = -1$

$\sum_{n=0}^{\infty} -n = -\infty$ diverge

Logo, a serie é convergente para $|x| < 1$.

Resulta que a função está definida no intervalo aberto $]-1, 1[$.

c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$;

Solução

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$ é uma série de potência com $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Determinemos seu raio de convergência.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{(1+2/n)}{(1+2/n+1/n^2)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \right| = |1| = 1.$$

Para $|x| < 1$, a série converge.

Para $|x| > 1$, " " diverge.

Para $|x| = 1$.

- $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, pelo critério do termo geral para divergência, concluímos que $\sum^{\infty} \frac{n}{n+1}$ é divergente p/ $x = 1$.

$x = -1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$;

Solução:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$ é uma série de potências com $a_n = \frac{1}{n^3}$.

Temos

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{n^3} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n^3}{n^3} \cdot \left(1 + 3/n + 3/n^2 + 1/n^3\right) \right| = |1| = 1.$$

A série converge para todo $x \in]-1, 1[$ e diverge para $|x| > 1$.

Vejamos p/

$\rightarrow x = 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ $\rightarrow$ convergente (série harmônica de ordem 3).

$\rightarrow x = -1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^3}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \qquad m > n \Rightarrow m^3 > n^3$

$\frac{1}{m^3} < \frac{1}{n^3}$

Scanned by CamScanner

d)

Logo, pelo critério de Leibnitz, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ é convergente

e portanto:

Resulta que a série é convergente para todo $x \in [-1,1]$.

Conclusão. O domínio de f é o intervalo fechado $[-1,1]$.

e) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$ é uma série de potências com $a_n = \frac{1}{n^2+3}$

Temos:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2+3}}{\frac{1}{(n+1)^2+3}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1}{n^2+3} \cdot \frac{(n+1)^2+3}{1} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n^2+2n+5}{n^2+3} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n^2(1 + 2/n + 5/n^2)}{n^2(1 + 3/n^2)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \right| =$$

$= |1| = 1.$

A série é convergente para $|x| < 1$ e divergente p/ $|x| > 1$.

Para $|x| = 1$, temos

caso 1 $\to x = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3}$$

Considerando $b_K = \frac{1}{n^2+3}$ e $a_K = \frac{1}{n^2}$. Utilizando o

critério do limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_K}{b_K} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3}{n^2} = 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_K}{b_K} = 1$, e a_K (neste caso) é convergente, então b_K também o é. Desta forma, a série converge p/ $x=1$.

2 CASO → $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3} = 0$$

Dado $m > n$

$m^2 > n^2$

$m^2+3 > n^2+3$

$$\frac{1}{m^2+3} < \frac{1}{n^2+3}$$

$a_m < a_n$ (decrescente)

Pelo critério de Leibnitz, concluímos que a série é convergente p/ $x=-1$.

Conclusão:

A série é convergente para $|x| \leq 1$. Assim a função f está definida no intervalo fechado $[-1, 1]$.

2) Encontre a série de Maclaurin de cada função dada a seguir:

Lembrete:

Série de Maclaurin:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \dots$$

a) $f(x) = \operatorname{sen} 4x$

$f(x) = \operatorname{sen} 4x$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = 4\cos 4x$ $\quad f'(0) = 4$

$f''(x) = -16 \operatorname{sen} 4x$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -64 \cos 4x$ $\quad f'''(0) = -64$

$f''''(x) = 256 \operatorname{sen} 4x$ $\quad f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = 1024 \cos 4x$ $\quad f^{v}(0) = 1024$

$f^{vi}(x) = -4096 \operatorname{sen} 4x$ $\quad f^{vi}(0) = 0$

$f^{vii}(x) = -16384 \cos 4x$ $\quad f^{vii}(0) = -16384$

$$\operatorname{sen} 4x = 0 + \frac{4}{1!}x^1 + 0 + \frac{(-64)x^3}{3!} + 0 + \frac{1024 x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{sen } 4x = 4x - \frac{64x^3}{3!} + \frac{1024}{5!}x^5 + \dots$$

$$\text{sen } 4x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Conclusão:

$$\text{sen } 4x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad //$$

b) $f(x) = e^{-x^2}$;

$f(x) = e^{-x^2}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = [e^{-x^2}(-2x)](-2x) + (-2)e^{-x^2}$

$f''(x) = [4x^2 e^{-x^2}] - 2e^{-x^2}$ $\quad f''(0) = -2$

$f'''(x) = [8x e^{-x^2} + (-e^{-x^2} 2x)4x^2] - 2[e^{-x^2}(-2x)] =$

$= 8x e^{-x^2} - [(4x-2)(e^{-x^2} \cdot 2x)]$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 8e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})8x - \{4(e^{-x^2} \cdot 2x) + [(-2xe^{-x^2} 2x$
$+ 2e^{-x^2})](4x-2)\}$

$f^{IV}(x) = 8e^{-x^2} - 16x^2 e^{-x^2} - (8xe^{-x^2} + 2e^{-x^2} - 4x^2 e^{-x^2})$
$\cdot(4x-2)$ $\quad f^{IV}(0) = 12$

$f\ (e^{-x^2} = 1 + \sum_{K=2} \frac{(K-1)K}{K!} x^K$

c) $\sqrt{1+x}$;

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{8\sqrt{(1+x)^3}}$

$f(0) = 1$

$f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$f''(0) = -\dfrac{1}{8}$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)' = \frac{-\cancel{2}1}{\cancel{2}\sqrt{1+x}\,(2\sqrt{1+x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}\;4(1+x)}$$

$$= \frac{-1}{8(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{-1}{8\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{-1/2}{|1/2-n|} \left(\frac{x^n}{2}\right)^n$$

1/2

1/2 (n!) (n-1)!

EDO

2º Estatística
Disciplina: Séries e EDO
Profa. Vanessa

2)

Seção 1.3

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não-linear.

1. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$
2. $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$
4. $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$
6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

Nos problemas de 7 a 14, verifique que a função (ou funções) dada(s) é (são) solução (soluções) da equação diferencial.

7. $y'' - y = 0;\quad y_1(t) = e^t,\quad y_2(t) = \cosh t$
8. $y''+2y'-3y=0;\quad y_1(t) = e^{-3t},\quad y_2(t) = e^t$
9. $ty' - y = t^2;\quad y = 3t + t^2$
10. $y''''+4y'''+3y = t;\quad y_1(t) = t/3,\quad y_2(t) = e^{-t} + t/3$
11. $2t^2y''+3ty'-y = 0,\quad t>0;\quad y_1(t) = t^{1/2},\quad y_2(t) = t^{-1}$
12. $t^2y''+5ty'+4y = 0,\quad t>0;\quad y_1(t) = t^{-2},\quad y_2(t) = t^{-2}\ln t$
13. $y'' + y = \sec t,\quad 0 < t < \pi/2;\quad y = (\cos t)\ln \cos t + t \operatorname{sen} t$
14. $y' - 2ty = 1;\quad y = e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}$

Nos problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$
16. $y'' - y = 0$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Nos problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

19. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
20. $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$

Seção 2.1

Nos problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t},\quad y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t},\quad y(1) = 0$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1,\quad y(1) = \frac{1}{2},\quad t > 0$
16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2\quad y(\pi) = 0,\quad t > 0$
17. $y' - 2y = e^{2t},\quad y(0) = 2$
18. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t,\quad y(\pi/2) = 1$
19. $t^3y' + 4t^2y = e^{-t},\quad y(-1) = 0$
20. $ty' + (t+1)y = t,\quad y(\ln 2) = 1$

Seção 2.2

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2-1)/(3+2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

Pasta 36

Respostas:

Seção 1.3

1. Segunda ordem, linear.
2. Segunda ordem, não-linear.
3. Quarta ordem, linear.
4. Primeira ordem, não-linear.
5. Segunda ordem, não-linear.
6. Terceira ordem, linear.
15. $r = -2$
16. $r = \pm 1$
17. $r = 2, -3$
18. $r = 0, 1, 2$
19. $r = -1, -2$
20. $r = 1, 4$
21. Segunda ordem, linear.
22. Segunda ordem, não-linear.
23. Quarta ordem, linear.
24. Segunda ordem, não-linear.

Seção 2.2

1. $3y^2 - 2x^3 = c; \quad y \neq 0$
2. $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c; \quad x \neq -1, y \neq 0$
3. $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$; também $y = 0$; em toda a parte
4. $3y + y^2 - x^3 + x = c; \quad y \neq -3/2$
5. $2\,\mathrm{tg}\,2y - 2x - \mathrm{sen}\,2x = c$ se $\cos 2y \neq 0$; também $y = \pm(2n+1)\pi/4$ para qualquer inteiro n; em toda a parte
6. $y = \mathrm{sen}[\ln|x| + c]$ se $x \neq 0$ e $|y| < 1$; também $y = \pm 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c; \quad y + e^y \neq 0$
8. $3y + y^3 - x^3 = c$; em toda a parte

CAPÍTULO 2 Seção 2.1

1. (c) $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$; y é assintótico a $t/3 - 1/9$ quando $t \to \infty$
2. (c) $y = ce^{2t} + t^3e^{2t}/3$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
3. (c) $y = ce^{-t} + 1 + t^2e^{-t}/2$; $y \to 1$ quando $t \to \infty$
4. (c) $y = (c/t) + (3\cos 2t)/4t + (3\,\mathrm{sen}\,2t)/2$; y é assintótico a $(3\,\mathrm{sen}\,2t)/2$ quando $t \to \infty$
5. (c) $y = ce^{2t} - 3e^t$; $y \to \infty$ ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
6. (c) $y = (c - t\cos t + \mathrm{sen}\,t)/t^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
7. (c) $y = t^2e^{-t^2} + ce^{-t^2}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
8. (c) $y = (\mathrm{arctg}\,t + c)/(1 + t^2)^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
9. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$; y é assintótico a $3t - 6$ quando $t \to \infty$
10. (c) $y = -te^{-t} + ct$; $y \to \infty, 0$, ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
11. (c) $y = ce^{-t} + \mathrm{sen}\,2t - 2\cos 2t$; y é assintótico a $\mathrm{sen}\,2t - 2\cos 2t$ quando $t \to \infty$
12. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t^2 - 12t + 24$; y é assintótico a $3t^2 - 12t + 24$ quando $t \to \infty$
13. $y = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$
14. $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$
15. $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$
16. $y = (\mathrm{sen}\,t)/t^2$
17. $y = (t+2)e^{2t}$
18. $y = t^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - t\cos t + \mathrm{sen}\,t]$
19. $y = -(1+t)e^{-t}/t^4, \quad t \neq 0$
20. $y = (t - 1 + 2e^{-t})/t, \quad t \neq 0$

1ª Lista de Equações Diferenciais Ordinárias

Nos problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não-linear.

1 - $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

A ordem da derivada de maior grau é 2 e os coeficientes das variáveis em y estão em função de x.

Portanto, concluimos:

É uma equação diferencial linear e de ordem 2.

2 - $(1+y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

Existe um coeficiente das variáveis em relação à y que também está em função de y. Além disso o grau da derivada de maior ordem é 2. Assim

→ É não-linear e de segunda ordem.

3 - $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

Seguindo o mesmo raciocino anterior, conclui-se.

. É linear de quarta ordem.

4- $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

$$\frac{dy}{dt} + tyy = 0$$

$\therefore$ não-linear de primeira ordem

5. $\frac{d^2y}{dt^2} + \text{sen}(t+y) = \text{sen}\,t$

O grau da derivada de maior ordem é 2.

A presença da parcela $\text{sen}(t+y)$ faz que:

Solução

- Seja não-linear e de ordem 2.

6- $\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

A derivada de maior ordem é a de ordem 3.

Os coeficientes das variáveis em y estão apenas em função de t.

$\therefore$

É linear de ordem 3.

7. $y'' - y = 0$, $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$

Para $y_1(t) = e^t$, temos

$$y'' - y = 0$$

$$(e^t)'' - e^t = 0$$

$$e^t - e^t = 0$$

$$0 = 0$$ $\Longrightarrow$ A função y_1 é solução da equação diferencial.

Para $y_2(t) = \cosh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$$y'' - y = 0$$

$$\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)'' - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = 0$$

$$0 = 0$$ $\Longrightarrow$ y_2 é solução da EDO.

Scanned by CamScanner

8 - $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^{t}$

- $y_1(t) = e^{-3t}$

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$(e^{-3t})'' + 2(e^{-3t})' - 3e^{-3t} = 0$$

$$(-3e^{-3t}) - 6e^{-3t} - 3e^{-3t} = 0$$

$$\underbrace{9e^{-3t} - 9e^{-3t}}_{} = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow$$ y_1 é solução da ED.

9 - $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$

se $y = 3t + t^2$, então

$$ty' - y = t^2 \iff$$

$$t(3t + t^2)' - (3t + t^2) = t^2 \iff$$

$$\cancel{3t} + 2t^2 - \cancel{3t} - t^2 = t^2 \iff$$

$$2t^2 - t^2 = t^2 \iff$$

$$t^2 = t^2 \iff$$ verdade

$\therefore$ $y = 3t + t^2$ é solução da ED.

10 - $y'''' + 4y''' + 3y = t$; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$

- $y_1 = t/3$

$\Rightarrow$ $y'''' + 4y''' + 3y = t \iff (t/3)'''' + 4(t/3)''' + 3(t/3) = t$

$$\left(\tfrac{t}{3}\right)''' + 4\left(\tfrac{t}{3}\right)'' + t = t \iff$$

$$(0)'' + 4(0)' + t = t \iff$$

$$0 + t = t \iff$$

$$t = t \iff \text{verdade}$$

$\therefore$ y_1 é sol. da ED.

- $y_2 = e^{-t} + t/3$

$$\Rightarrow y'''' + 4y''' + 3y = t \iff$$

$$\left(e^{-t} + t/3\right)'''' + 4\left(e^{-t} + t/3\right)''' + 3\left(e^{-t} + t/3\right) = t \iff$$

$$(e^{-t})'''' + (t/3)'''' + 4(e^{-t})''' + 4(t/3)''' + 3e^{-t} + t = t \iff$$

$$(e^{-t})'' + 0 + 4(e^{-t})' + 0 + 3e^{-t} + t = t \iff$$

$$e^{-t} - 4e^{-t} + 3e^{-t} + t = t \iff$$

$$t = t \iff \text{verdade}$$

$\therefore$ y_2 é sol. da ED.

11. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{1/2}$, $y_2(t) = t^{-2}\ln t$

- $y_1(t) = t^{1/2}$,

$$\Rightarrow 2t^2y'' + 3ty' - y = 0 \iff 2t^2\left(t^{1/2}\right)'' + 3t\left(t^{1/2}\right)' - t^{1/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right)' + 3t\cdot\frac{1}{2t^{1/2}} - t^{1/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2\cdot\frac{1}{2}\left(t^{-1/2}\right)' + \frac{3t}{2t^{1/2}} - t^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2\left(-\frac{1}{2}t^{-3/2}\right) + \frac{3}{2}t^{1/2} - t^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{t^2}{2t^{3/2}} + \frac{3}{2}t^{1/2} - t^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{t^{1/2}}{2} + \frac{3}{2}t^{1/2} - t^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{2}\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0 \Leftrightarrow \text{verdade}$$

$\therefore$ y_1 é sol. da ED.

— " — " — " — " —

$\Rightarrow y_2 = t^{-1}$

$$\Rightarrow 2t^2y'' + 3ty' - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$2t^2\left(\frac{1}{t}\right)'' + 3t\left(\frac{1}{t}\right)' - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)' + 3t\left(-\frac{1}{t^2}\right) - 1/t = 0 \Leftrightarrow$$

$$2t^2\left(\frac{2}{t^3}\right) - \frac{3t}{t^2} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4t^2}{t^3} - \frac{3}{t} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{t} - \frac{4}{t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0 \Leftrightarrow \text{verdade}$$

$\therefore$

y_2 é sol. da ED.

12 - $t^2 y'' + 5t y' + 4y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2}\ln t$

- $y_1(t) = t^{-2} \Rightarrow$

$$t^2 (t^{-2})'' + 5t(t^{-2})' + 4(t^{-2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2(-2t^{-3})' + 5t(-2t^{-3}) + 4(t^{-2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2(6t^{-4}) - \frac{10t}{t^3} + \frac{4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{6t^2}{t^4} - \frac{10}{t^2} + \frac{4}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{t^2} - \frac{6}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0 \Leftrightarrow \text{verdade}$$

$\therefore$ y_1 é sol. da ED.

$y_2(t) = t^{-2}\ln t$

$\therefore$

$t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0 \Rightarrow$

$t^2(t^{-2}\ln t)'' + 5t(t^{-2}\ln t)' + 4(t^{-2}\ln t) = 0$

$*$

$(t^{-2}\ln t)'' = [(t^{-2}\ln t)']'$

E

$(t^{-2}\ln t)' = -2t^{-3}\ln t + \frac{1}{t}\cdot t^{-2} = -\frac{2\ln t + 1}{t^3} = \frac{1-2\ln t}{t^3}$

Assim

$(t^{-2}\ln t)'' = (t^{-3} - 2t^{-3}\ln t)' =$

$(-3t^{-4} - (-6t^{-4}\ln t + 2t^{-4})) =$

$(-3t^{-4} + 6t^{-4}\ln t - 2t^{-4}) =$

$6t^{-4}\ln t - 5t^{-4} =$

$\frac{6\ln t - 5}{t^4}$,,

E

$t^2(t^{-2}\ln t)'' + 5t(t^{-2}\ln t)' + 4(t^{-2}\ln t) = 0 \Leftrightarrow$

$$t^2\left(\frac{6\ln t - 5}{t^4}\right) + 5t\left(\frac{1-2\ln t}{t^3}\right) + \frac{4\ln t}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{6\ln t - 5}{t^2} + \frac{5 - 10\ln t}{t^2} + \frac{4\ln t}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{6\ln t - 10\ln t + 4\ln t - \cancel{5} + \cancel{5}}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{0}{t^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$0 = 0 \Leftrightarrow$ verdade,

$\therefore$ y_2 é sol. da ED.

13 - $y'' + y = \sec t$, $0 < t < \pi/2$; $y = (\cos t)\ln\cos t + t\,\text{sen}\,t$

$\Rightarrow (\cos t \ln\cos t + t\,\text{sen}\,t)'' + \cos t \ln \cos t + t\,\text{sen}\,t = \sec t$

$(-\text{sen}\,t \ln\cos t - \cancel{\text{sen}\,t} + \cancel{\text{sen}\,t} + t\cos t)' + \cos t \ln\cos t + t\,\text{sen}\,t = \sec t \Leftrightarrow$

$(-\text{sen}\,t \ln\cos t + t\cos t)' + \cos t\ln\cos t + t\,\text{sen}\,t = \sec t$

$\left(-\cos t \cancel{\ln\cos t} + \frac{\text{sen}^2 t}{\cos t} + \cos t - t\,\cancel{\text{sen}\,t}\right) + \cos t \cancel{\ln\cos t} + t\,\cancel{\text{sen}\,t} = \sec t$

$$\frac{\text{sen}^2 t}{\cos t} + \cos t = \sec t \iff$$

$$\frac{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}{\cos t} = \sec t \iff$$

$$\frac{1}{\cos t} = \sec t \iff$$

$$\sec t = \sec t \iff \text{verdade}$$

$\therefore$ y é sol. da ED.

14 - $y' - 2ty = 1$; $y = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}\,ds + e^{t^2}$

$$y = e^{t^2}\left(\int_0^t e^{-s^2}\,ds + 1\right)$$

$$\left(e^{t^2}\left(\underbrace{\int_0^t e^{-s^2}\,ds + 1}_{K = \text{constante}}\right)'\right) + 2t\left(e^{t^2}\left(\int_0^t e^{-s^2}\,ds + 1\right)\right) = 1$$

$$-2t\,e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}\,ds - 2e^{t^2} = 1$$

$$e^{t^2}\cdot e^{-t^2} = 1$$

$$1 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

✓

Scanned by CamScanner

Nos problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução na forma $y = e^{rt}$. 11

15 - $y' + 2y = 0$

sendo $y = e^{rt}$ temos que

$$(e^{rt})' + 2e^{rt} = 0 \iff$$

$$re^{rt} + 2e^{rt} = 0 \iff$$

$$re^{rt} = -2e^{rt} \iff$$

$$r = \frac{-2\cancel{e^{rt}}}{\cancel{e^{rt}}} \iff$$

$$\therefore \quad r = -2$$

Conclosução: Para que a solução desta ED seja da forma $y = e^{rt}$, r deve ser -2 e $\therefore$ $y = e^{-2t}$.

16 - $y'' - y = 0$

$$(e^{rt})' - e^{rt} = 0 \iff$$

$$re^{rt} = e^{rt} \iff$$

$$r = \frac{\cancel{e^{rt}}}{\cancel{e^{rt}}} \iff$$

$$r = 1 \,//$$

Solução:

$r = 1$

$\Rightarrow y = e^{t}$

17 - $y'' + y' - 6y = 0$

$(e^{rt})'' + (e^{rt})' - 6e^{rt} = 0 \Rightarrow$

$r(e^{rt})' + re^{rt} - 6e^{rt} = 0 \Rightarrow$

$r^2e^{rt} + re^{rt} - 6e^{rt} = 0$

$e^{rt}(r^2 + r - 6) = 0$ Como e^{rt} varia então

$r^2 + r - 6 = 0$

$r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} r' = -3 \\ r'' = 2 \end{cases}$

Conclusão

$r = -3$ ou $r = 2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y = e^{-3t}$ ou $y = e^{2t}$

18 - $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$(e^{rt})''' - 3(e^{rt})'' + 2(e^{rt})' = 0$

$r^3e^{rt} - 3r^2e^{rt} + 2re^{rt} = 0$

$re^{rt}(r^2 - 3r + 2) = 0 \Rightarrow$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases}$

Solução

$r = 1$ ou $r = 2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y = e^{t}$ $y = e^{2t}$

Nos problemas de 19 a 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

19 - $t^2 y'' + 4t y' + 2y = 0$

$$t^2 (t^r)'' + 4t (t^r)' + 2t^r = 0 \iff$$

$$t^2 r (t^{r-1})' + 4tr (t^{r-1}) + 2t^r = 0 \iff$$

$$t^2 r(r-1)(t^{r-2}) + 4tr(t^{r-1}) + 2t^r = 0 \iff$$

$$2t^r + 4r\,t(t^{r-1}) + r(r-1)\,t^2(t^{r-2}) = 0$$

$$2t^r + 4r\,t^r + r(r-1)\,t^r = 0$$

$$t^r (r^2 + 3r + 2) = 0 \implies$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \quad \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

Solução

$r = -1$ ou $r = -2$

$\Downarrow$

$$y = t^{-1} = \frac{1}{t} \quad \text{ou} \quad y = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

20 $t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0$

$t^2 (t^r)'' - 4t(t^r)' + 4t^r = 0 \iff$

$t^2 r(r-1)(t^{r-2}) - 4tr(t^{r-1}) + 4t^r = 0 \iff$

$r(r-1)t^r - 4rt^r + 4t^r = 0 \iff$

$t^r (r^2 - 5r + 4) = 0 \iff$ Como t^r pode ser qualquer

$r^2 - 5r + 4 = 0$

$r = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$ $\begin{cases} r = 4 \\ r = 1 \end{cases}$

solução

$r = 4$ ou $r = 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y = t^4$ $y = t$

seção 2.3

Nos problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13- $y' - y = 2te^{2t}$ $y(0) = 1$

$\dfrac{dy}{dt} - y = 2te^{2t}$

$$\mu(t) = e^{\int -1\, dt} = e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t}}\left[\int 2t\, e^{2t}\, e^{-t}\, dt + K\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t}}\left[2\int t\, e^{t}\, dt + K\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t}}\left[2\int t\, e^{t}\, dt + K\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-t}}\left[2\underbrace{\int t\, e^{t}\, dt}_{I} + K\right]$$

I.

$$\int t\, e^{t}\, dt = t e^{t} - \int e^{t}\, dt = t e^{t} - e^{t} =$$

$$= e^{t}(t-1)$$

$dv \quad v = e^{t}$

$u = t \quad du = dt$

$$\therefore\; y(t) = \frac{1}{e^{-t}}\left[2e^{t}(t-1) + K\right]$$

$$y(t) = 2e^{2t}(t-1) + Ke^{t}$$

Scanned by CamScanner

mas $y(0)=1$

$$1 = 2e^0(0-1)+Ke^0$$

$$1 = 2(-1)+K$$

$$K=3$$

E:

$$y(t) = 2e^{2t}(t-1) + 3e^t \quad //$$

14) $y' + 2y = te^{-2t}$, $y(1)=0$

$$\frac{dy}{dt} + 2y = te^{-2t}$$

→ Fator Integrante:

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

→ função

$$y(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left(\int te^{-2t}e^{2t}\,dt + K\right)$$

$$= \frac{1}{e^{2t}}\left(\int te^0\,dt + K\right)$$

$$= \frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{t^2}{2} + K\right)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2e^{2t}} + \frac{K}{e^{2t}}$$

Mas $y(1) = 0$

$$0 = \frac{1}{2e^2} + \frac{K}{e^2}$$

$$0 = \frac{1 + 2K}{\cancel{2}e^2}$$

$$2K = -1$$
$$K = -1/2$$

e ∴

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2e^{2t}} \quad \text{ou}$$

$$y(t) = \frac{(t^2 - 1)e^{-2t}}{2} \,//$$

15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ $\quad y(1) = 1/2 \;, t > 0$

$$t\frac{dy}{dt} + 2y = t^2 - t + 1 \quad (\div t)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\int \left(t - 1 + \frac{1}{t}\right)t^2 \, dt + K\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\int t^3 - t^2 + t \, dt + K\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + K\right]$$

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{K}{t^2}$$

mas

$$y(1) = 1/2$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + K$$

$$K = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$K = \frac{1}{12}$$

Conclusão

$$y(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

$$y(t) = \frac{3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1}{12t^2}$$ //

16 - $y' + (2/t)\,y = \frac{\cos t}{t^2}$ $\quad y(\pi) = 0$, $t > 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\int \frac{\cos t}{\cancel{t^2}} \cdot \cancel{t^2}\, dt + k\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\operatorname{sen} t + k\right] =$$

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} + \frac{k}{t^2}$$

Mas

$y(\pi) = 0$

$\therefore$

$$y(\pi) = \frac{\operatorname{sen}\pi}{\pi^2} + \frac{K}{\pi^2}$$

$$0 = \frac{0}{\pi^2} + \frac{K}{\pi^2}$$

$$0 = \frac{K}{\pi^2}$$

$$K = 0 \,//$$

Assim temos:

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} \,//$$

17 - $y' - 2y = e^{2t}$, $y(0) = 2$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^{2t}$$

$$\mu(t) = e^{\int -2\,dt} = e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-2t}} \left[\int e^{2t} e^{-2t} dt + K \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-2t}} \left[\int 1\,dt + K \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{-2t}} \left[t + k \right]$$

$$y(t) = \frac{t + K}{e^{-2t}}$$

Mas

$y(0) = 2$

$\therefore$

$$2 = \frac{0 + K}{e^{-2.0}}$$

$$2 = \frac{K}{e^{0}}$$

$K = 2$ //

Assim:

$y(t) = (t + 2)\, e^{2t}$ //

18 - $ty' + 2y = \text{sen}\,t$. $\qquad y(\pi/2) = 1$

$t \dfrac{dy}{dx} + 2y = \text{sen}\,t \qquad (\div t)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{t} y = \frac{\text{sen}\,t}{t}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}\,dt} = e^{2\ln t} = t^2$$

$$y(t) = \frac{1}{t^2}\left[\int \frac{sen\,t}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t^2}\,dt + K\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\underbrace{\int sen\,t\;t\,dt}_{I} + K\right]$$

I

$$\int \underset{u}{t}\,\underset{dv}{sen\,t\,dt} = -t\cos t + \int \cos t\,dt$$

$$= -t\cos t + sen\,t$$

$u = t \quad du = dt$

$dv = sen\,t\,dt \quad v = -\cos t$

Cont.

$$y(t) = \frac{1}{t\cancel{^2}}\left[sen\,t - \cancel{t}\cos t + K\right]$$

$$y(t) = \frac{sen\,t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} + \frac{K}{t^2}$$

Mas $y(\pi/2) = 1$

$$1 = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{(\pi/2)^2} - \frac{\overset{0}{\cos(\pi/2)}}{\pi/2} + \frac{K}{(\pi/2)^2}$$

$$1 = \frac{1 + K}{(\pi/2)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + K$$

$$K = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

$$K = \frac{\pi - 4}{4}$$

$\therefore$

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} - \frac{\cos t}{t} + \frac{(\pi^2/4) - 1}{t^2}$$

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t + (\pi^2/4) - 1 - t\cos t}{t^2}$$

$$y(t) = t^{-2}\left[\, (\pi^2/4) - 1 - t\cos t + \operatorname{sen} t \,\right] \;//$$

19. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}$, $\quad y(-1) = 0$

$$t^3 \frac{dy}{dt} + 4t^2 y = e^{-t} \qquad (1/t^3)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{4}{t} y = \frac{e^{-t}}{t^3}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{t} dt} = e^{4 \ln t} = t^4$$

$$y(t) = \frac{1}{t^4}\left[\int \frac{e^{-t}}{\cancel{t^3}} t^{\cancel{4}} dt + k\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{t^4}\left[\int \underbrace{e^{-t} t}_{I} . dt + k\right]$$

I

$$\int e^{-t}\, t\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt$$

$$= -te^{-t} - e^{-t}$$

$$= -e^{-t}(t+1)$$

$e^{-t} \to dv$, $t \to u$

$u = t$ $du = dt$

$dv = e^{-t} dt$ $v = -e^{-t}$

cont.

$$y(t) = \frac{1}{t^4}\left[-e^{-t}(t+1) + k\right]$$

$$y(t) = -\frac{e^{-t}(t+1)}{t^4} + \frac{k}{t^4}$$

Mas

$y(-1)=0$

$\therefore$

$$0 = \frac{-e^{1}\cancel{(-1+1)}}{(-1)^4} + \frac{K}{(-1)^4}$$

$$0 = \frac{K}{1}$$

$$K = 0$$

E temos então que

$$y(t) = \frac{-e^{-t}(t+1)}{t^4} \quad , t \neq 0$$

20. $t y' + (t+1) y = t \quad , \quad y(\ln 2) = 1$

$$t\frac{dy}{dt} + (t+1)y = t \qquad (\div t)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{t+1}{t} y = 1$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{t+1}{t} dt} = e^{\int 1 + \frac{1}{t} dt} = e^{\int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt} = e^{t + \ln t}$$

$$Y(t) = \frac{1}{e^{t+\ln t}}\left[\int 1 . e^{t+\ln t}\, dt + k\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{t+\ln t}}\left[\int e^{t} . e^{\ln t}\, dt + k\right]$$

$$Y(t) = \frac{1}{e^{t} . t}\left[\int \underbrace{t e^{t}}_{I}\, dt + k\right]$$

I :

$$\int \underset{u}{t}\, \underset{dv}{e^{t} dt} = t e^{t} - \int e^{t}\, dt$$

$$= t e^{t} - e^{t}$$

$u = t \quad du = dt$

$$= e^{t}(t - 1)$$

$dv = e^{t} dt \quad v = e^{t}$

$$Y(t) = \frac{1}{t e^{t}}\left[e^{t}(t-1) + k\right]$$

$$Y(t) = \frac{(t-1)}{t} + \frac{k}{t e^{t}}$$

$$Y(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{k}{t e^{t}}$$

mas

$$Y(\ln 2) = 1$$

$\therefore$

$$1 = 1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{K}{\ln 2\, e^{\ln 2}}$$

$$1 = 1 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{K}{2\ln 2}$$

$$\frac{K}{2\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$K = \frac{2\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}$$

$$K = 2$$

Conclusão

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t e^t}$$

$$y(t) = \frac{t - 1 + 2e^{-t}}{t} \;//$$

seção 2.2

Nos problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

a) $y' = \frac{x^2}{y}$

$$y\,y' = x^2$$

$$y\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$y\,dy = x^2\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + K_1 = \frac{x^3}{3} + K_2$$

$$3y^2 = 2x^3 + \overbrace{2(K_2 - K_1)}^{c}$$

$$3y^2 - 2x^3 = c \quad // \qquad y \neq 0$$

2 - $y' = x^2 / y(1 + x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$$

$$y\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$\int y\,dy = \int \frac{x^2}{\underbrace{1+x^3}_{J}}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} =$$

I:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$$

$$u = 1 + x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx = \int \frac{\cancel{x^2}}{u} \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\, du =$$

$$\frac{1}{3}\ln u = \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$$

$\therefore$

$$\frac{y^2}{2} + K_1 = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + K_2$$

$$y^2 = \frac{2}{3}\ln(1+x^3) + \overbrace{2(K_2 - K_1)}^{C}$$

$$y^2 - \frac{2}{3}\ln|1+x^3| = C \quad // \qquad x \neq -1 \text{ e } y \neq 0$$

3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

$$y' = -y^2 \operatorname{sen} x$$

$$\frac{y'}{y^2} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} + K_1 = \cos x + K_2$$

$$-\frac{1}{y} = \cos x + K_2 - K_1$$

$$\frac{1}{y} = -\cos x + K_2 - K_1$$

$$y^{-1} + \cos x = C \qquad y \neq 0.$$

4- $y' = (3x^2 - 1) / (3 + 2y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{3+2y} \qquad y \neq -3/2$$

$$(3+2y)\,dy = (3x^2-1)\,dx$$

$$\int 3+2y\;dy = \int 3x^2 - 1\,dx$$

$$3y + y^2 = x^3 - x + c$$

$$y^2 + 3y - x^3 + x = c$$

$$y(y+3) - x(x^2+1) = c \quad // \qquad \text{com } y \neq -3/2$$

5- $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 2y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 2y} = \cos^2 x \, dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 2y} dy = \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sec^2 2y \, dy = \int 1 - \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\frac{tg(2y)}{2} = \int 1 - \int \frac{1}{2}(\cos(x-x) + \cos(x+x))$$

$$= \int 1dx - \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$\frac{tg(2y)}{2} = x - \frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\frac{tg(2y)}{2} = \frac{2x + \operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$2\,tg(2y) - 2x - sen\,2x = c$$

$$\Rightarrow 2tg(2y) - 2x - sen2x = c \;//$$

6- $xy' = (1-y^2)^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-y^2)^{1/2}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy}_{I} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

I

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{1-sen^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$

$y = sen\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta = arc\,sen(y)$$

$\therefore$

$\arcsin(y) = \ln(x) + c$

$y = \operatorname{sen}(\ln|x| + c)$ se $x \neq 0$ e $|y| \leq 1$.

7 - $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$

$(y + e^{y})\,dy = (x - e^{-x})\,dx$

$\int (y + e^{y})\,dy = \int (x - e^{-x})\,dx$

$\frac{y^2}{2} + e^{y} = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + (K_2 - K_1)$

$\frac{y^2 + 2e^{y}}{\cancel{2}} = \frac{x^2 + 2e^{-x} + \overbrace{2(K_2 - K_1)}^{c}}{\cancel{2}}$

$y^2 + 2e^{y} - x^2 - 2e^{-x} = c$ //

$y^2 - x^2 + 2(e^{y} - e^{-x}) = c$ //

8 - $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$

$(1 + y^2)\,dy = x^2\,dx$

$$\int (1+y^2)\, dy = \int x^2 dx$$

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3}$$

$$3y + y^3 = x^3 + C$$

$$y^3 + 3y - x^3 = C \,//$$

$$3y + y^3 - x^3 = C \,//$$

Séries e EDO - 2º Estatística
Profa. Vanessa
Data: 29/05/08

Seção 2.4

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t, \quad y(1) = 2$
2. $t(t-4)y'' + (t-2)y' + y = 0, \quad y(2) = 1$
3. $y' + (\operatorname{tg} t)y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \operatorname{cotg} t, \quad y(2) = 3$

Seção 2.6

Problemas

Determine se cada uma das equações nos problemas de 1 a 12 são ou não exatas. Para as exatas, encontre a solução.

1. $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$
2. $(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax+by}{bx+cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax-by}{bx-cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = 0$
10. $(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0, \quad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$
12. $\dfrac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

Nos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0, \quad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

Nos Problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

15. $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x+y)x^2\,dy = 0$
16. $(ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$

Nos problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação dada.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
26. $y' = e^{2x} + y - 1$
27. $dx + (x/y - \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
28. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$
29. $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0$
30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]\,dx + [3(x/y^2) + 4y]\,dy = 0$
31. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

Sugestão: Veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x, y) = [xy(2x+y)]^{-1}$. Verifique que a solução é a mesma que a obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

$\frac{d(t+3)}{dt}\, y' + (\ln y)\, y = 2t$

Respostas

Seção 2.4

1. $0 < t < 3$
2. $0 < t < 4$
3. $\pi/2 < t < 3\pi/2$
4. $-\infty < t < -2$
5. $-2 < t < 2$
6. $1 < t < \pi$
7. $2t + 5y > 0$ ou $2t + 5y < 0$
8. $t^2 + y^2 < 1$
9. $1 - t^2 + y^2 > 0$ ou $1 - t^2 + y^2 < 0$, $\quad t \neq 0$, $y \neq 0$
10. Em toda a parte.
11. $y \neq 0$, $\quad y \neq 3$
12. $t \neq n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y \neq -1$
13. $y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ se $y_0 \neq 0$; $|t| < |y_0|/2$
14. $y = [(1/y_0) - t^2]^{-1}$ se $y_0 \neq 0$; $\quad y = 0$ se $y_0 = 0$; o intervalo é $|t| < 1/\sqrt{y_0}$

Seção 2.6

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. Não é exata
3. $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. Não é exata
7. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$; também $y = 0$
8. Não é exata
9. $e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y\ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. Não é exata
12. $x^2 + y^2 = c$
13. $y = [x + \sqrt{28 - 3x^2}]/2$, $\quad |x| < \sqrt{28/3}$
14. $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4$, $\quad x > 0{,}9846$
15. $b = 3$; $\quad x^2y^2 + 2x^3y = c$
16. $b = 1$; $\quad e^{2xy} + x^2 = c$
17. $\int N(x, y)\,dy + \int \left[M(x, y) - \int N_x(x, y)\,dy\right] dx$
19. $x^2 + 2\ln|y| - y^{-2} = c$; também $y = 0$
20. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$
21. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
22. $x^2e^x \operatorname{sen} y = c$
24. $\mu(t) = \exp\int R(t)\,dt$, onde $t = xy$
25. $\mu(x) = e^{3x}$; $\quad (3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
26. $\mu(x) = e^{-x}$; $\quad y = ce^x + 1 + e^{2x}$
27. $\mu(y) = y$; $\quad xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = c$
28. $\mu(y) = e^{2y}/y$; $\quad xe^{2y} - \ln|y| = c$; também $y = 0$
29. $\mu(y) = \operatorname{sen} y$; $\quad e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c$
30. $\mu(y) = y^2$; $\quad x^4 + 3xy + y^4 = c$
31. $\mu(x, y) = xy$; $\quad x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

2ª Lista de EDO

Nos problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1) $(t-3)y' + (\ln t)\, y = 2t \qquad y(1) = 2$

Deixando a função na forma padrão:

$$\frac{\cancel{(t-3)}y'}{(t-3)} + \frac{(\ln t)}{(t-3)}y = \frac{2t}{t-3}$$

$$y' + \frac{\ln t}{t-3}y = \frac{2t}{t-3}$$

daí temos

$p(t) = \dfrac{\ln t}{t-3}$, contínua pra $x \neq 3$ e $x > 0$

$g(t) = \dfrac{2t}{t-3}$, contínua p/ $x \neq 3$

Concluímos que

$p(t)$ e $g(t)$ são contínuas para $x \neq 3$ e $x > 0$

Assim a duas funções estão definidos em $]0,3[$ e $]3,+\infty[$.

Como a condição inicial é aplicada em 1, temos que o intervalo no qual a solução deste PVI existe é $]0,3[$.

2 - $t(t-4)y'' - (t-2)y' + y = 0$ $\quad y(2) = 1$

Deixando na forma padrão, temos:

$$\frac{\cancel{t(t-4)}\, y''}{t(t-4)} - \frac{(t-2)\,y'}{t(t-4)} + \frac{y}{t(t-4)} = 0$$

$$y'' - \frac{(t-2)\,y'}{t(t-4)} + \frac{y}{t(t-4)} = 0$$

Temos:

$p(t) = \dfrac{-(t-2)}{t(t-4)}$, é continua p/ $t \neq 0$ ou $t \neq 4$

$p(t) = \dfrac{1}{t(t-4)}$, é continua p/ $t \neq 0$ ou $t = 4$.

Logo temos que os intervalos de solução são

$]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ ou $]4, +\infty[$. Como a condição inicial está aplicada em 2 temos que o intervalo para a solução deste PVI é $]0, 4[$.

3 - $y' + (tgt)\,y = \text{sent}$, $\quad y(\pi) = 0$

Temos:

$p(t) = tgt$, é contínua no intervalo $]\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ou $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$g(t) = \text{sent}$, é continua.

Logo o intervalo de solução geral é 3
$]3\pi/2, \pi/2[$ ou $]\pi/2, 3\pi/2[$

Como a condição inicial está aplicada em π, tem-se que o intervalo no qual a solução do problema existe é:

$]\pi/2, 3\pi/2[$ //

4 - $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$

Padronizando

$$y' + \frac{2ty}{(4-t^2)} = \frac{3t^2}{4-t^2}$$

Temos

$p(t) = \dfrac{2t}{4-t^2} = \dfrac{2t}{(2-t)(2+t)}$, contínua p/ $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

$g(t) = \dfrac{3t^2}{4-t^2}$, contínua p/ $x \neq 2$ e $x \neq -2$,

Como o problema tem como valor inicial $y(-3) = 1$ concluímos que o intervalo procurado é

$]-\infty, -2[$ //

5 - $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(1) = -3$

Idem ao nº 4. A única diferença é o valor inicial que acarreta neste caso no seguinte intervalo de solução.

$]-2, 2[$

6) $(\ln t)y' + y = \cot g\, t$ $\quad y(2) = 3$

Padronizando, temos:

$$y' + \frac{y}{\ln t} = \frac{\cot g\, t}{\ln t}$$

Neste caso

$t > 0$, $t \neq \pi$ ou $t \neq 0$ ou $t \neq 1$

$\Rightarrow \;]0,1[$ ou $]1,\pi[$

Como a condição inicial está aplicada no número 2, temos que

solução = $]1,\pi[$ ou $1 < t < \pi$.

—i—

Determinar se cada uma das equações nos problemas de 1 a 12 são ou não exatas. Para as exatas, encontre a solução

1- $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$.

$M = 2x+3 \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0$

$N = 2y-2 \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \quad \therefore$ é uma equação exata

Vamos encontrar uma função $f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)}_{1} \quad e \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)}_{2}$$

Integrando em relação à x.

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = \int 2x+3\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x,y) = x^2 + 3x + g(y)$$

$\therefore$

$$f(x,y) = x^2 + 3x + g(y)$$

Usando

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(y) = 2y - 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(y) = 2y - 2$$

$$\frac{dg}{dy} = 2y - 2$$

$$dg = 2y - 2\, dy$$

$$\int dg = \int 2y - 2\, dy$$

$$g(y) = y^2 + 2y$$

$\therefore$

$$f(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y.$$

$$x^2 + 3x + y^2 - 2y = c_{//}$$

1 - $\cancel{(e^{x}\,sen\,y - 2y\,sen\,x)\,dx + (e^{x}\cos y + 2\cos x)\,dy = 0}$

2 - $(2x + 4y) + (2x - 2y)\,y' = 0$

$M(x,y) = 2x + 4y \qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4.$

$N = (2x - 2y) \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, não é uma equação exata.

3 - $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$

$$(6y^2 - x^2 + 3)\,dy = -(3x^2 - 2xy + 2)\,dx$$

$$(6y^2 - x^2 + 3)\,\frac{dy}{dx} = -(3x^2 - 2xy + 2)$$

$$(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)\,y' = 0$$

①

$\int$ $M = 3x^2 - 2xy + 2$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x$

$N = 6y^2 - x^2 + 3$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$

Como

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ concluímos que é uma equação exata.

Vamos encontrar uma função $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

① ②

Integrando em relação à x:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int M(x,y)\, dx$$

$$f = \int 3x^2 - 2xy + 2\, dx$$

$$f = x^3 - x^2 y + 2x + g(y)$$

Usando ② temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$-\cancel{x^2} + g'(y) = 6y^2 - \cancel{x^2} + 3$$

$$g'(y) = 6y^2 + 3$$

$$\int g'(y)\, dy = \int 6y^2 + 3\, dy$$

Integrando em relação à x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)\, dx$$

$$f(x,y) = \int 2xy^2 + 2y\, dx$$

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + g(y)$$

Utilizando ② temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$2yx^2 + \cancel{2x} + g'(y) = 2x^2y + \cancel{2x}$$

$$g'(y) = 2x$$

$$\int g'(y)\, dy = \int 0\, dy$$

$$g(y) = K$$

$\therefore$

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + K$$

$\Rightarrow$

$$x^2y^2 + 2xy = c$$

$$g(y) = 2y^3 + 3y$$

$\therefore$

$$f(x,y) = x^3 - x^2 y + 2x + 2y^3 + 3y$$

Conclusão:

$$x^3 - x^2 y + 2x + 2y^3 + 3y = c$$

4 – $(2xy^2 + 2y) + (2x^2 y + 2x)\, y' = 0$

$M(x,y) = 2xy^2 + 2y$ $\qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 2$

$N(x,y) = 2x^2 y + 2x$ $\qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4xy + 2$

Como

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ conclui-se que a equação é exata.

Devemos agora encontrar uma função $f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)}_{①} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)}_{②}$$

5 - $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$

Padronizando...

$$(bx+cy)\frac{dy}{dx} = -(ax+by)$$

$$(ax+by) + (bx+cy)\frac{dy}{dx} = 0$$

Temos

$M(x,y) = ax+by \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = b$

$N(x,y) = bx+cy \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = b$

$\therefore$ são equações exatas

Devemos agora encontrar uma $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

1 $\qquad\qquad$ 2

Integrando em relação à x temos

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int ax + by \, dx$$

$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + g(y)$$

Usando ②, vêm:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$b\cancel{x} + g'(y) = b\cancel{x} + cy$$

$$g'(y) = cy$$

$$\int g'(y)\,dy = \int cy\,dy$$

$$g(y) = \frac{cy^2}{2}$$

$\therefore$

$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{cy^2}{2}$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = K$$ //

6 - $$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy}$$

Padronizando

$$(bx - cy)\frac{dy}{dx} = -(ax - by)$$

$$(ax-by)+(bx-cy)\frac{dy}{dx}=0$$

Temos

$$M=(ax-by) \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=-b$$

$$N=(bx-cy) \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=b$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, conclui-se que a equação dada não é exata.

7 - $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$

Padronizando

$$(e^x \cos y + 2\cos x)dy = -(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx$$

$$(e^x \cos y + 2\cos x)\frac{dy}{dx} = -(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)$$

$$(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x) + (e^x \cos y + 2\cos x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Temos ∴

$$M = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$

$$N = e^x \cos y + 2\cos x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$

Como

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ conclui-se que é uma equação exata.

Vamos encontrar $f(x,y)$, t.q

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$\downarrow$ (1) $\quad \downarrow$ (2)

Integrando em relação à x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x\,dx$$

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \cos x + g(y)$$

Usando (2) p/ descobrir $g(y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$e^x \cancel{\cos y} - 2\cos x + g'(y) = e^x \cancel{\cos y} + 2\cos x$$

$$g'(y) = 4\cos(x)$$

$$\int g'(y)\,dy = \int 4\cos x\,dy$$

$$g(y) = 4y\cos x$$

$\therefore$

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y\cos x + 4y\cos x$$

$\therefore$

$$e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = C_{//}$$ também $y=0$.

8- $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

Padronizando

$$(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx = (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy$$

$$(e^x \operatorname{sen} y + 3y) = (3x - e^x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx}$$

$$(-e^x \operatorname{sen} y - 3y) + (3x - e^x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Assim:

$M = (-e^x \operatorname{sen} y - 3y)$ $\qquad \dfrac{\partial M}{\partial y} = -e^x \cos y - 3$

$N = (3x - e^x \operatorname{sen} y)$ $\qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3 - e^x \operatorname{sen} y$

Conclusão

Não é uma equação exata.

9. $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 2x)dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy = 0$

Na forma padrão temos

$$(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 2x) + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\frac{dy}{dx} = 0$$

Assim

$$M = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy}\cos 2x + xe^{xy}.y\cos 2x - 2xe^{xy}\,\text{sen}\,2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy}(\cos 2x + xy\cos 2x - 2x\,\text{sen}\,2x)$$

$$N = xe^{xy}\cos 2x - 3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy}\cos 2x + x(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy}(\cos 2x + xy\cos 2x - 2x\,\text{sen}\,2x)$$

Conclusão:

A equação dada é exata.

Vamos encontrar agora $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Integrando em relação à x temos:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)\, dx$$

$$f(x,y) = \int y e^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x \, dx$$

$$f(x,y) = \int y \underbrace{e^{xy} \cos 2x dx}_{I} - 2\int \underbrace{e^{xy} \operatorname{sen} 2x dx}_{II} + 2\int x\, dx.$$

I

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ dv}}{e^{xy}} \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{\cos 2x}\, dx$$

$u = \cos 2x \qquad du = -2\operatorname{sen} 2x\, dx$

$dv = e^{xy} \qquad v = \dfrac{e^{xy}}{y}$

$$\int e^{xy} \cos 2x\, dx = \frac{\cos 2x\, e^{xy}}{y} + \int \frac{e^{xy}}{y} 2 \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$\frac{e^{xy} \cos 2x}{y} + \frac{2}{y} \int \underbrace{e^{xy} \operatorname{sen} 2x\, dx}_{II *}$$

I*

$$\int e^{xy}\,\text{sen}2x\,dx$$

$\downarrow$ dv $\quad\downarrow$ u

$u = \text{sen}2x \qquad du = 2\cos 2x\,dx$

$dv = e^{xy} \qquad v = \dfrac{e^{xy}}{y}$

$$\int e^{xy}\,\text{sen}2x\,dx = \frac{e^{xy}\,\text{sen}2x}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y}\,2\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{e^{xy}\,\text{sen}2x}{y} - \frac{2}{y}\int e^{xy}\cos 2x\,dx$$

$\therefore$

$$\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{e^{xy}\cos 2x}{y} + \frac{2}{y}\left(\frac{e^{xy}\,\text{sen}2x}{y} - \frac{2}{y}\int e^{xy}\cos 2x\,dx\right)$$

$$\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{y\,e^{xy}\cos 2x + 2e^{xy}\,\text{sen}2x}{y^2} - \frac{4}{y^2}\int e^{xy}\cos 2x\,dx$$

$$\left(1 + \frac{4}{y^2}\right)\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{y\,e^{xy}\cos 2x + 2e^{xy}\,\text{sen}2x}{y^2}$$

$$\left(\frac{y^2+4}{\cancel{y^2}}\right)\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{y\,e^{xy}\cos 2x + 2e^{xy}\,\text{sen}2x}{\cancel{y^2}}$$

$$\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{y\,e^{xy}\cos 2x + 2e^{xy}\,\text{sen}2x}{y^2+4}$$

\# - Pela desenvolvimento de I

$$\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{e^{xy}\,\text{sen}\,2x}{y} - \frac{2}{y}\int e^{xy}\cos 2x\,dx$$

e $$\int e^{xy}\cos 2x\,dx = \frac{e^{xy}\cos 2x}{y} + \frac{2}{y}\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$\therefore$

$$\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{e^{xy}\,\text{sen}\,2x}{y} - \frac{2}{y}\left(\frac{e^{xy}\cos 2x}{y} + \frac{2}{y}\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx\right)$$

$$\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{y e^{xy}\,\text{sen}\,2x - 2e^{xy}\cos 2x}{y^2} - \frac{4}{y^2}\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

$$\left(\frac{y^2+4}{y^2}\right)\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{y e^{xy}\,\text{sen}\,2x - 2e^{xy}\cos 2x}{y^2}$$

$$\int e^{xy}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{y e^{xy}\,\text{sen}\,2x - 2e^{xy}\cos 2x}{y^2+4}$$

Assim

$$f(x,y) = \frac{y e^{xy}\cos 2x + 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x - 2y e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 4e^{xy}\cos 2x}{y^2+4}$$

$$+ x^2 + g(y)$$

Usando 2

$\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$[(e^{xy}\cos 2x + yx\cos 2x + 2ye^{xy}\operatorname{sen} 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x$

$- 2xy\operatorname{sen} 2x + 4xe^{xy}\cos 2x)(y^2+4)] - [2y(ye^{xy}\cos$

$+ 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x - 2ye^{xy}\operatorname{sen} 2x + 4e^{xy}\cos 2x)] / + g'(y)$

$=$

$xe^{xy}\cos 2x - 3$

10) $(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0$

$$(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0$$

$$(y/x + 6x) + (\ln x - 2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$

$$M = \frac{y}{x} + 6x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$N = \ln(x) - 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Portanto é uma equação exata

Vamos encontrar

$f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = M}_{①} \quad e \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} = N}_{②}$$

Integrando em relação à x, temos:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x} + 6x\,dx$$

$$f(x,y) = y\int \frac{1}{x}\,dx + 6\int x\,dx$$

$f(x,y) = y\ln(x) + 3x^2 + g(y)$

Utilizando 2

$\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$\ln(x) + g'(y) = \ln(x) - 2$

$g'(y) = -2$

$\int g'(y)dy = \int -2\,dy$

$\therefore \quad g(y) = -2y$

Assim

$f(x,y) = y\ln(x) + 3x^2 - 2y$

$\Rightarrow \quad y\ln(x) + 3x^2 - 2y = C$ //

11 - $(x\ln y + xy)\,dx + (y\ln x + xy)\,dy = 0 \; ; \; x > 0, y > 0.$

Padronizando, temos:

$$(x\ln y + xy) + (y\ln x + xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

Assim temos:

$M = x\ln y + xy \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{y} + x$

$N = y\ln x + xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y}{x} + y$

Conclui-se que a equação dada não é exata.

12 - $\dfrac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

Padronizando

$$\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

Assim

$M = x \quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 0$

$N = y \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, temos um equation exactly.

Go quast the function $f(x,y)$, t.q

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

Integrando em relação à x, tem-se

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int x\,dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

Using ②:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2}$$

$\therefore$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

And, then

$$x^2 + y^2 = c$$

Nos problemas 13 e 14, resolva o problema de valor Inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x-y)dx + (2y-x)dy = 0$ $\quad y(1) = 3$

$$(2x-y) + (2y-x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Vejamos primeiramente

$M = 2x - y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -1$

iguais

• todas contínuas

$N = 2y - x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

Basta encontra a $f(x,y)$ tq.

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$\downarrow$ (1) $\qquad$ $\downarrow$ (2)

Em relação à x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int 2x - y \, dx$$

$$f(x,y) = x^2 - yx + g(y)$$

Usando 2

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

$$-x + g'(y) = 2y - x$$

$$g'(y) = 2y$$

$$\int g'(y) dy = \int 2y \, dy$$

$$g(y) = y^2$$

$\therefore$

$$f(x,y) = x^2 - yx + y^2$$

Sendo assim

$$x^2 - yx + y^2 = c$$

mas $y(1) = 3$

$$1 - 3 + 9 = c \qquad c = 7$$

Assim

$$x^2 - yx + y^2 = 7$$

$$y^2 - xy + x^2 - 7 = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 7)}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2 + 28}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{-3x^2 + 28}}{2}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{28 - 3x^2}}{2}$$

É válido

$$y = \frac{x \pm \sqrt{28 - 3x^2}}{2}$$

e $28 - x^2 \geq 0$

$$-x^2 \geq -28$$

$$x^2 \leq 28$$

$$|x| \leq \sqrt{28}$$

?

14 - $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0$ $\quad y(1) = 0$

Reorganizando

$$(-9x^2 + y + 1) + (4y - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$M = -9x^2 + y + 1 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N = 4y + x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então a equação é exata.

Basta encontrar $f(x,y)$, t.q

$$\underset{1}{\frac{\partial f}{\partial x} = M} \quad e \quad \underset{2}{\frac{\partial f}{\partial y} = N}$$

Integrando em relação à x:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int -9x^2 + y + 1 \; dx$$

$$f(x,y) = -3x^3 + (1 - y)x + g(y)$$

Usando 2:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \Leftrightarrow -\cancel{x} + g'(y) = 4y - \cancel{x}$$

$$g'(y) = 4y$$

$$\int g'(y)\,dy = \int -4y\,dy$$

$$g(y) = -2y^2$$

Assim

$$f(x,y) = -3x^3 + (1-y)x + 2y^2$$

Logo

$$-3x^3 + (1-y)x - 2y^2 = c$$

Mas $y(1) = 0$.

$\therefore$

$$-3.1 + (1-0)(1) - 2.0 = c$$

$$-3 + 1 = c$$

$$c = -2$$

Então

$$-3x^3 + (1-y)x + 2y^2 = -2$$

$$2y^2 - yx - 3x^3 + x + 2 = 0$$

Logo

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 8(-3x^3 + x + 2)}}{4}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 24x^3 - 8x - 16}}{4}$$

$$y = x - \frac{\sqrt{24x^3 + x^2 - 8x - 16}}{4}$$

e $\quad 24x^3 + x^2 - 8x - 16 > 0$

$\therefore x > 0,9846.$

Nos problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

15- $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x+y)x^2\,dy = 0$

Padronizando, temos

$$(xy^2 + bx^2y) + (x+y)x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore$

$M = xy^2 + bx^2y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2yx + (bx^2y)'$

$N = x^3 + yx^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2yx$

$$\frac{d}{dy}(bx^2y) = 3x^2$$

$$bx^2 = 3x^2$$

$$b = 3 \; //$$

Assim obtemos

$$(xy^2 + 3x^2y) + (x^3 + yx^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Vamos encontrar a $f(x,y)$, t.q

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$\downarrow$ ① $\quad\quad$ $\downarrow$ ②

Integrando em relação à x

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int M(x,y)\, dx$$

$$f(x,y) = \int xy^2 + 3x^2 y \, dx$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + x^3 y + g(y)$$

Usando ②

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\cancel{yx^2} + \cancel{x^3} + g'(y) = \cancel{x^3} + \cancel{yx^2}$$

$$g'(y) = 0$$

$$\int g'(y)\,dy = \int 0\, dy$$

$$g(y) = k$$

$\therefore$

$$x^2y^2 + 2x^3y = k$$

16 - $(y e^{2xy} + x)\,dx + bx e^{2xy}\,dy = 0$

Padronizando, temos

$$(y e^{2xy} + x) + bx e^{2xy} \frac{dy}{dx} = 0$$

Assim, temos

$M = y e^{2xy} + x$ $\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{2xy} + 2xy e^{2xy}$

$N = bx e^{2xy}$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = b e^{2xy} + 2y bx e^{2xy}$

Daí temos $b = 1$

Logo

$$(y e^{2xy} + x) + x e^{2xy} \frac{dy}{dx} = 0$$

Vamos encontrar $f(x,y)$ tal que

$$\underset{①}{\frac{\partial f}{\partial x} = M} \quad e \quad \underset{②}{\frac{\partial f}{\partial y} = N}$$

Integrando em relação à x, temos

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int M\,dx$$

$$f(x,y) = \int y e^{2xy} + x \, dx$$

$$f(x,y) = \frac{\cancel{y}\, e^{2xy}}{2\cancel{y}} + \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{e^{2xy} + x^2}{2} + g(y)$$

Usando (2)

$$\frac{df}{dy} = N$$

$$\frac{\cancel{2} x e^{2xy}}{\cancel{2}} + g'(y) = x e^{2xy}$$

$$g'(y) = 0$$

$$\int g'(y)\, dy = \int 0\, dy$$

$$g(y) = K$$

$\therefore$

$$f(x,y) = \frac{e^{2xy} + x^2}{2} + K$$

Assim

$$e^{2xy} + x^2 = c \,//$$

6

Seção 3.7

[Nos pr]oblemas de 1 a 12, encontre a solução geral da equação dife[re]ncial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3\operatorname{sen}2t$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen}2t$
5. $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
7. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\operatorname{sen}t$
8. $y'' + y = 3\operatorname{sen}2t + t\cos 2t$
9. $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega t, \qquad \omega^2 \neq \omega_0^2$
10. $u'' + \omega_0^2 u = \cos\omega_0 t$
11. $y'' + y' + 4y = 2\operatorname{senh}t$ *Sugestão:* $\operatorname{senh}t = (e^t - e^{-t})/2$
12. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$ *Sugestão:* $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

$y'' + 9y' = 8te^{3t} + 8t^2e^{3t}$

Nos problemas de 13 a 18, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
15. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' + 4y = 3\operatorname{sen}2t, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Nos problemas de 1 a 4, use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial dada. Depois verifique sua resposta usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

Nos problemas de 5 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada. Nos Problemas 11 e 12, g é uma função contínua arbitrária.

5. $y'' + y = \operatorname{tg}t, \qquad 0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \qquad 0 < t < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \qquad t > 0$
8. $y'' + 4y = 3\csc 2t, \qquad 0 < t < \pi/2$

Respostas

Seção 3.1

1. $y = c_1e^t + c_2e^{-3t}$
2. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$
3. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{-t/3}$
4. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{t}$
5. $y = c_1 + c_2e^{-5t}$
6. $y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{-3t/2}$
7. $y = c_1\exp[(9 + 3\sqrt{5})t/2] + c_2\exp[(9 - 3\sqrt{5})t/2]$
8. $y = c_1\exp[(1 + \sqrt{3})t] + c_2\exp[(1 - \sqrt{3})t]$

Seção 3.2

1. $-\frac{7}{2}e^{t/2}$
2. 1
3. e^{-4t}
4. x^2e^x
5. $-e^{2t}$
6. 0
7. $0 < t < \infty$
8. $-\infty < t < 1$
9. $0 < t < 4$
10. $0 < t < \infty$
11. $0 < x < 3$
12. $2 < x < 3\pi/2$

Seção 3.3

1. Independente.
2. Dependente.
3. Independente.
4. Dependente.
5. Dependente.
6. Independente.
7. Independente se a origem está no interior do intervalo; dependente, caso contrário.
8. Independente se a origem está no interior do intervalo; dependente, caso contrário.
9. Independente; W não é sempre nulo.
10. Independente; W não é sempre

Seção 3.4

1. $e\cos 2 + ie\operatorname{sen}2 \cong -1{,}1312 + 2{,}4717i$
2. $e^2\cos 3 - ie^2\operatorname{sen}3 \cong -7{,}3151 - 1{,}0427i$
3. -1
4. $e^2\cos(\pi/2) - ie^2\operatorname{sen}(\pi/2) = -e^2i \cong -7{,}3891i$
5. $2\cos(\ln 2) - 2i\operatorname{sen}(\ln 2) \cong 1{,}5385 - 1{,}2779i$
6. $\pi^{-1}\cos(2\ln\pi) + i\pi^{-1}\operatorname{sen}(2\ln\pi) \cong -0{,}20957 + 0{,}23959i$
7. $y = c_1e^t\cos t + c_2e^t\operatorname{sen}t$
8. $y = c_1e^t\cos\sqrt{5}\,t + c_2e^t\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$
9. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-4t}$
10. $y = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\operatorname{sen}t$
11. $y = c_1e^{-3t}\cos 2t + c_2e^{-3t}\operatorname{sen}2t$
12. $y = c_1\cos(3t/2) + c_2\operatorname{sen}(3t/2)$
13. $y = c_1e^{-t}\cos(t/2) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t/2)$
14. $y = c_1e^{t/3} + c_2e^{-4t/3}$
15. $y = c_1e^{-t/2}\cos t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}t$
16. $y = c_1e^{-2t}\cos(3t/2) + c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(3t/2)$

Seção 3.7

1. $Y(t) = e^t$
2. $Y(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}$
3. $Y(t) = \frac{3}{2}t^2e^{-t}$
4. $Y(t) = 2t^2e^{t/2}$
5. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen}t - (\cos t)\ln(\operatorname{tg}t + st)$
6. $y = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen}3t + (\operatorname{sen}3t)\ln(\operatorname{tg}3t + \sec 3t) - 1$
7. $y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} - e^{-2t}\ln t$
8. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen}2t + \frac{3}{4}(\operatorname{sen}2t)\ln\operatorname{sen}2t - \frac{3}{2}t\cos 2t$

Seção 3.5

1. $y = c_1e^t + c_2te^t$
2. $y = c_1e^{-t/3} + c_2te^{-t/3}$
3. $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{3t/2}$
4. $y = c_1e^{-3t/2} + c_2te^{-3t/2}$
5. $y = c_1e^t\cos 3t + c_2e^t\operatorname{sen}3t$
6. $y = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$
7. $y = c_1e^{-t/4} + c_2e^{-4t}$
8. $y = c_1e^{-3t/4} + c_2te^{-3t/4}$
9. $y = c_1e^{2t/5} + c_2te^{2t/5}$
10. $y = e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}(t/2)$
11. $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3}te^{2t/3}$, $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = 2te^{3t}$, $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
13. $y = -e^{-t/3}\cos 3t + \frac{5}{9}e^{-t/3}\operatorname{sen}3t$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$

Seção 3.6

1. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - e^{2t}$
2. $= c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\operatorname{sen}2t + \frac{3}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{12}{17}\cos 2t$
3. $c_2e^{-t} + \frac{3}{16}te^{-t} + \frac{3}{8}t^2e^{-t}$

$\frac{3}{}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t - \frac{1}{2}\cos 2t$

$\frac{1}{}(9t^2 - 6t + 1)e^{3t} + \frac{2}{3}$

$t - \frac{9}{10}\cos t$

10. $u = c_1\cos\omega_0 t + c_2\operatorname{sen}\omega_0 t + (1/2\omega_0)t\operatorname{sen}\omega_0 t$
11. $y = c_1e^{-t/2}\cos(\sqrt{15}\,t/2) + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{15}\,t/2) + \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$
12. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{1}{6}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}$
13. $y = e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$
14. $y = \frac{7}{10}\operatorname{sen}2t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$
15. $y = 4te^t - 3e^t + \frac{1}{6}t^3e^t + 4$
16. $y = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$
17. $v = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t + te^{-t}\operatorname{sen}2t$
18. $y = 2\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen}2t - \frac{3}{4}t\cos 2t$

$\int \frac{ds}{s}$

$\int \frac{ds}{s}$

$\frac{ds}{s} = \Delta s$

UNESP - Campus de Pres. Prudente

rso de Estatística - 2º Ano

Disciplina: Séries e EDO

Profa. Vanessa

Data: 16/06/09

Lista de Exercícios

Seção 3.1

Nos problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Seção 3.2

Nos problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1. e^{2t}, $e^{-3t/2}$
2. $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
3. e^{-2t}, te^{-2t}
4. x, xe^{x}
5. $e^{t}\operatorname{sen} t$, $e^{t}\cos t$
6. $\cos^2\theta$, $1+\cos 2\theta$

Nos problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7. $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t$, $y(-2) = 2$, $y'(-2) = 1$
9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0$, $y(2) = 3$, $y'(2) = 1$
11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\operatorname{tg} x)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$

Seção 3.3

Nos problemas de 1 a 8, determine se o par de funções dadas é linearmente independente ou linearmente dependente.

1. $f(t) = t^2 + 5t$, $g(t) = t^2 - 5t$
2. $f(\theta) = \cos 3\theta$, $g(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
3. $f(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t$, $g(t) = e^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t$, $\mu \neq 0$
4. $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = e^{3(x-1)}$
5. $f(t) = 3t - 5$, $g(t) = 9t - 15$
6. $f(t) = t$, $g(t) = t^{-1}$
7. $f(t) = 3t$, $g(t) = |t|$
8. $f(x) = x^3$, $g(x) = |x|^3$
9. O wronskiano de duas funções é $W(t) = t\operatorname{sen}^2 t$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?
10. O wronskiano de duas funções é $W(t) = t^2 - 4$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?

Seção 3.4

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + ib$.

1. $\exp(1+2i)$
2. $\exp(2-3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

Nos problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1{,}25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1{,}25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6{,}25y = 0$

Seção 3.5

[illegible] problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. [illegible] $- 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. [illegible] $- 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. [illegible] $- 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. [illegible] $+ 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. [illegible] $- 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

[illegible] problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. [illegible] o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando [illegible].

11. [illegible] $- 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
12. [illegible] $- 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
13. [illegible] $+ 6y' + 82y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$
14. [illegible] $- 4y' + 4y = 0$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 1$

ORIGINAL