Ana Paula Jorge

78/80

TEORIA DAS PROBABILIDADES
EXERCÍCIOS # 1

(1) Sejam $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, B subconjuntos de Ω.
Provar:
(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots A_{n-1}^c \cap A_n)$
(b) $A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_2)$
$A_2 \cap A_1^c = A_2 - (A_1 \cap A_2)$

(2) Seja $\Omega = \{1,2,3\}$. Descrever todas σ-álgebras possíveis para esse espaço.

(3) Escrever cada um dos intervalos $(-\infty,a)$, $[b,\infty)$, $[a,b)$, $[a,b]$, $(a,b]$, $(-\infty,a]$ e (b,∞) em termos de uniões contáveis, intersecções contaveis complementares de intervalos na forma (a,b), $-\infty < a < b < \infty$.

(4) Seja $(\Omega,\mathbf{A},P)$ um espaço de probabilidades ($\mathbf{A}$ é uma σ-álgebra) e $A_1, A_2, \ldots, \in \mathbf{A}$.
(a) Mostrar que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

(b) Mostrar que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
(c) Mostrar que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

(5) Sejam A e B dois eventos independentes definidos num mesmo espaço de probabilidade e seja $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$. Achar:
(a) $P(A \cup B)$
(b) $P(A/A \cup B)$
(c) $P(B/A \cup B)$

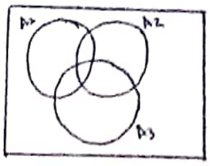
(6) Sejam A_1 , A_2 e A_3 três eventos independentes. Mostrar que A_1^c , A_2^c e A_3^c são independentes.

(7) Um lago tem peixes vermelhos e peixes amarelos. Existem 3000 vermelhos e 7000 amarelos, dos quais 200 e 500, respectivamente são marcados com uma etiqueta.
Achar a probabilidade de que numa amostra aleatória de 100 vermelhos e 200 amarelos haverá 15 vermelhos e 20 amarelos marcados pela etiqueta.

(8) Seja $(\Omega,\mathbf{A},P)$ um espaço de probabilidade. Sejam $A,B,C \in \mathbf{A}$ com $P(B) > 0$ e $P(C) > 0$. Se B e C são independentes, mostrar que $P(A/B) = P(A/B \cap C)P(C) + P(A/B \cap C^c)P(C^c)$.
Inversamente, se esta relação existir, $P(A/BC) \neq P(A/B)$ e $P(A) > 0$, então B e C são independentes.

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, B subconjuntos de Ω

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$



Para $n=3$

$\bigcup_{n=1}^{3} A_n = A_1 + A_2 + A_3 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$= A_1 + \underbrace{A_2 - (A_1 \cap A_2)} + \underbrace{A_3 - (A_1 \cap A_3) - (A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$

$A_2 - (A_1 \cap A_2) = A_1^c \cap A_2$

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$= A_1 + A_1^c \cap A_2 + A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$= A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{3} (A_1^c \cap \ldots \cap A_n)$

Para $n=\infty$

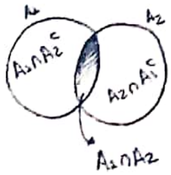
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i<j}^{n} A_i \cap A_j + \sum_{i<j<k}^{n} A_i \cap A_j \cap A_k + \ldots + (-1)^{n+1} \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$= A_1 + (A_2 - (A_1 \cap A_2)) + (A_3 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + (A_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n + \sum_{i<j}^{n-1} A_i \cap A_j \cap A_n + \ldots + (-1)^{n+1} \bigcap A$

$= A_1 + A_1^c \cap A_2 + A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 + \ldots + A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$

$= A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$

b) $A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_2)$



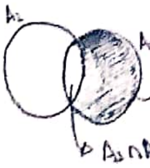
$A_1 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2)$

$\rightarrow (A_1 \cap A_2) = A_1 - (A_1 \cap A_2^c)$

$= A_1 - (A_1 - A_2)$

10

$A_2 \cap A_1^c = A_2 - (A_1 \cap A_2)$



$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c)$

$\rightarrow A_1^c \cap A_2 = A_2 - (A_1 \cap A_2)$

(2) $\Omega = \{1,2,3\}$

Uma σ-álgebra é uma classe de subconjuntos de Ω se e somente se

(i) $\Omega \in a$

(ii) Se $A \in a$, então $A^c \in a$

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots \in a$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in a$

Portanto, todos os subconjuntos de Ω são:

$a_1 = \{\Omega, \phi\}$

$a_2 = \{\Omega, \{1\}, \{2,3\}, \phi\}$

$a_3 = \{\Omega\ \{2\}, \{1,3\}, \phi\}$

$a_4 = \{\Omega, \{3\}, \{1,2\}, \phi\}$

$a_5 = \{\Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \phi\}$

$a_6 = \{\Omega, \{1\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \phi\}$

$a_7 = \{\Omega, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \phi\}$

$a_8 = \{\Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \phi\}$

10

(3) $(-\infty, a)$, $[b,\infty)$; $[a,b)$; $[a,b]$; $(a,b]$, $(-\infty,a]$ e $(b,-\infty)$

Escreva cada um dos intervalos em termos de uniões contáveis, interseções contáveis, complementares de intervalos na forma (a,b), $-\infty < a < b < \infty$.

$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b+n)^c$

$[b,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, b)^c$

$[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a-1/n, b]$ $\rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, b)$ $A_n = (a-\frac{1}{n}, b)$ é $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, b) = [a,b)$

$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-1/n, b]$

$(a,b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a, b-1/n)$ $\rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+1/n)$ A_n é $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\frac{1}{n}) = (a,b]$

$(-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b+n)^c$

$(b,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, b]^c$

8

$(\Omega, A, P) \to$ um espaço de probabilidades

A : σ - álgebra $\rightsquigarrow$ $A_1, A_2, \dots \in A$

(a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} (A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

Por indução:

I) mostrar que vale para $n=2$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2)$

II) Suponha que vale para $n=k$ (hipótese)

$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k} P(A_i \cap A_j) + \dots (-1)^k P(A_1 \cap \dots \cap A_k)$

III) Provar que vale para $n=k+1$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right)$

$= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) - P(A_k \cap A_{k+1}) + P(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) - \dots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1})$

$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k+1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k+1})$

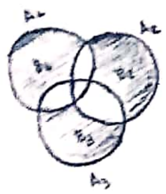
Portanto,

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)$

(b) Considere os eventos: $B_1 = A_1$; $B_2 = A_1^c A_2$; $B_3 = A_1^c A_2^c A_3$; $B_n = A_1^c A_2^c \dots A_{n-1}^c A_n$

$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall i \neq j \qquad B_n \subseteq A_n \quad \forall \; P(B_n) \leq P(A_n)$

$P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$



$\Rightarrow B_n \subseteq A_n$

$\hookrightarrow P(B_n) \leq P(A_n)$

Outras formas para resolver (b)

Pela Desigualdade de Bonferroni

I) mostrar que vale para $n=2$

$\sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{i<j}^{2} P(A_i \cap A_j) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

II) Suponhamos que vale para $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k} P(A_i\cap A_j) = \left[P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k)\right] - \left[P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap A_3)+\dots+P(A_{k-1}\cap A_k)\right]$$

$$\le P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k) \le P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k)$$

III) Provar que vale para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i<j}^{k+1} P(A_i\cap A_j) = \left[P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k)+P(A_{k+1})\right] - \left[P(A_1\cap A_2)+\dots+P(A_{k-1}\cap A_k)+P(A_k\cap A_{k+1})\right]$$

$$= \underbrace{\left[P(A_1)+\dots+P(A_k)\right] - \left[P(A_1\cap A_2)+\dots+P(A_{k-1}\cap A_k)\right]}_{\le P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k)} + P(A_{k+1}) - P(A_k\cap A_{k+1})$$

$$\le P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_k\cup A_{k+1}) \le \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$$

Portanto, para $n\to\infty$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

10

(c) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1-\sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

Por morgan tem-se: $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ e $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \Omega \rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right] = P(\Omega) \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1$$

$$\rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

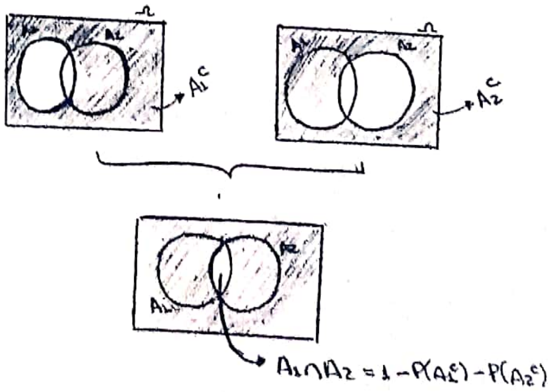
$$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1-\sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

outra forma (Indução)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1-\sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

I) Considere dois eventos A_1 e A_2, logo

$$P(A_1\cap A_2) = 1 - P(A_1^c\cup A_2^c) =$$
$$= 1 - \left[P(A_1^c)+P(A_2^c)-P(A_1^c\cap A_2^c)\right]$$
$$= 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c) + P(A_1^c\cap A_2^c)$$



Portanto,

$$P(A_1\cap A_2) \ge 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c)$$

Suponha que vale para $n = k$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$$

III) Provar que vale para $n = k+1$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = 1 - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i^c\right)}_{\leq \sum P(A_i^c)}$$

pela desigualdade de bonferroni $P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$

Logo,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) \leq 1 - \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i^c)$$

(5) A e B são dois eventos independentes definidos num mesmo espaço de probabilidade

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

(a) $P(A \cup B)$

Por propriedades da união de probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

mas,

A e B independentes $\rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$\hookrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A|B).P(B) = P(A)P(B)$

$P(A|B) = P(A)$

Logo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

10

(b) $P(A | A \cup B)$

Por definição de probabilidade condicional

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((A \cap A) \cup (A \cap B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cup (A \cap B))}{P(A \cup B)} \overset{\text{def união}}{=} \frac{P(A) + \cancel{P(A \cap B)} - \cancel{P(A \cap A \cap B)}}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$$

(c) $$P(B|A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((B \cap A) \cup (B \cap B))}{P(A \cup B)} = \frac{P((B \cap A) \cup B)}{P(A \cup B)} = \frac{\cancel{P(B \cap A)} + P(B) - \cancel{P(B \cap A \cap B)}}{P(A \cup B)} =$$

$$= \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{3/4}{5/6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{10}$$

6) A_1, A_2 e A_3 três eventos independentes

mostrar que A_1^c, A_2^c e A_3^c são independentes

Para mostrar que três eventos são independentes é necessário mostrar que os eventos são dois a dois independentes e os três juntos também são, ou seja:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Assim,

$\rightarrow P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) =$

$= P(A_1^c) - P(A_2)[1 - P(A_1)] = P(A_1^c) - P(A_2)P(A_1^c) = P(A_1^c)[1 - P(A_2)] = P(A_1^c)P(A_2^c)$

O mesmo ocorre para

$P(A_1^c \cap A_3^c) = P(A_1^c)P(A_3^c)$

$P(A_2^c \cap A_3^c) = P(A_2^c)P(A_3^c)$

$\rightarrow P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] =$

$= 1 - [P(A_1)(1 - P(A_2) - P(A_3) + P(A_2)P(A_3)) + P(A_2)(1 - P(A_3)) + P(A_3)] =$

$= 1 - [P(A_1)(1 - P(A_3) - P(A_2)(1 - P(A_3))) + P(A_2)(1 - P(A_3)) + P(A_3)] =$

$= 1 - P(A_1)(1 - P(A_3))(1 - P(A_2)) - P(A_2)(1 - P(A_3)) - P(A_3) =$

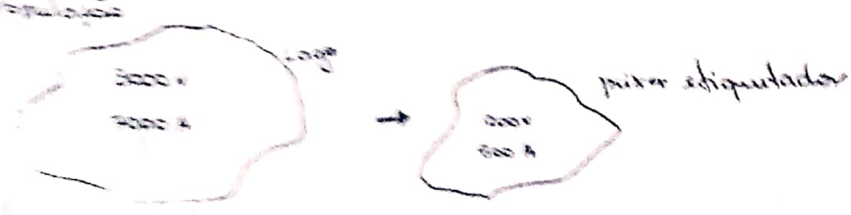
$= (1 - P(A_3))[1 - P(A_1)(1 - P(A_2)) - P(A_2)] = (1 - P(A_3))(1 - P(A_2))(1 - P(A_1)) =$

$= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)$

10

$\therefore A_1^c$, A_2^c e A_3^c também são independentes.

7) População



Amostra

	c/ etiqueta	s/ etiquetas	Total
Vermelho	200	2800	3000
Amarelo	500	6500	7000
Total	700	9300	10000

P(encontrar um peixe vermelho etiquetado) $= \frac{200}{3000} = \frac{1}{15}$

P(encontrar um peixe amarelo etiquetado) $= \frac{500}{7000} = \frac{1}{14}$

10

$$P(V=15) \text{ e } P(A=20) = \left[\binom{100}{15}\left(\tfrac{1}{15}\right)^{15}\left(\tfrac{14}{15}\right)^{85}\right]\left[\binom{200}{20}\left(\tfrac{1}{14}\right)^{20}\left(\tfrac{13}{14}\right)^{180}\right] = 0{,}0000\,509855$$

⑧ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade $\rightarrow A, B, C \in \mathcal{A}$; $P(B)>0$ e $P(C)>0$

B e C são independentes.

$$P(A|B) = P(A|B\cap C)P(C) + P(A|B\cap C^c)P(C^c)$$

$$P(A|B\cap C)P(C) + P(A|B\cap C^c)P(C^c) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}P(C) + \frac{P(A\cap B\cap C^c)}{P(B\cap C^c)}P(C^c) =$$

$$= \frac{P(A\cap B\cap C)\cancel{P(C)}}{P(B)\cancel{P(C)}} + \frac{P(A\cap B\cap C^c)\cancel{P(C^c)}}{P(B)\cancel{P(C^c)}} =$$

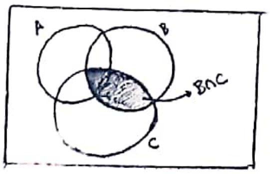
$$= \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B)} + \frac{P(A\cap B\cap C^c)}{P(B)} = \frac{\overbrace{P((A\cap B)\cap C)}^{(*)} + P((A\cap B)\cap C^c)}{P(B)} =$$

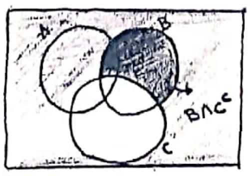
$$= \frac{P(C|(A\cap B))P(B|A)P(A) + P(C^c|(A\cap B))P(B|A)P(A)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)\left[P(C|(A\cap B)) + P(C^c|(A\cap B))\right]}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

(*) $P((A\cap B)\cap C) = P(C|A\cap B)P(A\cap B)$
$= P(C|A\cap B)P(B|A)P(A)$

10





Ana Paula Jorge

61/70

TEORIA DAS PROBABILIDADES
EXERCICIOS # 2

(1) Seja X uma variável aleatória com f.d. F e seja Y uma função de Borel de X. Escrever a f.d. de Y em termos de F para os seguintes casos (a,b constantes):

(a) $Y = aX + b$

(b) $Y = I_{(a,b]}(X)$, $a<b$ → $a<x\leq b$

(c) $Y = XI_{(a,b]}(X)$

(d) $Y = aI_{(-\infty,a]}(X) + XI_{(a,b]}(X) + bI_{(b,\infty)}(X)$

(2) Seja $F(x_1,x_2)$ uma f.d. conjunta de (X_1,X_2). Escrever as seguintes probabilidades em termos de F.

(a) $P\{X_1 \leq a_1, a_2 < X_2 \leq b_2\}$

(b) $P\{X_1 > a_1\ ,\ X_2 \geq a_2\}$

(c) $P\{a_1 < X_1 < b_1\ ,\ X_2 = a_2\}$

(3) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{R}$ e definir a função F_n (distribuição empírica) dos $\{x_i\}$ por,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[x_i,\infty)}(x),\quad x \in \boldsymbol{R}$$

(a) Mostrar que F_n é uma função de distribuição.

(b) Seja X uma v.a. com f.d. $F(x)$, dada por $F(x)=0$ se $x<2$; $F(x)=\frac{2}{3}x-1$, se $2<x\leq 3$; $F(x)=1$ se $x\geq 3$. Calcular $E(X^2)$

(4) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x)=\frac{x^3}{64}$, $0\leq x\leq 64$. Achar a f.d.p. da v.a. Y definida por $Y=\min\{\sqrt{X}\ , 2-\sqrt{X}\}$

(5) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x)=\theta e^{-\theta x}$, $x\geq 0$; $f(x)=0$ se $x<0$. Seja $Y=(X-\frac{1}{\theta})^2$. Achar a f.d.p. de Y.

(6) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{3}$, se $-1<x<2$ e 0 e.o.p. Seja $Y=|X|$. Achar a f.d.p. de Y.

(7) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{2\theta}$, se $-\theta \leq x \leq \theta$ e 0 e.o.p. Seja $Y=\frac{1}{X^2}$. Achar a f.d.p. de Y.

v.a. com f.d. F

Y: função de Borel mensurável

f.d. de Y em termos de F

(a) $Y = aX + b$

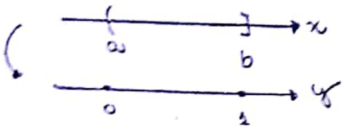
$$G(y) = P\{Y \le y\} = P\{aX+b \le y\} = P\{aX \le y-b\} = P\left\{X \le \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad p/ \quad a>0$$

$$G(y) = P\{Y \le y\} = P\{aX+b \le y\} = P\{aX \le y-b\} = P\left\{X > \frac{y-b}{a}\right\} = 1 - P\left\{X \le \frac{y-b}{a}\right\}$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad p/ \quad a<0$$

(b) $Y = I_{(a,b]}(X)$, $a<b$

$$I_{(a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b] \end{cases}$$

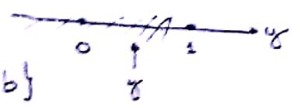


(i) $y<0$

$Y \le y \iff X = \emptyset$

$\therefore F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P(\emptyset) = 0$

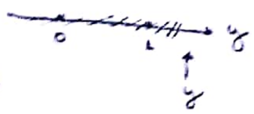
(ii) $0 \le y < 1$



$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le a \text{ ou } X > b\}$$

$$= P\{X \le a\} + P\{X > b\} = P\{X \le a\} + 1 - P\{X \le b\} = F_X(a) + 1 - F_X(b)$$

(iii) $y \ge 1$



$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{x \in \mathbb{R}\} = 1$$

$$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y<0 \\ F_X(a) + 1 - F_X(b) & \text{se } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{se } y \ge 1 \end{cases}$$

(c) $Y = X\, I_{(a,b]}(x)$ $\qquad Y = \begin{cases} X & \text{se } x \in (a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b] \end{cases}$

i) $y<0$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P(\phi) = 0$

ii) $0 \leq y \leq b$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq a \text{ ou } X > b\} = P\{X \leq a\} + P\{X > b\} = F(a) + 1 - F(b)$

iii) $a < y < b$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$

iv) $y \geq b$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \in \mathbb{R}\} = 1$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ F(a)+1-F(b) & , 0 \leq y \leq b \\ F(y) - F(a) & , a<y<b \\ & y \geq b \end{cases}$$

$F(y)$

4

(d) $Y = a\, I_{(-\infty,a]}(x) + X\, I_{(a,b]}(x) + b\, I_{(b,\infty]}(x)$

i) $y<0$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P(\phi) = 0$

ii) $0 < y < a$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq a\} = F(a)$

iii) $a < y < b$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{a < X < b\} = F(b) - F(a)$

iv) $y > b$

$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \in \mathbb{R}\} = 1$

8

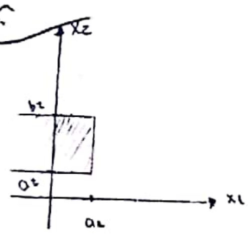
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ F(a) & , 0<y<a \\ F(b) - F(a) & , a<y<b \\ 1 & , y \geq b \end{cases}$$

4

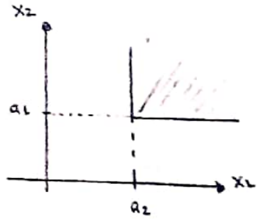
(x_1, x_2) umas f.d. conjuntas de (X_1, X_2), escreva em forma de F

$P\{X_1 \le a_1, a_2 < X_2 \le b_2\}$

$P\{X_1 \le a_1, a_2 < X_2 \le b_2\} = P\{-\infty \le X_1 \le a_1, a_2 < X_2 \le b_2\} = F_{(X_1,X_2)}(a_1, b_2) - F_{(X_1,X_2)}(a_1, a_2)$



b) $P\{X_1 > a_1, X_2 \geq a_2\} = P\{a_1 < X < \infty, a_2 \le X_2 < \infty\} = 1 - F(a_2, \infty) + F(a_1, a_2) - F(a_1, \infty)$



C

8

outra forma

$P\{X_1 > a_1, X_2 \geq a_2\} = 1 - P(\{X_1 > a_1, X_2 \geq a_2\}^c) = 1 - P(\{X_1 > a_1\}^c \cup \{X_2 \geq a_2\}^c)$

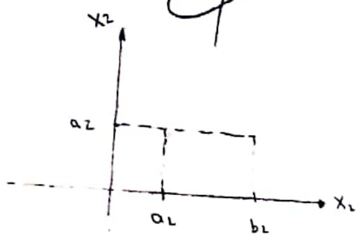
$= 1 - P(\{X_1 \le a_1\} \cup \{X_2 < a_2\}) = 1 - P[P\{X_1 \le a_1\} + P\{X_2 < a_2\} - P\{X_1 \le a_1, X_2 < a_2\}]$

$= 1 - F_{X_1}(a_1) - F_{X_2}(a_2) + F_{X_1,X_2}(a_1, a_2)$

(c) $P\{a_1 < X_1 < b_1, X_2 = a_2\} = P\{X_1 < b_1, X_2 = a_2\} - P\{X_1 < a_1, X_2 = a_2\} = F_{X_1}(b_1) - F_{X_1}(a_1)$

C+

$F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2)$

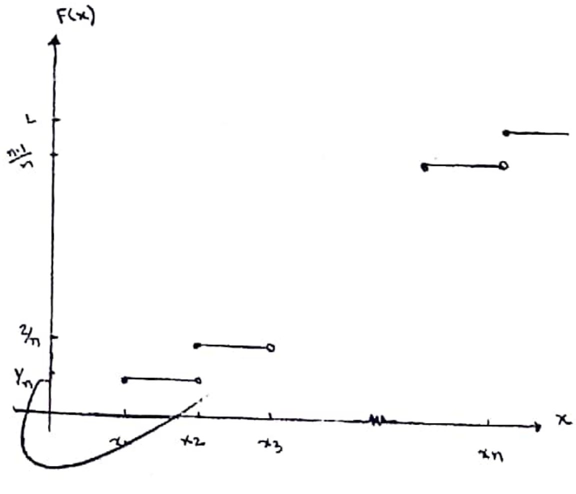


3) $X_1, X_2, \dots, X_K \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{[x_i, \infty)}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

(a)

$$F(x) = Q(-\infty, x] = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ 1/n & \text{se } x_1 \le x < x_2 \\ 2/n & \text{se } x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{se } x_{n-1} \le x < x_n \\ 1 & \text{se } x \geq x_n \end{cases}$$



$F(x)$ é mista compostas $F(x) = aF$

i) se $x \le y \in \mathbb{R}$ então $F(x) \le F(y)$

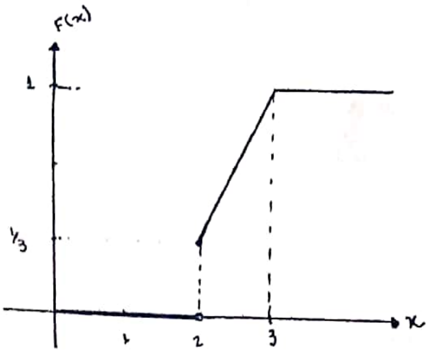
ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

iii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Logo $F_n(x)$ é uma função de distribuição

(b) X uma v.a. com f.d. $F(x)$, dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<2 \\ \frac{2}{3}x-1 & \text{se } 2<x\leq 3 \\ 1 & \text{se } x\geq 3 \end{cases}$$



$F_x(x) = \frac{1}{3} F_d(x) + \frac{2}{3} F_c(x)$

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & , x<2 \\ 1 & , x\geq 2 \end{cases} \quad ; \quad F_c(x) = \begin{cases} 0 & , x\leq 2 \\ x-2 & , 2<x<3 \\ 1 & , x>3 \end{cases} \Rightarrow f_c(x) = \begin{cases} 1 & , 2<x<3 \\ 0 & , c.c.p. \end{cases}$$

10

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{2} x^2 \underbrace{p(X=x)}_{P(X=2)} + \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \underbrace{f_c(x)}_{1}dx = \frac{1}{3}\sum x^2 p(X=2) + \frac{2}{3}\int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3}(2^2) + \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_2^3\right) =$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right] = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right] = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{19}{3} = \frac{4}{3} + \frac{38}{9} = \frac{12+38}{9} = \frac{50}{9}$$

(4) X uma v.a. com f.d.p. $f(x) = \frac{x^3}{64}$, $0\leq x\leq 64$.
Achar f.d.p. da v.a. Y definida por $Y = \min\{\sqrt{x}, 2-\sqrt{x}\}$.

$$Y = \min\{\sqrt{x}, 2-\sqrt{x}\} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ 2-\sqrt{x} & \text{se } 1<x\leq 4 \end{cases}$$

Se o intervalo for $0\leq x\leq 64$, a $f(x)$ não será f.d.p. Portanto, o novo intervalo é $0<x<4$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \rightarrow F(x) = \int_0^K \frac{x^3}{64}dx = \frac{1}{64}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^K\right) = 1 \rightarrow \frac{K^4}{256} = 1 \rightarrow K = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 4$$

como $x>0$ implica que $0<x<4$.

→ Para $0<x<1$

$$P\{Y\leq y\} = P\{\sqrt{x}\leq y\} = P\{x\leq y^2\} = \int_0^{y^2}\frac{x^3}{64}dx = \frac{x^4}{4\times 64}\Big|_0^{y^2} = \frac{y^8}{256}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{8\times y^7}{256} = \frac{y^7}{32} \quad 0<y<1$$

→ Para $1<x<4$

$$P\{Y\leq y\} = P\{2-\sqrt{x}\leq y\} = P\{x\leq(2-y)^2\} = \int_{(2-y)^2}^{4}\frac{x^3}{64}dx = \frac{x^4}{4\times 64}\Big|_{(2-y)^2}^{4} = \frac{4^4}{256} - \frac{(2-y)^8}{256} = 1 - \frac{(2-y)^8}{256}, \; 0\leq y<1$$

$$g' = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{8(2-y)^7}{256} = \frac{(2-y)^7}{32} \qquad 0<y<1$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{y^7}{32} + \frac{(2-y)^7}{32} = \frac{y^7+(2-y)^7}{32} \quad , \; 0<y<1$$

10

⑤ X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$Y = \left(X - \frac{1}{\theta}\right)^2 \Rightarrow$ Achar a f.d.p. da Y.

$$F_X(x) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^x \theta e^{-\theta t} dt = \cancel{\theta} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{\theta}}\right) e^{-\theta t}\Big|_0^x = -e^{-\theta t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

$$G(Y) = P\{Y \leq y\} = P\left\{(X-\tfrac{1}{\theta})^2 \leq y\right\} = P\left\{X \leq \sqrt{y} + \tfrac{1}{\theta}\right\} = F_X\left(\sqrt{y}+\tfrac{1}{\theta}\right)$$

5

$$F_X\left(\sqrt{y}+\tfrac{1}{\theta}\right) = 1 - e^{-(\sqrt{y}+\frac{1}{\theta})\theta} = 1 - e^{-\sqrt{y}\theta - 1}$$

$$\therefore g(y) = G'(Y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\sqrt{y}+\tfrac{1}{\theta}\right) = -e^{-\sqrt{y}\theta-1} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) y^{-1/2} \theta = \frac{\theta}{2\sqrt{y}} e^{-\theta\sqrt{y}-1} \quad , \; \frac{1}{\theta^2} < y < \infty$$

⑥ X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } -1<x<2 \\ 0 & \text{se c.c.p.} \end{cases}$$

Seja $Y = |x|$

Achar a f.d.p. da Y

→ Para $-1<x<1$

$$P\{Y \leq y\} = P\{|x| \leq y\} = P\{-y \leq x \leq y\} = \int_{-y}^{y} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_{-y}^{y} = \frac{y}{3} - \frac{(-y)}{3} = \frac{2}{3}y$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y \leq y\} = \frac{2}{3} \; , \; 0<y<1$$

→ Para $1<x<2$

$$P\{Y \leq y\} = P\{|x| \leq y\} = P\{x \leq y\} = \int_1^y \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_1^y = \frac{y-1}{3}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} P\{Y \leq y\} = \frac{1}{3} \; , \; 1<y<2$$

10

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & , \; 0<y<1 \\ 1/3 & , \; 1<y<2 \end{cases}$$

(7) X uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta} & -\theta \le x \le \theta \\ 0 & \text{e.o.p.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < -\theta \\ \frac{x}{2\theta} & -\theta < x < \theta \\ 1 & x > \theta \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{X^2} = g(x)$$

Achar f.d.p. de Y.

$$G(y) = P\{Y \le y\} = P\left\{\frac{1}{X^2} \le y\right\} = P\left\{-\sqrt{y} \le \frac{1}{X} \le \sqrt{y}\right\} = P\left\{-\frac{1}{\sqrt{y}} \le X \le \frac{1}{\sqrt{y}}\right\} = F_X\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) - F_X\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) =$$

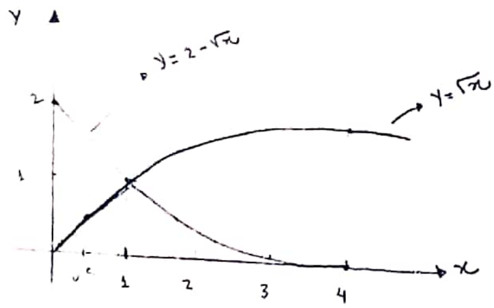
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}\theta} + \frac{1}{2\sqrt{y}\theta} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{y}\theta} = \frac{1}{\sqrt{y}\theta} \quad ; \quad -\theta \le \frac{1}{\sqrt{y}} \le \theta \Rightarrow -\frac{1}{\theta} \le \sqrt{y} \le \frac{1}{\theta} \Rightarrow y \ge \frac{1}{\theta^2}$$

$$g(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \frac{1}{\theta}\left(-\frac{1}{2}\right) y^{-1/2-1} = -\frac{1}{2\theta} y^{-3/2} = \dagger \frac{1}{2\theta\sqrt{y^3}} \quad p/ \ y \ge \frac{1}{\theta^2}$$

10

outra forma de resolver o (4)

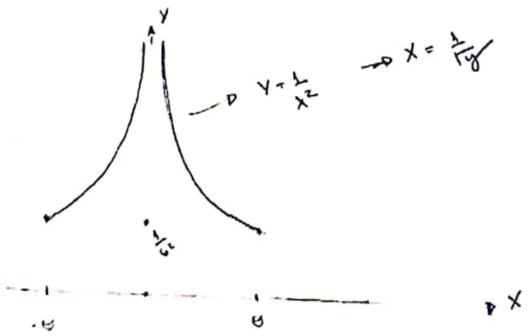
$$Y = \min\{\sqrt{x}, 2-\sqrt{x}\}$$



Para $y < 0$ $F_Y(y) = 0$

Para $0 < y < 1$ $F_Y(y) = P\{0 < X < y^2\} + P\{(2-y)^2 < X < 4\}$

(7)



$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y \ge 1/\theta^2 \quad \int_{-\frac{1}{\sqrt{y}}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} f(x)\,dx$$

Ana Paula Jorge

79/90

TEORIA DAS PROBABILIDADES

EXERCÍCIOS # 3

(1) Seja X uma v.a. com $E(X)<\infty$ .Usar integração por partes para mostrar que,

$$E(X)=\int_0^\infty[1-F(x)]dx-\int_{-\infty}^0 F(x)dx = \int_0^\infty[1-F(x)-F(-x)]dx$$

onde F(x) é a f.d. de X.

(2) Provar que se $E(X)=0$ e $E(X^2)=\sigma^2<\infty$, então para $t>0$,

$$P\{X>t\}\leq \sigma^2/(\sigma^2+t^2)$$

[sugestão:provar que $P\{X>t\}\leq E[(X+c)^2]/(t+c)^2$ e então minimizar o lado direito com respeito à $c>0$).

(3) Achar a f.c.(função característica) das seguintes distribuições:
(a) Binomial $b(n,p)$,
(b) Poisson $P(\lambda)$,
(c) Binomial negativa $bn(r,p)$,
(d) Degenerada em c,i.e.,$f(x)=1$ se $x=c$ e 0 e.o.p.
(e) X com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{a}(1-\frac{|x|}{a})$, $-a<x<a$ $(a>0)$.
(f) Gama $G(\alpha,\beta)$,
(g) Laplace com f.d.p.,$f(x)=\frac{1}{2\sigma}\exp(-\frac{1}{\sigma}|x-\mu|)$, $-\infty<x<\infty$.

(4) (a) Sejam $X_1,X_2,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias normais $N(\mu,\sigma^2)$ independentes.Achar a f.c. de $\mathbf{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ e assim,determinar a distribuição de $\mathbf{X}_n$ de sua f.c.
(b) Mostrar que se $X_1,X_2,\ldots,X_n$ são variáveis aleatórias também independentes Gama $G(\alpha_j,\beta)$,então,$\sum_{j=1}^n X_j$ também tem uma distribuição gama.
(c) Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuidas) $N(\mu,\sigma^2)$.Achar a f.c. conjunta de X_1+X_2 e X_1-X_2 e assim mostrar que X_1+X_2 e X_1-X_2 também são v.a.s independentes e determinar suas distribuições.

(5) (a) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes com f.c. $\Phi(t)$,mostrar que X_1-X_2 tem f.c. $|\Phi(t)|^2$
(b) Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas exponenciais com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{\beta}\exp(-\frac{x}{\beta})$, $x>0$, então $Y=X_1-X_2$ tem distribuição de Laplace com f.d.p. $g(y)=\frac{1}{2\beta}\exp(-|y|/\beta)$, $-\infty<y<\infty$.

(6) (a) Sejam $P_1(t),\ldots,P_k(t)$ as f.g.p. de k v.a.s independentes discretas $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Mostrar que a f.g.p. da soma $\sum_{i=1}^{k} X_i$ é o produto $\Pi_{i=1}^{k} P_i(t)$ $(P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,\ |s|\leq 1)$

(b) Seja $S_N=\sum_{j=1}^{N} X_j$ a soma de N v.a.s discretas independentes cada uma com mesma f.g.p. P(t). Alem disso, seja N uma v.a. com f.g.p G(t). Mostrar que a f.g.p. da v.a. S definida como a soma de um numero aleatorio de v.a.s independentes é dada por G(P(t)).

(7) (distribuição de Pareto) Seja X uma v.a. com f.d.p. dada por

$f(x)= \beta\alpha^{\beta}/x^{\beta+1}$, $x\geq \alpha$ e $f(x)=0$ e.o.p.

Mostrar que o momento de ordem n existe se e só se $n<\beta$. Seja $\beta>2$; achar a média e a variancia da distribuição.

(8) Seja g(x) uma função tal que $g(x)>0$ para $x>0$; g(x) é crescente para $x>0$ e $g(|x|)<\infty$.

Mostrar que,

$P\{|X|>\epsilon\} \leq E\{g(|X|\}/g(\epsilon)$, para todo $\epsilon>0$.

(9) Para a v.a. continua com f.d.p. $f(x)=e^{-x}x^{\lambda}/\lambda!$, $x>0$, onde $\lambda\geq 0$ é um inteiro, mostrar que $P\{0<X<2(\lambda+1)\} > \lambda/(\lambda+1)$

...ma v.a. com $E(X) < \infty$. Mostrar que,

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x) - F(-x)]\,dx$$

...de $F(x)$ é a f.d. de X.

Vamos provar que $\int_0^\infty x\, dF(x) = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx$. !

Usaremos integração por partes, com a diferencial $d[x F(x)] = x\, dF(x) + F(x)dx$

$$\forall b > 0, \quad \underbrace{\int_0^b x\, dF(x)}_{(*)} = bF(b) - \int_0^b F(x)\,dx = \int_0^b [F(b) - F(x)]\,dx.$$

(*) integração por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \rightarrow \int_0^b x\, dF(x) = xF(x)\Big|_0^b - \int_0^b F(x)\,dx = bF(b) - \int_0^b F(x)\,dx$$

$u = x$ $\quad dv = dF(x)$

$du = dx$ $\quad v = F(x)$

Como $F(b) \leq 1$ e $1 - F(b) \geq 0$, temos $\int_0^b x\, dF(x) = \int_0^b [F(b) - F(x)]dx \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$, $\forall b > 0$,

de modo que

$$\int_0^\infty x\, dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\, dF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx.$$

Por outro lado, seja $\lambda > 0$. Se $b > \lambda$, então

$$\int_0^b [F(b) - F(x)]dx \geq \int_0^\lambda [F(b) - F(x)]\,dx = \int_0^\lambda [F(b) - 1]\,dx + \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx =$$

$$\lambda[F(b) - 1] + \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx, \quad \text{e portanto,}$$

$$\int_0^\infty x\, dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\, dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b [F(b) - F(x)]\,dx \geq \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx + \lim_{b\to\infty} \lambda[F(b) - 1] =$$

$$= \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx.$$

Já que isto vale para todo $\lambda > 0$, temos

$$\int_0^\infty x\, dF(x) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx$$

ii) Agora vamos provar que $\int_{-\infty}^0 x\, dF(x) = -\int_{-\infty}^0 F(x)dx$

$$\int_b^0 x\, dF(x) \overset{\text{integral por partes}}{=} xF(x)\Big|_b^0 - \int_b^0 F(x)\,dx = -bF(b) - \int_b^0 F(x)dx = \int_b^0 [F(b) - F(x)]\,dx$$

Como $F(b) \geq 0$, $-F(b) \leq 0$

$$\int_b^0 [-F(b) - F(x)]dx \leq \int_{-\infty}^0 -F(x)\,dx$$

Por outro lado se $\lambda < 0$ e $b < \lambda < 0$ temos.

$$\int_b^0 [-F(b) - F(x)]\,dx \geq \int_\lambda^0 [-F(b) - F(x)]\,dx = \int_\lambda^0 -F(b)\,dx + \int_\lambda^0 -F(x)\,dx = \int_\lambda^0 -F(x)\,dx + \lambda F(b).$$

$$\int_{-\infty}^0 [-F(b) - F(x)]\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 [-F(b) - F(x)]\,dx \geq \lim \int_\lambda^0 -F(x)\,dx + \lim_{b\to-\infty} \lambda \overset{0}{\cancel{F(b)}} =$$

$$= \int_\lambda^0 -F(x)\,dx = -\int_\lambda^0 F(x)\,dx$$

(*) continuação

Como

$$\int_0^\infty x\,dF(x) \geq \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^\infty x\,dF(x) \leq \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$$

temos que

$$\int_0^\infty x\,dF(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$$

Portanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x\,dF(x) = \int_{-\infty}^0 x\,dF(x) + \int_0^\infty x\,dF(x) = -\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx + \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$$

Note que $\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx = \int_0^\infty F(-x)\,dx$

Então temos que

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx - \int_0^\infty F(-x)\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x)] - F(-x)\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x) - F(-x)]\,dx$$

(*) Como isto vale para todo $\lambda < 0$ temos

$$\int_{-\infty}^0 x\,dF(x) \geq \lim_{\lambda\to-\infty} -\int_\lambda^0 F(x)\,dx = -\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^0 x\,dF(x) \geq -\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 x\,dF(x) \leq -\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx \quad \text{então} \quad \int_{-\infty}^0 x\,dF(x) = -\int_{-\infty}^0 F(x)\,dx$$

10

Portanto,

$$\int_0^\infty x\,dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\,dF(x) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b [F(b) - F(x)]\,dx \geq \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx + \lim_{b\to\infty} \lambda\,[\underbrace{F(b) - 1}_{0}] =$$

$$= \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx$$

Como isto vale para todo $\lambda > 0$ temos

$$\int_0^\infty x\,dF(x) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda [1 - F(x)]\,dx = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$$

o e $E(X^2)=\delta^2<\infty$ para $t>0$

$$P\{X>t\}\leq \frac{\delta^2}{\delta^2+t^2}$$

Considere $b>0$ e observe que $X\geq t$ é equivalente a $X+b\geq t+b$. Portanto,

$$P\{X\geq t\}=P\{X+b\geq t+b\}\leq P\{(X+b)^2\geq (t+b)^2\}$$

onde se obtém a desigualdade observando-se que, como $t+b>0$, $X+b\geq t+b$ implica que $(X+b)^2\geq (t+b)^2$.

Aplicando-se a desigualdade de Markov, que é

$$P\{X\geq a\}\leq \frac{E(X)}{a}$$

a equação anterior resulta em

$$P\{X\geq t\}\leq \frac{E[(X+b)^2]}{(t+b)^2}=\frac{E[X^2+2Xb+b^2]}{(t+b)^2}=\frac{\delta^2+b^2}{(t+b)^2}$$

Fazendo $b=\frac{\delta^2}{t}$ (o que é facilmente visto como o valor de b que minimiza $\frac{(\delta^2+t^2)}{(t+b)^2}$), obtemos

$$P\{X\geq t\}\leq \frac{\delta^2+b^2}{(t+b)^2}=\frac{\delta^2+\left(\frac{\delta^2}{t}\right)^2}{\left(t+\frac{\delta^2}{t}\right)^2}=\frac{\frac{t^2\delta^2+(\delta^2)^2}{t^2}}{\left(\frac{t^2+\delta^2}{t}\right)^2}=\frac{\frac{\delta^2(t^2+\delta^2)}{\cancel{t^2}}}{\frac{(t^2+\delta^2)^2}{\cancel{t^2}}}=\frac{\delta^2\cancel{(t^2+\delta^2)}}{(t^2+\delta^2)^{\cancel{2}}}=\frac{\delta^2}{t^2+\delta^2}$$

Portanto,

$$P\{X\geq t\}\leq \frac{\delta^2}{t^2+\delta^2}$$

3) Funções características

.) Binomial $b(n,p)$.

Seja X uma v.a. com distribuição Binomial de parâmetros n e p, $0<p<1$. Então, por definição

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{x=0}^{n} e^{itx}\,P(X=x)$$

mas

$$X\sim b(n,p)\Rightarrow P\{X=x\}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

então

$$\varphi_X(t)=\sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(e^{it}p)^x(q)^{n-x}=(e^{it}p+q)^n$$

$$\therefore \varphi_X(t)=(e^{it}p+q)^n$$

) $X\sim P(\lambda)$ com $\lambda>0$

Por definição

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}\,P(X=x)$$

mas

$$X\sim P(\lambda)\Rightarrow P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

então,

$$\varphi_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!} \overset{(*)}{=} e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(*) Segue o resultado que

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{y^x}{x!} = e^y$$

$$\therefore \varphi_x(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(c) Binomial negativa $bn(r,p)$.

Utilizando: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\,\cancel{(n-k)!}}{k!\,(n-k)!}$ e $\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}$

$$\varphi_x(t) = E(e^{itx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} p^r \left[(1-p)e^{it}\right]^x =$$

$$= p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} \left[(p-1)e^{it}\right]^x = p^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} \left[(p-1)e^{it}\right]^x 1^{-r-x} =$$

$$= p^r \left[(p-1)e^{it}+1\right]^{-r} = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$$

(d) Degenerada em c, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=c \\ 0 & \text{c.o.p} \end{cases}$$

Por definição,

$$\varphi_x(t) = E(e^{itx}) = e^{itc}$$

$$\hookrightarrow \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} P(X=x) = e^{itc} \underbrace{P(X=c)}_{1} = e^{itc}$$

(e) X com f.d.p $f(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$, $-a<x<a$ $(a>0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right) & 0<x<a \\ \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) & -a<x<0 \end{cases}$$

$$\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_0^a e^{itx} \frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) dx + \int_{-a}^0 e^{itx} \frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a e^{itx}\left(1-\frac{x}{a}\right) dx + \frac{1}{a}\int_{-a}^0 e^{itx}\left(1+\frac{x}{a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int_0^a e^{itx} dx - \int_0^a e^{itx}\frac{x}{a} dx + \int_{-a}^0 e^{itx} dx + \int_{-a}^0 e^{itx} \frac{x}{a} dx\right] =$$

continuando...

...dar...

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{e^{itx}}{it}\Big|_0^a - \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^a e^{itx} x\,dx}_{(*)} + \frac{e^{itx}}{it}\Big|_{-a}^0 + \frac{1}{a}\int_{-a}^0 e^{itx} x\,dx \right] =$$

(*) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (integração por partes)

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{itx}dx \rightarrow v = \frac{e^{itx}}{it}$ $\therefore \int_0^a e^{itx} x\,dx = x\frac{e^{itx}}{it} - \int_0^a \frac{e^{itx}}{it}dx = \frac{x e^{itx}}{it} - \frac{e^{itx}}{(it)^2}\Big|_0^a$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{e^{ita}}{it} - \cancel{\frac{1}{it}} - \frac{1}{a}\left(\frac{xe^{itx}}{it} - \frac{e^{itx}}{(it)^2}\right)\Big|_0^a + \cancel{\frac{1}{it}} - \frac{e^{-ita}}{it} + \frac{1}{a}\left(\frac{xe^{itx}}{it} - \frac{e^{itx}}{(it)^2}\right)\Big|_{-a}^0 \right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{e^{ita}}{it} - \frac{e^{-ita}}{it} - \frac{1}{a}\left(\frac{ae^{ita}}{it} - \frac{e^{ita}}{(it)^2}\right) + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{(it)^2}\right) + \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{(it)^2}\right) - \frac{1}{a}\left(\frac{-ae^{-ita}}{it} - \frac{e^{-ita}}{(it)^2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\cancel{\frac{e^{ita}}{it}} - \cancel{\frac{e^{-ita}}{it}} - \cancel{\frac{e^{ita}}{it}} + \frac{1}{a}\frac{e^{ita}}{(it)^2} - \frac{2}{a(it)^2} + \cancel{\frac{e^{-ita}}{it}} + \frac{1}{a}\frac{e^{-ita}}{(it)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\frac{e^{ita}}{(it)^2} - \frac{2}{a(it)^2} + \frac{1}{a}\frac{e^{-ita}}{(it)^2} \right] = \frac{1}{a}\left[\frac{e^{ita} + e^{-ita} - 2}{a(it)^2} \right] = \frac{2e^{ita} - 2}{(ait)^2}$$

(f) Gamma $G(\alpha, \beta)$

Se X é uma v.a com distribuição Gamma, logo a função densidade de probabilidade é dada por.

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0$$

$$\Phi_X(t) = E(e^{itx}) = \int_0^\infty e^{itx}\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{itx} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x(\beta-it)}dx =$$

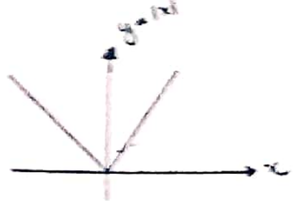
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{(\beta-it)^\alpha}{(\beta-it)^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x(\beta-it)}dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\beta-it)^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x(\beta-it)}}{\Gamma(\alpha)}dx}_{G(\alpha,\ \beta-it)} = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha}$$

$$\therefore \Phi_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-it)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-it}\right)^\alpha$$

10

(g) variável com F.d.p. $f(x) = \frac{1}{2\delta} \exp\left(-\frac{1}{\delta}|x-\mu|\right) \quad -\infty < x < \infty$

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{1}{\delta}|x-\mu|}\,dx$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{1}{\delta}(x-\mu)} & \mu < x < \infty \\ \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{1}{\delta}(-(x-\mu))} & -\infty < x < \mu \end{cases}$$

$$\phi_X(t) = \frac{1}{2\delta}\left[\int_{-\infty}^{\mu} e^{itx} e^{\frac{1}{\delta}(x-\mu)}\,dx + \int_{\mu}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{\delta}(x-\mu)}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[\int_{-\infty}^{\mu} e^{-\mu/\delta} e^{x(it+\frac{1}{\delta})}\,dx + \int_{\mu}^{\infty} e^{\mu/\delta} e^{-x(\frac{1}{\delta}-it)}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[e^{-\mu/\delta} \left.\frac{e^{x(it+\frac{1}{\delta})}}{it+\frac{1}{\delta}}\right|_{-\infty}^{\mu} + e^{\mu/\delta} \left.\frac{e^{-x(\frac{1}{\delta}-it)}}{-(\frac{1}{\delta}-it)}\right|_{\mu}^{\infty}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[e^{-\mu/\delta}\frac{e^{\mu(it+\frac{1}{\delta})}}{it+\frac{1}{\delta}} - e^{-\mu/\delta}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x(it+\frac{1}{\delta})}}{it+\frac{1}{\delta}} + e^{\mu/\delta}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x(\frac{1}{\delta}-it)}}{it-\frac{1}{\delta}} - \frac{e^{\mu/\delta}e^{-\mu(\frac{1}{\delta}-it)}}{it-\frac{1}{\delta}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[\frac{e^{-\mu/\delta} e^{\mu i t} e^{\mu/\delta}}{it+\frac{1}{\delta}} - \frac{e^{\mu/\delta} e^{-\mu/\delta} e^{\mu i t}}{it-\frac{1}{\delta}}\right] = \frac{1}{2\delta}\left[\frac{e^{\mu i t}}{it+\frac{1}{\delta}} - \frac{e^{\mu i t}}{it-\frac{1}{\delta}}\right] = \frac{1}{2\delta}\left[\frac{e^{\mu i t}}{\frac{\delta i t+1}{\delta}} - \frac{e^{\mu i t}}{\frac{\delta i t-1}{\delta}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left[\frac{\delta e^{\mu i t}}{\delta i t+1} - \frac{\delta e^{\mu i t}}{\delta i t-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(\delta i t-1)e^{\mu i t} - (\delta i t+1)e^{\mu i t}}{(\delta i t)^2-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-2e^{\mu i t}}{-(\delta t)^2-1}\right] = \frac{e^{\mu i t}}{(\delta t)^2+1}$$

//

4

(a) $X_1, \dots, X_n$ v.a. normais $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ independentes.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (Achar a F.C. e determinar a distribuição de $\bar{X}_n$).

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

Fazemos $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \to x = z\sigma + \mu \quad dx = \sigma\,dz$, por conseguinte:
$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma}$

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(z\sigma+\mu)} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma z} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2it\sigma z)}\,dz =$$

$$= e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(z-it\sigma)^2-(it\sigma)^2\right]}\,dz = e^{it\mu} e^{\frac{(it\sigma)^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-it\sigma)^2}\,dz}_{\hookrightarrow N(it\sigma,1)} = e^{it\mu+\frac{(it\sigma)^2}{2}} = e^{it\mu+\frac{(it)^2}{2}\sigma^2}$$

$\phi_{\bar{X}_n}(t) = E[e^{it\bar{X}_n}] = E[e^{it(\frac{1}{n}\sum x_j)}] = E[e^{\frac{it}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)}] = E[e^{\frac{it}{n}x_1} \cdot e^{\frac{it}{n}x_2} \cdots e^{\frac{it}{n}x_n}] \overset{indep}{=}$

$= E[e^{\frac{it}{n}x_1}] \cdot E[e^{\frac{it}{n}x_2}] \cdots E[e^{\frac{it}{n}x_n}] = e^{\frac{it}{n}\mu + \frac{(\frac{it\sigma}{n})^2}{2}} \cdot e^{\frac{it}{n}\mu + \frac{(\frac{it\sigma}{n})^2}{2}} \cdots e^{\frac{it}{n}\mu + \frac{(\frac{it\sigma}{n})^2}{2}} =$

$= e^{n\frac{it}{n}\mu + n\frac{(it\sigma)^2}{2n^2}} = e^{it\mu + \frac{(it)^2}{2}\frac{\sigma^2}{n}}$

$\therefore \bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

(b) $X_1, X_2, \dots, X_n$ são v.a's também independentes Gamas $G(\alpha_j, \beta)$, então $\sum_{j=1}^{n} X_j$ também tem uma distribuição Gama

$X_j \sim G(\alpha_j, \beta)$ $\quad f_X(x) = \dfrac{\beta^{\alpha_j} x^{\alpha_j - 1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_j)}$, $x > 0$

$\phi_{X_j}(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \dfrac{\beta^{\alpha_j} x^{\alpha_j-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha_j)} dx = \dfrac{\beta^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^\infty e^{itx} x^{\alpha_j - 1} e^{-\beta x} dx = \dfrac{\beta^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^\infty x^{\alpha_j-1} e^{-x(\beta - it)} dx =$

$= \dfrac{\beta^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^\infty \dfrac{(\beta - it)^{\alpha_j}}{(\beta - it)^{\alpha_j}} x^{\alpha_j - 1} e^{-x(\beta - it)} dx = \dfrac{\beta^{\alpha_j}}{(\beta - it)^{\alpha_j}} \int_0^\infty \dfrac{(\beta - it)^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} x^{\alpha_j - 1} e^{-x(\beta - it)} dx = \dfrac{\beta^{\alpha_j}}{(\beta - it)^{\alpha_j}} = \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_j}$

$G(\alpha_j, \beta - it)$

Seja $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$

$\phi_Y(t) = E[e^{itY}] = E[e^{it\sum X_j}] = E[e^{it(X_1+X_2+\dots+X_n)}] = E[e^{itX_1} \cdot e^{itX_2} \cdots e^{itX_n}] =$

$= E[e^{itX_1}] E[e^{itX_2}] \cdots E[e^{itX_n}] = \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_n} = \prod_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_j} = \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} =$

$= \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\sum \alpha_j}$

$\therefore \sum_{j=1}^{n} X_j \sim G\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \beta\right)$

(c) Sejam X_1 e X_2 v.a. ind. $N(\mu, \sigma^2)$.

$X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ (achar as f.c. conjuntas e mostrar que $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ são v.a's independentes).

$\phi_{Y_1}(t) = E[e^{itY_1}] = E[e^{it(X_1+X_2)}] = E[e^{itX_1 + itX_2}] \overset{indep}{=} E[e^{itX_1}] E[e^{itX_2}] = [e^{it\mu + \frac{(it)^2\sigma^2}{2}}][e^{it\mu + \frac{(it)^2\sigma^2}{2}}] =$

$= e^{2it\mu + 2\frac{(it)^2\sigma^2}{2}}$

$\therefore Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$

$\phi_{Y_2}(t) = E[e^{itY_2}] = E[e^{it(X_1 - X_2)}] = E[e^{itX_1 - itX_2}] = [e^{it\mu + \frac{(it)^2\sigma^2}{2}}][e^{-it\mu + \frac{(it)^2\sigma^2}{2}}] =$

$= e^{it\mu - it\mu + \frac{(it)^2}{2}2\sigma^2}$

$\therefore Y_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$

Para provar que Y_1 e Y_2 são independentes.

$$\Phi_{Y_1 Y_2}(t_1,t_2) = E\left[e^{it_1Y_1} e^{it_2Y_2}\right] = E\left[e^{it_1(X_1+X_2)} e^{it_2(X_1-X_2)}\right] \overset{iid}{=} E\left[e^{iX_1(t_1+t_2)} e^{iX_2(t_1-t_2)}\right] =$$

$$= E\left[e^{iX_1(t_1+t_2)}\right] E\left[e^{iX_2(t_1-t_2)}\right] = e^{i(t_1+t_2)\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 (t_1+t_2)^2} \; e^{i(t_1-t_2)\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 (t_1-t_2)^2} =$$

$$= e^{2it_1\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 (2t_1^2 + 2t_2^2)} = e^{2it_1\mu_1 + \sigma^2 (it_1)^2 + \sigma^2 (it_2)^2} =$$

$$= e^{2it_1\mu_1 + \sigma^2 (it_1)^2} \; e^{\sigma^2 (it_2)^2} = \Phi_{Y_1}(t_1)\,\Phi_{Y_2}(t_2)$$

$\therefore$ Y_1 e Y_2 são independentes.

10

⑤ (a) X_1 e X_2 são v.a's independentes com f.c. $\Phi(t)$

$\rightarrow$ $X_1 - X_2$ tem f.c. $|\Phi(t)|^2$.

$$\Phi_Y(t) = E[e^{itY}] = E\left[e^{it(X_1-X_2)}\right] = E\left[e^{itX_1 - itX_2}\right] \overset{indep}{=} E\left[e^{itX_1}\right] E\left[e^{-itX_2}\right] = \Phi_x(t)\cdot\Phi_x(-t) = |\Phi_x(t)|^2$$

(b) X_1 e X_2 v.a's i.i.d. exponenciais com $f(x) = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$, $x>0$, então $Y = X_1 - X_2$ tem distribuição de Laplace com f.d.p. $g(y) = \frac{1}{2\beta}\exp(-|y|/\beta)$ $-\infty<y<\infty$

Como $X_i \sim \exp(1/\beta)$

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) \overset{def}{=} \int_0^\infty e^{itx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\beta} - it\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1/\beta}{-(1/\beta - it)} e^{-x(1/\beta - it)}\Big|_0^\infty = \frac{1/\beta}{(1/\beta - it)}\left[e^{-0(1/\beta - it)} - \cancel{\lim_{x\to\infty} e^{-x(1/\beta - it)}}^{\,0}\right] =$$

$$= \frac{1/\beta}{\left(\frac{1-\beta it}{\beta}\right)} = \frac{1}{1-\beta it}$$

Assim,

$$\Phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(X_1-X_2)}) = E(e^{itX_1 - itX_2}) \overset{indep}{=} E(e^{itX_1})\,E(e^{-itX_2}) =$$

$$= \Phi_X(t)\,\Phi_X(-t) = \left(\frac{1}{1-\beta it}\right)\left(\frac{1}{1+\beta it}\right)$$

10

Sabemos que as função característica de uma função Laplace (μ,β) com f.d.p $f_X(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{1}{\beta}|x-\mu|}$ é dadas por

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{e^{\mu it}}{it+\frac{1}{\beta}} - \frac{e^{\mu it}}{it-\frac{1}{\beta}}\right]$$

...uando $\mu=0$ temos

$$\Phi_x(t) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{(it+1/\beta)} - \frac{1}{(it-1/\beta)}\right] = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(it-1/\beta)-(it+1/\beta)}{(it+1/\beta)(it-1/\beta)}\right] = \frac{-\frac{2}{\beta}}{2\beta\,(it+\frac{1}{\beta})(it-\frac{1}{\beta})} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{\beta(it+\frac{1}{\beta})(it-\frac{1}{\beta})}\right] = -\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{(\beta it+1)(it-\frac{1}{\beta})}\right] = \frac{1}{(1+\beta it)}\cdot\frac{1}{-\beta(it-\frac{1}{\beta})} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\beta i t}\right)\left(\frac{1}{1-\beta i t}\right)$$

Portanto,

$$\Phi_y(t) = \left(\frac{1}{1+\beta i t}\right)\left(\frac{1}{1-\beta i t}\right) = \Phi_x(t) \quad p/\ X \sim \text{Laplace}(\mu=0,\beta)$$

⑥

(a) $P_1(t),\dots,P_k(t)$ são f.g.p de k v.a's independentes discretas $X_1, X_2, \dots, X_k$.
Mostrar que a soma $\sum_{i=1}^{k} X_i$ é o produto $\prod_{i=1}^{k} P_i(t)$.

$$\left(P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,\ |s|\leq 1\right)$$

Sabemos que

$\psi_x(t) = E[t^x] = P(t)$ $\qquad y = \sum_{i=1}^{k} X_i$

$$\psi_y(t) = E[t^y] = E[t^{\sum X_i}] = E[t^{X_1+X_2+\dots+X_k}] \overset{iid}{=} E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]\dots E[t^{X_k}] =$$

$$= P_1(t)P_2(t)\dots P_k(t) = \prod_{i=1}^{k} P_i(t)$$

(b) $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (soma de N v.a.s discretas independentes).
N uma v.a com f.g.p $G(t)$.

$$P_{S_N}(t) = E(E(t^{S_N}|N=n)) = E(E(t^{X_1+\dots+X_n}|N=n)) \overset{iid}{=} E\left(E(t^{X_1}|N=n)E(t^{X_2}|N=n)\dots E(t^{X_n}|N=n)\right) =$$

$$= E(P(t)P(t)\dots P(t)) = E(P(t)^n)$$

Então,

$$P_{S_N}(t) = E(P(t)^n) = G(P(t))$$

10

⑦ (Distribuição de Pareto). X uma v.a com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}, & x \geq \alpha \\ 0, & \text{c.o.p} \end{cases}$$

Mostrar que o momento de ordem n existe se, e só se $n<\beta$. Seja $\beta>2$ calcular a média e a variância da distribuição.

Folha 5

Por definição, o n-ésimo momento de X em torno da origem é dado por

$$m_n = E(X^n)$$

Se $X \sim$ Dist pareto então,

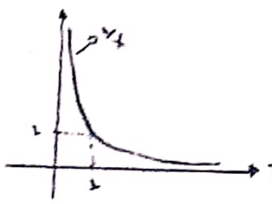
$$m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} x^n \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^n \beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\,dx = \beta\alpha^\beta \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} x^{n-\beta-1}\,dx}_{(*)}$$

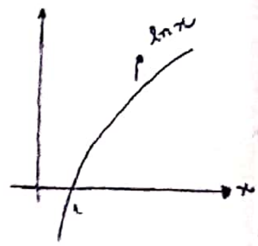
Mas $(*)$ estará definida somente se $n-\beta-1 < -1$

assim,

$$n-\beta-1 < -1$$
$$n-\beta < 0$$
$$n < \beta$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln x$$





Portanto,

$$E(X^n) \text{ existe} \iff n < \beta$$

Seja $\beta = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha^2}{x^3} & , x \geq \alpha \\ 0 & , \text{c.o.p.} \end{cases}$

$$m_1 = E(X) \overset{\text{por def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} x \frac{2\alpha^2}{x^3}\,dx = 2\alpha^2 \int_{\alpha}^{\infty} x^{-2}\,dx = 2\alpha^2 \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_{\alpha}^{\infty} = \left.\frac{-2\alpha^2}{x}\right|_{\alpha}^{\infty} =$$

$$= 2\alpha - \lim_{x\to\infty} \frac{2\alpha^2}{x} = 2\alpha.$$

8

$$m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\infty} x^2 \frac{2\alpha^2}{x^3}\,dx = 2\alpha^2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

↳ só existe para momentos de ordem menor que β, nesse caso $\beta = 2$.

Portanto, $\nexists\ Var(X)$

8) $g(x)$ função tal que $g(x) > 0$ para $x > 0$,
$g(x)$ é crescente para $x > 0$ e $g(|x|) < \infty$

5

mostre que,

$$P\{|X| > \varepsilon\} \leq \frac{E\{g(|X|)\}}{g(\varepsilon)} \quad \text{p/ todo } \varepsilon > 0$$

Como $g(x)$ é crescente e $\varepsilon > 0$, temos que $|X| > \varepsilon \rightarrow g|X| > \varepsilon$.

Logo,

$$P\{|X| > t\} = P\{g|X| > t\}$$

Pela desigualdade de Chebyshev, temos que

$\ldots \geq g(t)\} \leq \frac{E(g|x|)}{g(t)}$

$\therefore P\{|x|<\varepsilon\} \leq \frac{E(g|x|)}{g(t)}$ //

) X: v.a. contínua com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!} & , x>0 \\ 0 & , \text{c.o.p.} \end{cases}$$ em que $\lambda \geq 0$ é um inteiro

$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \sim$ Poisson(λ)

ñ confundir

Mostrar que

$$P\{0<x<2(\lambda+1)\} > \frac{\lambda}{(\lambda+1)}$$

Primeiro, precisamos saber qual é a distribuição de X, para isso vamos utilizar a função característica

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!}\,dx = \frac{1}{\lambda!}\int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x(1-it)}\,dx$$

Distribuição Gamma

se $X \sim G(\alpha,\beta)$

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}$

lembre: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

$$= \frac{(1-it)^{\lambda+1}}{(1-it)^{\lambda+1}} \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda} e^{-x(1-it)}}{\lambda!}\,dx = \frac{1}{(1-it)^{\lambda+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} x^{\lambda} (1-it)^{\lambda+1} e^{-x(1-it)}\,dx}_{=1}$$

$$= \frac{1}{(1-it)^{\lambda+1}} = \left(\frac{1}{1-it}\right)^{\lambda+1}$$

$\therefore X \sim G(\lambda+1, 1)$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!}\,dx = \frac{1}{\lambda!}\int_0^{\infty} x^{\lambda+1} e^{-x}\,dx = \frac{(\lambda+1)}{(\lambda+1)}\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda!} 1^{\lambda+2} x^{\lambda+2-1} e^{-x}\,dx = \lambda+1 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)} 1^{\lambda+2} x^{(\lambda+2)-1} e^{-x}\,dx}_{G(\lambda+2,1)}$$

$= \lambda+1$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x} x^{\lambda}}{\lambda!}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{\lambda+2}}{\lambda!}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{\lambda+2+1-1}}{\lambda!}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^{(\lambda+3)-1}}{\lambda!}\,dx = \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)}\int_0^{\infty} \frac{1^{(\lambda+3)} e^{-x} x^{\lambda+3-1}}{\lambda!}\,dx$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+1) \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\lambda+3)} 1^{(\lambda+3)} x^{(\lambda+3)-1} e^{-x}\,dx}_{G(\lambda+3,1)} = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X) = (\lambda+2)(\lambda+1) - (\lambda+1)^2 = \left[(\lambda+2) - (\lambda+1)\right](\lambda+1) = \lambda+1$$

assim,
$$\begin{cases} E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda+1}{1} = \lambda+1 \\ V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\lambda+1}{1^2} = \lambda+1 \end{cases}$$

$DP(X) = \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{\lambda+1}$

Sabemos que

$$P\{0<X<2(\lambda+1)\} = P\{X<2(\lambda+1)\} - \underbrace{P\{X<0\}}_{0 \text{ pois } x \geq 0} = P\{X<2(\lambda+1)\}$$

Pelas desigualdades de Chebyshev

$$P\{|X-E(X)| \geq K\delta\} \leq \frac{1}{K^2} \quad \text{sendo}$$

assim,

$$P\{|X-(\lambda+1)| \geq \underbrace{\sqrt{\lambda+1}}_{K}\,\underbrace{\sqrt{\lambda+1}}_{\delta}\} \leq \frac{1}{(\sqrt{\lambda+1})^2}$$

$$P\{|X-(\lambda+1)| \geq \lambda+1\} \leq \frac{1}{\lambda+1}$$

8

Portanto,

$$P\{|X-(\lambda+1)| < \lambda+1\} = 1 - P\{|X-(\lambda+1)| \geq \lambda+1\} = 1 - \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

Ana Paula Jorge

52/60

TEORIA DAS PROBABILIDADES

EXERCÍCIOS # 4

(1) Sejam X_1, X_2, X_3 v.a.s i.i.d. exponenciais com f.d.p. $f(x)=e^{-x}$, $x>0$ e seja $U = X_1 + X_2 + X_3$. Achar as f.d.p.s condicionais de U dado X_2, de U dado (X_2, X_3) e de (X_2, X_3) dado U.

(2) Seja (X,Y) com f.d.p. conjunta $f(x,y)=[(1+ax)(1+ay)-a]\exp(-x-y-axy)$, $0<x,y<\infty$ $(0\le a\le 1)$.
(a) Achar a f.d.p. marginal de X e a f.d.p. condicional de Y dado X.
(b) Achar E(Y/X) e var(Y/X).

(3) Seja (X,Y) com f.d.p. normal bivariada,

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\},\ -\infty < x,y < \infty.$$

Achar a f.d.p. condicional de Y dado X=x, f(y/x) e achar E(Y/X=x). Tambem achar var(Y/X=x).

(4) Sejam $X_1,\ldots,X_n$ v.a.s. i.i.d. com f.d.p. $f(x)=\lambda\exp(-\lambda x)$, $x>0$.Seja $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$, $j=1,\ldots,n$.
(a) Mostrar que a f.d.p. conjunta de $(S_1,\ldots,S_n)$ é $f(s_1,\ldots,s_n) = \lambda^n\exp(-\lambda S_n)$,$0 < S_1 < S_2 <\ldots<S_n$.
(b) Achar a f.d.p. marginal de S_n e a f.d.p. condicional de $(S_1,\ldots,S_{n-1})$ dado $S_n = s$. Identificar
esta distribuição como sendo a distribuição conjunta da estatistica de ordem numa amostra aleatória de tamanho n-1 de uma distribuição uniforme em (0,s).

(5) Seja Y uma v.a. com distribuição exponencial com f.d. $F(y) = 1 - e^{-y}$,$y > 0$.
Para $t > 0$ fixo,achar,
E{Y/min(Y,t)} e E{Y/max(Y,t)}.

(6) Variancia condicional: $var(Y/Z) = E(Y^2/Z) - [E(Y/Z)]^2$
covariancia condicional: cov(X,Y/Z) = E(XY / Z) - E(X/Z) E(Y/Z)
Mostrar que:
(a) E(XY / Z) - E(X/Z) E(Y/Z) = E[(X-E(X/Z))(Y - E(Y/Z))/Z)
(b) cov(X,Y) = cov(X,E(Y/Z))
(c) var(Y) = E(var(Y/Z)) + var(E(Y/Z))

nº 1

(1) X_1, X_2, X_3 v.a's i.i.d. exponenciais com f.d.p. $f(x)=e^{-x}$, $x>0$.

$\boxed{U = X_1+X_2+X_3}$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\prod_{i=1}^{3} e^{-x_i}$$

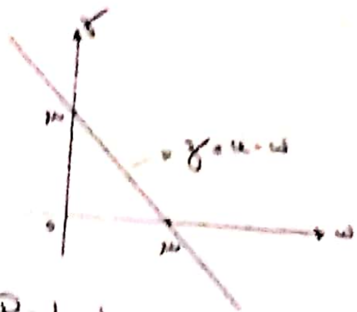
Por Jacobiano

$$\begin{cases} U = X_1+X_2+X_3 \\ W = X_2 \\ Z = X_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = u-w-z \\ x_2 = w \\ x_3 = z \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial w} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial w} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial w} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,W,Z}(u,w,z) = f_{x_1,x_2,x_3}(u-w-z,w,z)\,|J| = e^{-(u-w-z)}e^{-w}e^{-z} = e^{-u}$$

$0<x_1<\infty \rightarrow 0<u-w-z<\infty \rightarrow w-u<-z<\infty+u-w$

$$\begin{cases} -z > w-u \\ -z<+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z<u-w \\ z>-\infty \end{cases} \rightarrow 0<z<u-w$$



então

$$\begin{cases} 0<u<\infty \\ 0<z<u-w \\ 0<w<u \end{cases}$$

Portanto,

$f_{U,W,Z}(u,w,z) = e^{-u}$ $\quad 0<u<\infty$, $0<z<u-w$, $0<w<u$,

$$g(u) = \int_0^u\int_0^{u-w} e^{-u}\,dz\,dw = \int_0^u \left(z e^{-u}\right)\Big|_0^{u-w} dw = \int_0^u (u-w)e^{-u}\,dw = e^{-u}\left[uw-\frac{w^2}{2}\right]\Big|_0^u =$$

$$= e^{-u}\left(u^2-\frac{u^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2}e^{-u} \qquad 0<u<\infty$$

i) $f_{U,X_2}(u,x_2) = f_{U,W}(u,w) = \int_0^{u-w} e^{-u}\,dz = z e^{-u}\Big|_0^{u-w} = (u-w)e^{-u}$

$$\therefore f(u|x_2) = \frac{(u-x_2)e^{-u}}{e^{-x_2}} = (u-x_2)e^{-u+x_2} \qquad u>x_2>0$$

9

ii) $f(u|x_2,x_3) = \dfrac{f(u,x_2,x_3)}{f(x_2,x_3)} = \dfrac{e^{-u}}{e^{-x_2-x_3}} = e^{-u+x_2+x_3}$ $\quad 0<u<\infty$ $\quad u \geq x_2+x_3$

iii) $f(x_2,x_3|u) = \dfrac{f(x_2,x_3,u)}{f(u)} = \dfrac{e^{-u}}{\frac{u^2}{2}e^{-u}} = \dfrac{2}{u^2}$ $\quad x_2+x_3 \leq u < \infty$

② (X,Y) com f.d.p conjuntas

$$f(x,y) = [(1+ax)(1+ay)-a]\,e^{-x-y-axy} \quad 0<x,y<\infty \quad (0\leq a\leq 1)$$

a) Marginal de X

$$g(x) = \int_0^\infty [(1+ax)(1+ay)-a]\,e^{-x-y-axy}\,dy = \int_0^\infty (1+ax)(1+ay)\,e^{-x-y-axy}\,dy - \int_0^\infty a\,e^{-x-y-axy}\,dy$$

$$= (1+ax)\int_0^\infty (1+ay)\,e^{-x-y-axy}\,dy - a\int_0^\infty e^{-x-y-axy}\,dy =$$

$$= (1+ax)\left[\int_0^\infty e^{-x-y-axy}\,dy + \int_0^\infty ay\,e^{-x-y-axy}\,dy\right] - a\int_0^\infty e^{-x-y-axy}\,dy =$$

$$= (1+ax)\left[\underbrace{e^{-x}\int_0^\infty e^{-(1+ax)y}\,dy}_{(1)} + \underbrace{a\,e^{-x}\int_0^\infty y\,e^{-(1+ax)y}\,dy}_{(2)}\right] - \underbrace{a\,e^{-x}\int_0^\infty e^{-(1+ax)y}\,dy}_{(3)}$$

(1) $$e^{-x}\int_0^\infty e^{-(1+ax)y}\,dy = -\frac{e^{-x}}{(1+ax)}\lim_{y\to\infty} e^{-(1+ax)y} + \frac{e^{-x}}{(1+ax)}\lim_{y\to 0} e^{-(1+ax)y} = \frac{e^{-x}}{(1+ax)}$$

(2) $$a\,e^{-x}\int_0^\infty y\,e^{-(1+ax)y}\,dy = ae^{-x}\left[-\frac{y\,e^{-(1+ax)y}}{(1+ax)}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-(1+ax)y}}{(1+ax)}\,dy\right] = \frac{ae^{-x}}{(1+ax)}\left[-\frac{e^{-(1+ax)y}}{(1+ax)}\Bigg|_0^\infty\right]$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ $\begin{cases} u = y \to du = dy \\ dv = e^{-(1+ax)y}\,dy \\ v = -\dfrac{e^{-(1+ax)y}}{(1+ax)} \end{cases}$

$$= ae^{-x}\left(\frac{1}{(1+ax)^2}\right)$$

(3) $$a\,e^{-x}\int_0^\infty e^{-(1+ax)y}\,dy = -\frac{ae^{-x}}{(1+ax)}\lim_{y\to\infty} e^{-(1+ax)y} + \frac{ae^{-x}}{(1+ax)}\lim_{y\to 0} e^{-(1+ax)y} = \frac{ae^{-x}}{(1+ax)}$$

Logo,

$$g(x) = (1+ax)\left[\frac{e^{-x}}{(1+ax)} + \frac{ae^{-x}}{(1+ax)^2}\right] - \frac{ae^{-x}}{(1+ax)} = e^{-x} + \frac{ae^{-x}}{(1+ax)} - \frac{ae^{-x}}{(1+ax)} = e^{-x}, \quad x>0$$

Portanto,

$$g(x) = e^{-x}, \quad x>0$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{[(1+ax)(1+ay)-a]\,e^{-x-y-axy}}{e^{-x}} = \frac{[(1+ax)(1+ay)-a]\,e^{-(1+ax)y-x}}{e^{-x}} =$$

$$= [(1+ax)(1+ay)-a]\,e^{-(1+ax)y} \quad 0<y<\infty$$

$$E(Y|X) = \int_{0}^{\infty} y\, f(y|x)\, dy = \int_0^{\infty} y[(1+ax)(1+ay)-a]\, e^{-(1+ax)y}\, dy =$$

$$= (1+ax)\int_0^{\infty} y(1+ay)\, e^{-y-axy}\, dy - a\int_0^{\infty} y e^{-y-axy}\, dy =$$

$$= (1+ax)\left[\int_0^{\infty} y e^{-y(1+ax)}\, dy + a\int_0^{\infty} y^2 e^{-y(1+ax)}\, dy\right] - a\int_0^{\infty} y e^{-y(1+ax)}\, dy =$$

$$= (1+ax)\left[\frac{1}{(1+ax)^2} + a\left(\cancel{y^2\left(\frac{-e^{-y(1+ax)}}{(1+ax)}\right)}_{\to 0} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(1+ax)}}{(1+ax)} 2y\, dy\right)\right] - a\int_0^{\infty} y e^{-y(1+ax)}\, dy =$$

$$= (1+ax)\left[\frac{1}{(1+ax)^2} + \frac{2a}{(1+ax)}\left(y\frac{e^{-y(1+ax)}}{-(1+ax)} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(1+ax)}}{(1+ax)}\, dy\right)\right] - a\left(\frac{1}{(1+ax)^2}\right)$$

$$= (1+ax)\left[\frac{1}{(1+ax)^2} + \frac{2a}{(1+ax)}\left(-\frac{e^{-y(1+ax)}}{(1+ax)^2}\Big|_0^{\infty}\right)\right] - a\left(\frac{1}{(1+ax)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+ax)} + \frac{2a}{(1+ax)^2} - \frac{a}{(1+ax)^2} = \frac{1+ax+2a-a}{(1+ax)^2} = \frac{1+ax+a}{(1+ax)^2} \quad //$$

$$E(Y^2|X) = \int_0^{\infty} y^2 f(y|x)\, dy = \int_0^{\infty} y^2 (1+ax)(1+ay)\, e^{-y-axy}\, dy - \int_0^{\infty} y^2 a\, e^{-y-axy}\, dy =$$

$$= (1+ax)\left[\int_0^{\infty} y^2 e^{-y(1+ax)}\, dy + a\int_0^{\infty} y^3 e^{-y(1+ax)}\, dy\right] - a\int_0^{\infty} y^2 e^{-y-axy}\, dy =$$

$$= (1+ax)\left[\frac{2}{(1+ax)^3} + a\left(y^3\frac{e^{-y(1+ax)}}{-(1+ax)} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(1+ax)}}{(1+ax)} 3y^2\, dy\right)\right] - a\left(\frac{2}{(1+ax)^3}\right) =$$

$$= (1+ax)\left[\frac{2}{(1+ax)^3} + \frac{3a}{(1+ax)}\frac{2}{(1+ax)^3}\right] - a\left(\frac{2}{(1+ax)^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{(1+ax)^2} + \frac{6a}{(1+ax)^3} - \frac{2a}{(1+ax)^3} = \frac{2(1+ax)+4a}{(1+ax)^3} = \frac{2+2ax+4a}{(1+ax)^3} \quad //$$

Portanto,

$$V(Y|X) = E(Y^2|X) - E^2(Y|X) = \frac{2+2ax+4a}{(1+ax)^3} - \left(\frac{1+ax+a}{(1+ax)^2}\right)^2 \quad //$$

10

③ (X,Y) com f.d.p normal bivariada

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} \quad -\infty < x, y < \infty$$

f.d.p condicional de Y dado $X=x$ $f(Y|X=x)$

Sabemos que a densidade marginal de X é $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Mas para obter a densidade condicional, não é necessário calcular a densidade marginal, nem utilizá-la diretamente na fórmula, pois para x fixo a densidade condicional é proporcional a $f(x,y)$. Por isso podemos tratar x como constante na densidade conjunta, trabalhando $f(x,y)$ como função de y e assim obter a densidade condicional

Portanto, colocando em evidência todo fator que não depende de y, podemos escrever

$$f(y|x) = c(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho, \mu_1, x)\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

em que a constante $c(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho, \mu_1, x)$ é determinada pela equação $\int f(y|x)\,dy = 1$.

É claro que essa densidade condicional é normal. Com efeito, completando o quadrado obtemos

$$f(y|x) = c_1(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho, \mu_1, x)\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\} =$$

$$= c_1(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho, \mu_1, x)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \times \left[y-\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2\right\}$$

Esta é a densidade normal com média $\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-x_1)$ e variância $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. Por isso, escrevemos

$$Y|X=x \sim N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-x_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

Logo,

$E(Y|X) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-x_1)$

$Var(Y|X) = \sigma_2^2(1-\rho^2)$

... dos 3

Por definição, $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$

Por outro lado, temos $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$.

Aplicando a definição de condicional, temos

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}}_{k} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_1)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

$$= k \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} = k \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\}$$

$$= k \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2 - \frac{\sigma_2\rho}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]^2\right\}$$

10

$$\therefore\ Y|X=x \sim N\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

C

4 $X_1, \dots, X_n$ v.a's i.i.d com fdp

$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x>0}$ $\qquad S_j = \sum_{i=1}^{j} x_i \quad j=1,\dots,n \qquad f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

(a) $(S_1, \dots, S_n)$ $\qquad \underbrace{f(s_1,\dots,s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda S_n) \quad 0<S_1<S_2<\dots<S_n}_{\text{objetivo}}$

C

Temos que,

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1 \\ S_2 &= X_1+X_2 \\ S_3 &= X_1+X_2+X_3 \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= X_1+X_2+\dots+X_{n-1} \\ S_n &= X_1+X_2+\dots+X_{n-1}+X_n \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = S_1 \\ X_2 = S_2 - X_1 = S_2 - S_1 \\ X_3 = S_3 - S_2 \\ \vdots \\ X_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial s_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$|J| = 1$

então

$$f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f_{x_1,\dots,x_n}(s_1, s_2-s_1, \dots, s_n-s_{n-1})\,|J| = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) =$$

$$= (\lambda e^{-\lambda s_1})(\lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)})(\lambda e^{-\lambda(s_3-s_2)}) \dots (\lambda e^{-\lambda(s_{n-1}-s_{n-2})})(\lambda e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})}) =$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda s_n} \qquad 0 < s_1 < \dots < s_n$$

(b) .) fdp marginal de S_n

$$f_{S_n}(s_n) = \int\int\dots\int \lambda^n e^{-\lambda s_n}\, ds_1\, ds_2 \dots ds_{n-1}$$

Por outro lado, temos que a soma de variáveis aleatórias exponenciais é uma distribuição Gamma com parâmetros i e λ, ou seja,

$$S_i \sim Gamma(i, \lambda)$$

10

Obs: $Gamma(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

exemplo $x_1, x_2 \sim exp(\lambda)$ $f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i}$ $\quad f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2) \quad x_i > 0$

$S_1 = X_1 \qquad x_1 = s_1$

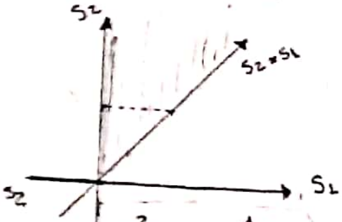
$S_2 = X_1 + X_2 \qquad x_2 = s_2 - s_1$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(s_1, s_2) = f_{x_1 x_2}(s_1, s_2 - s_1)|J| = f_{x_1}(s_1)\, f_{x_2}(s_2 - s_1)\,|J| = \lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)}\, 1 = \lambda^2 e^{-\lambda s_2}$$

$0 < x_1 < \infty \rightarrow 0 < s_1 < \infty$

$0 < x_2 < \infty \rightarrow 0 < s_2 - s_1 < \infty \rightarrow s_1 < s_2 < \infty$



$$f_{S_2}(s_2) = \int_0^{s_2} \lambda^2 e^{-\lambda s_2}\, ds_1 = \lambda^2 e^{-\lambda s_2}\, s_1 \Big|_0^{s_2} = \lambda^2 s_2 e^{-\lambda s_2} \qquad 0 < s_2 < \infty$$

$$f_{S_2}(s_2) = \frac{1}{\Gamma(2)} \lambda^2 s_2^{(2-1)} e^{-\lambda s_2}$$

$\Gamma(2) \rightarrow (2-1)! = 1!$

$$\therefore S_2 \sim Gamma(2, \lambda)$$

Generalizando,

$$S_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

ou também,

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n s_n^{n-1} e^{-\lambda s_n}$$

disso,

$$f_{S_1,\dots,S_{n-1}|S_n=s_n}(s_1,\dots,s_{n-1}|s_n) = \frac{f(s_1,s_2,\dots,s_{n-1},s_n)}{f_{S_n=s_n}(s_n)} = \frac{\cancel{\lambda^n}\,\cancel{e^{-\lambda s_n}}}{\frac{1}{\Gamma(n)}\cancel{\lambda^n}\, s_n^{n-1}\,\cancel{e^{-\lambda s_n}}} = \frac{\Gamma(n)}{s_n^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{s_n^{n-1}}$$

C

Por outro lado, sabemos que a distribuição conjunta das estatísticas de ordem numa amostra aleatória $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ de tamanho $n-1$ de uma distribuição uniforme em $(0,s_n)$ é dada por:

Seja $Y_i \sim \text{Uniforme}(0,s_n)$ $f(y_i) = \frac{1}{s_n}$

Por definição

$$f(Y_{(1)},\dots,Y_{(n-1)}) = (n-1)!\prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{f(y_{(i)})}_{\text{f.d.p de } y} = (n-1)!\underbrace{\left[\frac{1}{s_n}\cdot\frac{1}{s_n}\cdots\frac{1}{s_n}\right]}_{n-1} = \frac{(n-1)!}{s_n^{n-1}}$$

$(y_1,\dots,y_{n-1}) \rightarrow (y_{(1)},\dots,y_{(n-1)})$

Portanto,

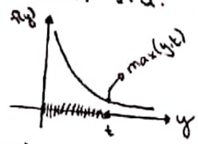
C

$$f(s_1,\dots,s_{n-1}|s_n) = f(Y_{(1)},\dots,Y_{(n-1)}) \qquad 0<s_1<\dots<s_{n-1}$$

$s_1 = Y_{(1)}$ $\quad f(Y_{(1)}) = f(s_1) = \frac{1}{s_n}$
$s_2 = Y_{(2)}$
$\vdots$
$s_{n-1} = Y_{(n-1)}$

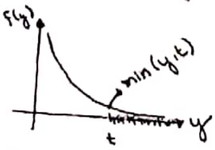
5) Y uma v.a. com distr exponencial com f.d. $F(y) = 1-e^{-y}$, $y>0$ $\quad f(y)=e^{-y}$

$t>0$ (fixo)



$y<t$ $\begin{cases}\min(y,t)=y\\ \max(y,t)=t\end{cases}$

$\underbrace{E(Y|\min(Y,t)) \text{ e } E(Y|\max(Y,t))}_{\text{Achar}}$



$y>t$ $\begin{cases}\min(y,t)=t\\ \max(y,t)=y\end{cases}$

$$E(Y|\min(y,t)) = \int_t^\infty y\,e^{-y}dy = -ye^{-y}\Big|_t^\infty + \int_t^\infty e^{-y}dy = -ye^{-y}\Big|_t^\infty + \left(-e^{-y}\Big|_t^\infty\right) =$$

$u=y$ $\quad du=dy$
$dv=e^{-y}$ $\quad v=-e^{-y}$

$$= te^{-t} - \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y}} + e^{-t} - \lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^{y}} = (t+1)e^{-t}$$

(3)

(6) $Var(Y|Z) = E(Y^2|Z) - [E(Y|Z)]^2$ (variância condicional)

$Cov(X,Y|Z) = E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$ (covariância condicional).

Mostrar que.

(a) $E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z) = E\left[\left(X - E(X|Z)\right)\left(Y - E(Y|Z)\right)\middle| Z\right]$

$$E\left[(X - E(X|Z))(Y - E(Y|Z)) \,|\, Z\right] \overset{\text{distributiva}}{=} E\left[XY - X\,E(Y|Z) - Y\,E(X|Z) + E(X|Z)E(Y|Z) \,\middle|\, Z\right]$$

$$= E(XY|Z) - \cancel{E(X|Z)}E(Y|Z) - E(Y|Z)\cancel{E(X|Z)} + \cancel{E(X|Z)}E(Y|Z)$$

$$= E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$$

(b) $Cov(X,Y) = cov(X, E(Y|Z))$

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y) = E\left(X\,E(Y|Z)\right) - E(X)E\left(E(Y|Z)\right) =$$

$$= Cov(X, E(Y|Z))$$

(c) $Var(Y) = E(Var(Y|Z)) + var(E(Y|Z))$ $\qquad Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$E(Var(Y|Z)) + Var(E(Y|Z)) = E\left(E(Y^2|Z) - [E(Y|Z)]^2\right) + E\left((E(Y|Z))^2\right) - \left[\underbrace{E(E(Y|Z))}_{E(Y)}\right]^2$$

$$= E(E(Y^2|Z)) - \cancel{E[E(Y|Z)]^2} + \cancel{E[E(Y|Z)]^2} - E^2(E(Y|Z))$$

$$= E[E(Y^2|Z)] - E^2[E(Y|Z)] = E(Y^2) - E^2(Y) = Var(Y)$$

10

Ana Paula Jorge

75/80

TEORIA DA PROBABILIDADE
EXERCÍCIOS # 5

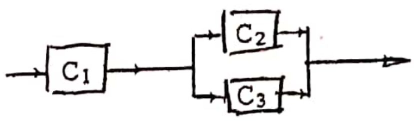
(1) Sejam X_1, X_2, X_3 v.a.s i.i.d. exponenciais com f.d.p. $f(x)=e^{-x}$, $x>0$. Achar a f.d.p. de (U, X_2, X_3) onde $U=X_1+X_2+X_3$ e achar a f.d.p. marginal de U.

(2) Supor que o esquema abaixo representa um sistema de confiabilidade em engenharia. O sistema funciona se o componente C_1 e pelo menos um dos dois componentes C_2 ou C_3 funciona. Seja X_i a v.a. representando o tempo de vida do componente C_i, $i=1,2,3$ e assumir que X_i são v.a.s com distribuição exponencial da forma:

(a) X_1 com f.d.p. $f(x)=\lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)$, $x>0$.

(b) X_2 e X_3 com f.d.p. $g(x)=\lambda_2 \exp(-\lambda_2 x)$, $x>0$ onde $\lambda_1, \lambda_2>0$. Sejam $Y=\max\{X_2, X_3\}$ e $Z=\min\{X_1, Y\}$ representando o tempo de vida do sistema.

(i) Achar a distribuição do tempo de vida Z do sistema.
(ii) Achar E(Z) da distribuição de Z, e tambem, achar E(Z) diretamente da distribuição de (X_1, X_2, X_3), verificando a concordancia dos resultados.



(3) Sejam X_1, X_2 v.a.s i.i.d. exponenciais com f.d.p. $f(x)=\lambda \exp(-\lambda x)$, $x>0$. Achar a f.d.p. da v.a. $Y=X_1/X_2$.

(4) Sejam X_1, X_2 v.a.s i.i.d. normais N(0,1) com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$, $-\infty<x<\infty$.

(a) Achar a f.d.p. de $Y=X_1^2/X_2^2$.

(b) Achar a f.d.p. bivariada de $U=X_1^2+X_2^2$ e $V=X_1/X_2$, mostrando que U e V são v.a.s independentes e achar suas f.d.p.s marginais.

(c) Definir as v.a.s R e θ pelas relações $X_1=R\cos\theta$ e $X_2=R\operatorname{sen}\theta$, $R\geq 0$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. Achar a f.d.p. de R e θ, mostrando que R e θ são v.a.s independentes e achar suas f.d.p.s marginais.

(d) Achar a f.d.p. de $Z=X_1X_2/\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ e identificar Z como tendo uma distribuição normal.

(5) Sejam X_1,X_2 v.a.s i.i.d. $N(0,1)$ com f.d.p. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2), -\infty<x<\infty$.
Achar a f.d.p. conjunta de $Y_1=X_1\cos X_2, Y_2=X_1 \operatorname{sen} X_2$,assim como de suas distribuições marginais.

(6) Sejam X_1,X_2 v.a.s com f.d.p. conjunta $f(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}, x_1^2+x_2^2 \leq 1$ e zero e.o.p.Achar a f.d.p. de $Y=X_1^2+X_2^2$.

(7) Sejam X_1,X_2,X_3 v.a.s i.i.d. exponenciais com f.d.p. $f(x)=\exp(-x), x>0$.Achar a f.d.p. conjunta de $W_1=Y_1, W_2=Y_2-Y_1$, $W_3=Y_3-Y_2$,onde $Y_1<Y_2<Y_3$ são as estatísticas de ordem de X_1,X_2,X_3.

(8) Sejam X_1,X_2 v.a.s i.i.d. uniformes em $(0,1)$.Definir as v.a. Y_1 e Y_2 por,

$Y_1=(-2\log(X_1))^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi X_2)$

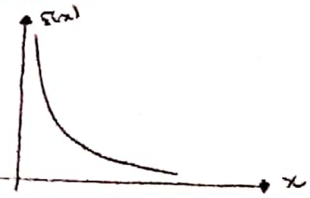
$Y_2=(-2\log(X_1))^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(2\pi X_2)$

Achar a f.d.p. conjunta de Y_1 e Y_2 e mostrar que Y_1 e Y_2 são v.a.s i.i.d. $N(0,1)$.Esta transformação é um dos métodos para gerar v.a.s normais de v.a.s uniformes sugerido por Box e Muller (1958),Annals of Math. Stat.,pp 610-611.

Lista 5

(1) X_1, X_2, X_3 v.a's i.i.d com f.d.p exponencial. $X_i \sim exp(1)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ 0 & , c.o.p \end{cases}$$



$$f(x_1,x_2,x_3) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i)$$

Seja $U = X_1 + X_2 + X_3$, achar a f.d.p de (U, X_2, X_3)

Sejam

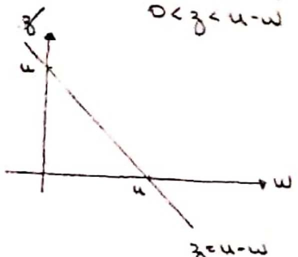
$$\begin{cases} U = X_1 + X_2 + X_3 \\ W = X_2 \\ Z = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = U - W - Z \\ X_2 = W \\ X_3 = Z \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{U,W,Z}(u,w,z) = f_{X_1,X_2,X_3}(u-w-z, w, z)\,|J| = e^{-u+w+z}\, e^{-w}\, e^{-z} = e^{-u}, \quad 0<u<\infty;\ 0<w<u;\ 0<z<u-w$$

$0<z<u-w$

Portanto,

$$f(u,x_1,x_2) = f(u,w,z) = e^{-u} \quad 0<u<\infty;\ 0<w<u;\ 0<z<u-w$$

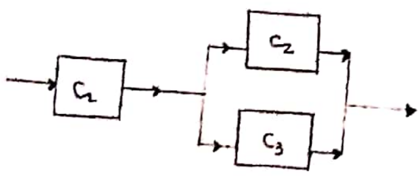


$$g(u) = \int_0^u \int_0^{u-w} e^{-u}\, dz\, dw = \int_0^u \left(z e^{-u} \Big|_0^{u-w} \right) dw = \int_0^u (u-w) e^{-u}\, dw = \left(uw - \frac{w^2}{2} \right) e^{-u} \Big|_0^u = \left(u^2 - \frac{u^2}{2} \right) e^{-u} =$$

$$= \frac{u^2}{2} e^{-u} \quad 0<u<\infty$$

C 10

(2) Sistemas de Confiabilidade



O sistema funciona se o componente C_1 e pelo menos um dos dois componentes C_2 ou C_3 funciona.

X_i: a v.a representando o tempo de vida da variável C_i; $i=1,2,3$

a) X_1 com f.d.p $f(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$, $x>0$ $\quad X_i \to$ são exponenciais

b) X_2 e X_3 com f.d.p $f(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$, $x>0$ $\qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$Y = \max\{X_2, X_3\}$ $\quad Z = \min\{X_1, Y\}$ (tempo de vida do sistema)

(1) Distribuição do tempo de vida Z.

Sejam X_2, X_3, v.a's em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, então $Y_n = \max(X_2, X_3)$. Logo,

$$f_Y(y) = n\,F_X^{n-1}(y)\,f_X(y)$$
$$= 2\left[1 - e^{\lambda_2 y}\right]\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$$
$$= 2\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - 2\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} e^{-\lambda_2 y}$$
$$= 2\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\left(1 - e^{-\lambda_2 y}\right) \qquad 0<y<\infty$$

$$Z = \min\{X_1, Y\}$$

$$P\{Z<z\} = P\{\min(X_1,Y)<z\} = 1 - P\{\min(X_1,Y) \geq z\} = 1 - P\{X_1 \geq z,\ Y \geq z\} =$$
$$= 1 - \Big[\big(1 - \underbrace{P\{X_1<z\}}_{(2)}\big)\big(1 - \underbrace{P\{Y<z\}}_{(1)}\big)\Big] \qquad (*)$$

(1) $$F_Y(z) = P\{Y<z\} = \int_0^z 2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)dt = 2\lambda_2 \int_0^z e^{-\lambda_2 t} - e^{-2\lambda_2 t}\,dt =$$
$$= 2\lambda_2 \left\{ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{-\lambda_2}\Big|_0^z + \frac{e^{-2\lambda_2 t}}{2\lambda_2}\Big|_0^z \right\} = -2e^{-\lambda_2 t}\Big|_0^z + e^{-2\lambda_2 t}\Big|_0^z =$$
$$= 2 - 2e^{-\lambda_2 z} + e^{-2\lambda_2 z} - 1 = 1 - 2e^{-\lambda_2 z} + e^{-2\lambda_2 z} = 1 - e^{-\lambda_2 z}\left(2 - e^{-2\lambda_2 z}\right)$$

(2) $$F_{X_1}(z) = P\{X_1<z\} = 1 - e^{-\lambda_1 z}$$

Então, (*)

$$= 1 - \Big[\big(1 - (1 - e^{-\lambda_1 z})\big)\big(1 - (1 - e^{-\lambda_2 z})(2 - e^{-\lambda_2 z})\big)\Big]$$
$$= 1 - \left[e^{-\lambda_1 z}\, e^{-\lambda_2 z}\left(2 - e^{-\lambda_2 z}\right)\right] = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} + e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}$$

Portanto, a fdp de z é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}P\{Z<z\} = 2(\lambda_1+\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} - (\lambda_1+2\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}$$
$$= 2(\lambda_1+\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} - (\lambda_1+2\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}$$

(ii) $E(Z)$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\,f(z)\,dz = \int_0^{\infty} z\,2(\lambda_1+\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} - z(\lambda_1+2\lambda_2)\,e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}\,dz =$$
$$= 2(\lambda_1+\lambda_2)\underbrace{\int_0^{\infty} z\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}\,dz}_{(1)} - (\lambda_1+2\lambda_2)\underbrace{\int_0^{\infty} z\,e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}\,dz}_{(2)} = \qquad (*)$$

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}\,dz = -z\,\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}}{(\lambda_1+\lambda_2)}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)}\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}\,dz =$$

$z \quad du = dz$

$, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}$

$-\dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}}{(\lambda_1+\lambda_2)}$

$$= \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}}{-(\lambda_1+\lambda_2)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

$$(2)\quad \int_0^{\infty} z\,e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)z}\,dz = \frac{1}{(\lambda_1+2\lambda_2)^2}$$

10

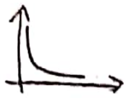
Continuando, em (*)

$$E(Z) = 2\cancel{(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^{\cancel{2}}} - \cancel{(\lambda_1+2\lambda_2)}\,\frac{1}{(\lambda_1+2\lambda_2)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{(\lambda_1+\lambda_2)} - \frac{1}{(\lambda_1+2\lambda_2)} = \frac{2(\lambda_1+2\lambda_2)-(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)} =$$

$$= \frac{2\lambda_1+4\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)} = \frac{\lambda_1+3\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2)}$$

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} = \lambda_1(\lambda_2)^2 e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)x}$$

) X_1, X_2 v.as i.i.d. exponenciais



$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

Como X_1, X_2 são independentes a conjunta é dada por

$$f(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_1}\,\lambda e^{-\lambda x_2} = \lambda^2 e^{-(x_1+x_2)\lambda}$$

Sejam

$$Y = \frac{X_1}{X_2}, \quad Z = X_2 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = YZ \\ X_2 = Z \end{cases}$$

Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z$$

A conjunta de Y e Z é dada por

$$\begin{cases} 0 < x_1 < \infty \\ 0 < x_2 < \infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < yz < \infty \\ 0 < z < \infty \end{cases}$$

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_{X_1,X_2}(yz, z)\,|J| = \lambda^2 z e^{-(yz+z)\lambda}$$

Assim, a fdp. de Y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{Y,Z}(y,z)\,dz = \int_0^\infty \lambda^2 z e^{-(yz+z)\lambda}\,dz = \lambda^2 \int_0^\infty z\, e^{-(y+1)\lambda z}\,dz =$$

utilizando integração por partes

$u = z \rightarrow du = dz$

$dv = e^{-(y+1)\lambda z} \rightarrow v = -\dfrac{e^{-(y+1)\lambda z}}{(y+1)\lambda}$

$$= \lambda^2 \left[\cancel{-\frac{z}{(y+1)\lambda} e^{-(y+1)\lambda z} \Big|_0^\infty} + \frac{1}{(y+1)\lambda} \int_0^\infty e^{-(y+1)\lambda z}\,dz \right]$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{1}{(y+1)\lambda} \cdot \frac{-e^{-(y+1)\lambda z}}{(y+1)\lambda} \Big|_0^\infty \right] =$$

$$= \frac{1}{(y+1)^2}\left[e^0 - \lim_{z\to\infty} \cancel{e^{-(y+1)\lambda z}} \right] = \frac{1}{(y+1)^2}, \quad 0 < y < \infty$$

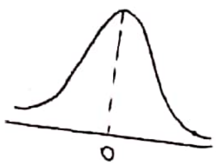
Portanto, a fdp de $Y = \frac{X_1}{X_2}$ é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2} \quad 0 < y < \infty$$

(b)

(4) X_1, X_2 vas iid normais $X_i \sim N(0,1)$

A fdp $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad -\infty < x < \infty$



(a) fdp de $Y = \dfrac{X_1^2}{X_2^2}$

$$X_1 \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_1 - 0}{\sqrt{1}}\right)^2 = X_1^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

$$X_2 \sim N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_2 - 0}{\sqrt{1}}\right)^2 = X_2^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

Por outro lado, sabemos que se U e V seguem uma distribuição χ^2 com m e n graus de liberdade respectivamente a estatística

$$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F_{(m,n)}$$

Logo,

$$Y = \frac{X_1^2}{X_2^2} \sim F_{(1,1)}$$

$$\cdots \left(\frac{1}{1+v^2}\right)^{1/2} \frac{1}{1+v^2}\left(\frac{u}{1+v^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} v^2 u \left(\frac{u}{1+v^2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{1+v^2} + \frac{uv^2}{2}\left(\frac{u}{1+v^2}\right)^{-1} \frac{1}{1+v^2} =$$

$$\frac{1}{2(1+v^2)} - \frac{1}{2} v^2 \cancel{u} \left(\frac{\cancel{1+v^2}}{\cancel{u}}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{1+v^2}} + \frac{\cancel{u} v^2}{2}\left(\frac{\cancel{1+v^2}}{\cancel{u}}\right) \frac{1}{\cancel{1+v^2}} = \frac{1}{2(1+v^2)} - \frac{\cancel{v^2}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{v^2}}{2} = \frac{1}{2(1+v^2)}$$

Portanto,

$$|J| = \frac{1}{2(1+v^2)}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X_1,X_2}\left(\pm v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}, \pm\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right)|J|$$, isto é,

$$f_{U,V}(u,v) = \left[f\left(v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right) f\left(\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right) + f\left(-v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right) f\left(-\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right)\right]|J| =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2u}{2(1+v^2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{u}{(1+v^2)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2u}{2(1+v^2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 \frac{u}{1+v^2}}\right] \left|\frac{1}{2(1+v^2)}\right| =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-v^2u-u}{2(1+v^2)}} + \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-v^2u-u}{2(1+v^2)}}\right] \left|\frac{1}{2(1+v^2)}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi(1+v^2)}\left[\exp\left\{-\frac{u}{2}\frac{(\cancel{v^2+1})}{(\cancel{1+v^2})}\right\} + \exp\left\{-\frac{u}{2}\frac{(\cancel{v^2+1})}{(\cancel{1+v^2})}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+v^2)}\exp\left\{-\frac{u}{2}\right\} = \frac{e^{-u/2}}{2\pi(1+v^2)} = \frac{1}{\Gamma(2/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/2} u^{2/2-1} e^{-u/2} \cdot \frac{1}{\pi 1\left\{1+\left[\frac{v-0}{1}\right]^2\right\}}$$

$$= f_U(u) f_V(v)$$

Em que, $U \sim \chi^2_{(2)}$ e $V \sim \text{Cauchy}(\mu=0, \beta=1)$, implicando U e V independentes pois,

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$$

//

outras formas dos cenários ver item (a)

X_1 e X_2 são independentes

$$f(x_1,x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\right)$$

$$(yw)^{\frac{1}{2}\prime} = \frac{1}{2}w(yw)^{-1/2} = \frac{w}{2\sqrt{yw}}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x_1^2}{x_2^2} \\ w = x_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{yw} \\ x_2 = \pm\sqrt{w} \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} \dfrac{w}{2\sqrt{yw}} & \dfrac{y}{2\sqrt{yw}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{w}} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{4\sqrt{y}}\right|$$

$$f_{Y,W}(y,w) = f_{X_1,X_2}(\pm\sqrt{yw},\pm\sqrt{w})\,|J| = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{4\sqrt{y}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}(yw+w)\right\} = \frac{1}{8\pi\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{2}(y+1)w}$$

$-\infty < y < \infty$
$-\infty < w < \infty$

A marginal de Y

$$f_Y(y) = \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty y^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(y+1)w}\,dw = \frac{1}{8\pi}y^{-1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(y+1)w}\,dw = \frac{1}{8\pi}y^{-1/2}\left(\left.\frac{e^{-\frac{1}{2}(y+1)w}}{-\frac{1}{2}(y+1)}\right|_0^\infty\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{(y+1)}\left(1-\lim_{w\to\infty}\underbrace{e^{-\frac{1}{2}(y+1)w}}_{0}\right) = \frac{1}{4\pi\sqrt{y}}\,\frac{1}{(y+1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}\left(\frac{1}{1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y^{\frac{1-2}{2}}}{\left[1+\frac{1}{1}y\right]^{\frac{1+1}{2}}}$$

Como $X_1 = \pm\sqrt{yw}$ e $X_2 = \pm\sqrt{w}$, tem que somar 4 vezes

Portanto,

$$f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}\left(\frac{1}{1}\right)^{1/2}\frac{y^{\frac{1-2}{2}}}{\left[1+\frac{1}{1}y\right]^{\frac{1+1}{2}}} \sim F_{(1,1)}$$

(b) Achar a f.d.p. bivariada de $U = X_1^2 + X_2^2$ e $V = \frac{X_1}{X_2}$, mostrando que U e V são v.a's independentes e achar suas f.d.p.s marginais.

$$\left.\begin{aligned} X_1 \sim N(0,1) &\rightarrow X_1^2 \sim \chi^2_{(1)} \\ X_2 \sim N(0,1) &\rightarrow X_2^2 \sim \chi^2_{(1)} \end{aligned}\right\} U = X_1^2 + X_2^2 \sim \chi^2_{(2)}$$

$$\begin{cases} U = X_1^2 + X_2^2 & \rightarrow U = (X_2V)^2 + X_2^2 \rightarrow U = (1+V^2)X_2^2 \rightarrow X_2 = \pm\sqrt{\dfrac{U}{1+V^2}} \\ V = \dfrac{X_1}{X_2} & \rightarrow X_1 = X_2V \rightarrow X_1 = \pm V\sqrt{\dfrac{U}{1+V^2}} \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{U}{1+V^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{1+V^2} & -\frac{U}{2}\left(\frac{U}{1+V^2}\right)^{-1/2}2V \\ \frac{V}{2}\left(\frac{U}{1+V^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{1+V^2} & \sqrt{\frac{U}{1+V^2}} - \frac{VU}{2}\left(\frac{U}{1+V^2}\right)^{-1/2}2V \end{vmatrix} =$$

definir uma v.a's pelas relações $X_1 = R\cos\theta$ $\quad R \geq 0$

$X_2 = R\,\text{sen}\,\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x_1 = R\cos\theta$

$x_2 = R\,\text{sen}\,\theta$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial R} & \frac{\partial x_1}{\partial \cos\theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial R} & \frac{\partial x_2}{\partial \text{sen}\,\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} = R\cos^2\theta + R\,\text{sen}^2\theta = R\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1} = R$$

$$f(R,\theta) = f_{X_1}(R\cos\theta) \cdot f_{X_2}(R\,\text{sen}\,\theta)\,|J| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2\cos^2\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2\text{sen}^2\theta}{2}} \cdot R =$$

$$= R\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} = R\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}}$$

$$f_R(R) = \int_0^{2\pi} R\frac{1}{2\pi} e^{-R^2/2}\, d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} R e^{-R^2/2} = R e^{-R^2/2} \quad R \geq 0$$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^\infty \frac{R}{2\pi} e^{-R^2/2}\, dR = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty R e^{-R^2/2}\, dR = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-u}\, du = -\frac{1}{2\pi} e^{-R^2/2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \lim_{R\to\infty} e^{-R^2/2}\right) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$u = \frac{R^2}{2} \rightarrow du = R\,dR$

Então:

$$f(R,\theta) = R\frac{1}{2\pi} e^{-R^2/2} = R e^{-R^2/2} \frac{1}{2\pi} = f_R(R)\, f_\theta(\theta)$$

Portanto, R e θ são independentes.

d) $Z = \dfrac{X_1 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$ $\qquad X_1 = R\cos\theta$

$X_2 = R\,\text{sen}\,\theta$

$$Z = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{R\cos\theta\, R\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\,\text{sen}\,\theta)^2}} = \frac{R^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{R^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}} = \frac{R^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{R^2}} = R\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$$

$$= \frac{R}{2}\underbrace{2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta} = \frac{R}{2}\,\text{sen}\,2\theta$$

então,

$$\begin{cases} Z = \frac{R}{2}\,\text{sen}\,2\theta \\ W = \frac{R}{2}\cos 2\theta \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} 2\frac{R}{2}\cos 2\theta & \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta \\ -2\frac{R}{2}\,\text{sen}\,2\theta & \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos 2\theta & \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta \\ -R\,\text{sen}\,2\theta & \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{vmatrix} = \frac{R}{2}(\cos^2 2\theta + \text{sen}^2 2\theta) = \frac{R}{2}$$

$$f(R,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{R}{2}\text{sen}\,2\theta)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{R}{2}\cos 2\theta)^2}{2}} \frac{R}{2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(\frac{R}{2})^2(\cos^2 2\theta + \text{sen}^2 2\theta)} \frac{R}{2} =$$

$$= \frac{R}{4\pi} e^{-(\frac{R}{2})^2}$$

4 8

(5) X_1, X_2 v.a.s iid $N(0,1)$ com f.d.p.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 \cos X_2 \\ Y_2 = X_1 \operatorname{sen} X_2 \end{cases} \rightarrow X_1 = \frac{Y_1}{\cos X_2}$$

$$\rightarrow Y_2 = \frac{Y_1}{\cos X_2} \operatorname{sen} X_2 \rightarrow Y_2 = Y_1 \operatorname{tg} X_2 \rightarrow X_2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) = w$$

$$Y_1^2 + Y_2^2 = (X_1 \cos X_2)^2 + (X_1 \operatorname{sen} X_2)^2 = X_1^2 (\cos^2 X_2 + \operatorname{sen}^2 X_2) = X_1^2$$

$$\rightarrow X_1^2 = Y_1^2 + Y_2^2 \rightarrow X_1 = \pm\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} = \pm q$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \\ \frac{-y_2}{y_1^2+y_2^2} & \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} \end{vmatrix} = \frac{\cancel{y_1^2+y_2^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\,(\cancel{y_1^2+y_2^2}) + \sqrt{y_1^2+y_2^2}\,(\cancel{y_1^2+y_2^2})} = \frac{1}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$$

Logo, a f.d.p de Y_1 e Y_2

$$f(y_1, y_2) = \{f(w, q) + f(w, -q)\}\,|J| =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}} \sqrt{y_1^2+y_2^2} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}} \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right\} \frac{1}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2}} =$$

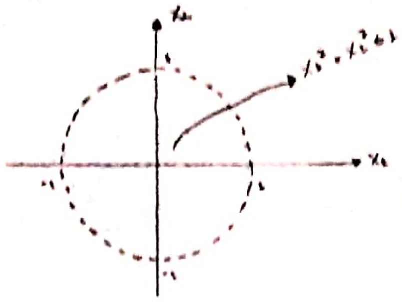
10

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1^2+y_2^2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}$$

Portanto, as distribuições marginais de Y_1 e Y_2 são independentes e $N(0,1)$

... v.a.s com f.d.p. conjunta

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & , x_1^2+x_2^2\le 1\\ 0 & , \text{c.o.p}\end{cases}$$



$= x_1^2+x_2^2$ (*)

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \to tg\,w=\frac{x_2}{x_1} \to x_2=x_1\,tg\,w$

...substituindo x_2 em (*) temos: $y=x_1^2+(x_1\,tg\,w)^2 \Rightarrow y=x_1^2+x_1^2\,tg^2w \Rightarrow y=(1+tg^2w)x_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2=\frac{y}{1+tg^2w} \Rightarrow x_1^2=\frac{y}{sec^2w} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{y}{sec^2w}} \Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{y}}{\underbrace{sec\,w}_{\frac{1}{cos\,w}}}$

$\Rightarrow x_1=\sqrt{y}\cos w$

e $x_2=x_1\,tg\,w \to x_2=\sqrt{y}\cos w\,tg\,w=\sqrt{y}\cos w\left(\frac{sen\,w}{\cos w}\right)=\sqrt{y}\,sen\,w$

...ogo,

$$\begin{cases}x_1=\sqrt{y}\cos w\\ x_2=\sqrt{y}\,sen\,w\end{cases} \qquad |J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial w}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos w & -\sqrt{y}\,sen\,w\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}sen\,w & \sqrt{y}\cos w\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cos w\cdot\sqrt{y}\cos w+\frac{1}{2\sqrt{y}}sen\,w\cdot-\sqrt{y}\,sen\,w=\frac{1}{2}\underbrace{(\cos^2w+sen^2(w))}_{1}=\frac{1}{2}$$

$$f(y,w)=f_{x_1,x_2}(\sqrt{y}\cos w,\sqrt{y}\,sen\,w)\,|J|=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}$$

C

$x_1^2+x_2^2\le 1 \to (\sqrt{y}\cos w)^2+(\sqrt{y}\,sen\,w)^2\le 1$

$y\cos^2w+y\,sen^2w\le 1 \to y\underbrace{(\cos^2w+sen^2w)}_{1}\le 1 \to y\le 1 \to \begin{matrix}0\le y\le 1\\ 0\le w\le 2\pi\end{matrix}$

Portanto,

$$f(y,w)=\frac{1}{2\pi} \qquad \begin{matrix}0\le y\le 1\\ 0\le w\le 2\pi\end{matrix}$$

As marginais de Y e W:

10

$$f_Y(y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\,dw=\frac{w}{2\pi}\Big|_0^{2\pi}=1 \qquad 0\le y\le 1$$

C

$$f_W(w)=\int_0^1\frac{1}{2\pi}\,dy=\frac{y}{2\pi}\Big|_0^1=\frac{1}{2\pi} \qquad 0\le w\le 2\pi$$

(7) X_1, X_2, X_3 va's i.i.d exponenciais com f.d.p.

$f(x) = e^{-x}, \; x>0$

$$\begin{cases} W_1 = Y_1 \\ W_2 = Y_2 - Y_1 \\ W_3 = Y_3 - Y_2 \end{cases}$$

em que $Y_1 < Y_2 < Y_3$ são estatísticas de ordem de X_1, X_2, X_3.

A função densidade conjunta para (Y_1, Y_2, Y_3) assumindo X_1, X_2, X_3 com f.d.p. $f(x)$ independentes é dada por:

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 3! \prod_{i=1}^{3} f(y_i) & , \; y_1 < y_2 < y_3 \\ 0 & \text{c.o.p} \end{cases}$$

Logo,

$$f(y_1, y_2, y_3) = 3! \, e^{-y_1 - y_2 - y_3} = 6 e^{-y_1 - y_2 - y_3} \qquad 0 < y_1 < y_2 < y_3 < \infty$$

Assim,

$$\begin{cases} Y_1 = W_1 \\ Y_2 = W_1 + W_2 \\ Y_3 = W_1 + W_2 + W_3 \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

7

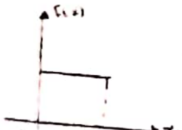
$0 < W_1 < W_2 + W_3 < W_1 + W_2 + W_3 <$

Então,

$$f(w_1, w_2, w_3) = f_{Y_1, Y_2, Y_3}(w_1, w_1 + w_2, w_1 + w_2 + w_3)|J| = 6 e^{-w_1 - (w_1 + w_2) - (w_1 + w_2 + w_3)} |1| =$$

$$= 3e^{-3w_1} \cdot 2e^{-2w_2} \cdot e^{-w_3} \qquad 0 < (w_1, w_2, w_3) < \infty$$

(8) X_1, X_2 vas i.i.d uniformes em $(0,1)$.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \; 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \; \text{c.o.p.} \end{cases}$$

$Y_1 = \sqrt{(-2 \log(X_1))} \cos(2\pi X_2)$

$Y_2 = \sqrt{(-2 \log(X_1))} \operatorname{sen}(2\pi X_2)$

$$\begin{cases} X_1 = e^{\frac{-Y_1^2 - Y_2^2}{2}} \\ X_2 = \dfrac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)}{2\pi} \end{cases}$$

Elevando Y_1 e Y_2 ao quadrado, temos

$Y_1^2 = -2 \log(X_1) \cos^2(2\pi X_2)$ (1)

$Y_2^2 = -2 \log(X_1) \operatorname{sen}^2(2\pi X_2)$ (2)

Somando (1) e (2) temos

$Y_1^2 + Y_2^2 = -2 \log(X_1) \left[\cos^2(2\pi X_2) + \operatorname{sen}^2(2\pi X_2)\right]$

$-\left(\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2}\right) = \log X_1 \rightarrow X_1 = e^{\frac{-Y_1^2 - Y_2^2}{2}}$

$e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}}$; $\frac{\partial x_1}{\partial y_2} = y_2 e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}}$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi}(\text{arctg}(u))'\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1+u^2}\,\frac{y_2}{y_1^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{y_2^2}{y_1^2}}\,\frac{y_2}{y_1^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cancel{y_1^2}}{y_1^2+y_2^2}\right)\frac{y_2}{\cancel{y_1^2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_2}{y_1^2+y_2^2}\right)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{1}{2\pi}(\text{arctg}(u))'\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\right)\cdot\frac{1}{y_1} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}\right)$$

Logo,

$$|J| = \begin{vmatrix} y_1 e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}} & y_2 e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}} \\ \frac{y_2}{2\pi(y_1^2+y_2^2)} & \frac{y_1}{2\pi(y_1^2+y_2^2)} \end{vmatrix} = \frac{y_1^2}{2\pi(y_1^2+y_2^2)}\,e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}} + \frac{y_2^2}{2\pi(y_1^2+y_2^2)}\,e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}}}{2\pi\cancel{(y_1^2+y_2^2)}}\cancel{(y_1^2+y_2^2)} = \frac{1}{2\pi}\,e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}}$$

Logo,

$$g(y_1,y_2) = f_{X_1X_2}\left(e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}},\ \frac{\text{arctg}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{2\pi}\right)|J| = 1\cdot\frac{1}{2\pi}\,e^{\frac{-y_1^2-y_2^2}{2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y_1^2}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y_2^2}{2}}\right) = g_{Y_1}(y_1)\cdot g_{Y_2}(y_2).$$

$\therefore\ Y_1 \sim N(0,1)$ e $Y_2 \sim N(0,1)$ e assim Y_1 e Y_2 são iid $N(0,1)$.

C 10

6ª Folha

Ana Paula Jorge

61/70

TEORIA DAS PROBABILIDADES
EXERCÍCIOS # 6

(1) Sejam X_1 e X_2 v.a.s independentes com $X_i \sim b(n_i, \frac{1}{2}), i=1,2$. Qual é a f.g.p. de $X_1-X_2+n_2$?

(2) Uma caixa contem N bolas identicas numeradas de 1 a N. Dessas bolas, n são retiradas simultâneamente. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ representando os numeros das n bolas selecionadas. Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Achar $var(S_n)$.

(3) Provar que os termos $P(X=k)=e^{-\lambda}\lambda^k/k!, k=0,1,2,\ldots$ da f.g.p. Poisson atingem seu maximo quando k é o maior inteiro $\leq \lambda$.

(4) Mostrar que,

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, tal que $np=\lambda$ permanece constante.

(5) Mostrar que,

$\binom{N}{n}^{-1} \binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ quando $N \to \infty$.

(6) Sejam X e Y v.a.s geométricas independentes. Mostrar que $\min(X,Y)$ e $X-Y$ são independentes.

(7) Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_{k-1})$ com uma distribuição multinomial com parâmetros $n, p_1, p_2, \ldots p_{k-1}$. Escrever,

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \text{ onde } p_k = 1-p_1-p_2-\ldots-p_{k-1} \text{ e } X_k = n - X_1 - \ldots - X_{k-1}.$$

Achar $E(Y)$ e $var(Y)$.

X_1 e X_2 v.a.s independentes

$X_i \sim b(n_i, \frac{1}{2})$, $i=1,2$

$P(X_i = k) = \binom{n_i}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n_i - k} = \binom{n_i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_i}$

$\underbrace{\text{Qual é a f.g.p. de } X_1 - X_2 + n_2 ?}_{\text{OBJETIVO}}$

A função geradora de probabilidade (f.g.p.) de uma distribuição binomial é dada por:

$$\mathbb{P}_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (ps + (1-p))^n = (ps+q)^n \text{ ou } (1-p(1-s))^n \ |s| \leq 1$$

Assim,

$$\mathbb{P}_Y(s) = E(s^Y) = E(s^{X_1 - X_2 + n_2}) = E(s^{X_1} s^{-X_2} s^{n_2}) = E(s^{X_1})E(s^{-X_2})\underbrace{E(s^{n_2})}_{\text{constante}} = \ X_1 \text{ e } X_2 \text{ são binomiais}$$

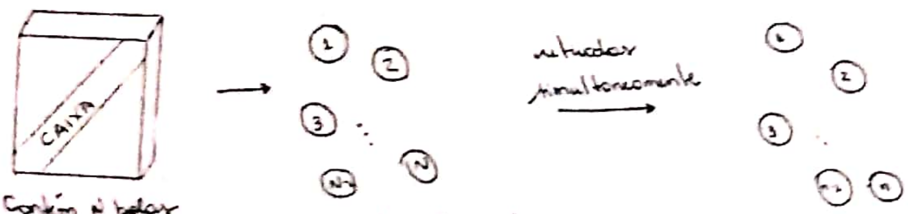
$$= (ps+q)^{n_1}\left(\frac{p}{s}+q\right)^{n_2} s^{n_2} = \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}\right)^{n_2} s^{n_2} = \left(\frac{1}{2}(s+1)\right)^{n_1}\left(\left(\frac{s+1}{2s}\right)s\right)^{n_2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(s+1)\right)^{n_1}\left(\frac{1}{2}(s+1)\right)^{n_2} = \left(\frac{1}{2}(s+1)\right)^{n_1+n_2} = \left(\underbrace{\frac{1}{2}s}_{ps} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{q}\right)^{n_1+n_2}$$

10

$\therefore X_1 - X_2 + n_2 \sim \text{binomial}(n_1+n_2, \frac{1}{2})$

②



Contém N bolas idênticas

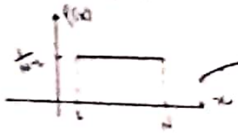
numeradas de 1 a N

retiradas simultaneamente

$\underbrace{X_1, X_2, \ldots, X_n}_{\text{nº das n bolas selecionadas}}$ $\qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

9

$X \sim U(1, N)$ $\quad$ então $V(X) = \frac{N^2-1}{12}$



V.A DISCRETA

$P(X=x) = \frac{1}{N}$

Objetivo → Achar $\text{var}(S_n)$

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V\left(\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^2 V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = n^2 V(\bar{X}) =$$

$$= n^2\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{V(X)}{n} = n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)V(X) = n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{N^2-1}{12}$$

③ $P\{X=k\} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$ (Poisson)

$$P_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s\lambda)^k}{k!}} = e^{-\lambda}e^{s\lambda} = e^{-\lambda(1-s)}$$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k+1)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{\lambda^k (k+1)\cancel{k!}}{\lambda^{k+1}\cancel{k!}} = \frac{k+1}{\lambda}$$

Se $\dfrac{k+1}{\lambda} > 1$ é crescente, portanto $k+1 > \lambda$

Se $\dfrac{k+1}{\lambda} = 1$ é ponto de máximo, portanto $k+1 = \lambda \rightarrow k = \lambda - 1$

Se $\dfrac{k+1}{\lambda} < 1$ é decrescente, portanto $k+1 < \lambda$

10

Portanto,

$P(X=k)$ atinge seu ponto de máximo quando k é o maior inteiro $\leq \lambda$.

④ $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \longrightarrow \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $\begin{matrix} n\to\infty \\ p\to 0\end{matrix}$ tal que $np=\lambda$ permanece constante

$np = \lambda \longrightarrow p = \dfrac{\lambda}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\,\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\frac{\lambda}{\cancel{n}}}{\frac{n-\lambda}{\cancel{n}}}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n-\lambda)^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underbrace{(n-\lambda)\ldots(n-\lambda)}_{k\text{ vezes}}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

10

Aplicando L'Hospital e sabendo que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda}$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\binom{N}{n}^{-1}\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x} \to \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{quando} \quad N \to \infty$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\frac{(Np)!}{x!(Np-x)!}\frac{(Nq)!}{(n-x)!(Nq-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \lim_{N\to\infty} \frac{n!(N-n)!(Np)!(Nq)!}{N!x!(Np-x)!(n-x)!(Nq-n+x)!} =$$

$$= \binom{n}{x} \lim_{N\to\infty} \frac{(N-n)(N-n-1)\dots 1}{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)} \cdot \frac{Np(Np-1)\dots(Np-x+1)}{(Np-x)(Np-x-1)\dots 1} \cdot \frac{Nq(Nq-1)\dots(Nq-(n-x)+1)}{(Nq-(n-x))\dots 1}$$

Aplicando L'Hospital

$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \lim_{N\to\infty} 1 = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

10

⑥ X e Y v.a.s geométricas independentes

Objetivo é mostrar que: $\left.\begin{matrix}\min(x,y)\\(x-y)\end{matrix}\right\}$ independentes

Seja X: o nº de fracassos até o 1º sucesso, então

$P(X=x) = q^x p \qquad x=0,1,\dots$

$$\begin{cases} Z=\min(x,y) & z=\{0,1,2,\dots\} \\ W=x-y & w=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}\end{cases}$$

$P\{Z=m, W=n\} = P\{\min(x,y)=m, x-y=n\}$

mas

$$Z=\min(x,y)=\begin{cases} y & x\geq y \Rightarrow w=x-y\geq 0 \text{ (não negativo)} \\ x & x<y \Rightarrow w=x-y<0 \text{ (negativo)}\end{cases}$$

$p_1 p_2 q_1^{\,u+v} q_2^{\,u}$

$u>v$

Então,

$P\{Z=m, W=n\} = P\{\min(x,y)=m, x-y=n, (x\geq y \cup x<y)\}$

$= P\{\min(x,y)=m, x-y=n, x\geq y\} + P\{\min(x,y)=m, x-y=n, x<y\}$

?

$P\{Z=m, W=n\} = P\{y=m, x=m+n, x\geq y\} + P\{x=m, y=m-n, x<y\}$

$$= \begin{cases} P\{x=m+n\}P\{y=m\} = pq^{m+n}pq^m & m\geq 0, n\geq 0 \\ P\{x=m\}P\{y=m-n\} = pq^m pq^{m-n} & m\geq 0, n<0\end{cases}$$

$= p^2 q^{2m+|n|} \qquad \begin{matrix} m=0,1,2,\dots \\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\end{matrix}$

$$P\{Z=m\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{Z=m, W=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} p^2 q^{2m} q^{|n|} = p^2 q^{2m} \underbrace{(1+2q+2q^2+\dots)}_{P.G} =$$

$$= p^2 q^{2m}\left(1+\frac{2q}{1-q}\right) = p^2 q^{2m}\frac{(1-q)+2q}{1-q} = p^2 q^{2m}\left(\frac{1+q}{p}\right) = p(1+q)q^{2m} \quad m=0,1,\dots$$

$$\therefore Z \sim G\left(1-q^2 = p(1+q)\right)$$

$$P\{W=n\} = \sum_{m=0}^{\infty} P\{Z=m, W=n\} = \sum_{m=0}^{\infty} p^2 q^{2m} q^{|n|} = p^2 q^{|n|} \underbrace{(1+q^2+q^4+\dots)}_{PG \text{ com } r=q^2} = p^2 q^{|n|}\frac{1}{1-q^2}$$

$$= p^2 q^{|n|}\frac{1}{(1+q)\underbrace{(1-q)}_{p}} = \frac{p}{1+q} q^{|n|} \quad n=0,\pm1,\dots$$

Portanto, Z e W são independentes pois

$P\{Z=m, W=n\} = P\{Z=m\}P\{W=n\}$ para $Z=\min(X,Y)$ e $W=X-Y$

7) $(X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$ com dist. multinomial com parâmetros $n, p_1, \dots, p_{k-1}$

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \quad \text{em que} \quad \begin{array}{l} p_k = 1-p_1-\dots-p_{k-1} \\ X_k = n - X_1 - \dots - X_{k-1} \end{array}$$

Objetivo $\begin{cases} E(Y) \\ V(Y) \end{cases}$

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i - np_i)}{np_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{np_i}E\left[(X_i - \underbrace{np_i}_{E(X_i)})^2\right]^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{np_i}\mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{np_i}np_i(1-p_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(1-p_i) = (1-p_1)+(1-p_2)+\dots+(1-p_{k-1})+(1-p_k) =$$

$$= (1-\cancel{p_1})+(1-\cancel{p_2})+\dots+(1-\cancel{p_{k-1}})+(\cancel{1}-(\cancel{1}-\cancel{p_1}-p_2-\dots-\cancel{p_{k-1}})) = \sum_{i=1}^{k}\underbrace{1+1+\dots+1}_{k-1 \text{ vezes}} = k-1$$

$$V(Y) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}\right)$$

5

Com pequenas arrumadas em $Y = \sum_{i=1}^{k}\frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$ tem-se que Y é a soma de $k-1$ variáveis $\chi^2_{(1)}$, logo,

$V(Y) = 2(k-1)$

Ana Paula Jorge

63/70

TEORIA DAS PROBABILIDADES
|EXERCICIOS # 7

(1) Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 v.a.s independentes $N(0,1)$. Provar que $Y=X_1X_2+X_3X_4$ tem f.d.p. $f(y)=\frac{1}{2}e^{-|y|}, -\infty<y<\infty$.

(2) Seja $X \sim N(15;16)$. Achar,
(a) $P\{X\leq 12\}$
(b) $P\{10\leq X\leq 17\}$
(c) $P\{10\leq X\leq 19/X\leq 17\}$
(d) $P\{|X-15|\geq 0,5\}$

(3) Sejam X e Y v.a.s i.i.d. $N(0,1)$. Achar a f.d.p. de $X/|Y|$. Também, achar a f.d.p. de $|X|/|Y|$.

(4) Seja x uma v.a. tal que $\log(X-a)$ tem distribuição $N(\mu,\sigma^2)$. Mostrar que X tem f.d.p.,

$f(x) = \frac{1}{\sigma(x-a)\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{[\log(x-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}\}$, se $x>a$ e zero se $x\leq a$.
Se m_1 e m_2 são os primeiros dois momentos desta distribuição e $\alpha_3 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ é o coeficiente de "skewness", mostrar que a, μ, σ são dados por

$$a = m_1 - \sqrt{m_2-m_1^2}/\eta \;,\quad \sigma^2 = \log(1+\eta^2) \text{ e } \mu = \log(m_1-a)-\tfrac{1}{2}\sigma^2$$

onde η é a raiz real da equação $\eta^3+3\eta-\alpha_3=0$.

(5) Seja (X,Y) um vetor aleatório com distribuição normal bivariada com parametros $\mu_1=5, \mu_2=8, \sigma_1^2=16$, $\sigma_2^2=9$ e $\rho=0{,}6$ Achar, $P\{5<Y<11/X=2\}$.

(6) Sejam X e Y v.a.s com distribuição normal conjunta com médias iguais a zero. Tambem, seja $W=X\cos(\theta)+Y\mathrm{sen}(\theta)$, $Z=X\cos(\theta)-Y\mathrm{sen}(\theta)$. Achar θ tal que W e Z sejam independentes.

(7) Seja (X,Y) um vetor aleatório com distribuição normal bivariada com $E(X)=E(Y)=0$, $var(X)=var(Y)=1$, e $cov(X,Y)=\rho$. Mostrar que a v.a. $z=Y/X$ tem uma distribuição de Cauchy.

X_1, X_2, X_3, X_4 são v.a.s $N(0,1)$

$X_1X_2 + X_3X_4$

...do encontrado em Miller e Childers

Seja X um vetor de N v.a's normais com variância um e matriz de covariância C_{xx}. Vamos formar uma forma quadrática do vetor X de maneira geral

$$Y = X^T B X$$

em que B é uma matriz arbitrária de ordem $N \times N$. Podemos mostrar a função característica de Y, dada por

$$\Phi_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-2it\lambda_j}}$$

em que λ_j são os autovalores da matriz BC_{xx}.

Em nosso problema, temos

$$Y = X_1X_2 + X_3X_4 = [X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Sendo $N=4$, $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Além disso, $C_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Temos que, $BC_{xx} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Logo, BC_{xx} possui dois pares de autovetores repetidos $\pm\frac{1}{2}$, isto é,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{2}$.

Assim, a função característica de Y é dada por:

$$\Phi_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it(\frac{1}{2})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2it(\frac{1}{2})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2it(-\frac{1}{2})}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2it(-\frac{1}{2})}} = \frac{1}{1+it} \cdot \frac{1}{1-it}$$

10

$$= \frac{1}{(1+it)(1-it)} = \frac{1}{(1-it+it-i^2t^2)} = \frac{1}{1-(it)^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

C

que é a função característica da distribuição Laplace com $\mu=0$ e $\sigma^2=2$

Portanto, Y tem pdf

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|} \quad -\infty < y < \infty$$

② $X \sim N(15, 16)$ $\quad \sigma^2 = 16 \rightarrow \boxed{\sigma = 4}$

normal padronizada

(a) $P\{X<12\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z < \frac{12-15}{4}\right\} = P\left\{Z < -\frac{3}{4}\right\} = P\{Z < -0{,}75\} =$

$= P\{Z > 0{,}75\} = 0{,}5 - P\{0 < Z < 0{,}75\} = 0{,}5 - 0{,}27337 = 0{,}22663$

(b) $P\{10 < X < 17\} = P\left\{\frac{10-15}{4} < Z < \frac{17-15}{4}\right\} = P\{-1{,}25 < Z < 0{,}5\} = P\{Z > 1{,}25\} + P\{0 < Z < 0{,}5\}$

$= 0{,}5 - P\{0 < Z < 1{,}25\} + P\{0 < Z < 0{,}5\} = 0{,}5 - 0{,}39435 + 0{,}19146 = 0{,}29711$

(c) $P\{10 < X < 17 \mid X < 17\} = \frac{P\{10 < X < 17,\ X < 17\}}{P\{X < 17\}} = \frac{P\{10 < X < 17\}}{P\{X < 17\}} = \frac{0{,}29711}{P\{Z < 0{,}5\}} = \frac{0{,}29711}{0{,}5 + P\{0 < Z < 0{,}5\}}$

$= \frac{0{,}29711}{0{,}5 + 0{,}19146} = \frac{0{,}29711}{0{,}69146} = 0{,}42968$

10

(d) $P\{|X-15| > 0{,}5\} = 1 - P\{|X-15| < 0{,}5\} = 1 - P\{-0{,}5 < X-15 < 0{,}5\} =$

$= 1 - P\{14{,}5 < X < 15{,}5\} = 1 - P\left\{\frac{14{,}5-15}{4} < Z < \frac{15{,}5-15}{4}\right\} =$

$= 1 - P\{-0{,}125 < Z < 0{,}125\} = 1 - 2P\{0 < Z < 0{,}125\} =$

$= 1 - 2 \cdot (0{,}04976) = 0{,}90048$

③ X, Y v.a.s ind. $N(0,1) \rightarrow f(x,y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$

$\begin{cases} Z = \frac{X}{|Y|} \\ W = X \end{cases}$ $\quad x = w, \quad |y| z = w, \quad y = \pm\frac{w}{z} \rightarrow \begin{cases} x = w \\ y = \pm\frac{w}{z} \end{cases}$ $\quad |J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{z} & -\frac{w}{z^2} \end{vmatrix} = \frac{|w|}{z^2}$

então

$f(z,w) = \left(f_{XY}(w, \tfrac{w}{z}) + f_{XY}(w, -\tfrac{w}{z})\right)|J| = 2f(w, \tfrac{w}{z})|J|$ pois $f_{XY}(x,y)$ é uma função par em

y.

$$2\left[\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(w^2+\frac{w^2}{z^2}\right)} \frac{|w|}{z^2}\right] = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} \frac{|w|}{z^2}$$

marginal de Z é dada por

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi z^2}\left[\int_{-\infty}^{0} -w\, e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw + \underbrace{\int_{0}^{\infty} w\, e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw}_{(*)}\right] =$$

$$(*) \int_0^{\infty} w\, e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw = -\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\int e^{u}\, du = -\left(1+\frac{1}{z^2}\right) e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\Big|_0^{\infty} = \left(1+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$u = -\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \longrightarrow du = -w\left(1+\frac{1}{z^2}\right) dw$$

$$-\left(1+\frac{1}{z^2}\right) du = w\, dw$$

então

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi z^2}\, 2\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{2}{\pi z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$$

—— // —— // —— // —— //

$$Z = \frac{|X|}{|Y|}$$

$$\begin{cases} X = \pm z w \\ Y = \pm w \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = w$$

$$y = -w \longrightarrow \begin{cases} x = -zw \\ x = zw \end{cases}$$

$$y = w \longrightarrow \begin{cases} x = -zw \\ x = zw \end{cases}$$

10

$$g(z,w) = -w\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\}\right) +$$

$$+ w\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\}\right)$$

$$\therefore\ g(z) = \int_w g(z,w)\, dw = \frac{2}{\pi(1+z^2)}$$

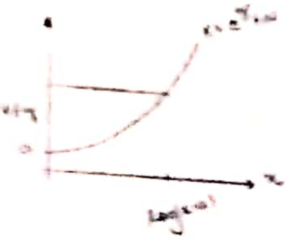
④ X v.a. $\log(x-a) \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(\log(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x-a)-\mu)^2\right\}$$

$Y = \log(x-a) = g(x)$

$e^y = x - a$

$x = e^y + a$



$P\{Y \le y\} = P\{Y \le \log(x-a)\} = F_Y(\log(x-a))$

Logo, a fdp de X é

$$f(x) = f_Y(\log(x-a)) \left| \frac{d(\log(x-a))}{dx} \right| =$$

$$= \frac{1}{x-a} f_Y(\log(x-a)) = \frac{1}{x-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x-a)-\mu)^2\right\}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(x-a)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\log(x-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right\}$$

3

⑤ (X, Y) vetor aleatório com dist. normal bivariada com parâmetros

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 7{,}2 \\ 7{,}2 & 9 \end{bmatrix}\right)$$ pois $\mathrm{cov}(X,Y) = \rho\,\sigma_1\sigma_2$

Achar $\rightarrow P\{5 < Y < 11 \mid X = 2\}$

objetivo

A fdp conjunta de $Y|X$ é dada por

$$Y|X=x \sim N\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

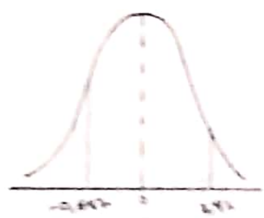
Logo, para $x = 2$, tem-se:

$$\begin{cases} \mu_x = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = 8 + 0{,}6 \cdot \frac{3}{4}(2-5) = 6{,}65 \\ \sigma_2^2(1-\rho^2) = 9(1-0{,}6^2) = 5{,}76 \end{cases}$$

10

Portanto,

$$Y|X=2 \sim N(6{,}65\ ;\ 5{,}76)$$



então

$$P\{5 < Y < 11 \mid X=2\} = P\left\{\frac{5-6{,}65}{\sqrt{5{,}76}} < Z < \frac{11-6{,}65}{\sqrt{5{,}76}}\right\} = P\{-0{,}687 < Z < 1{,}812\} = 0{,}72$$

...y v.a.s com dist. normal conjuntas com médias iguais a zero

$$\begin{cases} W = X\cos\theta + Y \operatorname{sen}\theta \\ Z = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$\underbrace{\text{Achar } \theta \text{ tal que } W \text{ e } Z \text{ sejam independentes}}_{\text{objetivo}}$

Suponha que W e Z sejam independentes, logo $cov(W, Z) = 0$

Por definição,

$$cov(W, Z) = E\left[(W - E(W))(Z - E(Z))\right] \quad (1)$$

em que (1) pode ser dado por

$$cov(W, Z) = E(WZ) - E(W)E(Z) \quad (2)$$

mas,

$$E(WZ) = E\left[(X\cos\theta + Y\operatorname{sen}\theta)(X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta)\right] = E\left[X^2\cos^2\theta - \cancel{XY\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + \cancel{XY\cos\theta\operatorname{sen}\theta} - Y^2\operatorname{sen}^2\theta\right] =$$

$$= E\left[X^2\cos^2\theta - Y^2\operatorname{sen}^2\theta\right] = \cos^2\theta\, E[X^2] - \operatorname{sen}^2\theta\, E[Y^2] = \cos^2\theta\,[\sigma_X^2] - \operatorname{sen}^2\theta\,[\sigma_Y^2]$$

pois, $E(X) = E(Y) = 0$, então

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \rightarrow E(X^2) = \sigma_X^2$$

Por outro lado,

$E(W) = 0$ pois, $E(X\cos\theta + Y\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \underbrace{E(X)}_{=0} + \operatorname{sen}\theta \underbrace{E(Y)}_{=0} = 0$

$E(Z) = 0$ pois, $E(X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \underbrace{E(X)}_{=0} - \operatorname{sen}\theta \underbrace{E(Y)}_{=0} = 0$

Portanto, em (2) tem-se:

$$Cov(W, Z) = E(WZ) = \cos^2\theta\,\sigma_X^2 - \operatorname{sen}^2\theta\,\sigma_Y^2$$

10

por hipótese, $cov(W, Z) = 0$, então:

$$\cos^2\theta\,\sigma_X^2 - \operatorname{sen}^2\theta\,\sigma_Y^2 = 0$$

$$\cos^2\theta\,\sigma_X^2 = \operatorname{sen}^2\theta\,\sigma_Y^2$$

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = tg^2\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\right)}$$

7) (X,Y) um vetor aleatório com distribuição normal bivariada com $E(X) = E(Y) = 0$; $VAR(X) = VAR(Y) = 1$ e $cov(X,Y) = \rho$.

Objetivo $\left\{ \begin{array}{l} \text{mostrar que a v.a. } Z = Y/X \\ \text{tem uma distribuição de Cauchy} \end{array} \right.$

Considere a variável auxiliar $w = y$, então:

$$\begin{cases} z = \frac{Y}{X} \\ w = Y \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} X = \frac{w}{z} \\ Y = w \end{array} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{w}{z^2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{w}{z^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{Q(x,y)}{2}\right\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\}$$

Logo,

$$f(z,w) = f_{XY}\left(\frac{w}{z}, w\right)|J| = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{w}{z}\right)^2 + w^2 - 2\rho\frac{w}{z}w\right)\right\} \frac{|w|}{z^2}$$

Considerando $\rho = 0$ tem-se:

$$f(z,w) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{w^2}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\right\} \frac{|w|}{z^2}$$

Portanto,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w|}{z^2}\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw = -\frac{1}{2\pi z^2}\int_{-\infty}^{0} w\, e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw + \frac{1}{2\pi z^2}\underbrace{\int_{0}^{\infty} w\, e^{-\frac{w^2}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw}_{(*)}$$

— " — " Resolvendo (*)

$$\int_0^\infty w\, e^{-\frac{1}{2}w^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} dw = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\int e^u\, du = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}w^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$u = -\frac{1}{2}w^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \rightarrow du = -w\left(1+\frac{1}{z^2}\right)dw \rightarrow -\frac{du}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = w\,dw$$

10

— " — , —

continuando, logo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi z^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}\right] = \frac{1}{\pi z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

$X \sim \mathcal{C}(\mu,\theta)$

$f(x) = \frac{\mu}{\pi}\frac{1}{[\mu^2+(x-\theta)^2]}$

$$\therefore \frac{Y}{X} \sim \mathcal{C}(\mu=1, \theta=0)$$

Lívia Matos Garcia

TEORIA DAS PROBABILIDADES
PROVA # 2

(1) Sejam X e Y v.a.s continuas independentes com distribuições uniformes em $(0,1)$, i.e, $f(x)=1, 0<x<1$ e $f(y)=1, 0<y<1$. Achar as distribuições marginais de :

~~(a)~~ $Z=X+Y$ (considerar $Z=X+y$ e $U=X-Y$).

(b) $V=XY$ (considerar $V=XY$ e $U=X$).

~~(c)~~ $W=\max(X,Y)$.

(2) (a) Sejam X e Y duas v.a.s independentes tais que $X\sim\text{Poisson}(\lambda)$ e $Y\sim\text{Poisson}(\mu)$.

~~(i)~~ Achar a distribuição condicional de X dado X+Y $(V=X+Y)$.

(ii) Achar $E(X/X+Y)$.

(iii) Achar $\text{var}(X/X+Y)$.

(iv) Verificar que $\text{var}(X)=E\{\text{var}(X/V)\}+\text{var}\{E(X/V)\}$.

(v) Achar a linha de regressão de Y em V.

(b) Sejam X e Y v.a.s independentes com distribuições gama com parâmetros (α,β) e (β,λ), respectivamente. Achar as distribuições marginais de $U=X+Y$ e $V=X/(X+Y)$.

(3) ~~(a)~~ Sejam Y_1, Y_2 e Y_3 as estatisticas de ordem de uma a.a. de tamanho 3 $(Y_1 \le Y_2 \le Y_3)$ de uma distribuição com f.d.p. $f(x)=1$, se $0<x<1$; 0 e.o.p. Achar a distribuição de $Z_1=Y_3-Y_1$. (considerar $Z_2=Y_3$).

(b) (i) Definir: convergencia em probabilidade, convergencia quase certamente, convergencia em distribuição e convergencia em r-esima média.

~~(ii)~~ Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.s i.i.d. com distribuição $N(0,1)$. Achar a distribuição limite de $W = \sqrt{n}\,\frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)}$.

(4) (a) Seja X uma v.a. (numero de ensaios ate obter o primeiro sucesso) com distribuição geométrica com probabilidade p de sucesso. Achar $E(X)$ e $\text{var}(X)$ e sua ~~fgm~~.

(Sugestão: $\frac{1}{p^r}=\sum_{x=r-1}^{\infty}\binom{x}{r-1}(1-p)^{x-r+1}$).

~~(b)~~ Sejam X e Y v.a.s continuas com f.d.p. conjunta dada por, $f(x,y)=[\exp(-x/y)\exp(-y)]/y, 0<x<\infty$; $0<y<\infty$. Achar $E(X^2/Y=y)$.

(5) (a) Definir: Condição de Lindeberg para o T.L.C.; leis dos grandes numeros; desigualdade de Markov; desigualdade de Chebyschev; T.L.C. no caso de v.a.s i.i.d..

(b) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.s i.i.d. Poisson com parâmetro λ e seja a média amostral $X_n=(\sum_{i=1}^{n} X_i)/n$.

Mostrar que $\sqrt{n}(\sqrt{X_n}-\sqrt{y}) \to N(0,1/4)$ em distribuição.

$\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\;\frac{e^{-\mu}\mu^z}{z!}\cdot\frac{e^{-\lambda-\mu}\lambda^n\mu^z}{n!\,z!}$

$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$Y=\frac{v}{x}$ $\quad p=\frac{\lambda}{\mu}$ $\quad 1-p=\frac{\mu-\lambda}{\mu}$

$n=10$

$P(X=4)=\binom{10}{3}p(1-p)$

$0<z_2-z_1<1$

$z_1<z_2<1-z_1$

$0<z_1<1$

$0<y<1$

$0<\frac{v}{u}<1$

$Z = \frac{U+Z+Z-U}{2} \Rightarrow$

$\frac{U+Z-Z+U}{2}$

$Y = Z - \frac{U-Z}{2} \Rightarrow Y = \frac{Z-U}{2}$

$\frac{q}{p^2} = E(X^2) - \frac{1}{p^4} \Rightarrow E(X^2) = \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^4} \Rightarrow$

$E(X^2) = \frac{qp^2+1}{p^4}$

$\int_0^2\int_0^1 \frac{1}{2}\, du\, dz \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{2}\, dz = \frac{z}{2}\Big|_0^2 = \frac{2}{2} = 1$

$VU^{-1} = VU^{-2} = -\frac{V}{U^2}$

$\int_0^\infty e^{-y}\, dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = 0-(-1) = 1$

$\int_0^1\int_0^u \frac{1}{u}\, dv\, du = \int_0^1 \frac{u}{u}\, du = \int_0^1 1\, du = u\Big|_0^1 = 1$

$\left|\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right|^x \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right|^{v-x}$

$\int \frac{1}{u} = u^{-1}$

$f=$

$\frac{1}{v}$

$\int_0^1\int_0^u \frac{1}{u}\, dv\, du =$

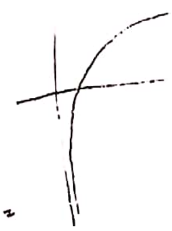
$\lambda+\mu.\lambda$

$\frac{df}{dx} =$

$\int_0^1 \log v\, dv =$

$\int_0^1 \frac{v}{u}\Big|_0^u du = \int_0^1 1\, du =$

μ^{v-x}



$\int_0^1 2-2w\, dw = 2w - w^2\Big|_0^1 = 2-1 = 1$

$\int_0^1\int_{1-z_1}^{3z_1} 6z_1\, dz_2\, dz_1 = \int_0^1 12z_1^2 - 6z_1\, dz_1 = \frac{12z_1^3}{3} - \frac{6z_1^2}{2}\Big|_0^1 =$

$y_i \quad y_r$

$F(y_i)^i\,(1-F(y_r))^{n-r} f(y_i) f(y_r)\,[F(y_r)-F(y_i)]^{r-i-1}$

$n!$

$\int_0^u \frac{1}{u}\, dv = \frac{u}{u} = 1$

$0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$

$\int_0^1\int_{y_1}^1 6(y_3-y_1)\, dy_3\, dy_1 = \int_0^1 6\frac{y_3^2}{2} - 6y_1y_3\Big|_{y_1}^1 dy_1 =$

$= \int_0^1 3 - 6y_1 + 3y_1^2\, dy_1 =$

$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

$\iint (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + xy\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2} + y\,dy = \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1$

$\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{e^{uit}}{\frac{it\sigma+1}{\sigma}} - \frac{e^{uit}}{\frac{\sigma it-1}{\sigma}}\right)$

$\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\,dy$

$\int_0^1\int_1^1 x+y$

$\int_0^x\int_0^y 1\,dt\,dy = \left(\frac{\sigma e^{uit}}{it\sigma+1} - \frac{\sigma e^{uit}}{\sigma it-1}\right)$

$\int_0^x\int_0^y (1)\,dy\,dx \quad \int_0^{x} y\,dx$

$\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{v-x}$

$\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)^{v-x}$

$\left(\frac{e^{uit}}{it\sigma+1} - \frac{e^{uit}}{\sigma it-1}\right) = \frac{(\sigma it-1)e^{uit} - (it\sigma+1)e^{uit}}{(it\sigma+1)(\sigma it-1)}$

$\mu^x \mu^v = \mu^{x+v}$

$\frac{\sigma it e^{uit} - e^{uit} - it\sigma e^{uit} - e^{uit}}{\left((it\sigma)^2 - 1\right)}$

λ^x

$z = -u$

$\frac{-2e^{uit}}{2(it\sigma)^2+1} = -\frac{2e^{uit}}{2\left[-(t\sigma)^2-1\right]} =$

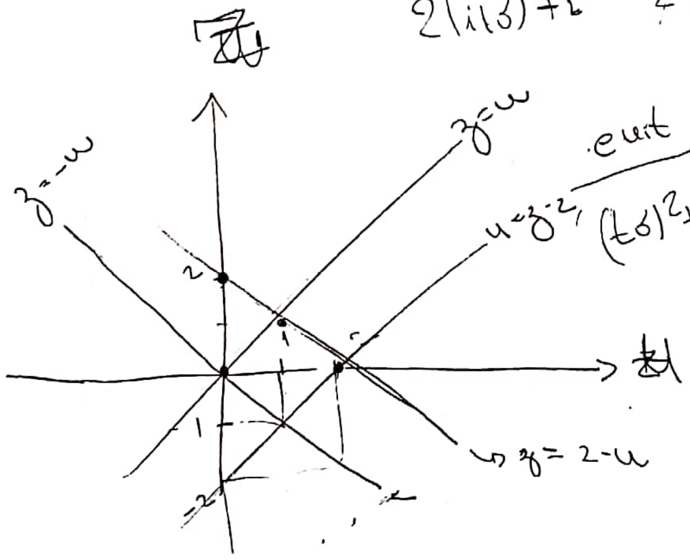
$0<x<1$

$0 < \frac{1}{2}(z+u) < 1$

$0 < z+u < 2$

$-u < z < 2-u$

$< z-u < 2$



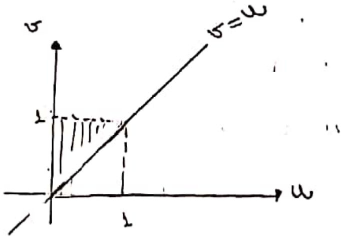
$\frac{e^{uit}}{(t\sigma)^2+1}$

(b) $V = XY$ (considere $V = XY$ e $U = X$)

$$P(x,y) = P(x)P(y) = 1 \quad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} V = XY \\ U = X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = U \\ Y = V/U \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

$$f_{V,U}(v,u) = f_X(u) f_Y(v/u)\, |J| = \frac{1}{u} \qquad \begin{matrix} 0<u<1 \\ 0<v<u \end{matrix}$$



A f.d.p. marginal de $V = XY$ é dada por:

$$f(v) = \int_0^v \frac{1}{u}\, du = \ln(u) \Big|_0^v = \ln(v) - \ln 0 = \ln(v) \qquad 0<v<1$$

$$\therefore \quad f(v) = \begin{cases} \ln(v), & 0<v<1 \\ 0 & \text{c.o.p} \end{cases}$$

(c) $W = \max(X,Y)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{c.o.p.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

analogamente, para Y.

A f.d.p de $W = \max(X,Y)$ é dada por:

$$g(z) = n F^{n-1}_{(z)} f(z) \qquad \boxed{n=2}$$

$$\therefore \quad g(z) = \begin{cases} 2z, & 0<z<1 \\ 0, & \text{c.o.p} \end{cases}$$

(2) (a) Sejam X e Y duas v.a.s independentes tais que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$.

(i) Achar a dist. condicional de X dado $X+Y$ ($V = X+Y$).

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\qquad P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,\ldots$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

assim,

$$M_V(t) = M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) \overset{\text{indep}}{=} E(e^{tX})E(e^{tY}) = e^{\lambda(e^t-1)} e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$$

$\therefore \quad V = X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$

tanto,

$X=x \quad X+Y=v$

$; \quad Y=v-x$

$$P(X=x \mid X+Y=v) = \frac{P(X=x, Y=v-x)}{P(X+Y=v)} \overset{X \text{ e } Y \text{ indep}}{=} \frac{P(X=x)\, P(Y=v-x)}{P(X+Y=v)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \dfrac{e^{-\mu}\mu^{(v-x)}}{(v-x)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^v}{v!}} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\lambda^x \cancel{e^{-\mu}} \mu^{(v-x)}}{x!\,(v-x)!} \cdot \frac{v!}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}}(\lambda+\mu)^v} = \frac{v!}{x!\,(v-x)!} \frac{\lambda^x \mu^{v-x}}{(\lambda+\mu)^v} =$$

$$= \binom{v}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{v-x}$$

$\therefore \quad X=x \mid X+Y=v \sim b\Big(v, \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{p}\Big)$

(ii) Achar $E(X \mid X+Y)$.

Se $X \sim b(n,p)$, então $E(X) = np$ e $V(X) = npq$. Desse modo, $X \mid X+Y$ tem dist binomial $\left(v, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ então

$$E(X \mid X+Y) = \frac{v\lambda}{\lambda+\mu}$$

(iii) $V(X \mid X+Y) = \frac{v\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = \frac{v\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

iv) $Var(X) = E\{var(X \mid V)\} + var\{E(X \mid V)\}$

$$E\{var(X|V)\} + var\{E(X|V)\} = E\left\{E(X^2|V) - [E(X|V)]^2\right\} + E\left[E(X|V)^2\right] - E\left[E(X|V)\right]^2 =$$

$$= E(X^2) - E^2\cancel{(X|V)} + E^2\cancel{(X|V)} - E(X) = Var(X)$$

(v) Achar a linha de regressão de Y em $V = X+Y$.

$h(v) = E(Y|V)$: regressão de Y em V:

Usar: $y = av + b = h(v)$ (Reta) (Escolher a e b que minimiza, $L = E\{Y - aX - b\}^2$

então, $a = \frac{cov(V,Y)}{VAR(V)} =$

$b = E(Y) - E(V)\frac{cov(Y,V)}{var(V)}$

$$P(Y=y \mid X+Y=v) = \frac{P(Y=y, X=v-y)}{P(X+Y=v)} = \binom{v}{y}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{y}\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{v-y}$$

$$\therefore \; Y \mid X+Y=v \sim b\left(v, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

Logo,

$$Y = aV+b = h(v)$$

em que $h(v) = E(Y|v) = \frac{v\mu}{\lambda+\mu}$

$\therefore$ a linha de regressão de Y em V é $\frac{v\mu}{\lambda+\mu}$.

(b) X e Y v.a's independentes com distribuições Gama

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \quad e \quad Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$$

As fdp de X e Y são dadas por:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0 \\ f(y) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)\lambda^{\beta}} y^{\beta-1} e^{-\frac{y}{\lambda}}, & y>0 \end{cases}$$

Considere $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ e $Y \sim \Gamma(\lambda, \beta)$

Seja $U = X+Y$ com X e Y v.a. independentes.

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{x(t-\frac{1}{\beta})}\,dx = (*)$$

fazendo,

$$-y = x\left(t-\frac{1}{\beta}\right) \rightarrow -dy = \left(t-\frac{1}{\beta}\right)dx \rightarrow dx = -\frac{dy}{(t-1/\beta)} = -\frac{\beta\,dy}{(\beta t-1)} = \frac{\beta}{(1-\beta t)}\,dy$$

logo,

$$(*)\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} y^{\alpha-1} e^{-y}\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)dy = \left(\frac{\cancel{\beta}}{1-\beta t}\right)^{\alpha}\frac{1}{\cancel{\beta^{\alpha}}}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy}_{\Gamma(\alpha,1)} = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha}$$

então

$$m_U(t) = E(e^{t(x+y)}) = E(e^{tx+ty}) = E(e^{tx})E(e^{ty}) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\lambda} = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha+\lambda}$$

$$\therefore \; X+Y \sim \Gamma(\alpha+\lambda, \beta)$$

$+Y)$

$u = X+Y$

Se $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ e $Y \sim \Gamma(\lambda,\beta)$ então $X+Y$ e $\frac{X}{(X+Y)}$ são v.a.s independentes.

$$Z = \frac{X}{u} \rightarrow X = Zu$$

$$Y = u - X \rightarrow Y = u - Zu = u(1-Z)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = Zu \\ Y = u(1-Z) \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} u & Z \\ -u & (1-Z) \end{vmatrix} = u(1-Z) + uZ = u$$

$$f(u,z) = f_{X,Y}(zu, u(1-z))\,|J| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} (zu)^{\alpha-1} e^{-\frac{zu}{\beta}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)\beta^{\lambda}} (u(1-z))^{\lambda-1} e^{-\frac{u}{\beta}+\cancel{\frac{zu}{\beta}}}\, u$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)\beta^{\alpha+\lambda}} (zu)^{\alpha-1}(u-uz)^{\lambda-1} u\, e^{-\frac{u}{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)\beta^{\alpha+\lambda}} (zu)^{\alpha-1}(u(1-z))^{\lambda-1} u\, e^{-\frac{u}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\lambda)\,\Gamma(\alpha+\lambda)\,\beta^{\alpha+\lambda}}\, z^{\alpha-1}(1-z)^{\lambda-1} u^{\alpha+\lambda-1} e^{-\frac{u}{\beta}}$$

Portanto, a marginal de Z

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{B(\alpha,\lambda)\Gamma(\alpha+\lambda)\beta^{\alpha+\lambda}}\, z^{\alpha-1}(1-z)^{\lambda-1} u^{(\alpha+\lambda)-1} e^{-\frac{u}{\beta}}\, du$$

$$= \underbrace{\frac{1}{B(\alpha,\lambda)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\lambda-1}}_{\hookrightarrow B(\alpha,\lambda)} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\lambda)\beta^{\alpha+\lambda}} u^{(\alpha+\lambda)-1} e^{-\frac{u}{\beta}}\, du}_{\hookrightarrow \Gamma(\alpha+\lambda,\beta)}$$

$\therefore\ Z = \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}(\alpha,\lambda)$

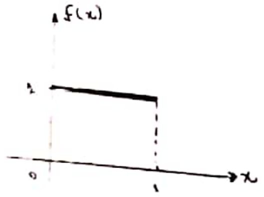
$$f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\lambda)\beta^{\alpha+\lambda}} u^{(\alpha+\lambda)-1} e^{-\frac{u}{\beta}}$$

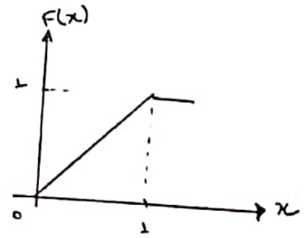
$\therefore\ U = X+Y \sim \Gamma(\alpha+\lambda,\beta)$

③ (a) Y_1, Y_2 e Y_3 são estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho $n=3$.

$$\boxed{Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3}$$

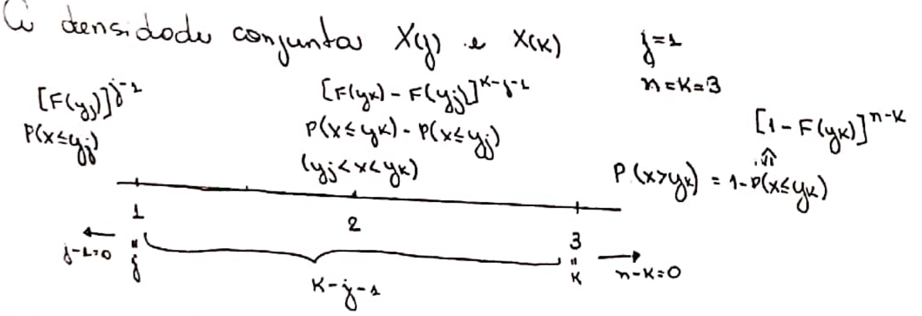
X_1, X_2, X_3 tem p.d.p $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{c.o.p} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ x & \text{se } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$





Transformação : $\begin{cases} Z = Y_3 - Y_1 \\ W = Y_3 \end{cases}$

A densidade conjunta $X(j)$ e $X(k)$



Portanto, a dist conjunta entre Y_j e Y_K é dada por:

$$g_{jk}(y_j, y_k) = \frac{n!}{(j-1)!\,(k-j-1)!\,(n-k)!} [F(y_j)]^{j-1} [F(y_k) - F(y_j)]^{k-j-1} [1-F(y_k)]^{n-k} f(y_j)\, f(y_k)$$

Logo, a conjunta de Y_1 e Y_3 é:

$$g_{13}(y_1, y_3) = \frac{3!}{0!\,1!\,0!} [y_1]^0 [y_3 - y_1]^{3-1-1} [1-y_3]^0 \, 1 \times 1 = 3!\,(y_3 - y_1)$$

$$\therefore g_{13}(y_1, y_3) = \begin{cases} 6\,(y_3 - y_1) & y_1 < y_3 \\ 0 & \text{c.o.p.} \end{cases}$$

$\begin{cases} Z = Y_3 - Y_1 \\ W = Y_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = W - Z \\ Y_3 = W \end{cases}$ $\quad |J| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$g_{Z,W}(z,w) = g_{13}(w-z,w)\,|J| = 6(w-(w-z))\times 1 = 6z$

$0 < Y_1 < Y_2 < Y_3 < 1$

$$f(z) = \int_{y_2}^{1} 6z\,dw = 6z\,w\Big|_{y_2}^{1} = 6z(1-y_2) =$$

$w = Y_3 \rightarrow Y_2 < w < 1$

ib) (i) Convergência em probabilidade;
Convergência quase certamente;
Convergência em distribuição;
Convergência em R-ésima média;

(ii) $X_1, X_2, \ldots$ v.a.s iid com dist. $N(0,1)$.

$$W = \sqrt{n}\,\frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)}$$

Notemos em 1º lugar que, pela Lei Fraca de Khintchin (ou pela lei forte de Kolmogorov)

$$\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n} \xrightarrow{P} E[X_i^2] = 2 \quad (1)$$

Agora, pelo T.L.C. para v.a iid. notemos que

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n\,Var(X_1)}} \xrightarrow{D} N(0,1) \Rightarrow \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Usando a prop. 67, temos $\sqrt{2}\,\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{2n}} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,2) \quad (2)$

Por fim, utilizando o teorema de Slutsky, (2) e (1)

$$\frac{\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}} = \frac{\sqrt{n}\,(X_1+\ldots+X_n)}{X_1^2+\ldots+X_n^2} \xrightarrow{D} N\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

(4) (a) X uma v.a (número de ensaios até obter o primeiro sucesso). com distribuição geométrica com probab. p de sucesso.

$$P(X=x) = q^{x-1} p \qquad x = 1, 2, \ldots$$

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x = \frac{p}{q} \frac{\cancel{q}e^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{(1-qe^t)} =$$

$$= pe^t (1-qe^t)^{-1}$$

Portanto, f g m é $\quad m_X(t) = pe^t (1-qe^t)^{-1}$

Assim,

$$E(X) = m'(t)\Big|_{t=0} = p\left[e^t(1-qe^t)^{-1}\right]' = p\left[e^t(1-qe^t)^{-1} + (-1)e^t(1-qe^t)^{-2}(-qe^t)\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= p\left[(1-q)^{-1} + q(1-q)^{-2}\right] = 1 + \frac{q}{p} = \frac{\cancel{p} + 1 - \cancel{p}}{p} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = m''(t)\Big|_{t=0} = p\Big[e^t(1-qe^t)^{-1} + (-1)e^t(-qe^t)(1-qe^t)^{-2} + q2e^{2t}(1-qe^t)^{-2} + qe^{2t}(-2)(-qe^t)(1-qe^t)^{-3}$$

$$= p\left[(1-q)^{-1} + q(1-q)^{-2} + 2q(1-q)^{-2} + 2q^2(1-q)^{-3}\right] =$$

$$= p\left[\frac{1}{p} + \frac{q}{p^2} + \frac{2q}{p^2} + \frac{2q^2}{p^3}\right] = 1 + \frac{3q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} = \frac{p^2 + 3qp + 2q^2}{p^2} =$$

$$= \frac{(1-q)^2 + 3q(1-q) + 2q^2}{p^2} = \frac{1 - 2q + \cancel{q^2} + 3q - \cancel{3q^2} + \cancel{2q^2}}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}$$

Logo,

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1+q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

v.as contínuas com f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y} \quad ; \; 0<x<\infty \quad ; \; 0<y<\infty .$$

$$h(y) = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y} e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{1}{y} e^{-y} \int_0^\infty e^{-x/y} dx = \frac{1}{y} e^{-y} \left(\frac{e^{-x/y}}{-\frac{1}{y}} \Big|_0^\infty \right) =$$

$$= e^{-y} \left(-e^{-\frac{x}{y}} \Big|_0^\infty \right) = e^{-y} \left(1 - \cancel{\lim_{x \to \infty} e^{-\frac{x}{y}}}^{\to 0} \right) = e^{-y} \quad 0<y<\infty$$

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \cancel{e^{-y}}}{\cancel{e^{-y}}} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \quad 0<x<\infty$$

$$E(X|y) = \int_0^\infty x \frac{1}{y} e^{-x/y} dx = \frac{1}{y} \int_0^\infty x e^{-x/y} dx = \frac{1}{\cancel{y}} \left(-x\cancel{y} e^{-x/y} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\cancel{y} e^{-x/y} dx \right) =$$

$u = x \to du = dx$

$dv = e^{-x/y} \to v = \frac{e^{-x/y}}{-\frac{1}{y}} = -y e^{-x/y}$

$$= \cancel{-\frac{x}{e^{x/y}} \Big|_0^\infty}^{\to 0} + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{-\frac{1}{y}} \Big|_0^\infty = -y e^{-\frac{x}{y}} \Big|_0^\infty =$$

$$= y - \lim_{x \to \infty} \cancel{e^{-\frac{x}{y}}}_{\to 0} = y \quad 0<y<\infty$$

$$E(X^2|y) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{y} e^{-x/y} dx = \cancel{-x^2 e^{-x/y} \Big|_0^\infty}_{\to 0} - \int_0^\infty -e^{-x/y} 2x dx = 2\int_0^\infty x e^{-x/y} dx =$$

$u = x^2 \to du = 2x dx \to dx = \frac{du}{2x}$

$v = \frac{1}{y} e^{-x/y} \to v = -e^{-x/y}$

$$= 2y \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{y} x e^{-x/y} dx}_{E(X|y) = y} = 2y^2 . \quad 0<y<\infty$$

$$\therefore E(X^2|y) = 2y^2 \quad 0<y<\infty$$

i) Comentário: A Lei dos Grandes Números diz que a média amostral $\frac{S_n}{n}$ converge para μ, em probabilidade ou quase certamente, isto é, a diferença $\frac{S_n}{n} - \mu$ tende a zero, e o Teorema Central do Limite diz que esta diferença, quando multiplicada pela raiz quadrada de n, converge em distribuição para uma normal:

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$$

Ana Paula Jorge

1ª PROVA (PROBABILIDADE)

(1) SEJAM X E Y v.a's INDEPENDENTES $U(0,1)$ COM fdp $f_X(x)=1$, $0<x<1$ E $f_Y(y)=1$, $0<y<1$
ACHAR AS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DE: (a) $Z=X+Y$; (b) $V=XY$; (c) $W=\max(X,Y)$

(2)(a) SEJAM $X\sim b(n,p)$ E $Y\sim b(n,p)$ v.a's INDEPENDENTES
ACHAR A DISTRIBUIÇÃO DE $Z=X+Y$; ACHAR A DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DE $U=X/(Y+1)$ E $V=Y+1$

(b) SEJAM X E Y v.a's DISCRETAS COM fmp DADA POR,

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-2	$1/6$	$1/12$	$1/6$	$5/12$
1	$1/6$	$1/12$	$1/6$	$5/12$
2	$1/12$	0	$1/12$	$2/12$
	$5/12$	$1/6$	$5/12$	1

(i) ACHAR A fmp CONJUNTA PARA $U=|X|$ E $V=Y^2$
(ii) ACHAR AS fmp's MARGINAIS PARA U E V

(3) SUPOR QUE $X_1, X_2, \ldots, X_n$ SÃO v.a's iid COM fdp DADA POR $f(x)=xe^{-x}$, $x>0$. SEJA $Y_1=\min(X_1,\ldots,X_n)$ E $Y_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$. (i) ACHAR A fdp MARGINAL DE Y_1 DADO $Y_n=y_n$. (ii) ACHAR A fdp DA AMPLITUDE $W=Y_n-Y_1$

$f_X(x)\begin{cases} 1 & \text{se } 0\le x<1 \\ 0 & \text{c.o.p} \end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\le 0 \\ x & \\ 1 & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}$

$\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$ $\frac{1}{12}+\frac{6}{12}$

(4) (a) Um ponto é escolhido com densidade uniforme entre 0 e 1. Se o número R_1 selecionado é x, então uma moeda com probabilidade x de sair cara é lançada independentemente n vezes. Se R_2 é o número resultante de caras, achar $p_2(k) = P(R_2 = k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

(Sugestão: $B(r, s) = \Gamma(r)\Gamma(s)/\Gamma(r+s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx$)

(b) Se X é uma v.a. com $P(X \leq 0) = 0$ e $E(X) = \mu < \infty$, provar que

$$P(X \leq \mu t) \geq 1 - \frac{1}{t}$$

---

(5) (a) Seja a v.a. X com fdp $f(x) = \frac{1}{2}x$, $0 \leq x < 1$; $f(x) = \frac{1}{2}$, $1 < x \leq 2$; $f(x) = \frac{1}{2}(3-x)$, $2 < x \leq 3$.

(i) Mostrar que os momentos de todas ordens existem. Achar a fgm de X; (ii) Achar a fd de X e a fdp de $Y = X^2 + 1$

(b) Supor que 12 cartas são retiradas de um baralho (comum) sem reposição. Seja X_1 o número de ases retirados; X_2 o número de 2's; X_3 o número de 3's e X_4 o número de 4's. Achar a distribuição conjunta de X_1, X_2, X_3, X_4 e a distr. condicional de X_2 e X_4 dado $X_1 = x_1$ e $X_3 = x_3$.

$$P(X_2=x_2,\ X_4=x_4 \mid X_1=x_1,\ X_3=x_3) = \frac{P(X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ X_3=x_3,\ X_4=x_4)}{P(X_1=x_1,\ X_3=x_3)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{52}{12}}}{\dfrac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_3}\binom{44}{8-x_1-x_3}}{\binom{52}{8}}}$$

b

⑤ a) i) $E(X^k) = \int x^k f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{k+1}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x^k dx + \frac{1}{2}\int_2^3 (3x^k - x^{k+1})dx$

k inteiro positivo

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{k+1}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x^k dx + \frac{3}{2}\int_2^3 x^k dx - \frac{1}{2}\int_2^3 x^{k+1}dx =$

$= \frac{x^{k+2}}{2(k+2)}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{x^{k+1}}{(k+1)}\Big|_1^2 + \frac{3}{2}\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\frac{x^{k+2}}{(k+2)}\Big|_2^3 =$

$= \frac{1}{2(k+2)} + \frac{1}{2(k+1)}(2^{k+1}-1) + \frac{3}{2(k+1)}(3^{k+1}-2^{k+1}) - \frac{1}{2(k+2)}(3^{k+2}-2^{k+2}) < \infty$

1ª) f.g.m. $m(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{tx}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{tx}dx + \frac{1}{2}\int_2^3 (3-x)e^{tx}dx$

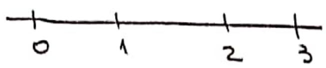
$= \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{tx}dx + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{tx}dx + \frac{3}{2}\int_2^3 e^{tx}dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int_2^3 xe^{tx}dx}_{\text{por partes}}$

então

$\int x e^{tx}dx = \frac{e^{tx}}{t}\left(x - \frac{1}{t}\right)$

$M(t) = \frac{1}{2t}e^t\left(1-1/t\right) + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2t}(e^{2t}-e^t) + \frac{3}{2t}(e^{3t}-e^{2t}) - \frac{1}{2t}e^{3t}\left(3-\frac{1}{t}\right) + \frac{e^{2t}}{2t}\left(2-\frac{1}{t}\right)$

ii) f.g.m. $F(x) = P\{X \le x\}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2}w\,dw = x^2/4 & 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 \frac{w\,dw}{2} + \int_1^x \frac{du}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1) & 1 \le x < 2 \\ \int_0^1 \frac{w\,dw}{2} + \int_1^2 \frac{du}{2} + \int_2^x \frac{1}{2}(3-u)du = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x-2) - \frac{1}{4}(x^2-4) & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

b) 12 cartas sem reposição são retiradas

X_1: nº ÁS , X_2 = nº 2 ; X_3 : nº 3 ; X_4: nº 4

i) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)$

ii) $P(X_2 = x_2, X_4 = x_4 \mid X_1 = x_1, X_3 = x_3)$

solução i) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4) = \dfrac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{52}{12}}$

$$f(r) = \frac{(-\ln r)^{\alpha-1} \, r^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta^{\alpha} \, \Gamma(\alpha)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R = \exp(-X) &\sim NLG(\alpha, \beta) \\ \log \exp(-X) &\sim -X \end{aligned}}$$

$$\log f(r) = (\alpha-1)\ln(-\ln r) + \left(\tfrac{1}{\beta}-1\right)\ln r - \alpha \ln\beta - \ln\Gamma(\alpha)$$

$$= (\alpha-1)\ln(-\ln r) + \tfrac{1}{\beta}\ln r - \ln r - \alpha\ln\beta - \ln\Gamma(\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \ln(-\ln r) - \ln\beta - \psi(\alpha) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} = -\psi'(\alpha)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ \psi'(\alpha) &= \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta^2}\ln r - \frac{\alpha}{\beta} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \beta^2} = \frac{2}{\beta^3}\ln r + \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{1}{\beta} \qquad \therefore \quad I_f(\theta) = \begin{bmatrix} \psi'(\alpha) & 1/\beta \\ 1/\beta & -\frac{2}{\beta^3} E(\log \exp -X) - \frac{\alpha}{\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$E[\log \exp(-X)] = E[-X] = -\alpha\beta$$

$$I_f(\alpha, \beta) = n I_f(\theta)$$

$$\det I_f(\alpha, \beta) = n\psi'(\alpha)\left[(-n)\frac{2}{\beta^3}(-\alpha\beta) - \frac{\alpha}{\beta^2}\right] - \frac{n^2}{\beta^2}$$

$$= n^2\left[\left[\psi'(\alpha)\left[\frac{2\alpha\beta}{\beta^3} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right]\right] - \frac{1}{\beta^2}\right] = n^2\left[\psi'(\alpha)\left[\frac{2\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right] - \frac{1}{\beta^2}\right]$$

$$= n^2\left[\psi'(\alpha)\left[\frac{\alpha}{\beta^2}\right] - \frac{1}{\beta^2}\right] = n^2\left[\frac{\psi'(\alpha)\alpha - 1}{\beta^2}\right]$$

$$\pi_{Jeffrey} \propto \frac{\sqrt{\psi'(\alpha)\alpha - 1}}{\beta^2}$$

$$n^2 \frac{\psi'(\alpha)\alpha}{\beta^2} - \frac{n^2}{\beta^2}$$

$$\sqrt{\frac{n^2(\psi'(\alpha)\alpha - 1)}{\beta^2}}$$

$y = -w \to x = -zw$
$x = zw$

$y = w \to x = -zw$
$x = zw$

$$g(z,w) = -w\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-w^2-z^2w^2}{2}\right\}\right)$$
$$+ w\left(\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} + \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}\right)$$

$$g(z) = \int g(z,w)\,dw = \frac{2}{\pi(1+z^2)}$$

Verão 2012
TEORIA DAS PROBABILIDADES
Mestrado em Estatística – DES-UFSCar e ICMC-USP
Inicio: 03/01/2012 – Término: 03/02/2012

Programa

1) Espaços de probabilidades: probabilidade condicional e independência estocástica
2) Variáveis aleatórias discretas: função de distribuição, média, variância, momentos
3) Distribuições discretas: uniforme, Bernoulli, binomial, geométrica, hipergeométrica, Poisson, binomial negativa
4) Variáveis aleatórias absolutamente contínuas: função de distribuição, média, variância, momentos
5) Distribuições absolutamente contínuas: uniforme, normal, lognormal, exponencial, gama, beta, Cauchy, gama inversa
6) Vetores aleatórios: distribuições conjunta, marginais e condicionais, funções de distribuição, média e variância condicionais, somas de variáveis aleatórias
7) Distribuições multivariadas: multinomial e normal
8) Transformações de variáveis aleatórias
9) Funções geradoras de probabilidades e de momentos; aplicações
10) Noções sobre leis dos grandes números e teorema central do limite

Referências

DANTAS, C.A.B. Probabilidade: um curso introdutório. *Edusp-Editora da Universidade de São Paulo*, 1997
FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1, *John Wiley & Sons, third edition*, 1967
FERNANDEZ, P.J. Introdução à teoria das probabilidades, *Livros Técnicos e Científicos Editora S. A*, 1973
GORDON, G. Discrete Probability. *Springer Verlag*, 1997
GUT, A. An intermediate course in probability. *Springer, second edition*, 2009
HOEL, P.G., PORT, S.C. & STONE, C.J Introdução à teoria das probabilidades. *Interciência, Rio de Janeiro*, 1978
JAMES, B.R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. *Livros Técnicos e Científicos Editora S. A*, 1981
ROSS, S. Introduction to probability models. *Academic Press, third edition*, 1984
ROSS, S. A first course in probability. *Macmillan, third edition*, 1989
Best-seller: O andar do bêbado-como o acaso determina nossas vidas. LEONARD MLODINOW, *Jorge Zahar Editor Ltda, Rio de Janeiro*, 2008

Horário de aulas
Terças-feiras: 15:00 as 17:00 horas
Quartas e Quintas-feiras: 10:00 as 12:00 e das 15:00 as 17:00 horas
Sextas-feiras: 10:00 as 12:00

Avaliação
1.ª Prova: 19/01/2012 a tarde; 2.ª Prova: 01/02/2012 a tarde
MF=Média aritmética das duas provas
Conceitos-C: $5{,}0 \leq MF < 7{,}0$; B: $7{,}0 \leq MF < 8{,}5$; A: $8{,}5 \leq MF \leq 10{,}0$

...ula Jorge Verão 2012 - UFScar

30

TEORIA DAS PROBABILIDADES

Professor: José Galvão Leite

Pós-Graduação: Carlos (coordenador)

Programa: 10 professores

UFSCar		USP	
Carlos	3	Marchi	1
Milan	1	Mário	
Polpo	1	Camacho (Pós)	
VERA	1	neto	1
Marcio Diniz	1	GALVÃO	
ERNESTO	1		

cibele 1

{ 13 alunos
{ 7 a 10 bolsas

A	4
B	3
C	2
D	1

Inferência - Marcio Diniz
Regressão - Polpo
Tópicos - Milan

Disciplinas

Leão
Reiko
Ricardo
cibele

Palestras
- 14:00 auditório 1 das bibliotecas (04/01)
  Barsan
- 14:00 auditório 1 " " (05/01)
  Carlos Alberto de Pereira Bragança

Aula (03/01/12)

TEORIA DAS PROBABILIDADES

Em: jogos de azar

1500 — BRASIL

ROMA
século XVI
{ ~~Gardando~~ Cardano
{ Galileu-Galilei → tratado de jogos de azar

ITÁLIA
século 17
{ Fermat, Pascal } problemas das cartas
{ juiz matemático

Laplace → século 19 (Imperador)

Ao acaso

Final do século: Markov

Kolmogorov (século 20) 1933

—" ——" —— " ——"

Objetivo: Experimentos aleatórios (quando repetições sob condições quase idênticas produzem resultados diferentes).

Experimentos determinísticos: físicos

↳ Exemplos:

Ex 1: nº de chamadas telefônicas que chegam a uma central (empresas) durante 10:00 às 14:00 horas.

Ex 2: nº de veículos que param por um posto de pedágio das 14:00 às 18:00 horas

EX 3: População: A, não A

Selecionamos um indivíduo e observamos se tem a característica A ou não tem.

Ex 4. Selecionamos indivíduos um de cada vez (na sequência) até encontrar um que tenha a características A, quando encontrou eu paro.

- Vamos observar a sequência obtidos.
- Posso observar o nº de elementos que ñ possuem a características A.
- " " " " " seleções.

Ex 5. Selecionar um ponto ao acaso no intervalo $(0,1)$ contido na

Ex 6. Tempo de vida de uma lâmpada.

—//—

Dado um experimento aleatório, um espaço amostral associado é um conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento

Ex 1: $\Omega = \mathbb{R}$

$\Omega = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Ex 2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{Z}$, $\Omega = \mathbb{N}$

Ex 3. Selecionarmos 1 indivíduo com características A : "S" ou "1"
" " " ñ com " A : "F" ou "0"
} ensaio de bernoulli (Feller)

$\Omega = \{\text{fracasso}, \text{sucesso}\}$ ou $\Omega = \{0,1\}$

Ex 4

$\Omega = \{(S), (F,S), (F,F,S), \dots\} = \{(1), (0,1), (0,0,1), \dots\}$

nº de fracassos: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

nº de ensaios de bernoulli de obter o sucesso: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$

Ex 5: $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

Ex 6: $\Omega = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

—//—

→ conjunto enumerado, conjunto $\underbrace{\text{ñ-enumerado}}_{\text{reta}}$

Espaço Amostral Ω finito ou infinito $\underbrace{\text{enumerável}}_{\text{posso colocar rótulos}}$ diz-se um espaço discreto.

→ Supor que Ω é discreto, neste caso, definimos um evento como sendo um subconjunto de Ω.

—//—//—

ponto amostral

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

ϕ = evento impossível → exemplo: $B = \{x \mid x$ é par e divisor de $7\}$ então $B = \phi$, pois os divisores de 7 são 1 e 7, que são números ímpares.

Ω: evento certo → E = jogar um dado, $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ → $A = \{x \mid x$ é um nº natural de 1 a $6\}$.

$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_N\}$ → eventos unitários

—//—

$A \subseteq \Omega$ Todo subconjunto é um evento

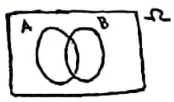
$\{A: A \subseteq \Omega\}$ classe dos eventos

, evento A ocorre, quando da realização do experimento, se ocorre um ponto amostral de A.

→ Operações com eventos:

Dado dois eventos A e B, definimos

) $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ ou $\omega \in B\}$
↳ ñ é exclusivo

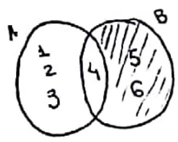


) $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ e $\omega \in B\}$

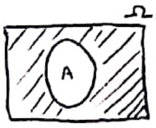
) $B - A = \{\omega \in \Omega : \omega \in B$ e $\omega \notin A\}$

Exemplo: $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{4,5,6\}$

~~[illegible]~~ $B - A = \{5,6\}$

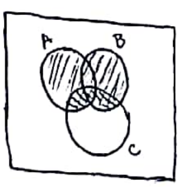


) $A^c = \Omega - A$

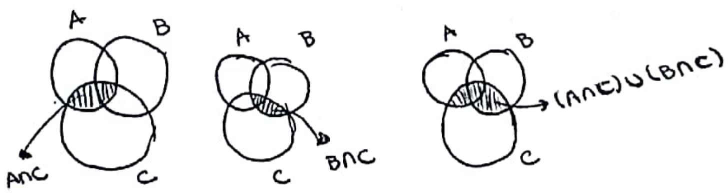


) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (um ponto de 1 está contido no outro)

) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



ou



$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Suponha que $A_1, A_2, \ldots$ são eventos associados a um espaço amostral

Notação $(A_n) = A_1, A_2, \ldots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ ou } \omega \in A_2 \text{ ou } \dots\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \text{ e } \omega \in A_2 \text{ e } \dots\}$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \quad ; \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C), \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup C)$$

Probabilidade

→ Probabilidade clássica (Laplace (1812))

Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ finito e eventos unitários igualmente possíveis de ocorrer.
(pontos amostrais)

$\#(\Omega)$: cardinal de Ω (nº de pontos de Ω).

Seja $A \in P(\Omega)$

$P(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$, classes de Ω ou seja os eventos

Definição $P(A)$: medida de probabilidade do evento $= \dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \dfrac{\#(A)}{N}$

$$P\{(\omega_j)\} = \frac{\#(\{\omega_j\})}{N} = \frac{1}{N} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

- Os elementos $\{\omega_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N$ são igualmente possíveis.

Dado $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ onde $P(\{j\}) = K \cdot j$

$P(\{1\}) = K$

$P(\{2\}) = 2K = 2P(\{1\})$

$\vdots$

Prop.

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A

ii) Se A, B forem eventos mutuamente exclusivos (→ disjuntos) $(A \cap B = \emptyset)$, então

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#(\Omega)} = \frac{\#(A) + \#(B)}{N} = \frac{\#A}{N} + \frac{\#B}{N} = P(A) + P(B)$$

iii) $P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

...bilidade Frequentista

...ja A um evento, associado a um espaço amostral associado a um ...rimento aleatório, repetimos um experimento "n" vezes e seja $n(A)$ o nº de ocor...ências do evento (entre ocorrências).

Definição: $f_n(A)$ - frequência relativa de ocorrências de A $\rightarrow \frac{n(A)}{n} \rightarrow$ $n(A)$ ou n_A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

$\hookrightarrow$ lei forte dos grandes números

n_A = nº de vezes que A ocorre

i) $0 \leq f_n(A) \leq 1$ para qualquer evento A

ii) Se A e B simultaneamente exclusivos, então:

$$f_n(A\cup B) = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B)$$

iii) $f_n(\Omega) = \frac{n_\Omega}{n_\Omega} = 1$

$f_n(\phi) = 0$

$\Longrightarrow$

i) $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ A e B disjun...

iii) $P(\Omega) = 1$ e $P(\phi) = 0$

mutuamente exclusivos não têm ponto em comum

04/01/2012

→ Problema da frequência → em situações práticas não conseguimos refazer o experimento (impossibilidade).

→ Probab. evento é subjetiva de cada um.

Kolmogorov (1933):

Definição: Uma medida de prob., P, é uma função de conjunto

$$P: \mathcal{G}(\Omega) \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow P(A)$$

se satisfaz ① $P(\Omega) = 1$

② para toda sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots$ dois a dois mutuamente exclusivos ($A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$) tem-se:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Questão 1ª Como definir uma probab. para um espaço amostral $\Omega=\{\omega_1,\omega$ → finito

$$\begin{cases} P(\{\omega_1\})=p_1 \text{ (subjetivamente escolhido)} & 0\leq p_1\leq 1 \\ P(\{\omega_2\})=p_2 & 0\leq p_2\leq 1 \\ \vdots \\ P(\{\omega_N\})=p_N & 0\leq p_N\leq 1 \end{cases}$$

tal que

(*) $$\sum_{j=1}^{N} p_j=1$$

—"——"—

Exercício: Prove que a P é uma probabilidade [(Ω, P) é um espaço de probabilidade] em $\mathcal{P}(\Omega)$. observação

—"—"—"—

(*) Dado $A\subseteq\Omega$, A qualquer, definimos $P(A)=\sum_{j:\omega_j\in A}^{N} p_j$

$$P(A)=\sum_{j:\omega_j\in A} p_j=\sum_{j:\omega_j\in A} P(\{\omega_j\})=\sum_{j=1}^{N} I_A(\omega_j)\,p_j$$

→ função indicadora de A

$$I_A(\omega_j)=\begin{cases}1 & \text{se } \omega_j\in A\\ 0 & \text{se } \omega_j\notin A\end{cases}$$

Exemplo: Considera um ensaio de bernoulli

$\Omega=\{0,1\}$ "S"=1 e "F"=0

(espaço finito)

$P(\{0\})=q$, $0\leq p\leq 1$

prob. do evento é soma de todas as probabilidades.

$P(\{1\})=p=1-q$

Questão 2ª

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$: infinito enumerável

Define $P(\{\omega_j\})=p_j$ → o pesquisador define quem é cada p , $j=1,\dots$

Seja $A\in\sigma(\Omega)$ define $P(A)=\sum_{j=1}^{\infty} I_A(\omega_j)P(\{\omega_j\})$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} p_j=1$

Exemplo: Considere um ensaio de bernoulli até obter o 1º sucesso

$\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),\dots\}$

$P(\{1\})=p$

$P(\{0,1\})=qp$

$P(\{0,0,1\})=q^2p$

$\vdots$

$P(\{\underbrace{0,0,0,\dots}_{n},1\})=q^np$

$p+qp+q^2p+\dots=p(1+q+q^2+\dots)=$ PG infinita

$$=\frac{p}{\underbrace{1-q}_{p}}=\frac{1^{\circ}\text{ termo}}{1-\text{razão}}=1$$

A = "ocorreu um nº par de fracassos"

$=\{(1),(0,0,1),(0,0,0,0,1),\dots\}=P(\{1\})+P(\{0,0,1\})+\dots$

$$=p+q^2p+q^4p+\dots=\frac{p}{1-q^2}=\frac{p}{(1-q)(1+q)}=\frac{\cancel{p}}{\cancel{p}(1+q)}=\frac{1}{1+q}$$

... Ω finito, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N\}$ e que $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\dots,\{\omega_N\}$ sejam ... possíveis quando a realização do experimento.

$P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{N}$, $j=1,2,\dots,N$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{N} I_A(\omega_j)\,P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{j=1}^{N} I_A(\omega_j)}_{\#(A)} = \frac{\#(A)}{N} \quad \text{Laplace}$$

prob de qualquer evento A

$\#(A) \rightarrow$ cardinal de A

Propriedades de uma probabilidade (Demonstrar: cai na prova)

$P:\sigma(\Omega) \rightarrow [0,1]$ tal que 1) $P(\Omega)=1$

2) $A_1, A_2, \dots$ 2 a 2 exclusivos, tem-se $P(\bigcup_{n}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1) $P(\phi)=0$

Prova: $\Omega, \phi, \phi, \phi, \dots$: sequência de eventos dois a dois mutua. exclusivos

$P(\Omega \cup \phi \cup \phi \cup \dots) = P(\Omega)+P(\phi)+P(\phi)+\dots$: (Axioma)

nulo ou zero

$P(\Omega) = P(\Omega)+P(\phi)+P(\phi)+\dots \Rightarrow \underbrace{P(\phi)+P(\phi)+\dots}_{} = 0$

soma de mesmo número infinitas vezes

$\Rightarrow P(\phi)=0$

2) Para quaisquer eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ dois a dois disjuntos, tem-se

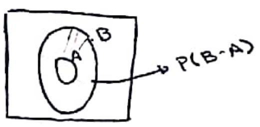
$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$ prob finitamente aditiva

3) Suponha A e B eventos quaisquer, então:

$P(B-A) = P(B) - P(A\cap B)$

4) Se $A \subseteq B$, então:

$0 \le P(A) \le P(B)$ e $P(B-A) = P(B) - P(A)$



$P(A) = P(A\cap B)$

5) $P(A^c) = 1 - P(A)$

6) Se A, B eventos quaisquer, então:

$P(A\cup B) = P(A)+P(B) - P(A\cap B)$

Se A, B e C eventos quaisquer, então:

$P(A\cup B\cup C) = P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C) =$

$= P(A)+P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C)) =$

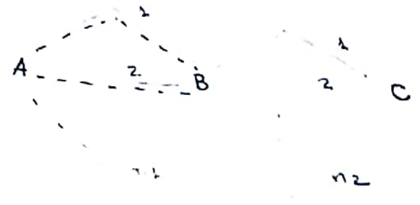
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

7) Generalização de ⑥. Suponha $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos quaisquer. Então

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1\le j_1 < j_2 \le n} P(A_{j_1}\cap A_{j_2}) + \sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le n} P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap A_{j_3}) + \dots + \overset{\text{indução finita}}{(-1)^{n-1}} P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n).$$

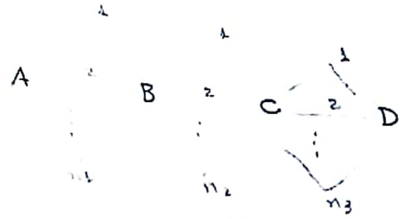
—" —" —" —"

Princípio Fundamental das Contagem Capítulo 2 – Feller



três cidades → vários caminhos

$$\underbrace{n_2 + n_2 + n_2 + \dots n_2}_{n_1} = n_1 n_2$$



$$\underbrace{n_2 n_3 + n_2 n_3 + \dots + n_2 n_3}_{n_1} = n_1 n_2 n_3$$

Exemplo 1: $\boxed{\begin{matrix} 1\,B \\ 2\,V \end{matrix}}$ urna → selecionamos duas bolas das urnas, uma de cada vez, ao acaso, e igualmente possíveis, com reposição

$\Omega = \{(x,y) : x,y = b_1, v_1, v_2\}$ $\#(\Omega) = 3\times 3 = 9$ (com reposição)

$$= \begin{cases} (b_1,b_1), (b_1,v_1), (b_1,v_2) \\ (v_1,b_1), (v_1,v_1), (v_1,v_2) \\ (v_2,b_1), (v_2,v_1), (v_2,v_2) \end{cases}$$

B_1: "a 1ª bola selecionada é branca"

V_1: " a 1ª " " é vermelha"

B_2: "a 2ª " " é branca"

V_2: " a 2ª " " é vermelha"

com reposição

$$P(B_1) = \frac{\overset{\text{1ª bola}}{1} \times \overset{\text{2ª bola}}{3}}{3\times 3} = \frac{1}{3}$$

$\hookrightarrow \#(\Omega)$

$$P(B_2) = \frac{3\times 1}{3\times 3} = \frac{1}{3}$$

Refazer o problema sem reposição:

$\Omega = \{(x,y) : x \neq y,\ x,y = b_1, v_1, v_2\}$

$\#(\Omega) = 3 * 2 = 6$

$= \frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{1}{3}$

... se pegou a 1ª bola vermelha

$P(B_2) = \frac{2\times 1}{3\times 2} = \frac{1}{3}$

Agora selecionamos três bolas das urnas

$$P(B_1) = \frac{1\times 2\times 1}{3\times 2\times 1} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2) = \frac{2\times 1\times 1}{3\times 2\times 1} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_3) = \frac{2\times 1\times 1}{3\times 2\times 1} = \frac{1}{3}$$

$B =$ "ocorre uma bola branca"

$B = (B_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap B_2)$ — V_1, V_2, B_1, B_2 são representam ...

$$P(B) = P(B_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{1\times 2}{3\times 2} + \frac{2\times 1}{3\times 2} = \frac{2}{3}$$

Agora sem ordem

$\Omega = \{(B_1,V_1), (b_1,V_2), (V_1,V_2)\}$

processo sem reposição a ordem é irrelevante para calcular a prob. ou seja, ... a ordem ...

$P(B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$ → dist. hipergeométrica não importa.

↳ Bolas brancas

Exemplo 2:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ → Selecionamos, ao acaso, um de cada vez e com reposição r elementos $(r \le n)$ → pode ser $r > n$

população

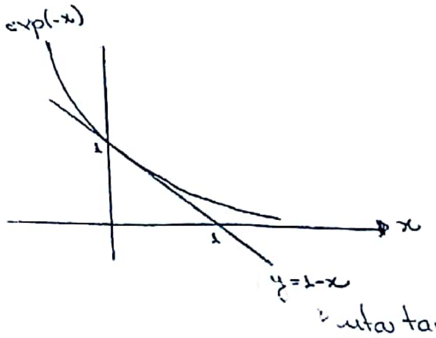
$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_1, a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_2, a_3, \ldots, a_n)\}$ — r-upla é uma ... por isso vai ... elementos iguais, ou seja, ... distintos

$$P(\{a_n, a_n, \ldots, a_n\}) = \frac{1}{\#(\Omega)} = \frac{1}{\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r\text{ vezes}}} = \frac{1}{n^r}$$

Seja $A =$ "não possui elementos repetidos entre as n seleções".

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{n^r}$$ → prob. de ñ haver elementos repetidos na amostra

$$= \left(\cancel{\frac{n}{n}}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot\left(\frac{n-(r-1)}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$



$\exp(-x) = e^{-x}$

$\exp\{-x\} \geq 1-x \quad , x \in \mathbb{R}$

Para $x \cong 0$, $\exp\{-x\} \cong 1-x$

$-x \cong \ln(1-x)$, $x \cong 0$

Para $r << n \longrightarrow$ $1 - \frac{1}{n} \cong \exp\{-\frac{1}{n}\}$

$1 - \frac{2}{n} \cong \exp\{-\frac{2}{n}\}$

$\vdots$

$1 - \frac{r-1}{n} \cong \exp\{-\frac{(r-1)}{n}\}$

$\Rightarrow P(A) \cong \exp\left\{\frac{-(1+2+\dots+(r-1))}{n}\right\}$ ← progressão aritmética de razão 1

$= \exp\left\{-\frac{(1+(r-1))(r-1)}{2n}\right\} = \exp\left\{\frac{-r(r-1)}{2n}\right\}$

Problema dos Reencontros

Suponha uma urna que contenha bolas numeradas ①,②,..., ⓝ. Selecionamos todas as bolas da urna, uma de cada vez e sem reposição.
Dizemos que na seleção j ou na j-ésima seleção há um reencontro se a bola de nº j foi a selecionada nessa seleção.

A_j = "ocorre um reencontro na j-ésima seleção", $j = 1, \dots, n$.

$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = P(\text{ocorrer pelo menos um reencontro})$

$= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) + \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ ⊛

... indução

$\Omega = \{(1,2,\dots,n), (2,1,\dots,n), \dots, (3,2,\dots,n)\}$: espaço das permutações de $1,2,\dots,n$

$\#(\Omega) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

$P(A_1) = \frac{(n-1)(n-2)\dots 1}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{n\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n} = P(A_j)$ reencontrar o elemento 1 na 1ª seleção , $j = 2,3,\dots$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1 \times 1 \times (n-2) \times (n-3) \dots 1}{n!} = \frac{\cancel{(n-2)!}}{n(n-1)\cancel{(n-2)!}} = \frac{1}{n(n-1)} = P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$

...ção:

$$\sum_{j=1} \frac{1}{n} - \sum_{1\le j_1<j_2\le n} \frac{1}{n(n-1)} + \sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le n} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \quad **$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(-1) = 1 + (-1) + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] \cong 1 - \exp(-1) \text{ para } n \text{ significativamente grande}$$

$$\cong 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$$

Probabilidade Condicional

2) Exemplo: Dado um dado honesto $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(\{j\}) = \frac{1}{6}, \quad j = 1,2,\dots,6$$

B = "ocorre face par = $\{2,4,6\}$"

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

A = "ocorre face 2" $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

$P(A|B)$ = probabilidade condicional do evento A dado que o evento B ocorreu $= \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

5) Definição: Dados A e B eventos com $P(B) > 0$, $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Se $P(A) > 0$, então $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$ para $P(A)$ e $P(B)$ maiores que zero

5B
2V

Bolas

Urna

selecionamos duas bolas, ao acaso, uma de cada e sem reposição.

$$\begin{cases} B_1 = \text{bolas brancas na } 1^{a} \text{ seleção} \\ V_2 = \text{" vermelhas " } 2^{a} \text{ seleção} \end{cases}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 | B_1)\, P(B_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7}$$

$$P:(\cdot | B): \sigma(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longrightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

① $P(\Omega | B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

② $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B)$ Fazer: "exercício"

Suponha A_1, A_2, A_3, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) . P(A_3) =$

$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) . P(A_2 | A_1) . P(A_1)$.

se $P(A_1 \cap A_2) > 0 \Rightarrow P(A_1) > 0$

Suponha n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\, P(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots P(A_3 | A_1 \cap A_2) . P(A_2 | A_1)\, P(A_1) \quad \text{se} \quad P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$$

Independência de Eventos

eventos disjuntos são dependentes pois se 1 ocorre o outro não ocorre.

Definição 1) Dois eventos A e B dizem-se ~~estatisticamente (pro~~ estocasticamente (probabilisticamente) independentes, se

$$P(A|B) = P(A) \quad (P(A) > 0,\ P(B) > 0)$$

se

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) . P(B) = P(A)\, P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Definição 2) Dois eventos A e B são probabilisticamente independentes se, e somente se,

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ vantagem das probabilidades podem ser zero.

Fato (1) ϕ é independente de qualquer evento A

(2) Ω " " " " A

$\ldots = P(\phi) = 0 = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{P(\phi)} \cdot P(A)$

$\ldots(\Omega \cap A) = P(A) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{P(\Omega)} \cdot P(A)$

(3) Se A e B forem independentes, então:

(a) A^c e B são independentes (*)

(b) A e B^c " " "

(c) A^c e B^c " " "

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) = \underbrace{(B \cap A) \cup (B \cap A^c)}_{\text{mutuamente exclusivos}}$$

$$\Rightarrow P(B) = \underbrace{P(B \cap A)}_{P(B) \cdot P(A)} + P(B \cap A^c)$$

$$\Rightarrow P(B \cap A^c) = P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(B)\,[1 - P(A)] = P(B)\,P(A^c)$$

Exercício "mostrar item (b) e (c)"

Independência de três eventos

Def: Suponha A_1, A_2, A_3 eventos. Eles são independentes se

(1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

(2) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$

(3) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$

(4) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

$P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 \cup A_2)$

para chegar nesse resultado precisa do (4)

Contra-exemplo: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$$

Suponha os eventos

$$A_1 = \{\omega_1, \omega_2\},\ A_2 = \{\omega_1, \omega_3\},\ A_3 = \{\omega_1, \omega_4\}$$

$P(A_1 \cap A_2) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} = \underbrace{P(A_1)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(A_2)}_{1/2}$

$P(A_1 \cap A_3) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Exercício Mostre que se A_1, A_2, A_3 independentes

$$P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 \cup A_2)$$

05/01/2012 $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$

Suponha A_1, A_2, A_3 eventos associados a um espaço de probab. (Ω, P)

Definição: A_1, A_2, A_3 são estocasticamente independentes se, e somente se, valerem

1) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
2) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$
3) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$
4) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$

Para mostrar que são independentes devemos mostrar as 4 propriedades.

Fato: Se A_1, A_2, A_3 são independentes, então

① A_1^c, A_2, A_3 ; A_1, A_2^c, A_3 ; A_1, A_2, A_3^c ; A_1^c, A_2^c, A_3 ; A_1, A_2^c, A_3^c ; ..., A_1^c, A_2^c, A_3^c são independentes

Definição: Os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ são independentes, se e, somente se valerem

① $P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2})$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$

② $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) P(A_{j_3})$, $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n$

$\vdots$

$(n-1)$ $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$

$$N = \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n}$$

Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} x^K y^{n-K} \quad , x, y \in \mathbb{R}$$

se $x = y = 1 \Rightarrow 2^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K}$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \Rightarrow N = 2^n - 1 - n$$

O conceito de independência é usado para construir (Ω, P). Então,

① Suponhamos, ensaios de Bernoulli com $P(S) = p$ e $P(F) = q$ em cada ensaio. Suponhamos também que os ensaios sejam independentes $\begin{cases} "S" = 1 \\ "F" = 0 \end{cases}$

$$\Omega = \{\underbrace{(1)}_{\omega_1}, \underbrace{(0,1)}_{\omega_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\omega_3}, \dots\}$$

$P(\{1\}) = P(S) = p$

$P(\{0,1\}) = q \cdot p$

$\vdots$

$P(\{\underbrace{0,0,0,\dots,0}_{n},1\}) = q^n \cdot p$

...odo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{j \geq 1} I_A(\omega_j) P(\{\omega_j\})$

...delo probabilístico é construir um espaço amostral com suas probabilidades

...xemplo ②: Suponhamos n $(n \geq 1)$ ensaios independentes de Bernoulli com $P(S) = p$ e $P(F) = q = 1 - p$, em cada ensaio onde $0 < p < 1$. Observamos o nº de sucessos

IRRELEVANTE

→ indivíduo ... ocorre

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\}$ melhor escrever $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_j = 0, 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$

$$P(\{\omega\}) = P(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}) = p^{\omega_1} q^{1-\omega_1} * p^{\omega_2} q^{1-\omega_2} * \ldots * p^{\omega_n} q^{1-\omega_n} =$$

$$= p^{\sum_{j=1}^{n} \omega_j} q^{n - \sum_{j=1}^{n} \omega_j}$$

$$P(\{\omega_1\}) = p^{\omega_1} q^{1-\omega_1} = \begin{cases} p & \text{se } \omega_1 = 1 \\ q & \text{se } \omega_1 = 0 \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{n} \omega_j =$ nº de sucessos das sequência $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

$n - \sum_{j=1}^{n} \omega_j =$ nº de fracassos das sequência $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$

Seja $A_k =$ "ocorrem exatamente k sucessos" ; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

→ subconjunto de Ω

$$A_k = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \sum_{j=1}^{n} \omega_j = k\} \Rightarrow P(A_k) = \sum_{\omega : \omega \in A_k} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega : \omega \in A_k} p^k q^{n-k}$$

$$\#(\Omega) = \underbrace{2 * 2 * 2 * \ldots * 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$$

Se $p = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ se $p = \frac{1}{2}$ tinha Laplace (prob clássica)

$$= \#(A_k) p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$: modelo Binomial

Exemplo: Modelo dos sucessos de Laplace

...rnas

①	②	...	(N+1)
0 V, N B	1 V, (N-1) B	2 V, (N-2) B ...	N V, 0 B

Selecionamos, ao acaso, uma urna e dessa urna selecionamos bolas, ao acaso, ...ma de cada vez e com reposição.

Seja $A_n =$ "ocorrem bolas vermelhas nas n primeiras seleções". $(n \geq 1)$

→ evento

$U_j =$ "a urna j é selecionada", $j = 1, \ldots, N+1$

$$A_n = \underbrace{(A_n \cap U_1) \cup (A_n \cap U_2) \cup \ldots \cup (A_n \cap U_{N+1})}_{\text{mutuamente exclusivos pois é impossível de escolher mais de uma urna ao mesmo tempo.}} = \bigcup_{j=1}^{N+1} (A_n \cap U_j)$$

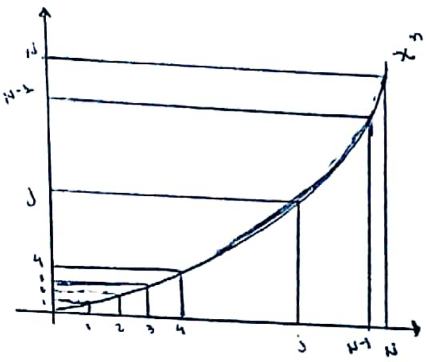
$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{j=1}^{N+1}(A_n \cap U_j)\right) = \sum_{j=1}^{N+1} P(A_n \cap U_j) = \sum_{j=1}^{N+1} \underbrace{P(A_n|U_j)}_{\left(\frac{j-1}{N}\right)^n} . \underbrace{P(U_j)}_{\left(\frac{1}{N+1}\right)} =$$

com reposição (independentes)

$$= \frac{1}{N^n(N+1)} \sum_{j=1}^{N+1} (j-1)^n = \frac{1}{N^n(N+1)} (1^n + 2^n + \dots + N^n) \quad (*)$$

j-1 V
N-j+1 B

(j) — urna j



Função crescente: derivada 1ª > 0
convexa: " 2ª > 0

$$(*) \cong \frac{1}{N^n(N+1)} \int_0^N x^n\,dx = \frac{1}{N^n(N+1)} \left\{ \left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} \Big|_0^N \right\} = \frac{1}{N^n(N+1)} \left(\frac{N^{n+1}}{n+1}\right) \cong \left(\frac{N}{N+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$P(A_{n+1}) \cong \left(\frac{N}{N+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$A_{n+1} \subseteq A_n$

Modelo de Urna de Polya

Uma urna contém "b" bolas brancas e "v" bolas vermelhas. Selecionamos ao acaso bolas da urna uma de cada vez tal que após cada seleção a bola selecionada é devolvida à urna juntamente com "c" bolas da mesma cor da bola selecionada.

B_n = " a bola selecionada na n-ésima seleção é "branca".

V_n = " a bola selecionada na n-ésima vermelha", $n \geq 1$

$$P(B_1) = \frac{b}{b+v} \quad , \quad P(V_1) = \frac{v}{b+v}$$

$$B_2 = \underbrace{(B_1 \cap B_2) \cup (V_1 \cap B_2)}_{\text{mutuamente exclusivos}}$$

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1) . P(B_1) + P(B_2|V_1) P(V_1) \overset{(*)}{=} \frac{b(b+c+v)}{(b+c+v)(b+v)} = \frac{b}{b+v}$$

$P(B_2|B_1) = \dfrac{b+c}{b+c+v}$ $\qquad P(B_2|V_1) = \dfrac{b}{b+c+v}$

mostre que

$$P(B_n) = \frac{b}{b+v} \quad e \quad P(V_n) = \frac{v}{b+v}, \text{ para todo } n \geq 1$$

Prova: Indução Finita para $n \geq 1$. "Lar"

1- Verificar que $P(B_1) = \dfrac{b}{b+v}$ e $P(V_1) = \dfrac{v}{b+v}$

2- Suponha que $P(B_n) = \dfrac{b}{b+v}$ e $P(V_n) = \dfrac{v}{b+v}$ para $n > 1$ n fixo.

3- Provar que vale $P(B_{n+1}) = \dfrac{b}{b+v}$ e $P(V_{n+1}) = \dfrac{v}{b+v}$ para $n \neq 1$.

—" —" —" —"

Exemplo: Você visita um casal com dois filhos mas desconhece os sexos das crianças.

o mais velho

$$\Omega = \{(m_1,m_2), (m_1,f_2), (f_1,m_2), (f_1,f_2)\}$$

Supor $P\{(m_1,m_2)\} = P\{(m_1,f_2)\} = P\{(f_1,m_2)\} = P\{(f_1,f_2)\} = 1/4$

B = "um menino é visto".

então

$$B = \{(m_1,m_2), (m_1,f_2), (f_1,m_2)\}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

A = "o casal tem dois meninos" $= \{(m_1,m_2)\}$ $\qquad A \subseteq B$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{m_1,m_2\})}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{P(A) = \frac{3}{12}}_{\text{prob. sem informação}} \qquad \underbrace{P(A|B) = \frac{4}{12}}_{\text{prob. com informação}}$$

prob. "a priori do evento" $\qquad$ prob. "a posteriori do evento".

C = "o menino é visto e é o filho mais velho" $= \{(m_1,m_2), (m_1,f_2)\}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

Teorema (Resultado) de Bayes (XVIII)

Suponha eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ 2 a 2 mutuamente exclusivos.

Suponha B evento qualquer tal que $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

Logo, $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$

$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) P(A_n)$

ou seja,

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) P(A_j)$$

Agora,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) P(A_j)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

TEOREMA DE BAYS

$P(A_i)$: probabilidade "a priori" de A_i.

$P(A_i|B)$: probabilidade "a posteriori" de A_i.

$P(A_i|B) = K \underbrace{P(B|A_i)}_{\text{verossimilhança}} P(A_i)$

Exemplo: Itens em uma indústria são produzidos por duas máquinas: I e II. A porcentagem defeituosos produzidos por "I" é 1% e por "II" é 3%.

Da produção total 20% provém de I e 80% provém de II. Suponha um lote de itens da produção e suponha que ~~seleciona~~ selecionamos 1 item desse lote

D = "o item selecionado é defeituoso".

A_1 = " " " " foi produzido por I".

A_2 = " " " " " " " II".

$P(A_1) = 0{,}20$; $P(A_2) = 0{,}80$ "a priori"

$P(D|A_1) = 0{,}01$; $P(D|A_2) = 0{,}03$

$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) = P(D|A_1) P(A_1) + P(D|A_2) \cdot P(A_2)$

$= 0{,}01 \times 0{,}20 + 0{,}03 \cdot 0{,}80 = 0{,}026$

$= \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A_1)\,P(A_1)}{P(D)} = \dfrac{0{,}002}{0{,}026} = 0{,}0769$

$P(A_2|D) = 0{,}9231$

Simulação do lançamento de uma moeda honesta

$$\begin{cases} P(\text{cara}) = p & 0<p<1 \\ P(\text{coroa}) = q = 1-p \end{cases}$$

Lançamos a moeda 2 vezes: se ocorre $(c,\bar{c})$ tenho S = sucesso; se ocorre $(\bar{c},c)$ tenho um fracasso; se ocorre (c,c) ou $(\bar{c},\bar{c})$ repito o experimento

$P(cc \text{ ou } \bar{c}\bar{c}) = p^2 + q^2 = 1-2pq$ e assim por diante.

se deu cara/coroa é sucesso

$P(S) = pq + (1-2pq)pq + (1-2pq)^2 pq + \dots$

$= \dfrac{pq}{1-(1-2pq)} = \dfrac{pq}{2pq} = \dfrac{1}{2}$ a honesta

Variáveis Aleatórias

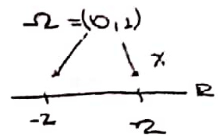
Obs: [illegible] retas é uma variável alea[illegible]

Exemplo: Suponha um ensaio de Bernoulli com $P(S)=p$ e $P(F)=1-p$, $0<p<1$, $\Omega = \{0,1\}$. Seja $X: \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida.

$X(0) = -2$ e $X(1) = +2$; X uma variável aleatória

$X^{-1}(\{-2\}) = \{w \in \Omega : X(w) = -2\} = (X=-2) = \{0\}$ → fracasso

$X^{-1}(\{2\}) = \{w \in \Omega : X(w) = 2\} = (X=2) = \{1\}$ → sucesso

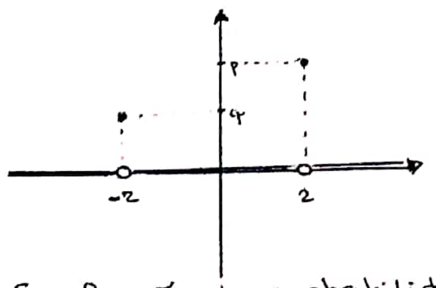


$\left.\begin{aligned} P(X=-2) &= P(\{0\}) = q \\ P(X=+2) &= P(\{1\}) = p \end{aligned}\right\}$ Distribuição de probabilidade de X.

Seja $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por $f_X(x) = P(X=x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f_X(x) = P(X=x) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x\}) = P(X^{-1}(\{x\})) = \begin{cases} q & \text{se } x=-2 \\ p & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } x \neq -2, 2 \end{cases}$$

$$= q\, I_{\{-2\}}(x) + p\, I_{\{2\}}(x)$$

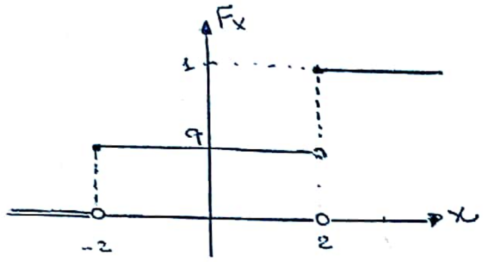


f_X : função de probabilidade de X, f.p.

Seja $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$
$$= P(X^{-1}(-\infty, x]) \text{, para todo } x \in \mathbb{R}$$

F_X função distribuição acumulativa



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -2 \\ q & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= q\, I_{[-2,2)}(x) + p\, I_{[2,+\infty]}(x)$$

① F_X é uma função escada crescente.

② $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} F_X = 0$

Dada a função F_X então $f_X(x) = P(X = x)$ = tamanho do salto de F_X no ponto x

$f_X(-2) = q$; $f_X(-2{,}5) = 0 = f_X(0)$

$f_X(2) = P(X = 2) = 1 - q = p$