30/09

Pasta 05
Nº cópias 85

Testes de hipóteses

Formulação geral

X: v.a. (ou vetor aleatório) observável, cuja distribuição P_θ pertence a uma classe

$$\mathcal{P} = \{ P_\theta, \; \theta \in \Omega \}$$

Duas hipóteses acerca da distribuição de X são formuladas:

1. $P_\theta \in H$
2. $P_\theta \in K$

sendo $H \cup K = \mathcal{P}$ e H e K mutuamente exclusivas.

Essas hipóteses correspondem à partição Ω_H, Ω_K de Ω:

$\Omega_H \cup \Omega_K = \Omega$ e Ω_H e Ω_K são mutuamente exclusivos.

Após observar X uma decisão deve ser tomada:

"aceitar ou rejeitar H".

Aceitar H: afirmar que $P_\theta \in H$, a hipótese (hipótese nula de interesse).

Rejeitar H: afirmar que $P_\theta \in K$, a classe das alternativas.

Decisão: $\delta(X)$

Aceitar H: $\delta(X) = d_0$

Rejeitar H: $\delta(X) = d_1$

Um teste (não aleatorizado) atribui a cada valor possível x de X uma das duas decisões e divide, portanto, o espaço amostral $\mathcal{X}$ em dois subconjuntos S_0 e S_1, uma partição de $\mathcal{X}$.

L.N.P

$H: p_0$ contra $K: p_1$

$E_0\{\phi(X)\} = \alpha$ [1]

$$\phi(X) = \begin{cases} 1, & \text{qdo } p_1(x) > p_0(x) \\ 0, & " \end{cases}$$

Teste; Se $x \in S_0$

H é aceita (não rejeitada)

Se $x \in S_1$,

H é rejeitada.

S_1: região de rejeição (região crítica)

$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$

$\Omega = \Omega_H \cup \Omega_K$ (partição)

$H: \theta \in \Omega_H$

$K: \theta \in \Omega_K$

T. não aleatorizado

$\mathfrak{X} = S_0 \cup S_1$ (partição)

Erro I / Erro II → não rejeitar H, sendo H falsa

↳ rej. H, sendo H verdadeira

α: nível de significância

$\alpha = P(\text{erro I}) = P_\theta(X \in S_1), \theta \in \Omega_H$

Se $X \in S_0$, a hipótese (H) é aceita.

Se $X \notin S_0$, i.e., se $X \in S_1$, a hipótese (H) é rejeitada.

S_0: região de aceitação

S_1: região de rejeição (região crítica)

Ao se realizar um teste de hipótese, pode-se tomar a decisão correta ou se cometer 2 tipos de erro:

Erro tipo 1; erro de 1ª espécie: rejeitar a hipótese (H) quando ela é verdadeira.

Erro tipo 2; erro de 2ª espécie: aceitar a hipótese (H) quando ela é falsa.

É desejável que o teste seja tal que as probabilidades dos dois tipos de erro sejam pequenas.

Em geral, para um tamanho de amostra fixado, não é possível controlar as duas probabilidades simultaneamente.

É usual selecionar um nº α entre 0 e 1, o nível de significância, e impor a condição

(1) $P_\theta\{\delta(X) = d_1\} = P_\theta\{X \in S_1\} \leq \alpha$,

para todo $\theta \in \Omega_H$.

Sujeito a essa condição, é desejável minimizar

(2') $P_\theta\{\delta(X) = d_0\}$, para todo $\theta \in \Omega_K$

ou, equivalentemente, maximizar

(2) $P_\theta\{\delta(X) = d_1\} = P_\theta\{X \in S_1\}$,

para todo $\theta \in \Omega_K$.

Em geral, um teste que satisfaz (1) e maximiza (2), também satisfaz

$$\sup_{\theta \in \Omega_H} P_\theta\{X \in S_1\} = \alpha.$$

Chamamos $\sup_{\theta \in \Omega_H} P_\theta\{X \in S_1\}$ de tamanho (size) do teste ou tamanho da região crítica.

Note que (1) impõe que o tamanho do teste não exceda α, o nível de significância.

A probabilidade de rejeição

$$P_\theta\{\delta(x) = d_1\} = P_\theta\{X \in S_1\}$$

para um dado $\theta \in \Omega_K$ é chamado de poder do teste para a alternativa θ.

Considerada como uma função de θ, para todo $\theta \in \Omega$, essa probabilidade é chamada de função de poder do teste e é denotada por $\beta(\theta)$.

Escolha de α: arbitrária.

Valores usuais para α: 0,01 ; 0,05 ; 0,10.

Note que o poder do teste para certos valores de θ pode ser bem baixo. Isto não é controlado.

Uma forma de evitar a arbitrariedade da escolha do nível de significância α é fornecer o nível descritivo (probabilidade de significância, "p-value", p-valor).

$\hat{p} = \hat{p}(x)$: menor nível de significância para o qual a hipótese seria rejeitada para a amostra observada x.

Este número dá uma ideia de quão fortemente os dados contradizem a hipótese.

Quanto menor $\hat{p}$, mais evidência contra H.

Se α é fixado, H é rejeitada sse $\hat{p} \leq \alpha$.

Voltaremos a esse assunto posteriormente.

Testes Aleatorizados

Para um dado valor observado x de X, um teste aleatorizado escolhe entre duas decisões, rejeitar H ou aceitar H, com certas probabilidades que dependem de x e que serão denotadas por

$$\phi(x) \quad e \quad 1-\phi(x),$$

respectivamente.

Se o valor observado de X é x, um experimento aleatório é realizado. Este tem dois possíveis resultados: R e $\bar{R}$, com probabilidades $\phi(x)$ e $1-\phi(x)$ respectivamente.

Se ocorre R, H é rejeitada.

Se ocorre $\bar{R}$, H é aceita.

O teste aleatorizado é totalmente especificado por ϕ, a chamada função crítica, com $0 \leq \phi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Teste não aleatorizado:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S_1 \\ 0, & \text{se } x \in S_0. \end{cases}$$

Se a distribuição de X é P_θ e a função crítica ϕ é usada, a probabilidade de rejeição (probabilidade de ocorrer R) é:

$$E_\theta\{\phi(X)\} = \int \phi(x)\, dP_\theta(x),$$

(i.e., a probabilidade condicional de R dado que $X=x$, $\phi(x)$, integrada com respeito à distribuição de probabilidade de X).

O procedimento usual é selecionar ϕ que maximize o poder

$$\beta_\phi(\theta) = E_\theta\{\phi(X)\}, \text{ para todo } \theta \in \Omega_K,$$

sujeito à restrição

$$E_\theta\{\phi(X)\} \leq \alpha, \text{ para todo } \theta \in \Omega_H.$$

Problema: é possível que o teste que maximiza o poder dependa de θ $(\in \Omega_K)$, ou seja, dependa da alternativa que está sendo considerada.

Não existe, neste caso, um teste mais poderoso para todo $\theta \in \Omega_K$.

Há casos, no entanto, que um mesmo teste maximiza o poder para todo $\theta \in \Omega_K$:

teste uniformemente mais poderoso.

Lema de Neyman-Pearson: idéia

Classe de distribuições simples: contém apenas um elemento.

Classe de distribuições composta: contém dois ou mais elementos.

Consideremos as hipóteses simples:

$$H = \{P_0\} \quad e \quad K = \{P_1\}.$$

Vamos admitir que P_0 e P_1 são distribuições discretas com

$$P_i\{X = x\} = P_i(x), \quad i = 0, 1.$$

O teste ótimo satisfaz (considerando apenas testes não aleatorizados)

$$\sum_{x \in S} P_0(x) \leq \alpha$$

e

$$\sum_{x \in S} P_1(x) = \text{máximo},$$

sendo S a região crítica.

Para construir S devemos escolher pontos de $\mathcal{X}$ tais que $P_1(x)$ seja relativamente grande comparado com $P_0(x)$.

Seja

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_0(x)}.$$

S deve ser o conjunto de todos os pontos $x \in \mathcal{X}$ para os quais

$$r(x) > c,$$

onde c é determinado pela condição

$$P_0\{X \in S\} = \sum_{x:\, r(x) > c} P_0(x) = \alpha.$$

Problema: pode ocorrer que, ao incluir um dado ponto x em S, o valor α, que não havia sido alcançado, seja ultrapassado.

(necessidade de aleatorização).

Teorema: Lema Fundamental de Neyman-Pearson

Sejam P_0 e P_1 distribuições de probabilidade com densidades p_0 e p_1, respectivamente, com respeito a uma medida μ.

(i) Existência. Para testar

$H: p_0$ contra a alternativa $K: p_1$

existe um teste ϕ e uma constante k tais que

$$E_0\{\phi(X)\} = \alpha \qquad [1]$$

e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } p_1(x) > k\, p_0(x) \\ 0, & \text{quando } p_1(x) < k\, p_0(x). \end{cases} \qquad [2]$$

(ii) Condição suficiente para um teste ser mais poderoso: Se um teste satisfaz [1] e [2] para algum k, então ele é mais poderoso para testar p_0 contra p_1 de nível α.

(iii) Condição necessária para um teste ser mais poderoso. Se ϕ é mais poderoso de nível α para testar p_0 contra p_1, então, para algum k ele satisfaz [2] q.c.-μ.

Ele também satisfaz [1] a menos que exista um teste de tamanho menor do que α e com poder 1.

Prova.

Para $\alpha=0$ e $\alpha=1$, é fácil ver que o teorema vale desde que $k=+\infty$ seja admitido em [2] e $0 \times \infty$ seja interpretado como zero.

A seguir assumiremos que $0<\alpha<1$.

(i) Seja $\alpha(c) = P_0\{p_1(X) > c\, p_0(X)\}$

Como a probabilidade é computada sob P_0, a desigualdade pode ser considerada para o conjunto em que $p_0(x)>0$.

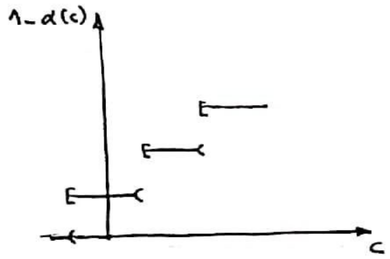
Então,

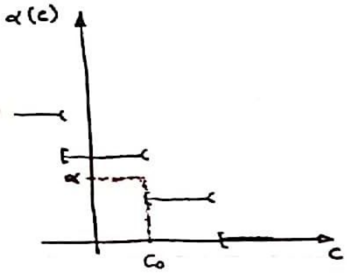
$$\alpha(c) = P_0\left\{ \frac{p_1(X)}{p_0(X)} > c \right\}$$

e

$$1-\alpha(c) = P_0\left\{ \frac{p_1(X)}{p_0(X)} \leq c \right\}$$

é uma f.d.a.. Logo, $\alpha(c)$ é não crescente e contínua à direita.





$$P_0\left\{ \frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c \right\} = \alpha(c^-) - \alpha(c),$$

$\alpha(-\infty) = 1$ e $\alpha(+\infty) = 0$.

Dado qualquer $0 < \alpha < 1$, seja c_0 tq

$$\alpha(c_0) \le \alpha \le \alpha(c_0^-)$$

e defina o teste ϕ como

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } p_1(x) > c_0 p_0(x) \\ \dfrac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)}, & \text{quando } p_1(x) = c_0 p_0(x) \\ 0, & \text{quando } p_1(x) < c_0 p_0(x) \end{cases}$$

A expressão na linha central tem sentido a menos que $\alpha(c_0) = \alpha(c_0^-)$, mas, nesse caso

$$P_0\{ p_1(X) = c_0 p_0(X) \} = 0.$$

Então, ϕ está definida qc-P_0.

O tamanho do teste ϕ é

$$E_0\{\phi(X)\} = P_0\left\{ \frac{p_1(X)}{p_0(X)} > c_0 \right\} + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)} P_0\left\{ \frac{p_1(X)}{p_0(X)} = c_0 \right\}$$

$$= \alpha(c_0) + \frac{\alpha - \alpha(c_0)}{\cancel{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)}} \left(\cancel{\alpha(c_0^-) - \alpha(c_0)} \right)$$

$$= \alpha.$$

Basta agora tomar $k = c_0$.

(ii) Suponha que ϕ é um teste que satisfaz [1] e [2] e seja ϕ^* um outro teste qualquer com $E_0\{\phi^*(x)\} \leq \alpha$.

Provar que $\phi(x)$ é teste + poderoso de nível α, i.e., o poder de $\phi(x)$ é maior que o de $\phi^*(x)$.

Sejam

$$S^+ = \{x \in \mathcal{X} : \phi(x) - \phi^*(x) > 0\}$$

$$S^- = \{x \in \mathcal{X} : \phi(x) - \phi^*(x) < 0\}$$

$\phi(x) = \begin{cases} 1, \ldots \\ 0, \ldots \end{cases}$

- Se $x \in S^+$, então $\phi(x) > 0$ e $p_1(x) \geq k p_0(x)$.
- Se $x \in S^-$, então $\phi(x) < \phi^*(x) \leq 1$ e $p_1(x) \leq k p_0(x)$.

Logo,

$$\int (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0)\, d\mu =$$

$$\int_{S^+ \cup S^-} (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0)\, d\mu \geq 0$$

Em S^+ $\int \ldots d\mu \geq 0$ e em S^- $\int \ldots d\mu \geq 0$.

Então,

$$E_1\{\phi(x)\} - E_1\{\phi^*(x)\} = \int (\phi - \phi^*)\, p_1\, d\mu \geq k \int (\phi - \phi^*)\, p_0\, d\mu$$

$$= k\left[E_0\{\phi(x)\} - E_0\{\phi^*(x)\}\right] \geq k(\alpha - \alpha) = 0$$

$E_0\{\phi(x)\} = \alpha$, $E_0\{\phi^*(x)\} \leq \alpha$

(iii) Seja ϕ^* um teste mais poderoso de nível α para testar p_0 contra p_1 e seja ϕ um teste que satisfaz [1] e [2].

Note que $S^+ \cup S^-$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{X}$ para os quais $\phi^*(x) \neq \phi(x)$.

Seja

$$S = (S^+ \cup S^-) \cap \{x \in \mathcal{X} : p_1(x) \neq k\, p_0(x)\}.$$

Queremos mostrar que $\mu(S) = 0$.

Admita que $\mu(S) \neq 0$.

Note que, em S, $(\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0) > 0$.

Então,

$$\int (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0)\, d\mu = \int_{S^+ \cup S^-} (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0)\, d\mu$$

$$= \int_S (\phi - \phi^*)(p_1 - kp_0)\, d\mu > 0.$$

Então,

$$\int(\phi-\phi^*)\,p_1\,d\mu > k\int(\phi-\phi^*)\,p_0\,d\mu$$

$$= k\Big(\underbrace{E_0(\phi(X))}_{=\alpha} - \underbrace{E_0(\phi^*(X))}_{\leq\alpha}\Big) \geq 0,$$

ou seja,

$$\underbrace{E_1\{\phi(X)\}}_{\text{poder de }\phi} > \underbrace{E_1\{\phi^*(X)\}}_{\text{poder de }\phi^*}$$

Contradição, pois ϕ^* é mais poderoso.

Portanto, $\mu(S)=0$, e conclui-se que todo teste mais poderoso de nível α para testar p_0 contra p_1 satisfaz [2] para algum k.

Se ϕ^* tivesse tamanho $<\alpha$ e poder <1, seria possível incluir pontos (ou "porções de pontos") na região crítica para aumentar o poder até atingir 1 ou o tamanho atingir α. Então,

$$E_0\{\phi^*(X)\}=\alpha \quad \text{ou} \quad E_1\{\phi^*(X)\}=1.$$

OBS.: O teste mais poderoso é determinado de forma única (a menos de um conjunto de medida μ nula) por [1] e [2] sempre que $p_1(x) = k\,p_0(x)$ tem medida μ nula.

↳ Este teste é não-aleatorizado.

Corolário. Seja β o poder do teste mais poderoso de nível α $(0<\alpha<1)$ para testar P_0 contra P_1.

Então, $\alpha<\beta$ a menos que $P_0=P_1$.

Prova.

Considere o teste $\phi(x)\equiv\alpha$.

Este tem poder α e claramente o poder β do teste mais poderoso é $\geq\alpha$, i.e $\beta\geq\alpha$.

Se $0<\alpha=\beta<1$, o teste $\phi(x)\equiv\alpha$ é mais poderoso e, pelo Teorema (iii) ele deve satisfazer [2].

Então, $p_0(x)=p_1(x)$ qc-μ e, portanto,

$P_0=P_1$.

Ex. $X \sim b(p, n)$, $0 < p < 1$, $n = 10$

$H: p = p_0$; $K: p = p_1$, $0 < p_0 < p_1 < 1$.

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{p_1^{x}(1-p_1)^{10-x}}{p_0^{x}(1-p_0)^{10-x}}$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{p_1}{1-p_1} \cdot \frac{1-p_0}{p_0}}_{>1}\Bigg]^{x} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{10} > k$$

$$\iff x > k' = \left[\log k - 10 \log \frac{1-p_1}{1-p_0}\right] \times \left[\log\left(\frac{p_1}{1-p_1} \cdot \frac{1-p_0}{p_0}\right)\right]^{-1}.$$

Suponha que $p_0 = 0{,}4$ e $p_1 = 0{,}5$ e tome $\alpha = 5\%$.

$P_0\{X > 6\} = 0{,}0548$

$P_0\{X > 7\} = 0{,}0123$.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } x > 7 \\ \gamma, & \text{quando } x = 7 \\ 0, & \text{quando } x < 7 \end{cases}$$

γ é tal que

$$P_0\{X > 7\} + \gamma\, P_0\{X = 7\} = 0{,}05.$$

Então,

$$\gamma = \frac{0{,}05 - 0{,}0123}{0{,}0548 - 0{,}0123} = 0{,}887.$$

Poder do teste M.P.

$$E_1\{\phi(X)\} = P_1\{X > 7\} + 0{,}887\, P_1\{X = 7\}$$

$$= 0{,}0547 + 0{,}887 \cdot 0{,}1172 = 0{,}159$$

(baixo)

Alunos: refazer com $n = 30$.

Ex. $X_1, \dots, X_n$: iid, $X_i \sim N(\xi, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ conhecido

$H: \xi = 0$; $K: \xi = \xi_1$, $\xi_1 > 0$.

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{\exp\{-\sum (x_i - \xi_1)^2/(2\sigma^2)\}}{\exp\{-\sum x_i^2/(2\sigma^2)\}}$$

$$= \exp\left\{\frac{n\xi_1 \bar{x}}{\sigma^2} - \frac{n\xi_1^2}{2\sigma^2}\right\}$$

é estritamente crescente em $\bar{x}$.

O conjunto dos pontos x tq $\frac{p_1(x)}{p_0(x)} > k$ é equivalente ao dos pontos x tq $\bar{x} > k'$. Para determinar k', fixemos

$$P_0\{\bar{X} > k'\} = \alpha.$$

Se $\xi = 0$, $\bar{X} \sim N(0, \sigma^2/n)$. Logo, $k' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$,

onde $z_{1-\alpha}$ é o quantil de ordem $1-\alpha$ da distr. $N(0,1)$.

O teste MP de nível α rejeita H se $\bar{X} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$.

Teste não aleatorizado pois $P_0(\bar{X} = k') = 0$
abs. cont.

Testes uniformemente mais poderosos

Considere as hipóteses

$H: \theta \in \Omega_H$ e $K: \theta \in \Omega_K$

e admita que K é composta.

Definição Teste Unif. Mais Poderoso. Um teste ϕ de H contra K é uniformemente mais poderoso de nível α se

$$E_\theta\{\phi(X)\} \leq \alpha, \text{ para todo } \theta \in \Omega_H$$

e se, para todo teste ϕ^*, tq $E_\theta\{\phi^*(X)\} \leq \alpha$ p/ todo $\theta \in \Omega_H$,

$$E_\theta\{\phi(X)\} - E_\theta\{\phi^*(X)\} \geq 0, \text{ para todo } \theta \in \Omega_K.$$

O teste UMP tem nível α e maximiza o poder para todo $\theta \in \Omega_K$.

Ex: binomial (cont)

O teste MP de $H: p=0{,}4$ contra $K: p=0{,}5$ é também MP para

$$H: p = 0{,}4 \quad \text{contra} \quad K: p = p_1$$

qualquer que seja $p_1 > 0{,}4$ ($p_1 < 1$).

Então, ele é uniformemente mais poderoso para testar

$$H: p=0{,}4 \quad \text{contra} \quad K': p > 0{,}4.$$

Ex. Normal (cont)

O teste MP de $H: \xi = 0$ contra $K: \xi = \xi_1$, $\xi_1 > 0$, não depende de ξ_1.

Ele é uniformemente mais poderoso para testar

$$H: \xi = 0 \quad \text{contra} \quad K: \xi > 0.$$

Distribuições com razão de verossimilhanças monótona

Parâmetro: $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$.

→ Razão de Verossimilhança Monótona

A família de densidades $p_\theta(x)$ tem razão de verossimilhanças monótona, se existe uma função $T(x)$ a valores reais tal que para quaisquer θ e θ', $\theta < \theta'$, as distribuições P_θ e $P_{\theta'}$ são distintas e a razão

$$\frac{p_{\theta'}(x)}{p_\theta(x)}$$

é uma função não decrescente de $T(x)$.

Teste UMP em função de $T(x)$, onde p_θ tem razão de ver. mon. em $T(x)$.

Teorema. Seja θ um parâmetro real e seja X uma v.a. com densidade de probabilidade $p_\theta(x)$ com razão de verossimilhanças monótona em $T(x)$.

(i) Para testar $H: \theta \leq \theta_0$ contra $K: \theta > \theta_0$, existe um teste UMP que é dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } T(x) > c \\ \gamma, & \text{quando } T(x) = c \\ 0, & \text{quando } T(x) < c \end{cases} \qquad [3]$$

onde c e γ são determinados por

$$E_{\theta_0}\{\phi(X)\} = \alpha. \qquad [4]$$

(ii) A função de poder

$$\beta(\theta) = E_\theta\{\phi(X)\}$$

deste teste é estritamente crescente para todos os pontos θ para os quais $0 < \beta(\theta) < 1$.

(iii) Para todo θ', o teste determinado por [3] e [4] é UMP para testar $H: \theta \leq \theta'$ contra $K: \theta > \theta'$ com nível $\alpha' = \beta(\theta')$.

(iv) Para qualquer $\theta < \theta_0$ o teste minimiza $\beta(\theta)$ (probabilidade do erro de tipo 1.) entre todos os testes que satisfazem [4].

Dem:

(i) Considere inicialmente a hipótese $H^*: \theta = \theta_0$ a ser testada contra $K^*: \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$.

Como $p_\theta(x)$ tem RVM em $T(x)$,

$$\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)} = g(T(x)),$$

sendo $g(t)$ função não decrescente em t.

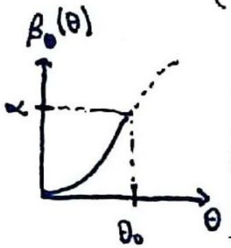
Pelo LNP, o teste, ϕ digamos, mais poderoso de H^* contra K^* é t.q.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } T(x) > c \\ 0, & \text{se } T(x) < c. \end{cases}$$

De maneira análoga à prova do LNP (parte (i)), pode-se mostrar que $\exists\, \gamma$ e $\exists\, c$ t.q. [3] e [4] sejam válidos.

Como este teste é MP para todo $\theta_1 > \theta_0$, ele é UMP para testar

$H^*: \theta = \theta_0$ contra $K: \theta > \theta_0$.



Falta mostrar (para concluir a parte (i)) que este teste é UMP para $H: \theta \leq \theta_0$ contra $K: \theta > \theta_0$ (substitui H^* por H).

Precisamos então mostrar que

$$E_\theta\{\phi(X)\} \leq \alpha \quad \text{para todo } \theta \leq \theta_0.$$

Isso é conseqüência da parte (ii) que passamos a demonstrar.

(ii) Pelo LNP (parte (ii): suficiência), o teste da parte (i) acima é MP para testar

$H': \theta = \theta'$ contra $K': \theta = \theta''$

de nível $\alpha' = \beta(\theta')$.

Agora, pelo Corolário do LNP, temos

$$\alpha' = \beta(\theta') < \beta(\theta''), \text{ para todo } \theta' < \theta''$$

tais que $0 < \beta(\theta') < 1$.

(iii) Prova-se de forma análoga a (i)-(ii).

(iv) segue do fato de que o teste que minimiza o poder para testar uma hipótese simples contra uma alternativa simples é obtido aplicando o LNP com todas as desigualdades invertidas.

<u>Nota</u>: O teorema acima vale para as hipóteses

$H: \theta \geq \theta_0$ contra $K: \theta < \theta_0$

desde que as desigualdades em [3] sejam invertidas.

Basta inverter as desigualdades.

- Ex. binomial (cont)

Para $p_1 > p_0$,

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \Big(\underbrace{\frac{p_1}{1-p_1} \quad \frac{1-p_0}{p_0}}_{>1} \Big)^x \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^n$$

é crescente em x.

Logo, o teorema acima garante que o teste que obtivemos é UMP de nível $\alpha = 0{,}05$ para

$H: p \leq 0{,}4$ contra $K: p > 0{,}4$

[redacted]

- Ex. normal (cont)

Vimos que, para $\xi_1 > 0$, $p_1(x)/p_0(x)$ é estritamente crescente em $\bar{x}$.

• Corolário: Família Exponencial Unidim. •
Seja θ um parâmetro real e seja X uma v.a. com densidade de probabilidade com respeito a uma medida μ

$$\bullet\ p_\theta(x) = \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\}\, h(x)$$

sendo $\eta(\theta)$ estritamente monótona.
Então existe um teste UMP para testar

$H: \theta \leq \theta_0$ contra $K: \theta > \theta_0$.

Se $\eta(\theta)$ é crescente

$\phi(x) = 1, \gamma, 0$, quando $T(x) >, =, < c$,

onde c e γ são determinados por $E_{\theta_0}\{\phi(X)\}$.

Se $\eta(\theta)$ é decrescente, as desigualdades são invertidas. $T(x)\ (<, =, >)\ c$

Ex. Um experimento com 2 possíveis resultados (sucesso e fracasso) é repetido independentemente até que ocorram m sucessos (m fixo).

y_i: nº de tentativas após o $(i-1)$-ésimo sucesso até (sem incluir) o i-ésimo sucesso.

ex: $\underbrace{F\,F\,F\,F}_{y_1=4}\ S\ \underbrace{F}_{y_2=1}\ S\ \underbrace{F}_{y_3=1}\ S\ \underbrace{S}_{y_4=0}$

• $P(Y_i = y) = p\, q^y, \quad y = 0, 1, 2, \ldots \quad (q = 1-p)$; •
• $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ são independentes. •

A densidade conjunta de $Y_1, \ldots, Y_m$ é

$$\bullet\ P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_m = y_m) = p^m\, q^{\Sigma y_i},$$

$$\bullet\ y_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

e é da forma de família exponencial unidimensional com

• $T(\underset{\sim}{y}) = \Sigma y_i$ e $\eta(p) = \log(1-p)$ • (função decrescente em p).

O teste UMP de
$H: p \leq p_0$ contra $K: p > p_0$
rejeita H quando T é pequeno.

Note que T é o número total de fracassos até a obtenção de m sucessos e tem distribuição binomial negativa

$$P(T=t) = \binom{m+t-1}{m-1} p^m q^t, \quad t=0,1,\ldots$$

(mostrar). (Para det. γ, precis. usar a dist. de T, dada acima)

Ex. Poisson. $X_1,\ldots,X_n$ iid, $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P_\lambda(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) = \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} e^{-n\lambda}, \quad x_i \in \{0,1,2,\ldots\}, \; i=1,\ldots,n,$$

é da forma da fam. exp. unidimensional com
$T(\underset{\sim}{x}) = \sum x_i$ e $\eta(\lambda) = \log \lambda$ (f ç crescente)

O teste UMP de

$H: \lambda \leq \lambda_0$ contra $K: \lambda > \lambda_0$

rejeita H para valores grandes de $\sum x_i$.

Aqui, $\sum X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$.

Aula 18, 14/10/15

Nível Descritivo (p-value).

Consideremos testes não-aleatorizados.

Suponha que, sob P_0, a distribuição de $p_1(x)/p_0(x)$ é contínua. Então, o teste MP de nível α de $H: P_0$ contra $K: P_1$ rejeita H se $p_1(x)/p_0(x) > k$, em que $k = k(\alpha)$ é determinado por $E_0(\phi(X)) = \alpha$.
prob. rejeição

Variando α, vemos que as regiões críticas S_α são aninhadas (encaixadas) ie,

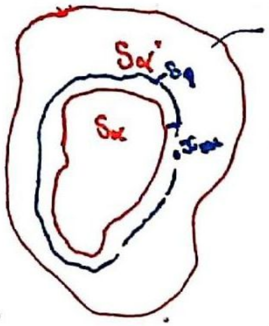
$$S_\alpha \subset S_{\alpha'} \text{ se } \alpha < \alpha'. \qquad [5]$$

Quando [5] ocorre, podemos determinar o menor nível de significância $\hat{p}$ para o qual a hipótese seria rejeitada para uma dada amostra. Formalmente,

$$\hat{p} = \hat{p}(X) = \inf\{\alpha : X \in S_\alpha\}.$$

Esse número é chamado de nível descritivo (p-value) e dá uma idéia de quão fortemente os dados contradizem a hipótese.

<u>Quanto menor $\hat{p}$, mais evidência há contra a hipótese.</u>



ampliando R.C. até incluir x_{obs}.

vinc. ao valor p.

$\alpha' > \alpha$

Nota: Pode-se generalizar a definição de p-value para incluir testes aleatorizados.

Para tal, assume-se que os testes são aninhados no sentido de que

$$\phi_\alpha(x) \leq \phi_{\alpha'}(x) \quad \text{para todo } x$$
$$\text{e} \quad \alpha < \alpha'.$$

Define-se

$$\hat{p} = \inf\{\alpha : \phi_\alpha(x) = 1\}.$$

Então, $\hat{p}$ é definido como o menor nível de significância para o qual a hipótese é rejeitada com probabilidade 1.

Ex. $X_1, \ldots, X_n$: iid, $X_i \sim N(\xi, \sigma^2)$, σ^2 conhecido

$H: \xi = 0$; $K: \xi > 0$

$$S_\alpha = \left\{ X = (X_1, \ldots, X_n) : \bar{X} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right\}$$

$$= \left\{ X : \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma}\right) > 1-\alpha \right\}$$

$$= \left\{ X : 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma}\right) < \alpha \right\}$$

onde Φ é fda da distribuição $N(0,1)$.

Dado um valor observado x de X, o inf sobre todo α em que a última desigualdade vale é

$$\hat{p} = \hat{p}(x) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sigma}\right).$$

ou seja,

$$\hat{p} = 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sigma}\right),$$

sendo que $Z \sim N(0,1)$.

Ou ainda,

$$\hat{p} = 1 - P_{\xi=0}\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}\,\bar{x}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - P_{\xi=0}(\bar{X} \leq \bar{x}) = P_{\xi=0}(\bar{X} > \bar{x}).$$

Note que, se $\xi = 0$, p/ $u \in (0,1)$:

$$P_{\xi=0}(\hat{p} \leq u) = P_{\xi=0}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma}\right) \leq u\right)$$

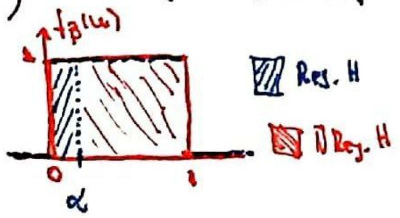
$$= P_{\xi=0}\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma}\right) \geq 1-u\right)$$

$$= 1 - P_{\xi=0}\left(\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma}\right) \leq 1-u\right)$$

$$= 1 - P_{\xi=0}\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(1-u)\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(1-u)\right) = 1 - (1-u) = u.$$

$\therefore$ Sob H_0, $\hat{p} \sim U(0,1)$.



Lema. Suponha que X tem distribuição P_θ para algum $\theta \in \Omega$ e considere a hipótese $H: \theta \in \Omega_H$.
Assuma que as regiões críticas satisfazem [5].

(i) Se

$$\sup_{\theta \in \Omega_H} P_\theta\{X \in S_\alpha\} \leq \alpha \text{ para todo } 0 < \alpha < 1, \quad [6]$$

então a distribuição de $\hat{p}$ sob $\theta \in \Omega_H$ satisfaz

$$P_\theta\{\hat{p} \leq u\} \overset{*}{\leq} u, \text{ para todo } 0 \leq u \leq 1. \quad [6']$$

(ii) Se, para $\theta \in \Omega_H$,

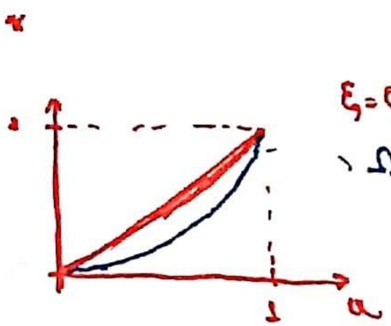
$$P_\theta\{X \in S_\alpha\} = \alpha, \text{ para todo } 0 < \alpha < 1, \quad [7]$$

então

$$P_\theta\{\hat{p} \leq u\} = u; \text{ para todo } 0 \leq u \leq 1,$$

i.e,

$$\hat{p} \sim U(0,1).$$



$\xi = 0$ (Ω_H simples) (ou composta com

- Ω_H composta $\sup_{\theta \in \Omega_H} P_\theta (X \in S_\alpha) \leq \alpha$

" " " " " $= \alpha$)

<u>Dem.</u>: <u>(i)</u>

$$\{\hat{p}(x) \leq u\} = \{x \in \mathcal{X} : \hat{p}(x) \leq u\}$$

$$= \{x \in \mathcal{X} : \inf\{\alpha : x \in S_\alpha\} \leq u\}$$

$$\subset \{x \in \mathcal{X} : x \in S_\nu\} \text{ para todo } \nu > u$$

(devido a [5]).

Para todo $\nu > u$ e $\theta \in \Omega_H$

$$P_\theta(\hat{p} \leq u) \leq P_\theta(X \in S_\nu) \leq \nu$$

(devido a [6]).

O resultado segue fazendo $\nu \to u$.

<u>(ii)</u> Por [5], $S_u \subset S_\alpha$ para todo $\alpha > u$.

$$\{x \in S_u\} \subset \{x \in \mathcal{X} : x \in S_\alpha \text{ para todo } \alpha > u\} \subset \{x \in \mathcal{X} : \hat{p}(x) \leq u\}.$$

Então, para $\theta \in \Omega_H$ que satisfaz [7], temos

$$u = P_\theta\{X \in S_u\} \leq P_\theta\{\hat{p} \leq u\} \qquad [8]$$

De [6'] e [8] segue que

$$P_\theta\{\hat{p} \leq u\} = u,$$

para $\theta \in \Omega_H$ que satisfaz [7].

Estimação Intervalar

• Limites de Confiança.

θ: parâmetro real, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$

Objetivo: estimar θ através de um subconjunto de valores "mais plausíveis" para θ pertencentes a Ω (usualmente um intervalo da forma $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$).

Vamos inicialmente considerar "intervalos unilaterais". $(-\infty, \bar{\theta})$ ou $(\underline{\theta}, +\infty)$

Seja $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X)$ uma função das observações a ser determinada.

Seleciona-se um número $1-\alpha$, γ, o coeficiente de confiança.

Vamos procurar $\underline{\theta}(X)$ tal que (prob. de cobertura)

$$P_\theta\{\underline{\theta}(X) \leq \theta\} \geq 1-\alpha, \text{ para todo } \theta. \quad \langle 1 \rangle$$

A função $\underline{\theta}$ é chamada de limite inferior de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

• É desejável que $\underline{\theta}(X)$ subestime θ o menos possível.

É desejável, portanto, que a probabilidade de que $\underline{\theta}(X)$ esteja abaixo de $\theta' < \theta$ seja mínima, qualquer que seja θ'.

Uma função $\underline{\theta}(X)$ tal que

$$P_\theta\{\underline{\theta}(X) \leq \theta'\} = \text{mínimo}, \text{ p/ todo } \theta' < \theta,$$

sujeito a $\langle 1 \rangle$ é chamada de limite inferior de confiança uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Seja $L(\theta, \underline{\theta})$ uma medida da perda resultante de se subestimar θ.

Para cada θ fixo, $L(\theta, \underline{\theta})$ está definida para $\underline{\theta} < \theta$, é não negativa para todo $\underline{\theta} < \theta$ e é não-crescente no 2º argumento.

Pulou esse trecho sobre f. perda

E' desejável minimizar

$$E_\theta \{ L(\theta, \underline{\theta}) \} \qquad \langle 2 \rangle$$

sujeito a $\langle 1 \rangle$.

Pode-se mostrar que um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado minimiza $\langle 2 \rangle$ sujeito a $\langle 1 \rangle$ para toda função de perda L (Problema 21, p 117, TSH; Problema 3.44, p. 102, TSH3).

De maneira mais geral, consideremos regiões de confiança (conjuntos de confiança).

Uma família de subconjuntos $S(x)$ do espaço paramétrico Ω é dita constituir uma família de regiões (conjuntos) de confiança com coeficiente de confiança $1-\alpha$ se

$$P_\theta \{ \theta \in S(X) \} \geqslant 1-\alpha, \text{ para todo } \theta \in \Omega.$$

Em outras palavras, o conjunto aleatório $S(X)$ cobre o verdadeiro valor do parâmetro com probabilidade de maior ou igual a $1-\alpha$.

Um limite inferior de confiança corresponde ao caso particular em que

$$S(x) = \{ \theta \in \Omega : \ \underline{\theta}(x) \leq \theta < \infty \}$$

Teorema:

(i) Para cada $\theta_0 \in \Omega$, seja $A(\theta_0)$ a região de aceitação de um teste de nível α de

$$H(\theta_0): \theta = \theta_0,$$

e, para cada amostra x seja $S(x)$ o conjunto dos valores do parâmetro

$$S(x) = \{\theta : x \in A(\theta), \theta \in \Omega\}.$$

obs. todos pontos no esp. param. que não são rej. pelo teste.

Então, $S(x)$ é uma família de regiões de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(ii) Se, para todo θ_0, $A(\theta_0)$ é UMP para testar $H(\theta_0)$ de nível α contra as alternativas $K(\theta_0)$, então para cada $\theta_0 \in \Omega$, $S(X)$ minimiza

prob. S(x) cobrir val. errados do θ é minimizada.

$$P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\}, \text{ para todo } \theta \in K(\theta_0).$$

entre todas as famílias de regiões de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Dem.:

(i) Pela definição de $S(x)$

$$\theta \in S(x) \iff x \in A(\theta),$$

e, então

$$P_\theta\{\theta \in S(X)\} = P_\theta\{X \in A(\theta)\} \geq 1-\alpha$$

(ii) Se $S^*(x)$ é qualquer outra família de conjuntos de confiança com coeficiente de confiança $1-\alpha$, e se

$$A^*(\theta) = \{x : \theta \in S^*(x)\},$$

então

$$P_\theta\{X \in A^*(\theta)\} = P_\theta\{\theta \in S^*(X)\} \geq 1-\alpha,$$

de tal forma que $A^*(\theta_0)$ é a região de aceitação de um teste de nível α de $H(\theta_0)$.

Como $A(\theta_0)$ é a região de aceitação de um teste UMP, então para qualquer $\theta \in K(\theta_0)$

$$P_\theta\{X \in A^*(\theta_0)\} \geq P_\theta\{X \in A(\theta_0)\}$$

e, portanto,

$$P_\theta\{\theta_0 \in S^*(X)\} \geq P_\theta\{\theta_0 \in S(X)\}, \quad \forall \theta \in K(\theta_0).$$

Note que $S(x)$ é o conjunto dos pontos $\theta \in \Omega$ para os quais a hipótese $H(\theta)$ é aceita quando x é observado.

Assim, para cada amostra x

$$\Omega = \underbrace{S(x)}_{\theta\text{'s para os quais } H(\theta) \text{ é aceita}} \cup \underbrace{S(x)^c}_{\theta\text{'s para os quais } H(\theta) \text{ é rejeitada.}}$$

Corolário.

Considere a família de densidades $p_\theta(x)$, $\theta \in \Omega$ com razão de verossimilhanças monótona em $T(x)$ e suponha que a fda $F_\theta(t)$ de $T = T(X)$ é uma função contínua em cada variável t e θ quando a outra é fixada.

(i) Existe um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado $\underline{\theta}$ para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(ii) Se x denota o valor observado de X e $t = T(x)$ e se a equação

$$F_\theta(t) = 1-\alpha \quad \langle 3 \rangle$$

tem uma solução $\theta = \hat{\theta}$ em Ω, então esta solução é única e $\underline{\theta}(x) = \hat{\theta}$.

$\underline{\theta} : F_\theta(t) = 1-\alpha$, p/ $\theta = \underline{\theta}$

Dem.

(i) Para cada θ_0, existe uma constante $C(\theta_0)$ tal que

$$P_{\theta_0}\{T > C(\theta_0)\} = \alpha,$$

pois $F_\theta(t)$ é contínua em t para θ fixo, e, como $p_\theta(x)$ tem RVM em $T(x)$, $T > C(\theta_0)$ é a região crítica de um teste UMP de nível α para testar $\theta = \theta_0$ contra $\theta > \theta_0$.

Coloca a dem. o foi à pg. 54.

Pelo corolário do LNP, o poder do teste é maior do que α para todo $\theta_1 > \theta$.

Logo, para $\theta_1 > \theta_0$

$$P_{\theta_1}\{T > C(\theta_0)\} = 1 - F_{\theta_1}(C(\theta_0)) > \alpha$$

enquanto que

$$P_{\theta_0}\{T > C(\theta_0)\} = 1 - F_{\theta_0}(C(\theta_0)) = 1 - F_{\theta_1}(C(\theta_1)) = \alpha.$$

Ou seja, para todo $\theta_1 > \theta_0$

$$F_{\theta_1}(C(\theta_0)) < 1-\alpha \quad e \quad F_{\theta_1}(C(\theta_1)) = 1-\alpha.$$

Como $F_\theta(t)$ é não decrescente em t, temos $C(\theta_0) < C(\theta_1)$ ($C(\theta)$ é estrita/ crescente).

Note que $C(\theta)$ é contínua

Seja $A(\theta_0)$ a região de aceitação $T \leq C(\theta_0)$ e $S(x)$ definida por

$$\theta \in S(x) \iff x \in A(\theta).$$

Segue da monotonicidade de C que $S(x)$ é o conjunto dos pontos $\theta \in \Omega$ tais que $\underline{\theta} \leq \theta$, onde

$$\underline{\theta} = \inf\{\theta : T(x) \leq C(\theta)\}.$$

Pelo Teorema acima, os conjuntos $\{\theta : \underline{\theta}(x) \leq \theta, \theta \in \Omega\}$, constituem uma família de regiões de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$ que minimizam

$$P_\theta\{\underline{\theta} \leq \theta'\}, \text{ para todo } \theta \in K(\theta'),$$

ou seja, para todo $\theta > \theta'$. Isto mostra que $\underline{\theta}$ é um limite inferior de confiança uniformemente mais acurado para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

(ii) Do Corolário do LNP, temos que $F_\theta(t)$ é estritamente decrescente em θ para todo ponto t para o qual $0 < F_\theta(t) < 1$.

Então, <3> tem, no máximo, uma solução.

Suponha que t é o valor observado de T e que a equação

$$F_\theta(t) = 1-\alpha$$

tem solução $\hat{\theta} \in \Omega$.

Então,

$$F_{\hat{\theta}}(t) = 1-\alpha$$

e, pela definição de C, temos $C(\hat{\theta}) = t$.

A desigualdade $t \leq C(\theta)$ equivale, então, a $C(\hat{\theta}) \leq C(\theta)$ e, portanto, como C é monótona crescente, $\hat{\theta} \leq \theta$.

Conclui-se que $\underline{\theta} = \hat{\theta}$.

Nota: sob as mesmas condições, o limite superior de confiança uniformemente mais acurado com coeficiente de confiança $1-\alpha$ é a solução de

$$P_\theta\{T \geq t\} = 1-\alpha,$$

ou, equivalentemente,

$$F_\theta(t) = \alpha.$$

Ex. Exponencial.

$X_1, \ldots, X_n$: n v.a.'s iid

$X_i \sim$ Exponencial de média $1/\lambda$.

$$P_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \Sigma x_i}$$

Para $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

$$\frac{P_{\lambda_2}(x)}{P_{\lambda_1}(x)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \exp\left\{-(\lambda_2-\lambda_1)\Sigma x_i\right\}$$

é decrescente em Σx_i.

Seja $T = \Sigma X_i$.

~~$P_\lambda(x)$ tem RVM em~~ $\frac{1}{T}$.

Um limite superior de confiança uniformemente mais acurado para λ com coeficiente de confiança $1-\alpha$ é a solução $\bar{\lambda}$ da equação

$$P_\lambda\left(\frac{1}{T} \geq \frac{1}{t}\right) = 1-\alpha, \qquad P_\lambda(T \leq t) = P_\lambda(2\lambda T \leq 2\lambda t)$$

χ^2_{2n}

onde t é o valor observado de T.

Mas $2\lambda T \sim \chi^2_{2n}$. Então, a equação acima é equivalente a

$$P_\lambda(2\lambda T \leq 2\lambda t) = 1-\alpha, \text{ ou seja,}$$

$$P(\chi^2_{2n} \leq 2\lambda t) = 1-\alpha,$$

onde χ^2_{2n} representa uma v.a. com distr. χ^2_{2n}.

Se $c_{1-\alpha}$ é o quantil de ordem $1-\alpha$ da distr. χ^2_{2n}, então,

$$\bar{\lambda}(T) = \frac{c_{1-\alpha}}{2T}.$$

Nota: X ou T discreta. O corolário acima não se aplica ($F_\theta(t)$ não é contínua em t).

Ver TSH, pp. 93-94; TSH3, pp. 74-75.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Sejam $\underline{\theta}$ e $\bar{\theta}$ os limites inferior e superior de confiança com coeficiente de confiança $1-\alpha_1$ e $1-\alpha_2$ respectivamente.

Suponha que $\underline{\theta}(x) < \bar{\theta}(x)$ para todo x.

OBS.: Sob as condições do Corolário (p. 50; ver p. 53), $F_\theta(t)$ é estritamente decrescente em θ para todo ponto t para o qual $0 < F_\theta(t) < 1$.

Dada a amostra x, $\underline{\theta} = \underline{\theta}(x)$ é tq

$$F_{\underline{\theta}}(t) = 1-\alpha_1,$$

e $\bar{\theta} = \bar{\theta}(x)$ é tal que

$$F_{\bar{\theta}}(t) = \alpha_2.$$

Se $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, temos $1-\alpha_1 > \alpha_2$. Como $F_\theta(t)$ é estrital/ decrescente em θ,

$$\underline{\theta} < \bar{\theta}.$$

Os intervalos $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ são chamados de intervalos de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha_1-\alpha_2$.

Eles contém o verdadeiro valor do parâmetro com probabilidade maior ou igual a $1-\alpha_1-\alpha_2$ pois

$$P_\theta\{\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\} =$$

$$= P_\theta\{\{\underline{\theta} \leq \theta\} \cap \{\theta \leq \bar{\theta}\}\}$$

$$= \underbrace{P_\theta\{\underline{\theta} \leq \theta\}}_{\geq 1-\alpha_1} + \underbrace{P_\theta\{\theta \leq \bar{\theta}\}}_{\geq 1-\alpha_2} - \underbrace{P_\theta\{\{\underline{\theta} \leq \theta\} \cup \{\theta \leq \bar{\theta}\}\}}_{\leq 1}$$

$$\geq 1-\alpha_1 + 1-\alpha_2 - 1 = 1-\alpha_1-\alpha_2.$$

Se $\bar{\theta}$ e $\underline{\theta}$ são uniformemente mais acurados, eles minimizam $E_\theta[L_1(\theta, \underline{\theta})]$ e $E_\theta[L_2(\theta, \bar{\theta})]$, com seus respectivos coeficientes de confiança para qualquer função L_1 que é não crescente em $\underline{\theta}$ para $\underline{\theta} < \theta$ e 0 para $\underline{\theta} \geq \theta$ e para qualquer função L_2 que é não decrescente em $\bar{\theta}$ para $\bar{\theta} > \theta$ e 0 para $\bar{\theta} \leq \theta$.

Seja

$$L(\theta; \underline{\theta}, \bar{\theta}) = L_1(\theta, \underline{\theta}) + L_2(\theta, \bar{\theta}).$$

Então, os intervalos $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ minimizam

$$E_\theta\{L(\theta, \underline{\theta}, \bar{\theta})\}$$

sujeito a

$$P_\theta\{\underline{\theta} > \theta\} \leq \alpha_1 \quad \text{e} \quad P_\theta\{\bar{\theta} < \theta\} \leq \alpha_2.$$

Rel. com perdas tbm ñ faz.

Um exemplo de tal função é

$$L(\theta;\underline{\theta},\bar{\theta}) = \begin{cases} \bar{\theta}-\underline{\theta}, & \text{se} \quad \underline{\theta}\leq\theta\leq\bar{\theta} \\ \bar{\theta}-\theta, & \text{se} \quad \theta<\underline{\theta} \\ \theta-\underline{\theta}, & \text{se} \quad \bar{\theta}<\theta. \end{cases}$$

Outros exemplos

$$L(\theta;\underline{\theta},\bar{\theta}) = \bar{\theta}-\underline{\theta}$$

e

$$L(\theta;\underline{\theta},\bar{\theta}) = a(\theta-\underline{\theta})^2+b(\bar{\theta}-\theta)^2, \quad a,b>0.$$

Nota: quantidade pivotal: ver lista 5.

fabiohoki@gmail.com

Quantidade Pivotal

X: v.a. com distribuição na família $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Omega\}$

Uma função $h(X,\theta)$ a valores reais cuja distribuição não depende de θ é chamada de **quantidade pivotal**.

Seja $F_h(.)$ a função distribuição acumulada de $h(X,\theta)$, estritamente crescente e contínua. Então

$$S(X) = \{\theta\in\Omega : h(X,\theta)\leq F_h^{-1}(1-\alpha)\}$$

é uma região de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

De fato,

$$P_\theta(\theta\in S(X)) = P_\theta(h(X,\theta)\leq F_h^{-1}(1-\alpha))$$

$$= F_h(F_h^{-1}(1-\alpha)) = 1-\alpha.$$

Hipóteses Bilaterais

Teorema.

(i) Para testar a hipótese

$$H: \theta \leq \theta_1 \quad \text{ou} \quad \theta \geq \theta_2 \qquad (\theta_1 < \theta_2)$$

contra

$$K: \theta_1 < \theta < \theta_2$$

na família exponencial unidimensional com $\eta(\theta)$ estritamente crescente, existe um teste UMP dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{quando } C_1 < T(x) < C_2 \quad (C_1 < C_2) \\ \gamma_i, & \text{quando } T(x) = C_i \quad , i = 1,2 \\ 0, & \text{quando } T(x) < C_1 \text{ ou } T(x) > C_2 \end{cases}$$

em que os C's e os γ's são determinados por

$$E_{\theta_1}\{\phi(X)\} = E_{\theta_2}\{\phi(X)\} = \alpha \qquad (*)$$

(ii) Este teste minimiza $E_\theta\{\phi(X)\}$ sujeito a $(*)$ para todo $\theta < \theta_1$ e todo $\theta > \theta_2$.

(iii) Para $0 < \alpha < 1$, a função de poder desse teste tem um máximo em um ponto θ_0 entre θ_1 e θ_2 e decresce estritamente quando θ se afasta de θ_0 em qualquer direção a menos que existam 2 valores t_1 e t_2 tais que

$$P_\theta\{T(X) = t_1\} + P_\theta\{T(X) = t_2\} = 1,$$

para todo θ.

Dem. TSH3, p. 82-83.

Obtenção de C_1, C_2, γ_1, γ_2 : tentativa e erro.

1. Começar com C_1^* e γ_1^* e encontrar C_2^* e γ_2^* tais que $\beta^*(\theta_1) = \alpha$.

2. Calcular $\beta^*(\theta_2)$ (em geral, é maior ou menor que α)

3. Fazer nova tentativa para C_1 e γ_1 dependendo do que ocorrer em 2.

Notas:

1. Testes não viciados

H: $\theta \in \Omega_H$
K: $\theta \in \Omega_K$ (hipótese composta)

Função de poder do teste ϕ:

$\beta_\phi(\theta) = E_\theta(\phi(X))$.

Um teste ϕ tal que

$\beta_\phi(\theta) \leq \alpha$, se $\theta \in \Omega_H$
e
$\beta_\phi(\theta) \geq \alpha$, se $\theta \in \Omega_K$

é chamado de teste não viciado.

Sempre que um teste UMP existe, ele é não viciado.

Justificativa: seu poder não pode ser inferior ao do teste $\phi(x) \equiv \alpha$.

Para testes não viciados, sob nenhuma alternativa em K, a probabilidade de rejeição pode ser menor do que o tamanho do teste.

Há muitas situações em que não existe teste UMP mas existe teste UMP não viciado (Cap. 4 e 5, TSH3).

2. De forma análoga define-se região de confiança não viciada (probabilidade de cobrir valores falsos do parâmetro não excede o coeficiente de confiança).

(TSH3, Seção 5.5, p. 164-168).

Regiões de Credibilidade

Ex. $X_1, \dots, X_n$, iid, $X_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ conhecido

$$S(x) = \left(\bar{X} - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

é um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança 95%. Antes da amostra ser observada

$$P_\theta \{ \theta \in S(X) \} = 0{,}95 .$$

Se a amostra $X = x$ é observada, não faz sentido escrever

$$P_\theta \{ \theta \in S(x) \} = 0{,}95 .$$

Do ponto de vista Bayesiano, θ (que denotaremos por Θ) é vista como uma v.a. (não observável) e tem uma distribuição a priori Λ, antes da amostra ser observada.

Depois que $X = x$ foi observado, inferências sobre θ são feitas com base na distribuição (a posteriori) condicional de Θ dado $X = x$.

Qualquer conjunto $S(x)$ tal que

$$P\{ \Theta \in S(x) \mid X = x \} \geq 1 - \alpha \text{ para todo } x$$

é uma região de credibilidade para Θ com probabilidade $1-\alpha$.

Ex. continuação

Suponha que $\Theta \sim N(\mu, b^2)$

Dado $\Theta = \theta$, $X_1, \dots, X_n$ são ind e têm dist. $N(\theta, \sigma^2)$.

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Theta \mid X = x \sim N\left(E(\Theta \mid x) , Var(\Theta \mid x) \right)$$

sendo

$$E(\Theta \mid x) = \frac{n\bar{x}/\sigma^2 + \mu/b^2}{n/\sigma^2 + 1/b^2}$$

e

$$Var(\Theta \mid x) = \frac{1}{n/\sigma^2 + 1/b^2}.$$

O intervalo $I(x)$ com limites

$$\frac{n\bar{x}/\sigma^2 + \mu/b^2}{n/\sigma^2 + 1/b^2} \mp \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n/\sigma^2 + 1/b^2}}$$

satisfaz

$$P\{\Theta \in I(x) \mid X = x\} = 1-\alpha$$

e é, portanto, uma região (intervalo) de credibilidade com probabilidade $1-\alpha$.

Note que se $\mu = 0$ e $1-\alpha = 95\%$, o intervalo se reduz a

$$\frac{\bar{x}}{1+\sigma^2/nb^2} \mp \frac{1{,}96}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{nb^2}}\,\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{\bar{x}}{1+\sigma^2/nb^2} \mp 1{,}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{nb^2}}}$$

Se b for grande este intervalo é aproximadamente igual ao intervalo de confiança com c.c. de 95%, e aqui faz sentido escrever

$$P\{\Theta \in I(x) \mid X = x\} = 95\%.$$

Tomando uma priori constante (imprópria) para θ, temos

$$\Theta \mid X = x \sim N(\bar{x}, \sigma^2/n)$$

e o intervalo de credibilidade resultante coincide com o intervalo de confiança.

Ex. $X \mid \Theta = \theta \sim b(\theta, n)$

$\Theta \sim Beta\,(a,b)$

$\Theta \mid X = x \sim Beta\,(a+x,\, b+n-x)$.

Qualquer intervalo $I(x)$ tal que $P\{\theta \in I(x) \mid X = x\} \geq 1-\alpha$ será um intervalo de credibilidade para θ com prob. $1-\alpha$.

E' recomendável tomar a região HPD (highest probability density), obtida de tal forma que a densidade a posteriori de θ seja $\geq k$ para todo θ pertencente à região.

Neste caso, $\pi(\theta \mid x)$ pode ser

(a) decrescente
(b) crescente
(c) crescente em $(0, \theta_0)$, e decrescente em $(\theta_0, 1)$ para algum θ_0
(d) forma de U, decrescente em $(0,\theta_0)$ e crescente em $(\theta_0, 1)$ para algum θ_0.

Regiões HPD:

(a) $\theta < k(x)$;

(b) $\theta > k(x)$;

(c) $k_1(x) < \theta < k_2(x)$;

(d) $\theta < k_1(x)$ ou $\theta > k_2(x)$,

onde os k's são determinados de tal forma que a probabilidade a posteriori seja $1-\alpha$.

Nos casos (c) e (d), os k's também devem satisfazer

$$\pi(k_1(x) \mid x) = \pi(k_2(x) \mid x).$$

Regiões HPD

Se $\pi(\theta|x)$ denota a densidade a posteriori de Θ dado $X=x$, a região HPD é definida por $S(x)$ tal que

$$S(x) = \{\theta \in \Omega \mid \pi(\theta|x) \geq k\}$$

com k determinado de tal forma que

$$P\{\Theta \in S(x) \mid X = x\} = 1-\alpha.$$

Exemplos: TSH (p. 228-229)
TSH3 (p 174-175)

TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇAS

X: variável ou vetor aleatório com distribuição P_θ, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$, e densidade de P_θ com respeito a uma medida μ σ-finita.

$L(\theta; x)$: função de verossimilhança

Aqui escrevemos $L(\theta)$ para denotar tanto $L(\theta; X)$ quanto $L(\theta; x)$.

Hipóteses:

$$H: \theta \in \Omega_H \quad \text{e} \quad K: \theta \in \Omega_K \qquad (*)$$

$$\Omega_H \cup \Omega_K = \Omega \quad , \quad \Omega_H \cap \Omega_K = \emptyset$$

Consideremos, inicialmente, que $\Omega_H = \{\theta_0\}$ e $\Omega_K = \{\theta_1$

Consideremos o teste que rejeita H quando

$$\lambda(x) = \frac{p_{\theta_0}(x)}{\max\{p_{\theta_0}(x), p_{\theta_1}(x)\}} < c \text{, p/ um } c \in (0,1]$$

Obs. Vamos admitir que o quociente está bem defini

Note que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } p_{\theta_0}(x) \geq p_{\theta_1}(x) \\ \dfrac{p_{\theta_0}(x)}{p_{\theta_1}(x)} & , \text{ se } p_{\theta_0}(x) < p_{\theta_1}(x) \end{cases}$$

Para qualquer $c \in (0,1]$, o teste rejeita H quando

$$p_{\theta_1}(x) > k\, p_{\theta_0}(x) \quad ; \quad k = \frac{1}{c} > 1.$$

Pelo L.N.P., este teste é M.P..

Voltemos às hipóteses em (*). Defina

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_H} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta)}.$$

Def. Um teste da razão de verossimilhanças é qualquer teste que rejeita H se e somente se

$$\lambda(X) < c,$$

em que $c \in [0,1]$.

Obs. $0 \leq \lambda(x) \leq 1$. Qdo H é verdadeira, $\lambda(x)$ tende a estar próximo de 1; o oposto ocorre qdo K é verdadeira.

Note que

$$\lambda(X) = \frac{L(\tilde{\theta}_0)}{L(\hat{\theta})},$$

em que $\hat{\theta}$ é um EMV de θ e $\tilde{\theta}$ é um EMV de θ sujeito a que $\theta \in \Omega_H$, isto é, restringindo o espaço paramétrico a Ω_H.

Se, para um dado $\alpha \in (0,1)$, existe $c_\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\sup_{\theta \in \Omega_H} P_\theta(\lambda(X) < c_\alpha) = \alpha,$$

então, um teste RV de nível α pode ser obtido.

OBS. Apenas em casos particulares um teste RV de nível α pode ser obtido explicitamente.
É necessário que $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ tenham forma fechada e que a distribuição de $\lambda(X)$ (ou alguma função de $\lambda(X)$) seja conhecida.

Ex. $X_1, \dots, X_n$: iid; $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, desconhecidos.

$H: \mu = \mu_0$ e $K: \mu \neq \mu_0$.

$$\Omega = \{ \theta = (\mu, \sigma^2),\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0 \}$$

$$\Omega_H = \{ \theta = (\mu, \sigma^2);\ \mu = \mu_0,\ \sigma^2 > 0 \}$$

$\hat{\theta} = (\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$, $\bar{X} = \Sigma X_i / n$, $\hat{\sigma}^2 = \Sigma (X_i - \bar{X})^2 / n$.

$\tilde{\theta} = (\mu_0, \tilde{\sigma}^2)$, $\tilde{\sigma}^2 = \Sigma (X_i - \mu_0)^2 / n$.

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_H} L(\theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta)} ; \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$L(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \right]^n \exp\left\{ - \frac{\Sigma (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

$$\lambda(x) = \left[\frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2} \right]^{n/2} \exp\left\{ - \frac{\Sigma (x_i - \mu_0)^2}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{2\hat{\sigma}^2} \right\}$$

$$= \left[\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma (x_i - \mu_0)^2} \right]^{n/2} = \left[\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu_0)]^2} \right]^{n/2}$$

$$[\lambda(x)]^{2/n} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}}.$$

$$S^2 = \frac{\Sigma (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\lambda(x) < c \iff \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2} > k$$

(para k escolhido adequadamente)

Mas,

$\dfrac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$ sob H, e $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

e $\bar{X}$ e S^2 são independentes. Então

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2} = \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2 / \sigma^2}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}} \sim F_{1, n-1} \text{ sob } H.$$

O teste RV de H contra K de nível α rejeita H sse

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2} > F_{1, n-1, 1-\alpha} ;$$

em que $F_{1, n-1, 1-\alpha}$ é tq $P(F < F_{1, n-1, 1-\alpha}) = 1 - \alpha$, sendo que $F \sim F_{1, n-1}$.

OBS. O "teste t" usual de $H: \mu = \mu_0$ contra $K: \mu \neq \mu_0$ de nível α rejeita H se

$$\left| \sqrt{n}\, \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{S} \right| > t_{n-1,\, 1-\alpha/2},$$

em que $t_{n-1,\,1-\alpha/2}$ é tal que

$$P(\, T < t_{n-1,\, 1-\alpha/2}\,) = 1 - \alpha/2,$$

sendo que $T \sim t_{n-1}$.

Note que este teste coincide com o teste RV de nível α, já que se $T \sim t_{n-1}$ então $T^2 \sim F_{1,n-1}$.

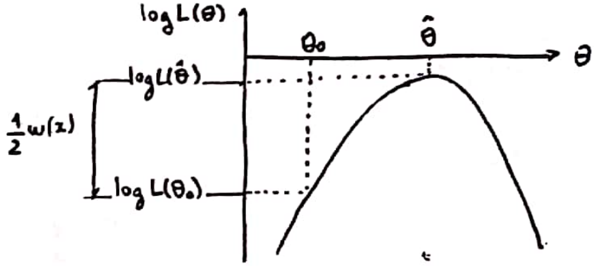
Consideremos as hipóteses

$$H: \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad K: \theta \neq \theta_0$$

e a estatística $w(x) = -2 \log \lambda(x)$.

Note que $\lambda(x) < c$ equivale a $w(x) > k$ (k escolhido adequadamente).

Interpretação gráfica:



$$w(x) = 2\left\{ \log L(\hat{\theta}) - \log L(\theta_0) \right\}$$

$w(X)$ é chamada de estatística da razão de verossimilhanças.

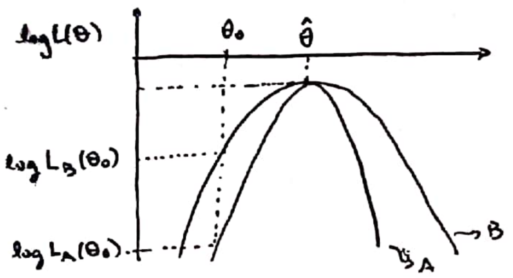
Estatística de Wald

$$W(X) = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 \, I(\hat{\theta})$$

$I(\theta)$: informação de Fisher

Um teste de H contra K que rejeita H sse $W(X) > k$ é chamado de teste de Wald.

Interpretação gráfica: 2 amostras A e B



$$W_A(x) > W_B(x)$$

$I(\theta)$: medida de "curvatura média" da log-veross.

O quadrado da distância $|\theta_0 - \hat{\theta}|$ é ponderado pela curvatura.

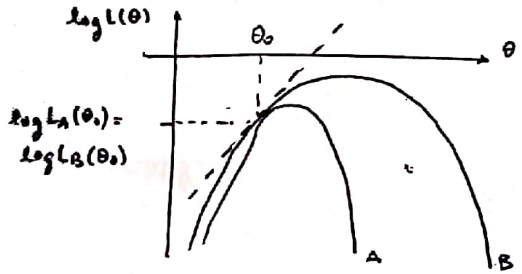
Estatística escore (Rao)

$$S_R(X) = U(\theta_0)^2 \, I(\theta_0)^{-1}$$

$$U(\theta) = \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \quad , \text{ função escore.}$$

Um teste de H contra K que rejeita H sse $S_R(X) > k$ é chamado de teste escore.

Interpretação gráfica:



$U(\theta_0)$: inclinação da reta tangente às curvas no ponto θ_0.

$U(\hat{\theta}) = 0$

Se $U(\theta_0)^2 \approx 0$, θ_0 está próximo de $\hat{\theta}$.

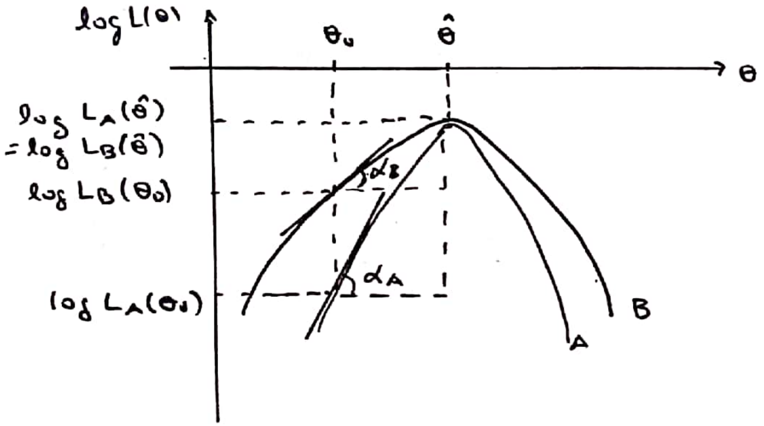
$U(\theta_0)^2$ deve ser ponderado pelo inverso da curvatura

$I(\theta_0)^{-1}$: inverso da "curvatura média" no ponto θ_0.

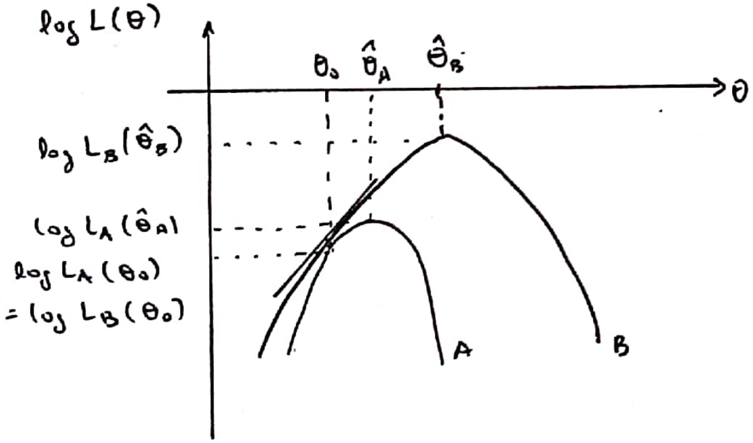
Ref.: Buse (1982). American Statistician, 36, 153-7.

Estatística gradiente (Terrell, 2002)

$$S_T(x) = U(\theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)$$



$tg\,\alpha_A > tg\,\alpha_1$



Um teste de H contra K que rejeita H sse $S_T(x) >$ é chamado de teste gradiente.

Consideremos as hipóteses

$$H: \theta_1 = \theta_1^{(0)} \quad \text{e} \quad K: \theta_1 \neq \theta_1^{(0)},$$

$$\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)^T, \quad \theta_1 = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T, \quad \theta_2 = (\theta_{r+1}, \dots, \theta_k)^T$$

Estatística da razão de verossimilhanças

$$\boxed{w(x) = 2\{\log L(\hat{\theta}) - \log L(\tilde{\theta})\}}.$$

Estatística escore

$$S_R(x) = U(\tilde{\theta})^T I(\tilde{\theta})^{-1} U(\tilde{\theta}),$$

onde $U(\theta) = \dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}$. Ou ainda,

$$\boxed{S_R(x) = U_1(\tilde{\theta})^T I^{11}(\tilde{\theta})\, U_1(\tilde{\theta})},$$

$U(\theta) = (U_1(\theta)^T, U_2(\theta)^T)^T$, sendo que $U_1(\theta)$ tem os 1ºs r componentes de $U(\theta)$; e I^{11} vem da inversa de

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} I_{11}(\theta) & I_{12}(\theta) \\ I_{21}(\theta) & I_{22}(\theta) \end{pmatrix}$$

dada por

$$I(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} I^{11}(\theta) & I^{12}(\theta) \\ I^{21}(\theta) & I^{22}(\theta) \end{pmatrix}$$

$I^{11}(\theta)$ tem dimensão $r \times r$.

Estatística de Wald

$$\boxed{W(X) = (\hat\theta_1 - \theta_1^{(0)})^T \, I^{11}(\hat\theta)^{-1} \, (\hat\theta_1 - \theta_1^{(0)})}$$

Estatística gradiente

$$\boxed{\begin{aligned} S_T(X) &= U(\tilde\theta)^T(\hat\theta - \tilde\theta) \\ &= U_1(\tilde\theta)^T(\hat\theta_1 - \theta_1^{(0)}) \end{aligned}}$$

Obs: $W(X)$ e $S_T(X)$: envolvem estimação sob H e sob modelo irrestrito

$S_R(X)$: envolve apenas estimação sob H

$W(X)$: envolve apenas estimação sob modelo irrestrito

$W(X)$ e $S_T(X)$: não envolvem matriz de informação

$W(X)$ e $S_R(X)$: invariantes sob reparametrização / formas equivalentes das hipóteses

Ex1. continuação ; $\theta = (\mu, \sigma^2)$

$$\log L(\theta) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} n(\bar x - \mu)/\sigma^2 \\ -n/\sigma^2 + \sum(x_i - \mu)^2/(2\sigma^4) \end{pmatrix} \quad \text{(exercício)}$$

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & n/(2\sigma^4) \end{pmatrix} \quad \text{(exercício)}$$

$$S_R(X) = \left[\frac{n(\bar x - \mu_0)}{\tilde\sigma^2}\right]^2 \frac{\tilde\sigma^2}{n} = \frac{n(\bar x - \mu_0)^2}{\tilde\sigma^2},$$

$$\tilde\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{n}.$$

$$\frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar x)^2 + n(\bar x - \mu_0)^2}{n}$$

$$S_R(X) = n\left[\frac{\sum(x_i-\bar x)^2}{n(\bar x-\mu_0)^2} + 1\right] > c \iff \frac{n(\bar x - \mu_0)^2}{S^2} > k$$

(p/ k escolhido adequadamente)

O teste escore de H contra K de nível α coincide com o teste RV (p. 75).

$S_T(X) = S_R(X)$ (exercício)

Ex 1. continuação

$$W(X) = \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2} \quad , \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

(Exercício: obter o teste de Wald de nível α).

Nota. Apenas em casos particulares, a distribuição exata das estatísticas $w(X)$, $S_R(X)$ e $W(X)$ é conhecida.

Sob condições de regularidade, as 3 estatísticas convergem, em distribuição, para uma distribuição χ^2_r, sob H.

Nota. Em amostras pequenas ou mesmo de tamanho moderado a aproximação por χ^2 pode ser ruim.

Estatística RV : correção de Bartlett (Lawley, Biometrika 1956)

Estatística escore: correção tipo-Bartlett (Cordeiro e Ferrari, Biometrika, 1991).

Estatística gradiente: Vargas, Ferrari e Lemonte (EJS, 2013