5/8 1

$\Rightarrow$

Prova 1

P1 - 18/09
P2 - 30/10
P3 - 27/11
S - 04/12

med. = $\dfrac{P_1 + 2.P_2 + 2.P_3}{5}$

Bibliografia

(1) Real Analysis, H L Royden
(2) A integral de Lebesgue e suas aplicac.
Chaum, S. Hönig
(3) medida e integração, Pedro Jesus Fernandes.

(4) ~~Elements~~ The Elements of Integration and Lebesgue Measure, R. Bartle.
(5) An introduction to measure theory, G. de Barra.

* Contar é uma maneira de medir.

$X \neq \emptyset$

$\mu \quad P(x) \to [0, +\infty)$, [μ é uma medida de contagem]

$1\mu \quad E \subseteq X \to \mu E = |E|$ se E for finito.
$+\infty$ se E for infinito.

1) $\emptyset \subseteq X \Rightarrow \mu\emptyset = 0$

) $E_1, \ldots, E_n, \ldots \subseteq X$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ (disjuntos)

$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu E_n$

$\to$ aplicando à reta.

$X = \mathbb{R}$, $\mu([3,7]) = +\infty$
= queremos que seja 4. {o comprimento}

1

i) Intervalo $\to$ definir uma função.

$\ell(I)$ comprimento de I., $[a,b]$, $a \leq b$.
$[a,b[$, $]a,b[$, $]a,b]$

$\Rightarrow \ell(I) = b-a$,

mas pode ser $]a, +\infty[$, .., $]-\infty, a[$, .. , $]-\infty, +\infty[$

$\Rightarrow \ell(I) = +\infty$

$\mathcal{J} = \{$ intervalos da reta $\}$.

$\ell : \mathcal{J} \to [0, +\infty]$
$I \mapsto \ell(I)$.

$\lambda . P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$
$E \subseteq \mathbb{R} \to \lambda(E)$

(1) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$, existe $\lambda(E) \geq 0$
(2) Se E é um intervalo, então $\lambda(E) = \ell(E)$
(3) $E \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$,
$E + a = \{x + a : x \in E\}$ } translação.

$\lambda(E+a) = \lambda(E)$ } "deslocando a régua". $\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = ?$

(4) $(E_n) \subseteq \mathbb{R}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$ $\lambda(\ldots) = \sum_{n\geq 1} \lambda(E_n)$

per ZF+AC $\rightarrow$ ñ é possível. desistimos de (1),

$\downarrow$

axioma da escolha

Vamos supor que $\exists$:

$\lambda \; P(\mathbb{R}) \rightarrow [0,+\infty]$ | redigida, na questão (7.5)

① $[0,1[\times [0,1[\longrightarrow [0,2[$

$(x,y) \longrightarrow x*y = \begin{cases} x+y, & \text{se } x+y<1, \\ x+y-1, & \text{se } x+y\geq 1. \end{cases}$

② $E \subseteq [0,1[\;,\; y\in[0,1[$

Def. $E*y = \{x*y : x\in E\}$

③ $\forall E\subseteq[0,1[,\ \forall y\in[0,1[,\ (\underbrace{\lambda(E*y)=\lambda(E)}_{\text{a medida se conserva.}}),$

$E\subseteq[0,1[, \begin{cases} E_1=\{x\in E : x+y<1\} \\ E_2=\{x\in E : x+y\geq 1\} \end{cases}$

$\begin{cases} E_1\cup E_2=E, \\ E_1\cap E_2=\emptyset \end{cases}$ | $E*y = (E_1\cup E_2)*y$

$= (E_1*y)\cup(E_2*y)$

$= (E_1+y)\cup(E_2+(y-1))$

se $\exists$ a medida ...

$\lambda(E_1+y)=\lambda(E_1)$

$\lambda(E_2+y-1)=\lambda(E_2)$

Então:

$\lambda(E*y) = \lambda(E_1*y)+\lambda(E_2+(y-1)) = \lambda(E_1)+\lambda(E_2) = \lambda(E)$

↳ se verifica.

---

④ [Equivalente]

Def: $x,y\in[0,1[$, $x\sim y$ se $x-y\in\mathbb{Q}$

$0\in[0,1[$, $x\sim 0$, $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1[$.

$\boxed{x\in[0,1[,}$

dá uma fórmula

$\bar{x} = \{x_1\in[0,1[: x_1\sim x\}$

↳ classe de equivalência de x $(x\in[0,1[)$

$[0,1[\,/\!\sim\; = \{\ \dots\ \}$

$\downarrow$

coleção das classes de equivalência

...junto de representantes de classe ...

$\Rightarrow$

$\forall x \in [0,1[\,,\ \exists!\, x_1 \in P\ \ x_1 \sim x$

$C|_{\sim} = \{$

$\mathbb{Q} \cap [0,1[= \{r_0, r_1, \dots, r_n, \dots\}$

$P_j = P * r_j\,,\ \forall j \geq 0.\ ,\ P_0 = P * r_0 = P$

$P_j = P * r_j, \forall j \geq 0$

$$\lambda([0,1[) = \sum_{j\geq 0} \lambda(P_j)$$

(I)

$\Rightarrow$ definir uma medida,

em uma coleção de subconjuntos da reta.

$\lambda\, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

$\downarrow$

$\boxed{\text{"conj. mensuráveis"}}$

1ª prova ~~19/09~~ 16/09

2ª " 30/10

3ª " 25/11

4ª " 04/12

$$|\lambda E \geq 0, \forall E \subseteq \mathbb{R}|$$

$$\lambda\emptyset = 0$$

$$\lambda(I) = \ell(I)$$

$$\lambda(A+y) = \lambda(A)$$

$$\lambda\Big(\bigcup_{j\geq 1} E_j\Big) = \sum_{j\geq 1} \lambda(E_j)$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \ i \neq j$$

07/08

⇒ medida Exterior,

$\bar{\mathbb{R}}$, reta extendida. $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Def. A medida exterior (de Lebesgue) em $\mathbb{R}$ é definida como a função $m^*: P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

$$A \to m^*(A),$$

onde

$$m^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) \ \ (I_j) \text{ é uma sequência de intervalos abertos e } A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Big\}$$

⇒ Proposição 1.

A medida exterior do $\emptyset$ é 0

$$m^*\emptyset = 0,$$

ex. $I_1 = I_2 = \dots I_m = \emptyset$, $\{I_n = \emptyset, \forall n\}$

ex. $]a,a[= \emptyset$. ↳ $\emptyset \subseteq \bigcup_{n\geq 1} I_n$ e $\sum_{n\geq 1} \ell(I_n) = 0$,

Logo $m^*\emptyset = 0$.

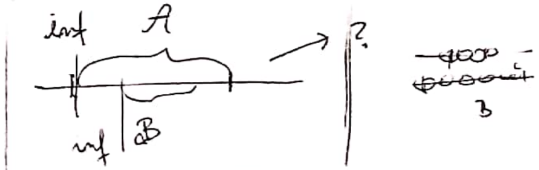
* Proposição 2

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}, \ (A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B))$$

Dem $m^*A := m^*(A)$

$$m^*A = \inf \underbrace{\Big\{ \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) : (I_j) \text{ são intervalos abertos e } A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Big\}}_{\mathcal{A}}$$

$$m^*B = \inf \underbrace{\Big\{ \sum_{i\geq 1} \ell(J_i) \ \ (J_i) \text{ são intervalos abertos e } B \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i \Big\}}_{\mathcal{B}}.$$



Vamos mostrar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$?

se $z \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists (J_i)$ intervalos abertos, : $B \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i$ e $z = \sum \ell(J_i)$.

Como $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} J_i \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \ell(J_i) \in \mathcal{A}$.

Logo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B} \Rightarrow m^*A \leq m^*B$.

Útil (2)

⇒ [illegible]

⇒ Proposição 3 ⇝ translação

$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (m^*(A+y) = m^*A)$

i) ⇒ Def. $A+y = \{x+y : x \in A\}$

Ex: $[2,5]+3 = [5,8]$
$]4,+\infty[+3 =]7,+\infty[$

$m^*A = \inf \underbrace{\{\sum_{j\geq 1} \ell(I_j) : I_j \text{ é aberto, p/ } \forall j \geq 1 \text{ e } A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j\}}_{\mathcal{A}}$

$m^*(A+y) = \inf \underbrace{\{\sum_{j\geq 1} \ell(J_j) : J_j \text{ é aberto, p/ } \forall j \geq 1 \text{ e } A+y \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j\}}_{\mathcal{B}}$

⇒ Vamos provar que $m^*A = m^*(A+y)$ $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

$z \in \mathcal{A}$ ⇒ $\exists (I_j)$ intervalos abertos, $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j$ e $z = \sum_{j\geq 1} \ell(I_j)$

$A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j$.

$A+y \subseteq \left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) + y = \bigcup_{j\geq 1}(I_j + y) \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(I_j+y) \in \mathcal{B}$

mas $\ell(I_j+y) = \ell(I_j), \forall j \geq 1$

portanto ⇒ $\sum_{j\geq 1} \ell(I_j) = z \in \mathcal{B}$

⇒ Concluímos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. | A volta, substituímos y.

⇒ Analogamente, provamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, logo $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e $m^*A = m^*(A+y)$.

Proposição 4 ⇝ conj. unitário

$\forall a \in \mathbb{R}, m^*(\{a\}) = 0$.

Dem: seja $\varepsilon > 0$, considere $\begin{cases} I_1 =]a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}[\\ I_n = \emptyset, \forall n \geq 2 \end{cases}$

$a-\frac{\varepsilon}{2}$ a $a+\frac{\varepsilon}{2}$ | $\{a\} \subseteq I_1 \Rightarrow \{a\} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j$

⇒ $\sum_{j\geq 1} \ell(I_j) = \varepsilon$, [illegible]

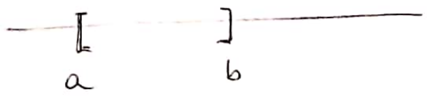
Logo a $m^*\{a\} \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

⇓

$m^*\{a\} = 0$.

⇒ Proposição 5

Para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $m^*(I) = \ell(I)$.



$m^* I \leq \ell(I)$

$[a, a+n] \subseteq [a, +\infty[\Rightarrow m^*([a,a+n]) \leq m^*[a, +\infty[)$ → do mesmo

$n \leq +\infty, \forall n \geq 1$

⇒ Proposição 6

aditiva se disjuntos e é (=)

m^* é enumeravelmente subaditiva, isto é,

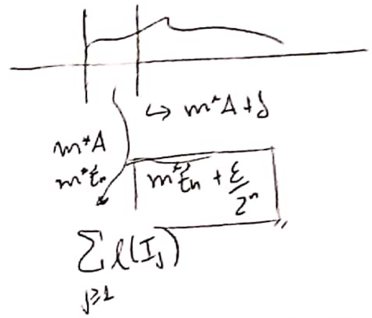
se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$,

então $m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^* E_n$.

Dem

Se existe $n_0 \geq 1$, tal que $m^* E_{n_0} = +\infty$, então vale a propriedade. Suponhamos, portanto que $m^* E_n < +\infty$, p/ $\forall n \geq 1$.

$m^*A = \inf\left\{ \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) \;\; I_j \text{ é intervalo aberto de } A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}$



Para todo $n \geq 1$, existe $(I_j^n)_{j\geq 1}$ intervalos abertos, tais que $E_n \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j^n$ e $\sum_{j\geq 1} \ell(I_j^n) < m^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$E_n \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j^n \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} E_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{j\geq 1} I_j^n\right)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j\geq 1} \ell(I_j^n)\right) \leq \sum_{n\geq 1}\left(m^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$

$= \sum_{n\geq 1} m^* E_n + \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n\geq 1} m^* E_n + \varepsilon$

$$m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^* E_n + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

logo $m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leqslant \sum_{n\geq 1} m^* E_n$

Ex:

$m^*\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} = \{r_1, \dots\}$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\geq 1}\{r_n\}$$

$$m^*\mathbb{Q} = m^*\left(\bigcup_{n\geq 1}\{r_n\}\right) \leqslant \sum_{n\geq 1} m^*\{r_n\} = 0.$$

proposição 7.

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto enumerável então $m^*E = 0$.

$\Rightarrow$) $E \subseteq [0,1]$, $y \in [0,1[$.

$E * y = \{x * y : x \in E\} \subseteq [0,1[$

medida 12/08 (1)

⇒ Conjunto dos mensuráveis em $\mathbb{R}$

$$A \subseteq \mathbb{R} \to m^*A = \inf\left\{ \sum_{i\geq 1} \ell(I_i),\ A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} I_i \right\},\ I_i \text{ intervalo aberto}$$

(i) $m^*\emptyset = 0$.

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow m^*A \leq m^*B$

(iii) $m^*(A+y) = m^*A$, $y \in \mathbb{R}$.

(iv) I intervalo ⇒ $m^*(I) = \ell(I)$, respeita o fato deu saber medir

(v) $m^*(\bigcup A_n) \leq \sum m^*A_n$

↳ medida externa é subaditiva.

$[0,1[= ([0,1[\cap P) \cup ([0,1[\cap P^c)$

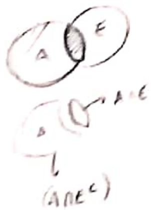
$m^*([0,1[) \neq m^*([0,1[\cap P) + m^*([0,1[\cap P^c)$

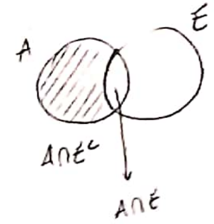
⇒ se eu quiser uma boa "ser mensurável", tenho jogar alguns conjuntos fora

→ motivação

Def. Um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é dito (Lebesgue-mensurável) se p/ todo $A \subseteq \mathbb{R}$, tem-se que

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$





* Propriedades

(1) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ (se $m^*E = 0 \Rightarrow E$ é mensurável)

(*)

Obs.

$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$

$m^*A = m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

↳ def.

↳ "Dados os conjuntos $A, E \subseteq \mathbb{R}$, sempre vale que $m^*A \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

logo para provar que E é mensurável, basta verificar que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*A.$$

(*) Dem:

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \cap E \subseteq E$, $\Rightarrow m^*(A \cap E) \leq m^*E = 0$

$$\underbrace{m^*(A \cap E)}_{=0} + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c) \leq m^*A.$$

$A\cap E^c \subseteq A \Rightarrow m^*(A\cap E^c)\le m^*A$,

$E\subseteq A$ é mensurável se $\forall A\subseteq\mathbb{R}.\,(m^*A = m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c))$

Logo, $\tilde{E}$ é mensurável

(2) $\forall E\subseteq\mathbb{R}$ (E é mensurável $\Rightarrow E^c$ é mensurável)

Dem

E é mensurável $\Rightarrow \forall A\subseteq\mathbb{R}\,(m^*A = m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c))$

$\Rightarrow \forall A\subseteq\mathbb{R}\,(m^*A = m^*(A\cap E^c)+m^*(A\cap E))$, $(E^c)^c = E$

$\Rightarrow \forall A\subseteq\mathbb{R}\,(m^*A = m^*(A\cap E^c)+m^*(A\cap (E^c)^c))$

$\Downarrow$

$\{E^c$ é mensurável$\}$

(3) $\forall E_1, E_2\subseteq\mathbb{R}$ (E_1, E_2 são mensuráveis $\Rightarrow E_1\cup E_2$ é mensurável)

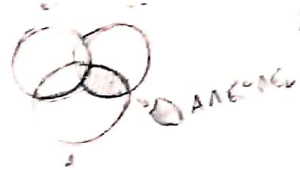
Dem. Seja $A\subseteq\mathbb{R}$. Temos que provar que

$m^*A = m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)$

$\geq$ — provar que é $\geq$

$m^*(A\cap(E_1\cup E_2))$: medida de A que está na união

$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)$: medida de A que está fora da união



$(E_1\cup E_2)^c = E_1^c\cap E_2^c$,

$A\cap(E_1\cup E_2) = (A\cap E_1)\cup(A\cap E_2)$

$\parallel$

$= (A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2)$ // união disjunta

$\Downarrow$

$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c) =$

$= m^*[(A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2)] + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \le *$

$* \le m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2) + m^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) =$

[E_2 é mensurável $\Rightarrow m^*(\square) = m^*(\square\cap E_2) + m^*(\square\cap E_2^c)$]

$= m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c)$, pois E_1 é mensurável.

$= m^*(A)$

(4) (Corolário de (3)). $\forall E_1,\ldots,E_n\subseteq\mathbb{R}$ (se $E_1,\ldots,E_n$ são mensuráveis então $E_1\cup\ldots\cup E_n$ é mensurável.)

↳ Dem por indução (exercício)

(5) Sejam $E_1, \dots, E_n \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos mensuráveis da reta. 12/08 (3)

tal que p/ $i \neq j$ ($E_i \cap E_j = \emptyset$, $1 \le i \ne j \le n$.),

Então, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j)$$

Tese $m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j)$

Dem indução sobre n

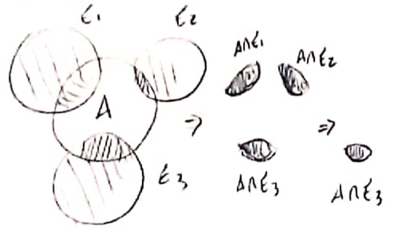
p/ $n = 1$, $m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$

Passo ↳ a igualdade vale trivialmente.,

Suponhamos verdadeira a propriedade p/ n.

Vamos provar que $m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} m^*(A \cap E_j)$.

$$\left[A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right] \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$$



$$\left[A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right] \cap E_{n+1}^c = A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

↱ pela hip, quero valer p/ $(n+1)$, suponho que vale p/ n

⇒ Como E_{n+1} é mensurável, vale que

$$m^*(\square) = m^*(\square \cap E_{n+1}) + m^*(\square \cap E_{n+1}^c)$$

$$\Rightarrow m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = m^*\left[\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right)\right) \cap E_{n+1}\right] + *$$

$$* + m^*\left[\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap E_{n+1}^c\right]$$

{ posso usar a hip de indução }

$$= m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)$$

$$= m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n+1} m^*(A \cap E_j) \quad \blacksquare$$

↳ hip de indução

⇒ Se $A = \mathbb{R}$

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^* E_j$$

se $E_1, \dots, E_n$ são mensuráveis e dois a dois disjuntos.

12/08 (4)

Se $(E_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então

$\bigcup_{j\geq 1} E_j$ é mensurável e $m^*\left(\bigcup_{j\geq 1} E_j\right) = \sum_{j\geq 1} m^* E_j$) ênvião Enumerável

Dem.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$\boxed{A\cap\left(\bigcup_{j\geq 1} E_j\right)^c = A \cap \bigcap_{j\geq 1} E_j^c}$$

propriedades

$$A\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \subseteq A\cap\left(\bigcup_{j\geq 1} E_j\right),$$

$[\forall n\geq 1]_*$

$$\underbrace{m^*\left(A\cap \bigcup_{j\geq 1} E_j\right)} + m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{j\geq 1} E_j\right)^c\right) \geq m^*\left(A\cap\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + (*)$$

provamos

$$(*)\ m^*\left(A\cap\bigcap_{j\geq 1} E_j^c\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A\cap E_j) + m^*\left(A\cap \bigcap_{j\geq 1} E_j^c\right), \forall n\geq 1 \Rightarrow$$

Obs. $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 10 \Rightarrow n\to\infty \quad \sum_{i\geq 1} a_i \leq 10$

$$\Rightarrow m^*\left(A\cap\bigcup_{j\geq 1} E_j\right) + m^*\left(A\cap\bigcap_{j\geq 1} E_j^c\right) \geq \sum_{j\geq 1} m^*(A\cap E_j) + m^*\left(A\cap\bigcap_{j\geq 1} E_j^c\right)$$

$$m^*\left(A\cap\bigcup_{j\geq 1} E_j\right) \leq \sum_{j\geq 1} m^*(A\cap E_j)$$

$\geq m^*$ ⋮ ⇒ "algo sem erro)

6) $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ (I intervalo $\Rightarrow$ I é mensurável)

Transladado

$\forall E\subseteq\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R}$ (E é mensurável $\Rightarrow$ $E+a$ é mensurável)

$\mathcal{M} = \{E\subseteq\mathbb{R} : E$ é mensurável$\}$. → Todos conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}$.

(1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

(2) $\forall E \subseteq \mathbb{R}\,(E\in\mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M})$

(3) $\forall (E_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathbb{R}, (E_j \in \mathcal{M}, \forall j\geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{M})$

(4) $\forall I, (I$ é intervalo $\Rightarrow I \in \mathcal{M})$

⇒ Em é o conjunto ao qual vou atribuir uma medida.

21/08 (5)

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é definida como

$$m: \mathcal{M} \to [0,+\infty] \qquad m = m^*/_{\mathcal{M}}$$

$$E \to mE = m^*E$$

$m = m^*/_{\mathcal{M}}$ { medida de Lebesgue é a medida externa restrita à conjuntos mensuráveis }

$X \neq \emptyset$, $X = \mathbb{R}$, σ-álgebra → próx aula

↳ Subconjuntos de X

$\mathcal{M}$: $\emptyset$, X, E, E^c, E_j, $\cup E_j$ → $\mu: \mathcal{M} \to [0,+\infty]$

$E \to \mu E$

$\mu\emptyset = 0$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu E_j,$$

$(X,\mathcal{M})$ é o espaço (mensurável) → coleção dos conjuntos

$(X, \mathcal{M}, \mu)$

| Exercício |

⇒ Seja E o conjunto dos números $x \in [0,1]$, tais que o dígito 5 comparece na expansão decimal de x. { Ex: $x = 0{,}1378959$.

Calcule m^*E

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 1

⇒ comprimento, $(1/10)$

0 0,05 0,06 0,1 | 5 na segunda casa decimal..

↳ comprimento, $1/10^2$

tenho 9 subintervalos $= \left(9 \cdot 1/10^2\right)$ → desconta $[0{,}5; 0{,}6]$

⇓

0 0,005 0,01

$9 \cdot 1/10^3 \Rightarrow \left(9^2 \cdot 1/10^3\right)$

↳ $\frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + 9^2 \frac{1}{10^3} + 9^3 \frac{1}{10^4} + \cdots$

12/08 6 7

$$= \frac{1}{10}\underbrace{\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots\right)}_{\text{soma de P.G infinita.}}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right) = 1 \; \# \quad \Rightarrow \quad m^*E = 1$$

$\Rightarrow$ $A \subseteq \mathbb{R}$, $m^*A = \inf \left\{ \sum_{j \geq 1} \ell(I_j) \; I_j \text{ é intervalo, aberto} \ldots \right\}$ medida 24/08

---

2) $E \subseteq \mathbb{R}$ é mensurável se $\forall A \subseteq \mathbb{R} \, (m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c))$

(3) $\mathcal{M} = \{ E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ é mensurável} \}$

(i) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

(ii) $E \in \mathcal{M} \to E^c \in \mathcal{M}$

(iii) $E_j \in \mathcal{M}, \forall_{j \geq 1} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M}$

(iv) todo intervalo $\mathbb{R}$ é mensurável.

(v) todo aberto de $\mathbb{R}$ é mensurável.
$\hookrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ todo fechado de $\mathbb{R}$ é mensurável.

(vi) se $E_j \in \mathcal{M}$, $\forall_{j \geq 1}$ então, $\bigcap_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M}$

$$\bigcap_{j \geq 1} E_j = \left(\left[\bigcap_{j \geq 1} E_j \right]^c \right)^c = \left(\bigcup_{j \geq 1} E_j^c \right)^c$$ o complementar de mensurável é mensurável.

$\Rightarrow$ ~~Propriedade~~ Propriedades
pequena!

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe um aberto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$, t.q.

$A \subseteq \mathcal{O}$ e $m^*\mathcal{O} \leq m^*A + \varepsilon$

$\Downarrow$

$m^*A \leq m^*\mathcal{O}$.

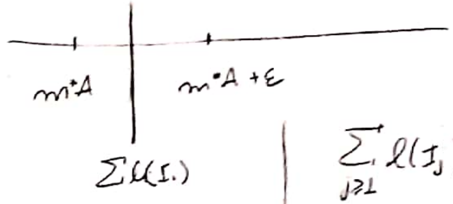
$\Rightarrow$ Dem

Se a medida, $m^*A = +\infty$, basta considerar $\mathcal{O} = \mathbb{R}$,

temos $A \subseteq \mathcal{O} = \mathbb{R}$, $m^*\mathcal{O} = m^*\mathbb{R} = +\infty = m^*A \leq m^*A + \varepsilon$

Se $m^*A < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $(I_j)_{j \geq 1}$ intervalos abertos

tal que



$\sum_{j \geq 1} \ell(I_j) < m^*A + \varepsilon$

$\hookrightarrow$ Considere $\mathcal{O} = \bigcup_{j \geq 1} I_j$, então $\mathcal{O}$ é aberto

$A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow A \subseteq \mathcal{O}$.

$A \subseteq \mathcal{O} = \bigcup_{j \geq 1} I_j$

$$m^*\mathcal{O} = m^*\left(\bigcup_{j \geq 1} I_j\right) \leq \sum_{j \geq 1} m^* I_j = \sum \ell(I_j) < m^*A + \varepsilon$$

Exercício

Medida ☺ 14/08

(1) $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

se A, B mensuráveis $\Rightarrow A \setminus B$ é mensurável

se B é mensurável, B^c é mensurável.

$A \setminus B = A \cap B^c \Rightarrow A \setminus B$ é mensurável, pois a interseção é mensurável.

$*$ $m(A-B) \stackrel{?}{=} mA - mB$; $mA - mB = \infty - \infty$ ↳ indeterminado

$\left\{ \begin{array}{l} A = \mathbb{R} \\ B = [0, +\infty[\end{array} \right.$ | mas $(A-B) =]-\infty, 0[$ que $m(A-B) = +\infty$

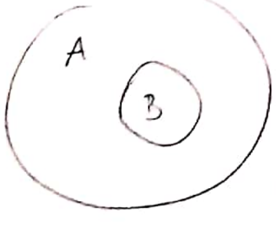
Contraexemplo

Exercícios

(1) $A, B \subseteq \mathbb{R}$

A, B mensuráveis $\Rightarrow A - B$ é mensurável.

se $mB < +\infty$ e $B \subseteq A$, então $m(A-B) = mA - mB$



$B \subseteq A$

$A = B \cup (A-B)$

$mA = mB + m(A-B)$

$\Rightarrow$ se a medida de B for finita $\Rightarrow mA - mB = m(A-B)$

(2) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes

(i) E é mensurável

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$, aberto, tal que $E \subseteq \mathcal{O}$ e $m^*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon$.

(iii) existe um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ que é G_δ tal que $E \subseteq G$ e $m^*(G - E) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii), Caso 1:

E é mensurável e $m^*E < +\infty$.

m^*E | $m^*E + \varepsilon$

$\sum_{j \geq 1} \ell(I_j)$

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $(I_j)_{j \geq 1}$ intervalos abertos com $E \subseteq \bigcup_{j \geq 1} I_j$ e $\sum_{j \geq 1} \ell(I_j) < m^*E + \varepsilon$.

Considere $\mathcal{O} = \bigcup_{j \geq 1} I_j$. Então $\mathcal{O}$ é aberto e $E \subseteq \mathcal{O}$.

$\Rightarrow$ Além disso, $m^*\mathcal{O} = m^*\left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) \leq \sum_{j \geq 1} m^*(I_j) = \sum_{j \geq 1} \ell(I_j) < m^*E + \varepsilon$

$m^*\mathcal{O} < m^*E + \varepsilon \Rightarrow m^*\mathcal{O} - m^*E < \varepsilon$.

medida ③ 14/08

$\Rightarrow E \subseteq \Theta$, e além mensurável

$\hookrightarrow m^*(\Theta - E) = m^*\Theta - m^*E < \varepsilon.$

Um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ é dito G_δ se G pode ser descrito como interseção enumerável de conjuntos abertos

↳ leitura a união

Caso 2. E é mensurável e $m^*E = +\infty$, $E \subseteq \Theta = \mathbb{R}$

↓

| 1º dos casos |

$\Rightarrow$ Para cada $n \in \mathbb{Z}$, considere $E \cap [n, n+1[= E_n$

seja $\varepsilon > 0$. Como cada E_n tem medida externa $m^*E_n < +\infty$, existe pelo caso 1, um ~~dado~~ aberto Θ_n tal que $E_n \subseteq \Theta_n$ e $m(\Theta_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}}$.

Seja $\Theta = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Theta_n$, Θ é aberto, além disso,

$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Theta_n = \Theta \Rightarrow E \subseteq \Theta$

$m(\Theta - E) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Theta_n - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) =$

$= m^*\left[\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\Theta_n - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right)\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} m^*\left(\Theta_n - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right)$ (*)

$\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) - B$

⇓

$\bigcup_{n \geq 1} (A_n - B)$

$\Rightarrow B \subseteq C, \Rightarrow A - C \subseteq A - B$

(*) $\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} m^*(\Theta_n - E_n) < \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|+2}} =$ ※

Transferimos os $\mathbb{Z}$ em $n \geq 1$.

$\frac{\varepsilon}{2^2} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n \cdot 2^2}$

※ $= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon < \varepsilon.$

E é mensurável $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Theta \subseteq \mathbb{R}$ aberto: $E \subseteq \Theta$ e $m^*(\Theta - E) < \varepsilon$. Existe $G \subseteq \mathbb{R}$ conjunto G_δ tal que $E \subseteq G$ e $m^*(G - E) = 0$.

$\{x_0\}$

↓

todo conjunto unitário na reta é um G_δ

$\Theta_1 \cap \Theta_2$

medida (4)
14/08

(ii) ⇒ (iii), pela hipótese (ii), p/ cada $n \geq 1$, existe $O_n \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $E \subseteq O_n$ e $m^*(O_n - E) < 1/n$

Considere $G = \bigcap_{n \geq 1} O_n$. Então G é conjunto G_δ.

$E \subseteq O_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow E \subseteq \bigcap_{n \geq 1} = G \Rightarrow E \subseteq G$.

hip

$$m^*(G-E) = m^*\Big(\bigcap_{n \geq 1} O_n - E\Big) \leq m^*(O_n - E) < \frac{1}{n} \; \forall n \geq 1.$$

a interseção está contida em todos.

Obs:

$$\boxed{\bigcap O_n - A \subseteq O_n - A}$$

$$\Rightarrow m^*(G-E) < 1/n, \forall n \geq 1 \Rightarrow m^*(G-E) = 0$$

(iii) ⇒ (i) "Provar que E é mensurável", com a hip (iii)

$$E = G - (G - E)$$

↳ G é mensurável por ser G_δ,
$m^*(G-E) = 0 \Rightarrow G - E$ é mensurável.

Logo, E é mensurável.

$\mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ mensuráveis}\}$.

$m : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, espaço Lebesgue mensurável
$(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ →
$$\begin{cases} \emptyset, X \in \mathcal{M} \\ E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M} \\ E_j \in \mathcal{M}, \forall j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M} \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ é σ-álgebra

↳ pela σ-aditividade.

Exemplo

(1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, menor σ-álgebra possível.

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$

(3) $X = \mathbb{N}$ $\mathcal{M} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2,4,6,\ldots\}, \{1,3,5,\ldots\}\}$.

(4) X conjunto não enumerável.

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \text{ é enumerável ou } E^c \text{ é enumerável}\}$$

medida (3)
14/08

$\emptyset, X \in \mathcal{M}$

$E \in \mathcal{M} \Rightarrow E$ é enumerável, ou E^c é enumerável.

E^c é enumerável, ou $(E^c)^c = E$ é enumerável.

$\Downarrow$

$E^c \in \mathcal{M}$

(iii) $E_j \in \mathcal{M}$, $\forall j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M}$.

E_j é enumerável, $\forall j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j$ é enumerável

$\Downarrow$

$\bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M}$.

ou

$\{ \exists j_0 \geq 1 \quad E_{j_0}^c$ é enumerável. $\}$

(b) $\exists j_0 \geq 1 \quad E_{j_0}$ não é enumerável. $E_{j_0} \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow E_{j_0}^c$ é enumerável.

$\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j\right)^c = \underbrace{\bigcap_{j \geq 1} E_j^c = E_{j_0}^c}_{\text{enumerável}}$, logo, $\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j\right)^c$ é enumerável

$\Downarrow$

$\boxed{\bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M}}$

Seja $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{A}_i, i \in I$ uma família de σ-álgebras de X, considere $\boxed{\mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i}$

(interseção de σ-álgebras é σ-álgebra)

Prove que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra.

i) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

ii) $E \in \mathcal{C} \Rightarrow E^c \in \mathcal{C}$.

iii) $E_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup E_j \in \mathcal{C}$. $\forall j \geq 1$.

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ (coleção dos abertos da reta) $\longrightarrow$ Topologia da $\mathbb{R}$ não é uma σ-álgebra

i) $\emptyset$, $X = \mathbb{R}$ é aberto

ii) $E \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\Rightarrow E^c \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

iii) união de abertos é aberto

medida (6) 14/08

Seja $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{E}$ não é σ-álgebra.

Considere $\mathcal{D} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ é σ-álgebra e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$

seja $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{D} = \underbrace{\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{D}} \mathcal{A}}$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$. Também é σ-álgebra.

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$
$\Downarrow$
$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$.

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{$abertos $\mathbb{R}\}$ não é σ-álgebra.

A menor σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, que contém $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, chama-se a σ-álgebra de Borel ou σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}$ e é designada por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = [\mathcal{T}_{\mathbb{R}}]$,

$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E$ é mensurável$\}$, todo aberto é mensurável

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M} \} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}$.

$|\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = c \rightarrow c$ cardinalidade de $\mathbb{R}$

$|\mathcal{M}| = 2^c$

$|\mathcal{M}| >> |\mathcal{B}_{\mathbb{R}}|$

19/08 ①

- $x = 0,394 \Rightarrow x = \frac{3}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \dots$

$0,444 = 0 \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots = \frac{4}{10}\cdot\left(1 + \frac{1}{10} + \dots\right) = \frac{4}{9}$

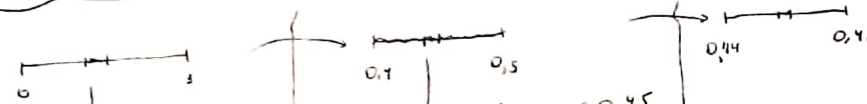
$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0.$

$\exists m \in \mathbb{N}$

$\exists (x_n)_{n\geq 1}\quad x_n \in \{0, \dots, 9\}$

tq $x = m + \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{10^n}$

$x = m, x_1 x_2 \dots x_n$



$0,4 \leq x \leq 0,5$

$0,44 \leq x \leq 0,45$

$x = 0,5$

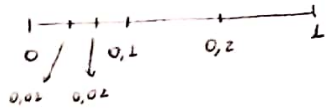
$x = 0,4999 \Rightarrow \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots = \frac{4}{10} + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2}\cdot\frac{10}{9} = \frac{5}{10}$

$b \geq 2,\ b \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$

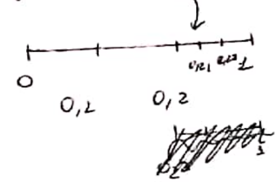
$x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$

$b_j \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$

$b = 3$ (base ternária)



$(0,2021)_3$



$X = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^2}$

$0,2021$

$= 0,2020222\dots$

Conjunto de Cantor

$n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \{\vec{r} = (r_1, \dots, r_n).\ r_j \in \{0,2\}, 1 \leq j \leq n\}$

$|S_n| = 2^n$

$\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$

$\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$

$\vec{r} < \vec{s}$ se $\begin{cases} r_1 < s_1 \\ \text{ou} \\ \exists j_0 \geq 2.\ r_j = s_j.\ 1 \leq j \leq j_0 \leq j_0 - 1 \end{cases}$

e $0 = r_{j_0} < s_{j_0} = 2.$

Ex

$(2,0,2,0,2) = \vec{r}$

$(2,0,2,2,0) = \vec{s}$

$\vec{r} < \vec{s}$

$m < n,\quad \vec{r} = (r_1, \dots, r_m)$

$\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$

$\downarrow$

$, s_m, s_{m+1},$

$\{2,0,2,2\}$

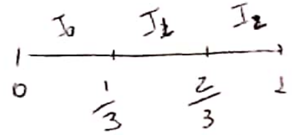
$\{2,0,22,0,22\}$

continuam

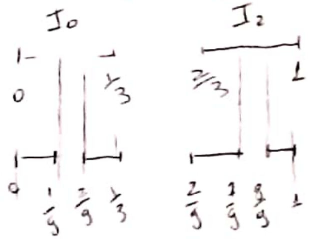
19/08 (2)

$A < B$

$\Rightarrow$ elementos de A menor que os elementos de B



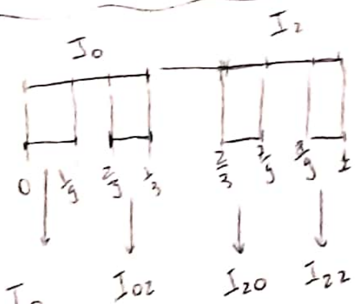
$\rightarrow R_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$



$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $F_1 = J_0 \cup I_2$

$m(F_1) = 2\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

na base 3, $J_0 \Rightarrow x = 0,0$, $I_2 \Rightarrow x = 0,2$



$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$m(F_2) = 4\,\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

$x = 0,00$ $x = 0,02$ $x = 0,20$, $x = 0,22$

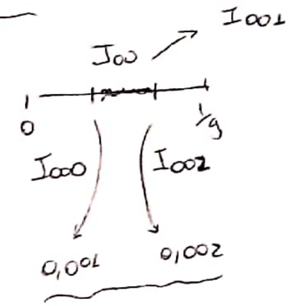
$I_{00}, I_{02} \subseteq I_0$

$(0,0) < (0,2)$

$I(0,0) < I(0,2) \Rightarrow A < B$

F_3 é reunião de 2^3 intervalos, 2 a 2 disjuntos

$mF_3 = 2^3 \frac{1}{2^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$



$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$

F_n tem 2^n intervalos fechados,

$m(F_n) = 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$F_n = \bigcup_{\vec{r} \in S_n} I_{\vec{r}}$ $F_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$

$I_{\vec{r}} = I_{(r_1, \ldots, r_n)}$

$x \in I_{\vec{r}} \Rightarrow x = (0, r_1 r_2)_3$

$m < n$, F_n F_m

$C = \bigcap_{n \geq 1} F_n$, Conjunto de Cantor

19/08 ③

(1) C é fechado, (interseção de Fechados)

C é limitado, (contido em [0,1]

$\Downarrow$

C é compacto.

(2) é mensurável

$$\boxed{m = m^*\big|_{\mathcal{M}}}$$

(2) $C \subseteq F_n, \forall n \geq 1$

$$mC \leq mF_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \forall n \geq 1$$

$$n \to \infty^+ = 0$$

$$mC = 0$$

↳ as extremidades estão em C $\Rightarrow$ $C \neq \emptyset$

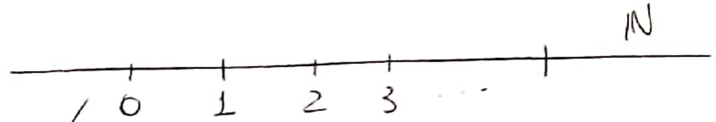
(3) Toda extremidade de intervalo aberto que foi deletado na construção de C está em C.

$x+\varepsilon$ ↘ ainda está em A

$x-\varepsilon$ →

ponto de acumulação

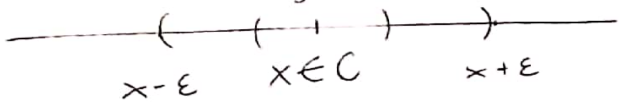
(4) Todo ponto $x \in C$ é ponto de acumulação em C



↳ nenhum dos naturais é de acumulação

↳ são isolados

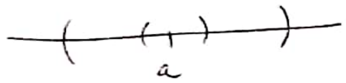
$$\frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{4}$$



$x \in F_{n_0} \Rightarrow x \in I_{\vec{r}}$, $\vec{r} \in S_{n_0}$

(5) $|C| = |\mathbb{R}| = c \Rightarrow$ Cardinalidade do conjunto de Cantor = Cardinalidade de $\mathbb{R}$.

A



→ C é fechado de interior logo

$I \subseteq C \Rightarrow mI \leq mC = 0$ { não tem intervalos

$\mathbb{R}$ é completa ⇒

↳ fechados encaixantes, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq$ fechado.

$\operatorname{diam} F_n \to 0$

$x \in C = \bigcap_{x \geq 1} F_n$

$x \in F_1 \Rightarrow x \in I_0$

$x \in F_2 \Rightarrow x \in I_{02}$

$x \in F_3 \Rightarrow x \in I_{022}$

$x \in F_n \Rightarrow x \in I_{02202}$

$I_{r_1} \supseteq I_{r_1 r_2} \supseteq I_{r_1 r_2 r_3} \supseteq$.

$x \in C \to (r_1, r_2, \dots)$

$y \in C \to (\quad \dots)$

$|\{0,2\}^{\omega}| \Rightarrow$ representação

$|\{0,2\}^{\omega}| = |\mathbb{R}|$

supondo esse fato

$C \subseteq [0,1]$, C fechado, $mC = 0$,

$|C| = c$

$x \in C \Rightarrow$ $x = 0,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{0}\,\underline{2}\,\underline{\ }\dots$

$0,020021 = 0,0200222\dots$

$\varphi: C \to [0,1]$

$x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots)_3 \longrightarrow \varphi(x) = \left(0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}, \dots\right)_2$

$x_j \in \{0,2\}, \forall_{j \geq 1}$

φ é sobrejetora

$C \subseteq [0,1] \Rightarrow |C| \leq |[0,1]| = c$

$y \in [0,1]$ $\quad y = (0, y_1 y_2 \dots y_n)_2$ → base binária

$\varphi(0,(2y_1)(2y_2)(2y_3)\dots) = y$

19/08 (I)

$\varphi(0{,}20221) = \varphi(0{,}2022022\ldots)$

$= 0{,}10110111$

$= 0{,}10111$

é sobrejetora

mas ñ sobrejetora

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff$ ⊢ ⊣ ⊢ $\in C$ (x_1, x_2)

$\varphi: C \to [0,1]$

$\tilde{\varphi}: [0,1] \to [0,1]$

$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in C \\ \varphi(a) = \varphi(b) & \text{se } x \in]a,b[\end{cases}$

onde $]a,b[$ é um dos intervalos

deletados na construção de C

---

função de Cantor

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ | funções mensuráveis

Def f é função mensurável se

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{X}$

$= f^{-1}([\alpha, +\infty]) \in \mathcal{X}$

$\cancel{f^{-1}([\infty, +\infty])} \in \mathcal{X}$

$\vdots$

$f : X \to \mathbb{R}$

f é mensurável $\Leftrightarrow f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{X}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$

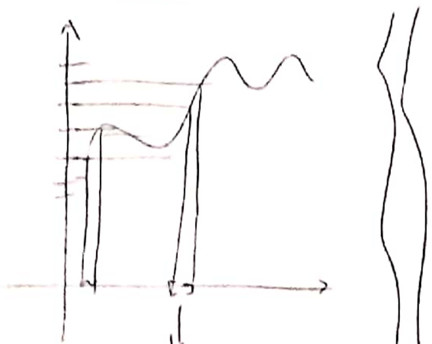
$]a,b[\; = \;]a, +\infty[\, \cap \,]-\infty, b[$.

f é mensurável $\Leftrightarrow \forall \Theta \subseteq \mathbb{R}$, Θ aberto, $f^{-1}(\Theta) \in \mathcal{X}$;

Obs:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua. → então f é mensurável

$f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ é aberto. $\Rightarrow f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{X}$



logo tem que ser mensurável.

① **Def** $E \subseteq X$:

$\chi_E : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

χ_E: chama-se função característica do conjunto E

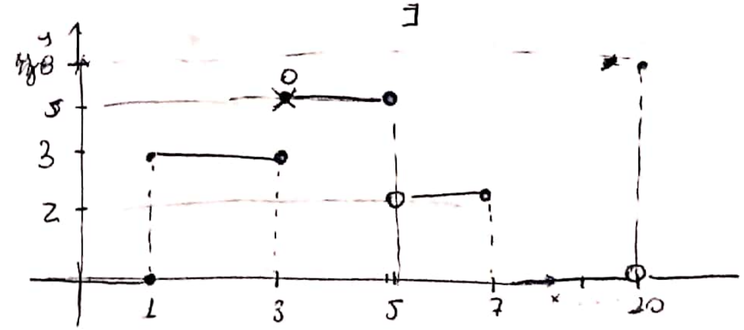
Def: $\varphi : X \to \mathbb{R}$, φ é $\forall$.

φ é uma função simples se $\operatorname{im}\varphi$ é um conjunto finito.

Exemplo

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi = 3\chi_{[1,3]} + \cancel{5}.2\chi_{]3,7]} + 8\chi_{\{10\}}$



$\operatorname{im}\varphi = \{0, 2, 3, 5, 8\}$

②

$\varphi^{-1}(0) =]-\infty, 1[\cup]7,10[\cup]10,+\infty[$;

$\varphi^{-1}(2) =]5,7]$, $=: A_1$

$\varphi^{-1}(3) = [1,3]$; $=: A_2$

$\varphi^{-1}(5) =]3,5]$; $=: A_3$

$\varphi^{-1}(8) = \{10\}$; $=: A_4$

cong. disjuntos

$\varphi = 2\chi_{A_1} + 3\chi_{A_2} + 5\chi_{A_3} + 8\chi_{A_4}$

↳ cong. disjuntos

⇒ Suponhamos que im $\varphi = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}$

com $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$.

Considere

$$A_j = \varphi^{-1}(a_j) = \{x \in X : \varphi(x) = a_j\}$$

Então

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

⇓

representação canônica da função simples.

$\varphi : X \to \{a_1, \dots, a_n\}$;

$x \in X \to \varphi(x) = a_1$,

⇓

$x \in A_1 = \varphi^{-1}(a_1)$

⇓

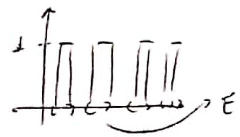
$\chi_{A_1}(x) = 1$ e $\chi_{A_j}(x) = 0$ se $j \neq 1$.

⇒ chama-se representação canônica de φ.

Exercícios

(1) $(X, \mathfrak{X}, \mu)$

$E \subseteq X$,



χ_E é função mensurável $\Leftrightarrow$ E é um conjunto mensurável.

($\Rightarrow$) "$f: X \to \mathbb{R}$ mens $\Rightarrow f^{-1}(a) \in \mathfrak{X}$"

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

$\chi_E^{-1}(1) = E$ | χ_E é mensurável $\Rightarrow \chi_E^{-1}(1) \in \mathfrak{X}$

$E \in \mathfrak{X} \Rightarrow E$ é mensurável

($\Leftarrow$) E é mensurável $\Rightarrow \chi_E$ é mensurável.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, Considere

→ nunca é maior que 1.

$A = \{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\}$ se $\alpha \geq 1 \Rightarrow A = \emptyset \in \mathfrak{X}$

~~$\alpha < 0 \Rightarrow A = X \in \mathfrak{X}$~~

↳ é maior que o negativo sempre

$\alpha = 0 \Rightarrow A = E \in \mathfrak{X}$ {por hip E é mensurável}

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$

$0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow A = E \in \mathcal{X}$

$\Downarrow$

$\alpha = 0$

$\alpha < 0 \Rightarrow A = X \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow$ Logo, χ_E é função mensurável.

(2). Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R}$, funções mensuráveis.

Então $f+g$, $f \cdot g$, cf $(c \in \mathbb{R})$, f^2, $f \cdot g$ são funções mensuráveis

(a) $c \in \mathbb{R}$ e f é mensurável $\Rightarrow$ cf é mensurável.

$f: X \to \mathbb{R}$, mens

$\{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\geq$
$<$
$\leq$

$c = 0 \Rightarrow cf \equiv 0$,

$c > 0$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X: cf(x) > \alpha\} = \{x \in X: f(x) > \alpha/c\} \in \mathcal{X}$

$c < 0$ $\{x \in X: cf(x) > \alpha\} = \underbrace{\{x \in X: f(x) < \alpha/c\}}_{\in \mathcal{X}}$

(b) $f, g: X \to \mathbb{R}$ são mensuráveis $\Rightarrow f+g$ é mensurável.

$$\begin{cases} \forall \beta \in \mathbb{R}, \{x \in X: f(x) > \beta\} \in \mathcal{X} \\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \{x \in X: g(x) < \delta\} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere

$A = \{x \in X: f(x) + g(x) > \alpha\}$

$x \in A \Leftrightarrow f(x) + g(x) > \alpha$

$\Leftrightarrow f(x) > \alpha - g(x)$

$\alpha - g(x)$ $\downarrow$ $f(x)$

$r \in \mathbb{Q}$ (racional)

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: \alpha - g(x) < r < f(x)$

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \, (\alpha - g(x) < r \text{ e } f(x) > r)$

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \, (g(x) > \alpha - r \text{ e } f(x) > r)$

$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \, (x \in \{x \in X: g(x) > \alpha - r\} \text{ e } x \in \{x \in X: f(x) > r\})$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X: g(x) > \alpha - r\} \cap \{x \in X: f(x) > r\})$

↳ união enumerável de conjuntos mensuráveis

4

5

? f é mensurável $\Rightarrow f^2$ é mensurável.

f g mensurável $\Rightarrow fg$ é mensurável

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab \Rightarrow ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right]$

$\Downarrow$

$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$

---

(3) $f_n\ X \to \mathbb{R}$, sequência de funções mensuráveis

Considere $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$g(x) = \sup\{f_n(x)\ \ n \geq 1\}$

$h: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$h(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\}$

$\Rightarrow$ Então g e h são funções mensuráveis

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ Considere

$A = \{x \in X : g(x) > \alpha\}$

$x \in A \iff \alpha < g(x) \iff \alpha < \sup\{f_n(x) : n \geq 1\}$

$\Updownarrow$

$\exists\, n_0 \geq 1 \quad \alpha < f_{n_0}(x) \leq \sup$

$\Updownarrow$

$x \in \{x \in X : \alpha < f_{n_0}(x)\}$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n \geq 1}\{x \in X : \alpha < f_n(x)\}$

$A \underset{=}{\subseteq} \bigcup_{n \geq 1}\{x \in X : \alpha < f_n(x)\}$. $\Rightarrow$ união de mensuráveis é mensurável

$x \in A \Rightarrow \alpha < \sup\{f_n(x) : n \geq 1\}$

$\Rightarrow$ Uma propriedade $P(x)$ vale quase sempre (q.s) (almost everywhere (a.e)) X mensurável se existe $N \subseteq X$, N mensurável com $\mu N = 0$ e $P(x)$ vale p/ todo $x \in X - N$

mensurável
mas não

mas N tem $\mu N = 0$

$f: X \to \mathbb{R}$

$g: X \to \mathbb{R}$

$f = g$ q.s $\iff \exists\ N \subseteq X$, $\mu N = 0$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in N$

Exemplo

$X = \{0, 1, 2\}$

$\mathcal{X} = \{\emptyset, X, \{0,1\}, \{2\}\}$

$\mu\emptyset = 0$

$\mu(\{0,1\}) = 0$

$\mu(\{2\}) = 1$

$\mu(X) = 1$

$f: X \to \mathbb{R}$

$f(x) = 4$, $\forall x \in X$

f é constante $\therefore$ é mensurável.

$g: X \to \mathbb{R}$.

$g(2) = 4$;

$g(1) = 2$;

$g(0) = 5$;

$N = \{0,1\}$, $m N = 0$, $x \in N \Rightarrow f(x) = g(x)$

$\Rightarrow \boxed{f = g \; q.s}$

g não é mensurável

$$\boxed{\begin{array}{c} g : X \to \mathbb{R} \\ \Downarrow \\ g^{-1}(a) \in (\mathcal{X}) \end{array}} \to g^{-1}(5) = \{0\} \to \text{não é mensurável} \notin \mathcal{X}$$

Proposição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas funções tais que $f = g \; (q.s)$. Se f é (Lebesgue)-mensurável então g é (Lebesgue)-mensurável.

$\cancel{\text{Seja}}$ $f = g \; q.s \Rightarrow \exists N \in \mathcal{M}$, $m N = 0$ e $f(x) = g(x)$

$\forall x \in \cancel{X/N}$. $\mathbb{R} - N$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Por hip. $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$.

$$\Downarrow$$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap N^c \in \mathcal{M}$$

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} - N \in \mathcal{M}$$

$$\{x \in \underset{X-N}{\cancel{X}} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

$\{x \in X : g(x) > \alpha\} =$

$= \underbrace{\{x \in X - N : g(x) > \alpha\}} \cup \underbrace{\{x \in N : g(x) > \alpha\}}$

$= \underbrace{\{x \in X - N : f(x) > \alpha\}}_{\text{mensurável}} \cup \underbrace{\{x \in N : g(x) > \alpha\}}_{\subseteq N \Rightarrow m N = 0 \to 0} \in \mathcal{M}$

$= \cancel{\{x \in X - N}$

$\Rightarrow (X, \mathcal{X}, \mu)$, espaço de medida.

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$, funções mensuráveis

$$\begin{cases} g(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\} \\ h(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\} \end{cases} \Rightarrow \text{são mensuráveis}$$

$f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$, funções mensuráveis.

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$

$\hookrightarrow f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável.

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$

$A = \{ z \in \overline{\mathbb{R}} \,/\, \exists (x_{n_j})$ subsequência de (x_n) tal que $x_{n_j} \to z \}$

$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, l = \inf A$ e $\exists\, L = \sup A$

$l \in A$

A

$l \quad z_1 \quad x_{n_1} \quad l+1$

$z_2 \quad l + 1/2$

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

$l \leq x_{n_j} \leq l + 1/n$ $\Big\}\to L \in A$

$\to$ calcula os lims e pega o menor

dels, $\{0, 1, -1, 0, \ldots\}$

$\hookrightarrow$ lim inf ...

Def: $\begin{cases} l = \underline{\lim}\, x_n = \liminf x_n \\ L = \overline{\lim}\, x_n = \limsup x_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ Propriedade: (x_n)

$$\forall n \geq 1 \begin{cases} \alpha_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \inf\{x_k : k \geq n\} \\ \beta_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \sup\{x_k : k \geq n\} \end{cases}$$

(x_n) é pequena ou crescente

$\alpha_1 = \inf\{x_1, x_2, \ldots\}$

$\alpha_2 = \inf\{x_2, x_3, \ldots\}$

$\Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$

$\to \sup\{\alpha_n : n \geq 1\}$

$\underline{\lim}\, x_n = \sup\{\alpha_n : n \geq 1\} = \sup\{\inf\{x_k : k \geq n\} : n \geq 1\}$

$\beta_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$, $\beta_2 = \{x_2, x_3, \dots\}$

$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \dots \geq \beta_n \geq \dots \to \inf\{\beta_n \; n \geq 1\}$

$\overline{\lim}\, x_n = \inf\{\beta_n \; n \geq 1\} = \inf\{\sup\{x_k \; k \geq n\} \; n \geq 1\}$

⇒ $f_n \; X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável.

Definimos $f = \underline{\lim}\, f_n$ da seguinte maneira:

$f(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$

$f(x) = \underline{\lim}\, f_n(x) = \sup\{F_n(x) \; n \geq 1\}$

supremo; $\sup = \{F_n(x) . n \geq 1\}$; $F_n(x) = \inf\{f_k(x) \; k \geq n\}$

$\tilde{F}(x) = \inf\{F_n(x) \; n \geq 1\}$

$f_n \; X \to \overline{\mathbb{R}}$, $F_n \; X \to \overline{\mathbb{R}}$

$F_n(x) = \inf\{f_k(x) \; k \geq n\}, \forall x \in X$

$\Downarrow$

F_n é mensurável p/ $\forall n$

$(\underline{\lim}\, f_n)(x) = \sup\{F_n(x) : n \geq 1\}$

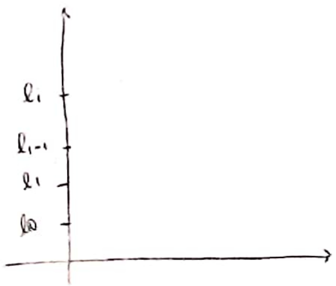
$\underline{\lim}\, f_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x) = \sup\{\inf\{f_k(x) \; k \geq n\} \; n \geq 1\}$

$\overline{\lim}\, f_n(x) = \overline{\lim}\, f_n(x) = \inf\{\sup\{f_k(x) \; k \geq n\} \; n \geq 1\}$

⇒ $\underline{\lim}\, f_n$ e $\overline{\lim}\, f_n$ são funções mensuráveis

$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \iff \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

↳ $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mens. pois $f = \underline{\lim}\, f_n = \overline{\lim}\, f_n$.

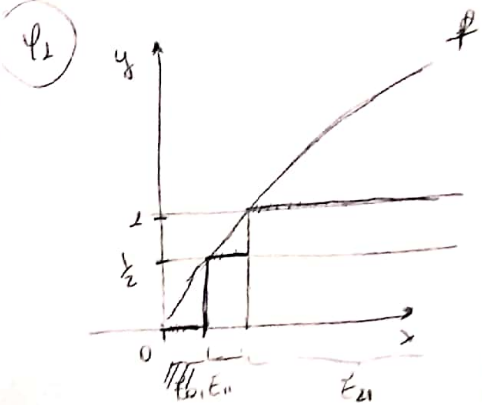


$A_i = f^{-1}([l_{i-1}, l_i[) = \{x \in X : l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}$

teo ③

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, se $f: X \to [0,+\infty]$ é uma função mensurável então existe uma sequência (φ_n) de funções simples mensuráveis com $0 \leq \varphi_1(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots \leq f(x)$ tal que $\lim_{n\to\infty^+} \varphi_n(x) = f(x), \forall x \in X$. Se f é limitada então pode-se obter (φ_n) de maneira que a convergência seja uniforme.

φ_1



$f^{-1}([0, 1/2[) = E_{01}$

$f^{-1}([1/2, 1[) = E_{11}$

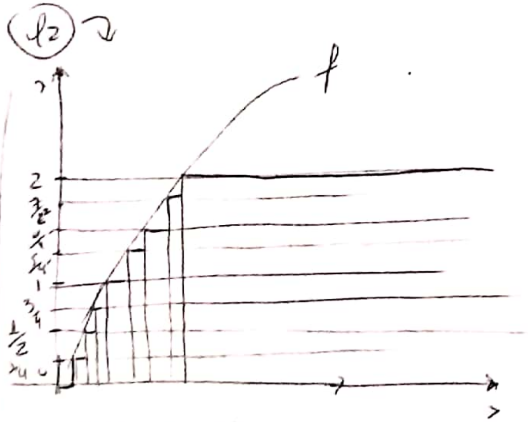
$f^{-1}([1, +\infty]) = E_{21}$

$\varphi_1 = 0\chi_{E_{01}} + \frac{1}{2}\chi_{E_{11}} + 1\chi_{E_{21}}$

$|f(x) - \varphi_1(x)| < 1/2$

$\hookrightarrow \forall x \in f^{-1}([0,1])$

φ_2



$E_{02} = f^{-1}([0, 1/2^2[)$

$E_{12} = f^{-1}([1/2^2, 2/2^2[)$

$E_{22} = f^{-1}([2/2^2, 3/2^2[)$

$E_{32} = f^{-1}([3/2^2, 4/2^2[)$

$E_{42} = f^{-1}([$

$E_{k2} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^2}, \frac{k+1}{2^2}\right]\right)$ p/ $0 \leq k \leq 7$

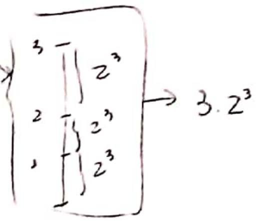
$E_{02} = f^{-1}([0, \dots])$

~~*~~ φ_2:

φ_3. $2^3 \to E_{k3} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^3}, \frac{k+1}{2^3}\right]\right)$ $0 \leq k \leq 3 \cdot 2^3 - 1$

~~$|f(x) - \varphi_2$~~

$|f(x) - \varphi_2(x)| \leq 1/2^2$ / p/ todo $x \in f^{-1}([0,2])$



~~$|\varphi(x)$~~ $|f(x) - \varphi_n(x)| < 1/2^n$, p/ todo $x \in f^{-1}([0,n])$

⇒ proposição.

$A \subseteq \mathbb{R}$ e $m^*A > 0 \Rightarrow \exists D \subseteq A$. D é mensurável.

⇒ função de Cantor

$\varphi: [0,1] \to [0,1]$

φ é cont.

φ é cresc.

φ é sobrejetora

φ é constante nos intervalos que foram removidos na construção de C.

$\Rightarrow$ isto é, se $]a,b[$ for removido na construção de C então $\varphi(a)=\varphi(b)$.

Seja $h:[0,1]\to\mathbb{R}$

$h(x)=x+\varphi(x)$, $\forall x\in[0,1]$

(1) $\Rightarrow$ h é contínua.

(2) $\Rightarrow$ h é estritamente crescente

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+\varphi_1(x)<x_2+\varphi_2(x)$

$\Downarrow$

$h_1(x)<h_2(x)$

(3) $h(0)=0+\varphi(0)=0$

$h(1)=1+\varphi(1)=2$

$\operatorname{Im}(h)=[0,2]$

(4) $h:[0,1]\to[0,2]$ é um homeomorfismo.

$mC=0$

$m([0,1]-C)=1$

$m(h[0,1]-C))=?$

$]a,b[$ intervalo retirado na obtenção no conjunto de Cantor C

$$[0,1] \xrightarrow{h} [0,2]$$

$0 \quad a \quad b \quad 1$ $\qquad$ $0 \quad h(a) \quad h(b) \quad 2$

$h(b)=b+\varphi(b)$.

$h(a)=a+\varphi(a)$.

$h(b)-h(a)=b-a+\underbrace{[\varphi(b)-\varphi(a)]}_{=0} \Rightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$ em C

$m(h([0,1]-C))=1$.

$m(h([0,1]))=2 \Rightarrow m(h(C))=1$

$[0,1]=C\cup([0,1]-C)$

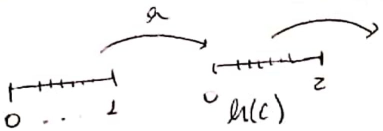
$\underbrace{h([0,1])}_{[0,2]}=h(C)\cup \underbrace{h([0,1]-C)}_{1}$

$\Downarrow$

$m([0,2])=2$ $\qquad$ $m(h(C))=1$

$m(C)=0 \Rightarrow m(h(C))=1$

$\hookrightarrow$ contínua e é um homeomorfismo



$D \subseteq h(C)$, Dũ memile

$h^{-1}(D) \subseteq C$

$m(h(C)) = 1 > 0$

$\nexists C \Rightarrow$ Tem n ... ...

➡ Exercícios

⇒ (1) Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida

$(E_n)_{n\geq 1}$ sequência de conjuntos mensuráveis tal que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1}$

então a $\mu\left(\bigcup E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n$.

$\mu E_3 = +\infty$ — imp. estrita

Caso 1 $\exists n_0 \geq 1$ $\mu E_{n_0} = +\infty$, neste caso, $\forall n \geq n_0$ $(E_{n_0} \subseteq E_n \Rightarrow \mu E_n = +\infty)$

logo, $\lim\limits_{n\to\infty^+} \mu E_n = +\infty$, $E_{n_0} \subseteq \bigcup\limits_{n\geq 1} E_n \Rightarrow \mu E_{n_0} \leq \mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right)$ } (*) →

$\mu E_{n_0} = +\infty$

(*) $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right) = +\infty$, } ⇒ $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu E_n$

→

Caso 2 $\forall n \geq 1$. $\mu E_n < +\infty$

$A_n = E_n - E_{n-1}$, $\forall n \geq 2$

Deve mostrar que $\mu(\cup E_n) = \mu(\cup A_n)$

1) Disjuntos os conj.
$A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus E_1$, $A_3 = E_3 - E_2$,

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, suponhamos $i < j \Rightarrow i \leq j-1 \Rightarrow E_i \subseteq E_{j-1}$

$A_j \subseteq E_j$ e $A_j \cap E_{j-1} = \emptyset$, pois $(A_j = E_j - E_{j-1})$, $A_i \subseteq E_i \subseteq E_{j-1}$

↳ e $A_i \subseteq E_{j-1}$ } ⇒ $A_i \cap A_j = \emptyset$

(ii) $\forall n \geq 1$ $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j\right)$ | $A_j = E_j - E_{j-1} \Rightarrow A_j \subseteq E_j$, $1 \leq j \leq n \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$ →

→ $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$, $\begin{cases} x \in E_1 \Rightarrow x \in A_1 \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \\ x \notin E_1 \end{cases}$

↳ mas $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$, ⇒ $\exists j_0 = \min\{j \mid x \in E_j\}$ ⇒ $x \in E_{j_0} \setminus E_{j_0-1} = A_{j_0}$

⇒ $x \in A_{j_0} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$

⇒ $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j = E_n\right)$ $\left(\Rightarrow \bigcup\limits_{j\geq 1} A_j = \bigcup\limits_{j\geq 1} E_j\right)$

$\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right) = \sum\limits_{n\geq 1} \mu A_n = \lim\limits_{n\to\infty^+} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu A_j$ *

⇒ (B)$_a$ → $\mu B < \infty^+ \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

$\mu A_j = \mu(E_j - E_{j-1}) =$

$* = \lim\limits_{n\to\infty^+} \left[\mu E_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} (\mu E_j - \mu E_{j-1})\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\mu E_1 + (\mu E_2 - \mu E_1) + (\mu E_3 - \mu E_2) + \dots + (\mu E_n - \mu E_{n-1})\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n$ * $\left\{ \mu\left(\bigcup\limits_{j\geq 1} A_j\right) = \lim\limits_{n\to\infty^+} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu A_j = \lim\limits_{n\to\infty^+} \mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu E_n \right.$

↳ demonstr. alternativa

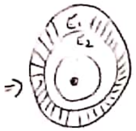
$E_1 = [1, +\infty[$, $E_2 = [2, +\infty[$, ..., $E_n = [n, +\infty[$ ..., $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$

$\mu E_n = +\infty$, $\forall n \geq 1$,

$\bigcap\limits_{n\geq 1} E_n = \emptyset \Rightarrow \mu\left(\bigcap\limits_{n\geq 1} E_n\right) = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\mu E_n}_{+\infty} = +\infty$

(2) Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida e $(E_n) \subseteq \mathcal{X}$ com $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots \supseteq E_n$

Se $\mu E_1 < +\infty$ então $\mu\left(\bigcap\limits_{n\geq 1} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty^+} \mu E_n$.

→ 

⇒ $\bigcap\limits_{n\geq 1} E_n$, $E_1 = \underbrace{\left[\bigcup\limits_{j\geq 1} (E_j - E_{j+1})\right]}_{\text{coroas}} \cup \underbrace{\left[\bigcap\limits_{n\geq 1} E_n\right]}_{\text{miolo}}$

$\Rightarrow$ Seja $x \in E_1$ $\left\{ x \in \bigcap_{n\geq 1} E_n \text{ ou } x \notin \bigcap_{n \geq 1} E_n \right.$

$\hookrightarrow \exists\, j_0 \geq 1$ $j_0 = \min\{j \geq 1 : x \notin E_j\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in E_{j_0 - 1} - E_{j_0} \} \Rightarrow x \in \left[\bigcup_{j\geq 1} (E_j - E_{j+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{n \geq 1} E_n \right]$

$\Rightarrow x \in \left[\bigcup_{j \geq 1} (E_j - E_{j+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{n\geq 1} E_n \right]$

$\hookrightarrow$ provar que são disjuntos (dois a dois)

$\hookrightarrow \mu E_1 = \mu\left(\bigcup_{j\geq 1} (E_j - E_{j+1}) \right) + \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n \right) \Rightarrow \mu E_1 = \underbrace{\sum_{j\geq 1} (E_j - E_{j+1})}_{(*)} + \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n \right)$

$(*)$ $\sum_{j \geq 1} \mu(E_j - E_{j+1}) = \lim_{n \to \infty^+} \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j - E_{j+1}) = \lim_{n\to\infty^+} \sum_{j=1}^{n} (\mu E_j - \mu E_{j+1})$

$= \lim_{n \to \infty} \left[(\mu E_1 - \mu E_2) + (\mu \cancel{E_2} - \mu \cancel{E_3}) + \dots + (\mu E_n - \mu E_{n+1}) \right] =$

$= \lim_{n\to\infty^+} (\mu E_1 - \mu E_{n+1}) =$

$\mu E_1 = \lim_{n \to \infty^+} (\mu E_1 - \mu E_{n+1}) + \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n \right)$

$\mu E_1 = \lim \mu E_1 - \lim_{n\to\infty^+} \mu E_{n+1} + \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n \right)$

$0 = -\lim_{n\to\infty^+} \mu E_{n+1} + \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n \right) \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n \right) = \lim_{n\to\infty^+} \mu E_{n+1}$

(3) Seja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável prove que $\{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{X}$ (é mensurável)

Se f é mensurável $\Rightarrow f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{X}, f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{X}$;

$f^{-1}(+\infty) = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. $\bigcap_{n \geq 1} \{x \in X : f(x) > n\}$ $<-n$

$\{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\} = X - [f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty)]$ logo, A é mensurável

(4) Seja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ função mensurável. Dado $Y \subseteq X$, $Y \in \mathcal{X}$, considere a função $h = f|_Y$, isto é, $h: Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$. Prove que h é mensurável.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere $\{x \in Y : \underbrace{h(x)}_{f(x),\text{ pois } h(x) = f(x)} > \alpha\}$

f é mensurável $\Rightarrow \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$

$\left. A = \underbrace{\{x \in X : f(x) > \alpha\}}_{\in \mathcal{X}} \cap Y \quad \hookrightarrow \in \mathcal{X}, \text{ por hip} \right\} \Rightarrow A \in \mathcal{X}.$

(5) Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Prove que $\underbrace{\{x \in X : f(x) = g(x)\}}_{A}$ é mensurável.

$A = \{x \in X : f(x) - g(x) = 0\}$, seja $h: X \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - g(x)$

f, g são funções mensuráveis $\Rightarrow h = f - g$ é função mensurável $\Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1}(0) \in \mathcal{X}$, $\Rightarrow h^{-1}(0) = \{x \in X : h(x) = 0\} \in \mathcal{X}$

$\therefore A = \{x \in X : f(x) - g(x) = 0\} \in \mathcal{X}$

6) Sejam $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Prove que o conjunto

$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{X}$

$\hookrightarrow f(x) - \cancel{g}(x) = 0$

Seja $Y = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$

$f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$

$g^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X : g(x) \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty) \quad f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty)$ (3) 19

f, g são mensuráveis $\Rightarrow Y \in \mathcal{X}$.

$\{x \in X \; h(x) \in \mathbb{R}\}$, considere $f_1 = f|_Y$ e $g_1 = g|_Y$

$f_1 : Y \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$ $\begin{cases} g_1 : Y \to \mathbb{R} \\ g_1(x) = g(x), \; \forall x \in Y \end{cases}$

f_1 e g_1 são mensuráveis $\Rightarrow \{x \in Y \; f_1(x) = g_1(x)\} \in \mathcal{X}$ (pelo ex. anterior)

$\Rightarrow \{x \in X \; f(x) \in \mathbb{R}, g(x) \in \mathbb{R}$ e $f(x) = g(x)\} \in \mathcal{X}$.

$\{x \in X \; f(x) = g(x)\} = \{x \in X \; f(x) \in \mathbb{R}, g(x) \in \mathbb{R}$ e $f(x) = g(x)\} \cup$
$\cup (f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty)) \cup (f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty)) \in \mathcal{X}$

(7) $f, g \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f mensurável, g contínua $\} \Rightarrow g \circ f \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere $A = \{x \in \mathbb{R} \; (g \circ f)(x) > \alpha\}$

$A = (g \circ f)^{-1}(]\alpha, +\infty[) = f^{-1}(g^{-1}(]\alpha, +\infty[))$ (*) aberto!

Obs: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \supseteq Z$, $A \xrightarrow{g \circ f} C$, $g \circ f^{-1}(Z) = \{x \in A \; (g \circ f)(x) \in Z\} = f^{-1}(g^{-1}(Z))$

$x \in (g \circ f)^{-1}(Z) \Leftrightarrow g(f(x)) \in Z \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(Z) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(Z))$

(*) $\Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{j \in J} I_j) = \bigcup f^{-1}(I_j) \in \mathcal{X} \Rightarrow A \in \mathcal{X}$. A é mensurável

$g \circ f = ? \Rightarrow$ mas

$\varphi[0,1] \to [0,1]$, função de Cantor. e $h\ [0,1] \to [0,2]$, (1)
$h(x) \to x + \varphi(x), \forall x \in [0,1]$

prop da função

i) Estritamente crescente, $h(0)=0$ e $h(1)=2$.

ii) h é sobrejetora

iii) h é contínua ($\Rightarrow h^{-1}$ é contínua $h^{-1}\ [0,2] \to [0,1[$

$[0,1] \xrightarrow{h} [0,2]$ | $m(C)=0$.
$C \to h(C)$ | $m(h(C)) = 1 > 0$
$\Downarrow$
$\exists D \subseteq h(C)$. D é ñ mensurável.

$h^{-1}(D)$ mes $\to$ D ñ mes.

$[0,1] \xrightarrow{h} [0,2]$, $\underbrace{D \subseteq h(C)}_{\text{não mensurável.}}$ | $h^{-1}(D) \subseteq C$
$\hookrightarrow$ medida, $m(C)=0$.
$\Downarrow$
$m^* h^{-1}(D) = 0$
$\Downarrow$
$h^{-1}(D)$ é mensurável

$[0,2] \xrightarrow{h^{-1}} [0,1] \xrightarrow{\chi_{h^{-1}(D)}} \mathbb{R}$ { E é mes $\Rightarrow \chi_E$ é mensurável.

composta de duas funções mensuráveis

$\chi_{h^{-1}(D)} \circ h^{-1}(x) = \chi_{h^{-1}(D)}(h^{-1}(x)) =$

$\Rightarrow \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$

$\underline{h^{-1}(x) \in h^{-1}(D)}$
$\Updownarrow$
$x \in D$

$\chi_{h^{-1}(D)}(h^{-1}(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D, \end{cases} = \chi_D(x)$

função não mensurável

(mes) $\circ$ (cont) ~~$\in$~~ X mes

(cont) $\circ$ (mes) mens

---

(2) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função mensurável, e $c \in \mathbb{R}$.
Considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h(x) = f(x+c), \forall x \in \mathbb{R}$

Prove que h é função mensurável.

$\Rightarrow$ Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > \alpha\} = h^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

$x \in A \Leftrightarrow h(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x+c) > \alpha$,

f é mensurável
$\Downarrow$
$\{y \in \mathbb{R} : f(y) > \alpha\}$ é mensurável $\Rightarrow$ $x + c \in f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \Rightarrow$
$\|$
$f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

$\Rightarrow$ $x \in \underbrace{f^{-1}(]\alpha, +\infty[)}_{\text{mensurável}} - c$ $\in \mathcal{M}$ trasladado de mensurável é mensurável.

$\Rightarrow$ logo $A = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) - c$, como f é mensurável, segue $\mathcal{M}$

$f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

---

(3) Seja $(X, \mathcal{X})$ espaço mensurável e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, isto é, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$

Prove que, para todo $E \subseteq \mathbb{R}$, se E é boreliano então $f^{-1}(E)$ é mensurável.

$\mathcal{X}$

$f: X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, mensurável.

$f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$ $\quad$ α $\quad$ $+\infty$ $\quad$ $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = [\mathcal{E}]$, $\mathcal{E} = \{]\alpha,+\infty[: \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = [\{\text{intervalos de } \mathbb{R}\}]$

$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f^{-1}(E) \in \mathcal{X}\} \supseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

↳ quero provar que todo boreliano tem essa propriedade

logo é Boreliano

$$\left.\begin{array}{l}]\alpha,+\infty[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \\ ]-\infty,+\infty[\in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$

---

(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ por construção.

(2) $\mathcal{C}$ é σ-algebra.

i) $\emptyset, \mathbb{R} \subseteq \mathcal{C}$; $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ que é mensurável

$f^{-1}(\mathbb{R}) = X \in \mathcal{X}$ é mensurável.

---

ii) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$

$E \in \mathcal{C} \Rightarrow E^c \in \mathcal{C}$

$E \in \mathcal{C} \Rightarrow E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$

$\Downarrow$

$E^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $(f^{-1}(E))^c \in \mathcal{X}$

$\Downarrow$

$E^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $f^{-1}(E^c) \in \mathcal{X} \Rightarrow E^c \in \mathcal{C}$

(iii) $E_j \in \mathcal{C}, \forall j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{C}$.

$E_j \in \mathcal{C}, \forall j \geq 1 \Rightarrow E_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $f^{-1}(E_j) \in \mathcal{X}, \forall j \geq 1$.

$\Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\bigcup_{j\geq 1} f^{-1}(E_j) \in \mathcal{X}$. $\Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $f^{-1}(\bigcup_{j\geq 1} E_j) \in \mathcal{X}$

$\Downarrow$

$\bigcup_{j\geq 1} E_j \in \mathcal{C}$

(3) $]\alpha,+\infty[\, \in \mathcal{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, pois f é mensurável

$\boxed{f: X \to \mathbb{R} \text{ mens.} \quad f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{X}}$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{Z} \Big\}$ $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ → os elementos dela são de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

↳ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{Z}$

⇒ Seja $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ uma σ-algebra tal que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $]\alpha,+\infty[\, \in \mathcal{Z}$.
Então $\mathcal{Z}$ contém todos os conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

i) $]a,b[$
ii) $]a,+\infty[$
iii) $]-\infty,a[$

$]\alpha,+\infty[\, \in \mathcal{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$[\alpha,+\infty[\, = \bigcap_{n \geq 1}]\alpha - \frac{1}{n},+\infty[\, \in \mathcal{Z}$

$\Rightarrow [\alpha,+\infty[\, \in \mathcal{Z} \Rightarrow ([\alpha,+\infty[)^c \in \mathcal{Z}$

$\Downarrow$

$(]-\infty,\alpha[\, \in \mathcal{Z})$

$]a,b[\, =]-\infty,b] \cap]a,+\infty[\, \in \mathcal{Z}$

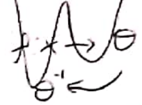
⇒ Como todo aberto é reunião enumerável de intervalos abertos então todo aberto está em $\mathcal{Z}$.

$(X, \mathcal{X}), \ (Y, \mathcal{Y})$

$f: X \to Y$ é mens

$f^{-1}(E) \in \mathcal{X} \leftarrow E \in \mathcal{Y}$

f. Representação



$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \quad \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f^{-1}(\theta) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}, \ \theta \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$

é uma cópia de latim

$\mathcal{X} \quad \mathcal{Y} \quad \mathcal{Z}$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $g \circ f$

$E \in \mathcal{Z}$

$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(E)}_{\in \mathcal{Y}})$ é mensurável $\in \mathcal{X}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{M}) \quad (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, função mens.

$f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\mathcal{M}$ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$g^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ $\leftarrow$ E

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)^c\right)^c = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c$$

Seja $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ e $f: X \to \mathbb{R}$ função mensurável:

Prove que

Sejam $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \forall x \in X.$

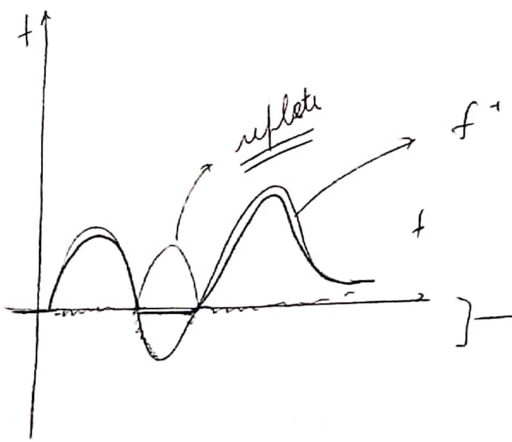
$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \forall x \in X.$

Prove:

(i) $\Rightarrow f = f^+ - f^-$

(ii) $\Rightarrow f^+$ e f^- são funções mensuráveis

(iii) $\Rightarrow |f|$ " " "



$\Big\} \to f^+$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f^+(x) = f(x), \\ f^-(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f^+(x) = 0 \\ f^-(x) = -f(x) \end{cases} \Rightarrow f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x).$$

(ii) $A = f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$

$f^+ = f\chi_A \Rightarrow f^+(x) = f(x)\chi_A$ se $f(x) < 0 \Rightarrow f^+(x) = 0$ e $\chi_A = 0$

~~$f^{-1}(X)$~~

$f^+ = f \cdot \chi_A$, onde $A = \{f^{-1}([0, +\infty[)$, seja $x \in X\}$

$$f(x) \geq 0 \begin{cases} \Rightarrow f^+(x) = f(x) \\ \Rightarrow x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \Rightarrow f(x)\cdot\chi_A(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow f^+(x) = f(x)\cdot\chi_A(x)$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \Rightarrow f(x)\chi_A(x) = 0 \\ f^+(x) = 0 \end{cases}$$

$\text{logo } \underbrace{f^+ = f\chi_A}$

$\Big\{$ se f é mensurável então A é mensurável $\Rightarrow \chi_A$ é mensurável $\Big\}$

$f\chi_A$ é mensurável $\Rightarrow f^+$ é mensurável.

$\Rightarrow B = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ $\left|\begin{array}{l} f = f^+ - f^- \\ f^- = f^+ - f \end{array}\right.$

$|f| = f^+ + f^-$

Seja $(X, \mathfrak{X})$ espaço mensurável e $f: X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então existe uma sequência (φ_n) de funções simples e mensuráveis tal que ~~$\varphi_n(x) \to f(x)$~~
$\lim_{n \to \infty^+} \varphi_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Prop: $(X, \mathfrak{X})$, $f: X \to [0, +\infty]$, função mensurável, Então existe uma seq (φ_n) de funções simples e mensuráveis com $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \ldots \leq \varphi_n(x) \leq \ldots \leq f(x)$ e $\varphi_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$.

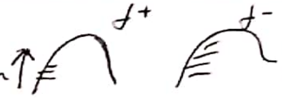
$f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- são funções mensuráveis e $f^+(x) \geq 0$ e $f^-(x) \geq 0$, $\forall x \in X$.

$f^+ \geq 0$ e é mens $\Rightarrow \exists (\alpha_n)$ sequência de funções simples e mensuráveis com $\alpha_n(x) \geq 0$, $\forall x \in X$ e $\alpha_n(x) \uparrow f^+(x)$, $\forall x \in X$.

$f^- \geq 0$ e é mensurável $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \exists (\beta_n) \text{ sequência de funções simples} \\ \text{e mensuráveis com } \beta_n(x) \geq 0, \forall x \in X \\ \text{e } \beta_n(x) \uparrow f^-(x), \forall x \in X. \end{array}\right.$

Como $f = f^+ - f^-$, façamos $\varphi_n(x) = \alpha_n(x) - \beta_n(x)$, $\forall x \in X$

Então $\varphi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$

$\alpha_n \uparrow f^+$ $\alpha_n \uparrow$  $\uparrow \beta_n$

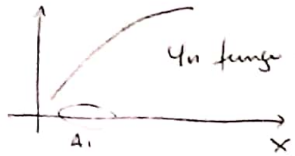
f^+ f^-

Prove que $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$, $\forall x \in X$.

Integração de função positiva e mensurável:

$(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida

$f: X \to [0,+\infty]$, mens



φ_n funç simples. $\varphi_n \uparrow f$

$\varphi = a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2} + \dots + a_n \chi_{A_n}$

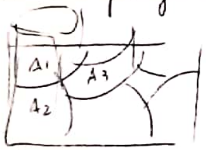
$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{E_j}$$

$$\int_X f\, d\mu.$$

Def Seja $\varphi: X \to [0,+\infty[$, uma funç simples e mensurável. (positiva)

Suponhamos que a representação canônica de φ seja dada por

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$



Definimos a integral da função φ como

$$\int_X \varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu A_j \geq (f \geq 0)$$

digo que f é Integrável quando $\int_X f\, d\mu < +\infty$

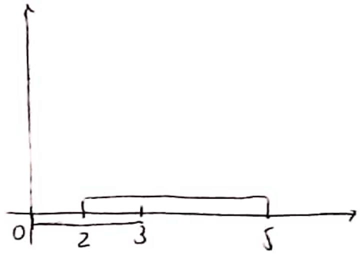
Onde convencionamos que $0\cdot(+\infty) = 0$

⇒ Propriedade

Se $\varphi = \sum_{i=1}^{K} c_i \chi_{E_i}$, com $c_i \geq 0$ e $E_i \in \mathcal{X}$, $1 \leq i \leq K$,

então tbem vale que

$$\int_X \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{K} c_i \mu E_i$$



$E_1 = [0,3]$, $c_1 = 1$ | $E_2 = [2,5]$, $c_2 = 2$

$\varphi = c_1 \chi_{E_1} + c_2 \chi_{E_2}$

$A_1 = [0,2[$; $A_3 =]3,5]$;

$A_2 = [2,3]$;

$A_4 =]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$

$A_1 = [0,2[$; $a_1 = 1$ | $A_3 =]3,5]$, $a_3 = 2$

$A_2 = [2,3]$, $a_2 = 3$ | $A_4 =]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$, $a_4 = 0$

$$\varphi = 1\chi_{[0,2[} + 3\chi_{[2,3[} + 2\chi_{]3,5]} + 0\chi_{A_4}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dm = 1.2 + 3.1 + 2.2 + 0(+\infty) = 2 + 3 + 4 = 9$$

18/03 ②

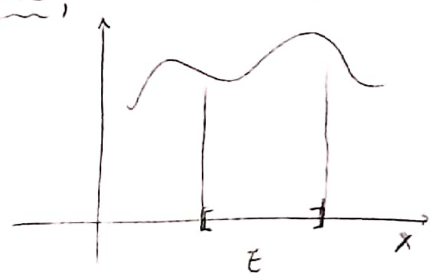
$c_1 m E_1 + c_2 m E_2 = 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = 3+6 = 9$

→ a propriedade afirma, que ñ precisa ser disjuntos

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dm = c_1 m E_1 + c_2 m E_2$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \Rightarrow \int_X \varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu A_j$$

$E \in \mathcal{X}$, Definimos $\int_E \varphi\, d\mu$ como ($\int_E \varphi\, d\mu = \int_X \varphi \cdot \chi_E\, d\mu$)



⇒ Propriedades $(X, \mathcal{X}, \mu)$, espaço de medida

$\varphi, \psi : X \to [0,+\infty[$, funções simples, mensuráveis e positivas

$c \geq 0$,

Então,

(i) $\int_X (\varphi+\psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$

(ii) $\int_X c\varphi\, d\mu = c\int_X \varphi\, d\mu$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \Rightarrow \varphi\cdot \chi_E = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}\right)\cdot \chi_E = \sum_{j=1}^{n} (a_j \chi_{A_j} \chi_E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j \cap E}$$

$(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = \chi_A(x)\cdot \chi_B(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x\in A \text{ e } x \in B, \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$ ↳ $x \in A\cap B$

$= \chi_{A\cap B}(x)$

$$\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j \cap E}$$

$$\Rightarrow \int_X \varphi \chi_E\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap E)$$

⇒ Proposição

Seja $\varphi : X \to [0,+\infty[$, uma função simples e mensurável. Considere a função

$$\lambda : \mathcal{X} \to [0,+\infty],$$

$$\lambda(E) = \int_E \varphi\, d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{X}$$

⇒ λ é uma medida em $\mathcal{X}$.

$(X, \mathcal{X}, \mu)$ | φ | $\lambda(E) = \int_E \varphi\, d\mu, \forall E \in \mathcal{X}$

Dem: Suponhamos $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$, $a_j \geq 0$, $A_j \in \mathcal{X}$, $1 \leq j \leq n$

$\lambda(E) = \int_E \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_E \, d\mu$, mas $\varphi \cdot \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j \cap E}$

$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j \cap E), \forall E \in \mathcal{X}$ é uma medida.

① $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $A \in \mathcal{X}$

$\lambda : \mathcal{X} \to [0,+\infty]$

$\lambda(E) = \mu(E \cap A)$, $\forall E \in \mathcal{X}$ é uma medida.

$\lambda(E) = \int_E \varphi \, d\mu$, $\mu E = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda(E) = \int_E \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \chi_E \, d\mu \\ \lambda(E) = 0 \end{cases}$

$f : X \to [0,+\infty]$, $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$, medida.

Def. $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida.

$f : X \to [0,+\infty]$, função mensurável

$\int_X f \, d\mu$

A integral de f é definida como → funções por baixo

$\int f \, d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é função simples e mensurável e } 0 \le \varphi \le f \right\}$

Proposição. $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida

(a) Sejam $f, g : X \to [0,+\infty]$, funções mensuráveis

$f \le g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$

(b) Seja $f : X \to [0,+\infty]$ função mensurável, e $E_1, E_2 \in \mathcal{X}$.

$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \int_{E_1} f \, d\mu \le \int_{E_2} f \, d\mu$, onde definimos $\begin{cases} \int_{E_1} f \, d\mu = \int_X f \chi_{E_1} \, d\mu \\ \int_{E_2} f \, d\mu = \int_X f \chi_{E_2} \, d\mu \end{cases}$

$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \chi_{E_1} \leq \chi_{E_2}$ $\Rightarrow$ como $f \geq 0$ $f\chi_{E_1} \leq f\chi_{E_2}$ 11/10/21

$\Rightarrow \int f\chi_{E_1} \leq f\chi_{E_2}$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$ $\rightarrow$ nem sempre é verdade

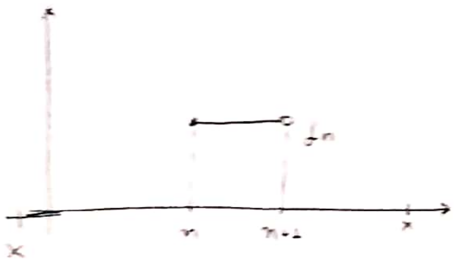
$\Downarrow$

$\int_X f_n(x)\,d\mu \xrightarrow{?} \int_X f\,d\mu$

Exemplos

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu = m$ medida de Lebesgue

$f_n = \chi_{[n, n+1[}$, $\forall n \in \mathbb{N}$



$x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$

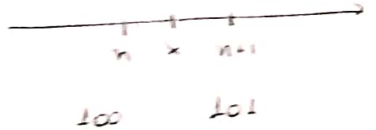
se $x < 0$, $f_n(x) = 0$, $\forall n$

$\therefore f_n(x) \longrightarrow 0$

se $x > 0$

$\Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$

Todo o x [illegible] o valor [illegible] constante



$\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = 1$, $\forall n \geq 0$ mas $\int_{\mathbb{R}} f\,dm = 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = 1 \not\rightarrow \int_{\mathbb{R}} f\,dm = 0$

Outra medida 23/09 ①

$\lambda : \mathcal{X} \to [0,+\infty]$

$\lambda(E) = \int_E \varphi \, d\mu, \ \forall E \in \mathcal{X}$ λ é medida

$f : X \to [0,+\infty]$, mensurável.

Def $\int_X f \, d\mu = \sup\{ \int_X \varphi \, d\mu : 0 \le \varphi \le f, \ \varphi \text{ é simples e mensurável} \}$

$E \in \mathcal{X}$, $\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu$

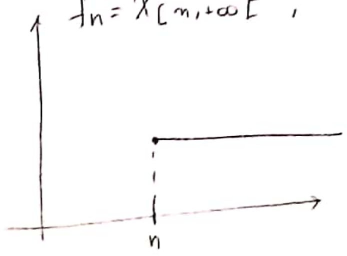
• $f, g : X \to [0,+\infty]$ mens.

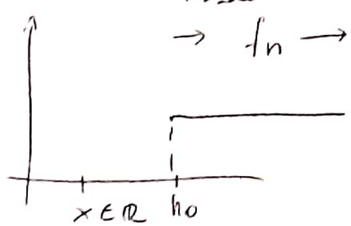
$f \le g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$ $\int f \chi_{E_1} \le \int f \chi_{E_2}$

$E_1, E_2 \in \mathcal{X}$ $\left(E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \int_{E_1} f \, d\mu \le \int_{E_2} f \, d\mu \right)$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$

$f_n = \chi_{[n,+\infty[}$, $\forall n \ge 1$ $\to f_n \to f \equiv 0$





$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = m([n,+\infty[) = +\infty \\ \int_{\mathbb{R}} f \, dm = 0 \end{cases}$$

Teorema da Convergência Monótona (TCM)

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, $f_n : X \to [0,+\infty)$ sequência crescente de funções mensuráveis que convergem p/ uma f

$0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \le \dots \le f_n \le \dots \to f$ $f_n \nearrow f$ e f é o sup

Então $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 \ge f_2 \ge \dots \ge f_n \ge \dots \to f \ge 0 \\ f_n = \chi_{[n,+\infty[}, \ (f_n \downarrow f) \end{array} \right\} \to \text{caso acima}$$

Dem

$f_n \le f, \ \forall n \ge 1 \Rightarrow \left\{ \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu, \ \forall n \ge 1 \right\}$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_{n \ge 1} \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$$

$$\int_X f \, d\mu = \sup\{ \int_X \varphi \, d\mu \ \ 0 \le \varphi \le f \dots \}$$

23/09 c

$\int_X \varphi\, d\mu \leq \lim \int_X f_n\, d\mu$

Seja $0 < a < 1$

$a\varphi(x) \rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$

Seja $x \in X$. $(f(x) \geq 0)$

$f(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow a\varphi(x) = 0;$

$f(x) > 0 \Rightarrow (\varphi(x) \leq f(x) \Rightarrow a\varphi(x) < f(x))$

$\forall n \geq 1,\ A_n = \{x \in X .\ a\varphi(x) \leq f_n(x)\} \in \mathcal{X},\ \forall n \geq 1.$

$f_n \leq f_{n+1}$.

$x \in A_n \rightarrow a\varphi(x) \leq f_n(x);\quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x);\ \Rightarrow a\varphi(x) \leq f_{n+1}(x) \Downarrow x \in A_{n+1}$

$f_n(x) \uparrow f(x)$

$\therefore A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ (1) primeira prop

$\bigcup_{n \geq 1} A_n = X \Rightarrow$ espaço todo (2) seg prop

Seja $x \in X$

Caso 1:

$f(x) = 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \uparrow f(x) \\ f_n(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) = 0,\ \forall n \geq 1.$

$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq f \\ f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow a\varphi(x) = 0$

$\therefore x \in A_n,\ \forall n \geq 1$

Caso 2:

$f(x) > 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) \leq f(x) \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a\varphi(x) < f(x);\ f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow *$

$* \exists\, n \geq 1 .\ a\varphi(x) < f_n(x)$

$\Downarrow$

$x \in A_n$

(3) $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty]$

$\lambda(E) = \int_E a\varphi\, d\mu,\ \forall E \in \mathcal{X}$

λ é uma medida

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq$

E λ é mensurável.

$$\lambda(X) = \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty^+} \lambda(A_n) \leq \lim_{n\to\infty^+} \int_X f_n \, d\mu$$

$$\int_X a\varphi \, d\mu = \lambda(X)$$

$$\lambda(A_n) = \int_{A_n} a\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty^+} \int_X f_n \, d\mu$$

$$\int_X a\varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty^+} \int_X f_n \, d\mu, \quad \forall\, 0<a<1.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty^+} \int_X f_n \, d\mu \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty^+} \int_X f_n \, d\mu$$

(TCM)

$\Rightarrow$ Proposição: $(X, \mathcal{X}, \mu)$

$f, g : X \to [0, +\infty)$ mensuráveis

Então

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

se $c \geq 0$ então $\int_X (cf) \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$

Dem: Como f e g são mensuráveis

$f : X \to [0, +\infty] \Rightarrow \exists (\varphi_n),\ \varphi_n \uparrow f$

funções simples, mensuráveis e positivas, tais que $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$, $\psi_n(x) \uparrow g(x)$ p/ $\forall x \in X$

$$(\varphi_n(x) + \psi_n(x)) \uparrow (f(x) + g(x)), \ \forall x \in X$$

Pelo TCM, tem-se que $\int_X (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu \to \int_X (f+g) \, d\mu$

$$\left(\int_X \varphi_n \, d\mu + \int_X \psi_n \, d\mu\right) \to \int_X (f+g) \, d\mu$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\int_X f \, d\mu \qquad \int_X g \, d\mu$$

Logo

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

$$\Rightarrow f = \sum_{n\geq 1} f_n \qquad f_n \geq 0$$

Proposição. $(X, \mathcal{X}, \mu)$

23/09 ①

$(f_n: X \to [0,+\infty]$, funções mensuráveis$)$ e

$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x),\ \forall x \in X,\ f: X \to [0,+\infty]$

Então f é mensurável e $\int_X f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n\,d\mu$.

$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} f_n(x)}_{\text{mens.}}$

Seja

$g_k = \sum_{n=1}^{k} f_n,\ \forall k\geq 1$.

$\to 0 \leq g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \ldots \to \sum_{n\geq 1} f_n = f$

Pelo TCM,

$\underbrace{\int_X g_k\,d\mu}\ \xrightarrow[k\to\infty^+]{}\ \int_X f\,d\mu$

$\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right) d\mu$

$\|$

$\sum_{n=1}^{k} \int_X f_n\,d\mu \ \xrightarrow[k\to\infty^+]{}\ \sum_{n\geq 1} \int_X f_n\,d\mu$

$\int_X f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n\,d\mu$

$f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n \uparrow \int f. \Rightarrow$ TCM

$f_n \to f,\ \forall$

↳ Lema de Fatou

Ex:

$f_n = \begin{cases} \chi_{[n,n+1]} & \text{se } n \text{ é par} \\ 2\chi_{[n,n+1]} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

$f_n(x) \to f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$\left(\int_X f_n\,d\mu\right) = (1, 2, 1, 2, \ldots)$

$\underline{\lim}\,(1, 2, \ldots) = 1$

$0 = \int_X f\,d\mu < \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu = 1$

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ f_n $X \to [0,+\infty]$, funções mensuráveis

23/09 ①

Então,

$$\int_X (\underline{\lim} f_n)\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, d\mu$$

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, $\underbrace{\underline{\lim}\, x_n = \sup\{\inf\{x_k : k \geq n\} \ n \geq 1\}}_{\to \text{Def}}$

$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

$A_2 = \{x_2, x_3, \ldots\}$

$\vdots$

$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \{x_k : k \geq n\}$

$\inf A_1 \leq \inf A_2 \leq \ldots \leq \inf A_n \leq \ldots$

$\downarrow n \to +\infty$

$\sup\{\inf A_n \ n \geq 1\} = \underline{\lim}\, x_n$

$g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$

$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$

$g_1 = \inf\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ $\quad g_1(x) = \inf\{f_1(x), \ldots\}$

$g_2 = \inf\{f_2, f_3, \ldots\}$

$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \ldots \to \sup\{g_n : n \geq 1\}$
$= \underline{\lim} f_n$

$\underline{\lim} f_n = \sup\{\underbrace{\inf\{f_k : k \geq n\}}_{g_n} . n \geq 1\}$

$g_n = \inf\{f_k \ k \geq n\}$ $\quad \Rightarrow \int_X g_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, d\mu$

$g_n \leq f_k, \ \forall k \geq n \Rightarrow \int_X g_n\, d\mu \leq \int_X f_k\, d\mu, \ \forall k \geq n$

$g_n \uparrow \underline{\lim} f_n, \quad \int_X g_n\, d\mu \uparrow \int_X (\underline{\lim} f_n)$

$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n \leq \ldots \to \sup g_n = \underline{\lim} f_n$

TCM $\Rightarrow$ $\int_X g_n\, d\mu \to \int_X (\underline{\lim} f_n)\, d\mu$

$\int_X g_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, d\mu \quad \forall n$

(1) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espaço de medida

$\varphi : X \to [0,+\infty[$ função simples e mensurável $(\varphi \geq 0)$

Prove que

$$\int_X \varphi\, d\mu = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ (q.s)$$

$(\Rightarrow)$ Seja φ com representação canônica dada por <u>25/05(6)</u>

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}, \text{ onde } A_j \in \mathcal{F}, a_j \geq 0, a_i \neq a_j, i \neq j. \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu A_j \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} a_j \mu A_j = 0 \Rightarrow a_j \mu A_j = 0, \ 1 \leq j \leq n$$

$$\int_X \varphi \, d\mu = 0 \qquad a_j > 0 \Rightarrow \mu A_j = 0.$$

$\Rightarrow$ Seja $C = \{ j \ 1 \leq j \leq n \ a_j > 0 \}$ $\rightarrow$ quero a_j é preciso

$j \in C \Rightarrow \mu A_j = 0$ $\leftarrow$ n. precisa

$\mu\left(\bigcup_{j \in C} A_j\right) = 0$ $\Big|$ $x \notin \bigcup_{j \in C} A_j \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ q.s

$j \notin C \Rightarrow a_j = 0$;

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j \in C} a_j \cancel{\mu A_j}^{\,0} + \sum_{j \notin C} \cancel{a_j}^{\,0} \mu A_j = 0$$

$(\Leftarrow)$ $\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$. $C = \{ j \ a_j > 0 \}$

$$\varphi = 0 \ (q.s) \Rightarrow \left[\mu\left(\bigcup_{j \in C} A_j\right) = 0 \right]$$

$$\mu A_j = 0, \ \forall j \in C$$

Exercícios:

(1) Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $f \geq 0$

① 25/09 medida

$f: X \to [0, +\infty]$, função mensurável ($\forall$ ñ necessariamente simples)

Então

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ q.s.}$$

$A = \{x \in X : f(x) > 0\}$

se $x \in A \iff f(x) > 0 \iff \exists\, n \geq 1 : f(x) \geq \frac{1}{n}$

$\forall n \geq 1$, $A_n = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$, então $\boxed{A = \bigcup_{n \geq 1} A_n}$ //

$(\Rightarrow)$ $0 = \int_X f \, d\mu$, $f \geq 0$. $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f$

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu A_n$$

$\frac{1}{n} \mu A_n \leq 0 \Rightarrow \mu A_n = 0.$

$\mu A_n = 0$, $\forall n \geq 1$

$\Downarrow$

$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = 0 \Rightarrow \mu A = 0. \Rightarrow f = 0$ q.s (quase sempre).

37

$(\Leftarrow)$ $f = 0$; se q.s

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \, d\mu : 0 \leq \varphi \leq f \text{ e } \varphi \text{ é simples e mensurável}\right\}$$

$\int_X f \, d\mu > 0 \Rightarrow \exists\, \varphi : 0 \leq \varphi \leq f$, φ simples e mensurável

com $\int_X \varphi \, d\mu > 0$.

é a integral positiva,

Suponhamos que $\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j} \Rightarrow \int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu A_j > 0$

$\exists\, j_0$, $1 \leq j_0 \leq m$, com $a_{j_0} \mu A_{j_0} > 0$, $0 \leq \varphi \leq f \Rightarrow *$

$* \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in A_{j_0}$ ↳ parcela positiva

$a_{j_0} \leq \varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in A_{j_0}$

positiva

$\mu A_{j_0} > 0$. $\Rightarrow f$ não é $f > 0$ em A_{j_0}, contradição, pois $f = 0$ q.s

(2) $(X, \mathcal{X}, \mu)$

$f, g: X \to [0, +\infty]$, funções mensuráveis

$f \geq g$ e $\int_X g \, d\mu < +\infty$

Então $\int_X (f - g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu$.

(*) f e g positivas

$$f = \underbrace{(f-g)}_{\geq 0} + \underbrace{g}_{\geq 0}, \quad \underbrace{f}_{\geq 0}$$

$\int_X [(f-g)+g] \, d\mu$ | "provamos"

$$\int_X f \, d\mu = \int_X (f-g) \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

como $\int_X g \, d\mu < +\infty$,

$$\int_X f \, d\mu - \int_X g \, d\mu = \int_X (f-g) \, d\mu.$$

(3) 25/09

Prove que se $\int_X f_1 \, d\mu < +\infty$ então $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.

$$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$$

$$-f_1 \leq -f_2 \leq \dots \leq -f_n \leq \dots$$

$$0 \leq f_1 - f_1 \leq f_1 - f_2 \leq \dots \leq f_1 - f_n \leq \dots \longrightarrow f_1 - f$$

↳ funções mensuráveis e posit.

Pelo TCM,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X (f_1 - f_n) \, d\mu = \int_X (f_1 - f) \, d\mu.$$

$$f_1 \geq f_n \quad e \quad f_1 \geq f$$

$$\lim_{n \to \infty^+} \left[\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right] = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu.$$

$$\int_X f_1 \, d\mu - \lim_{n \to \infty^+} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu.$$

$$\lim_{n \to \infty^+} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

TCM $(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $f_n : X \to [0, +\infty]$, funções mensuráveis

$f_n \uparrow f$. $(f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \to f)$

Então $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

$(X, \mathfrak{X}, \mu)$ $f_n : X \to [0, +\infty]$, funções mens. crescent.

$f_1 \leq f_2 \leq \dots$ e $f_n(x) \to f(x)$ q.s. em X,

onde f é uma função mensurável

(3) $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ espaço de medida

$f_n : X \to [0, +\infty]$, funções mensuráveis

$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$, e seja $f : X \to [0, +\infty]$ tal que

$$\lim_{n \to \infty^+} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

$\cancel{f_1 \to f_2 \to \dots \to f_n \to f}$

$f_1 =$

(4) $(X, \mathcal{X}, \mu)$

$f_n : X \to [0,+\infty]$, funções mensuráveis

$f_n \to f$ e $f_n \le f$, $\forall n \ge 1$.

Então $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

Lema de Fatou $(X, \mathcal{X}, \mu)$

$f_n : X \to [0,+\infty]$, mensuráveis

Então $\int_X (\underline{\lim}\, f_n) \, d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$ → vem de mais geral

$(\underline{\lim}\, f_n)(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$

$f: X \to [0,+\infty]$ função mensurável

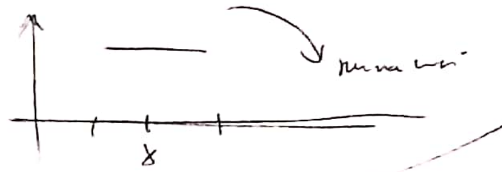
$f_n(x) \to f(x)$, q.t.p.

Então $\int_X f \, d\mu \le \underline{\lim} \int_X \cancel{\underline{\lim}}\, f_n \, d\mu$

③ 25/09

$f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = 2\chi_{]1,2]}$, $f_3 = \chi_{]2,3]}$, $f_4 = 2\chi_{]3,4]}$, ...

$f_n \xrightarrow{?} f \equiv 0$



$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \begin{cases} 2 & \text{se é par} \\ 1 & \text{se é ímpar} \end{cases}$

$\int_X f \, d\mu < \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$.

$\to (1, 2, \dots)$ → $0 \le 1 \Rightarrow 0 < 1$

⇒ Pelo lema de Fatou,

$\int_X f \, d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$; $f_n \le f$, $\forall n \ge 1 \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$, $\forall n \ge 1$

$\Rightarrow \overline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$

$\int_X f \, d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \le \overline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$,

Logo, $\boxed{\exists \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu}$ //

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, $f_n : X \to [0, +\infty]$ mens

$f_n \to f$ e $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$,

$\int_X f \, d\mu < +\infty$

Prove que, p/ todo $E \in \mathcal{X}$, $\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu$.

seja $E \in \mathcal{X}$

Pelo lema de Fatou,

$$\int_E f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$$

$$\int_{X-E} f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_{X-E} f_n \, d\mu = \underline{\lim} \left[\int_X f_n \, d\mu - \int_E f_n \, d\mu \right] = *$$

a integral

obs (a_n) (b_n), suponha $a_n \to a$

$\underline{\lim} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim} \, b_n$

$\underline{\lim} (-x_n)$
$= - \overline{\lim} (-x_n)$

$-x_n$ 0

$$= \int_X f \, d\mu + \underline{\lim} \left(- \int_E f_n \, d\mu \right)$$

$$= \int_X f \, d\mu - \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$$

$$\int_X f \, d\mu - \int_E f \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu - \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$$

$$\boxed{\int_E f \, d\mu \geq \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu}$$

$$\int_E f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu.$$

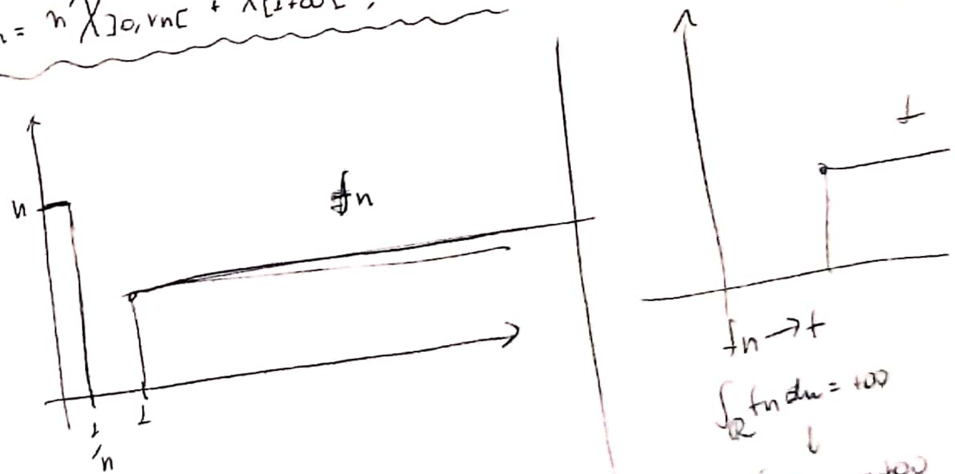
$\Downarrow$

$$\lim_{n \to \infty^+} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

$\Rightarrow$ contra exemplo.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$,

$f_n = n \chi_{]0, 1/n[} + \chi_{[1, +\infty[}$, $\forall n \geq 1$.



$f_n \to f$

$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = +\infty$

$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = +\infty$

$E =]0,1[$,

$f_n \to f \equiv 0$ em E,

$\int_E f_n dm = 1, \ \forall n \geq 2 \not\to \int_E f dm = 0$

A integral de Lebesgue

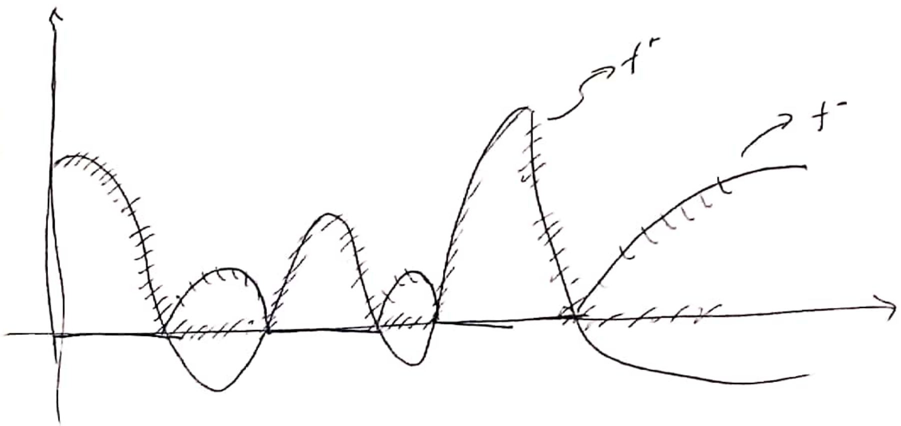
$f: X \to \mathbb{R}$.

$f^+: X \to \mathbb{R}$ (~~$f^+: X \to \overline{\mathbb{R}}$~~)

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \ \forall x \in X$,

$f^-: X \to \mathbb{R}$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \ \forall x \in X$,



- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$

Def. $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida.

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, função mensurável

Dizemos que f é (Lebesgue-)integrável

se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ e $\int_X f^- d\mu < +\infty$. Neste caso a integral de f

é definida por $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

Proposição $(X, \mathcal{X}, \mu)$ $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável

Então f é integrável $\Leftrightarrow |f|$ é integrável.

Dem.

$(\Rightarrow)$ f é integrável $\Rightarrow \int_X f^+ d\mu < +\infty$ e $\int_X f^- d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X (f^+ + f^-) d\mu < +\infty$

$$\Downarrow$$

$$\int_X |f| d\mu < +\infty$$

$(\Leftarrow)$

Hip. $\int_X |f| < +\infty$

$|f| = f^+ + f^-$

$f^+ \leq |f|$ e $f^- \leq |f|$

$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu < +\infty$ e $\int_X f^- d\mu < +\infty$

Logo f é integrável.

Sejam ~~f~~ $f, f_1, f_2 \; X \to \mathbb{R}$ funções integráveis, (6) 25/09

sendo $f_1 \geq 0$ e $f_2 \geq 0$. Se $f = f_1 - f_2$ então

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu$$

Dem

$$\left.\begin{array}{l} f = f_1 - f_2 \\ f = f^+ - f^- \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 - f_2 = f^+ - f^-$$

$$\Downarrow$$

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2$$

$$\int_X (f_1 + f^-) d\mu = \int_X (f^+ + f_2) \, d\mu$$

$$\int_X f_1 \, d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f_2 d\mu$$

$$\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_2 d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_X f \, d\mu$$

$f + g$

$(f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$

$(X, \mathfrak{X}, \mu)$, $f\ X \to \mathbb{R}$ mensurável.

30/09

①

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $\quad f = f^+ - f^-$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ $\quad |f| = f^+ + f^-$

f é integrável se $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ e $\int_X f^- d\mu < +\infty$.

neste caso, integral de $f \equiv \int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

$E \in \mathfrak{X}$, $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$, f é integrável $\iff |f|$ é integrável

Se f é integrável $\Rightarrow \left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \leq \left|\int_X f^+ d\mu\right| + \left|\int_X f^- d\mu\right| =$

$= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu$

Proposição

$f, f_1, f_2\ X \to \overline{\mathbb{R}}$, funções integráveis

$f_1, f_2 \geq 0$, $f = f_1 - f_2$

$\Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu$

Proposição

$f, g\ X \to \overline{\mathbb{R}}$, são integráveis

$\Rightarrow f + g$ é integrável e $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

Dem:

~~$|f+g| \leq |f| + |g|$~~

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, $\forall x \in X$.

f e g integráveis $\Rightarrow$ $\int_X |f| d\mu < \infty^+$, $\quad \int_X |g| d\mu < \infty^+$.

$|f+g| \leq |f| + |g|$

$\to f^{\pm}$ e $g^{\pm}$ positivos

$\int_X |f+g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$ pela hip

$\Rightarrow |f+g|$ é integrável $\Rightarrow f+g$ é integrável.

$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ g = g^+ - g^- \end{cases} \Rightarrow f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$

30/09
③

$\Rightarrow \int_X (f+g)\,d\mu = \int_X (f^+ + g^+)\,d\mu - \int_X (f^- + g^-)\,d\mu =$

$= \underbrace{\int_X f^+ d\mu} + \underbrace{\int_X g^+ d\mu} - \underbrace{\int_X f^- d\mu} - \underbrace{\int_X g^- d\mu} = \underbrace{\int_X f\,d\mu} + \underbrace{\int_X g\,d\mu}$

Proposição

f é integrável $a \in \mathbb{R} \Rightarrow af$ é integrável

e $\int_X (af)\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$ | Exercício

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (TCDL)

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ espaço de medida,

$f_n\ X \to \overline{\mathbb{R}}$, seq de funções mensuráveis;

$f\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ função mensurável;

$g\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ " integrável;

$f_n(x) \to f(x)$ (q s)

$|f_n(x)| \leq g(x)$ (q s)

Então, $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$

Então f_n é integrável, $\forall n \geq 1$ f é integrável e

Dem

Por hipótese, $|f_n(x)| \leq g(x), \forall x,$ g é integrável $\Big\} \Rightarrow f_n$ é integrável, $\forall n \geq 1$

$f_n(x) \to f(x), \forall x \in X, \Rightarrow |f(x)| \leq g(x), \Rightarrow *$

$* \Rightarrow f$ é integrável

$|f_n| \leq g \iff -g \leq f_n \leq g, \forall n \geq 1$

$\Downarrow$

$\forall n \geq 1 \begin{cases} f_n + g \geq 0; & ① \\ \quad e & \\ g - f_n \geq 0; & ② \end{cases}$

---

① $(f_n + g) \to (f+g)$ | Pelo lema de Fatou,

$f_n + g \geq 0$

$\int_X (f+g)\,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X (f_n + g)\,d\mu = *$

$\Downarrow$

$\int_X f\,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu$

$* = \underline{\lim}\left(\int_X f_n\,d\mu + \int_X g\,d\mu\right)$

$$= \left(\underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu\right) + \int_X g\,d\mu$$

$$\int f\,d\mu + \cancel{\int_X g\,d\mu} \le \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu + \cancel{\int_X g\,d\mu}.$$

$$\int_X f\,d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu$$

→ é dominada p/ uma func $g(x)$.
↳ ñ é o lema de Fatou

② $g - f_n \geq 0$

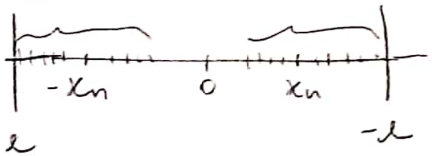
$(g - f_n) \to (g - f)$

pelo lema de Fatou,

$$\underbrace{\int_X (g-f)\,d\mu}_{\text{I}} \le \underline{\lim} \int_X (g-f_n)\,d\mu = *$$

$$* = \underline{\lim}\left[\int_X g\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu\right] = \int_X g\,d\mu + \underline{\lim}\left[-\int_X f_n\,d\mu\right] =$$

obs



$l = \underline{\lim}(-x_n)$

$-l = \overline{\lim}(x_n) = l = -\overline{\lim}\,x_n$

$$= \int_X g\,d\mu - \overline{\lim}\int f_n\,d\mu$$

I

$$\cancel{\int_X g\,d\mu} - \int_X f\,d\mu \le \cancel{\int_X g\,d\mu} - \overline{\lim}\int_X f_n\,d\mu.$$

⇓

$$\boxed{\overline{\lim}\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu}$$ //

$$\int_X f\,d\mu \le \underline{\lim}\int_X f_n\,d\mu \le \overline{\lim}\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$$

⇓

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

$$\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim_{n\to\infty}$$

Exercícios: $(X, \mathcal{X}, \mu)$

(1) Seja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, função integrável. Mostre que f é finita q.s., isto é, $\mu\{x\in X : |f(x)| = +\infty\} = 0$

$\Rightarrow A = \{x\in X \mid |f(x)| = +\infty\}$ ⇒ conj mensurável.

$$= \bigcap_{n\ge 1}\underbrace{\{x\in X : |f(x)|\ge n\}}_{A_n} \Rightarrow A = \bigcap_{n\ge 1} A_n$$

$A_n = \{x\in X : |f(x)|\ge n\}$;

$$\int_X |f|\,d\mu \ge \int_{A_n}|f|\,d\mu \ge \int_{A_n} n\,d\mu = n\mu(A_n)$$

⇓

$$n\mu(A_n) \le \int_X |f|\,d\mu \Rightarrow \mu A_n \le \frac{1}{n}\int_X |f|\,d\mu,\ \forall n\ge 1.$$

30/09 (11)

$A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \Rightarrow A \subseteq A_n, \forall n \geq 1$

$$\Downarrow$$

$$\mu A \leq \mu A_n \leq \frac{1}{n}\int_X |f|\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\mu A \leq \frac{1}{n}\int_X |f|\,d\mu, \ \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mu A = 0$$

(2) Seja $f: X \to \mathbb{R}$, função integrável.

Prove que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathfrak{X}, (\mu A < \delta \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon)$ *

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua

$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$

simplifica

Caso 1 f é limitada, então, $\exists M > 0$ tal que

$|f(x)| \leq M, \forall x \in X$

Obs: $\int_A |f|\,d\mu \leq \int_A M\,d\mu = M\mu A < M\delta < M\varepsilon$

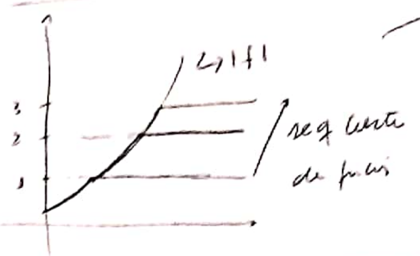
① Seja $\varepsilon > 0$, tomemos $0 < \delta < \varepsilon/M$, vamos provar que vale (*)

Considere $A \in \mathfrak{X}$, com $\mu A < \delta$. Então $\int_A |f|\,d\mu \leq \int_A M\,d\mu =$

$= M\mu A < M\delta < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$

Caso 2 (geral)

Obs



passo um TCM

Considere, p/ cada $n \geq 1$, a função $f_n: X \to [0, +\infty[$,

dada por $f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } |f(x)| \leq n, \\ n & \text{se } |f(x)| > n, \end{cases}$

$f_n \geq 0, \forall n$, $f_n \uparrow |f|$, pelo TCM, $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\int_X f\,d\mu - \int_X f_{n_0}\,d\mu < \varepsilon/2$$

Como $|f_{n_0}| \leq n_0$, então pelo caso 1, existe $\delta > 0$ (5) tal que se $A \in \mathcal{X}$, $\mu A < \delta \Rightarrow \int_A f_{n_0}\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_A |f|\, d\mu - \int_A f_{n_0}\, d\mu + \int_A f_{n_0}\, d\mu =$$

$$= \int_A (|f| - f_{n_0})\, d\mu + \int_A f_{n_0}\, d\mu \leq \int_X (|f| - f_{n_0})\, d\mu + \int_A f_{n_0}\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

⇒ 13) Calcule

(i) $\lim\limits_{n \to \infty^+} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx$ ⇒ Cont ⇒ Riemann integrável

$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \Rightarrow \forall x \in [0,1]$

f_n é contínua ⇒ f_n é mensurável.

$x \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty^+} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n \to \infty^+} \frac{nx}{n^2\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)} = \lim\limits_{n \to \infty^+} \frac{1}{n} \frac{x}{\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)} = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0$,

$x = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0, \forall n \geq 1$.

Logo, $f_n(x) \to f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

$|f_n(x)| \leq g(x)$;

Real Analysis: Modern Techniques and their applications

$\Downarrow$

$0 \leq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2nx \leq 1 + n^2x^2 \Leftrightarrow 1 + n^2x^2 - 2nx \geq 0 \Leftrightarrow (1-nx)^2 \geq 0$.

$0 \leq f_n(x) \leq g(x) = 1/2$ e g é integrável em $[0,1]$. Pelo TCDL, vale que.

$f_n(x) \to f(x) = 0, \forall x \in X$

$\hookrightarrow \int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu = 0$.

$x = e^{\ln x}$ | $(1+1/x)^x = e^{\ln(1+1/x)^x} = e^{x\ln(1+1/x)}$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty^+} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin x\, dx$.

$\lim\limits_{n \to \infty^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$

e^x

$f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n}$

f_n é contínua ∴ f_n é mensurável.

$x \geq 0$ (quociente) se $x = 0$ $\lim f_n = 1$.

$\lim\limits_{n \to \infty^+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e$

30/09
(6)

$$\lim_{x\to\infty^+} \underbrace{x}_{\infty^+} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{0} = \lim_{x\to\infty^+} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty^+} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 1 = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \to e^1 = e$$

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \cancel{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}^{\to 0} \Rightarrow f(x) = 0$$

$f_n(x) \to f(x) = 0$

$|f_n(x)| \leq g(x)$.

$$|f_n(x)| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\right| \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{x^2}{n^2}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

---

se $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{2}$

$$1-\frac{1}{n} \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \geq \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{4}{x^2}$$

$\hookrightarrow \leq 1$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 4/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [0, +\infty[$, pelo TCDL,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0.$$

$E \subseteq \mathbb{R}$, conjunto limitado

$f: E \to [0, +\infty[$ função limitada, isto é

$\exists M > 0 : 0 \leq f(x) < M, \forall x \in E$

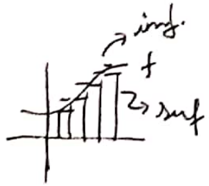
$\Rightarrow$ Proposição.

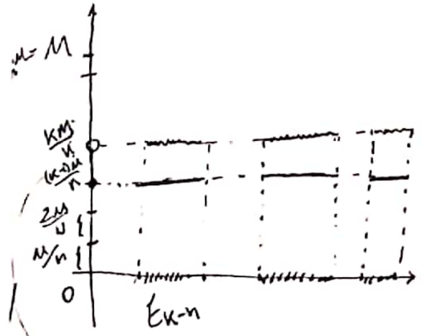
São equivalentes:

(i) f é mensurável

(ii) $\sup \{ \int_E \varphi \, dm : \varphi$ é simples e mensurável e $0 \leq \varphi \leq f \} =$

$= \inf \{ \int_E \psi \, dm : \psi$ é simples e mensurável e $f \leq \psi \}$.





$\to$ fecho em baixo e abro em cima

$f: A \to B : C \subseteq B$, $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C$

fixo $n \geq 1$, divido M em n pedaços.

$\to$ vou "apertar" a f entre funções simples.

$\Rightarrow$ fixado $n \geq 1$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\left[\frac{(k-1)M}{n}, \frac{kM}{n} \right[\right) = E_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$.

aberto.

$<$ 110 e medida

$\forall x \in E_{k,n}$; $\left(\frac{(k-1)M}{n} \leq f(x) < \frac{kM}{n} \right)$:

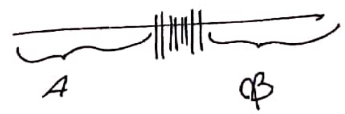
$\Rightarrow \underbrace{\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{M}{n} \chi_{E_{k,n}}}_{\text{func. de cima}}$, $\underbrace{\psi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{E_{k,n}}}_{\text{func. de baixo.}}$, e vale que:

$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x), \forall x \in E$.

$\int_E \varphi_n \, dm = \sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{M}{n} m(E_{k,n})$,

$\int_E \psi_n \, dm = \sum_{k=1}^{n} \frac{kM}{n} m(E_{k,n})$;

$\sup\{ \overset{A}{} \} = \inf \{ \overset{B}{} \}$



$\Rightarrow \int_E \psi_n \, dm - \int_E \varphi_n \, dm = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kM}{n} - \frac{(k-1)M}{n} \right) m(E_{k,n})$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{n} m . E_{k,n} = \frac{M}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m E_{k,n}}_{\text{soma da medida de conj. dois a dois disjuntos}} = \frac{M}{n} . mE$

$\Rightarrow \int_E \psi_n \, dm - \int_E \varphi_n \, dm = \frac{M}{n} . mE.$, se $n \to \infty \Rightarrow$ a diferença vai p/ a zero.

$\Rightarrow \frac{M}{n} . mE < \varepsilon > 0.$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

2110 (2
medida

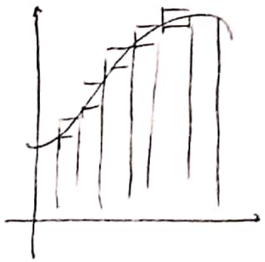
$$\sup\left\{\int_E \varphi\,dm : 0\le\varphi\le f\right\} = \inf\left\{\int_E \psi\,dm : f\le\psi\right\}$$

$\int \varphi\,dm$ $\int \psi\,dm$

$< 1/n$

$\Rightarrow \forall n\geq 1\ \exists\, \varphi_n,\ \exists\, \psi_n$, funções simples mensuráveis, com

$0\le\varphi_n\le\psi_n$ e $\int_E \psi_n\,dm - \int_E \varphi_n\,dm < 1/n$.



$\varphi_n \le f \le \psi_n,\ \forall n\geq 1.$

Considere

$\varphi^*(x) = \sup\{\varphi_n(x) : n\geq 1\};$

$\psi^*(x) = \inf\{\psi_n(x) : n\geq 1\};$

$\varphi^*(x)\le f(x)\le\psi^*(x),\ \forall x\in E.$

$\hookrightarrow \varphi^*$ e ψ^*, são mensuráveis $\Rightarrow$ vou mostrar que são iguais quase sempre.

$\Rightarrow$ Seja $A = \{x\in E : \psi^*(x)-\varphi^*(x) > 0\}$,

$\varphi_n \le \varphi^* \le f \le \psi^* \le \psi_n,\ \forall n.$

$A = \{x\in E : \psi^*(x)-\varphi^*(x) > 0\} = \bigcup_{k\geq 1}\{x\in E : \psi^*(x)-\varphi^*(x) > 1/k\}$

Vamos provar que $m A_k = 0,\ \forall k\geq 1.$

$\forall n\geq 1:\ \varphi_n \le \varphi^* \le \psi^* \le \psi_n$

$\Downarrow$

$\psi_n - \varphi_n \geq \psi^* - \varphi^* \Rightarrow \frac{1}{n} > \int_E (\psi_n-\varphi_n)\,dm \geq \int_E (\psi^*-\varphi^*)\,dm \geq *$ $\quad\forall n\geq 1$

$* \geq \int_{A_k} (\psi^*-\varphi^*)\,dm > \int_{A_k} \frac{1}{k}\,dm = \frac{1}{k}\cdot m A_k.$

$\frac{1}{k}\, m A_k < \frac{1}{n},\ \forall n\geq 1.$ $\Rightarrow \boxed{m A_k = 0;}$ $\Rightarrow m A = 0$

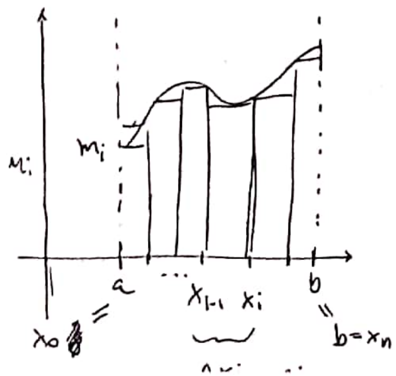
$m A_k < k/n,\ \forall n\geq 1$

$\Rightarrow \varphi^* = \psi^*$ q.s. e $\varphi^* \le f \le \psi^* \Rightarrow f = \varphi^*$ q.s

$\Rightarrow f$ é mensurável.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada, $f\geq 0$

$P:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$



$m_i = \inf\{f(x) : x\in[x_{i-1}, x_i]\}$

$M_i = \sup\{f(x) : x\in[x_{i-1}, x_i]\}$

Definimos

$$\begin{cases} s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \end{cases}$$

<40(5

média

⇒ integral de Riemann inferior.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{ s(f,P) : P \}$$

⇒ integral de Riemann superior

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{ S(f,P) : P \}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

⇒ f é Riemann integrável, se a integral superior é igual à integral inferior.

P: partição de $[a,b]$.

$$\varphi_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{]x_{i-1},x_i[} \to \text{função simples menor igual à } f.$$

$$\psi_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{]x_{i-1},x_i[}$$

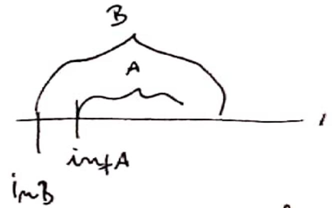
$$\Rightarrow \int_{[a,b]} \varphi_P\,dm = \sum_{i=1}^{m} m_i \Delta x_i = s(f,P)$$

$$\int_{[a,b]} \psi_P\,dm = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S(f,P)$$

$$\{ s(f,P) : P \} = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi_P\,dm : P \right\} \subseteq \left\{ \int_{[a,b]} \varphi\,dm : \varphi \text{ simples e mens. e } 0 \le \varphi \le f \right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \sup\left\{ \int_{[a,b]} \varphi\,dm : 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \text{ simples mens} \right\}$$

$$\{ S(f,P) : P \} = \left\{ \int_{[a,b]} \psi_P\,dm : P \right\} \subseteq \left\{ \int_{[a,b]} \psi\,dm : f \le \psi,\ \psi \text{ simples mens} \right\}$$

⇒ 

logo:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underbrace{\sup\left\{ \int_{[a,b]} \varphi\,dm : 0 \le \varphi \le f : \varphi \text{ simples mens} \right\}}_{\int_{[a,b]} f\,dm} \le \inf\left\{ \int_{[a,b]} \psi\,dm : f \le \psi,\ \psi \text{ simples mens} \right\}$$

= mensurável

$$\le \inf\{ S(f,P) : P \} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

⇒ Conclui-se que são iguais ⇒

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada.

se f é Riemann integrável, $\Rightarrow$ o módulo é:

se f é integral $\Rightarrow$ $f = \underbrace{\dfrac{|f|+f}{2}}_{\geq 0} - \underbrace{\dfrac{|f|-f}{2}}_{\geq 0}$

24/10 (4) medida

propriedade

Seja $f:[a,+\infty[\to \mathbb{R}$, tal que:

Integral imprópria

$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty$. Então $f \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$ e $\int_{[a,+\infty[} f\,dm = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

↳ Convergente

$\Rightarrow$ ~~Propriedade~~ ↱ def. da integral imprópria.

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt = \lim_{c\to+\infty} \int_a^{c} |f(t)|\,dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a+n} |f(t)|\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} |f|\cdot\chi_{[a,a+n]}\,dt$$

Seja ~~$f_n = |f|\chi_{[a,a+n]}$, $f_n\ [a,+\infty[\to$~~

Seja $f_n : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n = |f|\,\chi_{[a,a+n]}$$

Como $\exists \int_a^{a+n} |f(t)|\,dt$, $|f|$ é mensurável em $[a,a+n]$

$\Rightarrow f_n = |f|\chi_{[a,a+n]}$ é mensurável e $\int_a^{a+n} f_n(t)\,dt = \int_{[a,+\infty[} f_n\,dm$.

$f_n \geq 0$, f_n mens.

$f_n \uparrow |f| \Rightarrow$ TCM $\Rightarrow \int_{[a,+\infty[} f_n\,dm \to \int_{[a,+\infty[} |f|\,dm$.

$$\Downarrow$$

$$\int_a^{a+n} |f(t)|\,dt \longrightarrow \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt. \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_{[a,+\infty[} |f|\,dm = \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$

$$\Downarrow$$

$$f \in \mathcal{L}([a,+\infty[)$$

~~Seja~~

Vamos mostrar que

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{[a,+\infty[} f\,dm,$$

Considere $g_n = f \cdot \chi_{[a,a+n]}$, $\forall n \geq 1$.

$g_n \longrightarrow f$

$|g_n| \leq |f|$, $\forall n \geq 1$, portanto o $|f|$ é integrável.

TCDL → Teorema da conv. dominada de Lebesgue.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{[a,+\infty[} g_n\,dm}_{} \longrightarrow \int_{[a,+\infty[} f\,dm$$

$$\int_{[a,a+n]} f\,dm$$

$$\| $$

$$\int_a^{a+n} f(t)\,dt \longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \Rightarrow \text{ñ é lebesgue integrável.}$$

$$= \lim \int_1^c \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \left\{ \int_1^c \sin x \frac{1}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \star \right.$$

$u = 1/x$

$dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

2/10 ⑤ medida

$$\star = \lim_{c \to \infty^+} \left[\left(\frac{-\cos c}{c}\right) - \left(\frac{-\cos 1}{1}\right) - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right]$$

$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\hookrightarrow \text{converg}} < +\infty$$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq 1/x^2$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx, \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x}; \quad 0 \leq a \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\right) dx = +\infty$$

→ correções na lista, lista 6 (16) $f: X \to \mathbb{R}$, E é o X.

lista 7 (2) $f: X \to \mathbb{R}$ função mensurável

⇒ São equivalentes,

(i) f é mens. | (iii) $|f|$ é mens
(ii) f^+ e f^- são mens | ⇒ integrável

⇒ $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ } até hoje

⇒ $(X, \mathcal{X}, \mu)$, espaço de medida

$\mathcal{L}_1(X, \mathcal{X}, \mu) := \mathcal{L}_1(\mu)$, o conjunto de todas as funções que vão ao:

→ $\mathcal{L}_1(\mu) = \{ f: X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ é mens. e } \int_X |f| d\mu < +\infty \}$

⇒ $f \equiv 0 \in \mathcal{L}_1(\mu)$,
⇒ $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_1(\mu)$.
⇒ $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

$\mathcal{L}_1(\mu)$ é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$).

V, espaço vetorial,

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$,
$v \to \|v\|$,

$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
$\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

---

medida ↳ 07/10

$f \in \mathcal{L}_1(\mu) \longrightarrow \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu < +\infty$ } sugestão.

⇒ $\alpha \in \mathbb{R}$, e $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\|\alpha f\|_1 = \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = |\alpha| \|f\|_1$

⇒ $\|f+g\|_1 = \int_X |f+g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$,

---

$\forall f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \geq 0$, $f \equiv 0 \to \|f\|_1 = 0$

$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ q.s. ↳ é uma pseudo norma.
↳ $|f| = 0$. q.s

Exercício: $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, mensuráveis, $f = g$; q.s.

⇒ f é integrável ⇒ g é integrável. ⇒ $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, $\forall E \in \mathcal{X}$.

Definição: $f, f_1: X \to \mathbb{R}$, mensuráveis. Dizemos que $f \sim f_1$, se $f = f_1$. q.s ; $\{f \sim f,\ f \sim f_1 \Rightarrow f_1 \sim f\}$; → são equivalentes.

Def $[f] = \{ f_1 \in \mathcal{L}_1(\mu) : f \sim f_1 \}$; $[f] :=$ "classe de f".
↳ classe de eq.

i) $[0] = \{ f_1 \in \mathcal{L}_1(\mu) : f_1 = 0 \text{ q.s} \}$

$L_1(\mu) = \mathcal{L}_1(\mu)\big|_{\sim}$, conjunto das classes de equivalência
$= \{ [f] : f \in \mathcal{L}_1(\mu) \}$.

---

i) $[f] + [g] = [f + g]$;

ii) $\alpha [f] = [\alpha f]$;

$\|[f]\|_1 = \int_X |f| d\mu$; $\|[f]\|_1 = 0 \Rightarrow \int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ q.s $\Rightarrow [f] = [0]$

⇒ $L_1(\mu)$, esp. vet. normado, $\|\theta\|_1 = \int_X |\theta| d\mu$, $\theta \in L_1$.

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$, $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$; } Fazer relação

↳ $\mathbb{R}^n = \{x=(x_1,\dots,x_n): x_i\in\mathbb{R}, 1\le i\le n\}$ ⇒ $\|x\| = |x_1|+\dots+|x_n|$

⇒ $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$; $= (|x|^2+|y|^2)^{1/2}$ } norma 2

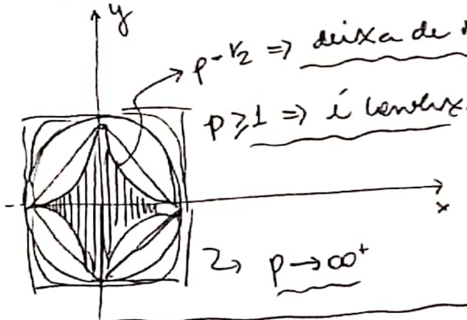
⇒ $f: X\to\mathbb{R}$, mens. $\|f\|_2 = \left[\int_X |f|^2 d\mu\right]^{1/2}$

$p>0$ $\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}$ } ⇒ norma p.

$p>0$ $\|(x,y)\|_p = [|x|^p+|y|^p]^{1/p}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$p=\frac{1}{2}$ $\|(x,y)\|_{\frac{1}{2}} = [|x|^{1/2}+|y|^{1/2}]^2 = (\sqrt{|x|}+\sqrt{|x|})^2$ ⇒ p/ $p=\frac{1}{2}$. ñ é norma

↳ pela desigualdade triangular. ⇒ $(1,1)\in\mathbb{R}^2$



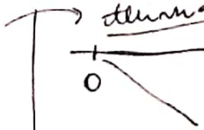
Seja $0<p<1$.

Então, $\forall a,b>0$; $[(a+b)^p < a^p+b^p]$, ⇒ $(a+b)^p - a^p - b^p < 0$.

⇒ Dem: $u(t) = (a+t)^p - a^p - t^p$, $\forall t\ge 0$.

$u(0) = a^p - a^p = 0$

$u'(t) = p(a+t)^{p-1} - pt^{p-1}$;



$u'(t) = p\left(\frac{1}{(a+b)^{1-p}} - \frac{1}{t^{1-p}}\right) < 0$, $\forall t>0$

⇓

$u(t)$ é estritamente decrescente em $[0,+\infty[$,

$u(0)=0$, $t>0$ ⇒ $u(t) < u(0)$ ⇒ $(a+t)^p - a^p - t^p < 0$, $\forall t>0$

⇓ $b>0$

$(a+b)^p - a^p - b^p < 0$ ⇒ $(a+b)^p < a^p+b^p$

⇒ $(X,\mathcal{X},\mu)$, Existem $E,F\in\mathcal{X}$, $E\cap F=\emptyset$, $\mu E>0$, $\mu F>0$, e considere $0<p<1$.

⇒ $\|\chi_E\|_p = \left[\int_X |\chi_E|^p d\mu\right]^{1/p} = [\mu E]^{1/p}$;

⇒ $\|\chi_F\|_p = (\mu F)^{1/p}$;

⇒ $(\|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p)^p = \left(\overbrace{(\mu E)^{1/p}}^{a} + \overbrace{(\mu F)^{1/p}}^{b}\right)^p$;

são disjuntos.

$< ((\mu E)^{1/p})^p + ((\mu F)^{1/p})^p = \mu E + \mu F$, $= \int_X (\chi_E+\chi_F) d\mu = \int_X \chi_{E\cup F} d\mu$.

$= \int_X (\chi_E+\chi_F)d\mu = \int_X |\chi_E+\chi_F|^p d\mu = \|\chi_E+\chi_F\|_p^p$

$(\|\chi_E\|_p+\|\chi_F\|_p)^p < \|\chi_E+\chi_F\|_p^p$ ⇒ $\|\chi_E\|_p+\|\chi_F\|_p < \|\chi_E+\chi_F\|_p$

⇓

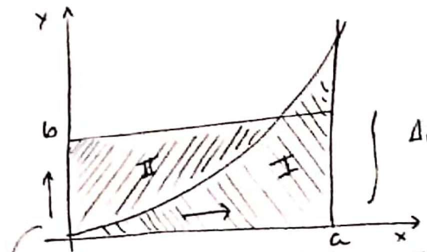
$\|\cdot\|_p$, não é norma.

$L_1(\mu)$, $1<p<+\infty$ ⇒ $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ é norma.

$p>1$ ⇒ $p-1>0$, considere $y = x^{p-1}$,

⇓

$x = y^{\frac{1}{p-1}}$



Área = a.b

↳ função estritamente crescente e injetora

$ab \le \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy$

I

II

⇓

$ab \le \frac{x^p}{p}\Big|_0^a + \frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\Big|_0^b$

07/10

$\frac{1}{p-1}+1=\frac{1+(p-1)}{p-1}=\frac{p}{p-1}$.

$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p/p-1}}{p/p-1}$ ⇒ Vamos designar, $\frac{p}{p-1}=q \Rightarrow p=pq-q$.

$p+q=pq$, $\left|\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1.\right| \Rightarrow ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

Proposição:

Sejam $p>1$, $q>1$, tais que $1/p+1/q=1$.

Então, $\forall a,b>0$, $\left(ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$; $1<p<+\infty$ e $1<q<+\infty$, diz-se conjugados.

⇒ Desigualdade de Hölder:

Sejam $(X,\mathcal{X},\mu)$, espaço de medida e $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$, funções mens.

conjugados $1<p<+\infty$ e $1<q<+\infty$, tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Então, $\int_X|fg|\,d\mu\leq\left[\int_X|f|^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int_X|g|^q d\mu\right]^{1/q}$.

$\Rightarrow \|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$.

Demonstração, Caso 1: $\|f\|_p=0$:

$\Rightarrow \|f\|_p=0 \Rightarrow \int_X|f|^p d\mu=0 \Rightarrow |f|^p=0$ q.s. $\Rightarrow |f|=0$ q.s.

$\Rightarrow |fg|=0$ q.s. $\Rightarrow \int_X|fg|\,d\mu=0$, logo vale a igualdade.

Caso 2: $\|g\|_q=0$; (análogo) ao caso 1.

Caso 3: $\|f\|_p=+\infty$ e $\|g\|_q\neq 0$. ou $\|f\|_p\neq 0$ e $\|g\|_q=+\infty$.

⇒ Então,

$\int_X|fg|\,d\mu\leq+\infty$, e vale o resultado.

$(X, \mathfrak{X}, \mu)$ espaço de medida

9/10/24

$\mathcal{L}(\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f$ é mensurável e $\int_X |f| d\mu < +\infty\}$

$\begin{cases} f, g \in \mathcal{L}_1(\mu) \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_1(\mu) \\ \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}_1(\mu) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}_1(\mu) \end{cases}$

$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu, \ \forall f \in \mathcal{L}_1(\mu), \ \|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0 \ q.s$

$1 < p < +\infty, \ \mathcal{L}p(\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f$ é mens. e $\int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$

$\int |f|^p d\mu < +\infty, \ \int |g|^p < +\infty \Rightarrow \int |f+g|^p < +\infty.$

Lema: $\forall a, b \geq 0 \ (a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Dem: $(a+b)^p \leq (\max\{a,b\} + \max\{a,b\})^p = (2\max\{a,b\})^p =$

$= 2^p(\max\{a,b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Proposição: $\mathcal{L}p(\mu)$ é um espaço vetorial.

Dem:

(i) $f, g \in \mathcal{L}p(\mu) \Rightarrow \begin{cases} \int_X |f|^p d\mu < +\infty, \\ \int_X |g|^p d\mu < +\infty, \end{cases}$

$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \Rightarrow \int_X |f+g|^p d\mu \leq$ *

$\leq (|f(x)| + |g(x)|)$

* $2^p\left[\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu\right] < +\infty$: logo, $f+g \in \mathcal{L}p(\mu)$

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{L}p(\mu) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}p(\mu)$.

$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}$, → norma.

$f \in \mathcal{L}p(\mu), \ \|f\|_p = 0$;

$Lp(\mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}p(\mu)\}$, onde $f \sim f_1$ se $f = f_1$ q.s.

e $[f] = \{f_1 \in \mathcal{L}p(\mu) : f = f_1, q.s\}$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}p(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu < +\infty$.

9/10/2024

$\Rightarrow 1 < p < +\infty; \ a, b \geq 0 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

↳ desigualdade de (Young).

$7\xi g_1 + 3\xi h - 4\xi + 3\xi h$

$(7\xi h - 3\xi) h - 4\xi + 3\xi h$

$7h - x$

$7 + xh$

$7 - xh$

$7h + xh$

$4\xi h + 3\xi g_1 - 4\xi h + 3\xi h$

$(3\xi - 3\xi h) + 3\xi + 3\xi h)$

$(7\xi h - 3\xi h) h - 4\xi h + 3\xi h$

$7h - xh = 4$

$7h + xh = 37$

⇒ Desigualdade de Holder $(X, \mathfrak{X}, \mu)$

$1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$

$f, g: X \to \mathbb{R}$, funções mensuráveis.

Então $\int_X |fg|\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}$

Dem

$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$0 < \int_X |f|^p d\mu < +\infty$ e $0 < \int_X |g|^q d\mu < +\infty$

$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ | $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_p} \leq \int_X \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \int_X \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_p} \int_X |fg|\,d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f(x)|\,d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_X |g(x)|\,d\mu.$$

como $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $\|g\|_p = \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}$

$$= \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |fg| \leq 1 \Rightarrow \int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

⇒ Corolário

$1 < p, q < +\infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$f \in L_p(\mu), g \in L_q(\mu) \Rightarrow fg \in L_1(\mu)$ e $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

⇒ $p = 2$, ⇒ $q = 2$ ⟶ desigualdade de Cauchy & Shwartz

Teorema (Minkowski), $1 < p < +\infty$ $f, g \in L_p(\mu)$

Então $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{p \cdot q} = 1 \Rightarrow$

⇒ $p + q = pq$, [redacted] $p = q(p-1)$

Dem: (1), $f + g = 0$, q.s. ⇒ $\int_X |f+g|^p d\mu = 0$,

e vale a propriedade.

(2), $\|f+g\|_p > 0$

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p d\mu = \int |f+g|^{p-1}\cdot|f+g|\, d\mu \leq [redacted] \circledast$$

$$\circledast \int |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)\,d\mu = \int |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int |g||f+g|^{p-1}d\mu.$$

usar as Hyp. $\Rightarrow \int |u\,v|\,d\mu \leq \|u\|_p\|v\|_q$

$$\int |f||f+g|^{p-1}d\mu \leq \|f\|_p \, \||f+g|^{p-1}\|_q$$

$$\Rightarrow \|f\|_p\left(\int (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p\left(\int \left(|f+g|^{(p-1)q}\right) d\mu\right)^{1/q}$$

$$= \|f\|_p\left(\int (|f+g|)^p d\mu\right)^{1/q}$$

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q} + \|g\|_p\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}.$$

$$(*) = \|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$$

$\circledast = \int |f+g|^p d\mu$ ser $\neq 0$

$$\frac{\int |f+g|^p d\mu}{\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p}}_{\|f+g\|_p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Exercício

Suponha que $\{0 < \mu X < +\infty;\ 1 \leq p < q < +\infty\}$

$\longrightarrow L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$.

$$\Rightarrow f \in L_q(\mu) \Rightarrow \int_X |f|^q d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{p<q} \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^q \ (?)$$

$$A = \{x \in X : |f(x)| \geq 1\},\ B = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$$

se $x \in A \Rightarrow |f(x)| \geq 1 \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^q$,

$x \in B \Rightarrow |f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x)|^p < 1$.

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_B |f|^p d\mu \leq \underbrace{\int_A |f|^q d\mu}_{\leq \int_X |f|^q d\mu} + *$$

$$* + \int_B 1\, d\mu \leq *$$

$\Rightarrow \quad \leq \int_X |f|^q d\mu + \mu B \leq \|f\|_q^q + \mu X < +\infty \Rightarrow f \in L_p(\mu)$.

↳ sem hip. o resultado é falso

(4)
9/12/...

$L_2(m) \not\subset L_1(m)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$

$f = \frac{1}{x}\chi_{[1,+\infty[}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1, \\ 0 & \text{se } x < 1, \end{cases}$

$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dm = \int_{[1,+\infty[} f^2 dm$

↳ $= \int_1^{+\infty} 1/x^2 \, dx < +\infty \Rightarrow f \in L_2(m)$

$\int_{\mathbb{R}} |f| dm = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$;

$L_\infty(\mu)$ se $p > 1 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) $\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} :$ f é mensurável e limitada q.s.$\}$

~~$f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$, $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$~~

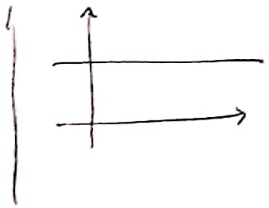
Ex: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \{\frac{1}{n}, n \geq 1\}; \\ n, & \text{se } x = 1/n, \ n \geq 1; \end{cases}$

$\Rightarrow L_\infty(\mu)$

Def: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é limitada q.s., se existe $N \in \mathcal{X}$, $\mu N = 0$, tal que f é limitada em $X \setminus N$.

$L_\infty(\mu) = \{ [f] : f \in \mathcal{L}_\infty(\mu) \}$, $(X, \mathcal{X}, \mu)$.

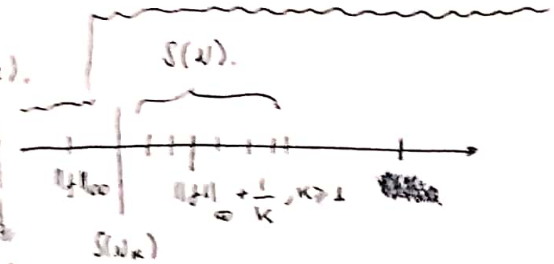
↳ $f \in L_\infty(\mu) / \|f\|$



$N \in \mathcal{F}$, $\mu N = 0$; $\Rightarrow S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$;

$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : \mu N = 0\}$;

$\Rightarrow$ Proposição: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in L_\infty(\mu)$.



Então (i) $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, q.s.

(i) Para todo $k \geq 1$, existe $N_k \in \mathcal{F}$, $\mu N_k = 0$,

com $S(N_k) < \|f\|_\infty + 1/k$; $\Rightarrow |f(x)| < \|f\|_\infty + 1/k$, $\forall x \notin N_k$.

$\Rightarrow$ logo $N = \bigcup_{k \geq 1} N_k$; $N \in \mathcal{F}$ e $\mu N = 0$, se $x \in X$ e $x \notin N = \bigcup_{k \geq 1} N_k \Rightarrow$

$\Downarrow$

$\Rightarrow x \notin N_k$, $k \geq 1$; $\Rightarrow |f(x)| < \|f\|_\infty + 1/k$; $\forall k \geq 1$. $\Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$

(ii) Se $0 < c < \|f\|_\infty$ então existe $A \in \mathcal{F}$, $\mu A > 0$ e $|f(x)| > c$, $\forall x \in A$.

(ii) Logo $\|f\|_\infty > c$, e suponhamos, por absurdo, que não existe, $A \in \mathcal{F}$,

$\mu A > 0$, e $|f(x)| > c$, $\forall x \in A$, logo $|f(x)| \leq c$ q.s., isto é,

existe $N \in \mathcal{F}$, $\mu N = 0$ e $|f(x)| \leq c$, $\forall x \notin N \Rightarrow S(N_0) \leq c$.

Como $\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : \mu N = 0\}$, resulta que $\|f\|_\infty \leq S(N_0) \leq c$:

contradição, pois $c < \|f\|_\infty$.

$\Rightarrow$ Consequência: $f \in L_\infty(\mu)$, $|f(x)| \leq a$ q.s. $\Rightarrow \|f\|_\infty \leq a$

$\Rightarrow$ Proposição: $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $L_\infty(\mu)$.

Dem: $\forall f, g \in L_\infty(\mu)$ $(\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$

N_1 $f \in L_\infty(\mu) \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.s.

N_2 $g \in L_\infty(\mu) \Rightarrow |g(x)| \leq \|g\|_\infty$ q.s.

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq$

$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ q.s.

$\Downarrow$

$\|f(x) + g(x)\|_\infty \leq \|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty$

$\rightarrow$ Exercícios:

(*) Desigualdade de Hölder:

$p, q > 1$; e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se $f \in L_p$ e $g \in L_q \Rightarrow f \cdot g \in L_1(\mu)$

e $\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $\hookrightarrow$ já visto.

(1) $f \in L_1(\mu)$ e $g \in L_\infty(\mu) \Rightarrow f \cdot g \in L_1(\mu)$ e $\|f \cdot g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

$\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \, d\mu = \int_X |f||g| \, d\mu$*, mas como $g \in L_\infty(\mu) \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(x)| \leq \|g\|_\infty$ q.s.

$\Downarrow$

$|f(x)||g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$ q.s.

* $\|f \cdot g\|_1 = \int_X |f \cdot g| \, d\mu = \int_X |f||g| \, d\mu \leq \int_X |f| \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| \, d\mu =$

$= \|g\|_\infty \|f\|_1$.

(2) $f \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$. $\Rightarrow f \in L_p(\mu)$, $1 < p < +\infty$;

Obs: $f \in L_1(\mu) \Rightarrow f \in L_\infty(\mu)$? $\Rightarrow$ "Falso".

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x \in]0,1]; \\ +\infty, & x = 0; \end{cases}$$

prova que $f \in L_p(\mu)$

$\Rightarrow \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$

$\Rightarrow |f(x)|^p \leq |f|$

$\Rightarrow$ Sejam $A = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$, $B = \{x \in X : |f(x)| \geq 1\}$.

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, A, B são mensuráveis.

$f \in L_1(\mu) \Rightarrow \int_X |f|\,d\mu < +\infty$, $\int_X |f|\,d\mu \geq \int_B |f|\,d\mu \geq \int_B 1\,d\mu = \mu B$ — 17/... medida

$\Rightarrow \mu B \leq \int_X |f|\,d\mu < +\infty \Rightarrow \mu B < +\infty$. $\Big\} \Rightarrow$ "Conmumi de maxm."

$$\int_X |f|^p d\mu = \underbrace{\int_A |f|^p d\mu} + \int_B |f|^p d\mu.$$

$$\leq \int_A |f|\,d\mu + \int_B \|f\|_\infty^p\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu + \|f\|_\infty^p \cdot \mu B < +\infty$$

$\Rightarrow \int_X |f|^p d\mu < +\infty \Rightarrow f \in L_p(\mu)$.

Obs $\mathbb{R}^2$, $z=(x,y)$. $\|z\|_1 = |x|+|y|$.

$\|z\|_2 = (|x|^2+|y|^2)^{1/2}$

$p>1$

$\|z\|_p = (|x|^p+|y|^p)^{1/p}$

$\|z\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

$V=\mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|$, $B(0,1)=\{z\in\mathbb{R}^2 : \|z\|\leq 1\}$ $\quad \int_X |f|^p d\mu$

---

(3) Considere $\mathbb{R}^2=\{z=(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$,

mostre que $\lim\limits_{p\to\infty^+} \|(x,y)\|_p = \|(x,y)\|_\infty$.

R: $\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p+|y|^p}$, "sem perda de generalidade"

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\} = |x|$,

$|x|^p \leq |x|^p+|y|^p \leq |x|^p+|x|^p = 2|x|^p$

$$\sqrt[p]{|x|^p} \leq \sqrt[p]{|x|^p+|y|^p} \leq 2^{1/p}\sqrt[p]{|x|^p} \;\#$$

$|x| \leq \|(x,y)\|_p \leq 2^{1/p}|x|$, $\forall p\geq 1$.

$p\to\infty^+$

$|x| \leq \|(x,y)\|_p \leq |x| \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty^+} \|(x,y)\|_p = \underbrace{|x|}_{\|(x,y)\|_\infty}$

$\Rightarrow$ (4). $f\in L_1(\mu)\cap L_\infty(\mu) \Rightarrow f\in L_p(\mu)$, $1\leq p\leq +\infty$. e $\lim\limits_{p\to\infty^+}\|f\|_p = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow$ $f\in L_1(\mu)\cap L_\infty(\mu)$; $1<p<+\infty$;

$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|\cdot|f|^{p-1} d\mu \leq *$, como $f\in L_\infty(\mu) \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ q.s.

$* \leq \int_X |f|\cdot\|f\|_\infty^{p-1} d\mu = \|f\|_\infty^{p-1}\int_X |f|\,d\mu.$

$\Downarrow$

$\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1$,

$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_1^{1/p}\cdot\|f\|_\infty^{1-1/p}$ $\Big| \Rightarrow \frac{p-1}{p} = 1-\frac{1}{p}$, $\forall p\geq 1$.

$p\to\infty^+$

$\lim \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ //

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Suponhamos, $\|f\|_\infty > 0$.

Seja $0 < c < \|f\|_\infty$.

Como $c < \|f\|_\infty$, existe $A \in \mathfrak{X}$, $\mu A > 0$ e $|f(x)| > c$, $\forall x \in A$.

$$\int_X |f|^p d\mu \geq \int_A |f|^p d\mu \geq \int_A c^p d\mu = c^p(\mu A) \quad \Big\downarrow \cdot \tfrac{1}{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\|f\|_p \geq c\,(\mu A)^{1/p}$$

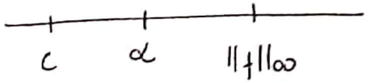
$\|f\|_p \geq c(\mu A)^{1/p}$, $\forall p > 1$

$\Big\downarrow {p \to \infty^+}$

c

$\overbrace{\underline{\lim}\, \|f\|_p}^{\alpha} \geq c$, $\forall c < \|f\|_\infty$

$\underline{\lim}\, \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$



$\Rightarrow$ $\overline{\lim}\, \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq \underline{\lim}\, \|f\|_p$.

$$\Downarrow$$

$$\lim_{p \to \infty^+} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Completude de $L_p(\mu)$. $\mathcal{C}[0,1]$ $\{f:[0,1]\to\mathbb{R}: f$ contínua$\}$ #

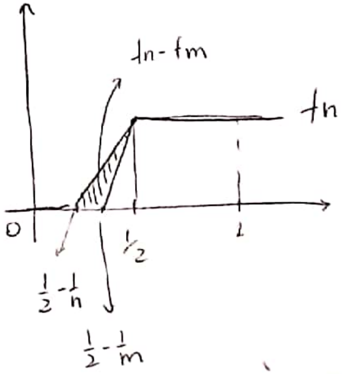
igual à de Lebesgue.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \;, \forall f\in \mathcal{C}[0,1].$$

$\mathcal{C}[0,1] \subseteq L_1(m)$ #

16/10 medida ①

$(\mathcal{C}[0,1], \|\ \|_1)$ é completo? (toda sequência de Cauchy é convergente)



$f_n \in \mathcal{C}[0,1]$, $\forall n\geq 1$.

$m>n \Rightarrow 1/m < 1/n$

$\Downarrow$

$$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{m}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} < \frac{1}{2}-\frac{1}{m}$$

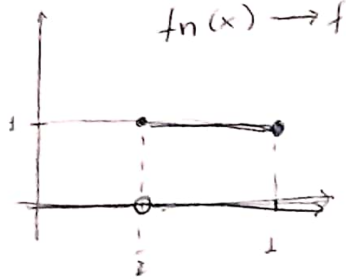
$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx.$$

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) \to \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ isso mostra que f_n é $\|\ \|_1$ Cauchy. #

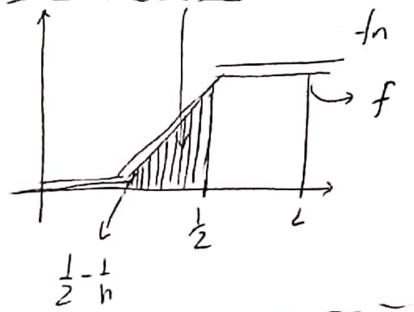
$\exists f\in\mathcal{C}[0,1]$. $f_n \xrightarrow{\|\ \|_1} f$ # $\to \|f_n - f\|_1 \to 0$

$$f_n(x) \to f(x) = \chi_{[1/2,1]}(x), \forall x\in[0,1].$$



$|f_n(x) - f(x)| \to 0$, $\forall x\in[0,1]$

$$\|f_n - f\|_1 = \frac{1}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

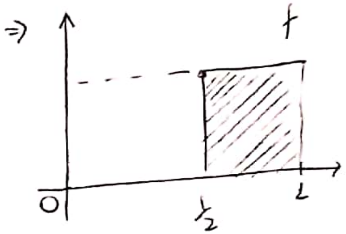


$f_n \xrightarrow{\|\ \|_1} f$

$\exists h\in\mathcal{C}[0,1]$:

$h = f$ q.s

$\Rightarrow$



$h\in\mathcal{C}[0,1]$, $f = h$ q.s

#

$(X,d) \to$ não é completo # $\Rightarrow$ como completa?

~~fn~~

Teorema (Fischer–Riesz), $L_1(\mu)$ é completo. #

Dem #.

Seja (f_n) sequência de Cauchy em $L_1(\mu)$.

$\boxed{(x_n) \text{ é de Cauchy} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n\geq n_0 (|x_n - x_m|<\varepsilon)}$

$\to$ Então $\exists n_1 \geq 1$: $\forall m,n\geq n_1$, $\|f_n - f_m\| < 1/2$.

$\Downarrow$

$\forall m\geq n_1$, $\|f_m - f_{n_1}\|_1 \leq 1/2$

$\exists\, n_2 > n_1 : \forall\, m, n \geq n_2,\ \|f_m - f_n\|_1 < 1/2^2$

$\Rightarrow \|f_{n_2} - f_{n_1}\| < 1/2$;

$\exists\, n_3 > n_2 \ \forall\, m, n \geq n_3 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_1 < 1/2^3$

$\|f_{n_3} - f_{n_2}\|_1 < 1/2$

Por indução obtemos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_j < \dots$ tal que $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_1 < 1/2^j$,

$\Rightarrow$ Seja $g(x) = \quad (f_{n_j}) \overset{?}{\to} f$ "tem que", p/ conseguir uma série convergente

$= |f_{n_1}(x)| + \sum' |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|,\ \forall x \in X.$

g é mensurável, $\quad a_n < b_n,\ a_n \to a,\ b_n \to b \Rightarrow a \leq b$

$$\int_X g\, d\mu = \int_X |f_{n_1}|\, d\mu + \sum_{j \geq 1} \int_X |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|\, d\mu =$$

$$= \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{j \geq 1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_1 \leq \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{j \geq 1}' \frac{1}{2^j} = \|f_{n_1}\|_1 + 1 < +\infty$$

$\Rightarrow$

g é integrável $\Rightarrow \mu\{\underbrace{x \in X : g(x) = +\infty}_{E}\} = 0.$

Seja $f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j \geq 1}' [f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)], & \text{se } x \notin E; \\ 0, & \text{se } x \in E. \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{k \to +\infty} \left(f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \right),\ \forall x \notin E$ *

$= \lim_{k \to +\infty} [f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \dots + (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))]$

* $\forall x \notin E,\ f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_{k+1}}(x)$

f é integrável pois $|f| \leq g$.

Vamos provar que $\|f_{n_{k+1}} - f\|_1 \to 0$.

$|f_{n_{k+1}}| = |f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq g$

$f_{n_{k+1}} \to f$ q.s.

$\Downarrow$

$|f_{n_{k+1}} - f| \to 0$

$|f_{n_{k+1}} - f| \leq |f_{n_{k+1}}| + |f| \leq 2g.$

~~[illegible]~~ Pelo TCDL,

$$\int_X |f_{n_{k+1}} - f| \, d\mu \to 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\|f_{n_{k+1}} - f\|_1 \to 0;$$

$f_{n_{k+1}} \xrightarrow{\|\|_1} f$

(f_n) é $\|\|_1$- Cauchy

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\|_1} f$

Ex.1

$f_n \in L_1(\mu)$, ~~[illegible]~~

$(f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f) \Rightarrow (\|f_n - f\|_1 \to 0)$

$$\Updownarrow$$

$\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ #

$(V, \|\|) \to \mathbb{R}^2$ normado,

#

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ~~[illegible]~~

$\|u\| - \|v\| \leq \|u-v\| = \|v-u\|$

26/10

Medida

3

$(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$, $\big|\|f\|_p - \|g\|_p\big| \leq \|f-g\|_p$,

vale a ida

1 $(f_n \xrightarrow{\|\|_p} f) \Rightarrow (\|f_n\|_p - \|f\|_p)$;

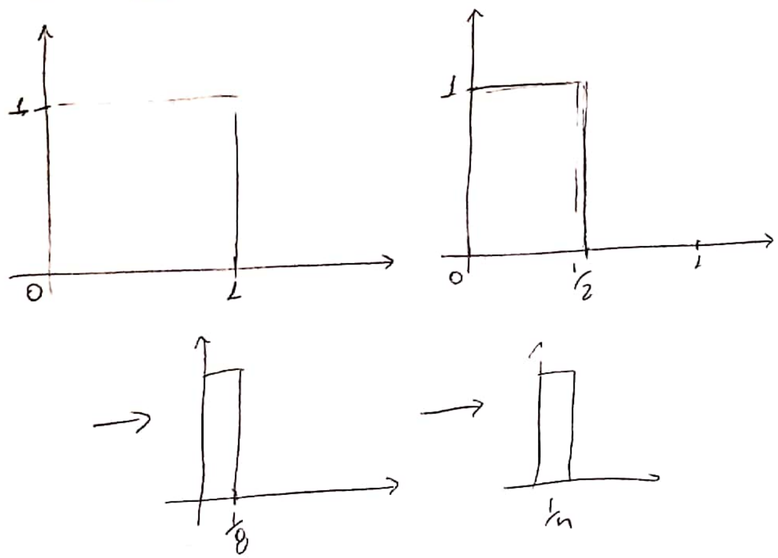
$0 \leq \big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leq \|f_n - f\|_p$, $\forall n \geq 1$.

$\Rightarrow (f_n \xrightarrow{\|\|_p} f) \Leftrightarrow (\|f_n - f\|_p \to 0) \Rightarrow$ Def

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty^+} \big|\|f_n\|_p + \|f\|_p\big| = 0;$

$\lim_{n \to +\infty} (\|f_n\|_p - \|f\|_p) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty^+} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$ vale a volta #



⇒ Teorema de Lebesgue (1902) — medida (1) 2/10

▷ Seja $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$, uma função limitada, são equivalentes,

(1) f é Riemann integrável, o conjunto dos pontos onde f é descontínua possui medida nula.

$f\ I \to \mathbb{R}$, I intervalo.

$\omega(f, I) = \sup\{|f(y) - f(z)|.\ y, z \in I\}$, oscilação de f no intervalo I

$x_0 \in I$, $\delta > 0$,

$\omega(f, x_0, \delta) = \omega(f,]x_0-\delta, x_0+\delta[) = \sup\{|f(y)-f(z)|\ y,z \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

mas $0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\subseteq]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[$,

$$\Downarrow$$

$$\omega(f; x_0, \delta_1) \leq \omega(f; x_0, \delta_2)$$

⇒ Def: $\omega(f, x_0)$ = oscilação de f no ponto x_0.

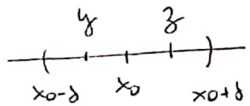
$= \inf\{\omega(f; x_0, \delta) : \delta > 0\}$.

Seja $f: I \to \mathbb{R}$, I, intervalo,

f é contínua em $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$.

Dem (⇒), Seja $\varepsilon > 0$, vamos provar que $\omega(f; x_0) < \varepsilon$, f é contínua em $x_0 \Rightarrow \exists\ \delta > 0$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/4$.



$y, z \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon/4$, $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon/4$,

$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(z)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$,

$\omega(f; x_0, \delta) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow \omega(f; x_0, \delta) < \varepsilon$.

(⇐),

Seja $\varepsilon > 0$, $\omega(f, x_0) = 0 = \inf\{\omega(f, x_0, \delta).\ \delta > 0\}$

$\omega(f, x_0) = 0$, Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$.

$\omega(f, x_0, \delta) < \varepsilon$, $\sup\{|f(y) - f(z)|\ y, z \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$

$$\Downarrow$$

$x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \omega(f, x_0, \delta) < \varepsilon$

f é contínua em x_0.

medida 21/10

Lema $f: [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$,

$(\omega(f;x) < \varepsilon)$, $\forall x$, então $\exists\, \delta > 0$:

$$\forall u,v \in [c,d]\ (|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon)$$

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$\omega(f, x_0) = \inf\{\omega(f; x_0, \delta)\ \ \delta > 0\}$,

$\omega(f; x_0, \delta) = \sup\{|f(y) - f(z)| : |y - x_0| < \delta \text{ e } |z - x_0| < \delta\}$,

Dem $x \in [c,d]$,

$\omega(f, x) < \varepsilon$,

$\Downarrow$

$\exists\, \delta_x\ \omega(f, x, \delta_x) < \varepsilon$

$\Downarrow$

$]x - \delta_x, x + \delta_x[\Rightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon$,

$$[c,d] \subseteq \bigcup_{x \in [c,d]} \left]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right[,$$

$[c,d]$ é compacto $\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_k$:

$$[c,d] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \left]x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2}, x_j + \frac{\delta_{x_j}}{2}\right[,$$

$0 < \delta < \min\left\{\frac{\delta_{x_j}}{2}, 1 \le j \le k\right\}$,

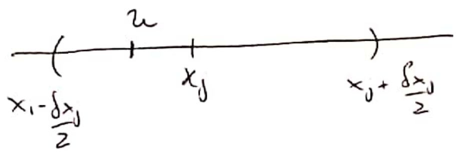
Vamos provar que, para $u, v \in [c,d]$,

$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow u \in [c,d] \Rightarrow \exists\, j$, tq $u \in \left]x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2}, x_j + \frac{\delta_{x_j}}{2}\right[$,

$\Downarrow$

$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$



$\Rightarrow f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, f é contínua em $x_0 \Leftrightarrow \omega(f, x_0) = 0$,

f é descontínua em $x_0 \Leftrightarrow \omega(f, x_0) > 0$,

$\Updownarrow$

$\exists\, n \ge 1\ \ \omega(f, x_0) \ge 1/n$

$D(f) = \{x \in [a,b] : f$ é descontínua em $x\}$

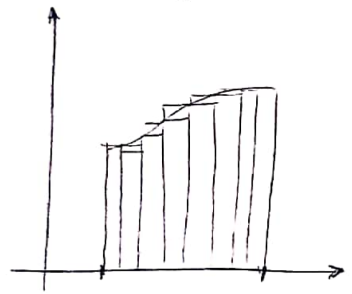
$D_n(f) = \{x \in [a,b]\ \ \omega(f, x) \ge 1/n\}$,

$D(f), D_n(f) \Rightarrow D(f) = \bigcup_{n \ge 1} D_n(f)$,

medida (3)
21/10

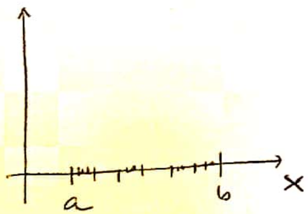
⇒ Lema: $D_n(f)$ é compacto, $\forall n \geq 1$.
↳ mensurável.

Seja,
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, limitada e Riemann-integrável.
Então $m(D(f)) = 0$.



Dem
Seja $n \geq 1$. Vamos provar que $m(D_n(f)) = 0$.
Suponhamos que medida $m(D_n(f)) = c > 0$.
⇒ Considere P uma partição de $[a,b]$.

$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_k = b$.



$A = \{ i : 1 \leq i \leq k : \,]x_{i-1}, x_i[\, \cap D_n(f) \neq \emptyset \}$

$x_0 \in D_n(f) \Rightarrow \omega(f, x_0) \geq 1/n$, $1/n \leq \inf\{\omega(f, x_0, \delta) : \delta\}$
⇓
$1/n \leq \omega(f, x_0, \delta)$

→ Riemann integrabilidade ⇒ medida

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i \in A} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in A} \Delta x_i \geq 1/n \cdot c$$

(2) Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável e $c \in \mathbb{R}$.

Prove que, p/ $a<b$, f transladado ↓ volta da f

$$\int_{[a,b]} f(x+c)\, dm = \int_{[a+c,\, b+c]} f(u)\, dm,$$
→ (translado o domínio)

⇒ mostrar p/ g/ vale p/ função simples, característica

⇒ Caso 1

$f = \chi_A$, onde $A \in \mathcal{M}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A(x+c) = \begin{cases} 1 & \text{se } x+c \in A, \\ 0 & \text{se } x+c \notin A, \end{cases}$$

$$\chi_A(x+c) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A-c, \\ 0, & \text{se } x \notin A-c, \end{cases} = \chi_{A-c}(x)$$

$\int f\,dm,$ $\cancel{\int \ldots}$

medida

21/10

$$\int_{[a,b]} \chi_A(x+c)\,dm = \int_{[a,b]} \chi_{A-c}(x)\,dm = \int_{\mathbb{R}} \chi_{A-c}\cdot\chi_{[a,b]}\,dm$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(A-c)\cap[a,b]}\,dm = m((A-c)\cap[a,b]) =$$

$$= m((A-c)\cap[a,b]+c) = m(A\cap[a+c,b+c]) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{A\cap[a+c,b+c]}\,dm =$$

$$= \int_{[a+c,b+c]} \chi_A\,dm$$

Caso II

$$\varphi = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}, \quad A_j \in \mathcal{M} \text{ e } a_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq r.$$ → é integrável

$$\int_{[a,b]} \varphi(x+c)\,dm = \int_{[a,b]} \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x+c)\,dm = \sum_{j=1}^{r} a_j \int_{[a,b]} \chi_{A_j}(x+c)\,dm,$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a_j \int_{[a+c,b+c]} \chi_{A_j}(x)\,dm = \int_{[a+c,b+c]} \varphi(x)\,dm,$$

$\Rightarrow$

Caso III

$f: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, f integrável.

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi\,dm \right.$$

$\exists$ (φ_n) sequência de funções simples e mensuráveis tais que $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq \varphi_n \leq \ldots \to f$.

↳ T.C.M (Teorema da convergência monótona)

se $\varphi_n \uparrow f \Rightarrow \varphi_n \cdot \chi_{[a+c,b+c]} \xrightarrow{\text{vale isso}} f\chi_{[a+c,b+c]}$,

$\Downarrow$ ~~pelo~~ pelo TCM

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\cdot\chi_{[a+c,b+c]}\,dm \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f\cdot\chi_{[a+c,b+c]}\,dm.$$

$$\int_{[a+c,b+c]} \varphi_n\,dm \longrightarrow \int_{[a+c,b+c]} f\,dm,$$

$$\begin{cases} \varphi_n \to f \\ \varphi_n(x+c) \to f(x+c) \end{cases}$$

seq. crescente

$\to \varphi_n(x+c)\,\chi_{[a,b]} \to f(x+c)\cdot\chi_{[a,b]}$

$\Downarrow$ TCM

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x+c)\chi_{[a,b]}\,dm \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x+c)\,\chi_{[a,b]}\,dm$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} \varphi_n(x+c)\,dm = \int_{[a,b]} f(x+c)\,dm \Rightarrow$$

medida (5)

07/12

$\Rightarrow$ Como

$$\int_{[a+c,b+c]} \varphi_n \, dm = \int_{[a,b]} \varphi_n(x+c) \, dm \,, \quad \forall n \geq 1.$$

então,

$$\int_{[a+c,b+c]} f \, dm = \int_{[a,b]} f(x+c) \, dm,$$

Caso 4. f é integrável, $f = f^+ - f^-$. #

$$\int_{[a,b]} f(x+c) \, dm = \int_{[a,b]} f^+(x+c) \, dm - \int_{[a,b]} f^-(x+c) \, dm \,,$$

$$= \int_{[a+c,b+c]} f^+ dm - \int_{[a+c,b+c]} f^- dm \,, \quad = \int_{[a+c,b+c]} f \, dm,$$

Ex. medida I
23/10

⇒ (1) Seja $(X,\mathcal{X},\mu)$ espaço de medida e $f: X\to[0,+\infty]$, uma função mensurável tal que $\int_X f\,d\mu < +\infty$.

Prove que, p/ todo $\varepsilon>0$, existe $E\in\mathcal{X}$, com $\mu E<+\infty$, tal que

$$\int_X f\,d\mu \le \int_E f\,d\mu + \varepsilon$$

⇒ $X \xrightarrow{f}$ 0 1 2 3 $\to f(x)$ $[n,n+1] \Rightarrow f^{-1}([n,n+1[) = E_n$

p/ $\forall n\ge0$, E_n é mensurável, $\forall n\ge0$, $E_n\cap E_m=\emptyset$, se $n\neq m$.

$\bigcup_{n\ge1} E_n = X$, $f=\sum_{n\ge0}' f\cdot\chi_{E_n}$ q.s. { ~~$x\in X \Rightarrow \exists n\ge0$ $f(x)\in[n,n+1[$~~,

↳ $\exists N\in\mathcal{X}$, $\mu N=0$ e $\forall x\notin N$, $f=\sum_{n\ge0}' f\chi_{E_n}$

$x\notin N \Rightarrow \exists n\ge0 \cdot f(x)\in[n,n+1[\Rightarrow \begin{cases} f\chi_{E_n}(x)=f(x); \\ f\chi_{E_m}(x)=0, \text{ se } m\neq n \end{cases}$

$f=\sum_{n\ge0} f\chi_{E_n}$, $f\ge0$

↳ TCM ⇒ $\int_X f\,d\mu = \sum_{n\ge0}\int_X f\chi_{E_n}\,d\mu < +\infty$ ⇒ dado $\varepsilon>0$, $\exists n_0\ge1$,

e $\sum_{n>n_0}\int_X f\chi_{E_n}\,d\mu<\varepsilon$.

Seja $E=\bigcup_{n=0}^{n_0}E_n$, $\int_E f\,d\mu=\int_X f\chi_{\bigcup E_n}\,d\mu=\sum_{n=0}^{n_0}\int_X f\chi_{E_n}\,d\mu$.

$\int_X f\,d\mu \le \sum_{n=0}^{n_0}\int_X f\cdot\chi_{E_n} + \varepsilon$, seja $E=\bigcup_{n=0}^{n_0}E_n - f^{-1}(0)$. Então

$\mu E<+\infty$ e $\int_X f\,d\mu\le\int_E f\,d\mu+\varepsilon$.

⇒ no verso tem a prova.

$f: X\to[0,+\infty[$, $A_n=\{x\in X: f(x)>1/n\}$, $f_n=f\chi_{A_n}$, $\forall n\ge1$

$f_n\to f$ q.s., $|f_n|=f_n\le f$ ↳ integrável

Pelo TCDL, $\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu$, seja $\varepsilon>0$ $\exists n_0$

$\int_X f\,d\mu-\int_X f_{n_0}<\varepsilon$; $\int_X f_{n_0}\,d\mu=\int_X f\chi_{A_n}\,d\mu=\int_{A_{n_0}} f\,d\mu$

$A_{n_0}=\{x: f(x)>\frac{1}{n_0}\}$, $\int_X f\,d\mu\ge\int_X f\,d\mu > \int_{A_{n_0}}\frac{1}{n_0}\,d\mu=\frac{1}{n_0}\mu A_{n_0}$

⇒ $\frac{1}{n_0}\mu A_{n_0}<\int_X f\,d\mu<+\infty$ ⇒ μA_{n_0} é finito)

(2), $(X,\mathcal{X},\mu)$ espaço de medida,

$f_n: X\to\mathbb{R}$, sequência de funções mensuráveis.

$f: X\to\mathbb{R}$ mensurável, $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \iff \exists N\in\mathcal{X}$, $\mu N=0$,

$f_n\to f$, uniformemente em $X\setminus N$.

$f:X\to\mathbb{R}$ mensurável, $f\in L_\infty(\mu)\iff\exists N\in\mathcal{X}$, $\mu N=0$ e

f é limitada em $X\setminus N$. $\mu N=0$, $S(N)=\sup\{|f(x)|: x\notin N\}$

$\|f\|_\infty=\inf\{S(N): \mu N=0\}$, $\{|f|\le\|f\|_\infty$ q.s., $|f|\le\alpha$ q.s.$\}$

$\Downarrow$

$\|f\|_\infty\le\alpha$

(⇒) $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, $|f_n-f|\le\|f_n-f\|_\infty$ q.s., $\forall n\ge1$

$\forall f\in L_\infty\mu$ $\Downarrow$

$\exists A_n\in\mathcal{X}$, $\mu A_n=0$ e $|f_n(x)-f(x)|\le\|f_n-f\|_\infty$, $\forall x\notin A_n$

Seja $N=\bigcup_{n\ge1}A_n$, então $\mu N=0$,

se $x\notin N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\le\|f_n-f\|_\infty$, $\forall n\ge1$

(⇒) $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \geq 1\ n\geq n_0\ \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon$ Ex medida 23/10

$\Downarrow$

$\forall x \notin N,\ \forall n\geq n_0,\ |f_n(x)-f(x)| \leq \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon.$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ em $X\setminus N$

(⇐) Suponhamos que $\exists N\in\mathcal{X},\ \mu N=0$ tal que $f_n|_{X-N} \xrightarrow{u} f|_{X-N}$

Vamos provar que $\|f_n-f\|_\infty \to 0$.

Seja $\varepsilon>0$, como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $X\setminus N$, $\exists n_0\geq 1,\ \forall n\geq n_0$,

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2,\ \forall x\notin N. \Rightarrow \|f_n(x)-f(x)\|_\infty \leq \varepsilon/2<\varepsilon.$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0,\ \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

(3) $(X,\mathcal{X},\mu)$ espaço de medida finita, $1\leq p<q<+\infty$,

$f_n\ X\to\mathbb{R}$, funções mensuráveis, $f:X\to\mathbb{R}$ função mensurável.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_q} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$. $\{$ $f:X\to\mathbb{R}$ mensurável, $1\leq p<+\infty$, $\|f\|_p=\left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}$,

$p, q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\{$Hölder

$\Rightarrow \int_X |fg|\,d\mu \leq \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}\left[\int_X |g|^q d\mu\right]^{1/q},\quad 1\leq p<q<+\infty$

$(\|f_n-f\|_q\to 0) \Rightarrow (\|f_n-f\|_p\to 0)$ $\}$ $p<q \Rightarrow r=\frac{q}{p}>1. \Rightarrow r>1$ tem-se $s>1$ seu conjugado.

$\|f_n-f\|_p^p = \int_X |f_n-f|^p d\mu,$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ meu aí certeza dum fato

$= \int_X |f_n-f|^p\cdot 1\, d\mu \leq \left[\int_X (|f_n-f|^p)^r\right]^{1/r}\left[\int_X 1^s d\mu\right]^{1/s} =$

$= \left[\int_X |f_n-f|^q d\mu\right]^{1/r}\left[\mu X\right]^{1/s}$

$\Rightarrow \|f_n-f\|_p^p \leq (\|f_n-f\|_q^q)^{1/r}(\mu X)^{1/s},\quad \|f_n-f\|_p \leq \|f_n-f\|_q^{\frac{q}{pr}}\cdot(\mu X)^{1/sp}$

$\frac{q}{pr}=\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{r}=r\cdot\frac{1}{r}=1$

$\big|\|u\|-\|v\|\big| \leq \|u-v\|$

$\|f_n-f\|_p \leq \underbrace{\|f_n-f\|_q}_{\substack{\downarrow\ n\to\infty^+ \\ 0}}(\mu X)^{1/sp}$

Logo, $\|f_n-f\|_p\to 0$ $\}$ $f(x)=1/x,\ f(x)-f_n(x)=\frac{1}{x}\chi_{]n,+\infty]}$

$\|f-f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\chi_{]n,+\infty]}\right)^2 dx = \int_n^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$

⇒ $(X,\mathcal{X},\mu)$, espaço de medida, $(f_n:X\to\mathbb{R})_{n\geq 1}$ em $L_p(\mu)$, $1\leq p<+\infty$, $f:X\to\mathbb{R}$, $f\in L_p(\mu)$, $f_n\to f$ q.s.

Prove que

$(\|f_n-f\|_p\to 0) \Leftrightarrow (\|f_n\|_p\to\|f\|_p)$

(⇒) (i) $\|f_n-f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow (\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty^+]{} \|f\|_p) \longrightarrow 0$ //

$\Updownarrow$

$\big|\|f_n\|_p-\|f\|_q\big|\to 0,$

$0\leq \big|\|f_n\|-\|f\|_p\big| \leq \underbrace{\|f_n-f\|_p}_{\substack{\downarrow \\ 0}}.$ // $\{$ $\Rightarrow \big|\|f_n\|-\|f\|_p\big|\to 0$ $\hookrightarrow \|f_n\|_p\to\|f\|_p$

TCDL: $f_n\ X\to\mathbb{R}$, mens. $f:X\to\mathbb{R}$ mens. $f_n\to f$ q.s.

$g:X\to\mathbb{R}$ integrável, $|f_n|\leq g$, q.s., $\forall n\geq 1$.

$\Rightarrow \int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu.$

TCDLG $f_n, f, f_n \to f$ q.s

Ex. [illegible] 23/10

$g_n\ X \to \mathbb{R}$ integrável
$g\ X \to \mathbb{R}$ integrável

$\left\{ \begin{array}{l} g_n \to g \text{ q.s} \\ \int_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu \end{array} \right\} = \int_X f d\mu \to \int_X f d\mu.$

$|f_n| \leq g_n, \forall n \geq 1$

$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$

$? \ \|f_n - f\|_p \to 0 ?$, $\int |f_n - f|^p d\mu \to 0$, $f_n \to f \Rightarrow (f_n - f) \to 0$

$\Downarrow$

$|f_n - f|^p \to 0$

$|f_n - f|^p \to 0$

$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$

domina por [illegible]

g_n → cada g_n é integrável.

$\to 2^p(|f|^p + |f|^p)$

$\|f_n\|_p \to \|f\|_p \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$

$g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \to g = 2^p(|f|^p + |f|^p)$

$\int_X g_n d\mu = 2^p\left[\int_X |f_n|^p d\mu + \int_X |f_n|^p d\mu\right]$

$\Downarrow \qquad \downarrow$

$(\|f_n\|_p^p \qquad \|f\|_p^p)$

$\Downarrow$

$\|f\|_p^p + \|f\|_p^p$ → hipóts.

Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} dx = 0$$

usando $a > 0$

$$f_n(x) = \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} = \frac{n^2 x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{e^{n^2x^2}}, \forall x \geq a > 0$$

$\to 0$

$\hookrightarrow \frac{u'}{e^{u}} = \frac{1}{e^u} \to$

$\Rightarrow f(x) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} u = nx \\ du = n dx \end{array} \right.$

$$\int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-u^2} \cdot u du}{\frac{1+u^2}{n}} = \int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\frac{1+u^2}{n^2}} \chi_{[na, +\infty[} du,$$

$h_n(u) = \frac{ue^{-u^2}}{\frac{1+u^2}{n^2}} \chi_{[na, +\infty[} \to 0$ TCDL

$|h_n(u)| \leq ue^{-u^2}$

(3) $u_t + cu_x = ku_{xx}$,

$\left. \begin{array}{l} \tau = t \\ y = x - ct \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\tau(t,x), y(t,x))$

$= u_\tau + u_y(-c)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(\tau, y) = u_\tau \cdot 0 + u_y$

$\partial_t = \partial_\tau - c\partial_y$

$\partial_x = \partial_y$

$u_t = u_\tau - cu_y$

$u_\tau - cu_y + cu_y = ku_{yy}$

$\Rightarrow \{ u_\tau = ku_{yy} \}$

$$u(\tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, y - z)\phi(z) dz$$ é a minha solução

$\Downarrow$

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t, x - ct - z)\phi(z) dz$$

$\frac{-(x-ct-z)^2}{-(z-(x-ct))^2}$

funciona como $y = f \to (x - ct)$

(1) Toda função $f[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua é integrável (Riemann) 4/11 (
medida

(2) Seja $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$, contínua. Considere $\begin{cases} F[a,b]\to\mathbb{R}, \\ x\to F(x)=\int_a^x f(t)dt \end{cases}$

Então F é derivável e $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b]$.

(3) Seja $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Se $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma primitiva de f em $[a,b]$, $(G'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,b])$,

Então
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a),$$

(3') Seja $f\ [a,b]\to\mathbb{R}$, uma função de classe C^1, Então

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a),\ \forall x\in[a,b],$$

$$\Downarrow$$

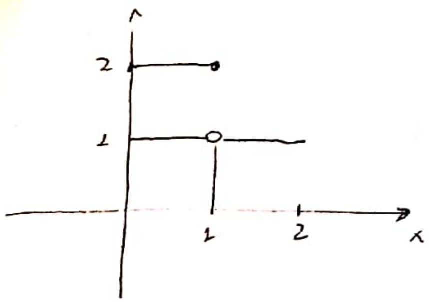
$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt,\ \forall x\in[a,b]$$

importante

(a), Exemplo

$f:[0,2]\to\mathbb{R}$,

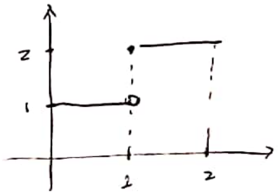
$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{se } t\neq 1\\ 2, & \text{se } t=1\end{cases}$$



$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad \begin{cases} F(x)=\int_0^x 1\,dt = x, \\ F(x)=x,\ \forall x\in[0,2], \end{cases}$$

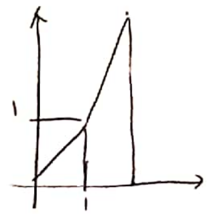
$$F'(x)=1,\ \forall x\in[0,1],\ F'(1)=1\neq f(1)=2,$$

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases} 1, & \text{se } t\in[0,1]\\ 2, & \text{se } t\in[1,2]\end{cases}$



$$\begin{cases} F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ \forall x\in[0,2] \\ 0\leq x<1 \Rightarrow F(x)=\int_0^x 1dt = x \\ 1\leq x\leq 2 \to \\ \quad F(x)=\int_0^1 1dt+\int_1^x 2dt, = 2x-1 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1\\ 2x-1 & 1\leq x\ 2\end{cases}$$



(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \in]0,1], \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

medida

f é derivável em $]0,1]$, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$-1 \leq \qquad \leq 0$

$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} + x^2\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)$, se $x \neq 0$.

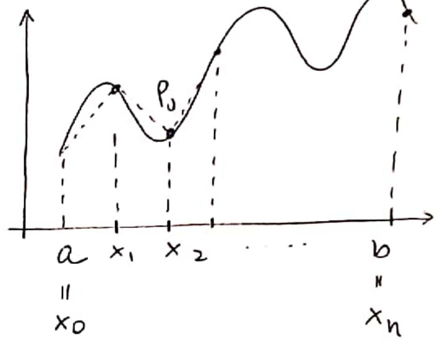
$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{se } x \in]0,1], \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ ↳ estranha

$\left.\begin{array}{l} f:[a,b] \to \mathbb{R}, \text{ derivável, } f' \text{ é limitada} \\ \int_a^b f' = f(b) - f(a) \end{array}\right\} \not\Rightarrow$ falsa

Vito Volterra

⟹ Função de Variação limitada,

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$,



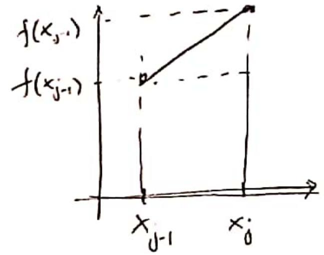
Seja P partição de $[a,b]$

$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_n = b$

$P_j = (x_j, f(x_j))$

β_P: poligonal determinada pela partição P.

comprimento da poligonal, $\ell(\beta_P) = \sum\limits_{j=1}^{n} \| \overline{P_{j-1} - P_j} \| =$ segmento



$= \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$

$a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\leq \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2} + \sqrt{(f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$

logo,

$\ell(\beta_P) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \left(|x_j - x_{j-1}| + |f(x_j) - f(x_{j-1})| \right)$

$* \leq \ell(\beta_P) \leq (b-a) + \sum\limits_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$

pois $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$

$* \quad \sum\limits_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$

↳ se isso explode ⟹ $\ell(\beta_P)$ explode.

04/12 (3)

O gráfico de f é dito retificável, se → posso medir o conjunto medida

$$\sup \{ l(P_f) : P \text{ é partição de } [a,b] \} < +\infty$$

Def: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Considere P uma partição de $[a,b]$,

$$P = a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

a variação de f relativa à partição P é denotada por $V(f,P)$ ou $V(f,P,[a,b])$, e é definida por

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

Def (Camille Jordan, 1881),

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, se

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : P \text{ é partição de } [a,b] \right\} < +\infty$$

neste caso, a variação de f, em $[a,b]$ é definida, por

$$V(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : P \text{ é partição de } [a,b] \right\}$$

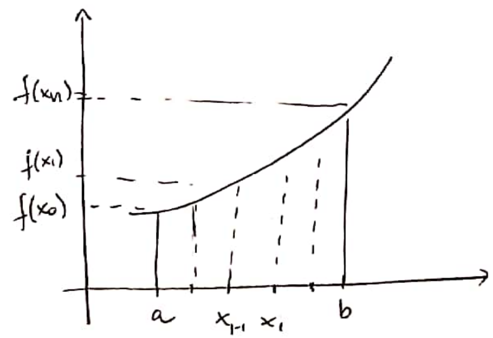
ou

$V(f[a,b])$

O conjunto de todas as funções $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ que são de variação limitada e é indicado por $BV[a,b]$

Exemplos

(1) Toda função $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$, crescente, ou decrescente é de variação limitada. (monotônica)



Prova

Se f crescente e P partição de $[a,b]$,

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

sempre positivo (posso tirar o módulo)

~~V(f,P)=~~ logo,

$$V(f,P) = (\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + \dots + (\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})})$$

$$= f(b) - f(a), \ \forall P,$$

↳ se for decrescente temos $f(a) - f(b)$, logo $f \in BV[a,b]$

(2) Toda função lipschitziana $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.

($f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é dita lipschitziana se existe $M > 0$.

$$|f(u) - f(v)| \leq M|u - v|, \ \forall u, v \in [a,b].$$

Seja P, partição de $[a,b]$

4/11 (9)
medida

$$\Gamma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}$$

$\hookrightarrow$ relaciono com a prop. de lips.

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M|x_i - x_{i-1}| = M \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = M(b-a)$$

$\Downarrow$

$\Gamma(f,P) \leqslant M(b-a)$, $\forall P$ $\therefore < +\infty$,

$\Rightarrow \Gamma(f) \leqslant M(b-a) \Rightarrow f \in BV[a,b]$

---

(3) Corolário, $\}$ TVM $\Rightarrow f(b) - f(a) = \underbrace{f'(\bar{x})}_{\leqslant M}(b-a)$

$\Rightarrow$ que lipschitz

$\Rightarrow$ que é $BV[a,b]$

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável e possui derivada limitada então $f \in BV[a,b]$.

(4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$

- $f \in BV[0,1]$, pois f é crescente
- f não é lipschitziana,

Seja $M>0$, considere $n \in \mathbb{N} : n > M$.

$$|f(1/4n^2) - f(0)| \nleq n \left|\frac{1}{4n^2} - 0\right|$$

Vamos verificar que

$$\left|f\left(\frac{1}{4n^2}\right) - f(0)\right| = \frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{2n} \nleq \frac{1}{4n} \Rightarrow \frac{1}{2n} > \frac{1}{4n} \therefore$$

$$\left|f\left(\frac{1}{4n^2}\right) - f(0)\right| > n\left|\frac{1}{4n^2} - 0\right| > M\left|\frac{1}{4n^2} - 0\right|$$

$\therefore f$ não é lipschitz.

---

(5) $f \in BV[a,b] \Rightarrow f$ é limitada. $\Rightarrow M>0 \Rightarrow |f(x)| \leqslant M$

$a \quad x \quad b$, seja $x \in [a,b]$.

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$\leqslant \underbrace{|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|}_{\Gamma(f,\{a,x,b\})} + |f(a)| \leqslant \underbrace{\Gamma(f)}_{<+\infty} + |a|$$

minha partição

$$\forall x \in [a,b] \ (|f(x)| \leqslant \Gamma(f) + |f(a)|)$$

Vale a volta?

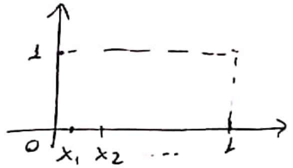
4/12 (5)

medida

$f:[0,1] \to \mathbb{R}$,

racionais

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



P_n. $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = 1$, com $\begin{cases} x_i \in \mathbb{Q} \text{ se } i \text{ é impar}, \\ x_i \in \mathbb{Q} \text{ se } i \text{ é par}, \end{cases}$

$$V(f,P_n) = \overbrace{|\underbrace{f(x_1)}_{1} - \underbrace{f(x_0)}_{0}|}^{1} + \dots + \overbrace{|\underbrace{f(x_{2n})}_{1} - \underbrace{f(x_{2n-1})}_{0}|}^{1} =$$

$$V(f,P_n) = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

logo, $f \notin BV[0,1]$.

medida (1)
06/11

$\Rightarrow$ Func. de Variação limitada.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$P.\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$

$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, f é de variação limitada x

$V(f([a,b]))$

$V(f) = \sup \{ V(f,P) \cdot P$ é partição de $[a,b] \} < +\infty$

(1) f é monotona $\Rightarrow f \in BV[a,b]$

(2) $f \in BV[a,b] \Rightarrow f$ é limitada.

(3) f é lipschitziana $\Rightarrow f \in BV[a,b]$ //

(4) $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{se } x \in]0,1], \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

f é contínua em $[0,1]$.

$\cos \frac{\pi}{2x} = \pm 1 \iff \frac{\pi}{2x} = k\pi \iff x = \frac{1}{2k}$

$\cos \frac{\pi}{2x} = 0 \iff \frac{\pi}{2x} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \iff x = \frac{1}{2k+1}$

$n \geq 1$, $\to n > 1$

$P_n\ 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$

$$V(f,P_n) = \left|\underbrace{f\left(\frac{1}{2n}\right)}_{1/2n} - \underbrace{f(0)}_{\to 0}\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-2}\right) - f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right|$$

$$\dots + \underbrace{\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right|}_{1/2} + \underbrace{\left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}_{1/2}.$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$V(f,P_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1.$$

$n \to \infty^+ \Rightarrow V(f,P_n) \to +\infty \Rightarrow V(f) \to \infty^+$

$\Rightarrow$ Proposição $\quad \|f\| = V(f)$

Seja $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funções de variação limitada e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $f+g, f-g, \alpha f, fg \in BV[a,b]$, $\to$ tem estrutura de esp vet.

$\Rightarrow$ Além disso, se existe $m > 0$, tal que $|g(x)| \geq m > 0$, $\forall x \in [a,b]$, então $1/g \in BV[a,b]$, e $f/g \in BV[a,b]$

Dem.: $f,g \in BV[a,b] \Rightarrow f\cdot g \in BV[a,b]$.

$f,g \in BV[a,b] \Rightarrow \exists\, M_f > 0,\ \exists\, M_g > 0$

$|f(x)| \le M_f$ e $|g(x)| \le M_g$, $\forall x \in [a,b]$.

$P = a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$,

$$V(f\cdot g, P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) + \underbrace{f(x_{i-1})g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_i)}_{0}|$$

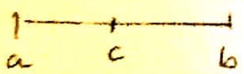
$$= \sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(x_{i-1}))g(x_i) + f(x_{i-1})(g(x_i) - g(x_{i-1}))|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| M_g + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| M_f$$

$$= M_g V(f,P) + M_f V(g,P) \le M_g V(f) + M_f V(g)$$

logo, $(f\cdot g) \in BV[a,b]$ → possui variação limitada em $[a,b]$

Proposição: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $a < c < b$



→ partição

$[a,c], [c,b]$

medida e

06/11

Se $f \in BV[a,c]$ e $f \in BV[c,b] \iff f \in BV[a,b]$

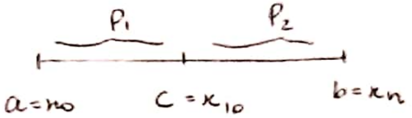
⇒ neste caso,

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) = V(f,[a,b])$$

$f \in BV[a,c]$ e $f \in BV[c,b] \Rightarrow f \in BV[a,b]$

seja

$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$



Caso 1: $\exists\, i_0$; $1 \le i_0 \le n-1$, $x_{i_0} = c$

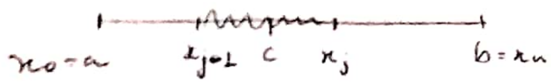
neste caso, considere

$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{i_0} = c\}$,

$P_2 = \{c = x_{i_0}, \dots, x_n = b\}$.

$$V(f,P) = V(f,P_1) + V(f,P_2) \le V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

Caso 2: $\exists\, j$, $1 \le j \le n$, e $x_{j-1} < c < x_j$



$$V(f,P) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

↑ somando a parcela.

$\Rightarrow P^* \cup \{c\}$ $\rightarrow$ Incluiu o c na partição

medida (3)
06/11

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| + |f(x_j) - \underbrace{f(c)+f(c)}_{} - f(x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| + |f(x_j)-f(c)| + |f(c)-f(x_{j-1})| = V(f, P\cup\{c\})$$

$$\leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

$P \quad P\cup\{\cdots\}$ → pontos
$VP \leq VP\cup\{\cdots\}$

P é partição de $[a,b]$,

$\Downarrow$

$$V(f,P) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

$$V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$$

$f \in BV[a,b] \Rightarrow f\in BV[a,c]$ e $f \in BV[c,b]$

$$V(f,P,[a,c]) \leq V(f,P,[a,c]) + |f(b)-f(c)|$$

$\Rightarrow V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) = \sup\{V(f,P_1,[a,c]) : P_1$ é partição de $[a,c]\}$

$+ \sup\{V(f,P_2,[c,b]) : P_2$ é partição de $[c,b]\}$

$= \sup\{V(f,P_1,[a,c]) + V(f,P_2,[c,b]) : P_1$ é partição de $[a,c]$ e P_2 é partição de $[c,b]\}$.

~~$\Rightarrow \sum |f(x_i)-f(x_{i-1})|$~~

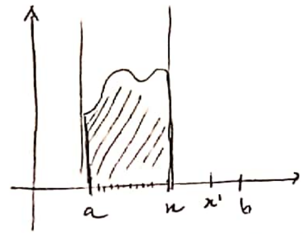
$= \sup\{V(f,P,[a,b]) . P$ é partição de $[a,b]$ e $c\in P\}$

$\leq \sup\{V(f,P,[a,b]) . P\} = V(f,[a,b])$

Teorema (Jordan), Toda função $f.[a,b]\to\mathbb{R}$ de variação limitada é a diferença de duas funções crescentes.

$\Rightarrow$ Dem. Seja $f.[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in BV[a,b]$,

Considere $V:[a,b]\to\mathbb{R}$, $V(x) = V(f,[a,x])$, $\forall x\in[a,b]$,



V é crescente e $V(x)\geq 0$, $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) = V(x) - \underbrace{(V(x)-f(x))}_{h(x)}, \forall x\in[a,b]$$

$\Rightarrow$ Vamos provar que h é crescente, isto é,

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $(x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1)\leq h(x_2))$

$$V(x_1) - f(x_1) \leq V(x_2) - f(x_2)$$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \underbrace{V(f,[a,x_2]) - V(f,[a,x_1])}_{V(f,[x_1,x_2])}$$

medida ⑥
06/11

[⇐] Como $\{x_1, x_2\}$ é uma partição de $[x_1, x_2]$, vale que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq V(f, [x_1, x_2]);$$

mas $f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)|$.

logo,

$$f(x_2) - f(x_1) \leq V(f, [x_1, x_2]) = V(x_2) - V(x_1)$$
$$\Downarrow$$
$$V(x_1) - f(x_1) \leq V(x_2) - f(x_2)$$

⇒ Proposição, seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, uma função Lebesgue-Integrável e λ a medida de Lebesgue em $[a,b]$.

Considere

$$F: [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \, d\lambda, \quad \forall x \in [a,b]$$

Então $F \in BV[a,b]$.

Dem 1:

Seja P, partição de $[a,b]$,

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$V(F, P) = \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \longrightarrow$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{[a,x_i]} f d\lambda - \int_{[a,x_{i-1}]} f d\lambda \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{]x_{i-1}, x_i]} f \, d\lambda \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| \, d\lambda = \int_{[a,b]} |f| \, d\lambda \Rightarrow V(F, P) \leq \int_{[a,b]} |f| \, d\lambda, \ \forall P$$
$$\Downarrow$$
$$F \in BV[a,b]$$

Dem 2. f integrável ⇒ $\underset{\geq 0}{f^+}, \underset{\geq 0}{f^-}$ integrável.

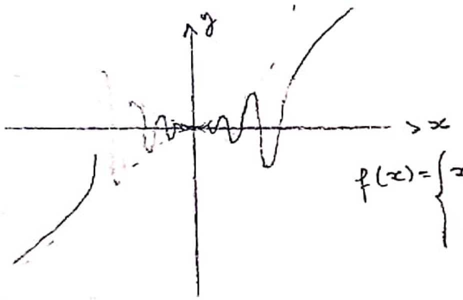
$$F(x) = \int_{[a,x]} |f| d\lambda = \underbrace{\underbrace{\int_{[a,x]} f^+ d\lambda}_{\text{cresc}} - \underbrace{\int_{[a,x]} f^- d\lambda}_{\text{cresc}}}_{\text{é crescente logo é BV}}$$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Exemplo de Volterra: uma função integrável com derivada não integrável

Para cada $a \in \mathbb{R}$, definimos a função $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_a(x) = \begin{cases} (x-a)^2 sen\frac{1}{x-a} & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Temos que f_a é diferenciável:

$$f'_a(x) = \begin{cases} 2(x-a)sen\frac{1}{x-a} - cos\frac{1}{x-a} & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Observe que

$$\frac{1}{x-a} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad x - a = \frac{1}{k\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad x = a + \frac{1}{k\pi}$$

Nesse caso, $f'_a(a + \frac{1}{k\pi}) = -cos(k\pi) = +1$ ou -1,

conforme a paridade de k. Como f'_a é contínua no intervalo $[a + \frac{1}{(k+1)\pi}, a + \frac{1}{k\pi}]$, f'_a se anula em algum ponto entre $a + \frac{1}{k\pi}$ e $a + \frac{1}{(k+1)\pi}$, .

Considere a, $b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Definimos

$$\alpha_{a,b} = sup\{x : a < x < \frac{a+b}{2} \ e \ f'_a(x) = 0\}$$

e seja $f_{a,b} :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{se } a < x \leq \alpha_{a,b} \\ f_a(\alpha_{a,b}) & \text{se } \alpha_{a,b} \leq x \leq b - (\alpha_{a,b} - a) \\ f_a(b + a - x) & \text{se } b - (\alpha_{a,b} - a) \leq x < b \end{cases}$$

Assim, $f_{a,b}(x)$ vale $f_a(x)$ em $]a, \alpha_{a,b}]$, é constante e igual a $f_a(\alpha_{a,b})$ em $[\alpha_a, \frac{a+b}{2}]$ e, em $[\frac{a+b}{2}, b[$, é apenas a reflexão do gráfico de f_a restrita ao intervalo $[a, \frac{a+b}{2}]$ ao longo do eixo $x = \frac{a+b}{2}$.

Vale que $f_{a,b}(x) = -f_b(x)$, $\forall\, x \in [b - (\alpha_{a,b} - a), b[$. Veja porquê.

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (b + a - x - a)^2 sen\dfrac{1}{b + a - x - a} & \text{se } b + a - x \neq a \\ 0 & \text{se } b + a - x = a \end{cases}$$

Logo,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (b - x)^2 sen\dfrac{1}{b - x} & \text{se } x \in [b - (\alpha_{a,b} - a), b[\\ 0 & \text{se } x = b \end{cases}$$

e portanto,

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (x - a)^2 sen\dfrac{1}{x - a} & \text{se } a < x \leq \alpha_{a,b} \\ f_a(\alpha_{a,b}) & \text{se } \alpha_{a,b} \leq x \leq b - (\alpha_{a,b} - a) \\ (b - x)^2 sen\dfrac{1}{b - x} & \text{se } b - (\alpha_{a,b} - a) \leq x < b \end{cases}$$

Temos que

$|f_{a,b}(x)| \leq \max\{(b - x)^2, (a - x)^2\}$, $\forall\, x \in]a, b[$.

Além disso,

$f_{a,b}$ é diferenciável e $|f'_{a,b}(x)| \leq 2(b - a) + 1$.

Com efeito:

para $a < x < \alpha_a$, $\quad |f'_{a,b}(x)| = |2(x - a)sen\frac{1}{x-a} - cos\frac{1}{x-a}| \leq 2(b - a) + 1$

para $b - (\alpha_{a,b} - a) < x < b$, $\quad |f'_{a,b}(x)| = | - 2(b - x)sen\frac{1}{b-x} - cos\frac{1}{b-x}| \leq 2(b - a) + 1$.

Portanto, $|f'_{a,b}(x)| \leq 2(b - a) + 1$, $\forall\, x \in]a, b[$.

Para x próximo de a, temos que

$$f'_{a,b}(x) = 2(x - a)sen\frac{1}{x - a} - cos\frac{1}{x - a}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, podemos escolher x próximo de a tal que $\frac{1}{x-a} = n\pi$, e portanto, $f'_{a,b}(x) = +1$ ou -1.

Da mesma forma, próximo de b, $f'_{a,b}(x)$ oscila infinitamente entre -1 e $+1$.

Passemos agora à construção da função referida como objetivo deste texto.

Seja $0 < \alpha < 1$ e C_α o conjunto de Cantor de medida positiva dado por

$$C_\alpha = [0,1] - \cup_{n\geq 1}[\cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_j^{n-1}]$$

onde I_j^{n-1} é um dos intervalos abertos removidos no n-ésimo estágio da construção de C_α.

Considere $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C_\alpha \\ f_{a,b}(x) & \text{se } x \in I_j^{n-1} =]a,b[, \text{ para algum } n \geq 1, \text{ e algum } j,\ 1 \leq j \leq 2^{n-1} \end{cases}$$

Para $x \notin C_\alpha$, F é diferenciável em x e $F'(x) = f'_{a,b}(x)$, onde $x \in]a,b[$.

Seja, pois, $x \in C_\alpha$. Então $F(x) = 0$. Dado $\eta > 0$ qualquer, considere $y \in [0,1]$ tal que $|y - x| < \eta$. Temos:

$$y \in C_\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = 0$$

$$y \notin C_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, n \geq 1, \exists\, j, 1 \leq j \leq 2^{n-1} \text{ com } y \in I_n^j =]a,b[.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos $|a - x| < |b - x|$. Nesse caso,

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{F(y)}{y-x}\right| = \left|\frac{(y-a)^2 sen\frac{1}{y-a}}{y-x}\right| \leq \frac{|y-a|^2}{|y-x|} \leq \frac{|y-x|^2}{|y-x|} = |y-x| < \eta.$$

Então $F'(x) = 0$, $\forall\, x \in C_\alpha$.

Concluimos que F é diferenciável em $[0,1]$. Além disso,

$$|F'(x)| \leq |f'_{a,b}(x)| \leq 3, \ \forall\, x \in [0,1].$$

Mas F' não é contínua em nenhum ponto de C_α. Com efeito:

Seja $x \in C_\alpha$ e $\delta > 0$ arbitrário. Vale que

$$\exists\, y \notin C_\alpha : |y - x| < \delta \text{ e} \begin{cases} F'(y) = f'_{a,b}(y) = +1 \text{ ou } -1 \\ F'(x) = 0 \end{cases}$$

Como $m(C_\alpha) > 0$, F' é descontínua num conjunto de medida positiva, e portanto, F' não é integrável.

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (Lebesgue)-Integrável.

$F:[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \, \underbrace{dm}_{\text{medida de Lebesgue}} = \int_a^x f(t)\,dt$$

1) F é uniformemente contínua.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ (|x-y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon)$$

$$(*)\ \underbrace{f \in \mathcal{L}_1(m)}_{f \text{ integrável}} \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall A \in \mathcal{M}\ \left(mA < \delta \Rightarrow \int_A |f|\,dm < \varepsilon\right)\right)$$

Seja $\varepsilon > 0$. Considere $\delta > 0$, como em $(*)$, considere $x, y \in [a,b]$ com $|y-x| < \delta$. Sem perda de generalidade (SPG), suponhamos $x \leq y$. Então temos $A = [x,y]$, $mA = |y-x| < \delta$. Por $(*)$, $\int_{[x,y]} |f|\,dm < \varepsilon$.

$$\Rightarrow |F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f\,dm - \int_a^x f\,dm \right| = \left| \int_x^y f\,dm \right| \leq \int_{[x,y]} |f|\,dm < \varepsilon.$$

2) Seja $\varepsilon > 0$, e considere $\delta > 0$, como em $(*)$.

Considere $(]c_i, d_i[)_{1 \leq i \leq n}$ uma coleção finita e disjunta de subintervalos de $[a,b]$ com

$$\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta.$$

Seja $A = \bigcup_{i=1}^n]c_i, d_i[$, Então $mA < \delta$

$\Downarrow$

$\int |f|\,dm < \varepsilon$ por $(*)$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(d_i) - F(c_i)| = \cancel{\sum}$ $\Rightarrow$

11/12 (1)

medida

$$= \sum_{i=1}^n \left| \int_a^{d_i} f\,dm - \int_a^{c_i} f\,dm \right| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{c_i}^{d_i} f\,dm \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[c_i,d_i]} |f|\,dm$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^n [c_i,d_i]} |f|\,dm = \int_A |f|\,dm < \varepsilon.$$

funç absolutamente contínuas

Def. Uma função $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, é dita absolutamente contínua (a.c.), se possui a seguinte propriedade.

p/ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: se $(]c_i, d_i[)_{1 \leq i \leq n}$ é uma coleção finita de subintervalos abertos de $[a,b]$, dois a dois disjuntos, e $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^n |g(d_i) - g(c_i)| < \varepsilon$

Ex 1: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então a função $F(x) := \int_a^x f\,dm$, $\forall x \in [a,b]$, é absolutamente contínua.

Exemplo 2:

não vale a volta

Toda função $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana é absol. contínua

$$|g(u) - g(v)| \leq M|u - v|$$

$g(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [a,b]$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0,1]$ — é derivável quase sempre.

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x}$ → mas não é lipschitziana

é abs contínua

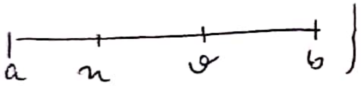
⇒ Proposição:

Se $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ é a.c. (abs. cont.) então $g \in BV[a,b]$ (var. limitada)

////// ε medida

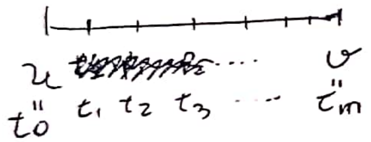
Dem:

Seja $\varepsilon = 1$, e considere o δ um $\delta > 0$ correspondente a absoluta continuidade de g.



considere $[u,v] \subseteq [a,b]$, com $v - u < \delta$

$\Downarrow$



P. partição de $[u,v]$.

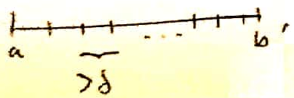
$P: u = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_m = v$

$V(g,[u,v],P) = \sum_{j=1}^{m} |g(t_j) - g(t_{j-1})|$

$$\sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) = v - u < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |g(t_j) - g(t_{j-1})| < \underset{\varepsilon}{1}.$$

$\Rightarrow V(g,[u,v]) \leq 1.$ } sup.

no intervalo $[u,v] < \delta$ é de variação limitada



→ divide a,b em intervalos menores que δ ⇒ todo tem var. limitad.

Sejam $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_k = b$,

com $\Delta x_i < \delta$, $1 \leq i \leq k$.

$$V(g,[a,b]) = \underbrace{V(g,[x_0,x_1])}_{<1} + \underbrace{V(g,[x_1,x_2])}_{<1} + \dots + \underbrace{V(g,[x_{k-1},x_k])}_{<1}$$

$V(g,[a,b]) < k < +\infty$. ⇒ que é de var. limitada.

Proposição: Seja $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função a.c., Então

(a) Se $N \subseteq [a,b]$, $mN = 0$ então $m(g(N)) = 0$.

(b) Se $E \subseteq [a,b]$ é um conj mensurável, então $g(E)$ é mensurável.

Dem: de (b) a partir de (a)

Seja $E \subseteq [a,b]$ conj. mensurável. ~~[illegible]~~

Então existe $H \subseteq [a,b]$, um conjunto F_σ (matéria do começo do semestre), isto é, H, pode ser expresso como $H = \bigcup_{n \geq 1} F_n$, onde F_n é fechado $\forall n \geq 1$, e existe $N \subseteq E$, com $mN = 0$, tal que $E = H \cup N$

$$E = H \cup N = \left[\bigcup_{n\geq1} F_n\right] \cup N \Rightarrow g(E) = \left[\bigcup_{n\geq1} g(F_n)\right] \cup g(N)$$

$g(N)$ é mens, $m(g(N)) = 0$,

→ união de mens portanto mensurável.

→ g é contínua, leva compacto em compacto.

→ func a.c → leva conj de medida nula p/ conj de medida nul.

⇒ Sabe que a função de Lebesgue $\varphi: [0,1] \to [0,2]$, não é absolutamente crescente.

$\psi(x) = x + \varphi(x)$

$\varphi [0,1] \to [0,1]$, φ é contínua, φ é crescente.

11111 3 media

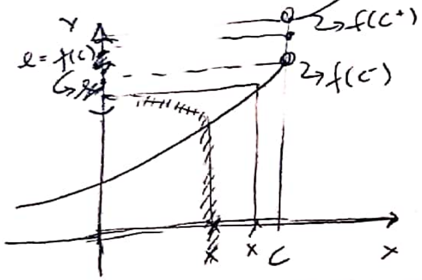
Exercícios,

(1) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função crescente. → não precisa ser contínua

Então, p/ todo $c \in \mathbb{R}$, existem $\begin{cases} f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) \\ f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x) \end{cases}$

Se $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : f$ é descontínua em $x\}$

então $D(f)$ é enumerável.



Seja $c \in \mathbb{R}$.

$x < c \Rightarrow f(x) \leq f(c)$

$A = \{f(x) : x < c\}$, é limitado superiormente

$\Downarrow$

*

$\Rightarrow \exists \sup A = l$. Prove que $\lim_{x \to c^-} f(x) = l = f(c^-)$

↳ limite à esquerda e à direita do ponto c.

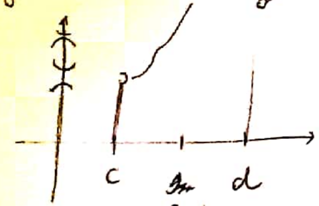
Ex:

$y = \begin{cases} \lim \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

uma função assim, só pode ser descontínua e uma quantidade enumerável de pontos.

$D(f)$ é enumerável.

Sejam $c, d \in D(f)$, $c < d$.



$\inf\{f(x) : x > c\} \leq f(z)$.

$f(c^+) = \inf\{f(x) : x > c\}$

$\Downarrow$

$f(c^+) \leq f(z)$, $f(d^-) = \sup\{f(x) : x < d\}$

$\Rightarrow\ ]f(c^-), f(c^+)[\ \cap\ ]f(d^-), f(d^+)[\ = \emptyset \Rightarrow$ V. quantidade enumerável

$\Rightarrow$ Como existe no máximo uma quantidade enumerável de intervalos abertos, não vazios dois a dois disjuntos, então $D(f)$ é enumerável.

~~$f: [a,b] \to \mathbb{R}$.~~

Teorema de Lebesgue-Young

Toda função monotônica $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável quase sempre.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, uma função integrável, $F(x) = \int_a^x f\, dm$,

F é absolutamente contínua, $\Rightarrow \Rightarrow$ der. quase sempre.

$\Rightarrow f$ A.C $\Rightarrow$ BV $\Rightarrow f_1 - f_2 \Rightarrow$ der. quase sempre.

Teorema de Saks

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, → uma função, e seja $\alpha > 0$.

Considere $E_\alpha = \{x \in [a,b] : \exists f'(x)$ e $|f'(x)| \leq \alpha\}$:

Então $m^*(f(E_\alpha)) \leq \alpha\, m^*(E_\alpha)$

Corolário: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função e

$E=\{x\in[a,b] : \exists f'(x) \text{ e } f'(x)=0\}$, então

$m^*(f(E))=0$.

Dem: $\forall n\geq 1$, considere $E_{1/n}=\{x\in[a,b] . \exists f'(x) \text{ e } |f'(x)|\leq 1/n\}$

$\Rightarrow$ Pelo teorema de Saks.

$$m^*(f(E_{1/n}))\leq \frac{1}{n}\cdot m^*(E_{1/n})\leq \frac{1}{n}(b-a)$$

$E\subseteq E_{1/n}$, $\forall n\geq 1$. $\Rightarrow$ $f(E)\subseteq f(E_{1/n})$, $\forall n\geq 1$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow m^*(f(E))\leq m^*(f(E_{1/n}))\leq 1/n(b-a)$;

$\Rightarrow m^*(f(E))\leq \frac{b-a}{n}$, $\forall n\geq 1$

$$\Downarrow$$

$$m^*(f(E))=0$$

$\Rightarrow$ Teorema:

Se $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é a c e $g'(x)=0$, q.s em $[a,b]$

então g é constante em $[a,b]$.

Dem: Seja $E=\{x\in[a,b] . g'(x)=0\}$ $\Rightarrow$ E é mensurável

$E^c=[a,b]-E$, $g'(x)=0$, q.s $\Rightarrow m(E^c)=0$

$\Rightarrow$ g é absolutamente contínua

$\Rightarrow m(g(E^c))=0$.

$[a,b]=E\cup E^c$, $g([a,b])=g(E)\cup g(E^c)$

$\Rightarrow m(g(E^c))=0$

$\Rightarrow$ Pelo corolário anterior, a medida $m(g(E))=0$.

$\Rightarrow m(g[a,b])=0$.

g é contínua $\Rightarrow$ $g([a,b])=[c,d]$

$m([c,d])=0 \Rightarrow c=d$.

$\Rightarrow$ g é constante

$\Rightarrow f:[a,b]\to\mathbb{R}$, integrável, $(f\in\mathcal{L}_1[a,b])$

B/11 medida ①

$$F(x)=\int_{[a,x]} f\,dm,\quad \forall x\in[a,b];$$

Proposição: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, crescente, então f é derivável quase sempre e $\int_a^b f'\,dm \le f(b)-f(a)$. {Lebesgue/Young}

$\Rightarrow$? $\int_a^b f'(t)\,dt \overset{?}{=} f(b)-f(a)$.

Dem:

Pelo teorema de Lebesgue-Young, se f é crescente, então f é derivável q.s.

Para todo $n\geq 1$, considere

$$\underbrace{f_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{1/n}}_{\text{é uma função mens. pois } f(x) \text{ é mens.}}, \quad \text{onde fazemos } f(x)=f(b),\ \forall x\geq b$$

$f_n\to f'$ q.s.

f é crescente $\Rightarrow f_n(x)\geq 0,\ \forall x.$

pelo lema de Fatou,

$$\int_a^b f'\,dm \le \underline{\lim}\int_a^b f_n\,dm \le$$

$$\int_a^b f_n\,dm=\int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{1/n}\,dx = n\int_a^b f(x+1/n)-f(x)\,dx$$

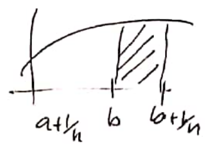
$$\Rightarrow n\left[\int_a^b f(x+1/n)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right]=$$

$t=x+1/n$

$\Rightarrow \int_a^b f(x+1/n)\,dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(t)\,dt$ ∫ Importante

$$= n\left[\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$= n\left[\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx-\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx - \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,dx\right]=$$



$$= n\left[\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx-\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\right]$$

$$= \int_a^b f_n\,dm = n\left[\int_b^{b+1/n} f\,dm-\underbrace{\int_a^{a+1/n} f\,dm}_{*}\right] (**)$$ Voltando

$$\Rightarrow n\int_b^{b+1/n} f\,dm = n\int_b^{b+1/n} f(b)\,dm = n f(b)\cdot\frac{1}{n} = f(b),\ \text{p/}\forall b.$$

$* \Rightarrow \int_a^{a+1/n} f\,dm$ $\quad f(a)\le f(x)\le f(a+1/n)$, $\forall x\in[a,a+1/n]$

$$n\int_a^{a+1/n} f(a)\,dm \le n\int_a^{a+1/n} f\,dm \le n\int_a^{a+1/n} f(a+\tfrac{1}{n})\,dm$$

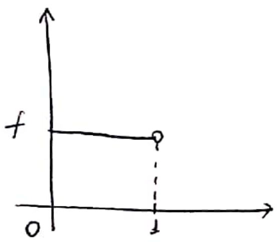
$\le f(a+1/n)$

$(**) \leq f(b) - f(a)$

$$\Rightarrow \int_a^b f' \, dm \leq \underline{\lim} \int_a^b f_n \, dm \leq f(b) - f(a)$$ //

$\Rightarrow f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



f é decrescente, $f' = 0$ q.s

$$\int_0^1 f' \, dm = 0 \overset{?}{\leq} \underbrace{f(1)}_{0} - \underbrace{f(0)}_{1} \quad \text{(absurdo)}$$

$\Rightarrow$ mostra que a prova ~~não vale para~~ pode não valer, quando a seq. é decrescente.

$\varphi : [0,1] \to [0,1]$, função de Cantor é crescente,

$\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$,

$\varphi'(x) = 0$, $\forall x \notin C$

$\Downarrow$

$\varphi' = 0$ q.s

$$\underbrace{\int_0^1 \varphi' \, dm}_{= 0} \leq \underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{1}$$

13/11 medida (2)

relembrando

$\Rightarrow f : X \to \mathbb{R}$, integrável //

$\hookrightarrow$ são eq.v. $\int_E f \, d\mu = 0$, $\forall E \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f \equiv 0$ q.s

$f\ [a,b] \to \mathbb{R}$, Lebesgue integrável, $\forall x \in [a,b]$

$$\left(\cancel{\int_a^x} \int_{[a,x]} f(t) \, dt = 0 \right) \Rightarrow f \equiv 0 \text{ q.s}$$

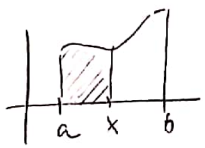
$\Rightarrow$ Teorema:

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, integrável. $f \geq 0$, e considere

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \, dm, \quad \forall x \in [a,b]$$

Então F é derivável q.s. $F'(x) = f(x)$, q.s em $[a,b]$.

$\Rightarrow$ Suponhamos, primeiramente, que f seja limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $0 \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$.



$f \geq 0 \Rightarrow F$ é crescente $\Rightarrow F$ é derivável.

Para todo $n \geq 1$, considere

23/11 medida (3)

$$F_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}, \quad F(x) = F(b),\ \forall x \geq b$$

$F_n \to F'$ q.s

$$|F_n(x)| = \left| \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n} \right| = n \left| \int_a^{x+1/n} f\,dm - \int_a^{x} f\,dm \right| =$$

$$= n \left| \int_x^{x+1/n} f\,dm \right| \leq n \int_x^{x+1/n} f\,dm, \text{ pois } f \text{ é positiva.}$$

$$\leq n \int_x^{x+1/n} M\,dm = nM\frac{1}{n} = M$$

função 1 $\quad f = 1$

$|F_n(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$, $g(x) = M$, $\forall x \in [a,b]$, é integrável

$\Rightarrow$ TCDL (Teorema da converg Dominada de Lebesgue)

$$\int_a^c F_n(x)\,dx \to \int_a^c F'(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_a^c F_n(x)\,dx = \int_a^c \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n}\,dx = n\left[\int_a^c F(x+1/n)\,dx - \int_a^c F(x)\,dx\right]$$

$$= n\left[\int_{a+1/n}^{c+1/n} F(x)\,dx - \int_a^c F(x)\,dx\right]$$

mesmo processo visto anteriormente

$$= n\left[\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} F(x)\,dx\right]$$

#

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm, \quad \forall x \in [a,b]$$

$$n\int_c^{c+1/n} F(c)\,dx \leq n\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx \leq n\int_c^{c+1/n} F(c+1/n)\,dx$$

$$F(c) \leq n\int_c^{c+1/n} F(x)\,dm \leq F(c+1/n)$$

$$F(c) \leq n\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx \leq F(c+1/n)$$

$$-\ F(a) \leq n\int_a^{a+1/n} F\,dm \leq F(a+1/n)$$

subtraindo membro a membro

$$F(c) - F(a) \leq n\left[\int_c^{c+1/n} F(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} F\,dm\right] \leq F(c+1/n) - F(a)$$

$$\Rightarrow F(c) - F(a+1/n) \leq \int_a^c F_n(x)\,dx \leq F(c+1/n) - F(a)$$

$n \to \infty^+ \qquad\qquad n \to \infty^+$

$$F(c) - F(a)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^c F_n(x) = \underbrace{F(c) - F(a)}_{0} = F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

15/9/1

Medida

4

$F_n \longrightarrow F'$, $\underbrace{|F_n| \leq g}_{\text{dominada}}$ $\Big| \Rightarrow \int_a^c F_n(x)\,dx \to \int_a^c F'(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^c F'(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^c [f'(x) - f(x)]\,dx = 0, \ \forall c \in [a,b]$$

//

$\Rightarrow F'(x) - f(x) = 0$ q.s

$F'(x) = f(x)$. q.s

Teorema

seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável

$F(x) = \int_{[a,x]} f\,dm$, $(f = f^+ - f^-)$

$\left(\int_a^x f\,dm\right)' = f(x)$ (q.s) $\rightarrow$

↳ f precisa ser absolutamente contínua.

Teorema:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, absolutamente contínua, então f é derivável q.s, f' é integrável (Lebesgue), e

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a), \ \forall x \in [a,b]$$

---

f é a.c $\Rightarrow f \in BV[a,b] \Rightarrow$ Variação limitada.

$\Rightarrow \exists\ f_1, f_2$ crescentes $f = f_1 - f_2$,

f_1, f_2 crescentes $\Rightarrow$ f_1 e f_2 são deriváveis q.s $\Big\} \Rightarrow f$ é derivável q.s

f_1 e f_2 crescentes $\Rightarrow$ f_1' e f_2' são integráveis,

se $f = f_1 - f_2 \Rightarrow f' = f_1' - f_2'$ q.s $\Big\} \Rightarrow f'$ integrável

---

$\Rightarrow$ Portanto, podemos considerar a função $G(x) = \int_{[a,x]} f'(t)\,dt$,

---

f é absolutamente contínua, f é a.c

$G(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$ é a.c $\Big\} \Rightarrow f(x) - G(x)$ é a.c em $[a,b]$

medida
B111
5

$(f(x)-G(x))' = f'(x)-G'(x) = f'(x)-f'(x).$

$(f(x)-G(x))' = 0$ q.s $f-G$ e.a.c

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}: f(x)-G(x)=k, \forall x \in [a,b]$

$\Downarrow$

$f(a)-\underbrace{G(a)}_{0} = k. \Rightarrow k = f(a)$

$f(x)-G(x) = f(a), \quad f(x) = G(x)+f(a)$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f é a.c $\Rightarrow \int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a).$

$\Rightarrow f$ é integrável $\Rightarrow F(x)$ é a.c

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Derivada nula qs e função absolutamente contínua

PROPOSIÇÃO: Sejam $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{R}$. Então $m^*(\cup_{n\geq 1} E_n) = \lim_{n\to+\infty} m^*(E_n)$
(Os conjuntos E_n não precisam necessariamente ser mensuráveis.)

Demonstração: Seja $E = \cup_{n\geq 1} E_n$, e considere $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto G_δ tal que $E \subseteq A$ e $m^*(E) = m(A)$.

Para cada $n \geq 1$, existe $C_n \subseteq \mathbb{R}$ conjunto G_δ com $E_n \subseteq C_n$ e $m^*(E_n) = m(C_n)$.

Considere $A_n = C_n \cap A$. Então A_n também é G_δ, $E_n \subseteq A_n \subseteq A$ e $m^*(E_n) = m(A_n)$. Temos, pois,

$$\left.\begin{array}{l} E = \cup_{n\geq 1} E_n \subseteq \cup_{n\geq 1} A_n \subseteq A \\ \\ m^*(E) = m(A) \end{array}\right\} \Rightarrow m^*(\cup_{n\geq 1} A_n) = m^*(A)$$

Embora tenhamos $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, não é necessariamente verdade que $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$.

Considere $B_n = \cap_{j\geq n} A_j$, $\forall\, n \geq 1$. Então temos que $B_n \subseteq B_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$. Além disso,

$(j \geq n \Rightarrow E_n \subseteq E_j \subseteq A_j) \Rightarrow E_n \subseteq \cap_{j\geq n} A_j \Rightarrow E_n \subseteq B_n \subseteq A_n$.

Como $m^*(E_n) = m(A_n)$, resulta que $m^*(E_n) = m(B_n) = m(A_n)$. Dessa forma, (B_n) é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis. Logo,

$$m(\cup_{n\geq 1} B_n) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} m^*(E_n)$$

Por sua vez,

$E_n \subseteq B_n \subseteq A_n, \forall\, n \geq 1 \Rightarrow \cup_{n\geq 1} E_n \subseteq \cup_{n\geq 1} B_n \subseteq \cup_{n\geq 1} A_n$.

Como $m^*(\cup_{n\geq 1} E_n) = m(\cup_{n\geq 1} A_n)$, resulta que $m(\cup_{n\geq 1} B_n) = m^*(\cup_{n\geq 1} E_n)$.

Podemos concluir, portanto, que $m^*(\cup_{n\geq 1} E_n) = \lim_{n\to+\infty} m^*(E_n)$. $\triangle$

TEOREMA DE SAKS: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado um número real $\alpha \geq 0$, considere $E_\alpha = \{x \in [a,b] : \exists\, f'(x) \text{ e } |f'(x)| \leq \alpha\}$. Então $m^*(f(E_\alpha)) \leq \alpha m^*(E_\alpha)$.

Demonstração: Seja $x \in E_\alpha$ e $\epsilon > 0$. Temos que

$|f'(x)| = \lim_{y\to x} |\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leq \alpha < \alpha + \epsilon$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall\, y \in]x-\delta, x+\delta[\ (\ y \neq x \Rightarrow |\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| < \alpha + \epsilon)$

$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < (\alpha + \epsilon)|y - x|$.

Para todo $n \geq 1$, tomemos

$$E_n = \{x \in E_\alpha : \forall\, y \in]a,b[,\ 0 < |y-x| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(y) - f(x)| < (\alpha+\epsilon)|y-x|\} \subseteq E_\alpha$$

Temos que:

(i) $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$

(ii) $E_\alpha = \cup_{n\geq 1} E_n$ (prove).

Dessa forma, $f(E_\alpha) = f(\cup_{n\geq 1} E_n) = \cup_{n\geq 1} f(E_n)$.

$\forall\, n \geq 1\ (E_n \subseteq E_{n+1} \Rightarrow f(E_n) \subseteq f(E_{n+1}))$

Portanto,

$m^*(f(E_\alpha)) = m^*(\cup_{n\geq 1} f(E_n)) = \lim_{n\to+\infty} m^*(f(E_n))$.

Vamos calcular $m^*(f(E_n))$, $\forall\, n \geq 1$.

Fixado um tal $n \geq 1$, existe uma sequência $(I_j)_{j\geq 1}$ de intervalos, com $E_n \subseteq \cup_{j\geq 1} I_j$ e $\sum_{j\geq 1} l(I_j) < m^*(E_n) + \epsilon$.

Além disso, podemos trocar cada I_j por intervalos que recobrem I_j, cada um deles de comprimento menor que $\frac{1}{n}$. Reescrevendo, e denominando estes novos intervalos por I_j, temos que

$E_n \subseteq \cup_{j\geq 1} I_j$, $\quad l(I_j) < \frac{1}{n}$, $\forall\, j \geq 1$ e $\sum_{j\geq 1} l(I_j) < m^*(E_n) + \epsilon$

Como $l(I_j) < \frac{1}{n}$, $\forall\, j \geq 1$, vale que

$\forall\, x, y \in E_n \cap I_j\ (|f(y) - f(x)| < (\alpha+\epsilon)|y-x|)$.

Assim, $diam(f(E_n \cap I_j)) \leq (\alpha+\epsilon) diam(I_j)$.

Logo, $m^*(f(E_n \cap I_j)) \leq (\alpha+\epsilon) l(I_j) \Rightarrow m^*(f(E_n)) \leq \sum_{j\geq 1} m^*(f(E_n \cap I_j)) \leq (\alpha+\epsilon)(m^*(E_n)+\epsilon)$.

Concluímos que

$m^*(f(E_\alpha)) \leq \lim_{n\to+\infty} m^*(f(E_n)) \leq \lim_{n\to+\infty} (\alpha+\epsilon)(m^*(E_n)+\epsilon) = (\alpha+\epsilon)(m^*(E_\alpha)+\epsilon)$

e resulta que

$m^*(f(E_\alpha)) \leq (\alpha+\epsilon)(m^*(E_\alpha)+\epsilon)$, $\forall\, \epsilon > 0$. Logo, $m^*(f(E_\alpha)) \leq \alpha m^*(E_\alpha)$. $\triangle$

TEOREMA: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Considere $E = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \text{ existe e } f'(x) = 0\}$. Então $m^*(f(E)) = 0$, isto é, os valores de $f(x)$ tais que $f'(x) = 0$ formam um conjunto de medida nula.

Demonstração: Vamos provar que, para todo intervalo $[a,b]$, $m^*(E \cap [a,b]) = 0$.

Sejam, pois, $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Para todo $n \geq 1$, considere $E_n = \{x \in E \cap [a,b] : |f'(x)| \leq \frac{1}{n}\}$.

Observe que $E \cap [a,b] \subseteq E_n$, $\forall\, n \geq 1$. Pelo teorema de Saks, resulta que

$m^*(f(E\cap\ [a,b])) \le m^*(f(E_n)) \le \dfrac{m^*(E_n)}{n} \le \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, n \ge 1.\quad \Rightarrow\quad m^*(f(E\cap[a,b])) = 0.$

Logo, $m^*(f(E)) = 0$. $\triangle$

TEOREMA: Seja $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função *a.c.* tal que $\varphi'(x) = 0$ *qs* em $[a,b]$.
Então φ é uma função constante.

Demonstração: Seja $E = \{x \in [a,b] : \varphi'(x) = 0\}$. Então, de acordo com a notação utilizada no teorema de Saks, tem-se que $E = E_\alpha$, com $\alpha = 0$. Pelo mesmo teorema, temos que

$$m^*(\varphi(E)) \le \alpha^*(E_\alpha) = 0.m^*(E_0) = 0, \text{ e portanto, } m^*(\varphi(E)) = 0. \tag{1}$$

Por sua vez,

$$\left.\begin{array}{l} m^*(E^c) = 0 \\ \varphi \text{ é } a.c. \end{array}\right\} \Rightarrow\ m^*(\varphi(E^c)) = 0 \tag{2}$$

Temos ainda que [a, b] = E $\cup$ E^c. De (1) e (2), resulta que

$m^*(\varphi([a,b])) = m^*(\varphi(E) \cup\ \varphi(E^c)) \le\ m^*(\varphi(E)) + m^*(\varphi(E^c)) = 0.$

Assim, $m^*(\varphi([a,b])) = 0$. Como φ é contínua, $\varphi([a,b])$ é um intervalo. Como $m^*(\varphi([a,b])) = 0$, então $\varphi([a,b])$ é um intervalo unitário, e portanto, φ é constante. $\triangle$

$A \cup B$
A, B $(A \cup B)^c \Rightarrow$
A, B $A \cap B$

ii) se $E \in \mathfrak{X} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{X}$
iii) se $A_n \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathfrak{X}$

$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

se $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

Resolução da Lista 5 de MAT0234 - Medida e Integração

Exercício 1

i - $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$. $f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\} = X$.

ii - $f^{-1}(E^c) = \{x \in X : f(x) \notin E\} = (\{x \in X : f(x) \in E\})^c = f^{-1}(E)^c$. ☆ 2 ⇒ Importante

iii - Consideremos $A = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} E_i)$ e $B = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(E_i)$.

$$x \in A \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \in \bigcup_{i \in I} E_i \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \in E_i \text{ para algum } i \in I \Leftrightarrow x \in B.$$

iv - $f(A_1 \cap A_2) = \{x \in X : f(x) \in A_1 \text{ e } f(x) \in A_2\} \subseteq \{x \in X : f(x) \in A_1\} \cap \{x \in X : f(x) \in A_2\} = f(A_1) \cap f(A_2)$. Como exemplo de que a igualdade não vale, consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $A_1 = [0, \frac{3\pi}{4}]$ e $A_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Temos que $f(A_1 \cap A_2) = f([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Por outro lado, $f(A_1) \cap f(A_2) = f([0, \frac{3\pi}{4}]) \cap f([\frac{\pi}{2}, \pi]) = [0,1] \cap [0,1] = [0,1]$.

Exercício 2 Temos (pelo item i do exercício 1) que $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$. Seja $A \in \mathfrak{X}$. Logo $A = f^{-1}(E)$ para algum $E \in \mathcal{Y}$. Daí, $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c = A^c \in \mathfrak{X}$. Finalmente, seja $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathfrak{X}$. Para todo $n \geq 1$, existe $E_n \in \mathcal{Y}$ tal que $f^{-1}(E_n) = A_n$. Daí $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(E_n) = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathfrak{X}$. Logo, $\mathfrak{X}$ é uma σ-álgebra de X.

Exercício 3 Pelo item i do exercício 1, $f^{-1}(\emptyset), f^{-1}(Y) \in \mathcal{M}_X$. Dado $E \subseteq \mathcal{E}$, como $\mathcal{M}_X$ é σ-álgebra e $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$, segue que $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c \in \mathcal{M}_X$. Agora seja $(E_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{E}$.

$$f^{-1}(E_n) \in \mathcal{M}_X \text{ para todo} n \geq 1 \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{M}_X$$

Logo, para todo $E \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$. Como $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}_X$, segue que a função é mensurável.

Exercício 4 ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{X}_A$ seja $(\mathcal{M} - \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mensurável. Então $\mathcal{X}_A^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Em particular, $\mathcal{X}_A^{-1}([1, +\infty[) = A \in \mathcal{M}$. Logo A é mensurável.

($\Leftarrow$) Seja $A \in \mathcal{M}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $a > 1$, $\mathcal{X}_A^{-1}([a, +\infty[) = \emptyset \in \mathcal{M}$. Se $a \leq 0$, $\mathcal{X}_A^{-1}([a, +\infty[) = X \in \mathcal{M}$. Finalmente, se $0 < a < 1$, $\mathcal{X}_A^{-1}([a, +\infty[) = A \in \mathcal{M}$. Logo, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{X}_A^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{M}$. Consequentemente, $\mathcal{X}_A$ é $(\mathcal{M} - \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mensurável.

Exercício 5 Se $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$, então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável (desde que $X \neq \emptyset$). Se $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, as funções mensuráveis são as funções constantes. De fato, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função $(\mathcal{M} - \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mensurável. Podemos supor sem perda de generalidades, que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}([a, +\infty[) = X$. Assim, se $b \neq a$, então pelo item iv do exercício 1, segue que $\emptyset \neq f^{-1}([a, +\infty[\cap [b, +\infty[) \subseteq f^{-1}([a, +\infty[) = X$ se $a < b$, e $\emptyset \neq f^{-1}([b, +\infty[\cap [a, +\infty[) \subseteq f^{-1}([a, +\infty[) = X$ se $a > b$. Isso implica que $f^{-1}([a, b]) = X$ ($f^{-1}([b, a])$ caso $b \leq a$) para todo $b \in \mathbb{R}$. Logo f é constante.

Exercício 6 Consideremos $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{E}\}$. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{A}$, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ estão em $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Seja $\Theta \in \mathcal{A}$. Logo $f^{-1}(\Theta) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Consequentemente, $f^{-1}(\Theta^c) = f^{-1}(\Theta)^c \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, e portanto, $\Theta^c \in \mathcal{A}$. Agora seja $(\Theta_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}$. Temos que $f^{-1}(\Theta_n) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ para todo $n \geq 1$. Logo $f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} \Theta_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(\Theta_n) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, e portanto $\bigcup_{n \geq 1} \Theta_n \in \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra que contém os abertos de $\mathbb{R}$ (pois f é contínua). Logo $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$. Como a inclusão $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\mathbb{R}$ vale da construção de $\mathcal{A}$, segue a igualdade. Consequentemente, para todo boreliano E, $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Exercício 7

i - Seja $a \in \mathbb{R}$ e consideremos o intervalo aberto $]a, +\infty[$. Como g é contínua, temos que $g^{-1}(]a, +\infty[)$ é aberto, e consequentemente, boreliano. Logo, $f^{-1}(g^{-1}(]a, +\infty[))$ é mensurável (uma vez que f é uma função mensurável). Mas $f^{-1}(g^{-1}(]a, +\infty[)) = (g \circ f)^{-1}(]a, +\infty[)$. Portanto, $g \circ f$ é mensurável.

ii -

Exercício 8

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 2

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Considere o conjunto

$$A = \{z \in \overline{\mathbb{R}} : \exists (x_{n_j}) \text{ subsequência de } (x_n) \text{ com } x_{n_j} \longrightarrow z\}$$

Considere $l_1 = \inf A$ (que pode ser $\pm\infty$) e $l_2 = \sup A$ (que pode ser $\pm\infty$).

Proposição: Existe (x_{r_j}) tal que $x_{r_j} \longrightarrow l_1$ e existe (x_{s_j}) tal que $x_{s_j} \longrightarrow l_2$.
Portanto, $l_1 \in A$ e $l_2 \in A$.

Demonstração:

Se (x_n) é uma sequência limitada, então ela possui subsequência convergente, e $A \neq \emptyset$. Se (x_n) é ilimitada superiormente (resp. inferiormente) então ela admite uma subsequência que converge para $+\infty$ (rep. para $-\infty$). De qualquer forma, portanto, temos que $A \neq \emptyset$.

Caso 1: $l_1 \in \mathbb{R}$.

Como $l_1 = \inf A$, existe $z_1 \in A$ tal que $l_1 \leq z_1 < l_1 + 1$ (e portanto, $z_1 \in]l_1 - 1, l_1 + 1[$), e existe $x_{n_j} \longrightarrow z_1$. Assim, conseguimos $n_1 \geq 1$ tal que $l_1 - 1 < x_{n_1} < l_1 + 1$.

Novamente, como $l_1 = \inf A$, existe $z_2 \in A$ tal que $l_1 \leq z_2 < l_1 + \frac{1}{2}$, e obtemos $z_2 \in]l_1 - \frac{1}{2}, l_1 + \frac{1}{2}[$. Existe uma subsequncia x_{n_j} de (x_n) tal que $x_{n_j} \longrightarrow z_2$. Assim, obtemos $n_2 > n_1$ com $l_1 - \frac{1}{2} < x_{n_2} < l_1 + \frac{1}{2}$.

Dessa forma, definimos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que $l_1 - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l_1 + \frac{1}{k}, \forall k \geq 1$, de maneira que $x_{n_k} \longrightarrow l_1$.

Caso 2: $l_1 = -\infty$.

Neste caso, para todo $M \geq 1$, existe $z \in A$ tal que $z < -M$. Mas existe (x_{n_j}) com $x_{n_j} \longrightarrow z$, e obtemos $x_{n_j} < -M$ para índices n_j arbitrariamente grandes. Tal processo fornece uma sequência (n_j) de números naturais com $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ de forma que $x_{n_k} < -k, \forall k \geq 1$, e portanto, $x_{n_j} \longrightarrow -\infty$.

Caso 3: $l_1 = +\infty$.

Como $A \neq \emptyset$, este caso implica que qualquer subsequência convergente de (x_n). é convergente para $+\infty$. Portanto, $l_1 \in A$.

Analogamente provamos que existe uma subsequncia (x_{s_j}) de (x_n) tal que $x_{s_j} \longrightarrow l_2$. △

Definição: Dizemos que l_1 é o limite inferior da sequência (x_n) e que l_2 é o limite superior de (x_n).

As notações correspondentes são: $\begin{cases} l_1 = \lim inf x_n \text{ ou } l_1 = \underline{\lim} x_n \\ l_2 = \lim sup\, x_n \text{ ou } l_2 = \overline{\lim} x_n \end{cases}$

Vejamos algumas propriedades dos limites inferior e superior de uma sequência (x_n). Antes, apresentamos mais algumas notações.

Para cada $n \geq 1$, considere $X_n = \{x_k : k \geq n\}$. Então temos que

$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$

Dessa forma, vale que

$$\begin{cases} \inf X_1 \leq \inf X_2 \leq \ldots \leq \inf X_n \leq \ldots \\ \sup X_1 \geq \sup X_2 \quad \geq \sup X_n \geq \ldots \end{cases}$$

Vamos designar $\begin{cases} b_n = \inf X_n, \forall n \geq 1 \\ a_n = \sup X_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Como (b_n) é uma sequência crescente, existe $b = \lim b_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Como (a_n) é uma sequência decrescente, existe $a = \lim a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Propriedade: $\begin{cases} b = \overline{\lim} x_n \\ a = \underline{\lim} x_n \end{cases}$

Demonstração: Vamos demonstrar a afirmação (i). A propriedade (ii) será deixada para o leitor.

De acordo com a exposição anterior, temos que $l_2 = \overline{\lim} x_n$. Portanto, devemos provar que $b = l_2$.

Caso 1: $l_2 \in \mathbb{R}$.

Seja $\epsilon > 0$ e considere $C_\epsilon = \{n \geq 1 : l_2 + \epsilon < x_n\}$.

C_ϵ é finito.

Suponhamos, pelo contrário, que C_ϵ seja infinito.
Se (x_n) é ilimitada superiormente, existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) com $x_{n_j} \longrightarrow +\infty$, o que não é possível, pois $l_2 \in \mathbb{R}$. Se (x_n) é limitada, teremos uma sebsequência (x_{n_j}) de (x_n) convergindo para um limite z com $z \geq l_2 + \epsilon$, o que também não pode ocorrer. Logo, C_ϵ é finito.

Como C_ϵ é finito, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \leq l_2 + \epsilon, \forall n \geq n_0$. Como $b_n \longrightarrow b$, resulta que $b \leq l_2 + \epsilon$. Sendo ϵ arbitrário, concluimos que $b \leq l_2$.

Suponhamos agora que se tenha $b < l_2$. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < l_2$. Como $b = \inf\{b_n : n \geq 1\}$, existe $n_1 \geq 1$ tal que $b \leq b_{n_1} < c$, e portanto, $\sup X_{n_1} < c$. Logo, $x_n < c, \forall n \geq n_1$. Como l_2 é limite de uma subsequência de (x_n), vem que $l_2 \leq c$: contradição, pois $c < l_2$. Logo, $b \not< l_2$, e concluimos que $b = l_2$

Caso 2: $l_2 = +\infty$.

Neste caso, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $z_k \in A$ tal que $z_k > k$. Existe, pois,uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) com $x_{n_j} \longrightarrow z_k$, e portanto, existe $j_k \geq k$ com $x_{n_{j_k}} > k$. Com este raciocínio, obtemos uma subsequência de (x_n) que converge para $+\infty$, e que chamaremos ainda de (x_{n_j}). Assim, $x_{n_j} \longrightarrow +\infty$. Por conta disso, podemos concluir que, para todo $k \geq 1$, existe j_k tal que $x_{n_j} \in X_k, \forall j \geq j_k$, e portanto, $\sup X_k = +\infty, \forall k \geq 1$. Dessa forma, $b = +\infty$, ou seja, $b = l_2$.

Caso 3: $l_2 = -\infty$.

Seja $d \in \mathbb{R}$. Considere $C_d = \{n \geq 1 : x_n > d\}$. Se C_d é infinito, então existe $(n_j) \subseteq \mathbb{N}$ tal que (x_{n_j}) converge para algum $z \in [d, +\infty]$. Então $z \in A$, e portanto, $z \leq l_2$: contradição, pois

$l_2 = -\infty$ Logo, para todo $d \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n < d, \forall\, n \geq n_0$, e concluimos que $X_n \subseteq [-\infty, d], \forall\, n \geq n_0$. Assim, $\sup X_n \leq d, \forall\, n \geq n_0$, isto é, $b_n \leq d, \forall\, n \geq n_0$. Logo, $b_n \longrightarrow -\infty$, e portanto, $b = -\infty$. $\triangle$

Da propriedade acima, podemos escrever que, dada uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$, vale que

$$\liminf x_n = \underline{lim} x_n = \sup_{n \geq 1}\{\inf\{x_k : k \geq n\}\}$$

$$\limsup x_n = \overline{lim} x_n = \inf_{n \geq 1}\{\sup\{x_k : k \geq n\}\}$$

Observação: Se (x_n) uma sequência ilimitada superiormente então $\limsup x_n = +\infty$.
Da mesma forma, se (x_n) ilimitada inferiormente então $\liminf x_n = -\infty$.

Propriedades de $\underline{\lim}$ e $\overline{\lim}$ de sequências:

1. Dada uma sequência $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$$

2. Para $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, temos

   $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

3. Seja $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então

$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}(a x_n) = a\underline{\lim} x_n \\ \overline{\lim}(a x_n) = a\overline{\lim} x_n \end{cases}$$

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}(a x_n) = a\overline{\lim} x_n \\ \overline{\lim}(a x_n) = a\underline{\lim} x_n \end{cases}$$

4. Dadas $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ sequências limitadas, temos que:

   $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$

5. Dados $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos:

   $\underline{\lim}(a + x_n) = a + \underline{\lim} x_n$

   $\overline{\lim}(a + x_n) = a + \overline{\lim} x_n$

6. Calcule $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$:

(i) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ (ii) $x_n = (-1)^n(2 + \frac{2}{n})$

(iii) $x_n = \frac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}$ (iv) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$

Sobre conjuntos mensuráveis

Teorema 1: Se $E_1, E_2, \ldots E_n$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis então $\bigcup_{j=1}^n E_j$ é mensurável.

Teorema 2: Se $E_1, E_2, \ldots E_n$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ mensuráveis e dois a dois disjuntos então $\bigcup_{j=1}^n E_j$ é mensurável e, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, tem-se que $m^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)) = \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j)$.
Em particular, para $A = \mathbb{R}$, obtemos $m^*(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n m^*(E_j)$.

Teorema 3: Se $(E_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos mensuráveis e dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}$ (isto é, $E_i \cap E_j = \emptyset$, para $i \neq j,\ i, j \geq 1$) então $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ é mensurável e $m^*(\bigcup_{j\geq 1} E_j) = \sum_{j\geq 1} m^*(E_j)$.

Demonstração: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto qualquer. Devemos provar que
$m^*(A) \geq\ m*(A \cap \bigcup_{j\geq 1} E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c)$.

Para cada $n \geq 1$, sabemos que $\bigcup_{j=1}^n E_j$ é mensurável. Então vale que

$$m^*(A) = m*(A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c) \qquad (1)$$

Por sua vez,

$$A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j) \subseteq A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j) \quad \Longrightarrow \quad A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c \subseteq A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c$$

e portanto,

$$m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c) \ \leq\ m^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c) \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos que

$$m^*(A) = m*(A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c) \geq\ m*(A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c)$$

e então

$$m^*(A) \geq\ m*(A \cap \bigcup_{j=1}^n E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c),\ \forall\, n \geq 1.$$

Como $m^*(A \cap (\bigcup_{j+1}^n E_j)) = \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j)$, pois os E_j são dois a dois disjuntos, resulta que

$$m^*(A) \geq\ \sum_{j=1}^n m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c),\ \forall\, n \geq 1.$$

e portanto, obtemos

$$m^*(A) \geq\ \sum_{j\geq 1} m^*(A \cap E_j) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c)$$

Pela subaditividade da medida exterior, sabemos que
$\sum_{j\geq 1} m^*(A \cap E_j) \geq\ m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)) = m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j))$.

Sendo assim,

$$m^*(A) \geq\ m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)) + m^*(A \cap (\bigcup_{j\geq 1} E_j)^c)$$

o que prova a mensurabilidade de $\bigcup_{j\geq 1} E_j$.

Finalmente, temos que, pelo Teorema 2, para todo $n \geq 1$,

$$m^*(\bigcup_{j\geq 1} E_j) \geq m^*(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n m^*(E_j)$$

e portanto, resulta que

$$m^*(\bigcup_{j\geq 1} E_j) \geq\ \sum_{j\geq 1} m^*(E_j)$$

Pela subaditividade da medida, obtemos a desigualdade contrária, o que termina a demonstração.

Teorema 4: Se $(E_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$ então $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ é mensurável.

Demonstração: Se os conjuntos da sequência considerada forem dois a dois disjuntos, o resultado vale, pelo Teorema 3. Suponhamos, pois, que não seja este o caso.

Considere a seguinte sequência $(F_n)_{n\geq 1}$:

$$\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_2 = E_2 - E_1 \\ F_3 = E_3 - E_1 \cup E_2 \\ \vdots \\ F_n = E_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \\ \vdots \end{cases}$$

Exercício: Prove que

(i) F_j é mensurável, $\forall\, j \geq 1$.

(ii) $F_i \cap F_j = \emptyset$, $\forall\, i, j \geq 1, i \neq j$.

(iii) $\bigcup_{j=1}^n F_j = \bigcup_{j=1}^n E_j$, $\forall\, n \geq 1$.

(iv) $\bigcup_{j\geq 1} F_j = \bigcup_{j\geq 1} E_j$

Como os conjuntos F_j são dois a dois disjuntos e mensuráveis, o Teorema 3 garante que $\bigcup_{j\geq 1} F_j$ é mensurável. Sendo $\bigcup_{j\geq 1} F_j = \bigcup_{j\geq 1} E_j$, resulta o que queremos provar.

⇒ escrever no caderno

Funções mensuráveis e funções simples

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, e uma função $\varphi \; : X \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que φ é função simples se a imagem $im\varphi$ de φ é um conjunto finito. Isso implica que a função φ pode ser representada como

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\} = \varphi^{-1}(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, e $a_i \neq a_j$, $\forall\, i,\, j,\ 1 \leq i, j \leq n$. Neste caso, dizemos que φ está representada na forma canônica.

Proposição: Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples, cuja representação canônica é dada por $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Então φ é mensurável se, e somente se, para todo i, $1 \leq i \leq n$, A_i é um conjunto mensurável.

Teorema: Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável e f: $X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e não negativa. Existe uma sequência crescente $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de funções simples, mensuráveis e não negativas, $0 \leq \ \varphi_1(x) \leq \ldots \leq \ \varphi_n(x) \ldots \leq \ f(x)$, $\forall\, x \in X$, tal que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$. Se f é limitada então é possível obter a sequência $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de maneira que a convergência a f seja uniforme.

Demonstração: Para $n \geq 1$, e $1 \leq k \leq n2^n$, considere os conjuntos E_{kn} definidos como

$$E_{kn} = \begin{cases} \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[) & \text{se } k = 0, 1, \ldots, (n2^n - 1) \\ \{x \in X : f(x) \geq n\} = f^{-1}([n, +\infty[) & \text{se } k = n2^n \end{cases}$$

Observe que, dados k_1, k_2, se $k_1 \neq k_2$ então $E_{k_1 n} \cap E_{k_2 n} = \emptyset$. Além disso, $\bigcup_{0 \leq k \leq n2^n} E_{kn} = X$.

Para cada $n \geq 1$, considere φ_n: $X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{kn}}(x)$, $\forall\, x \in X$.

Propriedade 1: E_{kn} é um conjunto mensurável, $\forall\, k,\, n$.

Com efeito: sendo f função mensurável, vale que $\{x \in X : f(x) \geq \frac{k}{2^n}\}$ e $\{x \in X : f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$ são conjuntos mensuráveis. Para $0 \leq k < (n2^n - 1)$, E_{kn} é interseção desses dois conjuntos, e portanto, é mensurável. Para $k = n2^n$, E_{kn} é mensurável pela definição de função mensurável.

Propriedade 2: Para todo $n \geq 1$, $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, $\forall\, x \in X$.

Seja $x \in X$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Existe k, $1 \leq k \leq (n2^n - 1)$ tal que $x \in E_{kn}$.

Então $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Por sua vez, $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}}$, e vale que

$$[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}[= [\tfrac{2k}{2^{n+1}}, \tfrac{2k+2}{2^{n+1}}[= [\tfrac{2k}{2^{n+1}}, \tfrac{2k+1}{2^{n+1}}[\cup [\tfrac{2k+1}{2^{n+1}}, \tfrac{2k+2}{2^{n+1}}[.$$

Se $\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ então $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \varphi_n(x)$.

Se $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$ então $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} \geq \frac{2k}{2^{n+1}} = \varphi_n(x)$.

De qualquer forma, temos $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

Caso 2: $x \in E_{kn}$, com $k = n2^n$, isto é, $f(x) \geq n$.

Se $f(x) \geq (n+1)$ então $\varphi_n(x) = n \leq n+1 = \varphi_{n+1}(x)$.

Se $n \leq f(x) < n+1$ então existe k, $n2^{n+1} \leq k < (n+1)2^{n+1}$ e $x \in E_{k(n+1)}$.

Nesse caso, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = \varphi_n(x)$.

Logo, vale que (φ_n) é sequência crescente.

Propriedade 3: Se $x \in X$ e $0 \leq f(x) < n$ então $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

Com efeito: dado $x \in X$, se $f(x) < n$, existe um único k, $0 \leq k \leq (n2^n - 1)$, tal que $x \in E_{kn}$. Assim, $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$, de maneira que $f(x) - \frac{k}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Nesse caso, $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.
Se $f(x) = n$, também vale que $|f(x) - \varphi_n(x)| = n - \frac{(n2^n-1)}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.

Conclusão: $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

Suponhamos que f seja limitada, isto é, existe $n_0 \geq 1$ tal que $0 \leq f(x) \leq n_0$, $\forall\, x \in X$. Então, para todo $n \geq n_0$, temos que $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall\, x \in X$, e a convergência de $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ para f será uniforme. $\triangle$

Conjuntos não mensuráveis dentro de conjuntos mensuráveis de medida positiva

Proposição: Seja $A \subseteq [0,1[$ um conjunto mensurável com $m(A) > 0$.
Então existe $D \subseteq A$ tal que D é não mensurável.

Para demonstrar a proposição acima, precisamos de alguns outros resultados.

`Definição:` Dados $x,\ y \in [0,1[$, definimos:

$$x * y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1 \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geq 1 \end{cases}$$

`Definição:` Dado $E \subseteq [0,1[$ e $y \in [0,1[$, definimos $E * y = \{x * y : x \in E\}$.

Lema: Se $E \subseteq [0,1[$ é um conjunto mensurável então $E * y$ também o é, e $m(E * y) = m(E)$
Demonstração: exercício.

Dados $x,\ y \in [0,1[$, definimos $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$.

$\sim$ é uma relação de equivalência. Para cada $x \in [0,1[$, definimos a classe de equivalência de x por $\tilde{x} = \{z \in [0,1[\ : \ z \sim x\}$.

Observe que $\tilde{x} = \{z \in [0,1[\ : \ z - x \in \mathbb{Q}\} = \{z \in [0,1[\ : \ \exists\, r \in \mathbb{Q} : z = x + r\}$, e portanto,
$\tilde{x}$ é enumerável, para todo $x \in [0,1[$.

Vale que $[0,1[= \bigcup\{\tilde{x} : x \in [0,1[\ \}$ e, para $x_1, x_2 \in [0,1[$, $(x_1 \not\sim x_2 \leftrightarrow \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2 = \emptyset)$
(mais exercícios para você).

Seja P um conjunto de representantes de $\{\tilde{x} : x \in [0,1[\ \}$, que existe pelo Axioma da Escolha.
Suponhamos que P seja um conjunto mensurável.

Considere $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ uma enumeração dos números racionais do intervalo $[0,1[$ tal que $r_0 = 0$. Vamos designar $P_j = P * r_j$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Observe que $P_0 = P$. Além disso, pelo lema anterior, se P é mensurável então P_j é mensurável, para todo $j \geq 0$.

Prove as seguintes duas propriedades:

Propriedade 1: $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Propriedade 2: $\bigcup_{j \geq 0} P_j = [0,1[$.

Temos que:

$m\ ([0,1[) = l([0,1[) = 1$

Além disso, podemos escrever $m\ (\bigcup_{j \geq 0} P_j) = \sum_{j \geq 0} m(P_j)$

Por sua vez, $m(P_j) = m\ (P)$, $\forall\ j \geq\ 0$. Daí vem que $\sum_{j \geq 0} m(P_j) = \sum_{j \geq 0} m(P)$

Se $m\ (P) = 0$ então teremos $m\ (\bigcup_{j \geq 0} P_j) = \sum_{j \geq 0} m(P) = 0$, e virá que

$1 = m\ ([0,1[) = m\ (\bigcup_{j \geq 0} P_j) = 0$, o que não é possível.

Se $m\ (P) = a > 0$, teremos $m\ (\bigcup_{j \geq 0} P_j) = \sum_{j \geq 0} m(P) = \sum_{j \geq 0} a = +\infty$, o que também é contraditório.

Logo, o conjunto $P \subseteq [0,1[$ não é mensurável. Mas temos que $m^*(P) > 0$.

Lema: Se $E \subseteq P$ é um conjunto mensurável então $m(E) = 0$.

Demonstração: Temos que $E \subseteq P \Rightarrow E * r_j \subseteq P * r_j = P_j$. Então $\bigcup_{j \geq 0} E * r_j \subseteq \bigcup_{j \geq 0} P_j = [0,1[$. Além disso, para $i, j \geq 0$, $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset \Rightarrow E * r_j \cap E * r_i = \emptyset$ e, sendo E mensurável, vale que $E * r_j$ é mensurável e $m(E * r_j) = m(E)$, $\forall\ j \geq 0$

Dessa forma, obtemos

$$1 = m([0,1[) = m(\bigcup_{j \geq 0} P_j) \geq m(\bigcup_{j \geq 0} \bigcup_{j \geq 0} E * r_j) = \sum_{j \geq 0} m(E * r_j) = \sum_{j \geq 0} m(E)$$

e o único valor para $m(E)$ que torna verdadeira a desigualdade acima é zero. Assim, obtemos que $m(E) = 0$.

Lema: Se $E \subseteq P_j$ é um conjunto mensurável, então $m(E) = 0$.
(Sugestão: prove que se r é um número racional de $[0,1[$ então $E * r * (1 - r) = E$).

Passemos à demonstração da proposição enunciada no início dessas notas

Demonstração: Considere P o subconjunto não mensurável de $[0,1[$ que foi construido anteriormente.

Temos que

$A \subseteq [0,1[\ \Rightarrow\ A \subseteq \bigcup_{j \geq 0} P_j\ \Rightarrow\ A = \bigcup_{j \geq 0}(A \cap P_j)$

Se $A \cap P_j$ é mensurável, para todo $j \geq 0$, temos que $m(A \cap P_j) = 0$, $\forall\ j \geq 0$, e portanto, $m(A) = 0$: contradição. Logo, existe $j_0 \geq 0$ tal que $A \cap P_{j_0}$ é não mensurável.
Fazemos $D = A \cap P_{j_0}$. $\triangle$

Proposição: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ tem $m^*(A) > 0$ então existe $D \subseteq A$ conjunto não mensurável.
Demonstração: exercício.

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

(AC) Da não existência de uma medida sobre todos os conjuntos de números reais

Teorema: Não existe uma função $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ verificando as seguintes condições.

(1) Para todo intervalo I, $m(I) = l(I)$.

(2) Se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então $m\,(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n\geq 1} mE_n$ (m é enumeravelmente aditiva.)

(3) m é invariante por translação, isto é: se $E \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ então $m(E+y) = m(E)$.

Demonstração: Suponhamos que exista uma tal medida m.

Dados $x, y \in [0,1[$, definimos:

$$x * y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1 \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geq 1 \end{cases}$$

Lema: Dado $E \subseteq [0,1[$ e $y \in [0,1[$, considere $E*y = \{x*y : x \in E\}$. Então $m\,(E*y) = m\,E$.

Demonstração: Sejam $\begin{cases} E_1 = \{x \in E : x+y<1\} \\ E_2 = \{x \in E : x+y \geq 1\} \end{cases}$

Então $E = E_1 \cup E_2$, e portanto, $E*y = (E_1*y) \cup (E_2*y) = (E_1+y) \cup (E_2+(y-1))$.

Como $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, não é difícil provar (faça você) que $(E_1*y) \cap (E_2*y) = \emptyset$, e temos:

$m(E*y) = m(E_1+y) + m(E_2+(y-1)) = m(E_1) + m(E_2) = m\,(E)$. $\triangle$

Dados $x, y \in [0,1[$, definimos $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$.

$\sim$ é uma relação de equivalência. Para cada $x \in [0,1[$, definimos a classe de equivalência de x por $\bar{x} = \{z \in [0,1[: z \sim x\}$.

Observe que $\bar{x} = \{z \in [0,1[: z - x \in \mathbb{Q}\} = \{z \in [0,1[: \exists\, r \in \mathbb{Q} : z = x + r\}$, e portanto, $\bar{x}$ é enumerável. para todo $x \in [0,1[$.

Vale que $[0,1[= \bigcup\{\bar{x} : x \in [0,1[\,\}$ e, para $x_1, x_2 \in [0,1[$, $(x_1 \not\sim x_2 \leftrightarrow \bar{x}_1 \cap \bar{x}_2 = \emptyset)$ (mais exercícios para você).

Seja P um conjunto de representantes de $\{\bar{x} : x \in [0,1[\,\}$, que existe pelo Axioma da Escolha. Considere ainda $r_0, r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ uma enumeração dos números racionais do intervalo $[0,1[$ tal que $r_0 = 0$. Vamos designar $P_j = P * r_j$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Observe que $P_0 = P$.

Propriedade 1. $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Com efeito: suponhamos que exista $z \in [0,1[$ tal que $z \in P_i \cap P_j$. Então existem $x, y \in P$ tais que $z = x * r_i = y * r_j$. Temos casos a considerar a respeito dessa igualdade:

Caso 1: $x * r_i = x + r_i$ e $y * r_j = y + r_j$.
Então vem que $x - y = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$, o que acarreta $x \sim y$. Em P não existem elementos distintos que sejam equivalentes. Portanto, obtemos $x = y$, e segue que $r_i = r_j$, o que é uma contradição, já que $i \neq j$.

Caso 2: $x * r_i = x + r_i$ e $y * r_j = y + r_j - 1$. Então vem que $x - y = r_j - r_i - 1 \in \mathbb{Q}$ e, novamente, $x \sim y$, o que implica que $x = y$. Logo $r_j - r_i - 1 = 0$, e $r_j = r_i + 1$, o que não é possível, pois $r_i, r_j \in [0,1[$.

Os casos em que ($x * r_i = x + r_i - 1$ e $y * r_j = y + r_j$) ou ($x * r_i = x + r_i - 1$ e $y * r_j = y + r_j - 1$) tem tratamento análogo ao dos casos anteriores.

Propriedade 2: $\bigcup_{j\geq 0} P_j = [0,1[$.

De fato: considere $z \in [0,1[$. Então existe $x \in P$ tal que $z \sim x$, pois P é um conjunto de representantes de todas as classes de equivalência dos elementos de $[0,1[$.

Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $z - x > 0$. Como $z, x \in [0,1[$ e $z \sim x$, existe $r_j \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ tal que $z - x = r_j$, e portanto, $z = x + r_j$. Sendo $z \in [0,1[$, vale que $x + r_j < 1$, e portanto, $x + r_j = x * r_j \in P * r_j = P_j$, e $z \in P_j$.

Caso 2: $z - x < 0$. Como $z, x \in [0,1[$, temos que $-1 < z - x < 0$. Somando 1 aos membros da desigualdade, vem que $0 < z - x + 1 < 1$. Lembrando que $z - x \in \mathbb{Q}$, vale o mesmo para $z - x + 1$, e existe $i \geq 1$ tal que $z - x + 1 = r_i$. Assim, $z = x + r_i - 1 = x * r_i \in P_i$.

O raciocínio acima mostra que $[0,1[\subseteq \bigcup_{j\geq 0} P_j$. A inclusão contrária é óbvia pois cada P_j é subconjunto de $[0,1[$. Logo, está demonstrada a igualdade dos dois conjuntos.

Como estamos supondo a existência de uma medida m verificando as condições do enunciado do teorema, vale que

$m\,([0,1[) = l([0,1[) = 1$

Além disso, podemos escrever $m\,(\bigcup_{j\geq 0} P_j) = \sum_{j\geq 0} m(P_j)$.

Por sua vez, $m(P_j) = m\,(P)$, $\forall\, j \geq 0$. Daí vem que $\sum_{j\geq 0} m(P_j) = \sum_{j\geq 0} m(P)$.

Se $m\,(P) = 0$ então teremos $m\,(\bigcup_{j\geq 0} P_j) = 0$, e virá que

$1 = m\,([0,1[) = m\,(\bigcup_{j\geq 0} P_j) = \sum_{j\geq 0} m(P) = 0$, o que não é possível.

Se $m\,(P) = a > 0$, teremos $m\,(\bigcup_{j\geq 0} P_j) = \sum_{j\geq 0} m(P) = \sum_{j\geq 0} a = +\infty$, o que também é contraditório.

Logo, não existe uma medida definida em todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que seja enumeravelmente aditiva, invariante por translação e que, nos intervalos, coincida com o seu comprimento. $\triangle$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Conjunto de Cantor

Notações e Convenções:

(1) Para todo $n \geq 1$, considere

$$S_n = \{(k_1, \ldots, k_n) : k_j \in \{0,2\}, 1 \leq j \leq n\}$$

Então $|S_n| = 2^n$, $\forall\, n \geq 1$.

(2) Sejam $\vec{r}$, $\vec{s} \in S_n$, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

$$\vec{r} < \vec{s} \text{ se } \begin{cases} r_1 < s_1 \\ \text{ou} \\ \exists\, j(2 \leq j \leq n)(r_i = s_i, 1 \leq i \leq j-1) \text{ e } r_j < s_j \end{cases}$$

(3) Sejam m, $n \geq 1$, $n < m$, $\vec{r} \in S_n$, $\vec{s} \in S_m$, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_m)$.

Dizemos que $\vec{s}$ é uma continuação de $\vec{r}$ se $r_j = s_j$, $1 \leq j \leq n$.

(4) Seja $(\vec{r_n})_{n\geq 1}$ uma sequência em $\bigcup_{j\geq 1} S_j$ tal que $\vec{r_n} = (r_{n,1}, \ldots, r_{n,n}) \in S_n$, $\forall\, n \geq 1$.

Dizemos que tal sequência é compatível se

$$\forall\, m, n \geq 1 (n < m \Rightarrow \vec{r_m} \text{ é uma continuação de } \vec{r_n}).$$

Neste caso, é possível definir uma função $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0,2\}$ (portanto, um elemento de 2^ω) por $f(n) = r_{n,n}$, $\forall\, n \geq 1$. Observe que $f_{|\{1,2,\ldots,n\}} = \vec{r_n}$, $\forall\, n \geq 1$.

(5) Se $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in S_n$, designamos por

$$\begin{cases} \vec{r} \vee 0 & \text{a sequência } (r_1, \ldots, r_n, 0) \in S_{n+1} \\ \\ \vec{r} \vee 1 & \text{a sequência } (r_1, \ldots, r_n, 1) \in S_{n+1} \end{cases}$$

(6) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, definimos $A < B$ se, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$, tem-se que $a < b$.

Construção do Conjunto de Cantor

No primeiro estágio desta construção, removemos o intervalo aberto $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ do intervalo $[0,1]$, e consideramos $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Vamos designar $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$, $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$.

Assim, F_1 é um conjunto fechado, reunião de 2^1 intervalos fechados e disjuntos, $F_1 = I_0 \cup I_2$, cada um deles de comprimento $\frac{1}{3}$, de maneira que $m(F_1) = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Observe que a expansão ternária de todo elemento de I_0 possui 0 na primeira casa depois da vírgula, enquanto que os números que estão em I_2 admitem 2 na primeira casa depois da vírgula ($x \in I_0 \Rightarrow x = (0,0\ldots)_3$ e $x \in I_2 \Rightarrow x = (0,2\ldots)_3$). Temos que $I_0 < I_2$.

No segundo estágio, removemos os terços médios abertos dos intervalos $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$, a saber, os intervalos abertos $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ e $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, respectivamente. Dessa forma, a partir de I_0, obtemos dois intervalos fechados e disjuntos, que denotaremos, respectivamente por I_{00} e I_{02}, sendo $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$ e $I_{02} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. A partir de I_2, obtemos dois outros intervalos fechados e disjuntos : $I_{20} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ e $I_{22} = [\frac{8}{9}, 1]$. Designamos por F_2 o conjunto fechado, reunião desses 2^2 intervalos fechados e dois a dois disjuntos, cada um deles de comprimento $\frac{1}{3^2}$. Resulta, portanto, que $m(F_2) = 2^2.\frac{1}{3^2} = (\frac{2}{3})^2$.

Temos então que:

(i) $F_2 = \bigcup_{\vec{r}\in S_2} I_{\vec{r}} = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ e $m(F_2 = (\frac{2}{3})^2$.

(ii) $I_{00} \subseteq I_0$, $I_{02} \subseteq I_0$ e as sequências (0,0), (0,2) $\in S_2$ são continuações da sequência (0) $\in S_1$. Da mesma forma, $I_{20} \subseteq I_2$, $I_{22} \subseteq I_2$ e as sequências (2,0), (2,2) $\in S_2$ são continuações da sequência (2) $\in S_1$.

(iii) Todo elemento x de I_{00} possui expansão ternária com 0 nas duas casas depois da vírgula, enquanto que os números que estão em I_{02} possuem 0 e 2 na primeira e segunda casas depois da vírgula, respectivamente. Vale propriedade análoga para os intervalos I_{20} e I_{22}. Temos, portanto, que, dado $\vec{r} = (r_1, r_2) \in S_2$, todo elemento x de $I_{\vec{r}}$, na expansão ternária, possui r_1 e r_2 como os dois primeiros dígitos depois da vírgula, nessa ordem.

Suponhamos obtido, no estágio n, o conjunto fechado F_n, reunião de 2^n intervalos fechados dois a dois disjuntos, que designaremos por $I_{\vec{r}}$, $\vec{r} \in S_n$, de maneira que:

(i) $F_n = \bigcup_{\vec{r}\in S_n} I_{\vec{r}}$, e cada intervalo $I_{\vec{r}}$ possui comprimento igual a $\frac{1}{3^n}$, o que acarreta $m(F_n) = 2^n.\frac{1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$.

(ii) Para cada $\vec{r} \in S_n$, todo elemento de $I_{\vec{r}}$ possui as n primeiras casas "ternárias" depois da vírgula coincidindo com os termos da sequência $\vec{r}$, na mesma ordem dos termos da sequência (isto é, se $\vec{r} \in S_n$, $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ e $x \in I_{\vec{r}}$ então $x = (0, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots)_3$).

(iii) Para todo j, $1 \leq j \leq n$, se $\vec{r} \in S_n$ e $\vec{t} \in S_j$ e $\vec{r}$ é continuação de $\vec{t}$ então $I_{\vec{r}} \subseteq I_{\vec{t}}$.
Se $\vec{r}$ não é continuação de $\vec{t}$ então $I_{\vec{r}} \cap I_{\vec{t}} = \emptyset$.
Se $\vec{r}$, $\vec{s} \in S_n$ e $\vec{r} < \vec{s}$ então $I_{\vec{r}} < I_{\vec{s}}$.

No estágio seguinte $n+1$, de cada $I_{\vec{r}}$, com $\vec{r} \in S_n$, removemos o terço médio (de comprimento $\frac{1}{3^{n+1}}$). Obtemos então dois intervalos fechados: $I_{\vec{r}\vee 0}$ e $I_{\vec{r}\vee 2}$, de maneira que os elementos de $I_{\vec{r}\vee 0}$ possuem expansão ternária com 0 na (n+1)-ésima casa depois da vírgula, enquanto que, para os elementos de $I_{\vec{r}\vee 2}$, tal casa é ocupada por 2. Consideramos F_{n+1} o conjunto fechado, reunião dos 2^{n+1} intervalos fechados da forma descrita. Assim,

$$F_{n+1} = [\bigcup_{\vec{r}\in S_n} I_{\vec{r}\vee 0}] \cup [\bigcup_{\vec{r}\in S_n} I_{\vec{r}\vee 2}] = \bigcup_{\vec{s}\in S_{n+1}} I_{\vec{s}}$$

e $m(F_{n+1}) = 2^{n+1}.\frac{1}{3^{n+1}} = (\frac{2}{3})^{n+1}$.

Por indução, portanto, construimos uma sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos fechados de [0,1], com as seguintes propriedades:

(1) $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$

(2) $F_n = \bigcup_{\vec{r}\in S_n} I_{\vec{r}}$, onde $\{I_{\vec{r}} : \vec{r} \in S_n\}$ é uma família de 2^n intervalos fechados, dois a dois disjuntos, cada um deles de comprimento $\frac{1}{3^n}$, de maneira que $m(F_n) = (\frac{2}{3})^n$.

(3) Dados $n \geq 1$ e $\vec{r} \in S_n$, os elementos de $I_{\vec{r}}$ possuem expansão ternária tal que as n casas depois da vírgula coincidem com as coordenadas de $\vec{r}$.

(4) Dados $m, n \geq 1$, se $n < m$, $\vec{r} \in S_n$, $\vec{s} \in S_m$ e $\vec{s}$ é continuação de $\vec{r}$ então $I_{\vec{s}} \subseteq I_{\vec{r}}$. Se $\vec{s}$ não é continuação de $\vec{r}$ então $I_{\vec{r}} \cap I_{\vec{s}} = \emptyset$. Além disso, para $\vec{r} \in S_n$, $I_{\vec{r}\vee 0} < I_{\vec{r}\vee 2}$.

Seja $C = \bigcap_{n \geq 1} F_n$. C denomina-se conjunto de Cantor.

Algumas propriedades do conjunto de Cantor

(1) C é compacto, isto é, é fechado e limitado.

(2) $m(C) = 0$ (O conjunto de Cantor possui medida nula.)

Demonstração: Temos que $C = \bigcap_{n \geq 1} F_n$, onde $m(F_n) = (\frac{2}{3})^n$, $\forall\, n \geq 1$.

Então $m(C) \leq m(F_n) = (\frac{2}{3})^n$, $\forall\, n \geq 1$. Logo, $m(C) = 0$.

(3) C possui interior vazio.

Demonstração. Se $x \in C$ é ponto interior de C, existe um intervalo aberto $J =]x - \epsilon, x + \epsilon[$, com $x \in J \subseteq C$. Nessas condições, temos que $l(J) = 2\epsilon > 0$ e $l(J) = m(J) \geq m(C)$, e portanto, $m(C) > 0$: contradição.

(4) Todo ponto de C é ponto de acumulação de C.

Demonstração: Seja $z \in C$ e $\epsilon > 0$. Vamos provar que o intervalo $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contém um elemento de C diferente de z. Considere $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\epsilon}{4}$. Como $z \in C$ e $C = \bigcap_{n \geq 1} F_n$, vale que $z \in F_{n_0}$. F_{n_0} é reunião de 2^{n_0} intervalos fechados, cada um deles de comprimento $\frac{1}{3^{n_0}}$, e portanto, existe um tal intervalo J com $l(J) = \frac{1}{3^{n_0}}$, $J \subseteq F_{n_0}$ e $z \in J$. Como $l(J) = \frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\epsilon}{4}$ então $J \subseteq]z - \epsilon, z + \epsilon[$. Como ambas as extremidades de intervalos deletados na construção do conjunto de Cantor estão em C, concluimos que, mesmo que z seja uma das extremidades do intervalo J, a outra extremidade de J está em $C \cap]z - \epsilon, z + \epsilon[$. Portanto, z é ponto de acumulação de C.

(5) C é equipotente a $\mathbb{R}$:

Demonstração: Seja $z \in \{0, 2\}^\omega$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$. Para cada $n \geq 1$, considere $\vec{v}_n(z) = (r_1^z, r_2^z, \ldots, r_n^z) \in S_n$, com $r_i^z = z_i$, $1 \leq i \leq n$. Para cada $n \geq 1$, temos que $I_{\vec{v}_n(z)} \subseteq F_n$ e, pela construção descrita anteriormente, $I_{\vec{v}_1(z)} \supseteq I_{\vec{v}_2(z)} \supseteq \ldots I_{\vec{v}_n(z)} \supseteq \ldots$. Como $l(I_{\vec{v}_n(z)}) = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, e a sequência acima é de intervalos fechados e encaixantes, resulta que existe um único $\overline{z} \in [0, 1]$ tal que $\{\overline{z}\} = \bigcap_{n \geq 1} I_{\vec{v}_n(z)}$. Na realidade, temos que $\overline{z} \in C$ e $\overline{z} = 0, z_1 z_2 \ldots$ na base ternária.

Fica então definida a função $h : \{0, 2\}^\omega \longrightarrow C$, $h(z) = \overline{z}$, $\forall\, z \in \{0, 2\}^\omega$.
Vamos provar que h é injetora. Daí virá que $|\{0, 2\}^\omega| \leq |C|$. Mas $|\{0, 2\}^\omega| = |\mathbb{R}|$. Logo, teremos $|C| = |\mathbb{R}|$.

Sejam $x, y \in \{0, 2\}^\omega$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $x \neq y$. Então existe $n_0 = \min\{n : x_n \neq y_n\}$.
Se $n_0 = 1$, teremos $\overline{x} \in I_{\vec{v}_1(x)}$, $\overline{y} \in I_{\vec{v}_1(y)}$ e, como $\vec{v}_1(x) \neq \vec{v}_1(y)$, vale que $I_{\vec{v}_1(x)} \cap I_{\vec{v}_1(y)} = \emptyset$. Logo, $\overline{x} \neq \overline{y}$. Se $n_0 > 1$, temos que $\overline{x}, \overline{y} \in I_{\vec{v}_j(x)} = I_{\vec{v}_j(y)}$, $1 \leq j \leq n_0 - 1$. Mas $I_{\vec{v}_{n_0}(x)} \cap I_{\vec{v}_j(n_0)(y)} = \emptyset$. Como $\overline{x} \in I_{\vec{v}_{n_0}(x)}$ e $\overline{y} \in I_{\vec{v}_{n_0}(y)}$, obtemos novamente que $\overline{x} \neq \overline{y}$.

Conjunto de Cantor de medida positiva

Seja $0 < \alpha < 1$.

Do intervalo [0,1] removemos o intervalo aberto $R_1^\alpha =]\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{6}[$, e obtemos o conjunto fechado F_1^α, reunião de dois intervalos fechados, cada um deles de comprimento $\frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{3})$, de maneira que $m(F_1^\alpha) = 2.\frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{3}) = 1 - \frac{\alpha}{3}$.

Vamos designar $\begin{cases} I_0^\alpha = [0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}] \\ I_2^\alpha = [\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}, 1] \end{cases}$

No segundo estágio dessa construção, removemos, de cada um dos intervalos I_0^α e I_2^α, um intervalo aberto de comprimento $\frac{\alpha}{3^2}$, centrado em seus pontos médios, respectivamente. O conjunto deletado - que chamaremos de R_2^α - é reunião de dois intervalos abertos, e temos que $m(R_2^\alpha) = 2.\frac{\alpha}{3^2}$. Ficamos com o conjunto fechado F_2^α, reunião de 2^2 intervalos fechados, dois a dois disjuntos, cada um deles de comprimento $\frac{1}{2^2}(1 - \alpha - 2.\frac{\alpha}{3^2})$, de maneira que $m(F_2^\alpha) = 1 - \alpha - 2.\frac{\alpha}{3^2}$.

Vamos designar $F_2^\alpha = (I_{00}^\alpha \cup I_{02}^\alpha) \cup (I_{20}^\alpha \cup I_{22}^\alpha)$ onde

$$\begin{cases} I_{00}^\alpha \cup I_{02}^\alpha = I_0^\alpha \\ I_{20}^\alpha \cup I_{22}^\alpha = I_2^\alpha \end{cases}$$

No terceiro estágio dessa construção removemos, de cada um dos 2^2 intervalos que compõem F_2^α, um intervalo aberto de comprimento $\frac{\alpha}{3^3}$, centrado em seus pontos médios respectivamente. A reunião desses 2^2 intervalos abertos será designada por R_3^α, e temos que $m(R_3^\alpha) = 2^2 \frac{\alpha}{3^3}$. Obtemos o fechado F_3^α, reunião de 2^3 intervalos fechados, dois a dois disjuntos, cada um deles de comprimento $\frac{1}{2^3}(1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \frac{2^2\alpha}{3^3})$. Assim, $m(F_3^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \frac{2^2\alpha}{3^3}$.

Vamos escrever $F_3^\alpha = \bigcup_{\vec{s} \in S_3} I_{\vec{s}} = I_{0,0,0} \cup I_{0,0,2} \cup I_{0,2,0} \cup I_{0,2,2} \cup I_{2,2,0} \cup I_{2,2,2}$, de maneira que se $\vec{r} \in S_2$, $\vec{s} \in S_3$, e $\vec{s}$ é continuação de $\vec{r}$ então $I_{\vec{s}} \subseteq I_{\vec{r}}$.

Prosseguindo por indução, construimos uma sequência $(F_n^\alpha)_{n \geq 1}$ de subconjuntos fechados de [0,1] com as seguintes propriedades:

(i) $F_1^\alpha \supseteq F_2^\alpha \supseteq \ldots \supseteq F_n^\alpha \supseteq \ldots$

(ii) $F_n^\alpha = \bigcup_{\vec{s} \in S_n} I_{\vec{s}}$, reunião de 2^n intervalos fechados, dois a dois disjuntos, cada um deles de comprimento $\frac{1}{2^n}(1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \ldots - \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n})$, de maneira que
$m(F_n^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \ldots - \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n}$.

(iii) Dados $m, n \geq 1$, com $m < n$, se $\vec{r} \in S_m$ e $\vec{s} \in S_n$ e $\vec{s}$ é continuação de $\vec{r}$ então $I_{\vec{s}} \subseteq I_{\vec{r}}$.

Considere $C_\alpha = \bigcap_{n\geq 1} F_n^\alpha$.

(1) C_α é compacto.

(2) $m(C_\alpha) = 1 - \alpha$.

Demonstração: Temos que $m(C_\alpha) \leq m(F_n^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \ldots - \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n}$, $\forall\, n \geq 1$. $C_\alpha = \bigcap_{n\geq 1} F_n^\alpha$ e $F_1^\alpha \supseteq F_2^\alpha \supseteq \ldots \supseteq F_n^\alpha \supseteq \ldots$. Além disso, $m(F_1^\alpha) < +\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} m(C_\alpha) &= \lim_{n\to+\infty} m(F_n^\alpha) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\alpha}{3^2} - \ldots - \frac{2^{n-1}\alpha}{3^n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} [1 - \alpha(1 - (\frac{2}{3})^n)] \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

(3) O interior de C_α é vazio.

(4) Todo ponto de C_α é ponto de acumulação de C_α.

(5) $|C_\alpha| = c = |\mathbb{R}|$.

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 1

Definições: Sejam A e B dois conjuntos.

(i) Dizemos que A é equipotente a B – e escrevemos $A \equiv B$ – se existe uma função bijetora $f\colon A \longrightarrow B$.

(ii) A é equipotente a uma parte de B – $A \hookrightarrow B$ – se existe uma função injetora de A em B.

(1) Prove que, dados conjuntos A, B, C, se $A \equiv B$ e $B \equiv C$ então $A \equiv C$. ✓

(2) Vamos indicar por $B = \{0, 2, 4, \dots\}$ o conjunto dos números pares e por $D = \{1, 3, 5, \dots\}$ o conjunto dos números ímpares.

(a) Seja $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow B$ definida por $g(k) = 2k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Prove que g é bijetora, e portanto, $\mathbb{N} \equiv B$ (o conjunto dos números naturais é equipotente ao conjunto dos números pares).

(b) Prove que $\mathbb{N} \equiv D$.

É famoso, útil e importante o seguinte teorema, de autoria de Georg Cantor, matemático alemão (1845 - 1918), considerado o criador da Teoria dos Conjuntos.

Teorema: Dados dois conjuntos A e B, se $A \hookrightarrow B$ e $B \hookrightarrow A$ então $A \equiv B$.
(Se existe uma função injetora de A em B e uma função injetora de B em A então existe uma função bijetora de A em B.)

(3) Dado um número natural $n \geq 1$, sabemos, pela sua decomposição em fatores primos, que existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = 2^p(2q+1)$. Seja $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ definida por $h(p,q) = 2^p(2q+1)$, $\forall\, (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Prove que h é injetora. Conclua, usando o teorema de Cantor, que $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(4) Seja $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(\tfrac{p}{q}) = \begin{cases} 2(2^p(2q+1)) & \text{se } \frac{p}{q} > 0 \text{ é irredutível} \\ 2(2^{|p|}(2|q|+1)) + 1 & \text{se } \frac{p}{q} < 0 \text{ é irredutível} \\ 0 & \text{se } \frac{p}{q} = 0 \end{cases}$$

Prove que f é injetora. Conclua que $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{N}$.

* (5) Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos tais que $A_1 \equiv \mathbb{N}$ e $A_2 \equiv \mathbb{N}$.
Prove que $A_1 \cup A_2 \equiv \mathbb{N}$.

(6) Sejam $(A_n)_{n \geq 1}$ uma família enumerável de conjuntos equipotentes a $\mathbb{N}$ e, para cada $n \geq 1$, $f_n : A_n \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função bijetora.
Para cada $x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$, considere $n_x = min\{k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_k\}$.

Seja $f : \bigcup_{n \geq 1} A_n \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2^{n_x}(2f_{n_x}(x) + 1)$, $\forall\, x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Prove que f é injetora e conclua que a reunião enumerável de uma família de conjuntos enumeráveis resulta num conjunto enumerável.

(7) Prove que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

(8) Seja S o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's, isto é, $S = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \{0, 1\}, \forall\, n \geq 1\}$. Prove que $S \equiv \mathbb{R}$. (   )

(9) Prove que qualquer intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ é equipotente a $\mathbb{R}$.

(10) (i) Se A é um conjunto finito então $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. ✓

(ii) Dado qualquer conjunto A, existe uma função injetora de A em $\mathcal{P}(A)$, mas não existe função sobrejetora de A em $\mathcal{P}(A)$ (Teorema de Cantor). Assim, sempre temos para qualquer conjunto A, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ (Sugestão: suponha que exista uma função sobrejetora $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Considere o conjunto $C = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Então $C \in \mathcal{P}(A)$. Se f é sobrejetora, existe $a \in A$ tal que $f(a) = C$. Discuta os casos em que $a \in f(a)$ e que $a \notin f(a)$ para obter uma contradição.)

(11) Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Prove

(i) Dados $A, B \subseteq X$ $(A \subseteq B \rightarrow f(A) \subseteq f(B))$.

(ii) Dados $A, B \subseteq X$ $(f(A) - f(B) \subseteq f(A - B))$.
Em particular, $f(X) - f(A) \subseteq f(X - A)$.
Mostre, com um exemplo, que a inclusão contrária nem sempre ocorre.

(iii) Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de X então:

(a) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

(b) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Mostre, com um exemplo, que a igualdade pode não valer.

Resolução da Lista 1 de MAT0234 - Medida e Integração

Exercício 1 Se $A \equiv B$, então existe uma função $f : A \to B$ tal que f é bijetora. Analogamente, de $B \equiv C$ concluímos que existe $g : B \to C$, tal que g é bijetora. Em particular, como $\mathrm{Im}(f) \subseteq B = \mathrm{Dom}(g)$, podemos considerar a função $g \circ f : A \to C$. Provaremos que $g \circ f$ é bijetora.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in A$ tais que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{g \text{ é inj}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{f \text{ é inj.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Portanto $g \circ f$ é injetora. Agora seja $z \in C$. Da sobrejetividade de g, segue que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$, e da sobrejetividade de f, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, e consequentemente $g \circ f$ é sobrejetora.

Sendo $g \circ f$ injetora e sobretora, temos que $g \circ f$ é bijetora, e portanto $A \equiv C$.

Exercício 2

a - Suponhamos que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ são tais que $g(n_1) = g(n_2)$.

$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$

Portanto g é injetora. Agora seja $y \in B$. Temos que $y = 2x$ para algum $x \in \mathbb{N}$, o que significa que $y = g(x)$. Assim, provamos que g é sobrejetora, o que implica que $\mathbb{N} \equiv B$.

b - Consideremos $h : B \to D$, $h(x) = x + 1$. É imediato que h é injetora. Agora tomemos $y \in D$. Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{N}$, temos que existem $q, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 2$, tais que $y = 2q + r$. Assim, $r = 0$ ou 1.

Se $r = 0$, então $y = 2q$, o que implica $y \in B$, absurdo pois $y \in D$. Logo $r = 1$, e portanto $y = h(q)$. Consequentemente, h é bijetora, e $B \equiv D$.

Como $\mathbb{N} \equiv B$ e $B \equiv D$, segue de (1) que $\mathbb{N} \equiv D$.

Exercício 3 Sejam $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$. Temos três casos a considerar: (i) $p_1 \neq p_2$ e $q_1 \neq q_2$, (ii) $p_1 = p_1$ e $q_1 \neq q_2$ ou (iii) $p_1 \neq p_1$ e $q_1 = q_2$. No caso (i), temos $2^{p_1} \neq 2^{p_2}$ e $2q_1 + 1 \neq 2q_2 + 1$. Se tivéssemos $h(p_1, q_1) = h(p_2, q_2)$ então obrigatoriamente $2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = 2q_2 + 1$ ou $2^{p_2 - p_1}(2q_2 + 1) = 2q_1 + 1$, o que não pode ocorrer, pois um dos membros é par e o outro é ímpar. Portanto $h(p_1, q_1) \neq h(p_2, q_2)$.

No caso (ii), temos $2^{p_1} = 2^{p_2}$ e $2q_1 + 1 \neq 2q_2 + 1$, o que implica $2^{p_1}(2q_1 + 1) \neq 2^{p_2}(2q_2 + 1)$, ou seja, $h(p_1, q_1) \neq h(p_2, q_2)$. Finalmente, para o caso (iii), temos $2^{p_1} \neq 2^{p_2}$ e $2q_1 + 1 = 2q_2 + 1$, que novamente implica $2^{p_1}(2q_1 + 1) \neq 2^{p_2}(2q_2 + 1)$, e portanto $h(p_1, q_1) \neq h(p_2, q_2)$ em qualquer um dos casos. Isso prova que h é injetora.

Considerando $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 0)$, temos que f é injetora, o que implica pelo teorema que $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercício 4 É imediato para todo $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, que $2(2^p(2q+1)) \geq 0$, $2(2^p(2q+1)) + 1 > 0$ e $2(2^p(2q+1)) \neq 2(2^r(2s+1)) + 1$ (sendo esta última desigualdade uma consequência da paridade dos números em questão). Assim, se $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$ são tais que $f(p/q) = f(r/s)$, basta considerar os seguintes três casos: (i) $f(p/q) = 0 = f(r/s)$, (ii) $f(p/q) = 2(2^p(2q+1)) = 2(2^r(2s+1)) = f(r/s)$ ou (iii) $f(p/q) = 2(2^{|p|}(2|q|+1)) + 1 = 2(2^{|r|}(2|s|+1)) + 1 = f(r/s)$. No caso (ii), temos:

$$2(2^p(2q+1)) = 2(2^r(2s+1)) \Rightarrow 2^p(2q+1) = 2^r(2s+1) \overset{\text{parid.} + \text{divis.}}{\Rightarrow} p = r, q = s$$

Analogamente, concluímos $p = r$ e $q = s$ no caso (iii). Assim, f é injetora e temos a inclusão $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $i(n) = n/1$. Portanto, pelo teorema, segue que $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{N}$.

Exercício 5 Do enunciado, temos que existem funções bijetoras $\phi_1 : A_1 \to \mathbb{N}$ e $\phi_2 : A_2 \to \mathbb{N}$. Consideremos a função h conforme o exercício 3 e definamos $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} (2^{\phi_1(x)}, 0) & \text{se } x \in A_1 \setminus A_2 \\ (0, 2^{\phi_2(x)}) & \text{se } x \in A_2 \setminus A_1 \\ (2^{\phi_1(x)}, 2^{\phi_1(x)}) & \text{se } x \in A_1 \cap A_2 \end{cases}$$

Segue imediatamente que f é injetora, e portanto, $h \circ f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N}$ é injetora (pois composição de função injetora é injetora). Assim, tomando $\phi_1^{-1} : \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$ (apenas "aumentei" o contradomínio!) estamos nas hipóteses do teorema. Conclusão: $A_1 \cup A_2 \equiv \mathbb{N}$.

Exercício 6 Sejam $x, y \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ tais que $x \neq y$. Temos então, dois casos a considerar: (i) $n_x = n_y$ (ii) $n_x \neq n_y$. No caso (i), temos que se $n_x = n_y = k$, segue da definição dos n_x, que $x, y \in A_k$. Portanto $f_k(x) \neq f_k(y)$, o que implica $f(x) = 2^k(2f_k(x)+1) \neq 2^k(2f_k(y)+1) = f(y)$. Para o caso 2, temos que $2^{n_x} \neq 2^{n_y}$. Se tivéssemos $f(x) = f(y)$, então teríamos $2^{n_x - n_y}(2f_{n_x}(x)+1) = 2f_{n_y}(y)+1$ ou $2^{n_y - n_x}(2f_{n_y}(y)+1) = 2f_{n_x}(x)+1$, que é um absurdo por conta da paridade. Logo $f(x) \neq f(y)$ em ambos os casos. Tomando $f_1^{-1} : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\geq 1} A_n$ (apenas "aumentei" o contradomínio!), estamos nas hipóteses do teorema. Conclusão: $\bigcup_{n\geq 1} A_n \equiv \mathbb{N}$.

Exercício 7 Sabemos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos escolher uma representação decimal infinita de α. Em outras palavras, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos associar uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde x_0 é a parte inteira de α, $x_n \in \{0, ..., 9\}$ para todo $n \geq 1$ e $\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ (ou seja, escolhemos uma representação decimal para α). Nestes termos, por abuso de notação, escreveremos $\alpha = x_0, x_1x_2x_3, ..., x_n....$

Feito isso, suponhamos por absurdo que $\mathbb{R}$ seja enumerável. Isso implica em particular, que $]0,1[$ também é enumerável. Suponhamos então, que $]0,1[= \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Escrevendo a representação decimal de cada α_n, temos

$$\alpha_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}...x_{nn}... : x_{nj} \in \{0, ..., 9\} \forall j \in \mathbb{N}$$

Seja $y = 0, y_1y_2...y_n...$ tal que $y \neq 0$, $y_n \leq 9$ e $y_n \neq x_{nn}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $y \in]0,1[$ mas $y \neq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo. Logo não existe tal enumeração, e portanto $]0,1[$ é não enumerável, o que implica $\mathbb{R}$ não enumerável.

Exercício 8 Definamos a seguinte função $f : S \to]0,1[$, onde $f(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0, x_1x_2x_3, ..., x_n...$ na representação decimal, sendo que $x_i = 0$ se $s_i = 0$ e $x_i = 1$ se $s_i = 1$. Temos que se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então $s_k \neq t_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Isso é suficiente para provar que $f(\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \neq f(\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, e portanto f é injetora. Repetindo o processo do exercício anterior, temos que para todo $\alpha \in]0,1[$, $\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{x_k}{2^k}$, onde $x_k \in \{0,1\}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ (isto é, fizemos a representação de α na base 2). Assim, podemos definir $g : \mathbb{R} \to S$ sendo $g(\alpha) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $y_{2k} = x_k$, se $k > 0$, e $y_{-2k+1} = x_k$, se $k \leq 0$. Da construção de g, segue a injetividade, e portanto, pelo teorema, $\mathbb{R} \equiv S$.

Exercício 9 Primeiramente, suponhamos que o intervalo é limitado. Assim, tomando o intervalo não degenerado arbitrário $I =]a,b[$ (respectivamente $[a,b]$), temos que a função $f :]0,1[\to I$, (ou $f : [0,1] \to [a,b]$) $f(x) = (b-a)x + a$ é bijetora. Portanto, podemos sem perda de generalidades reduzir o problema aos caso $I =]0,1[$ ou $[0,1]$. A partir daí, façamos o seguinte: definamos a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$. Em seguida, definamos a seguinte função:

$$f : [0,1] \to]0,1[, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} a_1 \text{ se } x = 0 \\ a_2 \text{ se } x = 1 \\ a_{n+2} \text{ se } x = a_n, n \geq 1 \\ x \text{ se } x \in [0,1] \setminus \{0, 1, a_1, a_2, ...\} \end{cases}$$

Como f é evidentemente bijetora, segue que $[0,1] \equiv]0,1[$. Assim, reduzimos o problema ao caso $]0,1[$.

Temos que $]0,1[\hookrightarrow \mathbb{R}$ via inclusão canônica. Para provar que $\mathbb{R} \hookrightarrow]0,1[$, assumiremos antes, a existência da função exponencial. Nestes termos, consideremos $g : \mathbb{R} \to]0,1[$, $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Temos que g é uma injeção de $\mathbb{R}$ em $]0,1[$ pois:

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^y} \Leftrightarrow 1 + e^x = 1 + e^y \Leftrightarrow e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

Consequentemente, pelo teorema, segue que $\mathbb{R} \equiv]0,1[$. No caso de intervalos de forma $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$; temos que $]a,+\infty[\equiv]-\infty, a[$ e $[a,+\infty[\equiv]-\infty, a]$ (via $f(x) = -x$), e $]a,+\infty[\equiv [a,+\infty[$, sendo a seguinte função uma bijeção explícita:

$$g :]a,+\infty[\to [a,+\infty[, \text{ onde } g(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \in \mathbb{N} + a = \{n + a : n \in \mathbb{N}\} \\ x \text{ se } x \notin \mathbb{N} + a \end{cases}$$

Portanto, reduzimos o problema ao caso $I =]a,+\infty[$ por exemplo. Para este caso, (novamente assumindo a existência da função exponencial), basta tomar a função $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = a + e^x$.

Exercício 10

i - Faremos por indução. Se $|A| = 0$, $A = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A) = \emptyset$, e portanto $|\mathcal{P}(A)| = 2^0 = 1$. Agora suponhamos que para algum $n > 0$ valha a hipótese. Seja $A = x_0, ..., x_{n-1}$, e consideremos $B = A \setminus \{x_{n-1}\}$. Temos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup C$, onde $C = \{X \cup \{x_{n-1}\} : X \in \mathcal{P}(B)\}$. Temos também que $\mathcal{P}(B) \equiv C$, pois as funções $f : \mathcal{P}(B) \to C$, $f(X) = X \cup \{x_{n-1}\}$ e $g : C \to \mathcal{P}(B)$, $g(Y) = Y \setminus \{x_{n-1}\}$ são injetoras. Portanto $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)| + |C|$. Da hipótese de indução, temos que $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$. Logo $|\mathcal{P}(A)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}$, provando o desejado.

ii - Sejam f, C e a conforme o enunciado. Se $a \in f(a) = C$, então da construção de C, segue que $a \notin f(a)$, absurdo. Se $a \notin f(a)$, novamente da construção de C, segue que $a \in C = \{x : x \notin f(x)\}$, absurdo. Portanto não existe tal f, e consequentemente $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Exercício 11

i - Se $y \in f(A)$, então existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $A \subseteq B$, $x \in B$, e portanto $y \in f(B)$. Isso prova que $f(A) \subseteq f(B)$.

ii - Se $y \in f(A) \setminus f(B)$, então existe um $x \in A$ tal que $x \notin B$ e $f(x) = y$. De $x \in A$ tal que $x \notin B$ segue que $x \in A \setminus B$, e portanto $y \in f(A \setminus B)$. Isso prova que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$. Para um contraexemplo de que a inclusão contrária não vale, tome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$ e $B = [0, 1]$. Temos que $f(A) = f(B) = [0, 1]$, $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$ e $f(A \setminus B) = f([-1, 0[) =]0, 1] \not\subseteq \emptyset$.

iii -

a - Seja $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Então para algum $i \in I$, existe $x \in A_i$, tal que $y = f(x)$. Isso implica que $y \in f(A_i)$, e portanto $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Reversamente, seja $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Logo, para algum $i \in I$, $y \in f(A_i)$, e portanto existe $x \in A_i$ tal que $y = f(x)$. Consequentemente $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, e portanto $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subseteq f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, seguindo a igualdade.

b - Seja $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Então existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A_i$ para todo $i \in I$, temos que $y \in f(A_i)$ para todo $i \in I$. Isso prova que $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Para um contraexemplo de que a inclusão contrária não vale, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $I = \{1, 2\}$, com $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [2, 3]$. Temos que $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = f([0, 1] \cap [2, 3]) = f(\emptyset) = \emptyset$, e $\bigcap_{i\in I} f(A_i) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \not\subseteq \emptyset$.

MAT 0254 – Lista 1.

Nome: Cezar E F Gonçalves nº 7576771.

① Se $A \equiv B$, então existe uma função bijetora $f: A \to B$. Se $B \equiv C$, então existe uma função bijetora $g: B \to C$. Portanto, a ~~composição~~ composição $f \circ g: A \to C$ é uma bijeção, porquê?, logo $A \equiv C$.

② (a) $g: \mathbb{N} \to B$, onde $g(k) = 2k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dado $b \in B$ (conjunto dos nºs pares), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = b$, ou seja, $2k = b$ porque para construir B foram utilizados os naturais. Então, g é sobrejetora.

Dados k_1 e $k_2 \in \mathbb{N}$, com $k_1 \neq k_2$ então $g(k_1) = 2k_1 \neq 2k_2 = g(k_2)$, ~~então~~ logo g é injetora.

Conclui-se que g é bijetora.

(b) Seja $h: B \to D$ definida por $h(b) = b+1$, $\forall b \in B$. A função h é uma bijeção, pois $\forall d \in D$ existe $b \in B$ tal que $b+1 = d$, e se $b_1 \neq b_2$ então $h(b_1) \neq h(b_2)$.

Como visto, $g: \mathbb{N} \to B$ é uma bijeção. Conforme exercício 1, como $\mathbb{N} \equiv B$ e $B \equiv D$, então $\mathbb{N} \equiv D$.

③ Pela unicidade da fatoração de naturais como produto de primos (Teorema Fundamental da Aritmética), $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ é injetiva porque sejam $h(p,q) = n_1$ e $h(r,s) = n_2$. Se $n_1 = n_2$, então $2^p(2q+1) = 2^r(2s+1)$. Pela unicidade da fatoração, obrigatoriamente $(p,q) = (r,s)$, logo h é injetiva. prove diretamente.

Por sua vez, a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (n,n)$ é claramente injetiva. Conclui-se, usando o teorema de Cantor, que $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ porque existem as injeções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, logo existe a bijeção $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

④ Sejam $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{p}{q} \neq \frac{r}{s}$.

Caso $\frac{p}{q} > 0$ e $\frac{r}{s} < 0$, então $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq f\left(\frac{r}{s}\right)$ porque $f\left(\frac{p}{q}\right)$ é par e $f\left(\frac{r}{s}\right)$ é ímpar. Caso um deles seja 0, também temos $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq f\left(\frac{r}{s}\right)$.

Caso $\frac{p}{q} \geq 0$ e $\frac{r}{s} > 0$, então $2^p(2^q+1) \neq 2^r(2^s+1)$, prove diretamente. pela unicidade da fatoração em primos, e portanto $2(2^p(2^q+1)) \neq 2(2^r(2^s+1))$, ou seja $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq f\left(\frac{r}{s}\right)$.

Caso $\frac{p}{q} < 0$ e $\frac{r}{s} < 0$ o raciocínio é análogo.

Conclui-se que se $\frac{p}{q} \neq \frac{r}{s} \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) \neq f\left(\frac{r}{s}\right)$

$\therefore$ f é injetora.

Como existe injeção $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (basta definir $g(n) = \frac{n}{1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$), então existe a bijeção $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{N}$.

(5) Existem as injeções $f: A_1 \to \mathbb{N}$ e $g: A_2 \to \mathbb{N}$.

Defino $h: A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N}$ como

$$h(a) = \begin{cases} 2f(a), & \text{se } a \in A_1 \\ 2g(a)+1, & \text{se } a \in A_2 \text{ e } a \notin A_1. \end{cases}$$

h é injetora porque, se $a_1 \in A_1 \cup A_2$ e $a_2 \in A_1 \cup$ com $a_1 \neq a_2$: (i) caso $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_1$,
$h(a_1) = 2f(a_1) \neq 2f(a_2) = h(a_2)$ pois f é injetora.

(ii) caso $a_1 \in A_2$ e $a_2 \in A_2$ o raciocínio é análogo

(iii) caso $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$, $h(a_1) \neq h(a_2)$ porque $h(a_1)$ é par e $h(a_2)$ é ímpar.

agora, verificaremos a existência de uma função injetora $k: \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$.

Por hipótese, existe a injeção $e: \mathbb{N} \to A_1$. Portanto, esta mesma função é uma injeção de $\mathbb{N}$ em $A_1 \cup A$

como existem as funções injetoras $h: A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N}$ e $k: A_1 \cup A_2 \to \mathbb{N}$, então $A_1 \cup A_2 \equiv \mathbb{N}$.

(7) argumento pela diagonal de Cantor. Fazemos uma enumeração dos números reais entre 0 e 1:

1: $0, \boxed{a_1}\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \cdots$

2: $0, b_1\, \boxed{b_2}\, b_3\, b_4\, b_5 \cdots$

3: $0, c_1\, c_2\, \boxed{c_3}\, c_4\, c_5 \cdots$

4: $0, d_1\, d_2\, d_3\, \boxed{d_4}\, d_5 \cdots$

$\vdots$

seja $x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots \in (0,1)$ tal que $x_1 \neq a_1, 0$, $x_2 \neq b_2, 0$, $x_3 \neq c_3, 0$, $x_4 \neq d_4, 0$, etc. Pela construção, x não está na enumeração, então não existe função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em $(0,1)$. Como $(0,1) \subset \mathbb{R}$, segue que não existe sobrejeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}$ é não enumerável.

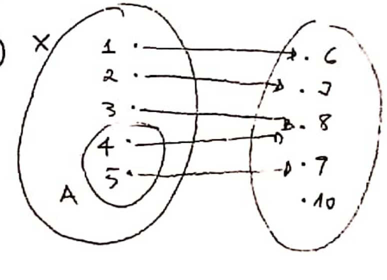
(11) (i) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.

$f(A) = \{x \mid \exists a \in A: x = f(a), \cancel{\forall a \in A}\}$. Por hipótese, se $a \in A$ então $a \in B$ porque $A \subseteq B$.

Logo, se $x \in f(A)$ então existe $a \in A$ tal que $x = f(a)$, e como $a \in B$, $x \in f(B)$.

Então $f(A) \subseteq f(B)$.

(ii)



$X = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{4,5\}$

$X - A = \{1,2,3\}$

$f(X) = \{6,7,8,9\}$

$f(A) = \{8,9\}$

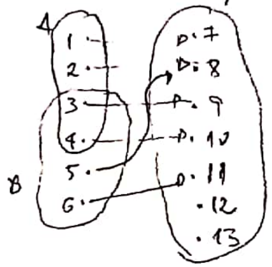
$f(X) - f(A) = \{6,7\}$

$f(X-A) = \{6,7,8\}$.

Portanto, $f(X) - \cancel{f(A)} \subseteq f(X-A)$, mas

$f(X-A) \not\subseteq f(X) - f(A)$.

(iii)



$f(A \cap B) = f(\{3,4\}) = \{9,10\}$

$f(A) \cap f(B) = \{7,8,9,10\} \cap \{9,10,8,11\}$

$= \{8,9,10\}$.

Portanto, a igualdade pode não valer (caso a função seja não injetora).

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 5

(1) Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função qualquer entre dois conjuntos X e Y.

Dados $A \subseteq X$ e $E \subseteq Y$, definimos

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ (imagem direta de A por f)

$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ (imagem inversa de E por f)

Prove:

(i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$

$f^{-1}(\bigcup_{i\in I}$

(ii) $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c$

(iii) Se $(E_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de Y então
$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i)$ e $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i)$.

(iv) Se $A_1, A_2 \subseteq X$ então $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
Dê um exemplo mostrando que nem sempre vale a igualdade.

(v) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de X então $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(2) Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função e $\mathcal{Y}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Y. Considere $\mathcal{X} = \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{Y}\}$. Prove que $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra de X.

i) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$
ii) $A \in \mathcal{X} \to A^c \in \mathcal{X}$
iii) $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{X}$ $\Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{X}$

Definição: Sejam $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ espaços de medida e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é mensurável se, para todo $E \in \mathcal{M}_Y$, tem-se que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$.

No caso da teoria de integração de Lebesgue, definimos uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo mensurável se f é $\boxed{\mathcal{M} - \mathcal{B}_\mathcal{R} \text{ mensurável}}$. Uma vez que os intervalos da forma $]a, +\infty[$ geram $\mathcal{B}_\mathcal{R}$, tal definição é equivalente à frase "$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ é mensurável."

$\mathcal{M} \setminus \mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{M} \cap \mathcal{B}_\mathbb{R}^c$ $\mathcal{E} = \mathcal{M}_Y$

(3) Sejam $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ espaços de medida e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_Y$ tal que a σ-ágebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ gerada por $\mathcal{E}$ seja justamente $\mathcal{M}_Y$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função ~~tal que~~ $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$, para todo conjunto $E \in \mathcal{E}$. Prove que, nestas condições, f é mensurável. $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$

$E \in \mathcal{M}_Y \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_X$

(4) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Prove que, dado $A \subseteq X$, tem-se que

χ_A é uma função mensurável $\Leftrightarrow$ A é um conjunto mensurável (isto é, $A \in \mathcal{M}$).

(5) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Determine as funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ quando $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e quando $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.

(6) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que se $E \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$.
(Sugestão: considere $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B}_\mathcal{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_\mathcal{R}\}$. Prove que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{B}_\mathcal{R}$. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{R}$, seguirá o resultado.)

Observação: Pela definição de função mensurável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, toda função contínua é $\mathcal{M} - \mathcal{B}_\mathcal{R}$ mensurável. Mas existem funções contínuas em $\mathbb{R}$ que não são $\mathcal{M} - \mathcal{M}$ mensuráveis.

Exemplo: Seja $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ a função de Cantor, e considere $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x + \varphi(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$. Sabemos que h é um homeomorfismo de $[0,1]$ em $[0,2]$ e que, sendo C o conjunto de Cantor, $m(h(C)) = 1$. Designemos $A = h(C) \subseteq [0,2]$. Com $m(A) > 0$, existe $D \subseteq A$ não mensurável. Temos que:

$$\left.\begin{array}{l} D \subseteq A \Rightarrow h^{-1}(D) \subseteq h^{-1}(A) = C \\ \\ m(C) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h^{-1}(D) \text{ é mensurável}$$

Mas $(h^{-1})^{-1}(h^{-1}(D)) = D$ não é mensurável, de maneira que a função contínua $h^{-1} : [0,2] \longrightarrow [0,1]$ não é $\mathcal{M} - \mathcal{M}$ mensurável.

(7) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções.

(i) Se g é contínua e f é mensurável então $g \circ f$ é mensurável.

(ii) Considere $h(x) = x + \varphi(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$, como no exemplo acima, assim como o subconjunto $D \subseteq h(C)$ não mensurável. Novamente, $h^{-1}(D) \subseteq C$ é mensurável.

Seja $g = \chi_{h^{-1}(D)}$ e $f = h^{-1}$. Verifique que f e g são funções mensuráveis, mas $g \circ f = \chi_D$ não o é.

(8) Sejam $(X, \mathcal{M}_X, \mu_1)$, $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_2)$, $(Z, \mathcal{M}_Z, \mu_3)$ espaços de medida e funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$. Se f e g são mensuráveis então $g \circ f$ é mensurável.
Este resultado entra em contradição com o contra exemplo anterior ? Justifique.

$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(9) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $c \in \mathbb{R}$.
Prove que a função $h(x) = f(x + c)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ é mensurável.

(10) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f é uma função mensurável e $f = g$ qs então g é mensurável.

quase sempre

(11) A propriedade enunciada no exercício 10 leva em conta o fato de a medida de Lebesgue ser completa. Quando a medida não é completa, a igualdade qs de duas funções pode não preservar a mensurabilidade.

Seja $X = \{0, 1, 2\}$ e $\mathcal{M}_X = \{\emptyset, X, \{0,1\}, \{2\}\}$, e μ a medida definida por $\mu(\emptyset) = 0 = \mu(\{0,1\})$, $\mu(X) = \mu(\{2\}) = 1$.

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

$f(x) = 3, \ \forall\, x \in X.$

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Verifique que f é mensurável, $f = g$ qs, mas g não é mensurável.

(12) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ \\ g(x) & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Prove que h é mensurável.

lim sup

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (sen(nx) - cos(nx))) > 0

(13) Prove que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \overline{\lim}(sen(nx) + cos(nx)) > 0\}$ é mensurável.

(14) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável e considere $g' = f$. Prove que g é função derivável.
(Sugestão: $g(x) = f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$.)

(15) (i) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis.
Prove que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é mensurável.

(ii) (i) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis.
Prove que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é mensurável.

se $A \subseteq \Lambda_1 \Rightarrow A^c \subseteq \Lambda_1$

se $A \subseteq \Lambda \Rightarrow A^c \subseteq \Lambda$

Logo se $A \subseteq \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \Rightarrow A^c \subseteq \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 4

Definição: Seja X um conjunto não vazio. Uma σ-álgebra de subconjuntos de X (ou simplesmente de X) é uma coleção $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ verificando as seguintes condições:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{M}$.

(A2) Para $A \subseteq X$, se $A \in \mathcal{M}$ então $A^c \in \mathcal{M}$.

(A3) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{M}$ então $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

Definição: Um espaço mensurável é um par $(X, \mathcal{M})$ onde X é um conjunto não vazio e $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Uma medida sobre um espaço mensurável $(X, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$, $A \longmapsto \mu(A)$, verificando as seguintes propriedades:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) μ é enumeravelmente aditiva, isto é: se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{M}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, $i, j \geq 1$ então $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Observe que $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$, $\forall A \in \mathcal{M}$.

Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$, onde $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável e μ é uma medida sobre este espaço.

$\emptyset \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu\emptyset = 0$

$\rightarrow (X, \mathcal{M})$

(1) Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{M}$ a coleção $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Considere a função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$(X, \mathcal{M})$ é um espaço

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{se } A \text{ é finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ é infinito} \end{cases}$$

$A \subseteq$ $\quad A = X, \quad X = \mathbb{N}$

Prove que μ é uma medida sobre $\mathbb{N}$ (chamada medida de contagem).

$\mu(\emptyset) = 0$

(2) Seja $X \neq \emptyset$. Se Λ_1 e Λ_2 são σ-álgebras de X então $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ é uma σ-álgebra de X. Mais geralmente, se $(\Lambda_i)_{i\in I}$ é uma família de σ-álgebras de X então $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ é uma σ-álgebra de X.

(3) Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{E}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Considere $\mathcal{C} = \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$. Seja $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ a interseção de todos os elementos de $\mathcal{C}$.

(i) $\emptyset \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

(ii) se $A \subseteq \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \Rightarrow A^c \subseteq \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

(iii) se $(A_i)_{n\geq 1} \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \Rightarrow \bigcup_{n\geq} A_i \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

Prove que $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$ e é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{E}$ segundo a ordem da inclusão, isto é: se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X que contém $\mathcal{E}$ então $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.
$\mathcal{A}(\mathcal{E})$ chama-se σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$.

Definição: Vamos designar por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denomina-se a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}$, cada elemento de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ chama-se um boreliano de $\mathbb{R}$.

(4) Prove que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é gerada por $\mathcal{E}$ para cada uma das coleções $\mathcal{E}$ apresentadas a seguir:

(i) $\mathcal{E} = \{]a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}$ $\quad (a, +\infty) \qquad \mathcal{O} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \quad (a, +\infty) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

(ii) $\mathcal{E} = \{[a, +\infty[\, : a \in \mathbb{R}\}$

(iii) $\mathcal{E} = \{]-\infty, a[\, : a \in \mathbb{R}\}$

(iv) $\mathcal{E} = \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

(v) $\mathcal{E} = \{]a, b[\, : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

(vi) $\mathcal{E} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

(vii) $\mathcal{E} = \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

(viii) $\mathcal{E} = \{[a, b[\, : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

(5) Seja $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são Lebesgue mensuráveis. Prove que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, isto é, todo boreliano é Lebesgue mensurável.

Resultado: $|\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = c$ e $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = 2^c$. Portanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

(4) $\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$

(6) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $A \in \mathcal{M}$. Considere a função $\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\lambda(E) = \mu(E \cap A)$, $\forall E \in \mathcal{M}$. Prove que λ é uma medida em $\mathcal{M}$.

(7) Seja $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\mu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n}$, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Prove que μ é uma medida em $\mathbb{N}$.

(8) Seja $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ e $x_0 \in X$. Considere $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

$A \cap B = \emptyset$ $\qquad = \mu(\mathbb{N}) = 1$

$\mu(X = \mathbb{N}) = 1$

$\mu(A) + \mu(B)$

Prove que μ é uma medida em X (chamada medida concentrada em x_0).

$\mu(\emptyset) = 0$ $\qquad = 1 + 0 = 0$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) +$

→ Caderno

(9) Sejam $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{M} = \{\emptyset,\ X,\ A = \{1, 3, 5, \ldots\},\ B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}\ \}$ e a medida μ definida por $\mu(\emptyset) = 0$. $\mu(X) = \mu(A) = 1$. $\mu(B) = 0$.

Prove que μ é uma medida sobre $\mathcal{M}$. Observe que $\mu(B) = 0$. $\{4, 8, 10\} \subseteq B$. mas $\{4, 8, 10\}$ não é nem mensurável. de maneira que não podemos dizer que a medida μ, aplicada a $\{4, 8, 10\}$ seja igual a 0

Este é exemplo de um espaço de medida que não é completo.

Mais precisamente:

Definição : Um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é completo se. para todo $A \subseteq X$,

se $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) = 0$ então. para todo $C \subseteq A$. tem-se que $C \in \mathcal{M}$ e $\mu(C) = 0$.

isto é. quando todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula são mensuráveis. Assim, o exercício anterior fornece exemplo de um espaço e medida que não é completo, enquanto que o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são Lebesgue mensuráveis é completo.

Resultado : O espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, m)$, onde m é a medida de Lebesgue restrita aos borelianos de $\mathbb{R}$ não é completo.

Demonstração : seja $C \subseteq [0,1]$ o conjunto de Cantor. Então C é fechado. e portanto. é boreliano. Sabemos que $m(C) = 0$. Como $|C| = c$, vale que $|\mathcal{P}(C)| = 2^c$, e portanto, C contém 2^c subconjuntos de medida nula. Mas $|\mathcal{B}_{\mathcal{R}}| = c$, de maneira que existem subconjuntos de C que não são borelianos: $C \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, $m(C) = 0$, mas existe $A \subseteq C$ tal que $A \notin \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$.

(10) (optativo) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e considere $\mathcal{Z} = \{Z \in \mathcal{M} : \mu(Z) = 0\}$ a coleção dos conjuntos mensuráveis de medida nula.

(i) Mostre que se $Z \in \mathcal{Z}$ e $E \in \mathcal{M}$ então $E \cap Z \in \mathcal{Z}$.

(ii) Mostre que se $Z_n \in \mathcal{Z}$. $\forall\, n \geq 1$ então $\bigcup_{n \geq 1} Z_n \in \mathcal{Z}$.

(iii) Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ a coleção de todos os subconjuntos W de X que podem ser escritos como $W = (E \cup C_1) - C_2$. onde $E \in \mathcal{M}$ e C_1, C_2 são subconjuntos de conjuntos de medida nula. isto é. existem Z_1, $Z_2 \in \mathcal{Z}$ tais que $C_1 \subseteq Z_1$ e $C_2 \subseteq Z_2$.

Prove que. dado $W \subseteq X$, $W \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ se, e somente se. W pode se escrever como $W = A \cup C$, onde $A \in \mathcal{M}$ e existe $Z \in \mathcal{Z}$ tal que $C \subseteq Z$.

Prove que $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X que contém $\mathcal{M}$.

(iv) Considere μ_0: $\mathcal{M}_{\mathcal{O}} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\mu_0(W) = \mu(E)$, se $W = E \cup C$. onde $E \in \mathcal{M}$ e C é subconjunto de um elemento de $\mathcal{Z}$. Então μ_0 está bem definida, é uma medida completa e μ_0, restrita a $\mathcal{M}$, coincide com μ.

(11) Prove que, em $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ é um completamento de $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$.

Resolução da Lista 4 de MAT0234 - Medida e Integração

Exercício 1 Como $\emptyset$ é finito, segue que $\mu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.

Agora seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{M}$ dois a dois disjuntos (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$). Temos então, dois casos a considerar:

- A_n é infinito para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ também é um conjunto infinito, e portanto $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = +\infty = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.
- A_n é finito para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ também é um conjunto finito, e temos:

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = |\bigcup_{n\geq 1} A_n| = \sum_{n\geq 1} |A_n| = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Portanto μ é uma medida sobre $\mathbb{N}$.

Exercício 2 Seja $X \neq \emptyset$ e Λ_1, Λ_2 σ-álgebras de X. Como $\emptyset \in \Lambda_1$ e $\emptyset \in \Lambda_2$, segue que $\emptyset \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Agora seja $A \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Temos que $A^c \in \Lambda_1$ e $A^c \in \Lambda_2$, e portanto, $A^c \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Finalmente, seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Como $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda_1$ e $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda_2$, segue que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Logo $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ é uma σ-álgebras de X.

Para o caso geral de uma família $(\Lambda_i)_{i\in I}$ de σ-álgebras de X, faremos a prova mais resumidamente:

$$\left.\begin{array}{r}
\emptyset \in \Lambda_i \forall i \in I \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i \\
A \in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i \Rightarrow A \in \Lambda_i \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \Lambda_i \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i \\
(A_n)_{n\geq 1} \in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i \Rightarrow (A_n)_{n\geq 1} \in \Lambda_i \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \Lambda_i \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_{i\in I} \Lambda_i
\end{array}\right) \quad X$$

Portanto $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ é uma σ-álgebras de X.

Exercício 3 Sejam $X, \varepsilon, \mathcal{C}$ e $\mathcal{A}(\varepsilon)$ conforme o enunciado. Pelo exercício 2, temos que $\mathcal{A}(\varepsilon)$ é uma σ-álgebra de X (que contém ε por construção). Seja $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra que contém ε. Logo $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$, e portanto, $\mathcal{A}(\varepsilon) = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{C}} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. $\Rightarrow ?$

Exercício 4 Sabemos que os abertos da reta podem ser escritos como reuniões enumeráveis de intervalos abertos. Estes são de forma $]a,b[$ $(a < b)$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$. Portanto, basta para cada conjunto ε, escrever estes intervalos abertos em termos de reuniões, interseções e complementos de elementos de ε.

i - $[a,+\infty[= \bigcap_{n\geq 1}]a - \frac{1}{n}, \infty[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Portanto $([a,+\infty[)^c =]-\infty,a[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí, basta notar que $]a,b[=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[$.

ii - $]a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [a+\frac{1}{n}, +\infty[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Vale também que $([a,+\infty[)^c =]-\infty,a[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí, basta notar (novamente) que $]a,b[=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[$.

iii - $]-\infty,a] = \bigcap_{n\geq 1}]-\infty, a+\frac{1}{n}[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí, basta notar que $(]-\infty,a])^c =]a,+\infty[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$.

iv - $(]-\infty,a])^c =]a,+\infty[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí é só usar i.

v - $]a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1}]a, b+2^n[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí é só usar i.

vi - $[a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [a, b+2^n] \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí é só usar ii.

vii - $]a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1}]a, b+2^n] \in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí é só usar i.

viii - $[a,+\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [a, b+2^n[\in \mathcal{A}(\varepsilon)$. Daí é só usar ii.

importante

Exercício 5 Sabemos que os intervalos são mensuráveis e que os abertos da reta podem ser escritos como reuniões enumeráveis de intervalos. Como $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ contém os intervalos, segue que $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ contém os abertos da reta, e pelo exercício 3, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

Exercício 6 Primeiramente, observemos que $\lambda(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{M}$, uma vez que $\lambda(A) = \mu(E \cap A)$ e μ é uma função positiva. Em seguida, temos que $\lambda(\emptyset) = \mu(E \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Agora seja $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Temos:

$$\lambda(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \mu(E \cap (\bigcup_{n\geq 1} A_n)) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} E \cap A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(E \cap A_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda(A_n)$$

Logo λ é uma medida.

Exercício 7 Como μ atribui a subconjuntos de $\mathbb{N}$ uma soma de naturais, segue que $\mu \geq 0$.

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n\in\emptyset} \frac{1}{2^n} \overset{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow ?$$

Sabemos que toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente (i.e. a série continua convergindo para o mesmo valor se reordenarmos os termos da série inicial via uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Agora seja $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Pela observação anterior, se considerarmos $B = \bigcup_{n\geq 1}(A_n)_{n\geq 1}$, temos:

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1}(A_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\in B} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k\in A_n} \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

Portanto, μ é uma medida em $\mathbb{N}$.

Exercício 8 Como $Im(\mu) = \{0,1\}$, segue que $\mu \geq 0$. Como $x_0 \notin \emptyset$, também temos que $\mu(\emptyset) = 0$. Agora seja $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P}(X)$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Se $x_0 \notin A_n$ para todo $n \geq 1$, temos que $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 0 = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$. Se por outro lado, $x_0 \in A_n$ para algum n, como os A_i's são 2 a 2 disjuntos, segue que $x_0 \notin A_k$ para todo $k \neq n$. Portanto $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 1 = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$. Logo μ é uma medida em X.

Exercício 9

Exercício 10

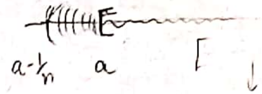
Exercício 11

$\Rightarrow$ mostrar que é medida

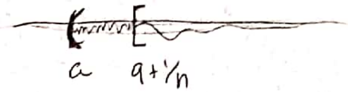
$\mu(\emptyset) = 0$

$\mu(\bigcup A) = \sum \mu A$

$[a, +\infty) = \bigcap_{n\geq 1} (a - 1/n, +\infty)$



$]a, +\infty) = \bigcup_{n\geq 1} [a + 1/n, +\infty)$



mid(a, b, c) p/ $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$

seja $a < b < c$, em que $\inf\{a,b,c\} = a$ e $\sup\{a,b,c\} = c$

se $mid(a,b,c) = \inf\{\sup\{a,b\}, \sup\{a,c\}, \sup\{b,c\}\}$,

e $a < b < c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ tenho

$mid(a,b,c) = \inf\{b, c, c\} = b$

$mid(a,b,c) = \inf\{\sup\{a,b\}, \sup\{a,c\}, \sup\{b,c\}\} = \inf\{b, c, c\} = b$,

$\Rightarrow g(x) = mid(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \to$ sup de uma função?

$g(x) = \inf\{\sup\{f_1, f_2\}, \sup\{f_1, f_3\}, \sup\{f_2, f_3\}\}$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 3

A medida exterior de $\mathbb{R}$ é a função $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ definida por

$m^*(A) = inf\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)$ é um sequência de intervalos abertos e $A \subseteq \cup_{j\geq 1} I_j\}$.

(1) Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos $E + a = \{x + a : x \in E\}$ e $aE = \{ax : x \in E\}$. Prove que $m^*(E + a) = m^*(E)$ e $m^*(aE) = |a|m^*(E)$ (com a convenção de que $0.(+\infty) = 0$).

(2) Prove que, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $A \subseteq B$ então $m^*(A) \leq m^*(B)$.

(3) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $m^*(A) = 0$ então $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

(4) Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ tem medida exterior nula.

(5) Seja $(I_j)_{j=1}^n$ uma coleção finita de intervalos que recobrem os números racionais do intervalo [0,1]. Prove que $\sum_{j=1}^n l(I_j) \geq 1$.

(6) Para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, e todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \subseteq O$ e $m^*(O) \leq m^*(A) + \epsilon$.

(7) Para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, existe um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ que é G_δ tal que $A \subseteq G$ e $m^*(A) = m^*(G)$. (Um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ é dito um conjunto G_δ se pode ser escrito como reunião enumerável de conjuntos abertos.)

(8) (i) Dê exemplo de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) < +\infty$, mas A é ilimitado.

(ii) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ com $m^*(A) < +\infty$. Prove que, para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto limitado $A_1 \subseteq A$ tal que $m^*(A_1^c \cap A) < \epsilon$.

(9) Prove que o conjunto dos números reais em cujo desenvolvimento decimal não comparece o algarismo 7 possui medida exterior nula.

Definição: Um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é dito mensurável se, para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, tem-se que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

(10) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$.

Prove que $\begin{cases} \forall\, a \in \mathbb{R}(E \text{ é mensurável} \leftrightarrow E + a \text{ é mensurável}). \\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\ (aE \text{ é mensurável} \leftrightarrow E \text{ é mensurável}). \end{cases}$

$A \cup B$

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = \leq m(A\cap B) + m(A^c \cap B)$

$(A - B) = (A \cap B^c)$

(11) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, prove que se A e B são mensuráveis então $A - B$ é mensurável.

(12) Dados conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se A é mensurável e $m^*(A\triangle B) = 0$ então B é mensurável e $m(A) = m(B)$.
(Dados A, B conjuntos, a diferença simétrica de A e B é definida como $A\triangle B = (A - B)\cup(B - A)$.)

(13) Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ tais que A e B são conjuntos mensuráveis. Se $m(A\triangle B) = 0$ e $m^*(B\triangle C) = 0$ então C é mensurável e $m(C) = m(A)$.

(14) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) E é mensurável.

(ii) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $A \subseteq E$ e $B \subseteq E^c$ então $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

(15) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:

(i) E é mensurável.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $E \subseteq \mathcal{O}$ e $m^*(\mathcal{O} - \mathcal{E}) < \epsilon$.

(iii) Existe um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ que é G_δ (isto é, G é interseção enumerável de abertos de $\mathbb{R}$) tal que $m^*(G - E) = 0$.

(Sugestão: considere primeiramente o caso em que $m^*(E) < +\infty$. Depois, para o caso geral em que $m^*(E) = +\infty$, considere $E_n = E \cap [-n, n]$, $\forall\, n \geq 1$, e aplique o resultado para conjuntos de medida exterior finita.)

(16) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes:

(i) E é mensurável.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado tal que $F \subseteq E$ e $m^*(E - F) < \epsilon$.

(iii) Existe um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ que é F_σ (isto é, S é união enumerável de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$) tal que $m^*(E - S) = 0$.

(17) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto com $m^*(E) < +\infty$. São equivalentes:

(i) E é mensurável.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe uma união finita $\mathcal{U}$ de intervalos abertos (que pode ser tomada disjunta) tal que $m^*(E\triangle\, \mathcal{U}) < \epsilon$.

Resolução da Lista 3 de MAT0234 - Medida e Integração

Utilizarei durante toda a lista a notação $C_A = \{(I_j)_{j\geq 1} : A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j\}$. Se $(I_j)_{j\geq 1} \in C_A$, também direi que $(I_j)_{j\geq 1}$ é uma cobertura de A, ou que $(I_j)_{j\geq 1}$ cobre A. Assim, podemos traduzir à definição de medida exterior da seguinte maneira:

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_A\right\}$$

Exercício 1 Sabemos que para todo intervalo I e para todo $a \in \mathbb{R}$, $l(I) = l(I+a)$ e $l(aI) = |a|l(I)$. Seja $(I_j)_{j\geq 1}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j$. Segue que $\sum_{j\geq 1} l(I_j) = \sum_{j\geq 1} l(I_j + a)$, e que $E + a \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j + a = \bigcup_{j\geq 1}(I_j + a)$. Por outro lado, se $(J_j)_{j\geq 1}$ é tal que $E + a \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j$, então $E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j - a = \bigcup_{j\geq 1}(J_j - a)$. Logo,

$$\left\{\sum_{j\geq 1} l(J_j) : (J_j)_{j\geq 1} \in C_{E+a}\right\} = \left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j + a) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_E\right\}.$$

Isso prova que $m^*(E) = m^*(E+a)$. Para a outra afirmação, mantendo a notação para $(I_j)_{j\geq 1}$, temos que $\sum_{j\geq 1} l(aI_j) = \sum_{j\geq 1} |a| l(I_j) = |a| \sum_{j\geq 1} l(I_j)$, e que $aE \subseteq a\bigcup_{j\geq 1} I_j = \bigcup_{j\geq 1}(aI_j)$. Por outro lado, se $(J_j)_{j\geq 1}$ cobre aE, então $E \subseteq \frac{1}{a}\bigcup_{j\geq 1} J_j = \bigcup_{j\geq 1}(\frac{1}{a}J_j)$. Logo,

$$\left\{\sum_{j\geq 1} l(J_j) : (J_j)_{j\geq 1} \in C_{aE}\right\} = \left\{|a|\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_E\right\}$$

Isso prova que $m^*(aE) = |a| m^*(E)$.

Exercício 2 Temos que se $A \subseteq B$ então $C_B \subseteq C_A$. Assim:

$$m^*(B) = \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_B\right\} \geq \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_A\right\} = m^*(A)$$

Exercício 3 Como $B \subseteq A \cup B$, segue do exercício anterior que $m^*(B) \overset{m^*(A)=0}{=} m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$. Por outro lado, sabemos que $C_A \cup C_B \subseteq C_{A\cup B}$. Assim:

$$m^*(A) + m^*(B) = \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_A\right\} + \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(I_j) : (I_j)_{j\geq 1} \in C_B\right\} \geq$$

$$\inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(J_j) : (J_j)_{j\geq 1} \in C_A \cup C_B\right\} \geq \inf\left\{\sum_{j\geq 1} l(L_j) : (L_j)_{j\geq 1} \in C_{A\cup B}\right\} = m^*(A \cup B)$$

Segue portanto, a igualdade.

Exercício 4 Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ enumerável. Suponhamos sem perda de generalidades que $A = \{a_1, a_2, ..., a_n ...\}$. Tomando $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o intervalo $I_n = [a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}]$. Segue que $A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j$ e portanto:

$$m*(A) \leq m^*\left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) \leq \sum_{j\geq 1} l(I_j) = \sum_{j\geq 1}\frac{2\epsilon}{2^{j+1}} = \epsilon\sum_{j\geq 1}\frac{1}{2^j} = \epsilon$$

Como ϵ é um real positivo arbitrário, segue que $m^*(A) = 0$.

Exercício 5 Suponhamos que $\inf(I_j) = a_j$ e $\sup(I_j) = b_j$ para todo $j \geq 1$ e seja $J_j = [a_j, b_j]$. Uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (i.e, dados $x, y \in \mathbb{R}$ distintos com $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$), o conjunto $[0,1] \cap (\bigcup_{j\geq 1} I_j)$ é vazio ou contém um número finito de pontos (a saber, as extremidades dos I_j que são abertos). Em vista disso, temos que $[0,1] \subseteq \cup_{j\geq 1} J_j$ (pois adicionamos à reunião dos J_j os finitos pontos que estavam faltando na reunião dos I_j). Logo:

$$m^*([0,1]\cap\mathbb{Q}) \leq m^*([0,1]) = 1 \leq \sum_{j\geq 1} l(J_j) = \sum_{j\geq 1} l(I_j)$$

Exercício 6 Se $m^*(A) = +\infty$, basta tomar $O = \mathbb{R}$. Se $m^*(A) = \alpha < +\infty$, uma vez que α é o ínfimo das somas $\sum_{j\geq 1} l(I_j)$ com $(I_j)_{j\geq 1} \in C_A$, segue que para todo $\epsilon > 0$, existe $(J_j)_{j\geq 1} \in C_A$ tal que $\alpha \leq \sum_{j\geq 1} l(J_j) \leq \alpha + \epsilon$. Daí, basta tomar o aberto $O = \cup_{j\geq 1} J_j$.

Exercício 7 Se $m^*(A) = +\infty$, basta tomar $O = \mathbb{R}$. Se $m^*(A) = \alpha < +\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tomemos (conforme o exercício 6) $O_n \subseteq A$, tal que $m^*(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$. Daí, consideremos $G = \cap_{n\geq 1} O_n$. Temos que G é G_δ, e para todo $n \geq 1$, vale:

$$m^*(G) \leq m^*(O_n) \leq m^*(A) + \frac{1}{n}$$

Logo $m^*(G) = m^*(A)$.

Exercício 8

Exercício 9

Exercício 10 Antes de resolver o exercício, notemos que:

$$(E+a)^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin (E+a)\} = \{y + a \in \mathbb{R} : y \notin E\} = E^c + a \quad *$$

$$(aE)^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin aE\} = \{y \in \mathbb{R} : \frac{y}{a} \notin E\} = \{az \in \mathbb{R} : z \notin E\} = a\{z \in \mathbb{R} : z \notin E\} = aE^c$$

$$(A+a)\cap(E+a) = \{x \in \mathbb{R} : x \in (A+a) \text{ e } x \in (E+a)\} = \{y + a \in \mathbb{R} : y \in A \text{ e } y \in E\} = (A\cap E) + a$$

$$aA \cap aE = \{x \in \mathbb{R} : x \in aA \text{ e } x \in aE\} = \{ay \in R : y \in A \text{ e } y \in E\} = a(A\cap E)$$

Feito isso, consideremos $E \subseteq \mathbb{R}$ mensurável e $A \subseteq \mathbb{R}$ arbitrário.

$$m^*(A\cap(E+a)) + m^*(A\cap(E+a)^c) = m^*(A\cap(E+a)) + m^*(A\cap(E^c+a)) =$$
$$m^*(((A-a)\cap E)+a) + m^*((A-a)\cap E^c)+a) = m^*((A-a)\cap E) + m^*((A-a)\cap E^c) \overset{E \text{ é mens.}}{=}$$
$$m^*(A-a) = m^*(A)$$

Assim, provamos que se E é mensurável, então $E+a$ também é mensurável. Logo, se $E+a$ é mensurável, então $(E+a)+(-a) = E$ também é mensurável, provando assim, a recíproca. Para a outra afirmação, suponhamos que $a \neq 0$ e aE seja mensurável.

$$m^*(A\cap(aE)) + m^*(A\cap(aE)^c) = m^*(A\cap(aE)) + m^*(A\cap(aE^c)) =$$
$$m^*(a(\frac{1}{a}A)\cap E)) + m^*(a(\frac{1}{a}A)\cap E^c)) = |a|(m^*(\frac{1}{a}A)\cap E) + m^*(\frac{1}{a}A)\cap E^c))$$
$$\overset{E \text{ é mens.}}{=} |a| m^*(\frac{1}{a}A) = |a|\frac{1}{|a|}m^*(A) = m^*(A)$$

Assim, provamos que se aE é mensurável, então E também é mensurável. Logo, se E é mensurável e $a \neq 0$, então $\frac{1}{\frac{1}{a}}E = aE$ também é mensurável, provando assim a outra recíproca.

Exercício 11 Sejam E_1, E_2 conjuntos mensuráveis e tomemos $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$m^*(A\cap E_1^c) + m^*(A\cap(E_1^c)^c) = m^*(A\cap E_1^c) + m^*(A\cap E_1) \overset{E_1 \text{ é mens.}}{=} m^*(A)$$

Portanto E^c é mensurável.

$$m^*(A\cap(E_1\cap E_2)) + m^*(A\cap(E_1\cap E_2)^c) = m^*((A\cap E_1)\cap E_2) + m^*(A\cap(E_1^c\cup E_2^c)) =$$
$$m^*((A\cap E_1)\cap E_2) + m^*(((A\cap E_1)\cap E_2^c)\cup(A\cap E_1^c)) \leq$$
$$m^*((A\cap E_1)\cap E_2) + m^*((A\cap E_1)\cap E_2^c) + m^*(A\cap E_1^c) \overset{E_2 \text{ é mens.}}{=}$$
$$m^*(A\cap E_1) + m^*(A\cap E_1^c) \overset{E_1 \text{ é mens.}}{=} m^*(A)$$

$m^*([0,1]) - m^*(E^c)$

0 — 0,7 — 0,8 — 1

E são os ... E^c são de 7 ...

• Entre 0,7 e 0,8 todas as expansões decimais, tem o dígito 7 como componente. logo tenho $\left(1-\frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10}$

0 — 0,07 — 0,08 — 0,1

• entre 0,07 e 0,08, todos números possuem o dígito 7 em sua expansão decimal.

O comprimento entre 0,07 e 0,08 é $\frac{1}{10^2}$

retirado

no que tenho 9 subintervalos $= 9 \cdot 1/10^2$

$$1-\frac{1}{10}-\frac{9}{10^2}$$

$\Downarrow$

para o intervalo entre [0, 0,01] $\rightarrow$ $9^2 \cdot 1/10^3$

0 — 0,07 — 0,08 — 0,01

$$1-\frac{1}{10}-\frac{9}{10^2}-\frac{9^2}{10^3}$$

$\Rightarrow$ logo consigo enxergar um padrão:

$$1-\frac{1}{10}-\frac{9}{10^2}-\frac{9^2}{10^3}-\frac{9^3}{10^4}-\dots$$

$$=1-\frac{1}{10}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\frac{9}{10^4}+\dots\right)$$

$$=1-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right)=1-\frac{1}{10}\left(\frac{10}{1}\right)=1-1=0$$

$A\cap E^c$

$m(A) = m(A\cap E) + m(A\cap E^c) \le m(E) + m(A)$

$m(B) = m(B\cap E) + m(B\cap E^c) \le m(B) + m(E^c)$

$m(A\cup B) \le m(E\cup E^c) \le m(E) + m(E^c)$

(5) Prove que o conjunto dos números reais em cujo desenvolvimento decimal não comparece o algarismo 7, possui medida exterior nula.

Seja [0,1] o conjunto dos números reais $\nexists$

$\Rightarrow$ ~~para~~ representa os reais n...

Preciso ter uma representação dos reais no intervalo [0,1]

$\mapsto$ Prove que o conjunto dos números reais em cujo desenvolvimento decimal não comparece o algarismo 7 possui medida exterior nula

a medida exterior do intervalo [0,1]

Seja E o conjunto dos números $x \in [0,1]$, tais que o dígito 7 não comparece na expansão decimal de x.

$m^*([0,1]) - m^*(E)$

Exemplo: $x = 0,6358$, logo temos $m^*([0,1]) = 1 = \ell^*([0,1])$.

queremos a m^*E, logo vamos calcular a m^*E, retirando os intervalos em que a expansão decimal com o dígito 7 comparece.

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 11

(1) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lebesgue integrável. Prove que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $c \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt.$$

(Sugestão: Prove o resultado primeiramente para funções f da forma $f = \varphi_E$, onde $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto mensurável. Depois, considere f uma função simples. O próximo caso é para funções integráveis não negativas. Finalmente, prove o caso geral.)

(2) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente.

(i) Prove que, para todo $c \in]a, b[$, existe $f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < c\}$ e existe $f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : c < x\}$. Portanto, f é contínua em c se, e somente se, $f(c^-) = f(c) = f(c^+)$, isto é, todas as descontinuidades de f são de primeira espécie.

(ii) Seja $D(f) = \{x \in [a, b] : f \text{ é descontínua em } x\}$. Prove que $D(f)$ é enumerável.

Definição (Vitali, 1908): Uma função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua (a.c.) se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda coleção finita $]a_j, b_j[$, $1 \leq j \leq n$, de subintervalos de $[a, b]$, dois a dois disjuntos, se $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ então $\sum_{j=1}^{n}|g(b_j) - g(a_j)| < \epsilon$.

(3) Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções a.c. Prove que $f + g$, $f - g$, fg são funções a.c. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então αf é a.c. Se existe $m > 0$ tal que $|g(x)| > m$, $\forall\, x \in [a, b]$, então $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ também são a.c.

(4) Prove que toda função lipschtziana definida num intervalo $[a, b]$ é a.c.

(5) Seja $f \in L_1[a, b]$, e considere $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{[a,x]} f dm$, $\forall\, x \in [a, b]$. Prove que F é a.c.

(6) Sejam $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Prove que f e g são funções a.c., mas $g \circ f$ não o é. Assim, a composição de funções a.c. pode não resultar numa função a.c.

(7) Seja $g : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ uma função a.c. Considere $f \in L_1[c, d]$ com f limitada, e seja $F(x) = \int_{[a,x]} f dm$, $\forall\, x \in [c, d]$. Prove que $F \circ g$ é a.c.

(8) Prove que uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é a.c. se, e somente se, f^+ e f^- são funções a. c.

(9) Dê exemplo de uma função de variação limitada que não é a.c.

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 11

(1) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lebesgue integrável. Prove que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $c \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\int_a^b f(t+c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt.$$

(Sugestão: Prove o resultado primeiramente para funções f da forma $f = \varphi_E$, onde $E \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto mensurável. Depois, considere f uma função simples. O próximo caso é para funções integráveis não negativas. Finalmente, prove o caso geral.)

(2) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente.

(i) Prove que, para todo $c \in]a,b[$, existe $f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < c\}$ e existe $f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : c < x\}$. Portanto, f é contínua em c se, e somente se, $f(c^-) = f(c) = f(c^+)$, isto é, todas as descontinuidades de f são de primeira espécie.

(ii) Seja $D(f) = \{x \in [a,b] : f \text{ é descontínua em } x\}$. Prove que $D(f)$ é enumerável.

Definição (Vitali, 1908): Uma função $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua (a.c.) se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda coleção finita $]a_j, b_j[$, $1 \leq j \leq n$, de subintervalos de $[a,b]$, dois a dois disjuntos, se $\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$ então $\sum_{j=1}^{n} |g(b_j) - g(a_j)| < \epsilon$.

(3) Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções a.c. Prove que $f+g$, $f-g$, fg são funções a.c. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então αf é a.c. Se existe $m > 0$ tal que $|g(x)| > m$, $\forall\, x \in [a,b]$, então $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ também são a.c.

(4) Prove que toda função lipschtziana definida num intervalo $[a,b]$ é a.c.

(5) Seja $f \in L_1[a,b]$, e considere $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{[a,x]} f dm$, $\forall\, x \in [a,b]$. Prove que F é a.c.

(6) Sejam $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$\begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Prove que f e g são funções a.c., mas $g \circ f$ não o é. Assim, a composição de funções a.c. pode não resultar numa função a.c.

(7) Seja $g : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ uma função a.c. Considere $f \in L_1[c,d]$ com f limitada, e seja $F(x) = \int_{[a,x]} f dm$, $\forall\, x \in [c,d]$. Prove que $F \circ g$ é a.c.

(8) Prove que uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é a.c. se, e somente se, f^+ e f^- são funções a. c.

(9) Dê exemplo de uma função de variação limitada que não é a.c.

Caracterização de funções Riemann-integráveis

Seja f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$. Temos que :

f é contínua em $x_0 \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$

Vale mais:

Proposição: São equivalentes, para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

(i) f é contínua em x_0;

(ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}(x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon))$.

Vamos denotar $w(f, x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\}$.

Então, reescrevendo, obtemos :

f é contínua em $x_0 \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : w(f, x_0, \delta)\ \leq \epsilon$.

ou, equivalentemente,

f é contínua em $x_0 \iff \inf\{w(f, x_0, \delta) : \delta > 0\} = 0$.

Designamos $w(f, x_0) = \inf\{w(f, x_0, \delta) : \delta > 0\}$.

$w(f, x_0, \delta)$ chama-se oscilação de f no intervalo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

$w(f, x_0)$ chama-se oscilação de f no ponto x_0.

Registremos a propriedade no lema.

Lema: Dada uma função f:$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$, são equivalentes:

(i) f é contínua em x_0.

(ii) $w(f, x_0) = 0$.

Do lema acima decorrem as seguintes implicações:

f é descontínua em $x_0 \iff w(f, x_0) > 0$

$\iff 0 < \inf\{w(f, x_0, \delta) : \delta > 0\} \iff$

$\iff \exists\, c > 0 : c < w(f, x_0, \delta), \forall\, \delta > 0 \iff$

$\iff \exists\, c > 0 : \forall\, \delta > 0\ (c < \sup\{|f(x) - f(y)| : x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\} \iff$

$\iff \exists\, c > 0 : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $c < |f(x) - f(y)| \iff$

$\iff x_0 \in \bigcup_{c>0}\{z \in [a, b] : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x,\, y \in\,]z - \delta, z + \delta[$ e $|f(x) - f(y)| > c\}$

Para todo $n \geq 1$, vamos designar $D_n(f) = \{x \in [a, b] : w(f, x) \geq \frac{1}{n}\}$.

Lema: $D_n(f)$ é compacto, $\forall\, n \geq 1$.

Demonstração: Seja $z_0 \in [a, b]$ com $z_0 \notin D_n(f)$. Então $w(f, x_0) < \frac{1}{n}$, e portanto, existe $\delta > 0$ tal que $w(f, x_0, \delta) < \frac{1}{n}$.
Sendo assim, existe λ_0 tal que $\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\} \leq\ \lambda_0 < \frac{1}{n}$.

Seja $y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que $]y - \delta_1, y + \delta_1[\subseteq\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Daí decorre que $w(f, y, \delta_1) \leq \lambda_0 < \frac{1}{n}, \forall\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, e portanto, $D_n(f)^c$ é aberto. Logo, $D_n(f)$ é fechado. Como é limitado, concluímos que é compacto. $\triangle$

Lema: Dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, considere $D(f) = \bigcup_{n\geq 1} D_n(f)$.
Então $D(f) = \{x \in [a, b] : f$ é descontínua em $x\}$. (Em particular, $D(f)$ é um conjunto F_σ.)

Demonstração: Seja $x_0 \in [a, b]$. Temos:

f é descontínua em $x_0 \iff \exists\, c > 0 : \forall\, \delta > 0\ \exists\, x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $c < |f(x) - f(y)|$.

Seja $n \geq 1$ e $\frac{1}{n} \leq c$. Então

$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $\frac{1}{n} \leq |f(x) - f(y)| \ \Rightarrow\ x_0 \in D_n(f) \subseteq \bigcup_{n\geq 1} D_n(f)$.

Suponha agora $x_0 \in D_n(f)$, para algum $n \geq 1$. Então

$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{n}$.

Se f é contínua em x_0 então

$\exists\, \delta > 0\ (\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2n})$

Logo, $\forall\, x,\, y \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$: contradição.

Concluímos que f é descontínua em x_0, e portanto, $x_0 \in D(f)$. $\triangle$

Lema: Seja f :$[c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $w(f, x) < \epsilon$, $\forall\, x \in [c, d]$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, u,\, v \in [c, d]$, $|u - v| < \delta \ \Rightarrow\ |f(u) - f(v)| < \epsilon$.

Demonstração: Observe primeiramente que

$w(f, x) = \inf\{w(f, x, \delta) : \delta > 0\} < \epsilon \ \Rightarrow\ \exists\, \delta_x > 0 : w(f, x, \delta_x) < \epsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \forall\, u,\, v \in\,]x - \delta_x, x + \delta_x[, |f(u) - f(v)| < \epsilon$.

Assim, para cada $x \in [c, d]$, $\exists\, \delta_x > 0$ tal que

$\forall\, u,\, v \in [c, d]\ (u, v \in\,]x - \delta_x, x + \delta_x[\cap [c, d] \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \epsilon)$.

Como $[c, d]$ é compacto, existem $x_1, \ldots, x_k \in [c, d]$ tais que $[c, d] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k}]x_j - \frac{\delta_{x_j}}{2}, x_j + \frac{\delta_{x_j}}{2}[$.

Considere $\delta = \min\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_k}}{2}\}$.

Sejam $u, v \in [c, d]$ com $|u - v| < \delta$. Então existe i, $1 \leq i \leq k$, tal que $u \in]x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}[$. Como $|u - v| < \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2}$ então $v \in]x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}[$, e portanto, $|f(u) - f(v)| < \epsilon$. $\triangle$

Antes de apresentar o teorema que caracteriza as funções Riemann integráveis, vamos fixar algumas notações.

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

Dada uma partição P do intervalo $[a, b]$, $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, definimos

$$\begin{cases} m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} & 1 \leq i \leq n \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Definimos ainda

$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ a soma inferior de f relativa à partição P.

$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ a soma superior relativa à partição P.

A integral de Riemann inferior de f é dada por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

A integral de Riemann superior de f é dada por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

Dizemos que f é Riemann integrável se $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Neste caso, a integral de Riemann de f é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

O seguinte resultado é muito útil, pois permite concluir sobre a integrabilidade de uma função f sem calcular o seu valor.

Teorema: Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. São equivalentes:

(i) f é Riemann Integrável.

(ii) Para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P)$ - $s(f, P) < \epsilon$.

Teorema de Lebesgue (1902): Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

São equivalentes:

(i) f é Riemann-integrável,

(ii) $m(D(f)) = 0$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Por definição, $D(f) = \cup_{n \geq 1} D_n(f)$. Vamos provar que $m(D_n(f)) = 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Daí virá que $m(D(f)) = 0$.

Seja $n \geq 1$, e suponhamos que $m(D_n(f)) = c > 0$.

Considere P uma partição qualquer de $[a, b]$,

$P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_k = b$,

e seja $A = \{i : 1 \leq i \leq k \;\text{ e }\;]x_{i-1}, x_i[\cap D_n(f) \neq \emptyset\}$.

Lembramos que $x \in D_n(f) \;\Rightarrow\; \forall\, \delta > 0\; \exists\, u, v \in]x - \delta, x + \delta[$ com $|f(u) - f(v)| \geq \frac{1}{n}$.

Então $x \in D_n(f) \cap]x_{i-1}, x_i[\;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0 :]x - \delta, x + \delta[\subseteq]x_{i-1}, x_i[\;\Rightarrow\; M_i - m_i \geq \frac{1}{n}$,

onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $1 \leq i \leq k$.

Além disso, como $m(D_n(f)) = c > 0$, tem-se que $\sum_{i \in A} \Delta x_i \geq c$.

Dessa observação resulta que

$S(f, P)$ - $s(f, P) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i \in A} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \frac{1}{n}.c > 0$, isto é,

$S(f, P)$ - $s(f, P) \geq \frac{c}{n}$, $\forall\, P$ partição de $[a, b]$, o que contraria a integrabilidade de f.

Concluimos que $m(D_n(f)) = 0$, $\forall\, n \geq 1$, e $m(D(f)) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Seja $\epsilon > 0$. Vamos provar que existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P)$ - $s(f, P) < \epsilon$. Daí virá que f é Riemann integrável.

Como $m(D(f)) = 0$, vale que $m(D_n(f)) = 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Seja $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$. Como $m(D_l(f)) = 0$, existe uma sequência $(I_j)_{j \geq 1}$ de intervalos abertos tal que $D_l(f) \subseteq \cup_{j \geq 1} I_j$ e $\sum_{j \geq 1} l(I_j) < \frac{1}{l}$. Sendo $D_l(f)$ compacto, existe $k \geq 1$ com $D_l(f) \subseteq I_1 \cup \ldots \cup I_k$ e $\sum_{j=1}^{k} l(I_j) < \frac{1}{l}$.

Considere $P_1 : a = u_0 < u_1 < \ldots < u_{r-1} < u_i < \ldots < u_r = b$ uma partição de $[a, b]$ verificando as seguintes condições:

(i) $u_i \notin D_l(f)$, $\forall\, i$, $1 \leq i \leq r - 1$.

(ii) Se $A_1 = \{i : [u_{i-1}, u_i] \cap D_l(f) \neq \emptyset\}$ então $(i \in A_1 \;\Rightarrow\; [u_{i-1}, u_i] \subseteq \overline{I}_1 \cup \ldots \cup \overline{I}_k)$.

Dessa forma, $\sum_{i \in A_1} \Delta u_i < \frac{1}{l}$.

Tomemos $A_2 = \{i : i \notin A_1\} = \{i : [u_{i-1}, u_i] \cap D_l(f) = \emptyset\}$. Então, por lema anterior, para todo $i \in A_2$, existe $\delta_i > 0$ tal que

$$x, y \in [u_{i-1}, u_i] \quad \text{e} \quad |x - y| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{l}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_i : i \in A_2\}$, e P uma partição de $[a, b]$ tal que $P \supseteq P_1$ e $\Delta P < \delta$.

Suponhamos que P seja dada pelos pontos $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$.

Considere

$$\begin{cases} A_3 = \{j : 1 \leq j \leq m \ \text{ e } \ \exists\, i \in A_2 \ \text{ com } \ [x_{j-1}, x_j] \subseteq [u_{i-1}, u_i]\} \\ A_4 = \{j : 1 \leq j \leq m \text{ e } j \notin A_3\} \end{cases}$$

Temos, para tal partição P:

$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)\Delta x_i$

$= \sum_{i \in A_3} (M_i - m_i)\Delta x_i \ + \ \sum_{i \in A_4} (M_i - m_i)\Delta x_i$

$\leq \frac{1}{l} \sum_{i \in A_3} \Delta x_i + 2\|f\| \sum_{i \in A_4} \Delta x_i$

$\leq \frac{1}{l}(b - a) + 2\|f\| \frac{1}{l} = \frac{(b-a)+2\|f\|}{l}$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, considere $l \geq 1$ tal que $\frac{2\|f\|+(b-a)}{l} < \epsilon$. Com o procedimento acima, obtemos uma partição P do intervalo $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$. Logo, f é Riemann integrável. Δ

Corolário: Toda função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável.

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 7

Definição: Seja X um conjunto não vazio e uma função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},\ \forall\, x \in X \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},\ \forall\, x \in X.$$

(1) Prove que, para toda função $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

(2) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Prove que são equivalentes:

(i) f é mensurável;

(ii) f^+ e f^- são funções mensuráveis;

(iii) $|f|$ é função mensurável.

Definição: Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que f é integrável se f^+ e f^- são integráveis. Neste caso, definimos a integral de f como $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.
O conjunto de todas as funções integráveis será designado por $\mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ ou $\mathcal{L}(\mu)$.

(3) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Prove que f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso, temos que $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$.

(4) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que se $f \in \mathcal{L}(\mu)$ então, para todo $a > 0$, o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq a\}$ tem medida finita. Prove que o conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é σ - finito (isto é, é reunião enumerável de conjuntos mensuráveis de medida finita).

(5) Dada uma função $f \in \mathcal{L}(\mu)$, prove que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma função simples φ tal que $\int_X |f - \varphi| d\mu < \epsilon$.

(6) Seja $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Prove que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) < \delta$ então $\int_A |f| d\mu < \epsilon$.

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue: Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis e g uma função integrável tal que $|f_n| \leq g$, $\forall\, n \geq 1$. Se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall\, x \in X$ então a função f é integrável e $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

(7) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis, $g_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis com $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, $\forall\, x \in X$. Sejam f e g funções mensuráveis, g integrável, tais que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ e $g_n(x) \longrightarrow g(x)$, $\forall\, x \in X$. Se $\int_X g_n d\mu \longrightarrow \int_X g d\mu$ então $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.

(8) Seja $f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a sequência de funções dadas por

$$\begin{cases} f_{2n-1} = \chi_{[0,1]} \\ f_{2n} = \chi_{]1,2[} \end{cases}$$

(i) Calcule $\underline{\lim} f_n$.

(ii) Verifique que $\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n dm < \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1$.

(9) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis, e f uma função integrável tal que $f_n \uparrow f$. Então $\int_X f d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$.

(10) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

(i) Seja $f_n: X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis e não negativas, e considere $f = \sum\limits_{n \geq 1} f_n$. Então f é mensurável e $\int_X f d\mu = \sum\limits_{n \geq 1} \int_X f_n d\mu$.

(ii) Seja $f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis tal que $\sum\limits_{n \geq 1} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$. Prove que $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ converge qs, que a função $f(x) = \sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ é integrável e $\int_X f d\mu = \sum\limits_{n \geq 1} \int_X f_n d\mu$.
(Sugestão: use o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.)

(11) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n dm$, onde $f_n(x)$ vale

(a) $\dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ (b) $\dfrac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2}$ (c) $\dfrac{n^{\frac{3}{2}}x}{1 + n^2x^2}$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 8

(1) Seja $f : [a,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ uma função que é impropriamente Riemann integrável, isto é, existe $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(t)dt < +\infty$. Prove que f é (Lebesgue) integrável e que $\int_{[a,+\infty[} f dm = \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

(2) Seja $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, $\forall\, t \geq 1$. Prove que existe a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$, mas $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|dt = +\infty$, e portanto, tal função não é Lebesgue integrável.

(3) Prove que as seguintes funções são Lebesgue integráveis:

(i) $f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}}$, $t \in]0,1]$, $n > 1$

(ii) $f(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$

(iii) $g(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, $t \in]0,+\infty[$

(4) Calcule:

(i) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2} e^{(\cos t)^n} dt$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (1+\frac{t}{n})^{-n} \sin \frac{t}{n} dt$

(iv) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+tn}{(1+t)^n}dt$

(v) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nt \ln t}{1+n^2t^2}dt$

Integrais dependendo de parâmetro

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $E \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$, e $\varphi : I \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \longrightarrow \varphi(x,t)$ uma função.
Para cada $x \in I$, definimos a função $\varphi^x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi^x(t) = \varphi(x,t)$, $\forall\, t \in E$.
Para cada $t \in E$, definimos a função $\varphi_t : I \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$, $\forall\, x \in I$.

Proposição: Sob as condições apresentadas acima, e dado $x_0 \in I$, considere ainda as seguintes hipóteses:

(i) Para todo $x \in I$, a função $\varphi^x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável;

(ii) Para quase todo $t \in E$, a função φ_t é contínua em x_0;

(iii) Existe $\delta > 0$ e uma função integrável $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$|\varphi(x,t)| \leq g(t)$ qs, $\forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Então a função $\alpha(x) = \int_E \varphi(x,t)dt$ está bem definida em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e é contínua em x_0.

Proposição: Sob as condições apresentadas acima, e dado $x_0 \in I$, considere ainda as seguintes hipóteses:

(i) Para todo $x \in I$, a função $\varphi^x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável;

(ii) Para quase todo $t \in E$, a função φ_t é derivável em x_0, isto é, existe $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)$;

(iii) Existe $\delta > 0$ e uma função integrável $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)| \leq g(t)$ qs, $\forall\, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Então a função $\alpha(x) = \int_E \varphi(x,t)dt$ está bem definida em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Além disso,

(i) α é derivável em x_0;

(ii) a função $t \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)$ é integrável;

(iii) $\alpha'(x_0) = \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)dt$

(5) Estude as seguintes funções quanto à continuidade:

(i) $\alpha(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-tx}dt$

(ii) $\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin xt|}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

(iii) $\alpha(x) = \int_0^1 \frac{|\sin xt|}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

(iv) $\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt$

(v) $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $\alpha(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} h(t) dt$, onde h é uma função integrável em $[0, +\infty[$.

(6) Estude as seguintes funções quanto à derivabilidade:

(i) $\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^4} e^{-xt^2} dt$

(ii) $\alpha(x) = \int_0^{+\infty} |x|^5 e^{-tx^4} dt$

(iii) $\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} e^{tx} dt$

(iv) $\alpha(x) = \int_0^1 \frac{x^3}{t^2} e^{-\frac{x^2}{t}} dt$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 9

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

(i) Dado $1 \leq p < +\infty$, definimos $L_p(\mu) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f$ é mensurável e $\int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$

onde identificamos funções mensuráveis que são iguais quase sempre. Neste caso, definimos norma de $f \in L_p(\mu)$ como $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Definimos $L_\infty(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f$ é mensurável e existe $a > 0$ tal que $|f(x)| < a$ qs $\}$, isto é, o espaço das funções mensuráveis que, fora de algum conjunto de medida nula, são limitadas. Novamente estamos identificando funções que sejam iguais qs. Definimos a norma de um elemento $f \in L_\infty(\mu)$ como $\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : \mu(N) = 0\}$, onde $S(N) = \sup\{|f(x)| : x \in X - N\}$.

(1) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

(i) Prove se $\mu(X) < +\infty$ e $0 < p < q \leq +\infty$ então $L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$.

(ii) Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in [1, +\infty[$. Verifique que $f \in L_2(m)$, mas $f \notin L_1(m)$, e portanto, a propriedade (i) pode não valer para espaços de medida infinita.

(2) Seja $1 \leq p < q < +\infty$.

(i) Prove que $L_p]0,1]$ não é subconjunto de $L_q]0,1]$.

(Sugestão: considere $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{p}{2} < \alpha < \frac{q}{2}$ e tome $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2\alpha}}}$)

(ii) Seja $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2p}}}$, $\forall x \in]0,1]$. Prove que $f \in L_p]0,1]$, mas $f \notin L_\infty]0,1]$.

(3) Seja $f \in L_\infty(\mu)$. Prove que $\|f\|_\infty = \sup\{ b : \mu\{x \in X : |f(x)| \geq b\} > 0\}$.

(4) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida.

Prove que se $f, g \in L_1(\mu)$ então $\sqrt{f^2 + g^2} \in L_1(\mu)$ e $\sqrt{|fg|} \in L_1(\mu)$.

(5) Seja $1 \leq p < +\infty$ e $a > 0$.

(i) Prove que $x^{-\frac{1}{p}} \notin L_p]0, a]$

(ii) Prove que se $\sigma > 0$ então $x^{-\frac{1}{p}} \in L_{p-\sigma}]0, a]$

(iii) Prove que se $0 < a < 1$ então $x^{-\frac{1}{p}}(\ln \frac{1}{x})^{-\frac{2}{p}} \in L_p]0, a]$).

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p \leq +\infty$.

Dada uma função mensurável $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma sequência $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})$ de funções mensuráveis, dizemos que a sequência (f_n) converge para f em $L_p(\mu)$ se $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

(6) Seja $1 \leq p < +\infty$ e $f \in L_p(\mu)$, com $f \geq 0$. Para todo $n \geq 1$, considere $f_n = \min\{f, n\}$. Mostre que $f_n \in L_p(\mu)$ e que $\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0$ (isto é, $f_n \xrightarrow{\|\,\|_p} 0$)

(7) Prove que se $1 \leq p < +\infty$ então o conjunto das funções mensuráveis e limitadas é denso em $L_p(\mu)$ (na norma $\|.\|_p$)
(Sugestão: considere primeiramente o caso em que $f \geq 0$ e aplique o exercício anterior.)

(8) Mostre que as duas desigualdade abaixo são inconsistentes para funções $f \in L_2]0, \pi[$

$$\begin{cases} \int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx \leq \frac{4}{9} \\ \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \leq \frac{1}{9} \end{cases}$$

(9) Mostre que $|\int_0^\pi x^{-\frac{1}{4}} \sin x dx| \leq \pi^{\frac{3}{4}}$.

(10) Seja $1 \leq p < +\infty$ e $(f_n) \subseteq L_p(\mu)$ com $f_n \longrightarrow f$ qs e $f \in L_p(\mu)$. Então

$$(\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0) \iff (\|f_n\|_p \longrightarrow \|f\|_p)$$

(11) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in L_{p_1}(\mu)$ e $g \in L_{p_2}(\mu)$.
Prove que $fg \in L_p(\mu)$, onde $p = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}$.

(12) Seja $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Prove que se $1 \leq p < +\infty$ então

$L_p(\mu) = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty\}$.

Tal espaço é usualmente denotado por $l_p(\mathbb{N})$.

(13) Seja $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Prove que
$L_\infty(\mu) = \{x = (x_n) \subseteq \mathbb{R} : (x_n)$ é sequência limitada em $\mathbb{R}\}$.
Neste caso, $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \geq 1\}$. Tal espaço é usualmente denotado por $l_\infty(\mathbb{N})$.

(14) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita, isto é, $\mu(X) < +\infty$. Considere $1 \leq p < q < +\infty$.

(i) Prove que se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis, e f é uma função mensurável com $f_n \longrightarrow f$ em L_q então $f_n \longrightarrow f$ em L_p
(Sugestão: considere $r = \frac{q}{p} > 1$ e seja $s > 1$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Escreva $\int_X |f - f_n|^p d\mu$ como $\int_X |f - f_n|^p \, 1 d\mu$ e aplique a desigualdade de Holder para o par r, s de números conjugados.)

(ii) Seja $X = [1, +\infty[$, com a medida de Lebesgue, e considere $f = \frac{1}{x}\chi_{[1,+\infty[}$. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n = \frac{1}{x}\chi_{[1,n[}$. Prove que $f_n \longrightarrow f$ em $L_2([1, +\infty[)$, mas não em $L_1([1, +\infty[)$.

(15) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita, $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})$ uma sequência de funções mensuráveis e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Prove que se $f_n \longrightarrow f$ em $L_\infty(\mu)$ então, para $p \geq 1$, $f_n \longrightarrow f$ em $L_p(\mu)$. Mostre, com um exemplo, que se o espaço de medida não for finito, o resultado pode não valer.

(16) Considere a sequência $(f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{13}, f_{23}, f_{33}, \ldots f_{kn}, \ldots$ onde $f_{kn} = \chi_{]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[}$, $\forall\, k, n \geq 1$.

Prove que $f_n \longrightarrow f = 0$ em L_p, $1 \leq p < +\infty$, mas $\|f_{kn}\|_\infty = 1$, $\forall\, k$, n, e portanto, f_{kn} não converge para f em L_∞.

(17) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})$ uma sequência de funções mensuráveis.

Prove que $f_n \longrightarrow f$ em $L_\infty(\mu)$ se, e somente se, existe $N \in \mathcal{M}$ com $\mu(N) = 0$ tal que (f_n) converge para f uniformemente em $X - N$.

Integral de Riemann × Integral de Lebesgue

Teorema: Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado e Lebesgue mensurável e $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $0 \le f(x) < M$, $\forall\, x \in E$.

As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) f é mensurável

$$(2) \begin{cases} \sup\{\int_E \varphi\, dm : \varphi \text{ é função simples mensurável e } 0 \le \varphi(x) \le f(x),\ \forall\, x \in E\} = \\ = \inf\{\int_E \psi\, dm : \psi \text{ é função simples mensurável e } f(x) \le \psi(x),\ \forall\, x \in E\} \end{cases}$$

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2)

Para cada $n \ge 1$, considere $E_{n,k} = f^{-1}(]\frac{(k-1)M}{n}, \frac{kM}{n}])$, com $1 \le k \le n$.

Os conjuntos $E_{n,k}$, $1 \le k \le n$, são subconjuntos mensuráveis de E, pois f é função mensurável, são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^{n} E_{n,k} = E$. Além disso,

$$x \in E_{n,k} \Rightarrow \frac{(k-1)M}{n} \le f(x) < \frac{kM}{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x) - \frac{(k-1)M}{n}| \le |\frac{kM}{n} - \frac{(k-1)M}{n}| = \frac{M}{n} \\ |f(x) - \frac{kM}{n}| \le |\frac{kM}{n} - \frac{(k-1)M}{n}| = \frac{M}{n} \end{cases}$$

Considere, para cada $n \ge 1$, as funções

$$\begin{cases} \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{E_{n,k}} \\ \psi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{E_{n,k}} \end{cases}$$

Então φ_n e ψ_n são funções simples e mensuráveis, com

$$\varphi_n(x) \le f(x) \le \psi_n(x),\ \forall\, x \in E$$

Temos que

$$\begin{cases} \inf\{\int_E \psi\, dm : f \le \psi\} \le \int_E \psi_n\, dm = \sum_{k=1}^{n} \frac{kM}{n} m(E_{k,n}) \\ \sup\{\int_E \varphi\, dm : \varphi \le f\} \ge \int_E \varphi_n\, dm = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)M}{n} m(E_{k,n}) \end{cases}$$

Daí resulta que

$$\begin{cases} \inf\{\int_E \psi\, dm : f \le \psi\} \le \int_E \psi_n\, dm = \sum_{k=1}^{n} \frac{kM}{n} m(E_{k,n}) \\ -\sup\{\int_E \varphi\, dm : \varphi \le f\} \le -\int_E \varphi_n\, dm = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)M}{n} m(E_{k,n}) \end{cases}$$

e portanto,

$$0 \le \inf\{\int_E \psi\, dm : f \le \psi\} - \sup\{\int_E \varphi\, dm : \varphi \le f\} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{n} m(E_{k,n}) = \frac{M}{n} m(E),\ \forall\, n \ge 1.$$

Logo, $\sup\{\int_E \varphi\, dm : \varphi \le f\} = \inf\{\int_E \psi\, dm : f \le \psi\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Por hipótese, para todo $n \ge 1$, existem funções simples e mensuráveis φ_n e ψ_n tais que

$$\begin{cases} \varphi_n \le f \le \psi_n \\ \text{e} \\ \int_E \psi_n dm - \int_E \varphi_n dm < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Considere as funções $\varphi^* = \sup\{\varphi_n : n \ge 1\}$ e $\psi^* = \inf\{\psi_n : n \ge 1\}$.

Então $\varphi^* \le f \le \psi^*$, e φ^* e ψ^* são funções mensuráveis. Vamos provar que $\varphi^* = \psi^*$ qs. Daí virá que $f = \varphi^*$ qs. Como φ^* é mensurável, f também o será.

Considere $A = \{x \in E : \varphi^*(x) < \psi^*(x)\} = \{x \in E : \psi^*(x) - \varphi^*(x) > 0\}$. Então vale que

$$A = \bigcup_{k \ge 1} \underbrace{\{x \in E : \psi^*(x) - \varphi^*(x) > \frac{1}{k}\}}_{A_k}$$

Para todo $n \ge 1$, temos:

$$\varphi_n \le \varphi^* \le \psi^* \le \psi_n, \quad \text{e portanto,} \quad \psi_n - \varphi_n \ge \psi^* - \varphi^*.$$

Dessa forma, fixado $k \ge 1$, vale que

$$x \in A_k \Rightarrow \psi_n(x) - \varphi_n(x) \ge \psi^*(x) - \varphi^*(x) > \frac{1}{k} \Rightarrow \int_{A_k} \psi_n\, dm - \int_{A_k} \varphi_n\, dm > \frac{m(A_k)}{k}$$

Mas

$$\frac{1}{n} > \int_E (\psi_n - \varphi_n) dm \ge \int_{A_k} (\psi_n - \varphi_n) dm > \frac{m(A_k)}{k} \Rightarrow m(A_k) < \frac{k}{n},\ \forall\, n \ge 1 \Rightarrow m(A_k) = 0.$$

Logo, $m(A) = 0$, e $\varphi^* = \psi^*$ $m - qs$. △

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

Dada uma partição P de $[a,b]$, P: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, definimos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$. Considere, para cada i, $1 \le i \le n$,

$$\begin{cases} m_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases}$$

Definições:

(a) A soma inferior de f relativa à partição P é definida por $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

(b) A soma superior de f relativa à partição P é $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

(c) A integral de Riemann inferior de f é $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : P \text{ é partição de } [a,b]\}$.

(d) A integral de Riemann superior de f é $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : P \text{ é partição de } [a,b]\}$.

Dizemos que uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável se

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Neste caso, a integral de Riemann de f é designada por $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Teorema: Se $f.[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável então f é mensurável e sua integral de Riemann coincide com a integral de Lebesgue.

Demonstração:

Caso 1 Seja $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, com $f \geq 0$.

Seja P: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Considere as funções

$\varphi_P = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_{0=1}^n f(x_i)\chi_{\{x_i\}}$

$\psi_P = \sum_{i=1}^n M_i \chi_{]x_{i-1},x_i[} + \sum_{i=0}^n f(x_i)\chi_{\{x_i\}}$

Então $\varphi_P \leq f \leq \psi_P$.

Além disso, $\int_{[a,b]} \varphi dm = s(f,P)$ e $\int_{[a,b]} \psi dm = S(f,P)$.

Dessa forma,

$\{s(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} \subseteq \{\int_{[a,b]} \varphi dm : \varphi$ é função simples e $0 \leq \varphi \leq f\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\{s(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} \leq \sup\{\int_{[a,b]} \varphi dm : \varphi$ é função simples e $0 \leq \varphi \leq f\}$. (*)

Analogamente,

$\{S(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} \subseteq \{\int_{[a,b]} \psi dm : \psi$ é função simples e $f \leq \psi\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\{\int_{[a,b]} \psi dm : \psi$ é função simples e $f \leq \psi\} \leq \inf\{S(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\}$. (**)

Suponhamos que f seja Riemann integrável. Então

$\sup\{s(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} = \inf\{S(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\}$.

De (*) e (**), obtemos que

$\sup\{\int_{[a,b]} \varphi dm : \varphi$ é função simples e $\varphi \leq f\} = \inf\{\int_{[a,b]} \psi dm : \psi$ é função simples e $f \leq \psi\}$

Pela proposição anterior, concluimos que f é mensurável.

Além disso, temos que

$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} \leq$

$\sup\{\int_{[a,b]} \varphi dm : \varphi$ é função simples e $\varphi \leq f\} = \int_{[a,b]} f dm \leq$

$\leq \inf\{\int_{[a,b]} \psi dm : \psi$ é função simples e $f \leq \psi\} \leq \inf\{S(f,P) : P$ é partição de $[a,b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

$= \int_a^b f(x)dx$. Logo, $\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x)dx$.

Caso 2: caso geral. Se f é Riemann integrável, então $|f|$ também o é. Então vale que $\frac{|f|+f}{2}$ e $\frac{|f|-f}{2}$ são funções não negativas e Riemann integráveis. Pelo raciocínio anterior, tais funções são mensuráveis, e $\int_a^b \frac{|f|-f}{2}dx = \int_{[a,b]} \frac{|f|-f}{2}dm$ e $\int_a^b \frac{|f|+f}{2}dx = \int_{[a,b]} \frac{|f|+f}{2}dm$.

Além disso,

$$\frac{|f|+f}{2} - \frac{|f|-f}{2} = f$$

Logo, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{|f|+f}{2}dx - \int_a^b \frac{|f|-f}{2}dx = \int_{[a,b]} \frac{|f|+f}{2}dm - \int_{[a,b]} \frac{|f|-f}{2}dm = \int_{[a,b]} f dm$.

$\triangle$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

Lista 6

(1) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples e não negativa. Prove que são equivalentes:

(i) $\varphi = 0$ qs;

(ii) $\int_X \varphi d\mu = 0$.

(2) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável e não negativa. Prove que

$$f = 0 \; qs \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X f d\mu = 0.$$

Teorema da Convergência Monótona:
Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n : X \longrightarrow [0, +\infty])_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de funções mensuráveis tal que $f_n \longrightarrow f$ qs. Então $\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$.

Lema de Fatou (1906):
Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n : X \longrightarrow [0, +\infty])_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n \longrightarrow f$ qs. Então $\int_X f d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.

Mais geralmente, dada uma sequência $(f_n : X \longrightarrow [0, +\infty])_{n \geq 1}$ de funções mensuráveis e não negativas, tem-se que $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$.

(3) Prove que o Lema de Fatou e o Teorema da Convergência Monótona são equivalentes, isto é: admitindo-se um deles como verdadeiro, pode-se demonstrar o outro, e vice-versa.

(4) Seja $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a sequência de funções dadas por

$$\begin{cases} f_{2n-1} = \chi_{[0,1[} \\ f_{2n} = \chi_{[1,2[} \end{cases}$$

(i) Calcule $\underline{\lim} f_n$.

(ii) Verifique que $\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n dm < \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1$.

(5) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis com $f_n \downarrow f$. É verdade que $\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$?

(6) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis e não negativas. Considere $f = \sum_{n \geq 1} f_n$. Então f é mensurável e $\int_X f d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X f_n d\mu$.

~~(7) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável.~~
Considere a função $\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall \, E \in \mathcal{M}.$$

Prove que λ é uma medida em X.

(8) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida $f_n : \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis e não negativas, com $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ qs e $f_n \leq f$, $\forall \, n \geq 1$. Prove que $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

(9) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e mensurável. Para cada $n \geq 1$, considere $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $\forall \, x \in X$. Prove que $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$.

(10) Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções não negativas e mensuráveis tais que $\int_X g d\mu < +\infty$ e $f \geq g$. Prove que $\int_X (f - g) d\mu = \int_X f d\mu - \int_X g d\mu$.

(11) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções não negativas e mensuráveis, com $f_n \downarrow f$. Suponha que existe $k \geq 1$ tal que $\int_X f_k d\mu < +\infty$. Prove que $\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu$. Dê um exemplo mostrando que a condição "existe $k \geq 1$ tal que $\int_X f_k d\mu < +\infty$" não pode ser dispensada.

(12) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções não negativas

e mensuráveis e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f_n \longrightarrow f$ qs e $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu < +\infty$. Prove que, para todo $A \subseteq X$ mensurável, tem-se que $\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$.

(13) Seja $f_n = n\chi_{]0,\frac{1}{n}[} + \chi_{[1,+\infty[}$, $\forall\, n \geq 1$.

Verifique que $f_n \longrightarrow f = \chi_{[1,+\infty[}$, $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu$

mas, para $A =]0, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n d\mu \neq \int_A f d\mu$.

Este fato contraria o exercício anterior ? Justifique.

(14) Seja $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma função não negativa então f é mensurável e $\int_N f d\mu = \sum_{n \geq 1} f(n)$.

(15) Seja $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ e m a medida de Lebesgue em $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$. Considere $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n+\infty[}$, $\forall\, n \geq 1$.
Prove que $f_n \downarrow f = 0$, mas $\int_R f_n dm$ não converge para $\int_R f dm$.
Portanto, o Teorema da Convergência Monótona não vale para sequências decrescentes.

(16) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $E \subseteq X$ um conjunto mensurável e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e mensurável com $\int_E f d\mu < +\infty$.

(i) Prove que $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$.
(Sugestão: para todo $n \geq 1$, considere $E_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$.)

(ii) Considere $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Prove que A é σ- finito, isto é, existe uma sequência $(E_n) \subseteq \mathcal{M}$ com $\mu E_n < +\infty$, $\forall\, n \geq 1$, e $A = \cup_{n \geq 1} E_n$.

O Teorema da Convergência Monótona

Teorema da Convergência Monótona (TCM): Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma sequência crescente de funções mensuráveis e não negativas que converge para uma função $f. X \longrightarrow [0, +\infty]$, isto é, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$.

Então $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Demonstração: Temos que

$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots \leq f(x)$

Assim, vale que

$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu, \forall n \geq 1$

Como $f_n \leq f_{n+1}$, temos também que $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu$, e portanto,

$(\int_X f_n d\mu)_{n\geq 1}$ converge para $sup\{\int_X f_n d\mu : n \geq 1\}$.

Dessa forma, $sup\{\int_X f_n d\mu : n \geq 1\} \leq \int_X f d\mu$.

Se $sup\{\int_X f_n d\mu : n \geq 1\} = +\infty$ então $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty = \int_X f d\mu$, e vale o resultado.

Suponhamos, pois, $sup\{\int_X f_n d\mu : n \geq 1\} < +\infty$.

Seja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples, não negativa e mensurável com $0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \forall x \in X$. Vamos provar que $\int_X \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$.

Seja $\mathcal{I}_f = \{\int_X \varphi d\mu : 0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \forall x \in X, \varphi$ função simples e mensurável$\}$.
Como $\int_X f d\mu = sup\mathcal{I}_f$, virá que $sup\mathcal{I}_f \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$, que é a desigualdade que falta provar para obtermos o resultado do enunciado.

Temos que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) = sup\{f_n(x) : n \geq 1\}$.

Considere um número α com $0 < \alpha < 1$. Então $\alpha\varphi(x) \leq \varphi(x) \leq sup\{f_n(x) : n \geq 1\}$.

Para todo $n \geq 1$, seja $A_n = \{x \in X : \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\}$.

Temos que $A_n \subseteq X$ e $A_n \in \mathcal{M}$.

Como (f_n) é uma sequência crescente, vale que

$$\left.\begin{array}{l} x \in A_n \Rightarrow \alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \\ n < m \Rightarrow f_n(x) \leq f_m(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha\varphi(x) \leq f_m(x) \Rightarrow x \in A_m.$$

Então $n < m \Rightarrow A_n \subseteq A_m$.

Além disso, $X = \cup_{n\geq 1} A_n$ (prove esta afirmação).

Considere a função $\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $\lambda(E) = \int_E \alpha\varphi d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$.

λ é uma medida em $\mathcal{M}$(prove). Como $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ e $X = \cup_{n\geq 1} A_n$ e λ é medida, temos que $\lambda(X) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)$, isto é, $\int_X \alpha\varphi d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \alpha\varphi d\mu$

Por sua vez, para todo $n \geq 1$, temos que

$x \in A_n, \alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \Rightarrow \int_X \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu, \forall n \geq 1$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$

e obtemos

$\int_X \alpha\varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu, \forall \alpha, 0 < \alpha < 1$

Dessa forma,

$\int_X \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu, \forall \varphi$ com $0 \leq \varphi \leq f$, φ simples e mensurável.

Concluimos que $\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$ $\triangle$

O Lema de Fatou

Lema de Fatou: Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : X \longrightarrow [0, +\infty]$ uma seqüência de funções mensuráveis. Então

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \quad \leq \quad \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

Demonstração: Temos que $\underline{\lim} f_n = \sup\{\inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\} : n \geq 1\}$

Vamos designar $g_n = \inf\{f_j : j \geq n\}, \forall n \geq 1$. Então $\sup\{g_n : n \geq 1\} = \underline{\lim} f_n$. Assim,

$g_n \geq 0, \forall n \geq 1$ e $g_n \uparrow \sup g_n = \underline{\lim} f_n$.

Pelo Teorema da Convergência Monótona, obtemos que $\int_X g_n d\mu \longrightarrow \int_X \underline{\lim} f_n d\mu$ (*)

Por outro lado, para cada $n \geq 1$, temos que

$g_n \leq f_m, \forall m \geq n \Rightarrow \int_X g_n d\mu \leq \int_X f_m d\mu, \forall m \geq n \Rightarrow \int_X g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu, \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu \quad \leq \quad \underline{\lim} \int_X f_n d\mu \qquad (**)$$

Lembrando que $\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \underline{\lim} f_n d\mu$ (por (*)) e substituindo em (**), finalizamos:

$$\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \quad \leq \quad \underline{\lim} \int_X f_n d\mu \qquad \triangle$$

MAT-234 - Medida e Integração - segundo semestre de 2014

O Teorema de Fischer-Riesz

A completude de $L_p(\mu)$, para $p = 2$, foi provada, de maneira independente, por Riesz e por Fischer, em 1907.
A completude de $L_p(\mu)$, para os demais valores de p, $1 \leq p \leq +\infty$, foi estabelecida por Riesz em 1910. Apresentamos aqui a demonstração deste resultado para $p \neq +\infty$.

<u>**Teorema**</u>. $(L_p(\mu), \| \|_p)$, $1 \leq p < +\infty$, é um espaço normado completo (isto é, um espaço de Banach).

Demonstração. Seja $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_{n \geq 1}$ uma sequência de Cauchy em $L_p(\mu)$.
Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\forall\, m, n \geq n_0$, tem-se que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$.

Em particular, existe $n_1 \geq 1$ tal que $\forall\, n \geq n_1$, $\|f_n - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$.

Seja $n_2 > n_1$ tal que $\forall\, n \geq n_2$, $\|f_n - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2}$. Como $n_2 > n_1$, tem-se que $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$.

Seja $n_3 > n_2$ tal que, para $n \geq n_3$ tenhamos $\|f_n - f_{n_3}\|_p < \frac{1}{2^3}$. Então vale que $\|f_{n_3} - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2}$.

Prosseguindo indutivamente, obtemos uma subsequência de números naturais
$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_j < \ldots$ tal que $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}$. Daí resulta que

$$\|f_{n_1}\|_p + \textstyle\sum_{j \geq 1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2^j} = \|f_{n_1}\|_p + 1$$

Agora, para todo $k \geq 1$, considere a função $g_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_k(x) = |f_{n_1(x)}| + \textstyle\sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|.$$

Temos que $(\int_X |g_k|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \||f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j=1}} - f_{n_j}|\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \|f_{n_1}\|_p + 1$

Seja $g : X \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por $g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j \geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$.

Vale que $g(x) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} g_k(x)$, e portanto, $g^p(x) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} g_k(x)^p$.

Como se trata de uma sequência crescente de funções positivas, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona, e obtemos $\int_X g^p d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_X g_k^p d\mu \leq (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p$, e resulta que $g \in L_p(\mu)$.

Sendo assim, vale que se $A = \{x \in X : g(x) = +\infty\}$ então $\mu(A) = 0$, e portanto,
$g(x) < +\infty$, $\forall\, x \notin A$.

Fora do conjunto A, a função g é dada por uma série absolutamente convergente, e portanto, convergente. Considere, pois, a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k \geq 1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

f é mensurável e $|f| \leq g$. Logo, $f \in L_p(\mu)$.

Além disso, $f = \lim_{k \longrightarrow +\infty} (f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} f_{n_{k+1}}(x)$ qs.

Temos ainda que $|f - f_{n_k}|^p \leq 2^p g^p$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta que $\int_X |f - f_{n_k}|^p d\mu \longrightarrow 0$, e portanto, $\|f - f_{n_k}\|_p \longrightarrow 0$, isto é, a subsequência (f_{n_k}) de (f_n) converge para f em L_p. Como (f_n) é uma sequência de Cauchy, resulta que (f_n) converge para f em L_p. $\triangle$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(E) + m^*(E^c) = m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(E \cup E^c)$

$- \quad m^*(A \cup B) \leq m^*(E \cup E^c) \Rightarrow A \cup B \subseteq m^*(E \cup E^c)$ hipótese

$m^*(A) + m^*(B) - m^*(A \cup B) \leq m^*(E \cup E^c) - m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$ pela definição $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$

$q < 11$
$q < 3$
$q < 3 < 11$

logo $m^*(A) + m^*(B) - m^*(A \cup B) < 0$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$

mas como $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

$\Rightarrow m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A \cap E \cup A \cap E^c) + m(B \cap E \cup B \cap E^c) \leq m(E \cup E^c)$

$m^*(A \cup B) \leq m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m(E) + m(E^c)$

$m^*(B) \leq m^*(B \cap E) + m^*(B \cap E^c) \leq m(E) + m(E^c)$

$0 \leq m(E) + m(E^c) + m(A) + m(B)$

$\leq m^*(A \cap E)$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c) + m(B \cap E) + m(B \cap E^c) \leq m(E \cup E^c)$

Vamos

Seja E o conjunto dos números $x \in [0,1]$, tais que o dígito 7 não aparece na expansão decimal de x, e E^c onde não aparece

Vamos calcular a medida de E, m^*E e depois encontrar seu complementar, m^*E^c em $[0,1]$. $m^*E + m^*E^c = 1$

pois E é mensurável

retiro

$r = \frac{p}{q}$, tq $p \neq q \neq 7$.

0 — 0,7 — 0,8 — 1

(i) E é mensurável $\Rightarrow m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

(ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq E$ e $B \subseteq E^c$ então $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

E é mensurável e $m^*(E) < \infty$.

como $A \cup B \subseteq E \cup E^c$

$m^*(A) \leq m(E)$
$m^*(B) \leq m(E^c)$
$\Rightarrow m^*(A \cup B) < m(E \cup E^c)$

$m(A \cup B) \leq m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(E) + m^*(E^c) = m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A \cup B)$ $\quad m(A \cup B) \leq m(A) + m(B) \leq m(E \cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B) = m(A \cap E \cup A \cap E^c) + m(B \cap E \cup B \cap E^c)$

$\leq m(A \cap E) + m(A \cap E^c) + m(B \cap E) + m(B \cap E^c)$

$\leq m(E) + m(E^c) + m(E) + m(E^c)$

$2m(E) + 2m(E^c) = 2$

(12) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes.

(i) E é mensurável

(ii) p $\varepsilon > 0$, $\exists\, Q \subseteq \mathbb{R}$, aberto, tal que $E \subseteq Q$ e

$m^*(Q \setminus E) < \varepsilon$.

(iii) Existe um conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ que é G_δ tal que $E \subseteq G$ e $m^*(G - E) = 0$.

(i) ⇒ (ii), caso 1.

→ sempre lembr

E mensurável e $m^*E < \infty^+$

principal técnica

m^*E $\quad$ $m^*E + \varepsilon$

$\boxed{\sum_{j\geq 1} \ell(I_j)}$

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $(I_j)_{j\geq 1}$ intervalos abertos com

$$\left.E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \text{ e } \sum_{j\geq 1}\ell(I_j) < m^*E + \varepsilon \right\} \to \text{hipótese}$$

considere $\Theta = \bigcup_{j\geq 1} I_j$. Então Θ é aberto e $E \subseteq \Theta$.

⇒ Além disso, $m^*\Theta = m^*\left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) \leq \sum_{j\geq 1} m^*(I_j) = \sum_{j\geq 1}\ell(I_j) < m^*E + \varepsilon$

$$m^*\Theta < m^*E + \varepsilon \Rightarrow m^*\Theta - m^*E < \varepsilon.$$

20/08(3)

(15) $E \subseteq \mathbb{R}$ são equivalentes

(i) E é mensurável

(ii) p/ todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $Q \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $E \subseteq \Theta$ e $m^*(Q - E) < \varepsilon$

(16) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, são equivalentes

ver definição

definição é limite

(i) E é mensurável.

(ii) p/ todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ fechado tal que $F \subseteq E$ e $m^*(E - F) < \varepsilon$.

$[\ ]$

(iii) $\exists\ S \subseteq \mathbb{R}$ é F_σ (S é união enumerável de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$), tal que $m^*(E \setminus S) = 0$.

i) Caso 1, E é mensurável e $m^*E < +\infty$

(i) ⇒ (ii)

$F \subseteq E$ é $m(\cancel{E - F}) < \varepsilon$

m^*E $\quad$ $m^*E + \varepsilon$

$\sum_{j\geq 1}\ell(I_j)$

12) $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se A é mensurável e

$m^*(A \Delta B) = 0$, então B é mensurável e $m(A) = m(B)$

i) se A é mensurável,

$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$. e $m(A) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$

ii) $m^*(A \Delta B) = 0 \Rightarrow m^*((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^*((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \leq m^*(A \cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

p/ todo $E \subseteq \mathbb{R}$

como $m^*(E) \geq 0$, sempre logo

$m^*(A \Delta B) = 0 \Rightarrow m^*(A \cap B^c) = m(A^c \cap B) = 0$,

logo

i) $m^*(B) = m^*(A \cap B) + 0$ e $m^*(A) \leq m^*(A \cap B)$

mas como $(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow m^*(A \cap B) \leq m^*(A) \Rightarrow m^*(A) = m^*(A \cap B)$,

e como $m^*(A) = m^*(A \cap B) = m^*(B) \Rightarrow m^*(A) = m^*(B)$

---

13) Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ tais que A e B são conjuntos mensuráveis.

Se $m^*(A \Delta B) = 0$ e $m(B \Delta C) = 0$, então C é mensurável e $m(C) = m(A)$

$m^*(A \Delta B) = m^*(A \setminus B \cup B \setminus A)$

$= m^*(A \cap B^c \cup B \cap A^c) \leq m^*(A \cap B^c) + m^*(B \cap A^c) = 0$

$\Rightarrow m^*(A \cap B^c) = m^*(B \cap A^c) = 0$ $\Downarrow$ $m^*(A) = m^*(B)$

$m^*(B \Delta C) = m^*(B \setminus C \cup C \setminus B) = m^*(B \cap C^c \cup C \cap B^c) \leq m^*(B \cap C^c) + m^*(C \cap B^c) = 0$

$\Rightarrow m^*(B \cap C^c) = m^*(C \cap B^c) = 0$,

$\Rightarrow m^*(A) \leq m^*(A \cap C) + m^*(A \cap C^c)$,

$\Rightarrow m^*(B) \leq m^*(B \cap C) + m^*(B \cap C^c)$.

$m^*(C) = m^*(C \cap A) + m^*(C \cap A^c)$

$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$

$m^*(B) = m(B \cap A)$, $m^*(A) = m^*(B)$

$\Rightarrow m^*(B) = m^*(B \cap C)$

B)

$m^*(A \Delta B) = 0, \Rightarrow m(A) = m(B)$ $\Rightarrow m(A) = m(C)$

$m^*(B \Delta C) = 0 \Rightarrow m(B) = m(C)$

$m^*(C) = m^*(B \cap C) + m^*(B^c \cap C)$, pois B é mensurável

$m^*(C) = m^*(B \cap C)$

$m^*(B) \leq m^*(B \cap C) \Rightarrow m^*(B) = m^*(B \cap C)$, pois $m(B) \geq m^*(B \cap C)$

$\Rightarrow m^*(C) = m^*(B)$ ou $m^*(B) = m(C)$,

mas como $m(A \Delta B) = 0 \Rightarrow m^*(A) = m^*(B)$

logo $m^*(A) = m^*(B) = m^*(C) \Rightarrow m^*(A) = m^*(C)$.

---

(14) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes

$A \subseteq B \Rightarrow$ $A^c \supseteq B^c$ $\Leftarrow$

(i) E é mensurável

(ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $A \subseteq E$ e $B \subseteq E^c$ então $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(A) \leq m^*(E)$, $m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c) \cup (B \cap E) \cup (B \cap E^c))$

$\leq m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) +$

se E é mensurável

$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

$m^*(B) = m^*(A \cap E) + m^*(B \cap E^c)$

$m(A) + m(B) \leq m^*(E) + m(E^c)$

$= m^*(E \cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B) = m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) + m^*((B \cap E) \cup (B \cap E^c)) \leq$

$\leq$ ~~$m^*(A \cap E) + m^*($~~

$\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) + m^*(B \cap E) + m^*(B \cap E^c)$

$\leq m^*($

(2) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se $A \subseteq B \Rightarrow m^*A \leq m^*B$

seja $m^*A = \inf \underbrace{\left\{ \sum_{i \geq 1} \ell(I_i) : I_i \text{ seq de abertos e } A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{\mathcal{A}}$

$m^*B = \inf \underbrace{\left\{ \sum_{j \geq 1} \ell(J_j) : J_j \text{ seq de abertos e } B \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j \right\}}_{\mathcal{B}}$

Vamos mostrar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,

$B \subseteq \bigcup_{j \geq 1} J_i \Rightarrow g = \sum_{j\geq 1} \ell(J_i)$, como $A \subseteq B$, temos

$A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_i \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(J_i) \in \mathcal{A}$,

logo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B} \Rightarrow m^*A \leq m^*B$

(3)

(3) 1) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, tq E é enumerável, ou seja

$E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, com $a_n \in \mathbb{R}$, p/ $\forall n \geq 1$

i) seja, para $\forall n$ um $a_n \in E$ e $\varepsilon > 0$, considere

$$\begin{cases} I_n = \left] a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2 \right[\\ I_j = \emptyset \text{ p/ } \forall j \neq n \end{cases}$$

$\{a_n\} \subseteq I_n \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) = \varepsilon$

logo $m^*\{a_n\} \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m^*\{a_n\} = 0$,

ii) tenho $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, ou seja $E = \bigcup_{i\geq 1} \{a_n\}$, logo

$m^*E = m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} \{a_n\}\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*\{a_n\}$, mas provamos

em (i) que $m^*\{a_n\} = 0$ p/ $\forall n \geq 1$, logo

$m^*\left(\bigcup_{n\geq 1} \{a_n\}\right) \leq \sum_{n\geq 1} m^*\{a\} = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$

o que nos dá, $m^*\left(\bigcup_{n\geq} \{a_n\}\right) = m^*E = 0$.

$m^*(A) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) = m^*(A \cap B) - m^*(B \cap A^c)$

$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$

$m^*(B)(- m^*(B \cap A^c))$
$+ m^*(A \cap B^c)$

$m^*(A \Delta B) = m^*((A - B) \cup (B - A))$

$m^*(B)$

$\leq m^*(A - B) + m^*(B - A) =$

$= m^*(A \cap B^c) + m^*(B \cap A^c) = 0$

$m^*(B \cap A^c) = - m^*(A \cap B^c)$

$m^*(B) = m^*(B \cap A) - m^*(A \cap B^c)$

$- m^*(A \cap B^c) = m^*(B) - m^*(A \cap B)$

$m^*(A \cap B^c) = -m^*(B) + m^*(A \cap B)$

$m^*(A \cap B^c) = -m^*(B \cap A^c)$

$= 0$

$m^*($

$m^*(B) + m^*$

$m^*(B) = m^*(B \cap A) + \underbrace{m^*(B \cap A^c) + m^*(B^c \cap A)}_{}$

$m^*(B) + m^*(B^c \cap A) = m^*(B \cap A)$ 0

12) $m^*((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = *$

$* : m^*(A) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$:

mas como A é mensurável, tenho que

$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$.

e por hipótese tenho $m^*(A \Delta B) = m^*((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$

$\leq m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)_{\#} = 0$

$m(B) = m^*(B \cap A) + m^*(A \cap B^c)$

$m^*(B \cap A)$

$= m(B) + m^*(A \cap B$

$\#$ $m^*(A \cap B^c) + m^*(B \cap A^c) = 0$

$m^*(A) \leq m(B) +$

$m^*(A \cap B^c)$

$+ m$

~~$m^*(B \cap A^c) = -m^*(A \cap B^c)$~~

~~$m^*(B) = m^*(B \cap A) - m^*(A \cap B^c)$~~

$m^*(B \cap A) = m^*$

$m^*(B \cap A^c) = -m^*(A \cap B^c)$

$m^*(B) = m^*(B \cap A) - m^*(A \cap B^c)$

$m^*(\cancel{A \cap B^c} = \cancel{m^*}(B))$

$-m^*(A \cap B^c) = m^*(B) - m^*(B \cap A)$

$m^*(A \cancel{\cap B^c) = m^* + m}(B$

$m^*(B \cap A) = m^*(B) + m^*(A \cap B^c)$

$m^*(A) \leq$

(2) $A,B \subseteq \mathbb{R}$ se $A \subseteq B \Rightarrow m^*A \le m^*B$

seja $m^*A = \inf \underbrace{\{ \sum_{i\ge1}' \ell(J_i) : J_i \text{ seq de abertos e } A \subseteq \bigcup_{i\ge1} J_i \}}_{\mathcal{A}}$.

$m^*B = \inf \underbrace{\{ \sum_{j\ge1}' \ell(J_j) : J_j \text{ seq de abertos e } B \subseteq \bigcup_{j\ge1} J_j \}}_{\mathcal{B}}$.

Vamos mostrar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,

$B \subseteq \bigcup_{j\ge1} J_i \Rightarrow \mathcal{J} = \sum_{j\ge1}' \ell(J_i)$, como $A \subseteq B$, temos

$A \subseteq \bigcup_{j\ge1} J_i \Rightarrow \sum_{j\ge1}' \ell(J_i) \in \mathcal{A}$,

logo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \inf \mathcal{A} \le \inf \mathcal{B} \Rightarrow m^*A \le m^*B$

(3)

(3) 1) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, tq E é enumerável., ou seja

$E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, com $a_n \in \mathbb{R}$, p/ $\forall n \ge 1$

i) seja, para $\forall n$ um $a_n \in E$ e $\varepsilon > 0$, considere

$$\begin{cases} I_n =]a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2[\\ I_j = \emptyset \text{ p/ } \forall j \ne n \end{cases}$$

$\{a_n\} \subseteq I_n \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \bigcup_{j\ge1} I_j \Rightarrow \sum_{j\ge1}' \ell(I_j) = \varepsilon$

logo $m^*\{a_n\} \le \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m^*\{a_n\} = 0$,

ii) tenho $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, ou seja $E = \bigcup_{i\ge1} \{a_n\}$, logo

$m^*E = m^*\left(\bigcup_{n\ge1} \{a_n\}\right) \le \sum_{n\ge1}' m^*\{a_n\}$, mas provamos

em (i) que $m^*\{a_n\} = 0$ p/ $\forall n \ge 1$, logo

$m^*\left(\bigcup_{n\ge1} \{a_n\}\right) \le \sum_{n\ge1}' m^*\{a\} = \sum_{n\ge1}' 0 = 0$

o que nos dá, $m^*\left(\bigcup_{n\ge} \{a_n\}\right) = m^*E = 0$.

$m^*(A) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

Se A, B mensurável $\Rightarrow A\setminus B$

se B mens., B^c

$A\setminus B = A\cap B^c$

a interseção não mens.

$\cancel{m^*(B) \leq m^*}$

$$\boxed{m^*(B) = m^*(A\cap B) + m(A^c\cap B)}$$

pois A é mens.

$A \quad m^*(A) = m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m^*(A\cap B^c) = m^*(A) - m^*(A\cap B)$

$m^*[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)] \leq m^*(A\cap B^c) + m^*(A^c\cap B) = 0$

$m^*(A\cap B^c$

$m^*(A) =$

$m^*(A\cap B^c) = -m^*(A^c\cap B^c)$

$m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m^*(A\cap B^c) + m(A^c\cap B) = 0$

$m^*(A\cap B^c) = -m(A^c\cap B)$

$m^*(A) = m(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$= m(A\cap B)$

$m^*(A) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m^*(B) - m(B\cap A^c) + m^*(A\cap B)$

$m^*(B) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c)$

$m^* + m(B^c\cap A) + m^*(B^c\cap A)$

$m^*(B\cap A) = m^*(B) - m^*(B\cap A^c)$

$\cancel{m^*(B) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c)}$

$m^*(B) + m^*(B^c\cap A) = m^*(B\cap A) + \underbrace{m^*(B\cap A^c) + m^*(B^c\cap A)}_{} = 0$

$m^*(B) + m^*(B^c\cap A) = m^*(B\cap A) + \cancel{m^*(A\Delta} 0$

$m^*(A) \cancel{\leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)}$

$\cancel{m^*(A) \leq m^*(B) + m^*(B^c\cap A) + m^*(B^c\cap A}$

$m^*(B) + m^*(B^c\cap A) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c) + m^*(B^c\cap A)$

$m^*(B) + m^*(B^c\cap A) = m^*(B\cap A)$

(10)

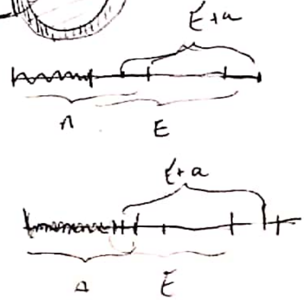
Seja $E\subseteq \mathbb{R}$,

prove que $\begin{cases} \forall a\in\mathbb{R}\ (E \text{ é mensurável} \iff E+a \text{ é mensurável}) \\ \forall a\in\mathbb{R},\ a\neq 0\ (aE \text{ é mensurável} \iff E \text{ é mensurável}) \end{cases}$

E mensurável $\Rightarrow$ $E+a$ mensurável

$\cancel{m(A\cap(E+a)) \le m}$

$m^*(A) \le \cancel{m(A\cap(E+a))} + m(A\cap(E+a)^c)$



$m^*(A\cap(E+a)) + m(A\cap(E+a)^c) =$

$= m((A\cap E)+a) + m((A\cap E^c)+a)$

E^c+a

$= m(A\cap E) + m(A\cap E^c) \le m(A)$

$(E+a)^c$

$m^*(A\cap(E+a)) + m(A\cap(E+a)^c)$ $\qquad m$

$aE \Rightarrow E$ mensurável

$m(A)^* \le m(A\cap E) + m(A\cap E^c)$

$[m(A\cap E) + m(A\cap E^c)]\,a$

$m(A\cap E)a + m(A\cap E^c)a$

$m(a(A\cap E)) + m(a(A\cap E^c))$

mE

$m^*(A) = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$

$E+a \Rightarrow E$ mensu...

$m^*(A) \le m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$

$\cancel{m(E) \le m^*(A\cap E) + m^*(A^c\cap E)}$

$m^*(A+a) \le n$

$\cdot\ m^*(A) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c) = m^*(B)$ ∴ B é mensurável.

$\cdot\ m^*(B) = m^*(A\cap B) + m^*(A^c\cap B)$ → pois A é mensurável.

$m^*\cancel{(A^c\cap B) = m^*(B) - m^*(A\cap B)}$

logo $m^*(A) =$

logo

$\cancel{m^*(A) \leq m^*(B)}$

$m^*(B) = m^*(A\cap B)$

$m^*(B)$

$\cancel{m^*(A\cap B^c)}$

$m^*(A\Delta B) = m^*([A\cap B^c]\cup[A^c\cap B])$

$\leq m^*(A\cap B^c) + m^*(A^c\cap B) = 0$

$\cancel{m^*(A\Delta B}$

$-m^*(A\cap B^c) = -m^*(A\cap B) + m^*(B)\ m^*(A^c\cap B) = -m^*(A\cap B^c)$

$m^*(B) = m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m^*(A\cap B^c) = m^*(B) - m^*(A\cap B)$

$m^*(A) \leq m^*(\cancel{A\cap B}) + m^*(B) - m^*(\cancel{A\cap B})$

$$\boxed{m^*(A) \leq m^*(B)}$$

11) $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \setminus B = (A \cap B^c)$

A e B mensuráveis $A \setminus B$ é mensurável $(A \cap B^c)^c = A^c \cup B$

$m(E) \leq m^*(E \cap (A \cap B^c)) + m^*(E \cap (A \cap B^c)^c)$

$m^*(E \cap (A \cap B^c)) + m^*(E \cap (A^c \cup B))$

$+ m^* \; (E \cap A^c) \cup (E \cap B)$

$m^*(E \cap A^c) + m^*(E \cap B)$

$m^*(E \cap (A \cap B^c))$ $m^*(E \cap A) + m^*(E \cap B^c)$

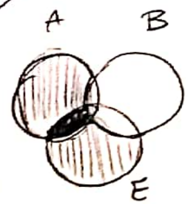
A

$[(E \cap B) \cup (E \cap B^c)] \cap (A \cap B^c)$

$((E \cap B) \cap (A \cap B^c)) \cup ((E \cap B^c) \cap (A \cap B^c))$

$m^*(\cancel{E \cap B} \; \cancel{m^*(A \cap B^c)})$

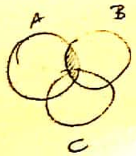
$\cancel{(E \cap A)}$



$m^* \mathbb{R}$

$E \cap A \cap B^c$

$E \cap A \cap B^c = (E \cap A) \cup (E \cap B^c)$



B $A = B \cap (\cancel{A} \setminus B)$

$m^*((E \cap A) \cap B^c) + m(E \cap A^c) + m^*(E \cap B)$

12) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ~~tal que~~

se A é mensurável, $m^*(A \Delta B) = 0$ então B é mensurável e $m(A) = m(B)$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$

$= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$m^*(\cancel{A \cap B^c})$

$m^*((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \leq m^*(A \cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

$m^*(A \cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

$m^*(A \cap B^c)$

$A = B \cup (A \setminus B)$

$m^*(\cancel{A}) \cancel{\leq m^*(B)} + m^*(A \setminus B)$

$\cancel{m^*(A)} \leq m^*(B) + m^*(A \cap B^c)$

$\cancel{m^*(B \cap A)}$

$m^*(B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$m^*(B) + m^*(A \cap B^c) \leq$

$\leq m^*((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) + m^*(A \cap B^c)$

$\leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) + m^*(A \cap B^c)$

$m(B) = m^*(A\cap B) + m^*(A^c \cap B)$

$m(A) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A \cap B^c)$

$m(A) \geq m(B)$

$B \cap (A \setminus B) + B^c \cap (A\setminus B)^c$

$m^*(A\cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

$m^*(A\setminus B) = -m^*(B\setminus A)$

$A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ se $m^*(A \Delta B) = 0$ e $m^*(B \Delta C) = 0$ (A e B mens.

C é mensurável e $m(C) = m(A)$.

$m^*(A\cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

$\cancel{m^*(B\cap C^c) + m^*(B^c \cap A) = 0}$

$m^*(B\cap E^c) + m^*(B^c \cap C) = 0$

$m(A) + m(B) = 2m^*(A\cap B)$

$m(C) = m^*(C \cap (A\cup B)) + m^*(C \cap (A\cap B)^c)$

$m(A) = m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m(B) = m^*(A\cap B) + m^*(A^c \cap B)$

$\cancel{= m^*(C\cap A) \cup m^*(}$

$= m^*((C\cap A)\cup(C\cap B)) + m^*((C\cap A^c)\cup(C\cap B^c))$

$\leq m^*(C\cap A) + m^*(C\cap B) + m^*(C\cap A^c) + m^*(C\cap B^c)$

$\leq \cancel{m^*(C) + m^*(C)}$

$m(C) = m^*(C\cap B) + m^*(C\cap B^c)$

$m(C) = m^*(C\cap A) + m^*(C\cap A^c)$

$m(C) + m^*(B^c \cap C) = m^*(C\cap B)$

$m^*(C\cap A) + m^*(C\cap A^c) + m^*$

$m^*(A\cap B^c) + m^*(A^c \cap B) = 0$

$m^*(B\cap C^c) + m^*(B^c \cap C) = 0$

$m^*(B\cap C)$

(14) Dado $E \subseteq \mathbb{R}$, seguintes afirmações são equivalentes

(i) E é mensurável

(ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $A \subseteq E$ e $B \subseteq E^c$ então

$m^*(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(A) \leq m^*(E)$

$m^*(B) \leq m^*(E^c)$

se E mens

$m^*(A) = m^*(A\cap E) + \cancel{m^*(A\cap E^c)}$

$m^*(B) = m^*(B\cap E) + \cancel{m^*(B\cap E^c)}$

$m^*(A)$

$m^*(A) = m^*(A) + m^*(A\cap E^c)$

$m^*(B) = m^*(B\cap E) + m(B))$

$m^*(A\cap E^c) + m(B\cap E)$

$\cancel{m^*(A\cup B) \leq m}$

$\cancel{m^*(A\cap E)}$

$A \cap E$

$A \subseteq E \Rightarrow A \subseteq A\cap E$

$A \subseteq E$

$\cancel{m^*(A}$

$m^*(A) + m^*(B)$

$\cancel{m(A\cap E}$

$\cancel{m^*(A\cap E)} + m^*(A\cap E^c) + \cancel{m^*(B\cap E)} + m^*(B\cap E^c)$

$m^*($

$A \setminus B$ é mensur

$(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) = 0$

$m(B\cap A^c) = -m(A\cap B^c)$

$m(B) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c)$

$m(B) = m^*(B\cap A) - m(A\cap B^c)$

$-m^*(B\cap A) = -m(B) - m(A\cap B^c)$

$m^*(B\cap A) = m(B) + m(A\cap B^c)$

$m^*(A) \leq m(B) + m(A\cap B^c) + m(A\cap B^c)$

$m(B$

$m^*(B\cap A) + m^*(B^c\cap A)$

$m^*(A) = m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c)$

$(B\cap A)\setminus(B\cap A^c)$

$m^*(B\cap A) + m^*(B^c\cap A)$

$m^*(B\cap A) + m^*(B^c\cap A)$

$m^*($

$A\subseteq E,\ B\subseteq E^c$ $\quad m^*(A\cup B)\leq m^*(A)+m^*(B)$

$\Rightarrow m^*(A)\leq m^*(E),\ m^*(B)\leq m^*(E^c)$

$m^*(A)+m^*(B)\leq m^*(E) + m^*(E^c) = m^*(E)$

$m^*(A)+m^*(B)\leq m^*(E)\leq m^*(E)+m^*(E^c)$

$A, B\subseteq \mathbb{R}$

se A mensurável, $m^*(A\triangle B) = 0 \Rightarrow B$ mensurável.

e $m(A) = m(B)$ #

$\leq m(A^c\cap B) + m(A\cap B^c) = 0$

$A\cap B^c \quad B^c\cap A^c$

$m(A^c\cap B) = m(B) - m(A\cap B)$

$m(B) = m(A\cap B) + m(A^c\cap B)$

$m^*(A)\leq m(A\cap B) + m(A\cap B^c)$

$m(A^c\cap B) + m(A\cap B^c) = 0$

$m^*(A)\leq m(A\cap B) - m^*(A^c\cap B)$

$m^*(A)\leq m(A\cap B) + m(A\cap B)$

$-m^*(B)$

$m(B) + m(A\cap B^c) = m(A\cap B)$

~~$m^*(A)\leq m(B) + m(A\cap B^c) = m(A\cap B^c)$~~

$m(A^c\cap B) = -m(A\cap B^c)$

$m(B) = m(A\cap B) - m(A\cap B^c)$

$m(B) - m(A\cap B) = -m(A\cap B^c)$

$m(A\cap B^c) = -m(B) + m(A\cap B)$

seja $E_1, \dots, E_n$ mensuráveis

i) p/ $n=1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{1} E_n = E_1 \Rightarrow E_1$ mensurável.

ii) Suponha que vale p/ n.

tenho $E_1, \dots, E_{n+1}$ mensuráveis, $i \neq j$ disjuntos

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j \cap E_{n+1}\right) + m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j \cap E_{n+1}^c\right)$$

$$= m^*(E_{n+1}) + m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) =$$

$$= m^*(E_{n+1}) + \sum_{j=1} m^*$$

$$=$$

$$m^*A = m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)^c\right)$$

↳ suponho que é verdade.

$(E \cup E)^c$

$$m^*A = m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)^c\right) \checkmark \quad E^c \cap E^c$$

$$m^*A = m^*\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) + \left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right)^c\right) \quad A \cap \bigcup_{j=2}^{n+1}\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} E_j^c\right)$$

$$= m^*((A \cap E_1) \cup \dots \cup (A \cup E_{n+1}))$$

$$= m^*((A \cap E_1) \cup \dots \cup (A \cup E_{n+1})) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right)^c\right)$$

$\bigcup I_i = \mathbb{R}$

$\sum_i l(I_i) = \infty$

$a \infty$

$$= m^*(A \cap E_1 \cap \dots \cap E_{n+1}) + m^*\left(A \cap \bigcap_{j=1}^{n+1} E_j^c\right)$$

$$= m^*(A \cap E_1 \cap \dots \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap \dots \cap E_{n+1}^c), \text{ como } E_{n+1} \text{ é mensur.}$$

$= m^*(A \cap$ ⇓ união disj.

$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) + \dots$

$\leq \dots$

$$m^*(A) = m^*((B \cap A) \cup (B^c \cap A))$$

$$\leq m^*((B \cap A)) + m^*(B^c \cap A))$$

$$0 \leq m^*((B \cap A)) + m^*(B^c \cap A))$$

$$m^*(B \cap A) \geq -m^*(B^c \cap A)$$

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$$

$$m^*(B) = m^*((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$$

$$\leq m^*(B \cap A) + m(B \cap A^c)$$

$$m^*(B) - m^*(B \cap A) \leq m(B \cap A^c)$$

tenho

$$m^* E = \underbrace{\inf\left\{ \sum_{j\geq 1} l(I_j),\ I_j \text{ uma sequência de abertos},\ E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}_{\mathcal{A}}$$

$$m^* aE = \underbrace{\inf\left\{ \sum_{i\geq 1} l(I_i),\ I_i \text{ uma sequência de abertos},\ aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{\mathcal{B}.}$$

1) $E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1} l(I_j),\ \in \mathcal{A}$

$|-2b+2a|$

$|-2||b-a|$ $\quad l(I) = |b-a|$

$|2|b-a|$ $\quad |b-a|$

i) $aE \subseteq \bigcup_{j\geq 1} aI_j \Rightarrow \sum_{j\geq 1} l(aI_j) \in \mathcal{B}$, mas

$-2(b-a)$

$-2b+2a = -2(b-a)$

$l(aI_j) = |a|\, l(I_j)$ 2, $l(I_j) = b-a \Rightarrow 2l(I_j) = (b-a)+(b-a)$
$= 2b-2a$
$= 2(b-a)$
$= 2\,l(I_j)$

$\sum_{j\geq 1} |a|\, l(I_j) = |a|\, z \in \mathcal{B}$

$|a| \sum l(I_i) = |a|\, z \in \mathcal{B}$

logo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

---

2) i) $aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Rightarrow \sum_{i\geq 1} l(I_i) = w \in \mathcal{B}$

ii) $E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} (I_i \cdot a^{-1}) \Rightarrow \sum_{i\geq 1} l(I_i \cdot a^{-1}) \in \mathcal{A}$, $l(I_i a^{-1}) = |1/a|\, l(I_i)$

iii) $\sum_{i\geq 1} |1/a|\, l(I_i) = |1/a| \cdot \sum_{i\geq 1} l(I_i) = |1/a|\, w \in \mathcal{A}$

logo $w \in \mathcal{A} \Rightarrow \boxed{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}.}$ //

$[0, +\infty[\, * \, 0 = [0, 0]$

12) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se $\underbrace{A \subseteq B}_{\text{Usando a hip.}} \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$.

$$m^* A = \inf\Big\{ \underbrace{\sum_{j\geq 1} l(I_j)}_{\in \mathcal{A}} ;\ I_j \text{ sequência de abertos};\ A \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Big\}$$

$$\Rightarrow m^* B = \inf\Big\{ \underbrace{\sum_{i\geq 1} l(J_i)}_{\in \mathcal{B}} : J_i \text{ sequência de abertos},\ B \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i \Big\}$$

$\Rightarrow$ temos que mostrar que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

se $z \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists (J_i)$ intervalos abertos

$B \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i$ e $z = \sum_{i\geq 1} l(J_i)$, como

~~$B \subseteq A$~~ $\Rightarrow$

$A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} J_i \Rightarrow \sum_{i\geq 1} l(J_i) \in \mathcal{A}$.

tenho $E+a \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i$. $\Rightarrow w = \sum_{i\geq 1} \ell(J_i)$. $A \subseteq B$

*) $E+a-a \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i - a \Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i - a \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \ell(I_i - a) \in \mathcal{A}$.

mas, $\ell(I_i - a) = \ell(J_i)$, pois é invariante por translação., logo.

então $\sum_{i\geq 1} \ell(J_i - a) = \sum_{i\geq 1} \ell(J_i) = w \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

3) Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, tenho que , como se $A \subseteq B \Rightarrow$ então $m^*(A) \leq m^*(B)$

$m^*(E+a) = m^*(E)$

~~$\inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$~~ $\Rightarrow m^* E \leq m^*(E+a)$

e $\inf \mathcal{B} \leq \inf \mathcal{A} \Rightarrow m^*(E+a) \leq m^* E$

. tenho que $\inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B} \Rightarrow m^* E \leq m^*(E+a)$

$\inf \mathcal{B} \leq \inf \mathcal{A} \Rightarrow m^*(E+a) \leq m^* E$

$\Rightarrow m^*(E+a) = m^* E$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \inf \mathcal{A} \leq \inf \mathcal{B}$

$\lambda(E) = \ell(E)$, se ℓ é intervalo.

i) $E+a = \{x+a : x \in E\}$.

$m^*(E+a) = m^*(E)$.

i) $m^* E = \inf \{ \underbrace{\sum_{j\geq 1} \ell(J_j) \text{, } J_j \text{ é uma sequência de abertos, } E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j}_{\text{Chamo esse conjunto de } \mathcal{A}} \}$

ii) $m^*(E+a) = \inf \{ \underbrace{\sum_{i\geq 1} \ell(I_i) \text{, } I_i \text{ é uma sequência de abertos, } E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} J_i}_{\text{Chamo esse conjunto de } \mathcal{B}} \}$

temos que provar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

iii) tenho que

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1} \ell(J_j)$. somando a ao conjunto E, temos

$E+a \subseteq \bigcup_{j\geq 1} J_j + a \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} (J_j + a) \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(J_j + a) \in \mathcal{B}$. por hipótese

$\Rightarrow \ell(J_j + a) = \ell(J_j)$, é a translação da medida, logo.

$* = \sum_{j\geq 1} \ell(J_j + a) = \sum_{j\geq 1} \ell(J_j) = z \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

---

1) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, tq E é enumerável,

logo, $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. $I_1 =]a_1 - \varepsilon$ / $I_1 =]$

Seja $\varepsilon > 0$ e considere $I_n =]a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2[$

$$\{a_n\} \subseteq I_n \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{j \geq 1}' \ell(I_j) = \cancel{n}.\varepsilon$$

$a_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ a_1 $a_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ $a_n - \frac{\varepsilon}{2}$ a_n $a_n + \frac{\varepsilon}{2}$

n

Seja $\varepsilon > 0$ e considere $\sum_{i=1}^{n}' \ell(I_j) < \cancel{\infty}^{+} \; n.\varepsilon$ $n \to \infty$ $n \to \infty$

Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, tq E é enumerável,

ou seja $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

seja $\varepsilon > 0$ e considere $I_n =]a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2[$, p $n \geq 1$

$$\{a_n\} \subseteq I_n \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \bigcup_{j \geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{j \geq 1}' \ell(I_j) = n\varepsilon$$

a_1

$$E = \bigcup_{i \geq 1} a_i \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{i \geq 1} a_i\right) =$$

$m^*A = 0$, $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) - m^*(B)$

$m^*(A) + m^*(B) = m^*((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) + m^*((A \cap B) \cup (A^c \cap B))$

$\leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) + m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$

$= m^*(A \cap B^c) + m^*(A^c \cap B) \leq m^*(B)$

$m^*(A \cap B) \Rightarrow$ ~~dd~~ $A \cap B \subseteq A \Rightarrow m^*(A \cap B) \leq m^*(A) = 0$

$m^*(A \cap B) = 0$

$m^*(A \cap B^c)$

$A \cap B^c \subseteq A$

$m(A \cap B^c) \leq m^*(A) = 0$

$A^c \cap B \subseteq B$

$\Downarrow$

$m(A^c \cap B) \leq m^*(B)$

$m^*([(A \cap B^c) \cup (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cap B)])$

$\leq m^*((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) + m^*((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \leq m^*(A \cap B^c) + m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$

$m^*(B) = m^*((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A^c \cap B)$

$\leq m^*(A^c \cap B) \leq m^*(B)$

$\leq m^*(A \cap B^c) + m^*(A^c \cap B) \leq m^*(B)$

$A \cup B = A$

$+ 2m^*(A \cap B^c) = m^*(A \cup B)$

$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) - m^*(A \cap B)$

$m^*(B) = m^*((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) \leq m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) = m^*(A \cap B^c)$

$b - \infty$

$m^*A = 0$

caso 1

$m^*E = \infty^+$, em $[b, \infty^+]$, em $(+\infty, b)$

$\uparrow$
$a = 0$

$m^*A = m^*((A\cap B)\cup(A\cap B^c)) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)$

$m(B) = m((A\cap B)\cup A\cap B^c)$

$0 \leq$ $\leq m(A\cap B) + m(A\cap B^c)$

0 $m(A\cap B^c)$

$\subseteq B$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$

seja

$\xrightarrow{\text{pela prop. 2}}$

$A\cap B \subseteq A \Rightarrow m^*(A\cap B) \leq m^* A = 0 \Rightarrow m^*(A\cap B) = 0$

$m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c) = m^*(A\cap B^c)$ $\quad m^*(A\cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

$= 0$ $\quad A\cap B^c \subseteq$ $\quad \cancel{m^*B}$ $m^*(A\cup B) \leq m^*(B)$

$m^*A = 0$,

~~$A\cap B \subseteq$~~

$B\cap$

logo, como $A\cap B \subseteq A \Rightarrow m^*(A\cap B) \leq m^*A = 0$

$m^*(A\cap B) = 0$

$m^*\cancel{(A\cap B) + m^*(A\cap B^c)}$

$m^*(B\cap A) + m^*(B\cap A^c) = m^*(B\cap A^c) \leq m^*B$

0 só que $\quad B\cap A^c \subset B$

$A, B \subseteq \mathbb{R}$,

se $m^*(A) = 0$ então $m^*(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B)$

tenho que

$m^*(A\cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$ $\quad A\cup B \subseteq$ $\quad A\cup B \subseteq$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(B)$

$m^*(B) \leq m^*(A\cup B)$

$m^*(B) \leq m$

$B\cap$ $(A\cap B) \cup (A\cup B^c) \leq m$

$m^*(B) \leq m^*(A\cap B) +$

$m^*((A\cap B)\cup(A\cap B^c)) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c) = m^*(B)$

$\leq m^*$

$m^*(B\cap A) \geq - m^*(B^c\cap$

$m^*(A)$

$m^*(A) = m^*((B\cap A)\cup(B^c\cap A)$

$0 \leq m^*(B\cap A) - m^*(B^c$

$m^*(B^c\cap$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(B)$

$m^*(B) =$

$m^*((B\cap A)\cup(B^c\cap A^c))$

$\leq m^*(B\cap A) + m^*(B^c\cap A^c)$

se $m^*(A\cup B) \leq m(A) + m(B) \leq m(B)$

$A \cap B \subseteq A$

$m^*(A\cup B) = m^*((A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\cup(A^c\cap B))$

$\leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c) + m^*(A\cap B) + m^*(A^c\cap B)$

$\leq 0 + 0 + 0$ $\qquad A \subseteq \quad A\cap B^c \subseteq A$

$m(A\cap B^c) \leq m^*(A) = 0$

$m^*([(A\cap B)\cup(A\cap B^c)] \cup [(A\cap B)\cup(A^c\cap B)])$

$\leq m^*(A\cap B)\cup A\cap B^c) + m^*[A\cap B)\cup(A^c\cap B)]$

$\leq m^*(A\cap B) + m^*(A\cap B^c) + m^*(A\cap B) + m(A^c\cap B)$

$\leq 0 + 0 + 0 + m^*(A^c\cap B)$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(A^c\cap B) \leq m^*(B)$, $\quad A^c\cap B \subseteq B$

$m^*(B) = m^*((A\cap B)\cup(A^c\cap B)) \leq m^*(A\cap B) + m^*(A^c\cap B)$

$m^*(B) \leq m^*(A^c\cap B) \leq m^*(A\cup B)$

logo $m^*(A\cup B) = m^*(B) =$ ~~$m^*(A\cup B)$~~ $m^*A + m^*(B)$

seja $E \subseteq \mathbb{R}$, tq E é enumerável,

ou seja $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

seja $\varepsilon > 0$ e considere $I_n =]a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2[$ [ ]

se que p/ o caso de n vale p/ o

caso de $n+1$ $\qquad \inf\{\sum_i l(I_j)\}$

$\{a_n\} \subseteq I_n \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{j\geq 1} l(I_j) = \ldots \varepsilon$, $\quad I_n = \varepsilon$

logo $m^*\{a_n\} \leq \varepsilon_n, \forall \varepsilon > 0$

$m^*\{a_n\} = 0$

$\{a_{n+1}\} \subseteq I_{n+1} \Rightarrow \{a_{n+1}\} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow \sum_{j\geq 1} l(I_j) = (n+1).\varepsilon$

$A^c\cap B \subseteq B$

$m^*(A)$

$A = \mathbb{Q}$ A é ilimitado,

$A =$ é $\qquad B \subseteq A^c\cap B$

mas $m^*(A) = 0 < \infty^+$

$m^*(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ se $m^*(A) = 0$ $\qquad m^*(B) \leq m$

$m^*((A\cap E)\cup(B\cup B^c))$ $\qquad A\cup B = (A\cap B)$

$(A\cap B^c)\cup$

$m^*(B)$

$(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$

$m \quad = m^*((A\cap B)\cup(A^c\cap B))$

$m^*(B) \leq m^*(A^c\cap B)$ $\qquad \leq m^*(A\cap B^c) + m(A\cap B) + m(A^c\cap B)$

$\leq \quad 0 \quad 0 \quad m(A^c\cap B) \leq m^*(B)$

10) $E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$

es medible si $\uparrow$

m

Probar que $\forall a \in \mathbb{R}$ (E medible $\to$ $E+a$ medible)

$A \cap E+a$ $\quad (A \cap E)+a$ $\quad (A \cap E^c)+a$

sea $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad (E+a)^c =$

$m^*(A) = m^*(A \cap (E+a)) + m^*(A \cap (E+a)^c)$ $\quad E^c$

$m^*(A) \leq m^*(A \cap (E+a)) + m^*(A \cap (E+a)^c)$

$\Downarrow$

$m^*((A \cap E)+a)$

$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*($

$m^*(A) \leq m^*(A$

$A\cup B \subseteq E\cup E^c$ $\qquad$ $m^*(E\cup E^c) \leq m^*(E) + m^*(E^c)$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(E\cup E^c)$

$m^*(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(E\cup E^c)$

$$\boxed{\begin{array}{l} j<3 \\ j<4 \\ \\ j<3 \\ j<4<3\ F \end{array}}$$

$m^*(A) \leq m^*(E)$

$m(B) \leq m^*(E^c)$

$m(E) - m(A)$

$m(A\cup B) = m(A) + m(B) \leq m^*(E) + m(E^c)$ $\qquad$ $+ m(E^c) - m(B)$

$m^*(A\cup B) \leq m(E) + m(E^c)$

$m(A)$ ~~$= m(A\cap B^c)$~~ $\qquad$ $m(A\cap E)$

$m(A) = m(A\cap E) + m(A\cap E^c)$

ou

$m(B) = m(A\cap E) + m(B\cap E^c)$

$m(A) \leq m(A\cap E) + m(A\cap E^c)$

$m(A\cap E) + m(A\cap E^c) \leq m(E) + m(A)$

$m(B\cap E) + m(B\cap E^c) \leq m(B) + m(E^c)$

$m(A\cap B) \leq m(A\cap E) + \cancel{m(A\cap E^c)} \leq m(A\cap B) + \cancel{m(E)} + m(E^c)$

$m(B\cap E^c)$ $\qquad$ $\leq m(A\cup E^c) + m(E) + (E^c)$

14) Dado $E\subseteq \mathbb{R}$

(i) E é mensurável

(ii) Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A\subseteq E$ e $B\subseteq E^c \Rightarrow m^*(A\cup B) = m(A) + m(B)$

~~E é mensurável, logo~~ $\quad A\subseteq E$, $B\subseteq E^c$

tenho $m^*(A) \leq m^*(B)$ e $m^*(B) \leq m^*(E)$

$m^*(A) + m(B) \leq m^*(E) + m^*(E^c) = \cancel{m(E)+m}$

$= m$

$\hookrightarrow$ pois E é mensurável

se $A\cup B \subseteq E\cup E^c$

e $m^*(A\cup B) \leq m^*(E\cup E^c)$,

$m^*(A\cup B)$

$m^*(A) + m^*(B) \leq m(E\cup E^c)$

$m^*(A\cup B) \leq m^*(E\cup E^c)$

$m^*(A) + m^*(B) - m^*(A\cup B) \leq m(E\cup E^c) - m(E\cup E^c)$

$m^*(A) + m(B) - m(A\cup B) \leq 0$

$m^*(A) + m(B) \leq m^*(A\cup B)$,

$m^*(A) + m(B) \leq m^*(A\cup B)$, por def.

Como $m^*(A\cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$ por def.

$\Rightarrow m(A\cup B) = m^*(A) + m(B) \leq m$

$m(A\cup B) = m(B) + m(B) \leq m(E\cup E^c)$

$m(A\cup B) \leq m(E\cup E^c) - m(B)$ ~~$- m(B)$~~

~~$m(E\cap \ldots E^c \ldots)$~~ $m(A\cap B)$

Caso 2) $m^*E < \infty^+$, $a \neq 0$ e $a \neq \{\infty^+\}$

$$m^*E = \underbrace{\inf\left\{ \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) : I_j \text{ é uma seq de abertos } : E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}_{A}$$

$$m^* aE = \underbrace{\inf\left\{ \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i) : I_i \text{ é uma seq de abertos } : aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{B}$$

i) $A \subseteq B$

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) \in A$, multiplicando o conj. por a

$$aE \subseteq \left(\bigcup_{j\geq 1} I_j\right) a = \bigcup_{j\geq 1} I_j a \Rightarrow \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j a) \in B.$$

Obs: para $I^* = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, tenho que $\ell(I^*) = b-a$, se $\alpha > 0$ e $\alpha I^* = [\alpha a, \alpha b] \Rightarrow \ell(\alpha I^*) = \alpha b - \alpha a = \alpha(b-a) = \alpha \ell(I^*)$

se $\alpha < 0$, tenho que $\alpha I^* = [\alpha a, \alpha b] \Rightarrow \ell(\alpha I^*) = \alpha a - \alpha b = \alpha(a-b) = (-\alpha)(b-a) = \pm\alpha \ell(I^*)$. Portanto, tenho que $\ell(\alpha I^*) = |\alpha| \ell(I^*)$.

logo:

$$\sum_{j\geq 1} \ell(I_j a) = \sum_{j\geq 1}' |a| \ell(I_j) = |a| \underbrace{\sum_{j\geq 1}' \ell(I_j)}_{\in A} \in B$$

$\Rightarrow A \subseteq B.$

ii) $B \subseteq A$

$aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Rightarrow w = \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i) \in B$, multiplicamos o conj por $(1/a)$

$$(1/a) \cdot aE \subseteq \left(\bigcup_{i\geq 1} I_i\right) \cdot 1/a = \bigcup_{i\geq 1} I_i (1/a) \Rightarrow \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i \cdot 1/a) \in A$$

$$\sum_{i\geq 1}' \ell(I_i \cdot 1/a) = \sum_{i\geq 1}' |1/a| \ell(I_i) = |1/a| \underbrace{\sum_{i\geq 1}' \ell(I_i)}_{\in B} \in A$$

$\Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow A = B$ e $m^*(aE) = m^*|a|E$.

Caso 2) $m^*E < \infty^+$, $a > 0$ e $a \neq \{\infty^+\}$

$$m^*E = \inf\underbrace{\Big\{\sum_{j\geq 1} \ell(I_j) : I_j \text{ é uma seq de abertos} : E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Big\}}_{\mathcal{A}}$$

$$m^*aE = \inf\underbrace{\Big\{\sum_{i\geq 1} \ell(I_i) : I_i \text{ é uma seq de abertos } aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Big\}}_{\mathcal{B}}$$

i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) \in \mathcal{A}$, multiplicamos o conj por a.

$aE \subseteq \Big(\bigcup_{j\geq 1} I_j\Big) a = \bigcup_{j\geq 1} I_j a \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(I_j a) \in \mathcal{B}$,

mas $\sum_{j\geq 1} \ell(I_j a) = \sum_{j\geq 1} a\,\ell(I_j) = a \sum_{j\geq 1} \ell(I_j) \in \mathcal{B}$

Obs: para $I^* = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, tenho que $\ell(I^*) = b-a$,
se $\alpha > 0$ e $\alpha I^* = [\alpha a, \alpha b] \Rightarrow \ell(\alpha I^*) = \alpha b - \alpha a$
$\Rightarrow \ell(\alpha I^*) = \alpha(b-a) = \alpha . \ell(I^*) . \Rightarrow \ell(\alpha I^*) = \alpha \ell(I^*)$

logo tenho $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

ii) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$

$aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Rightarrow w = \sum_{i\geq 1} \ell(I_i) \in \mathcal{B}$, multiplicamos o conj por $(1/a)$

$(1/a). aE \subseteq \Big(\bigcup_{i\geq 1} I_i\Big).(1/a) \Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i (1/a) \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \ell(I_i . 1/a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/a \sum_{i\geq 1} \ell(I_i) \in \mathcal{A}$, $\Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ por (i) e (ii) tenho que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow m^*(aE) = a m^*E$

Caso 3 $m^*E < \infty^+$, $a < 0$, $a \neq \{\infty^-\}$

i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1} \ell(I_j)$, multiplicando o conj E por a.

$Ea \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j . a \Rightarrow \sum_{j\geq 1} \ell(I_j a)$.

Obs: para $I^* = [a,b]$, $\ell(I^*) = b-a$, tenho $\beta < 0$, logo.

$\beta I^* = [\beta a, \beta b]$, $\ell(\beta I^*) = \beta a - \beta b = \beta(a-b) = (-\beta)(b-a) =$
$= -\beta I^*$, $\Rightarrow |\beta| I^*$

Henrique Balfanine nºUSP- [illegible]

(1)

(1) $E+a = \{x+a : x \in E\}$, $a \in \mathbb{R}$

$m^*(E+a) = m^*E$. $\Rightarrow$ $m^*(E+a) \geq m^*E$ e $m^*(E+a) \leq m^*E$

$$\underbrace{m^*E = \inf\left\{ \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) \ I_j \text{ é sq de intervalos abertos, } E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}_{A}$$

$$\underbrace{m^*(E+a) = \inf\left\{ \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i) . I_i \text{ é seq de intervalos abertos, } (E+a) \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{B}$$

i) Vamos mostrar que $A \subseteq B$

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j)$, somando a ao conjunto E, temos

$E+a \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j + a \Rightarrow \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j+a) \in B$.

mas, como $\ell(I_j)$ não varia por translação, temos

$\sum_{j\geq 1}' \ell(I_j+a) = \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) = z \in B$, logo $A \subseteq B$.

ii) Vamos mostrar que $B \subseteq A$.

$(E+a) \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Rightarrow w = \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i)$, subtraindo a do conjunto E, temos

$E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i - a \Rightarrow \sum_{i\geq 1} \ell(I_i - a) \in A$,

mas temos que

$\sum_{i\geq 1}' \ell(I_i - a) = \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i) = w \in A \Rightarrow B \subseteq A$

se $B \subseteq A \Rightarrow \inf A \leq \inf B \Rightarrow m^*E \leq m^*(E+a)$

se $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \Rightarrow m^*(E+a) \leq m^*E$

$\Rightarrow$ logo tenho que $m^*(E+a) = m^*(E)$.

―――― // ――――

1.2) $m^*(aE) = |a| m^*E$, $a \in \mathbb{R}$, $aE = \{a x : x \in E\}$.

{Caso 1) $m^*E < \infty^+$, $a \neq 0$ e $a \neq \{\infty^-, \infty^+\}$ }

$$\underbrace{m^*E = \inf\left\{ \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) : I_j \text{ é uma sq de abertos, } E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}_{A}$$

$$\underbrace{m^*|a|E = \inf\left\{ \sum_{i\geq 1}' \ell(I_i) : I_i \text{ é uma seq de abertos, } |a|E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{B}$$

i) $A \subseteq B$

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \rightarrow z = \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j)$, multiplicando o conj E por a:

$Ea \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j a \Rightarrow \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j a) \in B$,

mas $\sum_{j\geq 1}' \ell(I_j a) = \sum_{j\geq 1}' |a| \ell(I_j) = |a| \sum_{j\geq 1}' \ell(I_j) = |a| z \in B$.

logo $A \subseteq B$.

1.1) Dado um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos $E+a = \{x+a : x \in E\}$ e $aE = \{ax : x \in E\}$. Prove que $m^*(E+a) = m^*(E)$ e $m^*(aE) = |a| m^*(E)$.

seja, $m^*E = \inf \underbrace{\left\{ \sum_{j\geq 1}' l(I_j) \cdot I_j \text{ e seq de abertos } ; E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}_{A}$

$m^*(E+a) = \inf \underbrace{\left\{ \sum_{i\geq 1}' l(I_i) \cdot I_i \text{ e seq de abertos} . (E+a) \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{B}$

i) Vamos mostrar que $A \subseteq B$. ($m^*E < \infty^+$), $\boxed{m^*E = \infty^+ \Rightarrow \text{trivial}}$

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow z = \sum_{j\geq 1} l(I_j)$, somando a ao conj E, temos

$E+a \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j + a \Rightarrow \sum_{j\geq 1} l(I_j + a) \in B$

mas como $l(I_j)$ não varia por translação, temos

$\sum_{j\geq 1}' l(I_j+a) = \sum_{j\geq 1}' l(I_j) = z \in B$, logo $A \subseteq B$.

ii) Vamos mostrar que $B \subseteq A$

$(E+a) \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \Rightarrow w = \sum_{i\geq 1}' l(I_i)$, subtraímos a do conjunto E,

$E \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i - a \Rightarrow \sum_{i\geq 1}' l(I_i - a) \in A$,

mas temos que:

$\sum_{i\geq 1}' l(I_i - a) = \sum_{i\geq 1}' l(I_i + (-a)) = \sum_{i\geq 1}' l(I_i) = w \in A \Rightarrow B \subseteq A$

$\Rightarrow$

se $B \subseteq A \Rightarrow \inf A \leq \inf B \Rightarrow m^*E \leq m^*(E+a)$

se $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A \Rightarrow m^*(E+a) \leq m^*E$

$\Rightarrow$ o que implica $m^*(E+a) = m^*(E)$

(1.2) $m^*(aE) = |a| m^*E$, $a \in \mathbb{R}$, $aE = \{ax \; x \in E\}$

Caso 1. $m^*E = \infty^+$ e $a \neq 0$.

se $E = \mathbb{R}$, tenho:

i) $m^*E = \inf \overbrace{\left\{ \sum_{j\geq 1}' l(I_j) : I_j \text{ seq de aberto}, \; \mathbb{R} = E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \right\}}^{A}$

como $\bigcup_{j\geq 1} I_j$ cobre toda a reta, tenho que. $m^*E = m^*\mathbb{R} = \infty^+$

ii) $m^*(aE) = \inf \underbrace{\left\{ \sum_{i\geq 1}' l(I_i) : I_i \text{ seq de abertos}, \; aE \subseteq \bigcup_{i\geq 1} I_i \right\}}_{B}$

se tenho:

$E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j \Rightarrow a \cdot E \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j a \Rightarrow a \cdot \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j a \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{j\geq 1} I_j a = \mathbb{R} \Rightarrow m^*(aE) = m^*\mathbb{R} = \infty^+$

iii) $|a| m^*E = |a| m^*\mathbb{R} = \infty^+$

iv) $m^*(aE) = |a| m^*E$.

(3) tenho que se $m^*(A)=0$, vale.

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$$

i) $m^*(A\cup B)=m^*([(A\cap B)\cup(A\cap B^c)]\cup[(A\cap B)\cup(A^c\cap B)])$

$\leq m^*[(A\cap B)\cup(A\cap B^c)]+m^*[(A\cap B)\cup(A^c\cap B)]\leq$

$\leq m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c)+m^*(A\cap B)+m^*(A^c\cap B) = *$

mas como, $\begin{cases}(A\cap B)\subseteq A \Rightarrow m^*(A\cap B)\leq m^*(A)=0\\ (A\cap B^c)\subseteq A\Rightarrow m^*(A\cap B^c)\leq m^*(A)=0\end{cases}$, logo

$*= 0+0+0+m^*(A^c\cap B)\leq m^*(B)$, pois $A^c\cap B\subset B$

ii) $m^*(B)=m^*((A\cap B)\cup(A\cap B^c))\leq m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c)=$
$=0+m^*(A\cap B^c)$, logo $m^*(B)\leq m^*(A\cap B^c)$,

mas como $A\cap B^c\subseteq(A\cup B)\Rightarrow m^*(A\cap B^c)\leq m^*(A\cup B)$.

logo:

$m^*(B)\leq m^*(A\cap B^c)\leq m^*(A\cup B)$

portanto tenho que $m^*(A\cup B)\leq m^*(B)$ e

$m^*(A\cup B)\geq m^*(B)$ logo

$m^*(A\cup B)=m^*(B)=m(A)+m^*(B)$ $\square$

ii) $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$

$|a|E\subseteq \bigcup_{i\geq1} I_i \Rightarrow w=\sum_{i\geq1}\ell(I_i)$, { vamos multiplicar o conjunto E por a^{-1}. }

$a^{-1}|a|E\subseteq \bigcup_{i\geq1} I_i\cdot a^{-1}\Rightarrow E\subseteq \bigcup_{i\geq1} I_i\cdot(1/a)\Rightarrow \sum_{i\geq1}\ell(I_i(1/a))\in\mathcal{A}$.

mas $\ell(I_i(1/a))=|1/a|\ell(I_i)$, com $a\neq0$ e $a\neq\{\infty^-,\infty^+\}$

temos

$\sum_{i\geq1}\ell(I_i(1/a))=|1/a|\sum_{i\geq1}\ell(I_i)=|1/a|\,w\in\mathcal{A}$

logo $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$.

→ pela proposição 2, provado no ex (2).

iii) se $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}\Rightarrow \inf\mathcal{B}\leq\inf\mathcal{A}\Rightarrow m^*|a|E\leq m^*(aE)$

e $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}\Rightarrow \inf\mathcal{A}\leq\inf\mathcal{B}\Rightarrow m^*(aE)\leq m^*|a|E$.

logo $m^*(aE)=m^*|a|E$.

{ caso 2) $m^*E=\infty^+$, $E=\mathbb{R}$ (por exemplo) $\Rightarrow aE=\{ax\ x\in\mathbb{R}\}$, com $a\neq0$ e $a\neq\{\infty^-,\infty^+\}$

tenho $m^*E=\inf\{\underbrace{\sum_{i\geq1}\ell(I_i)\cdot I_i \text{ seq de abertos}, \bigcup_{i\geq1}I_i\supseteq E=\mathbb{R}}_{\mathcal{A}}\}$

e

$m^*aE=\inf\{\underbrace{\sum_{j\geq1}\ell(I_j)\ I_j \text{ seq de abertos}, \bigcup_{j\geq1}I_j\supseteq aE}_{\mathcal{B}}\}$

$\Rightarrow E\subseteq\bigcup_{i\geq1}I_i\Rightarrow aE\subseteq\bigcup_{i\geq1}aI_i\Rightarrow\sum_{i\geq1}\ell(I_i a)=|a|\sum_{i\geq1}\ell(I_i)=|a|\cdot\infty^+\in\mathcal{B}$

logo $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$.

⇒ Resumo, conj mensuráveis

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$ é (Lebesgue-mensurável) p/ todo $A \subseteq \mathbb{R}$, se

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

⇒ Prop

i) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$, $m^* E = 0 \Rightarrow E$ é mensurável.

ii) " se E é mens $\Rightarrow E^c$ é mensurável.

iii) $\forall E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$, se E_1 e E_2 são mens. $\Rightarrow E_1 \cup E_2$ é mens.

iv) Colorário de (iii), p/ $\forall E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathbb{R}$, mens. $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ é mens.

v) $E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathbb{R}$, mens., $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow m^*(A \cap \bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j)$

vi) E é mens $\Rightarrow E + a$ é mens.

$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E$ é mensurável$\}$ ⇒ é o conjunto de todos os elementos mensuráveis em $\mathbb{R}$.

↳ é a σ álgebra

(1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

(2) $\forall E \subseteq \mathbb{R}$, se $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$

(3) $\forall (E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathbb{R}, (E_j \in \mathcal{M}, \forall j \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M})$

(4) $\forall I$, (I é intervalo $\Rightarrow I \in \mathcal{M}$)

⇒ $\mathcal{M}$ é o conjunto ao qual vou atribuir uma medida

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ é definida como:

$$m : \mathcal{M} \to [0, +\infty] \qquad E \to mE = m^* E$$

$\Rightarrow m = m^*/_{\mathcal{M}}$ | m é a medida exterior restrita ao conj dos mens.

⇒ $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável

⇒ $(X, \mathcal{M}, m)$ é o espaço de medida

⇒ Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é mensurável.

⇒ " aberto de $\mathbb{R}$ é mensurável

⇒ $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, $\exists\ \Theta \in \mathbb{R}$ tq $A \subseteq \Theta$ e $m^*\Theta \leq m^* A + \varepsilon$.

sendo que $A \subseteq \Theta \Rightarrow m^* A \leq m^* \Theta$.

⇒ Se A, B mensurável ⇒ $A \setminus B$ mensurável

⇒ $m(A \setminus B) = mA - mB$ se $mB < +\infty$

⇒ Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, são eq.

i) E é mensurável

ii) p/ $\varepsilon > 0$, $\exists\ \Theta \subseteq \mathbb{R}$, tq $E \subseteq \Theta$ e $m^*(\Theta \setminus E) < \varepsilon$.

iii) $G \subseteq \mathbb{R}$ e G_δ tq $E \subseteq G$ e $m^*(G \setminus E) = 0$.

$\mathcal{M}$ é σ-álgebra $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset, X \in \mathcal{M} \\ E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M} \\ E_j \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathcal{M} \end{array} \right.$

(1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ é a menor σ-álgebra possível

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ é σ-álgebra

(3) X = conj. ñ enumerável.

$\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E$ é enumerável ou E^c é enumerável$\}$

⇒ Seja $X \neq 0$ e $\mathcal{F}_i, i \in I$ uma família de σ-álgebras de X, considere.

$$\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \Rightarrow \mathcal{G} \text{ é } \sigma\text{-álgebra.}$$

↳ "A interseção de σ-álgebras é σ-álgebra".

$\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ (coleção dos abertos da reta)
↳ "Topologia da reta não é uma σ-algebra".

i) $\emptyset, X = \mathbb{R}$ é aberto
ii) $E \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \nRightarrow E^c \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \to E^c \Rightarrow$ é fechado
iii) União de abertos é aberto

$\Rightarrow$ " a menor σ-algebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, que contém $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, chama-se a σ-algebra de Borel ou σ-algebra dos borelianos de $\mathbb{R}$ e é designada por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$." $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} - [\mathcal{T}_{\mathbb{R}}]$

Se $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E$ é mens.$\}$, todo aberto é mens.

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M} \} \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}$ $\left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{B}_{\mathbb{R}}| = c \\ |\mathcal{M}| = 2^c \end{array} \right.$

$X \neq \emptyset$, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathfrak{X}$ é uma σ-algebra dos subconjuntos de X, se

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{X}$;
(ii) $E \in \mathfrak{X} \Rightarrow E^c \in \mathfrak{X}$;
(iii) $E_j \in \mathfrak{X} \Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j \in \mathfrak{X}$;

$(X, \mathfrak{X})$ é um espaço mensurável

$\Rightarrow$ Uma medida em $\mathfrak{X}$ é uma função.

$$\mu : \mathfrak{X} \to [0, +\infty]$$
$$E \to \mu E.$$

$\Rightarrow$ Com as seguintes propriedades.

M1) $\mu \emptyset = 0$;

M2) se $E_j \in \mathfrak{X}$, e $E_i \cap E_j = \emptyset$ p/ $i \neq j$ logo.

$$\mu\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j\right) = \sum_{j \geq 1} \mu E_j$$

$\Rightarrow (X, \mathfrak{X}, \mu)$ é um espaço de medida.

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(X)$ e $x_0 \in X$

$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$

é dita medida, centrada em x_0

(3) X não mensurável. tenho

$\mathfrak{X} = \{E \subseteq X : E$ é enumerável ou E^c é enumerável$\}$

$\mathfrak{X}$ é σ-algebra

$\mu E = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é enumerável}, \\ +\infty, & \text{se } E^c \text{ é enumerável}. \end{cases}$

(4) $X = \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$

$\mu E = \begin{cases} \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n} & \text{se } E \neq \emptyset; \\ 0 & \text{se } E = \emptyset. \end{cases}$

(5) X, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{A}$
↳ é σ-algebra.

$\mathcal{E}$ é equipotente à $\mathcal{A}$
$\exists$ uma func inj de A em B

a σ-algebra, $\zeta = [\mathcal{E}]$, "gerada por $\mathcal{E}$" é a menor σ-algebra que contém $\mathcal{E}$, isto é.

(i) $\mathcal{E} \subseteq \zeta$
(ii) se $\mathcal{A}$ é σ-algebra de X e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, então $\zeta \subseteq \mathcal{A}$.

(5) $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} . E$ é mensurável$\}$

Seja $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{\Theta \subseteq \mathbb{R} : \Theta$ é um aberto em $\mathbb{R}\}$

$\{\Theta \in \mathcal{M}, \forall \Theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}$, não é σ-algebra.

(6) Um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é completo se, p/ todo $A \subseteq X$, se $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) = 0$, então p/ todo $C \subseteq A \Rightarrow C \in \mathcal{M}$ e $\mu(C) = 0$.

=> Lista 4

(1) Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| \text{ se } A \text{ é finito.} \\ +\infty \text{ se } A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

queremos mostrar que μ é uma medida sobre $\mathbb{N}$.
↳ tenho que mostrar M_1 e M_2

i) Como $\emptyset$ é finito $\Rightarrow \mu\emptyset = |\emptyset| = 0$

ii) Sejam $A_j \in \mathcal{M}$ t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ p/ $i \neq j$

· Caso 1

Tenho um A_j infinito p/ algum $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} A_j$ é infinito.

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1}' \mu A_j = +\infty$$

· Caso 2

(a união enumerável de finitos é finita.)

Tenho A_j finito, p/ todo $j \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow \bigcup_{j\geq 1} A_j$ é finito, e temos:

$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq 1} A_j\Big) = \Big|\bigcup_{j\geq 1} A_j\Big| = \sum_{j\geq 1}' |A_j| = \sum_{j\geq 1}' \mu(A_j)$$

hip. hip.

a norma da união é a soma das normas?

=> portanto μ é uma medida sobre $\mathbb{N}$.

(2) Seja $X \neq \emptyset$ se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são σ-algebras de X então $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ é σ-algebra de X. se $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \Rightarrow \bigcap \mathcal{A}_i$ é σ-algebra.

i) $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ e $\emptyset \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \emptyset \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$

ii) $X \in \mathcal{A}_1$ e $X \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$

$E \in \cap \Rightarrow E \in \mathcal{A}_1$ e $E \in \mathcal{A}_2$
$\Rightarrow E^c \in \mathcal{A}_1$, $E^c \in \mathcal{A}_2$
$\Rightarrow E^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$

iii) $E \in \mathcal{A}_1$ e $E \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow E \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ e $E^c \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$

iv) $(E_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_1$ e $(E_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} E_n \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$

=> Para o caso geral

i) $\emptyset \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in I \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

ii) $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i\ \forall_i \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i\ \forall_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

iii) $(A_n)_{n\geq 1} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

(3) Se $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{E}$ uma coleção ñ vazia de subconjuntos de X.
$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} :$ σ-algebra de subconjuntos de X e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ = interse-
=> Prove que $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ é uma σ-algebra que contém $\mathcal{E}$ e é a menor σ-algebra que contém $\mathcal{E}$ segundo a ordem de inclusão
=> se $\mathcal{A}$ é uma σ-algebra de X que contém $\mathcal{E}$ então $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$

R:
$\mathcal{A}(\mathcal{E})$ é σ-algebra de X que contém $\mathcal{E}$

=> "confuso" ver caderno

$$\mathcal{E} \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{C}} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

(4) Os abertos da reta podem ser escritos como reuniões enumeráveis de intervalos abertos. Estes são da forma $]a, b[$, $(a<b)$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$.

tem relação

(i) $\mathcal{E} = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n\geq 1} [a + 1/n, +\infty[\in \mathcal{A}(\mathcal{E})$$

⇒ Funções mensuráveis

⇒ Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida e considere $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. (reta estendida).

(i) p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$.

(ii) p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}$

(iii) " $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}$

(iv) " $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}$

f é mensurável quando os elementos que satisfazem a condição da função, pertencem à σ-algebra dos elementos de X.

⇒ $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X} \iff \underbrace{f^{-1}(]\alpha, +\infty[)}_{\text{a imagem inversa}} \in \mathcal{X}$

⇒ fatos importantes

$]\alpha - 1/n$, α

$[\alpha, +\infty[= \bigcap_{n \geq 1}]\alpha - 1/n, +\infty[= [\alpha, +\infty[$

⇒ (i) ⇔ (ii) ⇔ (iii) ⇔ (iv)

Propriedades

Se $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, é mensurável então, p/ todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$f^{-1}(\alpha) = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ é mensurável.

↳ $f^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}([\alpha, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, \alpha])$

se $\alpha = +\infty \Rightarrow f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in X : f(x) > n\} \in \mathcal{X}$

1 2 3 4 5 6

(1)

(3) Seja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, função mensurável.

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{X}.}}{f^{-1}(]a, b[)} = \underset{f(x) > a}{f^{-1}(]a, +\infty])} \cap \underset{f(x) < b}{f^{-1}([-\infty, b[)}$$

* p/ todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ é um conjunto.

$f: X \to \mathbb{R}$.

- f é mensurável $\iff f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{X}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

  $]a,b[=]a, +\infty[\cap]-\infty, b[$.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, então f é mensurável.

- $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ é aberto ⇒ $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{X}$.

$E \subseteq X$;

$\chi_E : X \to \mathbb{R}$. "$\chi_E$ é a func característica do conj. E."

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Tenho $\varphi: X \to \mathbb{R}$,

φ é uma função simples se im φ é um conjunto finito

Ex.

(1) $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $E \subseteq X$ — a função característica é mensurável

• χ_E é função mens $\iff$ E é conj. mens. — ⇒ livro de medida Hassen

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$

(⇒) $\chi_E^{-1}(1) = E$ | χ_E é mensurável ⇒ $\underbrace{\chi_E^{-1}(1) \in \mathcal{X}}_{E \in \mathcal{X} \Rightarrow E \text{ é mensurável}}$ ↗ $E \in \mathcal{X}$ — σ-álgebra

(⇐) E é mensurável ⇒ χ_E é mensurável

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, considere,

$A = \{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\}$ se, $\begin{cases} \alpha \geq 1 \Rightarrow A = \emptyset \in \mathcal{X}; \\ 0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow A = E \in \mathcal{X}. \\ \alpha < 0 \Rightarrow A = X \in \mathcal{X}. \end{cases}$ ⇒ ver parte de funções mensuráveis no Bartle.

(2). Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$, funções mens.

Então $(f+g, f \cdot g, cf, (c \in \mathbb{R}), f^2, f \cdot g)$, são func mens.

(3) $f_n : X \to \mathbb{R}$, seq de funções mensuráveis.

Considere: $\begin{cases} g : X \to \overline{\mathbb{R}} \\ g(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\} \end{cases}$ | $\begin{cases} h : X \to \overline{\mathbb{R}} \\ h(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\}. \end{cases}$

⇒ Então g e h são funções mensuráveis.

$\exists \lim_{n \to \infty^+} x_n \iff \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, | $\underline{\lim} f_n$ e $\overline{\lim} f_n$ são mens.
↳ f_n funções mensuráveis

(2)

Teo ⇒ Importante

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma func mensurável,

então existe uma sequência (φ_n) de func simples mensuráveis

com: $0 \leq \varphi_1(x) \leq \ldots \leq \varphi_n(x) \leq \ldots \leq f(x)$

↳ Tal que $\lim_{n \to \infty^+} \varphi_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

⇒ Se f é limitada, então pode-se obter (φ_n) de maneira, que a convergência seja uniforme.

Bartle ⇓ Exercício

(1) $(E_n)_{n \geq 1}$ seq de conjuntos mensuráveis, tal que:

$E_1 \subset E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots$, então

• $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \to \infty^+} \mu E_n$

(2) seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$, espaço de medida e $(E_n) \subseteq \mathcal{X}$, com

$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$

Se $\mu E_1 < +\infty$ então, $\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n\right) = \lim_{n \to \infty^+} \mu E_n$

(3) Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, uma func mens. (na reta extendida)

⇒ $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{X}$ é mensurável.

R: se f é mens. ⇒ $\{f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{X}, f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{X}\}$ — $\bigcap_{n \geq 1} f(x) > n$ ou $\bigcap_{n \geq 1} f(x) < n$

(4) Seja $f: X \to \mathbb{R}$, funç mens.   (3)

Dado $Y \subseteq X$, $Y \in \mathcal{X}$, considere $h = f|_Y$, isto é $h: Y \to \bar{\mathbb{R}}$,

$h(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$.

(5) Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ funç mens. prove que $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é mens.

(6) Seja $Y = f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$ em que:

$$\left\{\begin{array}{l} f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ g^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X : g(x) \in \mathbb{R}\} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty) : f^{-1}(-\infty)$$

Rever!

f, g são mens. em $Y \in \mathcal{X}$.

(7) $[f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f mensurável, g contínua.$]$

- $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mensurável.

$$\left\{\begin{array}{l} (\text{mens}) \circ (\text{cont.}) \Rightarrow \{\text{nõ é mens.}\} \\ (\text{cont}) \circ (\text{mens}) \Rightarrow \{\text{mens.}\} \end{array}\right.$$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma funç mens. $c \in \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x+c)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.A) mostre que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-1/n, b+1/n)$, e que por consequência, mostrando que $\forall$ σ-algebra, que contém todos intervalos abertos, também contém todos os intervalos fechados.

=> também mostre que $\forall$ σ-algebra que contém todos os intervalos fechados, também contém todos os intervalos abertos

2.B) Mostre que a σ-algebra de Borel, $\mathcal{B}$ é também gerada pela coleção de intervalos $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

=> mostre que $\mathcal{B}$ é gerada por uma coleção $[(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ x > a\}$ $a \in \mathbb{R}$.

2.C) Seja $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq X$, $E_0 = \emptyset$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad F_n = A_n \cap (E_{n-1})^c, \quad F_n = A_n \setminus E_{n-1}$$

=> mostre que (E_n) é uma seq monótona crescente. ?

e F_n é uma sequência disjunta, isto é $F_n \cap F_m = \emptyset$. $n \neq m$.

tq $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.D) Seja $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq X$, $x \in X$ e $x \in A_n$, tq

$$~~\lim\sup~~ A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right] := A$$

2.E) $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq X$

$$\lim\inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right]$$

2.F.) Se (E_n) é uma seq de subconj. de X. que monótona crescente $(E_1 \subseteq E_2 \subseteq \quad)$, mostre que

$$\lim\sup E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim\inf E_n$$

2.G) Se (F_n) é uma seq de $\subseteq X$, tq F_n é monótona decrescente $(F_1 \supseteq F_2 \supseteq \quad)$, mostre que

$$\lim\sup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \lim\inf F_n$$

2.H) Se $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq X$, mostre que

$$\emptyset \subseteq \lim\inf A_n \subseteq \lim\sup A_n \subseteq X$$

=> Dê um exemplo de seq (A_n) tq

$$\lim\inf A_n = \emptyset, \quad \lim\sup A_n = X$$

2.I) Dê um exemplo de uma função f em $X \to f : X \to \mathbb{R}$) => ? não é $\mathcal{X}$-mensurável., mas é em $|f|$ e f^2.

2.J) Se a, b, c são números $\in \mathbb{R}$. seja

$$\mathrm{mid}(a,b,c) = \inf\{\sup\{a,b\}, \sup\{a,c\}, \sup\{b,c\}\}$$

se $a < b < c$ => $\inf\{a,b,c\} = a$ e $\sup\{a,b,c\} = c$

$x \in \mathbb{R}$

Se f_1, f_2, f_3 são $\mathcal{X}$-mensuráveis → Vamos supor $f_1(x) < f_2(x) < f_3(x)$ => mid(

$g(x) = \mathrm{mid}(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) = f_2(x)$ =>

$$f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < \alpha$$

$$g(x) = f_1(x) < \alpha \Rightarrow$$

2.P) Seja $(X, \mathfrak{X})$ um espaço mensurável, (3)

$f(x) \in \mathfrak{X}$ e $f: X \to \mathbb{R}$. f é $\mathfrak{X}$ mensurável

$\Leftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}$ p/ cada $E \in \mathcal{B}$

2.Q) Seja $(X, \mathfrak{X})$ um espaço mensurável, f é $\mathfrak{X}$ mensurável.

$f: X \to \mathbb{R}$ e seja φ a função contínua $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x))$ é $\mathfrak{X}$ mensurável

$\Rightarrow$ Dica: If φ is contínuas, então $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{B}$ p/ cada $E \in \mathcal{B}$ }

2.R) Seja f e ψ um $\mathcal{B}$ mensurável.

$\hookrightarrow \mathfrak{X}$ mensurável

$\Rightarrow$ mostre que $\psi \circ f$ é $\mathfrak{X}$ mensurável $\quad f^{-1}(E) \in \mathfrak{X}$

$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{X}$

~~2.S) Seja $f \to \mathbb{C}$~~

2.U) mostre $f: X \to \mathbb{R}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é $\mathfrak{X}$ mensurável

$\Leftrightarrow$ Ax

2.V) $M \neq \emptyset \subseteq X$, classe monótona

$(E_n) \in M$

⇒ Pares importantes

(i) $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ e $f^{-1}(Y)=X$

$\cancel{f^{-1}(\emptyset)=\{f(x): x\in\emptyset\}}\ \cancel{\{x\in X : f(x)\in\emptyset\}=\emptyset}$

$\cancel{f^{-1}(E)}=f^{-1}(Y)=\{x\in X : f(x)\in Y\}=X$ $f(x)$

(ii) $f^{-1}(E^c)=\{\cancel{x\in X\ f(x)\in E^c}\}=\{x\in X\ f$

$= \{x\in X\ f(x)\notin E\}$

$=(\underbrace{\{x\in X\ f(x)\in E\}}_{(f^{-1}(E))^c})^c =$ importante

(iii) ~~Se~~ $\cancel{(E_i)_{i\in I}}$ ~~é~~

$(E_i)_{i\in I},\subseteq Y$

$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(E_i)$ e $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}E_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(E_i)$

$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)=\{x\in X: f(x)\in\bigcup_{i\in I}E_i\}$

$x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)$ e $B=$

se $x\in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)$ e $f(x)\in\bigcup_{i\in I}E_i$

$\Rightarrow x\in X$ e $f(x)\in E_i$ p/ algum i $\Rightarrow x\in\left(\bigcup f^{-1}E_i\right)$

(1) Seja $f: X\to Y$ uma função entre X e Y.

Dados $A\subseteq X$ e $E\subseteq Y$, definimos

$f(A)=\{f(x): x\in A\}$ (a imagem direta de A por f) $f(\mathbb{R})$

$f: X\to Y$, $A\subseteq X$, $E\subseteq Y$, $E\to f^{-1}(E)$

$f(A)$

$f(\emptyset)\to\emptyset$ $f^{-1}(Y)=X$

$f(X)\to Y$

Prove que:

(i) $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ e $f^{-1}(Y)=X$

(ii) $f^{-1}(E^c)=f^{-1}(E)^c$

(iii) (iv) Se $A_1, A_2\subseteq X$ então

$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$

$f(A_1\cap A_2)=\{f(\cancel{x\in A_1 e x\in A_2}) f(x): x\in A_1$ e $x\in A_2\}$

$\subseteq\{f(x): x\in A_1\}\cap\{f(x): x\in A_2\}$

(2) $f: X\to Y$ uma função e $\mathcal{Y}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Y,

Considere $\mathcal{X}=\{f^{-1}(E): E\in\mathcal{Y}\}$

$f: X\to Y$, $\mathcal{Y}=\mathcal{P}(Y)$ $\mathcal{Y}=[Y]$

$\mathcal{X}=\{f^{-1}(E)\ E\in\mathcal{Y}\}$

$f: X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{X}$-mensurável, $M(X, \mathcal{X})$, conjunto $f \in M(X, \mathcal{X})$

Se $f \in M(X, \mathcal{X})$, então → união e intersecção enumerável

$$\begin{cases} \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}, \quad \in \mathcal{X} \\ \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^c \in \mathcal{X} \end{cases}$$

2.8 Lemma

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, se e somente se

$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$, $B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$, $A, B \in \mathcal{X}$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B, \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B, \end{cases}$$

é mensurável

Se $\{E_\alpha\} \neq \emptyset$, $\{E_\alpha\} \subseteq Y$, então

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha E_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}(\bigcap_\alpha E_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(E_\alpha)$$

↳ $\mathcal{Y}$ é σ-álgebra de Y, $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{Y}\}$ é σ-álgebra de X

Ex da lista ①

2.N) $f: X \to Y$, seja $\mathcal{X}$ a σ-álgebra de X e

$\mathcal{Y} = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{X}\}$

⇒ mostre que $\mathcal{Y}$ é σ-álgebra

Ex da lista

2O) Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável e $f: X \to Y$.

Seja $A \subseteq Y \to f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$, p/ cada $E \subseteq A$

⇒ mostre que $f^{-1}(F) \in \mathcal{X}$ p/ $\forall F \in$ σ-álgebra gerada por A

$Y \supseteq A \supseteq E$

$$f: X \longrightarrow Y$$

$Y \supseteq A \supseteq E$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$

$A \to \sigma(A) \subseteq \sigma(Y)$, $\sigma(A) \ni F$

$E \in \sigma(A)$

2.K) Mostre que f é mensurável e $A > 0$. $K > 0$. $A > 0$

~~Gramformo~~ pra lá

$f_n(x) \to f(x)$

2.L) Seja f uma função não-negativa $\mathcal{X}$-mensurável em X, em que $\exists K$ $\Rightarrow$ $(0 \leq f(x) \leq K)$, p/ todo $x \in X$.

⇒ mostre que a sequência $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ do lema 2.11

⇒ converge uniformemente em $f(x)$

2.11) Lema:

$\varphi: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

Se f é uma função não negativa em $(X, \mathcal{X})$, $f: X$

então $\exists\, (\varphi_n)_{n\geq 1}$ em $(X, \mathcal{X})$. $\to \varphi_n(x) \to$ em $X \to \varphi_n(x)$

(a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, p/ $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ p/ cada $x \in X$.

(c) Cada φ_n ~~assume somente~~ é um conj finito.

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $2 \cdot 2^{2}$, $3\, 2^{3} - 1 = 3 \cdot 8 - 1 = 23$

$k = 0, ~~1, 7~~, 23,$

$k = 0, 1,$

2.M)

$f: X \to Y$

2 M) Seja f ~~uma função definida em X~~, com valores em Y.

Se $E \subseteq Y$, seja

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$$

mostre que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$.

se $E, F \subseteq Y$

$$f^{-1}(E \cap F^c) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)^c$$

Proposição:

Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas funções tq $f = g$ (q.s). Se f é (Lebesgue-mens), então g é (Lebesgue-mens).

$f = g$. q.s $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{M}$, $mN = 0$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus N$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Por hipótese, $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$.

(6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua

$E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Considere $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

$\Rightarrow$ Prove que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}$

2.1) Mostre que $[a,b] = \bigcap_{n=1} (a - 1/n, b + 1/n)$.

assim, mostrando que toda σ-álgebra que contém intervalos abertos

$f: X \to Y$ [redacted]

$\in Y$

$f(x) \to E$

$f^{-1}(E) \to$ elementos de $\mathcal{X}$

$\iff \begin{cases} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{X} \\ f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{X} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ~~$A \in \mathcal{X}$~~ $\to (A_n)_{n \geq 1} \in Y \Rightarrow \boxed{(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{Y}}$

~~$f^{-1}(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{X}$~~

$(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{Y}$

$\Rightarrow \bigcup A_{n \geq 1} \in \mathcal{Y} \Rightarrow$

~~$(\bigcup A_n)_{n\geq 1}$~~

$(\bigcup A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{Y}$

$\Downarrow$

$f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \in \mathcal{X}$

e por tanto q $\bigcup_{n \geq 1} f^{-1} A_n \in \mathcal{X}$

~~$f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1} A_n \in \mathcal{X}$~~

~~$f^{-1}(A_n)_{n \geq 1}$~~

$f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \in \mathcal{X} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} f^{-1} A_n \in \mathcal{X}$,

O complementar

(2) $f: X \to Y$, uma função $\mathcal{Y}$ uma σ-álgebra de Y. $\to$ eles são os elementos

$\mathcal{X} = \{ f^{-1}(E) : E \in \mathcal{Y} \}$

$f: X \to Y \mid \in \mathcal{Y}$, $E \subseteq Y$

$f^{-1}(E) \to$ "algum elemento em X"

$\mathcal{X} = \{ f^{-1}(E) : E \in \mathcal{Y} \}$

$\hookrightarrow$ é uma σ-álgebra de X.

i) $\emptyset \in \mathcal{Y} \Rightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{X}$.

ii) $Y \in \mathcal{Y} \Rightarrow f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{X}$,

iii) $E \in \mathcal{Y} \Rightarrow E^c \in \mathcal{Y} \Rightarrow f^{-1}(E^c) \in \mathcal{X}$ e $f^{-1}(E)^c \in \mathcal{X}$.

iv) se $(E_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{Y} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{Y} \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} E_n) \in \mathcal{X}$, mas,

$f^{-1}(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1} E_n \in \mathcal{X}$, logo $\mathcal{X}$ é σ-álgebra

Def $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$ esp. de medidas

$f: X \to Y$, uma função mensu

$f: X \longrightarrow Y$

$\mathcal{M}_X \ni f^{-1}(E) \leftarrow E \in \mathcal{M}_Y$

(3) Sejam $(X, \mathcal{M}_X, \mu)$ e $(Y, \mathcal{M}_Y, \nu)$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_Y$, $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}_Y$ $[\mathcal{E}] = \mathcal{M}_Y$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$

$f^{-1}(\emptyset) = \{$

$f^{-1}($

$E = \emptyset$

(4) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um esp de medida.

Dado $A \subseteq X$, tem-se que

- $\underbrace{\chi_A \text{ é uma func mens.}}$ $\Leftrightarrow$ A é um conj. mens. ($A \in \mathcal{M}$)

($\Rightarrow$)
χ_A é ~~mens $\Rightarrow$ A é~~ func mens $\Rightarrow$ A conj mens $\Rightarrow$ ($A \in \mathcal{M}$)

se χ_A é mens. funç.

χ_A é uma funç mens. $\Leftrightarrow$ A é um conj. mens. (isto é, $A \in \mathcal{M}$)

($\Rightarrow$) Suponhamos que χ_A seja ($\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$) mensurável.

Então $\boxed{\chi_A^{-1}([\alpha, +\infty[) \; \forall \alpha \in \mathcal{M}}$

se χ_A é ($\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_\mathbb{R}$) mensurável $\Rightarrow$

---

(5) ~~$\mathcal{M}$-$\mathcal{B}$~~

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ esp. de medida.

Determine as funções mensuráveis de X em $\mathbb{R}$ quando $|\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)|$ e quando $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$

i) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, então, toda função

$f: X \to \mathbb{R}$ é mensurável (desde que $X \neq \emptyset$)

ii) $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$, as funções são funcs constants

$f: X \to \mathbb{R}$

⇒ Funções mensuráveis

1

$(X, \mathcal{X}, \mu)$, espaço de medida, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. (reta extendida)

⇒ são equivalentes.

(i) p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$

(ii) p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}$

(iii) p/ todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}$

(iv) " $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}$

(i) ⇐ (ii)
(i) ⇒ (ii)
(ii) ⇒ (iii)
(i) ⇒ (iv)

Def.
Uma função $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ diz-se mensurável se f verifica qualquer uma das condições equivalentes ao teorema anterior

Propriedades

(1) Se $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável então, p/ todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,

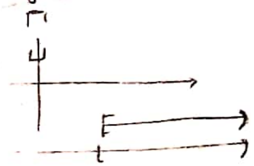
$f^{-1}(\alpha) = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ é mensurável.

→ a pré-imagem de α é um conj mensurável.

↪ $f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\{\alpha\})$ → conjunto unitário

$\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{f^{-1}([\alpha, +\infty])}_{\substack{f(x) \geq \alpha \\ \in \mathcal{X}}} \cap \underbrace{f^{-1}([-\infty, +\infty])}_{\substack{f(x) \leq \alpha \\ \in \mathcal{X}}}$$



$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\{x \in X : f(x) > n\}}_{\in \mathcal{X}} \in \mathcal{X}$$

(i) ⇒ (ii)

$A = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ → não es α

→ Saludu!

$[x \in A \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow f(x) > \alpha - 1/n, \forall n \geq 1.]$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \geq 1} \{x \in X : f(x) > \alpha - 1/n\}$

$f(x) > \alpha - 1/1$
$f(x) > \alpha - 1/2$
$f(x) > \alpha - 1/3$

$f(x) \geq \alpha$

$$\{x \in X \ f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\{x \in X : f(x) > \alpha - 1/n\}}_{\in \mathcal{X}}$$

→ é uma v. aleatória

$|PQ?|$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$X(\omega)$ é mensurável

v.a. $[X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}]$

$X : \omega \to X(\omega)$

$\{\omega \in \Omega \ X(\omega) > \alpha\}$

$\in \mathcal{F}$

(ii) ⇒ (iii) ⇒ vale o complementar

Exemplo

ops

$X = [0,1]$, e μ a medida de lebesgue

↪ $[m = m^*/\mathcal{M}]$

$\exists\ P \subseteq [0,1]$, tq P não é mensurável

$f\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \in P; \\ x-1, & \text{se } x \notin P. \end{cases}$$

f é injetora, (leva ao $\emptyset$ ou à um unitário)

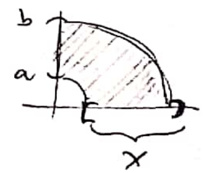
(3) Seja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, função mens.

$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b[)$$

$f(x) > a$ e $f(x) < b$.

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad b \in \overline{\mathbb{R}}$

⇒ $a < f(x) < b$



$f: X \to \mathbb{R}$ → Importante $\{x \in X : a < f(x) < b\}$

f é mens. $\Leftrightarrow f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{X}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

$\Rightarrow]a,b[=]a,+\infty[\cap]-\infty,b[$ $x \in X$. $f(x) \gtrless \Theta$

• f é mensurável $\Leftrightarrow \forall \Theta \subseteq \mathbb{R}$, Θ aberto, $f^{-1}(\Theta) \in \mathcal{X}$,

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua, então f é mensurável.

• $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ é aberto, $\Rightarrow f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{X}$.

↳ $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$

saber o que é convergência uniforme

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in E, \\ 0, \text{ se } x \notin E, \end{cases}$ | Def. $\varphi: X \to \mathbb{R}$ | função característica e função simples

→ Importante: função igual a uma constante: $f(x) = a$

Ex.

(1) $(X, \mathcal{X}, \mu)$, $E \subseteq X$.

(χ_E é func. mens. $\Leftrightarrow$ E é mensurável)

($\Rightarrow$) "$f: X \to \mathbb{R}$ mensurável $\Rightarrow f^{-1}(a) \in \mathcal{X}$"

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E, \\ 0 \text{ se } x \notin E, \end{cases}$

$\chi_E^{-1}(1) = E$ | χ_E é mensurável $\Rightarrow \chi_E^{-1}(1) \in \mathcal{X}$.

$E \in \mathcal{X} \Rightarrow E$ é mensurável.

($\Leftarrow$) E é mens. $\Rightarrow \chi_E$ é m

(2) $f: X \to \mathbb{R}$, funções mens. e g mens.

Então, $f+g$, $f-g$, cf, $(c \in \mathbb{R})$, f^2, fg são mens.

p/ f ser mensurável, precisamos mostrar

$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. | é o que temos que mostrar

$\geqslant$, $<$, $\leqslant$

$\underline{c>0}$

$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha/c\} \in \mathcal{X}$.

$\underline{c<0}$

$\{x \in X : cf(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \alpha/c\} \in \mathcal{X}$.

se $\alpha \geqslant 0$

$\{x \in X : (f(x))^2 > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{X}$

$\cup \{x \in X : -f(x) > -\sqrt{\alpha}\}$

(3) $f_n: X \to \mathbb{R}$, sequência de funções mensuráveis

$\begin{cases} g: X \to \overline{\mathbb{R}} \\ g(x) = \sup\{f_n(x) : n \geqslant 1\} \end{cases}$

$\begin{cases} h: X \to \overline{\mathbb{R}} \\ h(x) = \inf\{f_n(x) : n \geqslant 1\} \end{cases}$

$A = \{x \in X : g(x) > \alpha\}$, $x \in A \Leftrightarrow \alpha < g(x) \Leftrightarrow \alpha < \sup\{f_n(x) : n \geqslant 1\}$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \geqslant 1 : \alpha < f_{n_0}(x) \leqslant \sup\{f_n(x) : n \geqslant 1\}$

$\Leftrightarrow x \in \{x \in X : \alpha < f_{n_0}(x)\}$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{n \geqslant 1} \{x \in X : \alpha < f_n(x)\}$

Def $E \subseteq \mathbb{R}$ é mensurável, se p/ todo $A \subseteq \mathbb{R}$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

$a + E = \{x \in E : a + x,\ a \in \mathbb{R}\}$

$x - a \notin E$

10) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$.

$y = x - a \quad x = y + a \in \mathbb{R}$

Prove que $\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R},\ E \text{ é mensurável} \iff E + a \text{ é mens} \\ \forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0\ (aE \text{ é mens.} \iff E \text{ é mens.}) \end{cases}$ $y \in \mathbb{R}$

i) $(E+a)^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin (E+a)\} = \{y + a \in \mathbb{R} : y \notin E\} = E^c + a$

ii) $(aE)^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin aE\} = \{y \in \mathbb{R} : \frac{y}{a} \notin E\}$

iii) $(A+a) \cap (E+a) = \{x \in \mathbb{R} : x \in (A+a) \text{ e } x \in (E+a)\}$

$= \{y + a \in \mathbb{R} : x \in A \text{ e } x \in E\} = (A \cap E) + a$

iv) $aA \cap aE = \{x \in \mathbb{R} : x \in aA \text{ e } x \in aE\} = \{z \in \mathbb{R} : \frac{z}{a} \in A \text{ e } \frac{z}{a} \in E\} =$

$= \{ya \in \mathbb{R} : y \in A \text{ e } y \in E\} = (A \cap E).a$

---

i) E mens $\Rightarrow E + a$ mens., $A \subseteq \mathbb{R}$ arbitrário.

$m^*(A \cap (E+a)) + m^*(A \cap (E+a)^c) = m^*(A \cap (E+a)) + m^*(A \cap E^c + a) =$

$= m^*((A-a) \cap E) + m^*((A-a) \cap E^c) = m^*(A-a) = m^*(A)$

ii) $E + a$ mens $\Rightarrow E$ mens

$E + a - a = E$ é mens.

i) aE mens $\Rightarrow E$ mens

$a \neq 0$.

$m^*(A \cap (aE)) + m^*(A \cap (aE)^c) = m^*(A \cap aE) + m^*(A \cap aE^c)$

$= m^*((A.\frac{1}{a})$