A Matriz de Proporção (ou de Taxas) e as Equações de Kolmogorov

Vamos relembrar o comportamento de $p_{ij}(t)$ para pequenos valores de *t*. A inclinação inicial é dada por

$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

na qual $\lambda_{ij} \geq 0$ se $i \neq j$ e $\lambda_{ij} \leq 0$ se *i=j*. Essas quantidades podem ser reunidas em uma matriz, denotada como Λ, e denominada como matriz de proporção (ou de taxas) do processo, sendo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \cdots \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é de grande importância para descrever as propriedades de um processo.

No caso de $i \neq j$, temos que

$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - 0}{\Delta t}$$

$\lambda_{ij}\Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} p_{ij}(\Delta t) - o(t) \Rightarrow$

$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(t)$

e assim obtemos que

$$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t).$$

No caso de ***i=j*** a expressão fica

p_{00}

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 + \lambda_{ii}\Delta t + o(\Delta t).$$

$f(x+\Delta t) = f(x) + f'(x)\Delta t + e$

$p_{ii}(\Delta t) = 1 + \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$

Sabemos que $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ para cada *j* e com $t \geq 0$. Se diferenciarmos cada lado dessa expressão, vamos obter que $\sum_j \lambda_{ij} = 0$ para cada *i*. Essa expressão é importante porque, sob a consideração de um espaço de estados finito ou não, que essas taxas devem somar zero. Também, para valores de $\lambda_{ij} \geq 0$ existem valores de $\lambda_{ii} \leq 0$ que anulam as primeiras, tornando a soma zero. Pensando assim, podemos dizer que os termos na diagonal de Λ são negativos e fora dela são positivos e, ainda que, a soma dos elementos fora da diagonal é igual ao modulo do elemento da diagonal.

Vamos relembrar que a equação de Chapman-Kolmogorov é dada por

$$p_{ij}(t+\tau) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(\tau)$$

e que, se diferenciarmos cada lado da equação em relação a τ teremos

$$\frac{\partial p_{ij}(t+\tau)}{\partial \tau} = p'_{ij}(t+\tau) = \sum_k p_{ik}(t)\frac{dp_{kj}(\tau)}{d\tau}$$

Estabelecendo que τ =0, é obtido (lembre que isto é devido a $\lambda_{kj} = \frac{dp_{kj}(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$)

$p'_{ij}(t) = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj}$ para i,j = 0,1,2,... (sistema progressivo de equações diferenciais do Processo Markoviano).

As condições iniciais necessárias são dadas por

$p_{ij}(0) = 1$ se $i=j$

$p_{ij}(0) = 0$ se $i \neq j$

Essa solução também poderia ser obtida diferenciando-se em relação a t obtendo-se

$p'_{ij}(\tau) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(\tau)$ (sistema regressivo de equações diferenciais)

com as mesmas condições iniciais. Ambos os sistemas devem dar a mesma solução.

Matricialmente, os dois sistemas ficam

$\frac{d\mathrm{P}(t)}{dt} = \mathrm{P}(t)\Lambda$ (progressivo)

$\frac{d\mathrm{P}(\tau)}{d\tau} = \Lambda\mathrm{P}(\tau)$ (regressivo)

Freqüentemente estes métodos são trabalhosos e deve-se procurar outros métodos para se resolver esse sistema de equações. Como já foi mostrado, pode-se realizar a decomposição de forma que

$\Lambda = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{DS}$

na qual D é a matriz diagonal com elementos diagonais sendo os autovalores e S formada pelos respectivos autovetores.

Exemplo: Processo de Poisson

Seja

$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$ se $j \geq i$ e

$p_{ij}(t) = 0$ se $j<i$ para i,j=0,1,2,...

Calcule a matriz Λ e resolva o sistema de equações.

Para o Processo de Poisson com λ, o tempo entre ocorrências (chegadas, por exemplo) tem uma distribuição exponencial com $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. Pensando ainda neste processo, a probabilidade de chegada de uma nova ocorrência é dada por

$$p_{i,i+1}(\Delta t)=\int_0^{\Delta t}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda\Delta t}=1-(1-\lambda\Delta t+\frac{\lambda^2(\Delta t)^2}{2}-...)=\lambda\Delta t+O(\Delta t).$$

Portanto $p_{i,i+1}(\Delta t)=\lambda\Delta t+O(\Delta t)$.

O Processo de Poisson está inserido em uma gama de situações reais encontradas no cotidiano. Alguns exemplos serão agora vistos.

Exemplo: Um modelo de fila simples $(M|M|1)$

Na fila $(M|M|1)$, M denota a propriedade Markoviana (sem memória, vindo da exponencial). O primeiro M denota a chegada, sendo neste caso um processo de Poisson (desta forma o tempo entre chegadas é uma exponencial com parâmetro λ). O segundo M denota o processo de serviço, ou seja, a forma probabilística com que os entes da fila serão servidos e, também neste caso, será uma exponencial com parâmetro μ. O número 1 significa que existe um único atendente. Como ocorria com o processo de Poisson, temos que

$p_{i,i+1}(\Delta t)=\lambda\Delta t+O(\Delta t)$ para i=0,1,2,...

Analogamente, para o serviço, temos que

$p_{i,i-1}(\Delta t)=\mu\Delta t+O(\Delta t)$ para i=1,2,3,...

Assim, temos que

$\lambda_{i,i+1}=\lambda$ para i=0,1,2,... (para as chegadas) e

$\lambda_{i,i-1}=\mu$ para i=1,2,3,... (para os serviços).

Evidentemente, $\lambda_{i,i}=-(\lambda+\mu)$ para i=1,2,3,... (permanece no mesmo estado).

Assim, a matriz de taxas para esta fila fica sendo

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

A solução desse sistema para as equações de Kolmogorov não são simples.

Exemplo: O Processo composto de Poisson

Em algumas situações as mudanças de estados sofrem influencias a respeito da amplitude em que elas ocorrem. Em um processo de Poisson, quando se muda do estado *i* para *j*, pode haver alguma influência relacionada à diferença *j-i*. Quando isto ocorre este processo é denominado Processo Composto de Poisson. Vamos supor que

$p_{i,j}(\Delta t) = q_{j-i}\lambda\Delta t + O(\Delta t)$ para $i<j$.

Assim, o salto do processo (de 1,2,3,..) tem probabilidades respectivas $q_1, q_2, q_3, \dots$,

sendo que $\sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1$. Desta forma, temos que

$\lambda_{i,j} = q_{j-i}\lambda$ para $i<j$

$\lambda_{i,j} = 0$ para $i>j$ e

$\lambda_{i,i} = -\lambda \sum_j q_{j-i} = -\lambda$.

Assim, a matriz de taxas para este processo fica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda q_1 & \lambda q_2 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

As equações de Kolmogorov progressivas ficam

$p'_{i,j}(t) = -\lambda[p_{i,j}(t) - \sum_{k=1}^{j-1} q_{j-k} p_{i,k}(t)]$ para $j = i,\ i+1,\ i+2, \dots$ e para cada i fixado.

Um caso especial e bastante utilizado para o processo de Poisson, na prática, refere-se à situação na qual λ depende do tempo, ou seja, pode-se denotar como $\lambda(t)$. Devemos lembrar que existe uma relação muito apropriada entre o processo de Poisson e a exponencial. Esta permite, por exemplo, que o número esperado de chegadas em um intervalo de tempo t (denotado por $E(N(t))$) para este processo possa ser obtido como

$E(N(t)) = \int \lambda(t)dt$ para $t \geq 0$.

É necessário, contudo, que se conheça (ou se modele) $\lambda(t)$ para a aplicação.

Exemplo: Uma loja funciona das 0 as 8 horas da manhã. Suponha que o número de chegadas de clientes seja um processo de Poisson com

$\lambda(t) = 4 + 2t$ *para* $0 \leq t \leq 4$

$\lambda(t) = 24 - 3t$ *para* $4 \le t \le 8$

a- Determine a função que descreve o número esperado de chegadas para um intervalo específico *t*.

$$E(N(t)) = \int_0^t \lambda(t)dt = 4t + t^2 \quad \text{para } 0 \le t \le 4$$

$$E(N(t)) = \int_0^t \lambda(t)dt = 24t - (3/2)t^2 \quad \text{para } 4 \le t \le 8$$

b- Quantos clientes você espera no horário de 2 a 6 horas?

E(*N(t)*) = 38 clientes.

O Processo de Nascimento e Morte

Um processo um pouco diferente dos anteriores permite que X_t mude seus estados para cima e para baixo em uma unidade. Desta forma, a matriz Λ fica sendo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esta cadeia provavelmente se iniciou com estudos bacteriológicos. Suponha estarmos observando uma colônia e bactérias. Um aumento depende de quantas bactérias há na colônia e de um intervalo de tempo Δt, então

$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + O(\Delta t)$

é a probabilidade de um aumento dado que a população é de tamanho *i* no início do intervalo.

Analogamente, para uma diminuição, temos que

$p_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + O(\Delta t)$.

Um caso especial desta cadeia é o sistema de dois estados. Aqui, $\lambda_0 = \lambda$ e $\mu_0 = \mu$, então a matriz Λ fica sendo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

VI – Distribuição Limite de Processos Contínuos

Uma questão importante para os processos contínuos é obter a sua distribuição limite. Seja X_t um processo Markoviano de parâmetro contínuo, no qual $p_j(t) = P[X_t = j]$. Se o processo em questão é irredutível o limite (denotado por q_j) existe e também

$lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = q_j$ para todos os *i*.

Em forma matricial, a distribuição limite pode ser obtida pelo sistema de equações

$\underset{\sim}{q} \Lambda = \underset{\sim}{0}$.

Se $\underset{\sim}{q}$ tem solução não nula então o sistema é recorrente positivo e a distribuição limite é dada por $\underset{\sim}{q}$.

nº de atendentes

Exemplo: para a fila $M|\,M|\,1$ calcule a distribuição limite.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

As equações normais nos levam a

$-\lambda q_0 + \mu q_1 = 0$

$\lambda q_{i-1} - (\lambda+\mu) q_i + \mu q_{i+1} = 0$ para *i*=1,2,3,...

Na forma recorrente temos

$q_i = (\lambda/\mu)^i q_0$ para *i*=0,1,2,...

Lembrando que $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ temos que $q_0 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda/\mu)^i = 1$. Deve-se estudar em que condições essa série converge; se $\lambda/\mu < 1$ temos que

$q_i = (1 - \lambda/\mu)(\lambda/\mu)^i$ para *i*=0,1,2,...

Esta expressão nos remete diretamente a uma distribuição geométrica. Isto nos informa então que a média (considerando $p = \lambda/\mu$ em uma geométrica) será dada por $p/(1-p) = \lambda/(\mu-\lambda)$ e a variância por $p/(1-p)^2 = \lambda\mu/(\mu-\lambda)^2$.

Se $\lambda/\mu > 1$ então a série não converge e $q_j = 0$ para qualquer j.

A interpretação de q_j é a de que esta seja a probabilidade do processo se encontrar em j ao decorrer um longo período de tempo. Assim, na fila, por exemplo, um determinado valor de q_j informa sobre o desempenho desta ao atendimento oferecido.

Alguns processos não podem ser analisados como feito acima. Isto ocorre quando eles possuem ao menos um estado absorvente. Também, o processo de Poisson, apesar de não ter estado absorvente, tem $q_j = 0$ porque só há transições para estados mais elevados.

VII - Alguns Sistemas de Filas

Algumas definições:

Processo de chegada: descrevem como os entes chegam a fila (Poisson, por exemplo)

Processo de serviço: descreve como os entes são atendidos (exponencial, p. e.)

Disciplina da fila: escreve com que prioridade os entes que chegam terão; geralmente a disciplina é FCFS (o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido).

A fila $M|M|1$ é a mais conhecida e já teve um tratamento anterior. Podemos colocar ainda que, sendo N_t o número de entes no sistema (fila e atendimento), temos que

$E(N_t) = \lambda/(\mu - \lambda)$ e que $Var(N_t) = \lambda\mu/(\mu-\lambda)^2$ (lembre-se da geométrica).

Algumas filas podem ter sua capacidade física limitada.

A Fila $M|M|1|N$

Esta fila é exatamente como a $M|M|1$, contudo aqui só há espaço para N entes. Assim,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}_{(N+1)x(N+1)}$$

A distribuição limite para este sistema pode ser facilmente encontrado.

As filas podem ter mais de um atendente.

A Fila $M|M|r$

Esta fila tem as mesmas características que a $M|M|1$, contudo tem r atendentes. Isto não afeta chegadas, portanto $p_{i,i+1} = \lambda \Delta t$, mas afeta os serviços (saídas) de forma que

$$p_{i,i-1} = i\mu\Delta t \;;\; i < r$$

$$p_{i,i-1} = r\mu\Delta t \;;\; i \geq r$$

A matriz Λ fica sendo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & & & & \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & r\mu & -(r\mu+\lambda) & \lambda & \cdots & \\ & & & & r\mu & -(r\mu+\lambda) & \lambda & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{q}\Lambda = 0$

A distribuição limite fica sendo

$$q_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i q_0 \;;\; i < r$$

$$q_i = \frac{\lambda^i}{r!\, r^{i-r} \mu^i} q_0 \;;\; i \geq r$$

fazer os contas

$$q_0 = 1 \Big/ \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{r!\, r^{-r}} \sum_{i=r+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{r\mu}\right)^i \right)$$ (a condição de convergência é que $\lambda < r\mu$)

A Fila $M|M|r|N$

Esta fila é idêntica à anterior, apenas dispensa a condição de convergência e modifica q_0, sendo que este fica

$$q_0 = 1 \Big/ \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{r!\, r^{-r}} \sum_{i=r+1}^{N} \left(\frac{\lambda}{r\mu}\right)^i \right).$$

A Fila $M|M|\infty$

Neste caso $r \to \infty$, ou seja, não há limitação para atendimento. Então temos que

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = i\mu\Delta t$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

A distribuição limite é facilmente encontrada.

não há uma distribuição de probabilidade

A Fila $M|G|1$

Uma outra possibilidade é a fila $M|G|1$, ou seja, não se conhece a distribuição dos serviços, que é geral (**G**). O tamanho médio do sistema (denotado por *L*) pode ser obtido pela fórmula de Pollaczek e Khintchine,

$$L=\rho+\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma_s^2}{2(1-\rho)}$$ tamanho médio do sistema - esperança

na qual $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ e σ_s^2 é a variância do tempo de serviço.

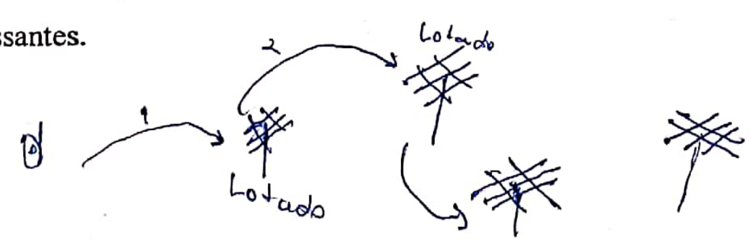
Geralmente não há uma boa aproximação com sistemas reais.

Noções de Redes

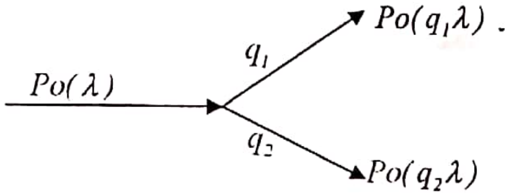
Redes de filas são muito aplicadas atualmente em vários problemas práticos. Um resultado surpreendente é escrito na Rede de Jackson, na qual vários nós idênticos, apesar de dependentes (por trocarem entes entre si) funcionam de forma estatisticamente independentes.

Vários problemas envolvendo redes não têm estruturação devido à complexidade envolvida em situações práticas. Geralmente há retornos (*feedbacks*) que quebram estruturas de rota e as tornam dependentes de forma a não haver mais resultados teóricos disponíveis para análise. Assim, vários problemas práticos são resolvidos por simulação, ou seja, um programa de computador simula o sistema real e dá, como resultados, várias medidas estatísticas que podem ser avaliadas sobre o desempenho do sistema atual e sobre algumas modificações que se possam introduzir para sua melhoria.

Alguns resultados importantes podem ser obtidos quando se trata de um Processo de Poisson. A junção desses processos, quando independentes, fornece alguns resultados interessantes.

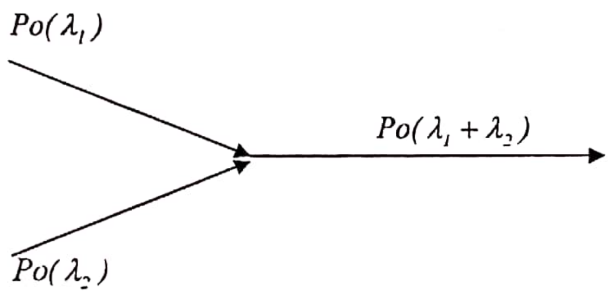


- Entrada e divisão probabilística de um Processo de Poisson:



Esse resultado pode ser generalizado e ajuda muito em redes que se dividem (fluxo de trânsito, por exemplo). Aqui, os $q_i's$ são probabilidades e, neste caso, $q_1 + q_2 = 1$.

- Junção de Processos de Poisson independentes:



Este resultado também pode ser generalizado para um número maior de processos.
Esta configuração também é importante pelos mesmos motivos da anterior. É necessário que se consiga assegurar a independência entre os processos para que os resultados possam ter validade

MAIS: Simulação (exemplo)

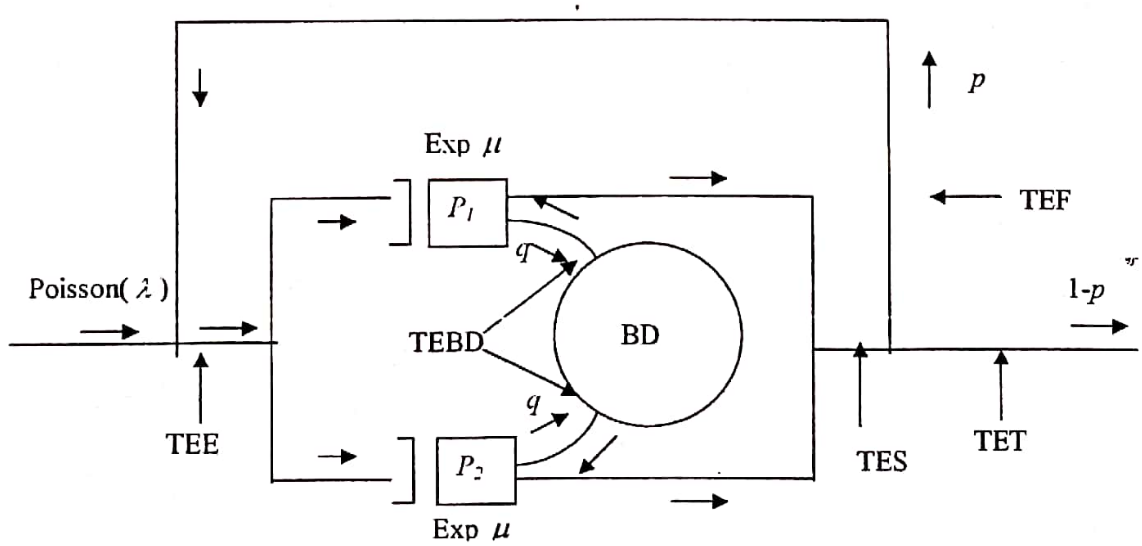


Figura: Fila M/M/2-S, com bloqueamento e *feedback* Bernoulli mostrando os diferentes pontos de coleta de dados para tempos entre ocorrências.