

# Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

# Distribuições invariantes

Seja  $\mathbf{X}$  uma CM em  $\mathcal{S}$  com MT  $\mathbf{P}$ . Uma medida  $\mu$  em  $\mathcal{S}$  será dita *invariante* (ou *de equilíbrio*, ou *estacionária*) para  $\mathbf{X}$  (ou  $\mathbf{P}$ ) se

$$\mu\mathbf{P} = \mu \quad (\text{ie, } \mu_y = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x P_{xy}, y \in \mathcal{S}). \quad (0)$$

Se  $\mu$  for uma probabilidade, diremos que  $\mu$  é uma *distribuição invariante* (ou *de equilíbrio* ou etc).

**Obs.** 1)  $\mu$  inv  $\Rightarrow \mu\mathbf{P}^n = \mu, n \geq 0$ . (1)

2) Se  $\mu$  distr inv e  $X_0 \sim \mu$ , então  $X_n \sim \mu, n \geq 1$ .

**Def.** Diremos que um processo estocástico  $(X_n)_{n \geq 0}$  é *estacionário* se  $(X_{n+\ell})_{n \geq 0} \sim (X_n)_{n \geq 0}, \ell \geq 0$ .

# Teorema 1

Se  $\mu$  distr inv para uma CM  $\mathbf{X}$  e  $X_0 \sim \mu$ , então  $\mathbf{X}$  é estacionária.

**Dem.** Basta mostrar que para  $n, \ell \geq 1$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}$  arbitrários

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{1+\ell} = x_1, \dots, X_{n+\ell} = x_n). \quad (2)$$

O lado dir de (2) vale

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_\ell = x) P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \stackrel{\text{inv}}{=} \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n},$$

que é o lado esq de (2). □

## Teorema 2

Suponha que  $\mathcal{S}$  seja finito e que para algum  $x \in \mathcal{S}$  haja um vetor  $\pi$  em  $\mathcal{S}$  tq

$$P_{xy}^{(n)} \rightarrow \pi_y \text{ qdo } n \rightarrow \infty \quad \forall y \in \mathcal{S}$$

Então,  $\pi$  é uma distribuição invariante.

**Dem.**  $\pi_y = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{xy}^{(n)} \stackrel{\text{CK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy}$

$$\stackrel{|\mathcal{S}| < \infty}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy} = \sum_{z \in \mathcal{S}} \pi_z P_{zy},$$

e como  $\pi_y \geq 0 \quad \forall y$ ,  $\pi$  é uma medida inv. Agora,

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} \pi_y = \sum_{y \in \mathcal{S}} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{xy}^{(n)} \stackrel{|\mathcal{S}| < \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{y \in \mathcal{S}} P_{xy}^{(n)} = 1,$$

e  $\pi$  é uma prob.



## Obs.

No passeio aleatório discutido acima, temos

$$P_{xy}^{(n)} \rightarrow 0 \text{ qdo } n \rightarrow \infty \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

( $\pi \equiv 0$  não deixa de ser uma medida inv, mas não é uma prob.)

## Exemplos

$$1) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Descontados casos triviais ( $\alpha + \beta = 0$  ou  $2$ ), temos (do que vimos antes): qdo  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}^n \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

e logo  $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$  é distr inv para  $\mathbf{P}$ .

## Exemplos (cont)

$$2) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Podemos voltar ao que fizemos antes e (tentar) calcular o limite de  $\mathbf{P}^n$  para obter uma prob inv. Em vez disto, notemos que a cond (0) para que  $\pi$  seja inv produz um sistema linear de eqs para  $\mu$ . Vamos montá-lo e tentar resolvê-lo neste caso.  $\pi$  deve satisfazer:

$$\pi_1 = \frac{\pi_3}{2}; \quad \pi_2 = \pi_1 + \frac{\pi_2}{2}; \quad \pi_3 = \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2} \Rightarrow \pi = \pi_1(1, 2, 2)$$

Como queremos que  $\pi$  seja prob,  $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{5}$ , e  $\pi = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ .

Note que só temos uma prob inv neste caso, e, logo, se o cálculo do limite sugerido acima vier (de fato, vinga; verifique), então deve produzir  $\pi$  como acima.

## Medidas invariantes (cont)

**Def.** P/  $z \in \mathcal{S}$  fixo arb e  $x \in \mathcal{S}$  seja  $\gamma_x^z = \mathbb{E}_z \left\{ \sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} \right\}$ ,  
o # esperado de visitas a  $x$  por  $\mathbf{X}$  entre duas visitas a  $z$ .

**Obs.** Sob  $\mathbb{P}_z$ , se  $T_z < \infty$ , então  $\sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} = \sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$  (3)

**Teorema 1.** Suponha que  $\mathbf{P}$  seja irredutível e recorrente. Então

(i)  $\gamma_z^z = 1$ ; (ii)  $\gamma^z = (\gamma_x^z, x \in \mathcal{S})$  é inv p/  $\mathbf{P}$ ; (iii)  $0 < \gamma_x^z < \infty, x \in \mathcal{S}$ .

**Dem.** (i) é óbvio. (ii) P/  $n \geq 1, \{T_z \geq n\} = \{T_z \leq n-1\}^c$  depende apenas de  $X_0, \dots, X_{n-1}$ :

$$\mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, X_n = y, T_z \geq n) \stackrel{\text{PM}}{=} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, T_z \geq n) P_{xy} \quad (4)$$

$\mathbf{P}$  recorrente: sob  $\mathbb{P}_z, T_z < \infty$  c.p. 1. Logo

## Dem. Teo 1 (cont)

$$\begin{aligned}
 \gamma_y^z &\stackrel{(3)}{=} \mathbb{E}_z \left\{ \sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right\} = \mathbb{E}_z \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y, n \leq T_z\}} \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_n = y, n \leq T_z) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, X_n = y, n \leq T_z) \\
 &\stackrel{(4)}{=} \sum_{x \in \mathcal{S}} P_{xy} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, n \leq T_z)}_{\mathbb{E}_z \left\{ \sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}} \right\}} = \sum_{x \in \mathcal{S}} \underbrace{\mathbb{E}_z \left\{ \sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} \right\}}_{\gamma_x^z} P_{xy}
 \end{aligned}$$

□(ii)

**Obs.** De (ii) e (1):  $\forall n \geq 0, w, y \in \mathcal{S}, \gamma_y^z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z P_{xy}^{(n)} \geq \gamma_w^z P_{wy}^{(n)}$  (5)

(iii) **P** irredutível:  $\exists k, \ell \geq 0$  tq  $P_{xz}^{(k)}, P_{zx}^{(\ell)} > 0$ .

De (i) e (5):  $\gamma_x^z \geq \gamma_z^z P_{zx}^{(\ell)} > 0; \gamma_x^z P_{xz}^{(k)} \leq \gamma_z^z = 1 \therefore \gamma_x^z \leq \frac{1}{P_{xz}^{(k)}} < \infty$  □



## Teorema 2

Suponha que  $\mathbf{P}$  seja irredutível e que  $\lambda$  seja uma medida invariante para  $\mathbf{P}$  tal que  $\lambda_z = 1$ . Então  $\lambda \geq \gamma^z$ . Se além disto,  $\mathbf{P}$  for recorrente, então  $\lambda = \gamma^z$ .

**Dem.**

Para todo  $y \in \mathcal{S}$ ,  $y \neq z$ ,  $n \geq 1$ , como  $\lambda$  inv:

$$\begin{aligned}\lambda_y &= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} \lambda_{x_0} P_{x_0 y} = \sum_{x_0 \neq z} \lambda_{x_0} P_{x_0 y} + P_{zy} \\&= \sum_{x_0, x_1 \neq z} \lambda_{x_1} P_{x_1 x_0} P_{x_0 y} + \sum_{x_0 \neq z} P_{zx_0} P_{x_0 y} + P_{zy} \\&\vdots \\&= \sum_{x_0, \dots, x_n \neq z} \lambda_{x_n} P_{x_n x_{n-1}} \cdots P_{x_0 y} \\&\quad + P_{zy} + \underbrace{\sum_{x_0 \neq z} P_{zx_0} P_{x_0 y} + \cdots + \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \neq z} P_{zx_{n-1}} \cdots P_{x_1 x_0} P_{x_0 y}}_{\mathbb{P}_z(X_1=y, T_z \geq 1) + \mathbb{P}_z(X_2=y, T_z \geq 2) + \cdots + \mathbb{P}_z(X_n=y, T_z \geq n)} \\&= \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = y, T_z \geq i\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_i = y, T_z \geq i\} \\&= \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{T_z} \mathbb{1}\{X_i = y\} = \gamma_y^z \quad \therefore \quad \lambda \geq \gamma^z\end{aligned}$$

## Dem. Teo 2 (cont)

Se  $\mathbf{P}$  for recorrente, então  $\gamma^z$  é invariante, pelo Teo 1.

Logo  $\mu := \lambda - \gamma^z \geq 0$  tb é invariante.

Como  $\mathbf{P}$  é irredutível, dado  $x \in \mathcal{S}$ , existe  $n \geq 0$  tq  $P_{xz}^{(n)} > 0$ .

Logo  $0 = \mu_z \geq \mu_x P_{xz}^{(n)}$ , e  $\mu_x = 0$ . □

**Def.** Se  $x \in \mathcal{S}$  for tq  $m_x := \mathbb{E}_x(T_x) < \infty$ , então dizemos que  $x$  é *recorrente positivo*. Se  $x$  for recorrente, mas não recorrente positivo, então será dito *recorrente nulo*.

## Teorema 3

Seja  $\mathbf{P}$  irredutível. Então são equivalentes as seguintes afirmações.

- (i) Todos os estados são recorrentes positivos;
- (ii) Existe um estado recorrente positivo;
- (iii)  $\mathbf{P}$  admite uma distr invariante.

Além disto, sob (iii), sendo  $\pi$  a distr inv, temos:  $\pi_x = \frac{1}{m_x}$ ,  $x \in \mathcal{S}$ .

**Obs.** 1)  $\mathbf{P}$  irred e rec pos  $\Rightarrow \pi$  é única;

2) Recorrência positiva, resp nula, é propriedade de classe (pois cadeia restrita a classe recorrente é irredutível).

## Dem. Teo 3

(i  $\Rightarrow$  ii): óbvio.

(ii  $\Rightarrow$  iii): Se  $z \in \mathcal{S}$  for recorrente positivo, então é recorrente, e, pela irredutibili//,  $\mathbf{P}$  é recorrente. Teo 1:  $\gamma^z$  é invariante. Agora

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{T_z} \mathbb{1}\{X_i = x\} = \mathbb{E}_z T_z = m_z < \infty,$$

logo  $\pi_x = \gamma_x^z / m_z$ ,  $x \in \mathcal{S}$ , é uma prob inv.

(iii  $\Rightarrow$  i): Seja  $z \in \mathcal{S}$ ; como  $\pi$  é uma prob,  $\exists x : \pi_x > 0$ ; como  $\mathbf{P}$  é irred,  $\exists n \geq 0 : P_{xz}^{(n)} > 0$ ; como  $\pi$  é inv,  $\pi_z \geq \pi_x P_{xz}^{(n)} > 0$ .

Seja agora  $\lambda_x = \pi_x / \pi_z$ ,  $x \in \mathcal{S}$ ; Teo 2:  $\lambda \geq \gamma^z$ . Logo

$$m_z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z \leq \sum_{x \in \mathcal{S}} \lambda_x = \sum_{x \in \mathcal{S}} \frac{\pi_x}{\pi_z} = \frac{1}{\pi_z} < \infty. \quad (6)$$

$\therefore z$  é rec pos  $\therefore z$  é recorr  $\therefore \mathbf{P}$  é recorr; Teo 2:  $\lambda = \gamma^z$ ,

e a  $\leq$  em (6) é uma  $=$ .

□

## Obs.

1) Se  $\mathcal{S}$  irred, então

a)  $\mathcal{S}$  rec pos  $\Leftrightarrow \exists$  distr inv;

b)  $\mathcal{S}$  recorr  $\Rightarrow \exists!$  medida inv, a menos de const mult;

c)  $\mathcal{S}$  recorr nulo  $\Rightarrow \nexists$  distr inv;

d)  $\mathcal{S}$  recorr nulo  $\Leftarrow \exists$  med inv infinita +  $\mathcal{S}$  recorr

2) Se  $\mathcal{S}$  finito e irreduzível, então  $\mathcal{S}$  é recorrente; Teo 2:  $\gamma_x^z < \infty$ ,  $x \in \mathcal{S}$ ,  $\therefore m_z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z < \infty$ , e  $z$  é rec pos; Teo 3:  $\mathcal{S}$  é rec pos.

## Exemplos

### 1) PASS em $\mathbb{Z}$ (irredutível, recorrente)

Seja  $\mu_x \equiv 1$ . Então  $\mu_x = \frac{1}{2}\mu_{x-1} + \frac{1}{2}\mu_{x+1}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , e logo  $\mu$  é inv.

Sendo  $\mu$  infinita, a Obs 1d acima diz que a cadeia é rec nula.

2) O argumento acima funciona igualmente em  $\mathbb{Z}^2$ ;  $\mu \equiv 1$  é inv tb para o PASS em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ , mas neste caso, a cadeia não é recorrente\*.

3) PAS assimétrico em  $\mathbb{Z}$ :  $P_{xx-1} = q < p = P_{xx+1}$ ,  $p + q = 1$ .

$$\mu = \mathbf{P}\mu \Leftrightarrow \mu_x = \mu_{x-1}p + \mu_{x+1}q, x \in \mathbb{Z}$$

Esta eq de diferenças tem a seguinte sol geral:  $\mu_x = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^x$ , logo, temos uma família a 2 parâmetros,  $A, B \geq 0$ , de medidas invs: não há unicity a menos de cte mult (cadeia transitória); não há distr inv.

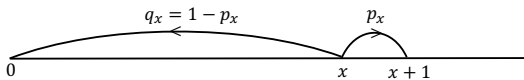
---

\*Este caso é contra-ex para recíproca da Obs 1b: Teo de Liouville discreto.

## Exs (cont)

### 4) Castelo de cartas

$$\mathcal{S} = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}; P_{xx+1} = p_x \in (0, 1), x \geq 0.$$



$$\mu \mathbf{P} = \mu \Leftrightarrow \mu_0 = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_x q_x, \quad \mu_x = \mu_{x-1} p_{x-1}, \quad x \geq 1.$$

Iterando:  $\mu_x = \left( \prod_{y=0}^{x-1} p_y \right) \mu_0 =: \mathcal{P}_{x-1} \mu_0$ . Logo

$\bar{\mu} = (1, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots)$  e múltiplos positivos são meds invariantes.

Se  $\mathcal{M} := \sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x < \infty$ , então  $\pi = \frac{\bar{\mu}}{1 + \mathcal{M}}$  é a distr inv.

Neste caso, como  $\mathbf{P}$  é irreduzível, temos que  $\mathbf{P}$  é rec pos.

Exercício: Verifique que  $\mathbf{P}$  é a) transitória sse  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{P}_x = \prod_{y=0}^{\infty} p_y > 0$ ;

b) rec nula sse  $\prod_{y=1}^{\infty} p_y = 0$  e  $\sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x = \infty$ .

# Convergência ao equilíbrio

**Def.**  $x \in \mathcal{S}$  é dito *aperiódico* se  $P_{xx}^{(n)} > 0 \forall n$  bastante gde

**Obs.** Pode-se verificar que  $x$  é aperiódico sse o *máximo divisor comum* de  $\{n \geq 1 : P_{xx}^{(n)} > 0\}$  é 1.

**Lema 1.** Se  $\mathbf{P}$  for irredutível e admitir um estado aperiódico, então para todo  $x, y \in \mathcal{S}$ , temos que  $P_{xy}^{(n)} > 0 \forall n$  bastante gde. Em particular, todo estado é aperiódico.

**Dem.** Sejam  $z \in \mathcal{S}$  aper e  $x, y \in \mathcal{S}$ . Irred:  $\exists r, s: P_{xz}^{(r)}, P_{zy}^{(s)} > 0$ .

Dado  $n_0$  tq  $P_{zz}^{(n)} > 0 \forall n \geq n_0$ , se  $n \geq n'_0 := n_0 + r + s$ :

$$P_{xy}^{(n)} \geq P_{xz}^{(r)} P_{zz}^{(n-r-s)} P_{zy}^{(s)} > 0, \text{ já que } n - r - s \geq n_0. \quad \square$$

**Obs.** Aperiodicidade é propriedade de classe.



## Teorema 4 (Convergência ao equilíbrio)

Suponha que  $\mathbf{P}$  seja irredutível, aperiódica, e que tenha distr invariante  $\pi$ . Dada uma distr inicial  $\mu$  qualquer, temos

$$\mathbb{P}(X_n = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_y, \forall y \in \mathcal{S}. \quad (7)$$

Em particular,

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_y, \forall x, y \in \mathcal{S}. \quad (8)$$

**Obs.** 1) O limite não depende de  $\mu$  ou  $x$  (perda de memória).

2) Do Teo 3: podemos subst a frase "que tenha distr inv  $\pi$ " por "recorrente positiva"; neste caso, adicionamos depois de (7):  
"onde  $\pi$  é a distr inv estipulada pelo Teo 3".

3) Cadeias irredutíveis e recorrentes positivas são ditas *ergódicas*.  
Cadeias irredutíveis finitas são ergódicas (vide Obs 2 no slide 13).

## Dem. Teo 4

(Acoplamento de Doeblin)

Seja  $\mathbf{Y} \sim \text{CM}(\pi, \mathbf{P})$  indep de  $\mathbf{X}$ . Dado  $v \in \mathcal{S}$ , seja  
 $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = Y_n = v\}$ .

1) Vamos mostrar que  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .

$\mathbf{W} := (X_n, Y_n)$  é uma CM em  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  com MT  $\tilde{P}_{(x,y),(w,z)} = P_{xw}P_{yz}$   
e dist inicial  $\lambda_{(x,w)} = \mu_x \pi_w$ .

Como  $\mathbf{P}$  é aperiódica,  $\forall x, y, w, z \in \mathcal{S}$ ,  $\tilde{P}_{(x,y),(w,z)}^{(n)} = P_{xw}^{(n)} P_{yz}^{(n)} > 0$

$\forall n$  grande o bastante; logo  $\tilde{P}$  é irredutível.

Além disto,  $\tilde{P}$  tem dist inv  $\tilde{\pi}_{(x,w)} = \pi_x \pi_w$ ; Teo 3:  $\tilde{P}$  rec pos.

Como  $T = T_{(v,v)}$ , o tempo de 1ª passagem de  $\mathbf{W}$  por  $(z, z)$ , segue do Teo A que  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .

## Dem. Teo 4 (cont)

$$2) \text{ Seja } Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } n < T; \\ Y_n, & \text{se } n \geq T. \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $\mathbf{Z} \sim \text{CM}(\mu, \mathbf{P})$ .

Como  $T$  é um TP p/  $\mathbf{W}$ , e a PFM vale p/  $\mathbf{W}$ , temos que  $(X_{T+n}, Y_{T+n}) \sim (W_n)$  com dist inicial concentrada em  $(v, v)$  indep de  $\{(X_\ell, Y_\ell); 0 \leq \ell \leq T\}$ , e temos por simetria

$$(X_{T+n}, Y_{T+n}) \sim (Y_{T+n}, X_{T+n}).$$

Logo,  $(Z_n) \sim (X_n)$ .

## Dem. Teo 4 (cont)

3) Da constr acima:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x) &= \mathbb{P}(Z_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x, T > n) \\ &+ \underbrace{\mathbb{P}(Y_n = x, T \leq n)}_{\mathbb{P}(Y_n=x) - \mathbb{P}(Y_n=x, T > n)} = \pi_x + \varepsilon_{n,x},\end{aligned}$$

onde  $|\varepsilon_{n,x}| \leq \mathbb{P}(T > n) \rightarrow 0$  qdo  $n \rightarrow \infty$ .



## Convergência ao equilíbrio — Caso irreduzível geral

Para tratar do caso irreduzível geral (não necessária/e aperiódico, não necessária/e rec pos), começamos com um res preliminar.

**Teorema 5** Seja  $\mathbf{P}$  irreduzível. Então  $\exists$  um inteiro  $d \geq 1$  e uma partição  $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{d-1}$  tq, fazendo  $\mathcal{C}_{nd+r} = \mathcal{C}_r$ ,  $0 \leq r < d$ ,

- (i)  $P_{xy}^{(n)} > 0$  só se  $y \in \mathcal{C}_{r+n}$ , onde  $r$  é tq  $x \in \mathcal{C}_r$ ;
- (ii) Dados  $r$  e  $x, y \in \mathcal{C}_r$ , temos que  $P_{xy}^{(nd)} > 0 \forall n$  grande.

**Dem.** Fixemos  $z \in \mathcal{S}$  e seja  $\mathcal{N} = \{n \geq 0 : P_{zz}^{(n)} > 0\}$ ; escolhamos  $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$  tq  $0 \leq n_1 < n_2$  e  $d = n_2 - n_1$  seja o menor possível.

Para  $r = 0, \dots, d-1$ , seja

$$\mathcal{C}_r = \{x \in \mathcal{S} : P_{zx}^{(nd+r)} > 0 \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

Pela irreduzibilidade:  $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{d-1}$

## Dem. Teo 5 (cont)

Além disto, se  $P_{zx}^{(nd+r)}, P_{zx}^{(n'd+s)} > 0$  para  $n' \geq n \geq 0$ ,  $r, s \in \{0, \dots, d-1\}$ , então, fazendo  $\delta = n' - n$ , temos:

$$P_{zz}^{(\delta n_1)}, P_{zz}^{(\delta n_2)} > 0.$$

Seja  $\ell \geq 0$  tq  $P_{xz}^{(\ell)} > 0$ . Então

$$P_{zz}^{(\delta n_2 + nd + r + \ell)} \geq P_{zz}^{(\delta n_2)} P_{zx}^{(nd+r)} P_{xz}^{(\ell)} > 0;$$

similarmente,  $P_{zz}^{(\delta n_1 + n'd + s + \ell)} > 0$ .

Como  $\delta n_2 + nd = \delta n_1 + n'd$ , segue da minimali// de  $d$  que  $r = s$ , e  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{d-1}$  é uma partição de  $\mathcal{S}$ .

(i) Suponha que  $P_{xy}^{(n)} > 0$  e  $x \in \mathcal{C}_r$ . Escolhendo  $\ell$  tq  $P_{zx}^{(\ell d + r)} > 0$ ,

Temos que  $P_{zy}^{(\ell d + r + n)} > 0$ , e  $y \in \mathcal{C}_{r+n}$ .  $\square_{(i)}$

Note que fazendo  $x = y = z$  no argumento acima, podemos concluir que  $d$  divide cada elemento de  $\mathcal{N}$ , em particular  $d | n_1$ .

## Dem. Teo 5 (cont)

Vamos a seguir mostrar que  $nd \in \mathcal{N}$  para todo  $n$  bastante grande.

$$\text{Se } n_1 = 0, \text{ então } d = n_2 \text{ e } P_{zz}^{(nd)} \geq (P_{zz}^{(n_2)})^n > 0. \quad (9)$$

Se  $n$  for tq  $nd \geq n_1^2$ , então escrevamos

$$nd = qn_1 + s, \quad (10)$$

com  $q, s$  inteiros tq  $q \geq n_1$  e  $0 \leq s \leq n_1 - 1$ .

Como  $d|n_1$ , temos de (10) que  $d|s$ :  $s = \ell d$  para algum  $0 \leq \ell < n_1$ .

$$\therefore nd = (q - \ell)n_1 + \ell n_2 \Rightarrow P_{zz}^{(nd)} \geq (P_{zz}^{(n_1)})^{q-\ell} (P_{zz}^{(n_2)})^\ell > 0 \quad (11)$$

De (9) e (11):  $nd \in \mathcal{N}$  para todo  $n \geq n_1^2/d$ .

## Dem. Teo 5 (cont)

(ii) Suponha que  $x, y \in \mathcal{C}_r$ . Escolhendo  $\ell_1, \ell_2$  tq  $P_{xz}^{(\ell_1)}, P_{zy}^{(\ell_2)} > 0$ :

$$P_{xy}^{(\ell_1 + nd + \ell_2)} \geq P_{xz}^{(\ell_1)} P_{zz}^{(nd)} P_{zy}^{(\ell_2)} > 0 \text{ sempre que } nd \geq n_1^2,$$

e (i)  $\Rightarrow d | \ell_1 + \ell_2$ . □

**Obs.**  $d = \text{mdc } \mathcal{N}$ , e indep de  $z$ , é dito o *período* da CM.

(O caso aperiódico corresponde a  $d = 1$ .)



## Teorema 6 (Teo geral de conv p/ cadeias irredutíveis)

Suponha que  $\mathbf{P}$  seja irredutível e tenha período  $d$ , e seja  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{d-1}$  a partição estabelecida no Teo 5. Seja  $\mu$  uma prob em  $\mathcal{S}$  concentrada em  $\mathcal{C}_0$ , e  $\mathbf{X} \sim \text{CM}(\mu, \mathbf{P})$ . Então, p/  $r = 0, \dots, d-1$  e  $y \in \mathcal{C}_r$ , temos que

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{m_y}, \quad (12)$$

onde  $m_y = \mathbb{E}_y(T_y)^\dagger$ . Em particular, p/  $x \in \mathcal{C}_r$ ,

$$P_{xy}^{(nd+r)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{m_y}. \quad (13)$$

**Obs.** Os casos transitório e recorrente nulo estão incluídos; em ambos o limite se anula identicamente.

---

$^\dagger \frac{d}{\infty} = 0$

## Dem. Teo 6

a) Façamos  $\nu = \mu \mathbf{P}^r$ ; então, pelo Teo 5,  $\sum_{x \in \mathcal{C}_r} \nu_x = 1$ .

Sendo  $Y_n = X_{nd+r}$ ,  $n \geq 0$ , temos que  $\mathbf{Y} \sim \text{CM}(\nu, \mathbf{P}^d)$  em  $\mathcal{C}_r$ .

Teo 5:  $\mathbf{P}^d$  é irredutível e aperiódica em  $\mathcal{C}_r$ .

Para  $y \in \mathcal{C}_r$ , o tempo médio de retorno de  $\mathbf{Y}$  a  $y$  vale  $\frac{m_y}{d}$ .

Logo, supondo o Teo 6 válido para o caso aperiódico, temos que

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) = \mathbb{P}(Y_n = y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{m_y},$$

e o Teo 6 vale em geral.

Podemos então, para as demais partes, supor que  $\mathbf{P}$  é aperiódica.

Temos então, do Teo 4, a validade do Teo 6 no caso rec pos.

Vamos a seguir examinar os casos restantes, a saber, o transitório e o recorrente nulo.

## Dem. Teo 6 (cont)

b) Se  $\mathbf{P}$  for transitória, então, sendo  $V_x$  o número de visitas a  $x \in \mathcal{S}$ , vimos que  $V_x \sim \text{Geo}(p_x)$ , com  $p_x = \mathbb{P}_x(T_x = \infty) > 0$ .

Logo  $\mathbb{P}_x(V_x < \infty) = 1$ , e  $\mathbb{P}_x(L_x < \infty) = 1$ , onde

$$L_x = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x) &\leq \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(H^x = i) \mathbb{P}_x(X_{n-i} = x) \leq \mathbb{P}_x(L_x \geq \frac{n}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{2} \leq H^x \leq n\right) + \sum_{i=0}^{n/2} \mathbb{P}(H^x = i) \underbrace{\mathbb{P}_x(X_{n-i} = x)}_{\leq \mathbb{P}_x(L_x \geq \frac{n}{2})} \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{2} \leq H^x < \infty\right) + \mathbb{P}_x(L_x \geq \frac{n}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

## Dem. Teo 6 (cont)

c) Se  $\mathbf{P}$  for rec nula, então,

$$m_y = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}_y(T_y > i) = \mathbb{E}_y(T_y) = \infty.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $K$  tq  $\sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}_y(T_y > i) \geq \frac{2}{\varepsilon}$ .

Então, para  $n \geq K - 1$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=n-K+1}^n \mathbb{P}(\overbrace{X_i = y, X_\ell \neq y, \ell = i+1, \dots, n}^{\text{eventos disjuntos}}) \\ &= \sum_{i=n-K+1}^n \mathbb{P}(X_i = y) \mathbb{P}_y(T_y > n - i) \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}(X_{n-i} = y) \mathbb{P}_y(T_y > i) \end{aligned}$$

Logo, existe  $i \in \{0, \dots, K-1\}$  tq  $\mathbb{P}(X_{n-i} = y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . (14)

Para *preencher as lacunas* vamos a seguir novamente recorrer ao acoplamento de Doeblin.

Seja  $\mathbf{Y} \sim \text{CM}(\lambda, \mathbf{P})$ ,  $\lambda$  a ser escolhida, e  $\mathbf{W} = (X_n, Y_n)$ .

Como antes, aperiodicidade garante irreducibilidade.

## Dem. Teo 6 (cont)

Se  $\mathbf{W}$  for transitória, então, fazendo  $\lambda = \mu$ , temos que

$$\mathbb{P}(X_n = y)^2 = \mathbb{P}(W_n = (y, y)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a)} 0, \text{ e o resultado segue.}$$

Vamos supor que  $\mathbf{W}$  é recorrente. Usando a not do Teo 4:

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1,$$

e, de novo,

$$|\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Para  $j \in \{0, \dots, K-1\}$  fixo, tomando  $\lambda = \mu \mathbf{P}^j$ , temos que

$$\mathbb{P}(Y_n = y) = \mathbb{P}(X_{n+j} = y).$$

$$\therefore \exists N \geq 0 \text{ tq } |\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(X_{n+j} = y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N, j = 0, \dots, K-1$$

$$\therefore \exists \tilde{N} \geq K \text{ tq } |\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(X_{n-i} = y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \tilde{N}, i = 0, \dots, K-1.$$

Tomando  $i$  como em (14), e usando o resultado acima:  $\mathbb{P}(X_n = y) \leq \varepsilon$ .

□

## Sem irreducibilidade

Sejam  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  as classes rec pos de  $\mathcal{S}$ .

1) Se  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  forem todas aperiódicas, e  $\pi^i$  for a distr invariante associada a  $\mathcal{F}_i$  (correspondendo àquela da cadeia com distr inicial concentrada em  $\mathcal{F}_i$ ).

Dado  $x \in \mathcal{S}$ , seja  $h_x^i = \mathbb{P}_x(\mathbf{X} \text{ atinge } \mathcal{F}_i)$ . Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_n = y) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_x^i \pi_y^i, \text{ se } y \in \mathcal{F}_i \text{ para algum } i; \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ se } y \notin \cup_{i \geq 1} \mathcal{F}_i. \end{aligned}$$

2) Se houver alguma  $\mathcal{F}_i$  com período  $d_i \geq 2$ , a análise se complica, entrando em questão

$$h_x^{i,r}(\ell) = \mathbb{P}_x(H^{\mathcal{F}_i} = \ell, X_\ell \in \mathcal{C}_r^i), \ell \geq 0, r = 0, \dots, d_i - 1,$$

onde  $\mathcal{C}_1^i, \dots, \mathcal{C}_{d_i-1}^i$  é a partição de  $\mathcal{F}_i$  dada pelo Teo 5. Estas qdes podem não ser muito fáceis de achar.