

## Espaço Skorokhod

Seja  $D = D[0, \mu-a]$  o espaço das funções reais  $x$  em  $[0, \mu-a]$  que são contínuas à direita e com limites à esquerda, i.e.,

$$x(t+) = \lim_{s \rightarrow t} x(s) \text{ existe}$$

$$x(t+) = x(t), \quad \forall 0 \leq t < 1$$

$$x(t-) = \lim_{s \rightarrow t} x(s) \quad \forall 0 < t \leq 1.$$

(Na literatura de Probab., tais funções são também chamadas de càdlàg).

Introduzindo uma norma em  $D$  ao declarar

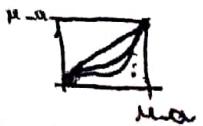
$$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq \mu-a} |x(t)|,$$

então  $D$  se torna um espaço de Banach, mas não é separável.

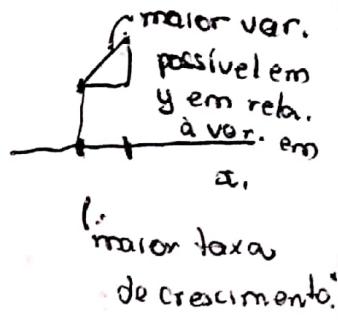
Esta não separabilidade causa problemas na teoria de convergência fraca de medidas no espaço. Para superar tal dificuldade, A.V. Skorokhod introduziu uma métrica (e topologia) sob a qual  $D$  se torna um esp. métrico separável.

A métrica é def. como segue. Seja  $\Lambda$  a classe de funções estritamente crescentes e contínuas de  $[0, \mu-a]$  nele mesmo.

Para  $\lambda \in \Lambda$ , seja



$$\|\lambda\| = \sup_{0 \leq t \leq s \leq \mu} \left| \log \left( \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right|$$



Então, para  $x, y \in \mathcal{D}$ . defina

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Delta} \max \left\{ \|\lambda\|, \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(\lambda(t))| \right\}$$

# Adicional (D/pesquisa!)

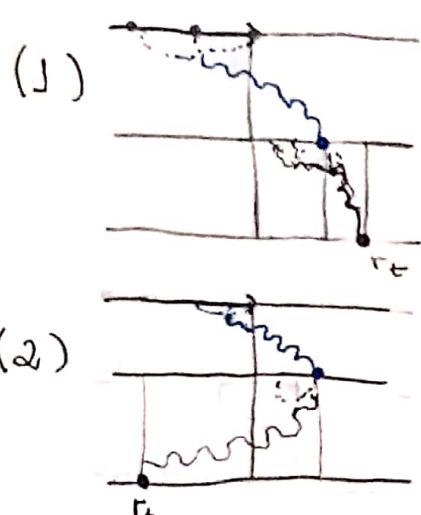
É fácil ver que

$$r_{0,t} = r_t.$$

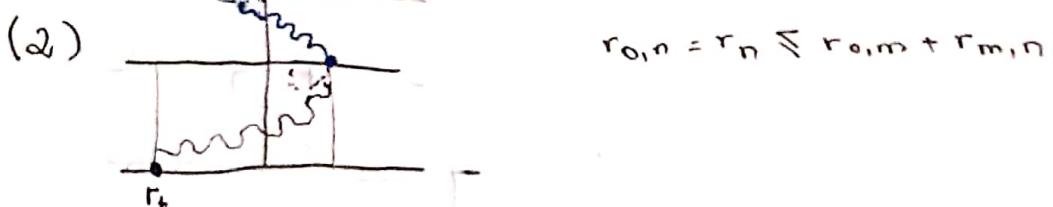
Ademais,

(\*)  $r_{m,n}$  satisfaz (a), (b) e (c) do Teo. S. Ergódico

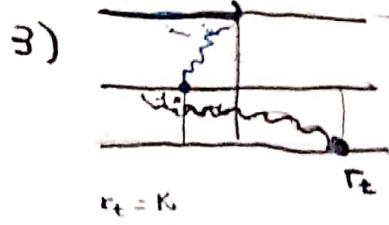
(a) Para mim,



$$r_{0,n} = r_n = r_{0,m} + r_{m,n}$$



$$r_{0,n} = r_n \leq r_{0,m} + r_{m,n}$$



Obe. Salta à direita com taxa  $\lambda$

Salta à esquerda com taxa  $\lambda$  uma quantidade  $N_t$

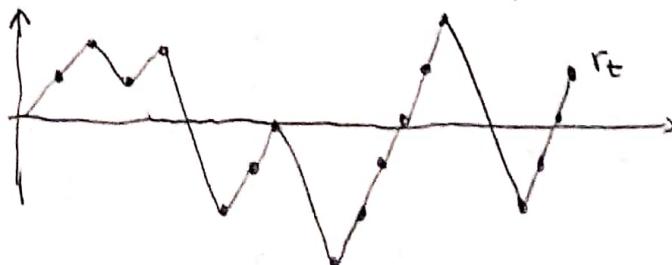
$$N_t = \max \{ x \in \mathbb{Z} : \eta_{t,x}^+ = 1 \}$$

Saltos PPP( $\lambda + \lambda$ ).

Altura dos saltos: 1 à direita

$X_t$  à esquerda

Ver paralelo à sobrevivência de espécies



(b)

$$\{r_{0,0} = 0\}$$

$$r_{0,1}$$

$$r_{1,2}$$

$$r_{0,2}$$

$$r_{1,3} - r_{2,2}$$

$$r_{0,3}$$

$$r_{1,4}$$

$$r_{2,5}$$

$$r_{0,5}$$

Segue da invariância por translação.

$$\arg \min_{\alpha \in \{0, 1\}} |\alpha - \alpha'|, \quad \alpha' = 1/2 + \sqrt{2\mu - \mu^2}/2.$$

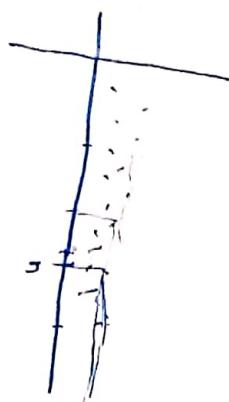
$(\rho_{\alpha})_{\alpha \in \{0, 1\}}$

Resulta que

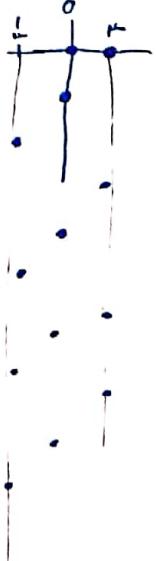
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P(J > t) \leq - \frac{1 - \sqrt{2\mu - \mu^2}}{2}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \min_{m \in \mathbb{N}} \max_{n \geq m} a_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \max_{m \in \mathbb{N}} \min_{n \geq m} a_n$$



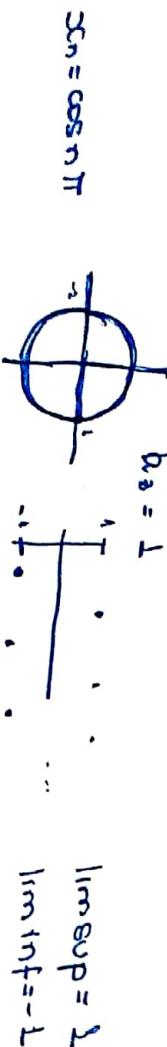
$$x_n = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, 2, 0, -1, 2, 0, -1, \dots\}$$



$$b_m = \max_{m \in \mathbb{N}} a_m. \quad \therefore b_1 = 1 \Rightarrow \inf_{m \in \mathbb{N}} \max_{m \in \mathbb{N}} a_m = 1 = \limsup_{m \in \mathbb{N}} a_m$$

$$b_2 = 2$$

$$\liminf_{m \in \mathbb{N}} a_m = -1$$



$$x_n = \cos n \pi$$

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} = 1$$

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} = -1$$

$$a_m = \max_{m \in \mathbb{N}} a_m =$$

$$\begin{cases} \frac{n}{(1+n)^n}, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{n+1}{(1+n)^{n+1}}, & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{(1+n)^n}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{9}, \quad x_3 = -\frac{3}{64}, \quad \dots$$

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \max_{n \geq m} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0.$$

# Capítulo 1

## Introdução

Em 2013, Guiol, Machado e Schinazi [1] propuseram um modelo estocástico para a evolução de espécies. Nesse modelo, novas espécies surgem com taxa  $\lambda$  e, com taxa  $\mu$ , ocorre um evento de extinção, em que uma espécie existente é extinta, segundo as seguintes regras. No instante do nascimento de uma nova espécie, é associada a ela um número aleatório gerado de uma dada distribuição  $F$  absolutamente contínua - tal número é interpretado como a propensão dessa espécie à sobrevivência e é chamado de aptidão. Cada vez que ocorre um evento de extinção, apenas uma espécie existente desaparece, qual seja, aquela com a menor aptidão. Essas aptidões são independentes uma das outras e de todo o resto do processo. Chamaremos esse modelo de GMS.

Em [1], mostra-se que quando  $\lambda > \mu$  existe um valor crítico determinístico  $f_c$  não-trivial tal que todas as espécies que surgem com aptidões menores que  $f_c$  desaparecem quase certamente depois de um tempo aleatório, e aquelas com aptidões maiores que  $f_c$  sobrevivem para sempre com probabilidade positiva.

Sem perda de generalidade, nessa dissertação, consideramos o caso particular do modelo GMS em que  $F$  é a função distribuição de uma variável aleatória uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Pelo fato de  $F$  ser absolutamente contínua, cada espécie é identificada por sua aptidão. Logo, para um instante de tempo  $t$ , as espécies vivas nesse instante podem ser vistas como um conjunto de pontos entre zero e um, isto é, uma realização de um processo pontual no intervalo  $[0, 1]$ . Nossa primeira interesse nesse trabalho é estudar o processo pontual vinculado às espécies vivas com aptidões no intervalo  $[0, f_c)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . O objetivo é entender a distribuição assintótica das espécies na fase subcrítica do modelo GMS.

Em um segundo momento, nos preocupamos com a existência de uma espécie que sobreviverá para sempre. Mostraremos que, eventualmente, surgirão várias espécies imortais. Ademais, apresentamos estimativas para o decaimento (exponencial) da cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie imortal a partir da condição inicial vazia.

↓  
a taxa de

### 1.1 Organização do trabalho

Organizamos o trabalho da seguinte forma. No próximo capítulo, Capítulo 2, discorremos sobre o processo pontual vinculado ao mecanismo, no regime estacionário, de nascimento e morte de espécies com aptidões abaixo do limiar  $f_c$ . No Capítulo 3, sobre a existência das espécies imortais e a probabilidade de que as mesmas apareçam conforme decorre o processo evolutivo. Por fim, no Capítulo 4, nossas conclusões.

o comportamento  
nasc. / morte das espécies  
até o tempo de  
aparição de espécies  
tempo de extinção  
tempo fino o tempo  
decorrido

Multa Sgn

$N \sim PPP(1)$  em  $(0,1) \times (0, \infty)$

$M \sim PR(\mu)$  em  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ;  $\mathcal{P} = MUN$

$\mathcal{E}(N, \mathcal{P})$  é a.p. subsigma

Seja  $x_0 \in \mathcal{E}(0,1)$

Dado  $x_0 \in \mathcal{P}$ , definimos  $T_0, t > 0$ , indutivamente, tais que  $x_0$  é a.p. subsigma

$T_1 = \inf\{t > 0 : \mathcal{P}_N(0, t] \neq \emptyset\}$ .

Seja  $X_1 \in [0,1]$  t.p.  $(T_1, X_1) \in \mathcal{P}$ . ( $X_1$  é a.p. subsigma)

$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0$ , para  $t \in (0, T_1)$

Se  $(T_1, X_1) \in N$ , ento  $\mathcal{E}_{T_1} = \mathcal{E}_0 \cup \{(T_1, X_1)\}$ , e

se  $(T_1, X_1) \in M$ , ento  $\mathcal{E}_{T_1} = \mathcal{E}_0 \setminus \{\inf \mathcal{E}_0\}$  (com a condição  $\mathcal{E}_0 \neq \emptyset$ )

onde  $\min \mathcal{E}_0$  denota o mínimo de  $\mathcal{E}_0$  (que este não é definido pelo fato de não haver p.p. limites à esquerda de  $\mathcal{E}_0$ ).

Para  $n \geq 2$ , supõe-se a.p.  $(T_1, \dots, T_{n-1}, T_n) \in \mathcal{E}_t$ ,  $t \leq T_{n-1}$ .

Ento  $T_n = \inf\{t > T_{n-1} : \mathcal{P}_N(T_{n-1}, t] \neq \emptyset\}$ ;  $X_n \in (T_n, X_n) \in \mathcal{P}$ .

Para  $t \in (T_{n-1}, T_n)$ , fazemos  $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{T_{n-1}}$  e se

$(T_n, X_n) \in N$ , ento  $\mathcal{E}_{T_n} = \mathcal{E}_{T_{n-1}} \cup \{(T_n, X_n)\}$ ; se  $(T_n, X_n) \in M$ ,

notamos que  $T_1 - T_{n-1} = \exp(1/\lambda_1)$  | ento  $\mathcal{E}_{T_n} = \mathcal{E}_{T_{n-1}} \setminus \{\min \mathcal{E}_{T_{n-1}}\}$  -

## Capítulo 2

# Processo pontual limite na fase subcrítica do modelo GMS

Em [1] é dada a construção do modelo GMS a partir do sistema inicial com  $k \geq 1$  espécies. Antes de expor o objetivo desse capítulo, vamos à essa construção - aqui a faremos usando as mesmas ideias dadas em [1] partindo da condição inicial vazia e já considerando o fato das aptidões serem geradas de distribuições uniformes.

Denotemos por  $M_t = (M_t^1, M_t^2)$  o processo bivariado em que  $M_t^1$  representa o número de espécies vivas no tempo  $t$  e  $M_t^2$  o conjunto das respectivas aptidões dessas espécies. Supondo que ao início não existam espécies vivas, isto é,  $M_0 = (0, \emptyset)$ , indicaremos por  $f_k$  a aptidão da  $k$ -ésima espécie a surgir no sistema.

Para a construção de  $M_t$ , seja  $\mathbf{P}$  um processo de Poisson bidimensional com taxa  $\lambda + \mu$  em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Ademais, seja  $T_0 = 0$  e definamos

$$T_1 = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}([0, t] \times [0, \lambda + \mu] > 0)\},$$

que indica o primeiro tempo  $t$  em que uma marca do processo de Poisson  $\mathbf{P}$  ocorre na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, \lambda + \mu]$ . Denotemos por  $(T_1, Y_1)$  as coordenadas dessa marca. Note que das propriedades de um processo de Poisson,  $Y_1$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[0, \lambda + \mu]$  independente de  $T_1$ .

Se  $Y_1 \in [0, \lambda]$ , tomamos  $f_1 = Y_1/\lambda$  (dessa forma  $f_1$  tem distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$  e é independente de  $T_1$ ) e

$$M_{T_1} = (M_{T_0}^1 + 1, M_{T_0}^2 \cup \{f_1\}) = (1, f_1).$$

Caso contrário, se  $Y_1 \in [\lambda, \lambda + \mu]$ ,

$$M_{T_1} = \left( M_{T_0}^1 - \mathbf{1}_{\{M_{T_0}^1 > 0\}}, M_{T_0}^2 \setminus \min\{M_{T_0}^2\} \right) = (0, \emptyset),$$

com a convenção de que  $\min\{\emptyset\} = \emptyset$ , onde  $\mathbf{1}_E$  é a função indicadora do evento E.

Em palavras, a primeira situação representa o nascimento de uma nova espécie. A segunda, em direção oposta, indica a extinção da menos apta à sobrevivência dentre as espécies vivas no instante considerado. Daí, para todo  $t \in [0, T_1]$  basta tomar  $M_t = M_{T_0}$  e teremos o processo  $M_t$  construído até o tempo  $T_1$ .

Para  $n \geq 1$  seja  $T_n$  o tempo de ocorrência da  $n$ -ésima marca do Processo de Poisson  $\mathbf{P}$  na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, \lambda + \mu]$ , isto é,

Notemos que  $\mathcal{X}_t$  está feito de impulsos para todos  $t > 0$ , ya que ~~ya que~~ <sup>Todos</sup> ~~segunzo~~ se e há p/0 bunteria quando de relog a  $\mathcal{X}_t$ ,  $t > 0$ .

Das propriedades temos condições de f. t. da  
memória dos processos de Poisson segue a propriedade de  
Markov para  $N_t$ : dados os totais ate

No restante desse despojamento que  $\mu_{N_t}$  é a estrutura do  
processo  $\mathcal{X}_t \cap (0, \mu)$  =:  $\mathcal{X}'_t$ .

Notemos que pelas propriedades de independência dos processos de Poisson, podemos considerar  $\mathcal{X}'_t$  como  $\mathcal{X}_t$ , apenas se  $t < \mu$ . Isto  
é por  $\mathcal{X}'_t$  é  $N_t$  em  $N' = N \cap (0, \mu) \times (0, \infty)$ , (que pode  
ser descrito como  $\text{PPY}(1)$  em  $(0, \mu) \times (0, \infty)$ ).

Vamos ademais dizer que  $\mathcal{X}'_0$  é um salto jato localmente finito de  $[0, \mu)$ , i.e.,  $|\mathcal{X}'_0 \cap [0, b]| < \infty$  para todo  $b < \mu$ .  
Notemos que a propriedade acima só f. t. para  $\mathcal{X}'_t$ ,  $t > 0$ , i.e. se

$$|\mathcal{X}'_t \cap (0, b)| < \infty, \quad t > 0.$$

Em outras palavras, para cada  $t > 0$ ,  $\mathcal{X}'_t$  é um processo pontual simples — nulo ( $\mathcal{X}'_0$ ) (precisamente, cap., n.º 1), depois de  $t$  (i.e.)

Podemos ver que  $\mathcal{X}'_t$  é visto como um processo pontual diremico.  
No entanto desse tipo, vamos estabelecer o comportamento assintótico

(da desproporção) de  $\mathcal{X}'_t$ . Para tanto, vamos explorar  
os dois aspectos da dist. de  $\mathcal{X}'_t$ , ou variância de ocupação,  
e a distribuição associada a  $\mathcal{X}'_t$ .

1) Variáveis de ocupação :  $N_t = (N'_t, \dots, N^4_t)$

$\Rightarrow P(N'_0 = n_0 | N_{t_1} = n_1, \dots, N_{t_{k-1}} = n_{k-1})$ , onde  $n_i = (n_{i1}, \dots, n_{ik})$ ,  
 $= P(N_{t_k-t_{k-1}} = n_k | N_0 = n_{k-1})$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$  são dados,

$$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : \mathbf{P}([0, t] \times [0, \lambda + \mu] > 0)\}.$$

Suponha que o processo  $M_t$  tenha sido construído até o tempo  $T_n$ ,  $n \geq 1$ . Fixeis a notação adotada, seja  $(T_{n+1}, Y_{n+1})$  as coordenadas da  $(n+1)$ -ésima marca do processo de Poisson  $\mathbf{P}$  em  $\mathbb{R}^+ \times [0, \lambda + \mu]$ .

Se  $Y_{n+1} \in [0, \lambda]$ , tomamos  $f_{n+1} = Y_{n+1}/\lambda$  e

$$M_{T_{n+1}} = (M_{T_n}^1 + 1, M_{T_n}^2 \cup \{f_{n+1}\}).$$

Caso contrário, se  $Y_{n+1} \in [\lambda, \lambda + \mu]$ ,

$$M_{T_{n+1}} = (M_{T_n}^1 - \mathbb{1}_{\{M_{T_n}^1 > 0\}}, M_{T_n}^2 \setminus \min\{M_{T_n}^2\}).$$

Daí, para todo  $t \in [T_n, T_{n+1}]$  basta fazer  $M_t = M_{T_n}$  e, por indução, podemos construir o processo  $M_t$ . A segunda coordenada do  $M_t$ , isto é,  $M_t^2$ , representa o processo das aptidões a partir do sistema vazio.

Note que  $M_t^2$  nada mais é do que um conjunto aleatório de pontos no intervalo  $[0, 1]$ , de modo que para cada realização do modelo GMS, as espécies vivas no instante  $t$  podem ser vistas como uma realização de um processo pontual simples no intervalo  $[0, 1]$ . Desse modo, é possível vincular as espécies vivas no decorrer do processo evolutivo com uma família de processos pontuais simples  $\{N_t : t \geq 0\}$  em  $\mathcal{X} = [0, 1]$ . Na seção 2.2, descreveremos o modelo como um processo pontual de maneira mais detalhada.

Nosso objetivo nesse capítulo é caracterizar o processo pontual  $N_t$  em  $\mathcal{X} = [0, f_c]$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é, aquele associado às espécies vivas na fase subcrítica do modelo GMS. O comportamento assintótico daquelas com aptidões acima de  $f_c$  é conhecido: elas se acumulam de maneira densa e uniforme no intervalo  $(f_c, 1)$  [1]. Como veremos abaixo, isto é diverso do que ocorre em  $(0, f_c)$ , onde as espécies se distribuem de maneira localmente finita. De agora ao fim do capítulo apresentamos os raciocínios e resultados utilizados para a realização dessa tarefa.

## 2.1 O valor crítico

Antes de mais nada, é necessário o conhecimento de  $f_c$ , já que por ora sabemos sobre a existência do mesmo mas não seu exato valor. Como já mencionado, esta informação está disposta em [1], mas devido à sua grande importância nesse trabalho a apresentamos por meio desta breve seção.

Em [1], as aptidões são geradas de uma dada distribuição  $F$  absolutamente contínua. Nestas condições,

$$f_c = F^{-1}(\mu/\lambda).$$

No nosso caso,  $F$  é a função distribuição de uma variável aleatória uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Daí,

$$f_c = \mu/\lambda,$$

uma vez que  $F$  passa a ser tal que  $F^{-1}(u) = u$ ,  $0 \leq u \leq 1$  e  $\lambda > \mu$ . Ademais, visando simplificar os cálculos posteriores, vamos supor, sem perda de generalidade,  $\lambda = 1$ <sup>1</sup>.

Com isso, detalhamos ainda mais o objetivo desse capítulo, que consiste, portanto, no estudo do processo pontual vinculado às espécies vivas com aptidões entre zero e  $\mu$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

<sup>1</sup> Tomar  $\lambda$  genérico indicaria apenas uma reescala no tempo.

Ahora, podemos ver que un número de unidades

fijo  $N_0 \in \mathbb{N}$  PMI tiene que es  $\mathbb{N}^k$ .

con las siguientes tareas de saldos : para todo  $n \in \mathbb{N}^k$

$$\lambda(n \rightarrow n + s_j) = \dots, \text{ donde } s_j = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{N}^k$$

$j$ -ésima componente

y si  $n = (0, \dots, 0, n_j, \dots, n_k)$ , donde  $n_j \geq 0$  y  $n_j, \dots, n_k \in \mathbb{N}^{k-j}$ ,

entonces  $\lambda(n \rightarrow n - s_j) = \mu$ . Asimismo, si

es una variable.

Noté que siendo  $S_f = N_0 + \dots + N_k$ , tenemos que

$(S_f)_j$  es un PNM en  $\mathbb{N}$  con tipo de factipicidad  $\alpha_j$  para todos  $j \in \mathbb{N}$

$$\lambda(n \rightarrow n + s_j) = \mu - \alpha_j; n \geq 0; \lambda(n \rightarrow n - s_j) = \mu.$$

Vamos a probar estableciendo

$(N_k)_0$  es verdaderamente positivo, e luego tiene una única medida matemática.

Irreductibilidad: Basta mostrar que todos los saldos de  $\mathbb{N}^k$

obtenidos están dados por  $O = (0, \dots, 0)$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}^k$  tal que  $n \neq O$  y sea  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $n_i = u$ .

Entonces se tiene:  $A = \{N \cap [0_1] \times [0_2] \times \dots \times [0_{i-1}] \times [u+1] \times [0_{i+1}] \times \dots \times [0_k]\}$

que es finito. Es decir que  $P(A) > 0$ , y en  $A$ :  $N_0 = 0$ .

También se tiene que  $O \in A$  porque

Nota: puede que  $N_0 = 0$  sea cierto o no

$$B = \{N \in \mathbb{N}^k \mid O \in A\} = \{N \in \mathbb{N}^k \mid N_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, k\}$$

## 2.2 Descrição do modelo como processo pontual *dinâmico*

Como dito antes, para cada tempo  $t$  podemos identificar as espécies vivas por suas aptidões e, em função disso, entendê-las como uma realização de um processo pontual. Nessa seção, partimos da construção do modelo GMS dada na introdução desse capítulo e construímos, de maneira mais formal, o processo pontual de interesse - aquele vinculado às espécies na fase subcrítica do processo. No entanto, antes disso, algumas definições são necessárias.

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço métrico completo e separável arbitrário e  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel gerada por seu boreianos.

**Definição 2.2.1.** Uma medida de Borel  $\nu$  em  $\mathcal{X}$  é dita *limitadamente finita* se  $\nu(A) < \infty$  para todo  $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$  limitado.

**Definição 2.2.2.** Denotamos por  $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}$  o espaço de todas as medidas limitadamente finitas tomando valores inteiros, usualmente indicadas pela letra  $N$  e chamadas de *medidas de contagem*.

**Definição 2.2.3.** Denotamos por  $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^*$  o espaço de todas as medidas de contagem simples, que consiste dos elementos de  $\mathcal{N}_{\mathcal{X}}$  para os quais

$$N\{x\} \equiv N(\{x\}) = 0 \text{ ou } 1, \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

Com o exposto acima já temos condições de definir um processo pontual.

**Definição 2.2.4 (Processo Pontual).** Um processo pontual  $N$  em um espaço  $\mathcal{X}$  é uma função mensurável de um espaço amostral  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  em  $(\mathcal{N}_{\mathcal{X}}, \mathcal{B}(\mathcal{N}_{\mathcal{X}}))$ .

Na verdade, há ainda outras maneiras de se pensar em um processo pontual. De acordo com [3], poderíamnos caracterizá-los por uma sequência de pontos ou sequência de tempos entre ocorrências. No entanto, essas duas últimas maneiras não são tão razoáveis para espaços mais gerais não contidos na reta.

**Definição 2.2.5 (Processo Pontual Simples).** Um processo pontual  $N$  é simples quando

$$\mathbb{P}\{N \in \mathcal{N}_{\mathcal{X}}^*\} = 1.$$

Dadas essas definições, voltemos ao modelo GMS, a partir de agora com  $\lambda = 1$ . No início deste capítulo, denotamos por  $M_t^2$  o conjunto de aptidões das espécies vivas no tempo  $t$ , para  $t \geq 0$ . Agora, para cada  $t$ , consideremos  $\mathbf{L}_t = \{f \in M_t^2 : f < \mu\}$ , onde  $f$  indica um elemento genérico de  $M_t^2$ . Em palavras, o conjunto aleatório  $\mathbf{L}_t$  é uma restrição em  $M_t^2$  de modo a incluir apenas aptidões menores que o valor crítico  $\mu$ . De maneira ainda mais detalhada, podemos escrever

meilleur  
étoile

$$\mathbf{L}_t = \begin{cases} \{\mathbf{F}_{t,k} : 1 \leq k \leq |\mathbf{L}_t|\} & \text{se } |\mathbf{L}_t| > 0; \\ \emptyset & \text{se } |\mathbf{L}_t| = 0, \end{cases}$$

onde  $\mathbf{F}_{t,k}$  indica, dado que  $\mathbf{L}_t \neq \emptyset$ , a  $k$ -ésima aptidão menor que  $\mu$  associada à uma espécie viva no tempo  $t$ , com  $k \in \{1, \dots, |\mathbf{L}_t|\}$ . Não deve ser difícil de notar que as possíveis realizações para  $\mathbf{L}_t$  são os conjuntos localmente finitos de  $\mathcal{X} = [0, \mu]$  definidos por

$$\Xi = \{A \subset \mathcal{X} : |A \cap I| < \infty \text{ para todo intervalo fechado } I \subset \mathcal{X}\}.$$

Isto ocorre pelo fato de  $|\mathbf{L}_t|$  ser uma cadeia de nascimento e morte recorrente positiva, o que fará  $|\mathbf{L}_t \cap I|$  finito quase certamente, para todo intervalo fechado  $I \subset \mathcal{X}$ . Mais detalhes acerca disso serão dados na seção 2.3.1.

A[0, a]

é dizer que  $P(\emptyset) > 0$  se e qd  $N_t = n$  em  $\Omega$ .

Logo o ato de n.º prob. futebol é  
falso pq  $(N_t)$  é irreductível.

Recorrência positiva: qd n.º futebol não é n.º.

$E_p(T_0) < \infty$ , n.º d.  $T_0 = \inf\{t > T_0 : N_t = 0\}$ ,  
 $T_0 = \inf\{t > 0 : N_t \neq 0\}$

$E(\cdot) = E(\cdot | N_0 = 0)$  Note que

$$T_0 = \inf\{t > T_0 : S_t = 0\}.$$

Da teoria dos PNM, n.º se fizer  $E_p(T_0) < \infty$ ,

há, t.º para cada n.º de h.º e  $x^1, \dots, x^n$ ,  
 $(N_t)$  tem uma única medida invariante. (ref)

Vamos a supor qd  $(N_t)$  no caso qd  $h=2$ . Se a h.º  
permanece constante a d.º ser utilizada no t.º caso.

### A f.º de distribuição de $\tilde{X}_t'$

Para ob.º a c.º a.º da distribuição de  $\tilde{X}_t'$  qd  $t > 0$   
como um processo portual simple, queremos qd  
qd lo de n.º, qm a s.º a.º da distribuição de  $\tilde{X}_t'$  para cada  $t$  fixo.

Em primeiro lugar, qm f.º  $\alpha \in (\emptyset, \mu)$  e considerar

$X_t'' = \tilde{X}_t' \wedge [\alpha, \mu - \alpha]$ . Suponhamos qd  $X_0'' = \emptyset$ . Então

$X_t'' = \emptyset$  ou  $X_t'' = \{\tilde{Y}_{t+1}, Y_t^{k+}\}$ , n.º  $\tilde{Y}_{t+1}, Y_t^{k+}$  s.º  $\alpha \leq \tilde{Y}_{t+1} < (Y_t^{k+})$  portanto qd  $X_t'' \neq \emptyset$ .

Seja  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos boreianos de  $\mathcal{X}$ . Para cada  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ , denotemos por  $N_{\mathbf{L}_t}(A)$  o número de pontos em  $\mathbf{L}_t \cap A$ . Em termos matemáticos,

$$N_{\mathbf{L}_t}(A) = \sum_k \mathbf{1}_{\{\mathbf{F}_{t,k} \in A\}}. \quad (2.1)$$

A fim de uma simplicidade notacional, a partir de agora indicaremos  $N_{\mathbf{L}_t}(A)$  por  $N_t(A)$ .

**Proposição 2.2.1.** Para cada  $t \geq 0$ ,  $N_t$  definido pela equação 2.1 é um processo pontual simples em  $\mathcal{X} = [0, \mu]$ .

*Demonastração.* Pela definição 2.2.4, segue que  $N_t$  é um processo pontual em  $\mathcal{X} = [0, \mu]$ . Nesse caso,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  indica o espaço de probabilidade em que está definido o modelo GMS. Ademais, é um processo pontual simples uma vez que as aptidões são geradas de distribuições absolutamente contínuas - no nosso caso, são variáveis aleatórias uniformes no intervalo  $[0, 1]$  independente entre si. Com isso, para cada  $x \in [0, \mu]$ ,  $N_t(x) = 0$  ou 1.  $\square$

Até aqui, descrevemos as espécies vivas com aptidões inferiores à  $\mu$  por meio de uma família de processos pontuais simples  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ . Nosso real interesse está no processo pontual  $N_t$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por convenção notacional, vamos denotá-lo por

$$\rightarrow N_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t. \quad \text{limite} \quad (2.2)$$

$\rightarrow$  Da teoria de processos pontuais [Dagley], para todo  $t \geq 0$  fixo, a distribuição de  $N_t$  é determinada pelo que chamaremos de *variáveis de ocupação* - a ser definido na próxima seção. A partir daí, veremos que a distribuição assintótica de  $N_t$  será, de fato, dada pela distribuição assintótica das variáveis de ocupação.

## 2.3 Distribuição invariante na fase subcrítica do modelo GMS

Nessa seção, associamos ao modelo GMS uma cadeia de Markov construída a partir das chamadas variáveis de ocupação. Essa cadeia será extremamente importante para o estudo do processo pontual limite de interesse.

Para cada  $t \geq 0$  e  $a \in (0, \mu)$ , seja  $\mathbf{L}_{a,t} = \{f \in \mathbf{L}_t : f < \mu - a\}$  o conjunto das aptidões menores que  $\mu - a$  atreladas à espécies vivas no tempo  $t$ . Note que  $\mathbf{L}_t = \mathbf{L}_{0,t}$ . Ademais, para  $k \in \mathbb{N}^*$  fixo, seja  $P_{k,a} = \{x_a^n : n = 0, \dots, k\}$  a partição do intervalo  $[0, \mu - a]$  onde  $x_a^n = (n\mu - na)/k$  e

$$\mathbf{L}_{k,a,t}^i = \{f \in \mathbf{L}_{a,t} : x_a^{i-1} \leq f < x_a^i\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$k$  subconjuntos que compõem uma cobertura disjunta de  $\mathbf{L}_{a,t}$ , isto é,

$$\mathbf{L}_{a,t} = \bigsqcup_{i=1}^k \mathbf{L}_{k,a,t}^i,$$

onde  $\bigsqcup$  representa a união disjunta. Por fim, seja  $N_{a,t} = |\mathbf{L}_{a,t}|$ , e para  $i = 1, \dots, k$ ,

$$N_{k,a,t}^i = |\mathbf{L}_{k,a,t}^i|, \quad (2.3)$$

que representam o número de espécies vivas no instante  $t$  com aptidões abaixo de  $\mu - a$  e entre  $x_a^{i-1}$  (inclusive) e  $x_a^i$ , respectivamente.

Vamos representar  $F''_t$  como una función de

distribución, definida a través de  $F_t$  para todo  $x \in [0, \mu_a]$

$$F''_t = F''_{t,a}(x) = \sum_{i=1}^{K_t} \mathbb{I}\{Y_t^i \geq x\}, \text{ en } F_t \neq \emptyset$$

$$\equiv 0 \quad \text{C.C.}$$

Notemos que para cada  $t \geq 0$ ,  $F''_t : [0, \mu_a] \rightarrow \mathbb{N}$  es

una función continua estrictamente decreciente. Tenemos que

para cada  $t \geq 0$ ,  $F''_t$  es la función de Stochastic S

de fp  $\text{colle} : [0, \mu_a] \rightarrow \mathbb{N}$  con simetría  $J_1 \langle \text{mf} \rangle$ . ( $\text{fp}$   $\text{distrib.}$ )

Vamos a seguir mostrando que la distribución de  $F''_t$

convierte en S para un  $\text{obj. } F_0$ , que tiene

el todo necesariamente una función de distribución  $: [0, \mu_a] \rightarrow \mathbb{N}$

como resultado final. Tenemos que el conjunto

$$\text{de puntos } X_0'' = \{Y_{t,0}^1, \dots, Y_{t,0}^{K_0}\} \text{ tiene que}$$

$$F''_0 = F_{0,a} = \sum_{i=1}^{K_0} \mathbb{I}\{Y_{t,0}^i \geq x\}$$

sea por lo tanto la distribución de  $F''_t + t \delta_{X_0}$ .

Para establecer el resultado de la distribución de  $F''_t$  sea  $t > 0$ ,

vamos ver que es igual a continuación  $\langle \text{mf} \rangle$ :

**Definição 2.3.1** (Variáveis de Ocupação). Dados  $a \in (0, \mu)$  e  $k \in \mathbb{N}^*$ , para cada  $t \geq 0$ , as variáveis aleatórias  $\{N_{k,a,t}^i : i = 1, \dots, k\}$  constituem o que chamamos de *variáveis de ocupação no tempo t* da partição em  $k$  subintervalos de  $[0, \mu - a]$ .

Agora, para cada  $t \geq 0$ , seja  $\mathbf{N}_{k,a,t} = (N_{k,a,t}^1, N_{k,a,t}^2, \dots, N_{k,a,t}^k)$ . A família  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é uma cadeia estocástica  $k$ -multivariada em tempo contínuo no espaço de estados  $\mathbb{N}^k$ .

**Proposição 2.3.1.** A cadeia  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  satisfaz a propriedade de Markov.

*Demonstração.* Apesar de inerente à especificação dada acima, vamos à construção da cadeia  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  partindo do sistema vazio, isto é,  $\mathbf{N}_{k,a,0} = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}_k$ . Reconsideremos  $\mathbf{P}$ , o processo de Poisson bidimensional com taxa 1 em  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  utilizado na construção no modelo GMS. Ademais, como antes, seja  $T_0 = 0$  e

$$T_1 = \inf \{t > 0 : \mathbf{P}([0, t] \times [0, 1 + \mu]) > 0\}.$$

Note que  $T_1$  indica o primeiro tempo em que uma marca de  $\mathbf{P}$  vive na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1 + \mu]$  - lembrando de que estamos considerando o caso  $\lambda = 1$ . Denotemos por  $(T_1, Y_1)$  as coordenadas dessa marca.

Se  $Y_1 \in [0, \mu - a]$ , identificamos  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $Y_1 \in [x_a^{i-1}, x_a^i]$  e tomamos

$$\mathbf{N}_{k,a,T_1} = \mathbf{N}_{k,a,T_0} + \mathbf{1}_{i,k},$$

onde  $\mathbf{1}_{i,k}$  indica o vetor com 1 na  $i$ -ésima coordenada e 0 nas  $k - 1$  restantes.

Se  $Y_1 \in [\mu - a, 1]$ ,  $\mathbf{N}_{k,a,T_1} = \mathbf{N}_{k,a,T_0}$ . Se  $Y_1 \in [1, 1 + \mu]$ ,

$$\mathbf{N}_{k,a,T_1} = \mathbf{N}_{k,a,T_0} - \mathbf{1}_{k,T_0},$$

onde  $\mathbf{1}_{k,T_0}$  é o vetor  $k$ -dimensional com a  $i$ -ésima coordenada dada por

$$\mathbf{1}_{k,T_0}^i = \mathbb{1}_{\{\mathbf{N}_{k,a,T_0}^1 = 0, \dots, \mathbf{N}_{k,a,T_0}^{i-1} = 0, \mathbf{N}_{k,a,T_0}^i > 0\}}.$$

Daí, para todo  $t \in [0, T_1]$ , basta tomar  $\mathbf{N}_{k,a,t} = \mathbf{N}_{k,a,T_0}$  e teremos o processo  $\mathbf{N}_{k,a,t}$  construído até o tempo  $T_1$ .

Para  $n \geq 1$ , seja

$$T_n = \inf \{t > T_{n-1} : \mathbf{P}([0, t] \times [0, 1 + \mu])\},$$

o tempo de ocorrência da  $n$ -ésima marca de  $\mathbf{P}$  na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1 + \mu]$ . Ademais, suponha que a cadeia  $\mathbf{N}_{k,a,t}$  tenha sido construída até o tempo  $T_n$ ,  $n \geq 1$  e denotemos por  $(T_{n+1}, Y_{n+1})$  as coordenadas da  $(n+1)$ -ésima marca de  $\mathbf{P}$  em  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1 + \mu]$ .

Se  $Y_{n+1} \in [0, \mu - a]$ , identificamos  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $Y_{n+1} \in [x_a^{i-1}, x_a^i]$  e tomamos

$$\mathbf{N}_{k,a,T_{n+1}} = \mathbf{N}_{k,a,T_n} + \mathbf{1}_{i,k}.$$

Se  $Y_{n+1} \in [\mu - a, 1]$ ,  $\mathbf{N}_{k,a,T_{n+1}} = \mathbf{N}_{k,a,T_n}$ . Se  $Y_{n+1} \in [1, 1 + \mu]$ ,

$$\mathbf{N}_{k,a,T_{n+1}} = \mathbf{N}_{k,a,T_n} - \mathbf{1}_{k,T_n},$$

onde  $\mathbf{1}_{k,T_n}$  é análogo à  $\mathbf{1}_{k,T_0}$ , a menos da mudança no tempo, que agora é indicado por  $T_n$ . Sua  $i$ -ésima coordenada é dada por

Comprobación de la fórmula de  $\mathcal{H}_t'$

Demos fuerza para  $\mathcal{H}_t'$ , podemos descomponer  $\mathcal{H}_t$  a partir de una fórmula difusa,  $F_t'$ .  
Entonces  $a, a' \in [0, \mu]$  son  $a' \geq a$ , si se aplica fuerza  
(diferencia dividida en  $a, a'$  dividida).

$$F_t'|_{[0, \mu-a]} = F_t''|_{[0, \mu-a]} = F_t'', a$$

De igual forma que para cada otra parte.

$$F_t'|_{[0, b]} \Rightarrow F_{0, b}',$$

entonces  $F_{0, b}'|_{[0, b]} = F_{0, b}',$  para  $0 \leq b \leq \mu.$

Da existencia acima, podemos definir  $F_{0, b}'(0, \mu) \rightarrow$  en  $F$   
 $F_{00}'(x) = F_{0, x}'(x)$   
esta es la definición en  $[0, \mu].$

Vamos a probarlo como se hace en el caso de  $F_t'.$   
a)  $E_0[\mathcal{H}_{00}'] = \int_0^\mu F_{0, b}'(b) = 00.$  se

Pruebe: a)  $E_0[\mathcal{H}_{00}'] = \int_0^\mu F_{0, b}'(b) = 00.$  se

b) Sea  $0 \leq b \leq \mu;$

c)  $E_0[\mathcal{H}_{00} \wedge [a, b]] = \dots,$  aplíquese

d)  $P_0(\mathcal{H}_{00} \wedge [a, b] = \emptyset) = \dots$

$$\mathbb{1}_{k,T_n}^i = \mathbb{1}_{\{N_{k,a,T_n}^1 = 0, \dots, N_{k,a,T_n}^{i-1} = 0, N_{k,a,T_n}^i > 0\}}.$$

Daí, para todo  $t \in [T_n, T_{n+1}]$  basta fazer  $N_{k,a,t} = N_{k,a,T_n}$ . Assim, por indução, podemos construir a cadeia  $N_{k,a,t}$ .

*Observação:* Para a construção de  $N_{k,a,t}$  poderíamos avaliar  $\mathbf{P}$  apenas na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\mu - a]$  de tal forma a evitar  $Y_n \in [\mu - a, 1]$ . Preferimos optar pela construção dada acima apenas a fim de manter as regras estabelecidas na construção do modelo GMS.

A partir dessa construção, não deve ser difícil notar que  $N_{k,a,t}$  está completamente definida por  $(P_1, \dots, P_k, P_{k+1})$ , onde  $P_i$  é um processo de Poisson unidimensional com taxa  $(\mu - a)/k$  para  $i = 1, \dots, k$  e  $P_{k+1}$  um processo de Poisson unidimensional com taxa  $\mu$ . Pelas propriedades de superposição de Processos de Poisson, segue que os mesmos podem ser retratados pelo número de ocorrência em  $\mathbf{P}$  na faixa  $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\mu - a]$ . Uma vez válida para o processo de Poisson [Galves], segue que a cadeia  $\{N_{k,a,t} : t \geq 0\}$  também satisfaz a propriedade de Markov pela relação intrínseca entre esses dois elementos.  $\square$

**Proposição 2.3.2.** A cadeia  $\{N_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é irreduzível.

*Demonstração.* Para mostrar a validade de tal afirmação, relembramos inicialmente que dados três estados quaisquer - digamos  $x_k$ ,  $y_k$  e  $z_k$  - tais que  $x_k \leftrightarrow y_k$  (os estados  $x_k$  e  $y_k$  se comunicam) e  $y_k \leftrightarrow z_k$ , então  $x_k \leftrightarrow z_k$ . Recordada a transitividade dessa relação, seja agora  $x_{k,k}^m = (0, 0, \dots, m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , o estado da cadeia  $N_{k,a,t}$  em que há apenas  $m \geq 0$  espécies vivas e todas com aptidões no subintervalo mais alto da nossa partição. Note que uma vez em  $x_{k,k}^m$  no tempo  $t$ , isto é,  $N_{k,a,t} = x_{k,k}^m$ , para saltarmos à  $x_{k,k}^{m+1}$  em um intervalo de tempo  $h$ , é suficiente que entre os instantes  $t$  e  $t + h$  ocorram um nascimento de uma espécie com aptidão entre  $(\mu - a) \times [(k-1)/k]$  e  $\mu - a$  e nenhuma morte, ou seja,

$$(N_{k,a,t+h} = x_{k,k}^{m+1} | N_{k,a,t} = x_{k,k}^m) \geq \mathbb{P}\{A(k, a, h)\},$$

onde  $A(k, a, h)$  representa o evento suficiente para o salto considerado acima. Note que  $A(k, a, h)$  não depende de  $t$ , uma vez que as regras do modelo GMS não se alteram durante o decorrer do processo evolutivo, isto é,  $\{N_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é homogênea. Por ora, queremos verificar que  $x_{k,k}^m \leftrightarrow x_{k,k}^{m+1}$ . Por definição [Roussas], isso é equivalente a mostrar que  $\mathbb{P}\{A(k, a, h)\} \geq 0$  para algum  $h \in \mathbb{R}_+$ .

No modelo GMS, os nascimentos ocorrem conforme um Processo de Poisson com taxa  $\lambda$ , no nosso caso, com taxa 1. Em função disso, dado um instante de tempo  $t$  fixo, a variável aleatória  $R$  representando o tempo até o nascimento de uma espécie após o instante  $t$  é exponencialmente distribuída com parâmetro 1 e, por outro lado, a variável aleatória  $S$  representando o tempo até a próxima morte, é uma exponencial com parâmetro  $\mu$ . Agora, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A(k, a, h)\} &= \mathbb{P}(R \leq h, F_{t+R} \in [x_a^{k-1}, x_a^k], S \geq h) \\ &= \mathbb{P}(R \leq h) \mathbb{P}(F_{t+R} \in [x_{k,a}^{k-1}, x_{k,a}^k]) \mathbb{P}(S \geq h) \\ &= e^{-\mu h} (1 - e^{-h})(\mu - a) / k. \end{aligned}$$

sendo que a segunda passagem é justificada pela independência entre essas variáveis aleatórias -  $F_{t+R}$  indica a aptidão da espécie que nasce no instante  $t + R$ . Do resultado acima, é fácil ver que a probabilidade da ocorrência do evento  $A(k, a, h)$  decresce conforme aumentamos  $k$ , mas é sempre maior que zero, para todo  $h > 0$ . Portanto,  $x_{k,k}^m \leftrightarrow x_{k,k}^{m+1}$ ,  $m \geq 0$ .

Daí, é direto que para  $m \geq 0$ ,  $\mathbf{x}_{k,k}^{m+1} \leftrightarrow \mathbf{x}_{k,k}^{m+2}$ . E assim, pela transitividade relembrada antes, segue que  $\mathbf{x}_{k,k}^m \leftrightarrow \mathbf{x}_{k,k}^{m+2}$ . Aplicando esse raciocínio de modo iterativo, concluímos que  $\mathbf{x}_{k,k}^m \leftrightarrow \mathbf{x}_{k,k}^n$ ,  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ .

Considere agora o estado  $\mathbf{x}_{i,k}^{m,n} = (0, \dots, m, n, \dots, n)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $n$  natural fixo onde o valor  $m$  ocorre na  $i$ -ésima coordenada do estado. Em outras palavras  $\mathbf{x}_{i,k}^{m,n}$  representa o estado em que não há espécies vivas com aptidões abaixo do  $i$ -ésimo subintervalo,  $m$  com aptidões no mesmo e  $n$  em cada um dos subsequentes. Para uma maior compreensão, note que  $\mathbf{x}_{1,k}^{1,n} = (1, n, \dots, n, n)$ ,  $\mathbf{x}_{k-1,k}^{1,n} = (0, \dots, 0, 1, n)$  e  $\mathbf{x}_{k,k}^{m,n} = (0, \dots, 0, m) = \mathbf{x}_{k,k}^m$ . Note também que para garantir a comunicação entre todos os estados, basta que  $\mathbf{x}_{i,k}^{j,n} \leftrightarrow \mathbf{x}_{i,k}^{l,n}$ ,  $\forall (j, l) \in \mathbb{N}^2$  e  $i \in \{1, \dots, k\}$ . É fácil ver que  $\mathbf{x}_{i,k}^{m,n} \leftrightarrow \mathbf{x}_{i,k}^{m+1,n}$ ,  $m \geq 0$ , pois para atingir  $\mathbf{x}_{i,k}^{m+1,n}$  em um intervalo de tempo  $h$  partindo de  $\mathbf{x}_{i,k}^{m,n}$  num instante  $t$ , é suficiente que entre  $t$  e  $t+h$  ocorra exatamente um nascimento de uma espécie com aptidão no  $i$ -ésimo subintervalo e nenhuma morte, cuja probabilidade de ocorrência é equivalente à do evento  $A(k, a, h)$ , que é não-nula. Seguindo os mesmos passos de antes, conclui-se que  $\mathbf{x}_{i,k}^{j,n} \leftrightarrow \mathbf{x}_{i,k}^{l,n}$ ,  $\forall (j, l) \in \mathbb{N}^2$  e  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Portanto, a cadeia  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é irreductível.  $\square$

**Proposição 2.3.3.** A cadeia  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é recorrente positiva.

*Demonastração.* Uma vez que  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é irreductível, segue dos resultados da teoria de processos estocásticos que todos os seus estados tem a mesma classificação. Assim, para classificá-los, basta classificar apenas um deles. Com intuito de facilitar essa tarefa, consideremos o estado  $\mathbf{x}_{k,k}^0 = \mathbf{0}_k$ , que representa o sistema vazio. Além disso, note que para  $k = 1$ ,  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$  consiste de uma cadeia de nascimento e morte em tempo contínuo com taxas  $\mu - a$  e  $\mu$ , respectivamente. Isto é,  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$  é recorrente positiva.

Agora, é fácil ver que  $\mathbf{N}_{k,a,t} = \mathbf{0}_k$  se e somente se  $\mathbf{N}_{1,a,t} = 0$ , ou seja, o tempo de retorno ao estado  $\mathbf{0}_k$  quando considerarmos a cadeia  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  é o mesmo que o do estado zero quando olhamos para  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$ . Como o zero nessa última é recorrente positivo, segue que  $\mathbf{0}_k$  também o é. Isto finaliza nossa demonstração.  $\square$

Do fato de  $\{\mathbf{N}_{k,a,t} : t \geq 0\}$  ser recorrente positiva segue que a cadeia possui uma distribuição estacionária[Karlin Taylor], que existe e é única. Vamos à sua especificação.

### 2.3.1 Partição em um subintervalo

Numa tentativa de obter quem é essa medida invariante, começamos considerando o caso mais simples, quando  $k = 1$ . Aqui, basta notar que  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$  consiste de uma cadeia de nascimento e morte em tempo contínuo com taxas

$$\begin{aligned} q(n, n+1) &= \mu - a, & \text{para } n \geq 0; \\ q(n, n-1) &= \mu, & \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pictorialmente,

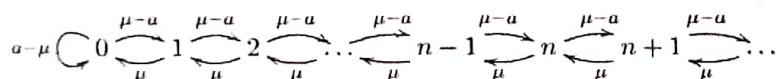


Figura 2.1: Representação pictorial dos estados e taxas para a cadeia  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$ .

**Proposição 2.3.4.** A distribuição invariante  $\pi_{1,a}$  associada à cadeia  $\{\mathbf{N}_{1,a,t} : t \geq 0\}$  é tal que

$$\pi_{1,a}(n) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^n, \quad \text{para } n \geq 0. \quad (2.4)$$

*Demonastração.* As equações de equilíbrio detalhado são dadas por

$$\mu\pi_{1,a}(n) = (\mu - a)\pi_{1,a}(n-1) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Ao utilizar a relação acima de modo iterativo, segue que

$$\pi_{1,a}(n) = \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^n \pi_{1,a}(0).$$

Como  $\pi_{1,a}$  é uma medida de probabilidade, devemos ter

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{1,a}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^n \pi_{1,a}(0) = \frac{\pi_{1,a}(0)}{a/\mu} = 1.$$

Assim,  $\pi_{1,a}(0) = a/\mu$  e, portanto,

$$\pi_{1,a}(n) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^n, \quad \text{para } n \geq 0. \quad \square$$

Note que esta é a distribuição geométrica com parâmetro  $a/\mu$ . Consideremos  $N_{1,a}$  a variável aleatória limite inteira não negativa com medida de probabilidade dada por  $\pi_{1,a}$ . Decorre que  $E(N_{1,a}) = \mu/a - 1$ , de modo que quando  $a \rightarrow 0$ ,  $E(N_{1,a}) \rightarrow \infty$  e quando  $a \rightarrow \mu$ ,  $E(N_{1,a}) \rightarrow 0$ . Ademais, para  $M > 0$  real,

$$\mathbb{P}(N_{1,a} > M) = \sum_{n=\lceil M \rceil}^{\infty} \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^n = \left(1 - \frac{a}{\mu}\right)^{\lceil M \rceil}.$$

Considerando  $N_1 = \lim_{a \rightarrow 0} N_{1,a}$ , segue que

$$\mathbb{P}(N_1 > M) = 1, \quad \forall M,$$

isto é,  $N_1 \stackrel{q.c.}{=} \infty$ . Note que  $N_1$  representa o número de pontos do processo limite em  $[0, \mu]$ , que é, portanto, infinito quase certamente.

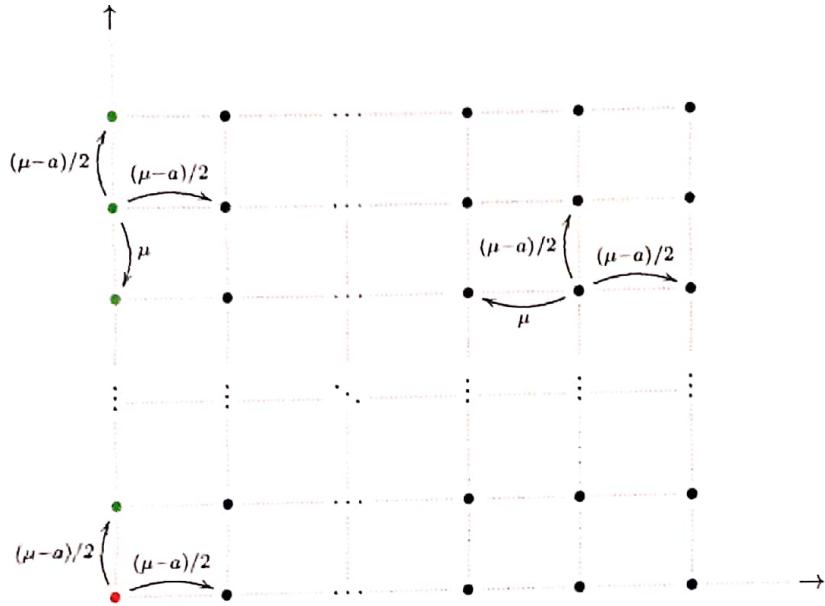
### 2.3.2 Partição em dois subintervalos

Nesse caso, a cadeia  $\{\mathbf{N}_{2,a,t} : t \geq 0\}$  toma valores em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . As taxas de saída de um determinado estado variam em função do próprio estado, como veremos a seguir. Isso ocorre por duas razões: a reflexão do processo no estado  $(0, 0)$ ; como já ocorria no caso anterior em relação ao estado zero; e a correlação entre  $N_{k,a,t}^1$  e  $N_{k,a,t}^2$ , já que uma espécie viva com aptidão no subintervalo mais alto só será extinta se, no instante da extinção, não existirem espécies com aptidões no subintervalo mais baixo.

Seja  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  um estado qualquer. As taxas associadas à cadeia  $\{\mathbf{N}_{2,a,t} : t \geq 0\}$  são dadas por

$$\begin{aligned} q((m, n), (m, n-1)) &= \mu, & \text{para } m = 0 \text{ e } n > 0; \\ q((m, n), (m-1, n)) &= \mu, & \text{para } m > 0 \text{ e } n > 0; \\ q((m, n), (m+1, n)) &= (\mu - a)/2, & \text{para } (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \\ q((m, n), (m, n+1)) &= (\mu - a)/2, & \text{para } (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Para um melhor entendimento, uma representação pictorial da cadeia é dada na Figura ??.



**Figura 2.2:** Representação pictorial dos estados e taxas para a cadeia  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$ . Nessa grade, cada ponto representa um estado e a variação das cores ocorre em função do comportamento das taxas de saída. O estado  $(0,0)$  é representado pelo ponto vermelho.

Denotando por  $\pi_{2,a}$  a medida invariante associada à cadeia  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$ , temos as seguintes equações de balanceamento:

$$\pi_{2,a}(0,0)(\mu - a) = \pi_{2,a}(1,0)\mu + \pi_{2,a}(0,1)\mu; \quad (2.5)$$

$$\pi_{2,a}(m,0)(2\mu - a) = \pi_{2,a}(m+1,0)\mu + \pi_{2,a}(m-1,0)(\mu - a)/2, \text{ para } m > 0; \quad (2.6)$$

$$\pi_{2,a}(0,n)(2\mu - a) = \pi_{2,a}(0,n+1)\mu + \pi_{2,a}(0,n-1)(\mu - a)/2 + \pi_{2,a}(1,n)\mu, \text{ para } n > 0; \quad (2.7)$$

e, para  $m > 0$  e  $n > 0$ ,

$$\pi_{2,a}(m,n)(2\mu - a) = \pi_{2,a}(m+1,n)\mu + \pi_{2,a}(m-1,n)(\mu - a)/2 + \pi_{2,a}(m,n-1)(\mu - a)/2. \quad (2.8)$$

Nosso principal objetivo nesta subseção é caracterizar  $\pi_{2,a}$ . No entanto, como veremos adiante, essa tarefa não será tão simples.

Da equação 2.5 e do fato de  $\pi_{2,a}(0,0) = \pi_{1,a}(0) = a/\mu$ , temos

$$\pi_{2,a}(1,0) + \pi_{2,a}(0,1) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu}\right), \quad (2.9)$$

como deveria ser, pois sempre que a cadeia  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$  visita os estados  $(0,1)$  ou  $(1,0)$ , necessariamente a cadeia  $\{N_{1,a,t} : t \geq 0\}$  visita o estado 1.

Rearranjando os termos da equação 2.6,

$$\pi_{2,a}(m+1,0) - \left(2 - \frac{a}{\mu}\right)\pi_{2,a}(m,0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\mu}\right)\pi_{2,a}(m-1,0) = 0, \text{ para } m > 0, \quad (2.10)$$

uma equação de diferenças finitas homogênea de segunda ordem.

**Proposição 2.3.5.**  $\pi_{2,a}$  deve ser tal que para todo  $m$  natural,

$$\pi_{2,a}(m,0) = \frac{a}{\mu} \left( \frac{q - \sqrt{q^2 - 4r}}{2} \right)^m,$$

onde  $q = 2 - a/\mu$  e  $r = 1/2 - a/2\mu$ .

*Demonstração.* Pela teoria de equações de diferenças finitas, segue que solução geral para a equação 2.10 é dada por

$$\pi_{2,a} = A\lambda_1^m + B\lambda_2^m,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação de segundo grau auxiliar, que no caso, é dada por

$$y^2 - \left(2 - \frac{a}{\mu}\right)y + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\mu}\right) = 0.$$

Por uma questão de simplicidade, vamos considerar  $q = 2 - a/\mu$  e  $r = 1/2 - a/2\mu$ , de modo que a equação acima possa ser reescrita do seguinte modo:

$$y^2 - qy + r = 0.$$

Assim, segue que

$$\lambda_1 = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4r}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4r}}{2}.$$

Note que  $\Delta = q^2 - 4r = 1 + (\mu - a)^2/\mu^2 > 0$ , de tal forma que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes reais e distintas. Ademais, como  $\lambda_1 > 1$ , conforme  $m \rightarrow \infty$ , teríamos  $\lambda_1^m A \rightarrow +\infty$  se  $A > 0$  e  $\lambda_1^m A \rightarrow -\infty$  se  $A < 0$ , um absurdo, já que  $\pi_{2,a}$  é uma medida de probabilidade. Daí,  $A = 0$ , e a solução fica dada por

$$\pi_2(m,0) = B\lambda_2^m.$$

Agora, basta conhecer o valor da constante  $B$ . Note que  $\pi_{2,a}(0,0) = \lambda_2^0 B = B$ , isto é,  $B = a/\mu$ , o que finaliza a demonstração.  $\square$

Vamos agora tentar obter a solução para  $\pi_{2,a}(m,1)$ . Para tal, rearranjamos a equação 2.8, de modo a ter

$$\pi_{2,a}(m+1,n) - q\pi_{2,a}(m,n) + r\pi_{2,a}(m-1,n) + r\pi_{2,a}(m,n-1) = 0, \text{ para } m > 0 \text{ e } n > 0, \quad (2.11)$$

com  $q = 2 - a/\mu$  e  $r = 1/2 - a/2\mu$ , assim como na Proposição 2.3.5. Fazendo  $n = 1$  em 2.11, segue que

$$\pi_{2,a}(m+1,1) - q\pi_{2,a}(m,1) + r\pi_{2,a}(m-1,1) + r\pi_{2,a}(m,0) = 0, \text{ para } m > 0, \quad (2.12)$$

uma equação de diferenças finitas de segunda ordem não-homogênea.

**Proposição 2.3.6.**  $\pi_{2,a}$  deve ser tal que para todo  $m$  natural,

$$\pi_{2,a}(m, 1) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu} - \lambda\right) \lambda^m + \frac{a}{\mu r - \lambda^2} m \lambda^{m+1},$$

com  $q = 2 - a/\mu$ ,  $r = 1/2 - a/2\mu$  e  $\lambda = (q - \sqrt{q^2 - 4r})/2$ .

*Demonastração.* Substituindo  $\pi_{2,a}(m, 0)$  na equação 2.12 e fazendo  $b_m = \pi_{2,a}(m, 1)$ ,  $\lambda = (q - \sqrt{q^2 - 4r})/2$ ,  $c = a/\mu$ , temos

$$b_{m+1} - qb_m + rb_{m-1} + rc\lambda^m = 0, \text{ para } m > 0,$$

Da teoria de equações de diferenças finitas, segue que a candidata a solução particular seria

$$b_m = dm\lambda^m$$

onde  $d$  é uma constante a ser conhecida. Substituindo a última na penúltima, segue que

$$\begin{aligned} d(m+1)\lambda^{m+1} - qdm\lambda^m + rd(m-1)\lambda^{m-1} + rc\lambda^m &= 0 \Leftrightarrow \\ dm\lambda^2 + d\lambda^2 - qdm\lambda + rdm - rd + rc\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\ dm(\lambda^2 - q\lambda + r) + d\lambda^2 - rd + rc\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\ d(r - \lambda^2) &= rc\lambda \Leftrightarrow \\ d &= \frac{rc\lambda}{r - \lambda^2}, \end{aligned}$$

Ademais, a solução para a equação homogênea seria dada por

$$b_m^h = c\lambda^m.$$

Aplicando os mesmos argumentos da Preposição 2.3.5, terfamos

$$b_m^h = \pi_{2,a}(0, 1)\lambda^m.$$

Usando mais uma vez o resultado da Preposição 2.3.5 e a relação estabelecida pela equação 2.9, descobre-se que

$$\pi_{2,a}(0, 1) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu} - \lambda\right),$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$\pi_{2,a}(m, 1) = \frac{a}{\mu} \left(1 - \frac{a}{\mu} - \lambda\right) \lambda^m + \frac{a}{\mu r - \lambda^2} m \lambda^{m+1}$$

□

A ideia para a caracterização de  $\pi_{2,a}$  seria basicamente a seguinte: determinar  $\pi_{2,a}(m, n)$  de modo iterativo, buscando algum padrão. Até aqui, já o fizemos para  $n = 0$  e  $n = 1$ . O próximo passo seria para  $n = 2$ . Apesar de possível, essa tarefa se mostra muito enfadonha sem perspectivas de uma função de resultado geral. O motivo para não continuarmos nossos cálculos é que tudo que haverá adiante dependerá basicamente do que já se conseguiu. Independente disso, explicitaremos as taxas vinculadas ao caso geral, considerando a partição em  $k$  subintervalos compactos de  $[0, \mu - a]$ .

### 2.3.3 Partição em $k$ subintervalos

Infelizmente, não conseguimos explicitar a forma fechada para distribuição estacionária associada à cadeia considerando o caso geral. Nesta subseção, apresentamos algumas constatações do estudo da cadeia  $\{N_{k,a,t} : t \geq 0\}$ .

Se, de modo grosseiro, visualizarmos  $\mathbb{N}^k$  como um cubo de dimensão  $k$  aberto superiormente com o único vértice definido no estado  $(0, 0, \dots, 0)$ , teremos o comportamento das taxas de saída determinado completamente por  $k + 1$  situações.

0. Não é permitida a morte, isto é, estamos no estado  $(0, 0, \dots, 0)$ ,
1. É permitida a morte apenas para aquelas com aptidões na primeira partição,
- $\vdots$
- $k$ . É permitida a morte apenas para aquelas com aptidões na  $k$ -ésima partição.

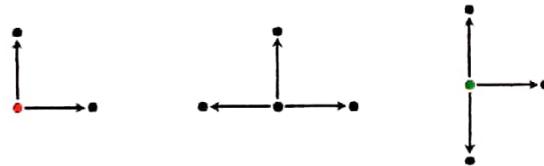
Apenas com o intuito ilustrar, dentro do possível, as sentenças acima, vejamos as respectivas situações para  $k = 1, 2, 3$  por meio de diagramas.

▼  $k = 1$ :



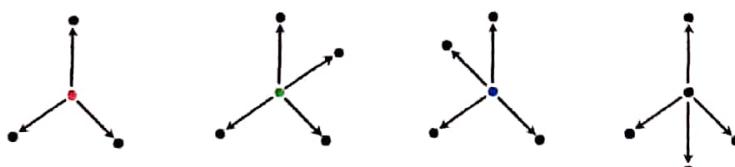
como pode ser visto com mais detalhes na Figura 2.2.

▼▲  $k = 2$ :



como pode ser visto com mais detalhes na Figura 2.3.

▼▲▼  $k = 3$ :



Além da interpretação geométrica dada acima, o conhecimento das taxas é trivial. Para  $x_k = (x_{1,k}, \dots, x_{k,k}) \in \mathbb{N}^k$ , as respectivas taxas associadas à cadeia  $\{N_{k,a,t} : t \geq 0\}$  são dada por

$$\begin{aligned}
 q(x_k, x_k - \mathbf{1}_{k,k}) &= \mu, && \text{para } x_{1,k} = \dots = x_{k-2,k} = x_{k-1,k} = 0 \text{ e } x_{k,k} > 0; \\
 q(x_k, x_k - \mathbf{1}_{k-1,k}) &= \mu, && \text{para } x_{1,k} = \dots = x_{k-2,k} = 0, x_{k-1,k} > 0 \text{ e } x_{k,k} \in \mathbb{N}; \\
 &\vdots && \vdots \\
 q(x_k, x_k - \mathbf{1}_{2,k}) &= \mu, && \text{para } x_{1,k} = 0, x_{2,k} > 0 \text{ e } (x_{3,k}, \dots, x_{k,k}) \in \mathbb{N}^{k-2}; \\
 q(x_k, x_k - \mathbf{1}_{1,k}) &= \mu, && \text{para } x_{1,k} > 0, \text{ e } (x_{2,k}, x_{3,k}, \dots, x_{k,k}) \in \mathbb{N}^{k-1}; \\
 q(x_k, x_k + \mathbf{1}_{i,k}) &= (\mu - a)/k, && \text{para } i = 1, \dots, k,
 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{1}_{k,i}$ , como na demonstração da Proposição 2.3.1, indica o vetor com 1 na  $i$ -ésima coordenada e 0 nas  $k - 1$  restantes.

Nas relações acima, são explicitadas todas as taxas envolvidas. Para perceber a razão das mesmas basta notar que é permitido o nascimento de uma espécie com aptidão em qualquer um dos  $k$  subintervalos da partição a qualquer momento; e que uma morte extinguirá aquela com menor aptidão no primeiro subintervalo mais baixo não vazio.

## 2.4 Função zero

A função zero<sup>2</sup> é uma importante função considerada no estudo de processos pontuais. Antes de sua definição, lembre-se que estamos estudando o processo pontual correspondente ao limite dos processos pontuais  $\{N_t : t \geq 0\}$  vinculados às espécies vivas com aptidões em  $[0, \mu]$ , que denotamos por  $N_\infty$ .

**Definição 2.4.1** (Função Zero). Dado um processo pontual  $N$  em  $\mathcal{X}$ , a função  $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \mapsto [0, 1]$  tal que

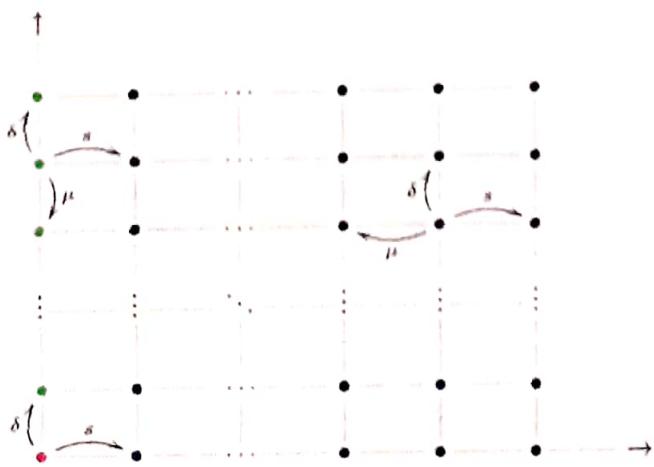
$$\varphi(A) = \mathbb{P}(N(A) = 0), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

onde  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  representa os boreianos de  $\mathcal{X}$ , é chamada *função zero* do processo pontual  $N$ . Denotemos por  $\varphi_\infty$  a função zero de  $N_\infty$ . Nesta seção, apresentaremos um resultado acerca de  $\varphi_\infty$ . Antes dele, algumas considerações são necessárias.

Dados  $x, y \in [0, \mu]$  com  $x < y$ , seja  $N_t(x, y)$  o número de espécies vivas no instante  $t$  com aptidões em  $[x, y]$  e, para  $s > 0$  e  $\delta > 0$ , com  $s + \delta \leq \mu$ ,

$$Z_t = (N_t(0, s), N_t(s, s + \delta)).$$

Note que  $\{Z_t : t \geq 0\}$  é uma cadeia de Markov bivariada em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  em tempo contínuo e que se  $s = \delta = (\mu - a)/2$ ,  $a \in (0, \mu]$ ,  $\{Z_t : t \geq 0\}$  equivale à  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$ , considerada na subseção ???. Nesse sentido,  $\{Z_t : t \geq 0\}$  pode ser vista como uma generalização de  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$ . Por uma simples atualização<sup>3</sup> dos argumentos apresentados nas preposições ?? e ??, é fácil ver que  $\{Z_t : t \geq 0\}$  é recorrente positiva. Uma representação pictorial dos estados e taxas para essa cadeia é dada abaixo.



**Figura 2.3:** Representação pictorial dos estados e taxas para a cadeia  $\{Z_t : t \geq 0\}$ .

Seja  $\nu$  a medida invariante associada à  $\{Z_t : t \geq 0\}$ . Assim como  $\pi_{2,a}$  associada à  $\{N_{2,a,t} : t \geq 0\}$  na subseção ??,  $\nu$  pode ser determinada, mas a tarefa envolve um procedimento iterativo que exige

<sup>2</sup>em inglês, avoidance function

<sup>3</sup>Faça  $\mu - a = s + \delta$  e considere a partição formada pelos subintervalos  $[0, s)$  e  $[s, s + \delta)$ . Apesar da mudança nas taxas envolvidas, os argumentos atualizados continuarão válidos.

cada vez um número maior de certos argumentos. Não parece haver uma fórmula fechada e direta. No entanto, interessantes resultados decorrerão apenas da caracterização de  $\nu$  para os estados  $(m, n)$ , com  $m \in \mathbb{N}$  e  $n \in \{0, 1\}$ . Vamos à isso.

As equações de balanceamento são dadas por:

$$\nu(0, 0)(s + \delta) = \nu(1, 0)\mu + \nu(0, 1)\mu; \quad (2.13)$$

$$\nu(m, 0)(\mu + s + \delta) = \nu(m + 1, 0)\mu + \nu(m - 1, 0)s, \text{ para } m > 0; \quad (2.14)$$

$$\nu(0, n)(\mu + s + \delta) = \nu(0, n + 1)\mu + \nu(0, n - 1)\delta + \nu(1, n)\mu, \text{ para } n > 0; \quad (2.15)$$

e, para  $m > 0$  e  $n > 0$ ,

$$\nu(m, n)(\mu + s + \delta) = \nu(m + 1, n)\mu + \nu(m - 1, n)s + \nu(m, n - 1)\delta. \quad (2.16)$$

Ao rearranjar os termos da equação 2.14, temos

$$\nu(m + 1, 0) - \left(\frac{\mu + s + \delta}{\mu}\right)\nu(m, 0) + \left(\frac{s}{\mu}\right)\nu(m - 1, 0) = 0, \quad \text{para } m > 0, \quad (2.17)$$

uma equação de diferenças finitas de segunda ordem homogênea. Além disso, note que

$$\nu(0, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left((N_t(0, s), N_t(s, s + \delta)) = (0, 0)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(N_t(0, s + \delta) = 0\right) = 1 - \frac{s + \delta}{\mu}, \quad (2.18)$$

onde a última passagem segue direto da preposição 2.3.4 ao tomarmos  $a = \mu - (s + \delta)$ .

**Lema 2.4.1.** A medida invariante  $\nu$  deve ser tal que para todo  $m$  natural,

$$\nu(m, 0) = \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \lambda^m,$$

onde  $\lambda = \frac{\mu + s + \delta - \sqrt{(\mu + s + \delta)^2 - 4s\mu}}{2\mu}$ .

*Demonstração.* Basta resolver a equação 2.17, não esquecendo do fato de  $\nu$  ser uma medida de probabilidade. A menos da mudança nos coeficientes envolvidos, a demonstração é análoga à demonstração da preposição 2.3.5, lembrando que, como visto pela equação 2.18,  $\nu(0, 0) = 1 - (s + \delta)/\mu$ .  $\square$

Ademais, da equação 2.16, segue que para  $m > 0$  e  $n > 0$ ,

$$\nu(m + 1, n) - \left(\frac{\mu + s + \delta}{\mu}\right)\nu(m, n) + \left(\frac{s}{\mu}\right)\nu(m - 1, n) + \left(\frac{\delta}{\mu}\right)\nu(m, n - 1) = 0. \quad (2.19)$$

Ao considerar o caso particular em que  $n = 1$ ,

$$\nu(m + 1, 1) - \left(\frac{\mu + s + \delta}{\mu}\right)\nu(m, 1) + \left(\frac{s}{\mu}\right)\nu(m - 1, 1) + \left(\frac{\delta}{\mu}\right)\nu(m, 0) = 0, \text{ para } m > 0; \quad (2.20)$$

uma equação de diferenças finitas de segunda ordem não-homogênea. Note também que da equação 2.13

e do Lema 2.4.1, segue que

$$\nu(1, 0) = \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \left(\frac{s + \delta}{\mu} - \lambda\right), \quad (2.21)$$

onde a constante  $\lambda$  é a mesma que no Lema 2.4.1.

**Lema 2.4.2.** A medida invariante  $\nu$  deve ser tal que para todo  $m$  natural,

$$\nu(m, 1) = \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \left(\frac{s + \delta}{\mu} - \lambda\right) \lambda^m + \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \frac{\delta}{s - \mu\lambda^2} m\lambda^{m+1},$$

onde  $\lambda = \frac{\mu+s+\delta-\sqrt{(\mu+s+\delta)^2-4s\mu}}{2\mu}$ .

*Demonstração.* Segue da resolução da equação 2.20. Apesar da mudança de certos valores, o procedimento é análogo ao da demonstração da Proposição 2.3.6, lembrando que, como visto pela equação 2.21,  $\nu(0, 1) = \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \left(\frac{s + \delta}{\mu} - \lambda\right)$ .  $\square$

Uma vez estabelecido os resultados acima, podemos estabelecer o principal resultado desta subseção.

**Teorema 2.4.1.** Dados  $s > 0$  e  $\delta > 0$  tais que  $A = [s, s + \delta] \subset [0, \mu]$ , então

$$\varphi_\infty(A) = \mathbb{P}(N_\infty(A) = 0) = 2 \times \frac{\mu - s - \delta}{\mu - s - \delta + \sqrt{(\mu - s)^2 + \delta(\delta + 2\mu + 2s)}}$$

*Demonstração.* Basta ver que

$$\begin{aligned} \varphi_\infty([s, s + \delta]) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t(s, s + \delta) = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t(0, s) = m, N_t(s, s + \delta) = 0) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \nu(m, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \lambda^m = \frac{1}{1 - \lambda} \left(1 - \frac{s + \delta}{\mu}\right) \\ &= 2 \times \frac{\mu - s - \delta}{\mu - s - \delta + \sqrt{(\mu - s)^2 + \delta(\delta + 2s + 2\mu)}} = \frac{\mu - \alpha - (\beta - \alpha)}{\mu - \alpha - (\beta - \alpha) + \sqrt{(\mu - \alpha)^2 + \delta(\delta + 2\alpha + 2\mu)}} \end{aligned}$$

$\square$

## 2.5 Caracterização do processo pontual limite

Antes da caracterização do processo limite, alguns conceitos precisam ser introduzidos. Por ora, vamos à eles.

Denotemos por  $D_\mu$  o espaço das funções  $g$  definidas em  $[0, \mu]$  que são contínuas à direita e possuem limite à esquerda, isto é, aquelas que satisfazem as seguintes condições:

i. Para  $0 \leq s < \mu$ ,  $g(s+) = \lim_{r \downarrow s} g(r) = g(s)$ ;

ii. Para  $0 \leq s < \mu$ ,  $\exists g(s-) = \lim_{r \uparrow s} g(r)$ .

Se  $X$  é uma função de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  em  $D_\mu$ , então, para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega)$  é um elemento de  $D_\mu$  cujo valor em  $s \in [0, \mu]$  denotamos por  $X(s, \omega)$ . Ademais, para cada  $s \in [0, \mu]$ ,  $X(s)$  denota uma função à valores reais definida em  $\Omega$ , cujo valor em  $\omega$  é, como antes, dado por  $X(s, \omega)$ .

**Definição 2.5.1** (Elemento Aletório de  $D_\mu$ ). Seja  $H$  uma função de  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  em  $D_\mu$ . Diz-se que  $H$  é um elemento aleatório de  $D_\mu$  se, e somente se, para cada  $s \in [0, \mu]$ ,  $H(s)$  é uma variável aleatória. É comum chamar  $H$  de uma função aleatória.[3]

Denotemos por  $F_{t,1}, \dots, F_{t,N_t}$  as variáveis aleatórias que indicam, respectivamente, as aptidões das  $N_t$  espécies vivas no instante  $t$  com aptidões menores que  $\mu$ . Para cada  $s \in [0, \mu]$ , seja

$$\mathbf{F}_t(s) = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbb{I}_{\{F_{t,k} \leq s\}}. \quad (2.22)$$

Note que  $\mathbf{F}_t$  é, pela Definição 2.5.1, um elemento aleatório de  $D_\mu$ , uma vez que não é difícil verificar que para cada  $s \in [0, \mu]$ ,  $\mathbf{F}_t(s)$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável e que para cada  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathbf{F}_t(\omega) \in D_\mu$ . Ademais, para cada  $\omega$ ,  $\mathbf{F}_t(\omega)$  pode ser vista como o esqueleto de uma realização de um processo de contagem em  $[0, \mu]$ , mais especificamente, o processo-pontual  $N_t$ . Do mesmo modo que vinculamos  $\mathbf{F}_t$  ao processo pontual  $N_t$ , denotemos por  $\mathbf{F}_\infty$  o elemento aleatório de  $D_\mu$  correspondente ao processo pontual limite  $N_\infty$ . Por construção,  $\mathbf{F}_t$  existe para todo  $t$ , mas ainda assim, não há garantia da convergência  $\mathbf{F}_t$  ao elemento  $\mathbf{F}_\infty$ , nem sequer da existência de  $\mathbf{F}_\infty$ . Daqui ao fim desta seção, nos preocuparemos em mostrar que  $\mathbf{F}_\infty$  existe e que  $\mathbf{F}_t \xrightarrow{D} \mathbf{F}_\infty$ . Daí, teremos o processo pontual limite caracterizado pelas funções distribuições finito-dimensionais do elemento aleatório  $\mathbf{F}_\infty$ .

**Definição 2.5.2** (Projeção Natural). Seja  $g$  uma função que pertence à  $D_\mu$ . Para pontos  $t_1, \dots, t_k \in [0, \mu]$ , a projeção natural de  $D_\mu$  à  $\mathbb{R}^k$  pela função  $g$  é dada por

$$\pi_{t_1 \dots t_k}(g) = (g(t_1), \dots, g(t_k)).$$

Denotemos por  $\mathcal{P}_t$  e  $\mathcal{P}_\infty$  as medidas de probabilidade associadas à  $F_t$  e  $F_\infty$ , respectivamente. Além disso, seja  $T_{F_\infty}$  o conjunto dos pontos  $t \in [0, \mu]$  para os quais  $\pi_t$  é contínua quase certamente em relação à  $\mathcal{P}_\infty$ .

**Teorema 2.5.1** (Critério para Existência). Existe um elemento aleatório em  $D_\mu$  com distribuições finito-dimensionais dada por  $\nu_{t_1 \dots t_k}$ , uma vez que as mesmas sejam consistentes; tal que

$$\nu_{t_1, t_2} \{ (\beta_1, \beta, \beta_2) : |\beta - \beta_1| \geq \lambda, |\beta_2 - \beta| \geq \lambda \} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [G(t_2) - G(t_1)]^{2\alpha}$$

para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , onde  $\gamma \geq 0$ ,  $\alpha > 1/2$ , e  $G$  é uma função não-decrescente contínua definida em  $[0, \mu]$ ; e

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \nu_{t, t+\delta} \{ (\beta_1, \beta_2) : |\beta_1 - \beta_2| \geq \epsilon \} = 0,$$

para  $0 \leq t < \mu$ .

*Demonstração.* A demonstração deste Teorema pode ser vista em [5]. □

**Teorema 2.5.2** (Critério para Convergência). Suponha que

$$(F_n(t_1), \dots, F_n(t_k)) \xrightarrow{D} (F_\infty(t_1), \dots, F_\infty(t_k))$$

vale sempre que  $t_i \in T_{F_\infty}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ; que  $\mathbb{P}\{F(\mu) \neq F(\mu-)\} = 0$ , e que

$$\mathbb{P}\{ |F_n(t) - F_n(t_1)| \geq \lambda, |F_n(t_2) - F_n(t)| \geq \lambda \} \leq \frac{1}{\lambda^{2\gamma}} [G(t_2) - G(t_1)]^{2\alpha}$$

para  $t_1 \leq t \leq t_2$  e  $n \geq 1$ , onde  $\gamma \geq 0$ ,  $\alpha > 1/2$ ,  $\lambda$  positivo, e  $G$  uma função não-decrescente contínua definida em  $[0, \mu]$ . Então  $F_n \xrightarrow{D} F$ .

*Demonastração.* A demonstração deste Teorema pode ser vista em [5].  $\square$

**Teorema 2.5.3.**  $\mathbf{F}_t \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{F}_\infty$

*Demonastração.* Para  $m_i \in \mathbb{N}$  e  $t_i \in T_{\mathbf{F}}$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , com  $m_i \leq m_{i+1}$ , considere o evento  $\pi_{t_1 \dots t_k}^{m_1 \dots m_k} = \{\mathbf{F}_t(t_1) = m_1, \mathbf{F}_t(t_2) = m_2, \dots, \mathbf{F}_t(t_k) = m_k\}$ . Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\pi_{t_1 \dots t_k}^{m_1 \dots m_k}\} &= \mathbb{P}\{N_t(I_1) = m_1, N_t(I_2) = m_2 - m_1, \dots, N_t(I_k) = m_k - m_{k-1}\} \\ &\rightarrow \mathbb{P}\{N_\infty(I_1) = m_1, N_\infty(I_2) = m_2 - m_1, \dots, N_\infty(I_k) = m_k - m_{k-1}\} \\ &= \nu(m_1, m_2 - m_1, \dots, m_k - m_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}\{\mathbf{F}_\infty(t_1) = m_1, \mathbf{F}_\infty(t_2) = m_2, \dots, \mathbf{F}_\infty(t_k) = m_k\}\end{aligned}$$

onde  $I_k = [t_{k-1}, t_k]$  com  $t_0 = 0$ ,  $\nu$  é a medida invariante associada à cadeia  $\{W_t : t \geq 0\}$  com  $\mathbf{W}_t = (N_t(I_1), N_t(I_2), \dots, N_t(I_k))$ . Para verificar que  $\nu$  existe e é única, basta mostrar que  $\{\mathbf{W}_t : t \geq 0\}$  é recorrente positiva. Essa tarefa pode ser facilmente executada por meio de uma simples atualização dos argumentos das Preposições 2.3.2 e 2.3.3.

Ademais, para  $\lambda$  positivo, note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|F_n(t) - F_n(t_1)| \geq \lambda, |F_n(t_2) - F_n(t)| \geq \lambda\} &\leq \mathbb{P}\{|F_n(t) - F_n(t_1)| \geq 1, |F_n(t_2) - F_n(t)| \geq 1\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|F_n(t_2) - F_n(t_1)| \geq 2\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|F_\infty(t_2) - F_\infty(t_1)| \geq 2\} \\ &= \mathbb{P}\{N_\infty[t_1, t_2] \geq 2\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{N_\infty[t_1, t_2] = 0\} - \mathbb{P}\{N_\infty[t_1, t_2] = 1\}\end{aligned}$$

Fazendo  $\delta = t_2 - t_1$ ,  $I_\delta = [t_1, t_2]$ , pelo Teorema 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_\infty(I_\delta) = 0\} &= \varphi_\infty(I_\delta) \\ &= \underbrace{2 \times \frac{\mu - t_1 - \delta}{\mu - t_1 - \delta + \sqrt{(\mu - t_1)^2 + \delta(\delta + 2\mu + 2t_1)}}}_{f(t_1, \delta)}\end{aligned}$$

Ademais, com auxílio do Lema 2.4.2 que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_\infty(I_\delta) = 1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t(0, t_1) = m, N_t(t_1, t_1 + \delta) = 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \nu(m, 1) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t_1 + \delta}{\mu}\right) \left(\frac{t_1 + \delta}{\mu} - \eta\right) \eta^m + \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t_1 + \delta}{\mu}\right) \frac{\delta}{t_1 - \mu\eta^2} m\eta^{m+1} \\ &= \left(1 - \frac{t_1 + \delta}{\mu}\right) \left(\frac{t_1 + \delta}{\mu} - \eta\right) \frac{1}{1 - \eta} + \left(1 - \frac{t_1 + \delta}{\mu}\right) \frac{\delta}{t_1 - \mu\eta^2} \frac{\eta^2}{(1 - \eta)^2}\end{aligned}$$

onde  $\eta = \frac{\mu + t_1 + \delta - \sqrt{(\mu + t_1 + \delta)^2 - 4t_1\mu}}{2\mu}$ . Fazendo a substituição pelo real valor de  $\eta$  temos, após um certo trabalho algébrico, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_\infty(I_\delta) = 1) &= \frac{4\delta(\mu - t_1 - \delta)}{\underbrace{(\sqrt{(\mu + t_1 + \delta)^2 - 4t_1\mu} + \mu - t_1 - \delta)^2}_{g(t_1, \delta)}} \\ &+ \underbrace{\frac{4\delta(\mu - t_1 - \delta)(\mu + t_1 + \delta - \sqrt{(\mu + t_1 + \delta)^2 - 4t_1\mu})^2}{(\sqrt{(\mu + t_1 + \delta)^2 - 4t_1\mu} + \mu - t_1 - \delta)^2(4t_1\mu - (\mu + t_1 + \delta - \sqrt{(\mu + t_1 + \delta)^2 - 4t_1\mu})^2)}}_{h(t_1, \delta)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{P}\{|\mathbf{F}_n(t) - \mathbf{F}_n(t_1)| \geq \lambda, |\mathbf{F}_n(t_2) - \mathbf{F}_n(t)| \geq \lambda\} \leq 1 - f(t_1, \delta) - g(t_1, \delta) - h(t_1, \delta)$$

Note que, fixado  $t_1$ , o lado esquerdo da inequação acima é uma função analítica. Assim, podemos expandi-la e representá-la por meio de sua respectiva série de MacLaurin. Após algumas manipulações algébricas, obtém-se que

$$\begin{aligned} f(t_1, \delta) &= 1 - \frac{\mu}{(\mu - t_1)^2} \delta + c_1 \delta^2 + o(\delta^2), \\ g(t_1, \delta) &= \frac{\mu - t_1}{(\mu - t_1)^2} \delta + c_2 \delta^2 + o(\delta^2), \\ h(t_1, \delta) &= \frac{t_1}{(\mu - t_1)^2} \delta + c_3 \delta^2 + o(\delta^2). \end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$\mathbb{P}\{|\mathbf{F}_n(t) - \mathbf{F}_n(t_1)| \geq \lambda, |\mathbf{F}_n(t_2) - \mathbf{F}_n(t)| \geq \lambda\} \leq c\delta^2 + o(\delta^2)$$

□

Com o Teorema acima, garantimos a existência de  $\mathbf{F}_\infty$  bem como a convergência de  $\mathbf{F}_t$  ao mesmo.

# Capítulo 3

## Sobre a espécie eterna

Pelos resultados já apresentados nos trabalhos de Guiol et. al., sabe-se que todas as espécies que surgem com aptidões maiores que  $\mu$  sobrevivem para sempre quase certamente. Isso, a priori, não garante logicamente que haverá uma espécie que nunca será extinta. Nesse capítulo, iremos garantir a existência de espécies eternas - aquelas que sobrevivem para sempre. Após a verificação do eventual surgimento das mesmas, identificaremos seus respectivos instantes de nascimento por um processo pontual  $\tilde{N}$  em  $[0, \infty)$  a ser definido. Explicitaremos a função zero de  $\hat{P}$  por meio de uma equação integral e mostraremos uma maneira de cálculo da probabilidade de não existência de espécies eternas em função do tempo  $t$ , que terá decaimento exponencial.

### 3.1 Infinitas espécies eternas

Para cada  $a \in [0, 1]$  fixado, definamos

$$M_{a,t} = |\mathcal{X}_t \cap [0, a)|,$$

que indica o número de espécies vivas no instante  $t$  com aptidões inferiores à  $a$ . Note que  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  é um processo de nascimento e morte em tempo contínuo com taxas de nascimento  $a$  e morte  $\mu$ , respectivamente.

Seja  $\{M_{a,t}^x : t \geq 0\}$  um processo construído assim como o processo  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  tendo  $x$  como valor inicial, isto é,  $M_{a,0}^x = x$ . Ademais, seja  $\sigma_x = \inf\{t > 0 : M_{a,t}^x \neq x\}$  o tempo até o primeiro salto do processo  $\{M_{a,t}^x : t \geq 0\}$  e  $T^{a,x,y} = \inf\{t > \sigma_x : M_{a,t}^x = y\}$  o tempo até sua primeira passagem<sup>1</sup> pelo estado  $y$ .

Dos resultados de Processos Estocásticos - vide (Grimmett e Stirzaker, 2001) -, sabe-se que para  $a > \mu$ ,  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  é transitente, isto é,

$$\mathbb{P}(T^{a,x,x} = \infty) > 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{N} \text{ e } a \in (\mu, 1].$$

Com isso, temos condições de enunciar a principal proposição desta seção.

**Teorema 3.1.1.** Existem infinitas espécies que sobrevivem para sempre quase certamente.

**Demonstração.** Para cada  $a \in [0, 1]$ , seja  $E_a$  o evento representando a extinção das espécies com aptidões em  $[0, a]$ . Ademais, seja  $\{I_{a,n} : n \geq 1\}$  uma sequência de variáveis aleatórias, onde  $I_{a,n}$  indica o instante em que ocorre  $E_a$  pela  $n$ -ésima vez. Considere

$$T_{a,n} = I_{a,n} - I_{a,n-1}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

<sup>1</sup>Caso  $x = y$ ,  $T^{a,x,y} = T^{a,x,x}$  é dito o tempo de retorno do processo  $\{M_{a,t}^x : t \geq 0\}$  ao estado  $x$ .

onde, por convenção,  $I_{a,0} = 0$ . Note que  $\{T_{a,n} : n \geq 1\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., cada com a mesma distribuição de  $T^{a,0,0}$ . Sabemos que para  $a > \mu$ ,  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  é transiente e portanto  $\mathbb{P}(T^{a,0,0} = \infty) > 0$ . Logo,

$$\rho = \mathbb{P}(T_{a,n} = \infty) = \mathbb{P}(T^{a,0,0} = \infty) > 0, \quad \forall n \geq 1, a \in (\mu, 1].$$

Note que

$$N_a = \min \{n \geq 1 : T_{a,n} = \infty\} - 1$$

é uma variável aleatória com distribuição geométrica com parâmetro  $1 - \rho$  e indica o número de vezes que ocorre  $E_a$  no decorrer de todo o processo evolutivo. Assim,

$$\mathbb{P}(N_a < k) = 1 - \sum_{n=k}^{\infty} (1 - \rho)^k \rho = 1 - (1 - \rho)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Daí,  $\mathbb{P}(N_a < \infty) = 1$ , isto é, o número de vezes que ocorre  $E_a$  é finito quase certamente. Além disso, o tempo aleatório até a ocorrência de  $E_a$  pela última vez é dado por

$$\tau_a = \sum_{k=1}^{N_a} T_{a,k},$$

que é uma variável aleatória finita, uma vez que corresponde a uma soma finita de variáveis aleatórias finitas.

A partir de  $\tau_a$ , basta esperar o surgimento da primeira espécie com aptidão abaixo de  $a$ , o que ocorre num tempo exponencialmente distribuído com taxa  $a$  - digamos  $\phi_{a\downarrow}$  -, que é finito quase certamente. Daí,  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  nunca mais retornará ao estado zero, isto é, as espécies com aptidões em  $(a, 1]$  serão protegidas pelas com aptidões em  $[0, a]$ . Caso não existam espécies com aptidões acima de  $a$ , basta esperar pelo nascimento da próxima com essa característica, que surgirá de acordo com uma variável aleatória exponencial com taxa  $(1 - a)$  - digamos  $\phi_{a\uparrow}$  -, que é finita quase certamente. Daí, no instante

$$S_a = \tau_a + \phi_{a\downarrow} + \phi_{a\uparrow},$$

teremos uma espécie que sobreviverá para sempre. Vale notar que  $S_a$  é uma cota superior para o tempo de surgimento da primeira espécie eterna. Ademais, todas as espécies que aparecerem depois desse tempo aleatório com aptidões acima de  $a$  sobreviverão para sempre. Isto é suficiente para garantir que, quase certamente, surgirão infinitas espécies que sobrevivem para sempre.  $\square$

Ademais, seja  $S_a^- = \tau_a + \phi_{a\downarrow}$ . Para todo  $t > S_a^-$ , o conjunto de espécies eternas com aptidões acima de  $a$  pode ser descrito como o conjunto de espécies vivas e com aptidões acima de  $a$  em  $S_a^-$  unido àquelas surgidas em  $[S_a^-, t] \times [a, 1]$ , isto é, são dadas pelo conjunto

$$\mathcal{X}'_{a,t} \cup \tilde{\mathcal{X}}_{a,t}, \quad \text{depende de } +?$$

onde  $\mathcal{X}'_{a,t} = \mathcal{X}_{S_a^-} |_{(a,1]}$  e  $\tilde{\mathcal{X}}_{a,t} = \mathcal{N}|_{(S_a^-, t) \times (a,1]}$ . Note que dado  $S_a^-$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}_{a,t}$  é independente de  $\mathcal{X}'_{a,t}$  em  $(S_a^-, t) \times (a, 1]$  e é um processo de Poisson com taxa  $1 - a$ . Com isto, partindo de uma condição inicial finita localmente, temos da finitude quase certa de  $S_a^-$  e a Lei dos Grandes Números, por exemplo, que ~~seja cota de sota +~~  $\rightarrow 0$

$$\frac{1}{t} |\hat{\mathcal{X}}_t| \xrightarrow{P} (1 - a)|I|,$$

onde  $\hat{\mathcal{X}}_t$  é o conjunto de espécies eternas no tempo  $t$  e  $I$  é um intervalo fechado contido em  $(a, 1]$ .

*Em seg. como Proposição. Ver se*

*ajuda em  
veus. Se apena  
dura de*

### 3.2 Processo pontual de surgimento de espécies eternas

Partindo de um sistema desabitado, a cada instante de nascimento estará associada apenas uma espécie ou, de maneira equivalente, uma aptidão. Dentre todos estes instantes, há aqueles que são os de nascimentos de espécies eternas. Assim, podemos identificar cada surgimento de espécie eterna por um par ordenado  $(x, y) \in (0, \infty) \times [0, 1]$ , onde  $x$  indica o instante do nascimento e  $y$  a respectiva aptidão associada. Isto é, o conjunto de espécies eternas pode ser representado por meio de pontos em  $(0, \infty) \times [0, 1]$ ; o que pode ser visto, para cada  $\omega \in \Omega$ , como uma realização de um processo pontual simples - denotemos-o por  $\hat{\mathcal{P}}$  - em  $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ . Nessa seção, iremos discorrer sobre a função zero de  $\hat{\mathcal{P}}$  e apresentamos estimativas para a taxa de decaimento (exponencial) da cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie imortal a partir da condição inicial vazia.

De modo mais formal,

$$\hat{\mathcal{P}} = \{(T_n, X_n) \in \mathcal{N} : X_n \text{ representa uma espécie eterna}\}.$$

Para todo boreiano  $A \subset \mathcal{B}((0, \infty) \times [0, 1])$ , definimos

$$\hat{N}(A) = |\hat{\mathcal{P}} \cap A|,$$

que indica o número de espécies eternas em  $A$ . Agora, vamos introduzir a função zero do processo  $\hat{\mathcal{P}}$ , que é dada por

$$\zeta(A) = \mathbb{P}(\hat{N}(A) = 0);$$

e indica a probabilidade de inexistência de espécies eternas em  $A$ . Vamos introduzir algumas variáveis auxiliares para, a partir delas, apresentar uma maneira de caracterizar  $\zeta(A)$ .

Para todo  $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times [0, 1])$ , consideramos os seguintes elementos:  $x^- = \min\{x : (x, y) \in A\}$ ,  $x^+ = \max\{x : (x, y) \in A\}$ ,  $y^- = \min\{y : (x, y) \in A\}$ ,  $y^+ = \max\{y : (x, y) \in A\}$ . Note que  $A \subset [x^-, x^+] \times [y^-, y^+]$ . Ademais, para cada  $y \in \text{proj}_y(A) := \{y : (x, y) \in A\}$ , consideramos  $x_y^- = \min\{x : (x, y) \in A\}$ ,  $x_y^+ = \max\{x : (x, y) \in A\}$ , e

$$A_y^\downarrow = A \cap [x^-, x^+] \times [y^-, y], \quad A_y^\uparrow = A \cap [x^-, x^+] \times (y, y^+).$$

É claro que  $A_y^\downarrow \cap A_y^\uparrow = \emptyset$  e  $A = A_y^\downarrow \cup A_y^\uparrow$ . Agora, vamos introduzir

$$X^* = (X_1^*, X_2^*) \in \mathcal{N} \cap A,$$

onde  $X_2^* = \max\{x_2 : x = (x_1, x_2) \in \mathcal{N} \cap A\}$ , com a convenção de que  $\{\max \emptyset\} = y^-$ . Note que  $X_1^*$  depende de  $X_2^*$ . Para que  $X_1^*$  esteja bem definida, façamos  $X_1^* = x_{y^-}^-$  sempre que  $\mathcal{N} \cap A = \emptyset$ . Resulta que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) &= \mathbb{P}(X_2 \leq x_2 | \mathcal{N} \cap A = \emptyset)\mathbb{P}(\mathcal{N} \cap A = \emptyset) + \mathbb{P}(X_2 \leq x_2, \mathcal{N} \cap A \neq \emptyset) \\ &= e^{-|A|} + \mathbb{P}(\mathcal{N} \cap A_{x_2}^\downarrow \neq \emptyset, \mathcal{N} \cap A_{x_2}^\uparrow = \emptyset) \\ &= e^{-|A|} + \left(1 - e^{-|A_{x_2}^\downarrow|}\right) e^{-|A_{x_2}^\uparrow|}, \quad \text{para } x_2 \in \text{proj}_y(A), \end{aligned}$$

onde  $|A|$  representa a medida de Lebesgue do conjunto  $A$ . Segue também que

$$\mathbb{P}(X_2 \leq x_2 | \mathcal{N} \cap A \neq \emptyset) = \frac{e^{-|A_{x_2}^\uparrow|} - e^{-|A_{x_2}^\downarrow|} e^{-|A_{x_2}^\downarrow|}}{1 - e^{-|A|}} = \frac{e^{-|A_{x_2}^\uparrow|} - e^{-|A|}}{1 - e^{-|A|}}, \quad \text{para } x_2 \in \text{proj}_y(A).$$

Por um procedimento análogo, poderíamos obter a distribuição de  $X_1^*$ . Note que, pelas propriedades bem conhecidas dos Processos de Poisson, - vide (Ferrari e Galves, 1997), por exemplo - dados

*Então é mais lógico*

$\mathcal{N} \cap A \neq \emptyset$  e  $X_2^* = x_2^*$ ,  $X_1^*$  é uniformemente distribuída em  $\text{proj}_x(A; x_2^*) := \{x : (x, x_2^*) \in A\}$ . Ademais, seja

$$T = \begin{cases} \min\{t > X_1^* : M_{X_2^*, t} = 0\}, & \text{se } \mathcal{N} \cap A \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, dados  $\mathcal{N} \cap A \neq \emptyset$ ,  $X^* = (x_1^*, x_2^*)$  e  $M_{x_2^*, x_1^*}$ ,  $T - x_1^* \sim T^{x_2^*, M_{x_2^*, x_1^*}, 0}$ . A partir da condição inicial vazia, segue que

$$\zeta(A) = \mathbb{P}(\mathcal{N} \cap A = \emptyset) + \mathbb{P}(\infty > T > x^+ - X_1^*) + \int_A \int_0^{x^+ - x_1^*} f_T(s) \zeta(A_s^*) f_{X^*}(x^*) ds dx^* \quad (3.1)$$

$$= e^{-|A|} + \mathbb{P}(\infty > T > x^+ - X_1^*) + \int_A \int_0^{x^+ - x_1^*} f_T(s) \zeta(A_s^*) f_{X^*}(x^*) ds dx^*, \quad (3.2)$$

onde  $A_t^* = A \cap [t, \infty) \times [0, x_2^*]$ . A equação integral 3.2 parece muito complicada para ser resolvida mesmo para o caso mais simples em que  $A$  é um retângulo. Vamos a seguir obter cotas inferiores para a soma dos dois primeiros termos no caso em que  $A = [0, t] \times [0, 1]$ , o que nos dá cotas inferiores para a cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie eterna. Em segundo momento, por um argumento independente, obtemos uma cota superior para a mesma cauda.

### Cota inferior para a cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie eterna

Seja  $\mathcal{T}$  o tempo até o aparecimento da primeira espécie eterna partindo da condição inicial vazia. Ademais, dados  $0 < s < t$  e  $0 < u < 1$ , sejam  $B := [0, t] \times [0, 1]$ ,  $\tilde{\zeta}(s, u) := \zeta(B)$ , onde  $A = [s, t] \times [0, u]$  e  $\tilde{\zeta}(t) := \tilde{\zeta}(0, 1) = \zeta(B)$ . Não deve ser difícil ver que os eventos  $\{\mathcal{T} > t\}$  e  $\{\hat{P} \cap B = \emptyset\}$  são equivalentes, isto é,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) = \tilde{\zeta}(t). \quad (3.3)$$

Pela equação 3.2, temos

$$\tilde{\zeta}(t) = e^{-t} + \mathbb{P}(\infty > T > t - X_1^*) + \int_B \int_0^{t - x_1^*} f_T(s) \tilde{\zeta}(x_1^* + s, x_2^*) f_{X^*}(x^*) ds dx^*. \quad (3.4)$$

Das equações 3.3 e 3.4, segue que  $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) \geq e^{-t}$ . Vamos refinar ainda mais essa desigualdade. Por (Guiole et al., 2013), todas as espécies com aptidões menores que  $\mu$  desaparecem quase certamente depois de um tempo aleatório, isto é,  $\zeta(A) = 1$  para todo  $A \subset \mathcal{B}((0, \infty) \times [0, \mu])$ . Daí, para todo  $A \subset \mathcal{B}((0, \infty) \times [0, 1])$ ,

$$\zeta(A) = \mathbb{P}(\hat{N}(A_\mu^\uparrow) = 0) \mathbb{P}(\hat{N}(A_\mu^\downarrow) = 0 \mid \hat{N}(A_\mu^\uparrow) = 0) = \mathbb{P}(\hat{N}(A_\mu^\uparrow) = 0) = \zeta(A_\mu^\uparrow).$$

A partir de  $\zeta(A) = \zeta(A_\mu^\uparrow)$ , podemos reescrever a equação integral 3.4, que fica dada por

$$\tilde{\zeta}(t) = e^{-(1-\mu)t} + \mathbb{P}(\infty > T > t - X_1^*) + \int_{B_\mu^\uparrow} \int_0^{t - x_1^*} f_T(s) \tilde{\zeta}(x_1^* + s, x_2^*) f_{X^*}(x^*) ds dx^*. \quad (3.5)$$

Assim, segue que  $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) \geq e^{-(1-\mu)t}$ . A seguir, vamos mostrar que  $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t)$  é cotada superiormente por uma função que possui decaimento exponencial em  $t$ .

*é feira inferior para a 2ª ferme*

*é sexta!!!*

ayer Na o ve de refuerzo de Martínez

Entonces  $\hat{Na} \sim \text{Geo}(\dots)$

Nota que  $\hat{\tau}_0 = \sum_{k=1}^{Na} X_k$ , donde  $X_1, X_2, \dots$  iid, indep de  $Na$

y tal que  $X_i = \sum_{j=1}^K Y_j$ , donde

$K =$  tiempo de refugio de cada uno de los  $t_i$ , donde  $t_i$  son los tiempos a finos,

i.e.  $t_1, t_2, \dots$  iid, indep de  $K$ ,  $Y_i \sim \text{exp}(\dots)$

la otra parte de Markov.

Sabemos que  $E(s^K) = \dots = \langle \text{ref} \rangle$ .

Entonces que  $E(s^{t_i}) = \dots$

que que

$$E(s^{X_1}) = E(t^K) \Big|_{t=E(s^{Y_1})} = \dots$$

y digo que

$$E(\hat{\tau}_0) = E(u^{Na}) \Big|_{u=E(s^{X_1})} = \dots$$

**Cota superior para a cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie eterna**

Na demonstração do Teorema 3.1.1, para cada  $a \in (\mu, 1]$ , denotamos por  $S_a$  o tempo até o surgimento de uma espécie eterna com aptidão acima de  $a$ . Seja  $\mathcal{S} = \min\{S_a : a \in (\mu, 1]\}$ . Note que  $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$ . Daí,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) \leq \mathbb{P}(\mathcal{S} > t). \quad (3.6)$$

Vamos ao estudo do membro direito da inequação acima. Para isso, recapitulemos que

$$S_a = \tau_a + \phi_{a\downarrow} + \phi_{a\uparrow},$$

onde  $\phi_{a\downarrow} \sim \text{Exp}(a)$  e  $\phi_{a\uparrow} \sim \text{Exp}(1 - a)$ . Para simplificar ainda mais o posterior estudo de  $\mathcal{S}$ , façamos, por ora, um estudo mais detalhado de  $\tau_a$ .

Antes, indicamos por  $E_a$  o evento representando a extinção das espécies com aptidões em  $[0, a]$  e constatamos que, para  $a > \mu$ ,  $E_a$  ocorrerá um número finito de vezes. Denotamos por  $\tau_a$  o instante em que  $E_a$  ocorre pela última vez. Daí,

$$\tau_a = \sum_{k=1}^{N_a} T_{a,k}$$

Note agora que, partindo do sistema vazio, eventualmente aparecerá a primeira espécie com aptidão abaixo de  $a$  após um tempo aleatório, e após o instante desse primeiro nascimento, decorrerá outro tempo aleatório até a cadeia  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$  retornar ao estado zero. Esse padrão pode ser identificado como um ciclo do subprocesso considerado, composto por dois períodos: o vazio, que representa o período em que não há espécies com aptidões menores que  $a$ ; e o ocupado, que representa o período em que existem espécies com tal característica. Note que para cada  $a \in [0, 1]$ , o tempo aleatório até o completamento deste ciclo pela  $k$ -ésima vez é dado pela variável aleatória  $T_{a,k}$ . Denotando por  $X_{a,k}$  e  $Y_{a,k}$  os respectivos tempos aleatórios de duração dos períodos vazio e ocupado do  $k$ -ésimo ciclo, é fácil ver que  $T_{a,k} = X_{a,k} + Y_{a,k}$ . Para uma maior compreensão, veja Figura 3.1.

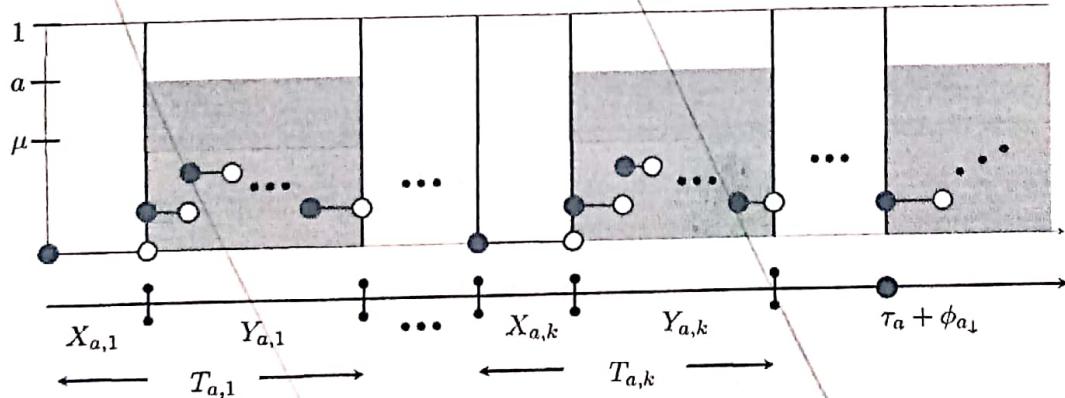


Figura 3.1: Períodos vazios, ocupados e instante de saída permanente do estado zero para a cadeia  $\{M_{a,t} : t \geq 0\}$ .

Assim, segue que

$$S_a = \tau_a + \phi_{a\downarrow} + \phi_{a\uparrow} = \sum_{k=1}^{N_a} (X_{a,k} + Y_{a,k}) + \phi_{a\downarrow} + \phi_{a\uparrow}.$$

Caracterizaremos a saída de  $\tau_a$  abaixo:

Agora, para uma variável aleatória  $X$  e  $s > 0$  real, seja  $\psi_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ . Vamos obter  $\psi_{S_a}(s)$  para a partir daí e pela bem conhecida desigualdade de Markov, encontrar uma cota superior para  $\mathbb{P}(S > t)$  e, portanto, para  $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t)$ . Para determinar  $\psi_{S_a}(s)$ , vamos proceder do seguinte modo:

1. Determinaremos  $\psi_{X_{a,k}}(s)$ ,  $\psi_{Y_{a,k}}(s)$ , para  $1 \leq k \leq N_a$ ;
2. A partir do passo anterior, determinaremos  $\psi_{T_{a,k}}(s)$ , para  $1 \leq k \leq N_a$ ;
3. Por fim, obteremos  $\psi_{\tau_a}(s)$  e, a partir daí,  $\psi_{S_a}(s)$ .

Explicitaremos os passos acima por meio de Lemas.

$\rightarrow$  **Lema 3.2.1 (1).** Para  $1 \leq k \leq N_a$ ,

$$\psi_{X_{a,k}}(s) = \frac{a}{a - \log(s)}, \text{ com } \log(s) < a.$$

*Demonstração.* Pelas propriedades de superposição de Processos de Poisson,  $X_{a,k} \sim \text{Exp}(a)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \psi_{X_{a,k}}(s) &= \int_0^\infty s^x a e^{-ax} dx = a \int_0^\infty e^{x \log(s)} e^{-ax} dx \\ &= \frac{a}{a - \log(s)} \int_0^\infty (a - \log(s)) e^{-(a - \log(s))x} dx \\ &= \frac{a}{a - \log(s)}, \text{ para } \log(s) < a. \end{aligned}$$

*Sime i m d e r h o l o f i l o g r u X\_{a,k} \sim \text{Exp}(a), p o r q u e n u c o d e r*

$\rightarrow$  **Lema 3.2.2 (1).** Para  $1 \leq k \leq N_a$ ,

$$\psi_{Y_{a,k}}(s) = \frac{a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu}}{2a}, \text{ com } \log(s) < (\sqrt{a} - \sqrt{\mu})^2,$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{Z}_{a,n} = T^{a,n,0} | T^{a,n,0} < \infty$ . Note que para todo  $1 \leq k \leq N_a$ ,  $Y_{a,k} = \mathcal{Z}_{a,1}$ , e que para  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{Z}_{a,n} = \phi_* + \begin{cases} \mathcal{Z}_{a,n+1}, & \text{com probabilidade } \frac{a}{a+\mu}; \\ \mathcal{Z}_{a,n-1}, & \text{com probabilidade } \frac{\mu}{a+\mu}, \end{cases}$$

*onde  $\phi_* \sim \text{Exp}(a + \mu)$  representa o tempo até o primeiro salto da cadeia  $\{M_{a,t}^n : t \geq 0\}$ .* Daí,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{Z}_{a,n}}(s) &= \psi_{\phi_*}(s) \times \left( \frac{a}{a + \mu} \psi_{\mathcal{Z}_{a,n+1}}(s) + \frac{\mu}{a + \mu} \psi_{\mathcal{Z}_{a,n-1}}(s) \right) \\ &= \frac{a + \mu}{a + \mu - \log(s)} \times \left( \frac{a}{a + \mu} \psi_{\mathcal{Z}_{a,n+1}}(s) + \frac{\mu}{a + \mu} \psi_{\mathcal{Z}_{a,n-1}}(s) \right), \text{ para } \log(s) < a + \mu. \end{aligned}$$

Assim, para  $\log(s) < a + \mu$  e  $n \geq 1$ , temos

$$a\psi_{\mathcal{Z}_{a,n+1}}(s) - (a + \mu - \log(s))\psi_{\mathcal{Z}_{a,n}}(s) + \mu\psi_{\mathcal{Z}_{a,n-1}}(s) = 0.$$

Considere o caso particular em que  $n = 2$ . Ao notar que  $\psi_{\mathcal{Z}_{a,2}}(s) = \psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}^2(s)$  e que  $\psi_{\mathcal{Z}_{a,0}}(s) = 1$ , obtém-se que

$$a\psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}^2(s) - (a + \mu - \log(s))\psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}(s) + \mu = 0.$$

Logo,

$$\psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}(s) = \frac{a + \mu - \log(s) \pm \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu}}{2a}.$$

Dada a finitude de  $\mathcal{Z}_{a,1}$ , podemos descartar a maior raiz, uma vez que para  $0 < s = e^{\mu-a} < 1$ , a mesma é maior que 1. Caso a considerássemos,  $\psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}(e^{\mu-a}) > 1$  - um absurdo, pois  $0 < e^{\mu-a} < 1$  e  $\mathcal{Z}_{a,1}$  finita implicam em  $\psi_{\mathcal{Z}_{a,1}}(e^{\mu-a}) < 1$ .

Além disso, note que a menor delas é real apenas para  $\log(s) \leq a + \mu - 2\sqrt{a\mu}$  ou para  $\log(s) \geq a + \mu + 2\sqrt{a\mu}$ . Com a já existente restrição  $\log(s) < a + \mu$  e recordando o fato de que  $Y_{a,k} = \mathcal{Z}_{a,1}$  para todo  $1 \leq k \leq N_a$ , segue que

$$\psi_{Y_{a,k}}(s) = \frac{a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu}}{2a},$$

para  $1 \leq k \leq N_a$  e  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ . □

**Lema 3.2.3 (2).** Para  $1 \leq k \leq N_a$ ,

$$\psi_{T_{a,k}}(s) = \frac{a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu}}{2(a - \log(s))}, \quad \text{para } \log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2.$$

*Demonastração.* Para  $1 \leq k \leq N_a$ ,  $X_{a,k}$  e  $Y_{a,k}$  são independentes. Daí,

$$\begin{aligned} [2]\psi_{T_{a,k}}(s) &= \mathbb{E}(s^{X_{a,k}+Y_{a,k}}) \\ &= \mathbb{E}(s^{X_{a,k}})\mathbb{E}(s^{Y_{a,k}}) \\ &= \psi_{X_{a,k}}(s) \times \psi_{Y_{a,k}}(s) \\ &= \frac{a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu}}{2(a - \log(s))}, \end{aligned}$$

para  $\log(s) \leq \min\{a, (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2\} = (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ . □

Decorrente deste último resultado, temos que  $1 - \rho = \psi_{T_{a,1}}(1) = \mu/a$ . Ademais, note que para  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ ,  $\log(s) + \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu} > 0$ , isto é,  $\psi_{T_{a,k}}(s) < 1$  para todo  $1 \leq k \leq N_a$ .

**Lema 3.2.4 (3).** Para  $a > \mu$ ,

$$\psi_{\tau_a}(s) = \frac{2(a - \mu)(a - \log(s))}{2a(a - \log(s)) - \mu \left( a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu} \right)},$$

para  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ .

*Demonastração.* Já vimos que  $\tau_a = \sum_{k=1}^{N_a} T_{a,k}$ . Ademais, considere  $T_a = T_{a,k}$  para algum  $1 \leq k \leq N_a$ . Agora, basta ver que

$$\exists \tau_a \in \inf \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \leq a + \mu - 2\sqrt{\mu}, e^{\log(x)} \in L^\infty\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(s^{\tau_a}) &= \mathbb{E}\left(s^{\sum_{k=1}^{N_a} T_{a,k}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(s^{\sum_{k=1}^n T_{a,k}}\right) \mathbb{P}(N_a = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{T_a}^n(s) (1-\rho)^n \rho \\ &= \frac{\rho}{1 - (1-\rho)\psi_{T_a}(s)} \\ &= \frac{a - \mu}{a - \mu\psi_{T_a}(s)}\end{aligned}$$

pois  $\rho = 1 - \mu/a$  e para que  $(1-\rho)\psi_{T_a}(s)$  seja menor que 1, é suficiente que  $a - \log(s) \geq \mu$ , isto é,  $\log(s) \leq a - \mu$ , o que já ocorre, uma vez que  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ . Daí, segue que

$$\psi_{T_a}(s) = \frac{2(a - \mu)(a - \log(s))}{2a(a - \log(s)) - \mu(a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu})},$$

para  $a > \mu$  e  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$ .  $\square$

**Lema 3.2.5 (3).** Para  $a > \mu$ ,

$$\psi_{S_a}(s) = \frac{2a(a - \mu)(1 - a)}{(1 - a - \log(s)) \left(2a(a - \log(s)) - \mu(a + \mu - \log(s) - \sqrt{(a + \mu - \log(s))^2 - 4a\mu})\right)},$$

para  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$  e  $\log(s) < 1 - a$ .

*Demonstração.* Basta relembrar que  $S_a = \tau_a + \phi_{a_1} + \phi_{a_2}$ , onde  $\phi_{a_1} \sim \text{Exp}(a)$  e  $\phi_{a_2} \sim \text{Exp}(1-a)$ . Da independência entre  $\tau_a$ ,  $\phi_{a_1}$  e  $\phi_{a_2}$ , segue que

$$\psi_{S_a}(s) = \psi_{\tau_a}(s) \times \psi_{\phi_{a_1}}(s) \times \psi_{\phi_{a_2}}(s),$$

que existe e é finita para  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$  se  $\min\{1 - a, (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2\} = (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$  ou para  $\log(s) < 1 - a$  se  $\min\{1 - a, (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2\} = 1 - a$ .  $\square$

A partir do Lema 3.2.5, temos condições de estabelecer o seguinte resultado.

**Lema 3.2.6.** Para  $a > \mu$ ,

$$\mathbb{P}(S_a > t) \leq \begin{cases} \frac{a(a-\mu)(1-a)e^{-(a+\mu-2\sqrt{\mu})t}}{(1-a-(a+\mu-2\sqrt{\mu})) \times (\sqrt{a\mu}(a-\mu) + a(\sqrt{a\mu}-\mu))} & \text{para } 0 < a < \frac{1+\sqrt{2\mu-\mu^2}}{2}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2a(a-\mu)(1-a)e^{-(1-a-\delta)t}}{2a\delta(2a+\delta-1)-\delta\mu(2a+\mu+\delta-1-\sqrt{(2a+\mu+\delta-1)^2-4a\mu})} & \text{para } \frac{1+\sqrt{2\mu-\mu^2}}{2} < a < 1. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da desigualdade de Markov, para  $s > 1$ , segue que

$$\mathbb{P}(S_a > t) = \mathbb{P}(s^{S_a} > s^t) \leq s^{-t} \psi_{S_a}(s)$$

Agora, basta tomar o maior valor de  $s$  - digamos  $s^*$  - tal que  $\psi_{S_a}(s)$  esteja bem definida. Do Lema anterior,  $\psi_{S_a}(s)$  é finita para  $\log(s) \leq (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$  se  $\min\{1 - a, (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2\} = (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2$

ou para  $\log(s) < 1-a$  se  $\min\{1-a, (|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2\} = 1-a$ . Note que  $(|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2 < a$  e  $a \leq 1-a$  para  $a \leq 0.5$ . Ademais

$$(|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2 \leq 1-a \Leftrightarrow \\ 2a - 2\sqrt{a}\sqrt{\mu} + \mu - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \sqrt{2\mu - \mu^2}}{2} \leq 0.5 \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2\mu + \mu^2}}{2}.$$

Assim, devemos ter

$$s^* = \begin{cases} e^{(|\sqrt{a}| - |\sqrt{\mu}|)^2} & \text{para } 0 < a < \frac{1 + \sqrt{2\mu + \mu^2}}{2}; \\ e^{1-a} & \text{para } \frac{1 + \sqrt{2\mu + \mu^2}}{2} < a < 1. \end{cases}$$

Ao substituir  $s$  por  $s^*$  em  $s^{-t}\psi_{S_a}(s)$ , obtemos o resultado. O limite em  $\delta$  surge do fato de  $\psi_{S_a}(s)$  não estar definida em  $1-a$ .  $\square$

Em função do resultado acima, não deve ser difícil notar que o valor de  $a$  que maximiza a probabilidade de  $S_a$  ser finita é aquele mais próximo do limiar

$$a^* = \frac{1 + \sqrt{2\mu + \mu^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{\mu} + \sqrt{2-\mu}}{2}\right)^2.$$

Daí,  $S = \lim_{a \rightarrow a^*} S_a$ . Uma vez que  $\mathbb{P}(\mathcal{T} > t) < \mathbb{P}(S > t)$ , decorre que

$$\limsup_{t \nearrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}(\mathcal{T} > t) \leq -\frac{1 - \sqrt{2\mu - \mu^2}}{2}.$$

Com isso, obtemos uma cota inferior - dada por  $(1-\mu)$  - e uma cota superior - dada por  $1/2 - \sqrt{2\mu - \mu^2}/2$  - para a taxa de decaimento da cauda da distribuição do tempo de surgimento da primeira espécie imortal a partir da condição inicial vazia.

$$S = \arg \max \{S_a\} \quad \text{Dai, segue que} \\ \arg \max \{a : \mathbb{P}(S_a) > t\}$$

$$\liminf_{t \nearrow \infty} p = \inf_{t \nearrow \infty} \max \{a_m\}$$

$$\mathbb{P}(S_a > t) \leq e^{-(1-a)} E(S_a)$$

$$\mathbb{P}(S_a > t) \leq$$

$$e^{-t} \leq E(S) \mathbb{U}_{\{a \in \mathbb{R}_1\}} + (1 - \mathbb{U}_{\{a \in \mathbb{R}_2\}})$$