

FACULTE DE FORESTERIE ET DE GEODESIE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
PRESENTÉ A LA
FACULTE DE FORESTERIE ET DE GEODESIE
DE L'UNIVERSITE LAVAL
COMME EXIGENCE PARTIELLE
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
BACHELIER ES SCIENCES APPLIQUEES
(arpentage)

PAR

André Verville

LES CALCULS GEODESIQUES
DIRECT ET INVERSE PAR LES METHODES
DE HRADILEK ET DE VINCENTY

AVRIL 1978

Résumé:

Le présent mémoire est une présentation de solutions aux problèmes géodésiques direct et inverse apportées par messieurs Hradilek et Vincenty dans des articles parus dans la revue Le Bulletin Géodésique (vol. 50, No 4 et vol. 51, No 3). Il se veut aussi un dossier pouvant servir de référence pour d'éventuels utilisateurs de ces excellentes méthodes. Des listes de formules ont été dressées, plusieurs exemples ont été traités et les résultats intermédiaires des calculs sont donnés au long. De plus, des programmes de calcul ont été élaborés sur un appareil de type mini-ordinateur (TI-58).

Table des matières:

1.0 - Introduction - page 6

2.0 - La méthode de Hradilek - page 9

 2.01 - Réduction pour la corde de la section normale - page 16

 2.1 - Calcul direct par la méthode de Hradilek: liste des
 formules par ordre chronologique - page 18

 2.2 - Calcul direct par la méthode de Hradilek: exemples -
 page 21

 2.3 - Calcul inverse par la méthode de Hradilek: liste des
 formules par ordre chronologique - page 25

 2.4 - Calcul inverse par la méthode de Hradilek: exemples -
 page 27

3.0 - La méthode de Vincenty - page 30

 3.1 - Calcul direct par la méthode de Vincenty: liste des
 formules par ordre chronologique - page 36

 3.2 - Calcul direct par la méthode de Vincenty: exemples -
 page 38

 3.3 - Calcul inverse par la méthode de Vincenty: liste des
 formules par ordre chronologique - page 43

 3.4 - Calcul inverse par la méthode de Vincenty: exemples -
 page 45

4.0 - Programmes de calcul ~ page 50

4.1 - Hradilek direct ~ page 51

4.2 - Hradilek inverse ~ page 59

4.3 - Vincenty direct ~ page 65

4.4 - Vincenty inverse ~ page 69

5.0 - Conclusion ~ page 73

Bibliographie:

- Notes de cours manuscrites et polycopiées: Géodésie I, professeur: Pierre Gagnon, septembre 1974, Université Laval, Québec.
- Notes de cours manuscrites et polycopiées: Géodésie II, professeur: Pierre Gagnon, janvier 1976, Université Laval, Québec.
- Notes de cours: Hydrographie, professeur: Patrick Kemp, septembre 1977, Université Laval, Québec.
- Calculs géodésiques en projection et sur l'ellipsoïde, Hervé Guichard, mai 1974, Gouvernement du Québec, ministère des Terres et Forêts, service de la géodésie.
- Table d'ellipsoïde (Clarke 1866), Hervé Guichard, mars 1974, Gouvernement du Québec, ministère des Terres et Forêts, service de la géodésie.
- Closed formulas for the direct and inverse geodetic problems, L. Hradilek, Bull. Geod. 50 (1976) pp. 301-306.
- Closed formulas for the direct and inverse geodetic problems, T. Vincenty, Bull. Geod. 51 (1977) pp. 241-242.
- Answers to the comments given by T. Vincenty, L. Hradilek, Bull. Geod. 51 (1977) p. 243.

Liste des symboles utilisés:

ϕ_i :	latitude géodésique du point i
λ_i :	longitude géodésique du point i
a_{ij} :	azimut géodésique mesuré au point i vers le point j
l_{ij} :	distance entre les points i et j suivant la section normale
d_{ij} :	distance entre les points i et j suivant la corde de la section normale
M_i :	rayon de courbure du méridien au point i
N_i :	rayon de courbure du 1er vertical au point i
\bar{R} :	rayon de courbure moyen
e :	1ere excentricité de l'ellipsoïde de référence
e' :	2ième excentricité de l'ellipsoïde de référence
\vec{l}_i :	rayon-vecteur du centre de l'ellipsoïde au point i
μ :	angle de dépression
w_0 :	angle mesuré au centre de l'ellipsoïde entre deux rayons-vecteurs menant aux points i et j
ϕ_j :	latitude géocentrique du point i
ω_1 :	angle mesuré en un point à la surface de l'ellipsoïde entre le rayon-vecteur menant du centre de l'ellipsoïde vers ce point et une ligne menant de ce point vers un second point à la surface de l'ellipsoïde.
$\Delta\lambda$:	différence de longitude entre deux points
a :	demi-grand axe de l'ellipsoïde
X, Y, Z:	coordonnées cartésiennes tridimensionnelles

Liste des figures:

- 2.1- Détermination de l'angle ω - page 10
 2.2- Solution du triangle OP_1P_2 - page 12
 2.3- Système d'axes conventionnel au point P_1 - page 13
 3.1- Représentation de la méthode de Vincenty - page 31

1.0 - Introduction

Dans les réseaux de contrôle géodésiques, l'utilisation de l'ellipsoïde de révolution comme surface mathématique de référence n'est pas sans problèmes. La plupart des transformations mathématiques nécessaires pour lier les points de contrôle géodésiques entre eux se font par des formules dans lesquelles les développements en séries, les itérations et les termes correctifs sont chose courante. Il s'en suit que la précision des calculs effectués est fonction soit du nombre d'éléments conservés dans une série, soit du nombre d'itérations complétées ou de la qualité et/ou de la quantité des corrections apportées à certains paramètres.

Ces types de solutions aux problèmes géodésiques sont aujourd'hui bien connus et l'utilisation des ordinateurs a rendu possibles ces calculs géodésiques avec une précision suffisante et contrôlée.

Un problème retient cependant l'attention de plusieurs géodésiens: c'est le manque d'élégance des solutions apportées jusqu'ici aux problèmes géodésiques et l'obligation de s'en rapporter à de savants programmes d'informatique et ce, même pour le calcul des coordonnées d'un seul point.

Depuis quelques années, plusieurs géodésiens se sont penchés sur ce problème: simplifier les calculs géodésiques pour les rendre accessibles à tous. En 1974, Monsieur Hervé Guichard, en stage au service de la géodésie du ministère des Terres et Forêts du Québec, publia un rapport

de recherches intitulé "Calculs géodésiques en projection et sur l'ellipsoïde". Dans cette publication, il indique la méthode pour effectuer les calculs géodésiques direct et inverse à l'aide d'une calculatrice de poche de modèle HP-45. L'utilisation d'une table pour le calcul de la longueur d'un arc de méridien pour une latitude donnée est nécessaire et on doit calculer un terme correctif d'appoint pour des lignes plus longues que 25km.

Dans un article publié dans le Bulletin Géodésique en 1976 (1), Monsieur L. Hradilek nous donne les formules nécessaires aux calculs géodésiques direct et inverse et ce, de façon finie et exacte. Le résumé donné au début de l'article présente cette méthode comme une révolution dans le domaine de la géodésie.

Dans un autre article du Bulletin Géodésique (2), Monsieur T. Vincenty, indiquant certaines instabilités à la méthode de Monsieur Hradilek, propose une méthode simplifiée utilisant les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles. En réponse à cet article, dans le même numéro du Bulletin Géodésique (3), Monsieur Hradilek donne quelques caractéristiques concernant la précision de sa méthode, indique le moyen de contourner les "instabilités" indiquées par Monsieur Vincenty et termine en faisant la remarque que sa méthode en est une directe et qu'il avait mis de côté les transformations de coordonnées dans ses développements.

(1) Bulletin Géodésique 50 (1976) pp. 301-306

(2) Bulletin Géodésique 51 (1977) pp. 241-242

(3) Bulletin Géodésique 51 (1977) p. 243

Le présent mémoire a pour but la présentation des deux solutions proposées, la programmation des calculs, ainsi qu'une analyse des résultats de ces calculs. Cette analyse s'effectuera selon certains critères: la simplicité opératoire des calculs, l'aspect "universel" des formules et l'homogénéité des résultats.

2.0 - La méthode de Hradilek

Cette méthode permet de calculer d'une façon directe les paramètres inconnus reliés aux problèmes géodésiques direct et inverse. La distance reliant deux repères géodésiques à la surface d'un ellipsoïde de référence est exprimée par la longueur de la corde de la section normale.

Dans la première partie de l'article, l'auteur fait état des relations mathématiques nécessaires aux calculs direct et inverse.

1) Les lois élémentaires de la trigonométrie plane

2) Les relations fondamentales de la géométrie de l'ellipsoïde:
la première et la seconde excentricité (e et e'), les rayons de courbure dans le plan du méridien (M) et dans le plan du premier vertical (N),
la relation entre la latitude géodésique (ϕ) et la latitude géocentrique (ϕ'), l'expression de la distance (l_i) à partir du centre de l'ellipsoïde jusqu'à un point P_i à sa surface ainsi que celle de l'azimut (a_{ij}) de la section normale $P_i P_j$.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (2.1)$$

$$M = \frac{a (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (2.2)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3)$$

$$\tan \phi' = (1-e^2) \tan \phi \quad (2.4)$$

$$\ell_i^2 = \frac{a^2}{1 + (e')^2 \sin^2 \phi'_i} \quad (2.5)$$

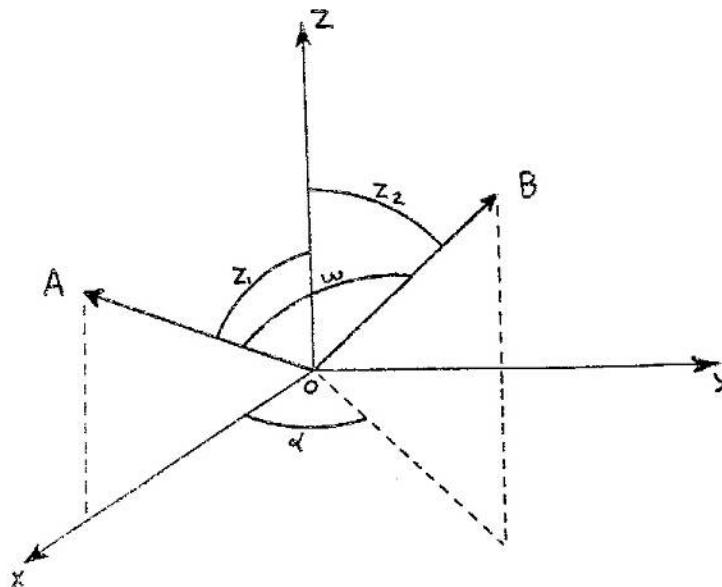
$$\cotan a_{ij} = \frac{\sin \phi_j \cos \phi_i - \cos \phi_j \sin \phi_i \cos \Delta\lambda_{ij}}{\cos \phi_j \sin \Delta\lambda_{ij}} \quad (2.6)$$

$$+ e^2 \left[\left(N_i / N_j \right) \sin \phi_i - \sin \phi_j \right] \cos \phi_i$$

3) L'expression de l'angle ω compris entre deux vecteurs unitaires centrés à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes tridimensionnelles et dont l'un des vecteurs est compris dans le plan XOZ (fig. 2.1).

Figure 2.1:

Détermination
de l'angle ω



$$\cos \omega = \cos \alpha \sin Z_1 \sin Z_2 + \cos Z_1 \cos Z_2 \quad (2.7)$$

4) La solution pour l'angle de dépression μ , angle compris entre la tangente à la section normale au point P_i et la corde de cette même section normale entre les points P_i et P_j (figure 2.3).

$$H \sin^2 \mu - F \sin 2\mu - K \sin \mu + 1 = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{où } H = \frac{c^2 - g^2}{1 + g^2} \quad (2.9)$$

$$F = \frac{c \cdot g}{1 + g^2} \quad (2.10)$$

$$K = \frac{2 N}{d_{ij} (1 + g^2)} \quad (2.11)$$

$$\text{où } c = e^i \sin \phi_i \quad (2.12)$$

$$g = e^i \cos \phi_i \cos a_{ij} \quad (2.13)$$

L'équation 2.8 est solutionnée pour μ par la méthode de Newton. La valeur d_{ij} dans l'équation 2.11 représente la corde de la section normale $P_i P_j$.

Une seconde partie nous indique comment procéder pour effectuer le calcul direct à l'aide des relations mentionnées dans la première partie (équations 2.1 à 2.13).

1) Calcul de l'angle de dépression μ au point P_1 par la solution de l'équation 2.8. Les données nécessaires à ce calcul sont ϕ_1 , la latitude géodésique du point P_1 , λ_1 , la longitude géodésique du Point P_1 , a_{12} , l'azimut géodésique de la ligne P_1P_2 et d_{12} , la longueur de la corde de la section normale P_1P_2 .

2) Calcul de la distance l_1 à partir de l'équation 2.5 et calcul de l'angle μ , (figure 2.3) à partir de l'équation 2.7 appliquée à un système de coordonnées ayant son origine au point P_1 . La connaissance de cet angle μ , permettra de résoudre le triangle OP_1P_2 (figure 2.2).

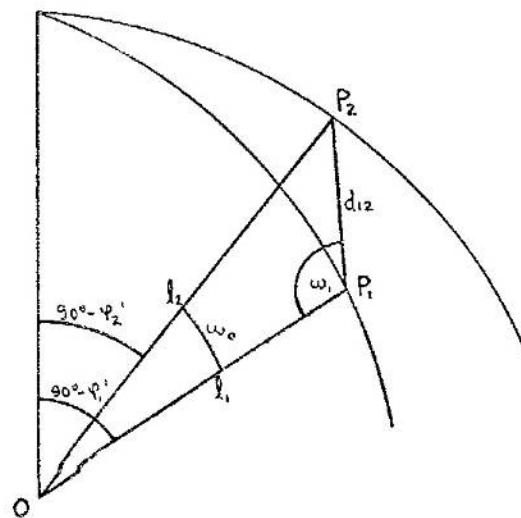
Par la loi des cosinus:

$$l_2 = (\ell_1^2 + d_{12}^2 - 2 \ell_1 d_{12} \cos \omega_1)^{1/2} \quad (2.14)$$

Par la loi des sinus:

$$\frac{\sin \omega_0}{l_2} = \frac{d_{12} \sin \omega_1}{\ell_1} \quad (2.15)$$

Figure 2.2:
Solution du
triangle OP_1P_2



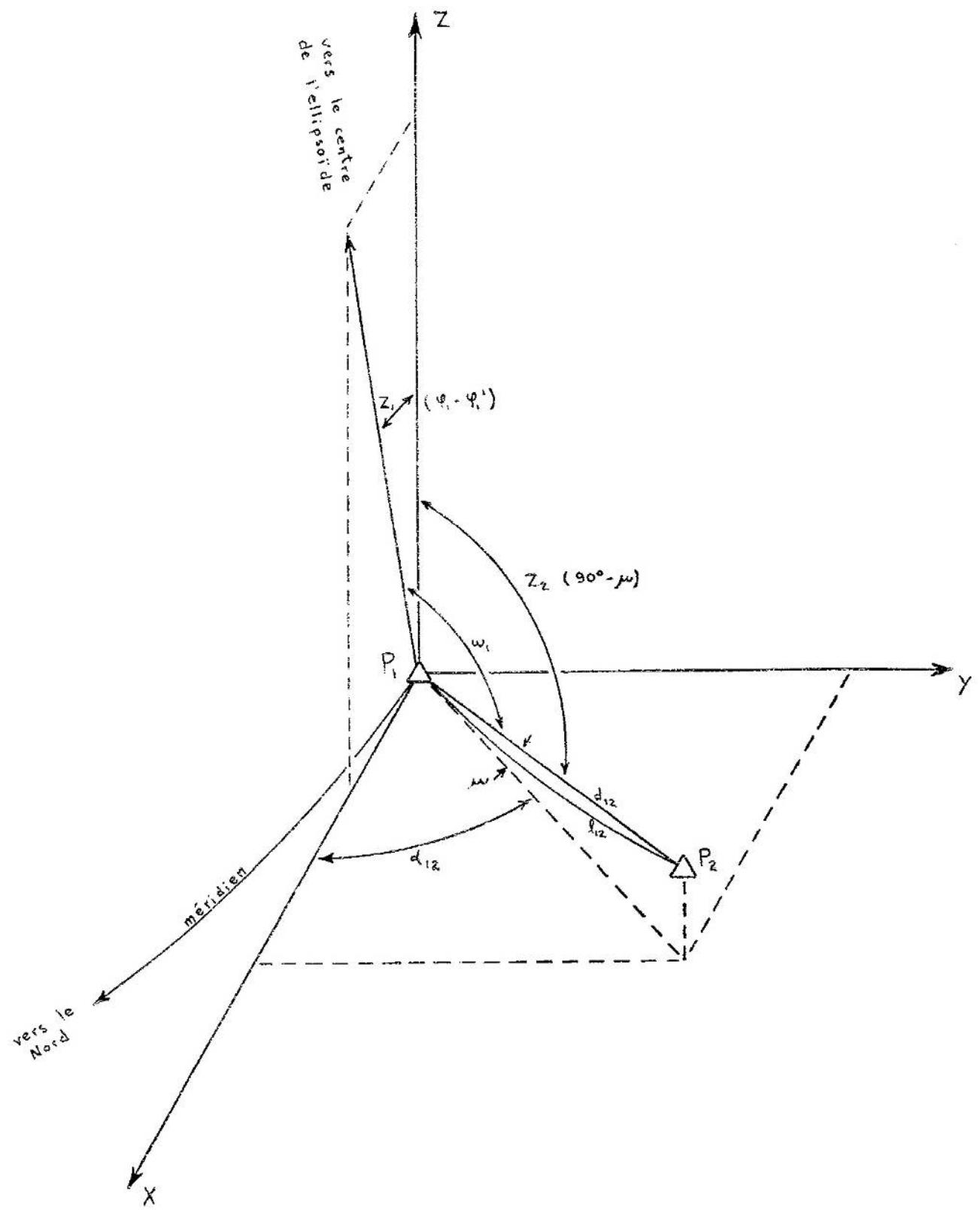


Figure 2.3: Système d'axes conventionnel au point P_1 .

La connaissance de la valeur de λ_2 nous permet, par le biais de l'équation 2.5, de calculer ϕ_2' , puis, par l'équation 2.4, ϕ_2 qui est la latitude cherchée du point P_2 . La différence de longitude $\Delta\lambda_{12}$ peut être calculée par l'équation 2.7 dans laquelle on aura isolé l'angle α :

$$\cos \Delta\lambda_{12} = \frac{\cos \omega_0 - \sin \phi_1' \sin \phi_2'}{\cos \phi_1' \cos \phi_2'} \quad (2.16)$$

- 3) Calcul de l'azimut inverse a_{21} par l'équation 2.6 dans laquelle $i = 2$ et $j = 1$.
-

La troisième partie de l'article nous indique, encore à l'aide des relations mentionnées dans la première partie, comment procéder pour effectuer le calcul inverse, c'est-à-dire le calcul des éléments a_{12} , a_{21} , et d_{12} à partir des coordonnées géodésiques connues des points P_1 et P_2 .

On calcule les valeurs λ_1 et λ_2 (figure 2.2) à l'aide de l'équation 2.5, puis l'angle ω_0 à l'aide de l'équation 2.7 appliquée à la situation:

$$\cos \omega_0 = \cos \Delta\lambda_{12} \cos \phi_1' \cos \phi_2' + \sin \phi_1' \sin \phi_2' \quad (2.17)$$

On peut ensuite obtenir la valeur d_{12} en appliquant de nouveau la loi des cosinus au triangle OP_1P_2 (figure 2.2).

$$d_{12} = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 \cos \omega_0)^{1/2} \quad (2.18)$$

Les solutions apportées par Monsieur Hradilek sont théoriquement exactes. En pratique cependant, on est susceptible de rencontrer certaines difficultés de calcul. L'équation 2.5 est idéale pour le calcul de λ_i^2 à partir de ϕ_i' ; le contraire n'est cependant pas aussi désirable: lors du calcul de ϕ_i' à partir d'une certaine valeur λ_i , le faible taux de variation de λ_i par rapport à ϕ_i' rend difficile une détermination précise de cette dernière valeur. De même dans l'équation 2.17, l'utilisation du cosinus pour un angle ω_0 petit rend cette dernière valeur imprécise. L'effet se répercute sur l'équation suivante (2.18), l'imprécision relative à la faible variation de la valeur $\cos \omega_0$ se transmettra à la valeur λ_{12} .

C'est pour cette raison que Monsieur Hradilek présente sa méthode comme valable pour des distances plus longues que 40 km. Cette méthode ne serait donc pas conseillée pour solutionner des problèmes où des courtes distances seraient rencontrées.

2.01 - Réduction pour la corde de la section normale

La longueur de la corde de la section normale est l'expression de la distance entre deux points P_1 et P_2 dans la méthode de Hradilek. Nous devons être en mesure de calculer la correction de l'arc à la corde pour traiter les problèmes courants en géodésie. Pour un cercle, cette correction est définie de façon suffisamment précise par:

$$\text{correction} = \frac{\text{arc}^3}{24 R^2} \quad (2.19)$$

On obtient donc, pour un arc de cercle:

$$d_{ij} = \ell_{ij} - \frac{\ell_{ij}^3}{24 R^2} \quad (2.20)$$

où d_{ij} = distance suivant la corde entre deux points i et j

ℓ_{ij} = distance suivant l'arc entre deux points i et j

R = rayon du cercle

Lorsque les points i et j se situent à la surface d'un ellipsoïde, la longueur du rayon de courbure R varie tout au long de la section normale du point i au point j . Il est suffisant dans la plupart des applications courantes en géodésie d'utiliser pour R la valeur moyenne des rayons de courbure aux points i et j dans la direction de la section normale en chaque point. Pour un seul point à la surface d'un ellipsoïde, on a:

- M: le rayon de courbure du méridien
- N: le rayon de courbure du premier vertical.

Le rayon de courbure dans une direction donnée s'exprime de la façon suivante:

$$R = \frac{M N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} \quad (2.21)$$

où α = azimut de la direction

On aura l'expression suivante pour le rayon moyen de l'arc i j:

$$\bar{R} = \frac{\bar{M} \bar{N}}{\bar{M} \sin^2 \bar{\alpha} + \bar{N} \cos^2 \bar{\alpha}} \quad (2.22)$$

où $\bar{M} = \frac{M_i + M_j}{2}$ (2.23)

$$\bar{N} = \frac{N_i + N_j}{2} \quad (2.24)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \quad (2.25)$$

Pour effectuer la transformation de la corde à l'arc, c'est-à-dire la transformation inverse, dans la majorité des cas, la relation suivante sera suffisante:

$$l_{ij} = d_{ij} + \frac{d_{ij}^3}{24 \bar{R}^2} \quad (2.26)$$

Pour affiner le calcul, on peut utiliser la valeur de l'arc calculé l_{ij} afin de calculer la correction d'une manière plus exacte:

$$l_{ij} = d_{ij} + \frac{l_{ij}^3}{24 \bar{R}^2} \quad (2.27)$$

2.1 - Calcul direct par la méthode de Hradilek: liste des formules
par ordre chronologique

données: ϕ_1 a
 λ_1 e^2
 a_{12} e'^2
 ℓ_{12}

1) $\phi_1' = \arctan [(1-e^2) \tan \phi_1]$

2) $\lambda_1^2 = \frac{a^2}{1 + e'^2 \sin^2 \phi_1'}$

3) $N_1 = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \phi_1)^{1/2}}$

4) $M_1 = \frac{a (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}}$

5) $R = \frac{M_1 N_1}{M_1 \sin^2 a_{12} + N_1 \cos^2 a_{12}}$

6) $d_{12} = \ell_{12} - \frac{\ell_{12}^3}{24 R^2}$

7) $C = e' \sin \phi_1$

8) $G = e' \cos \phi_1 \cos a_{12}$

$$9) H = \frac{C^2 - G^2}{1 + G^2}$$

$$10) F = \frac{C G}{1 - G^2}$$

$$11) K = \frac{2 N_1}{d_{12} (1 + G^2)}$$

12) Solution pour μ de:

$$H \sin^2 \mu - F \sin 2\mu - K \sin \mu + 1 = 0$$

$$13) \cos \omega_1 = \cos a_{12} \sin (\phi_1 - \phi_1') \cos \mu + \cos (\phi_1 - \phi_1') \sin \mu$$

$$14) \ell_2^2 = \ell_1^2 + d_{12}^2 - 2 \ell_1 d_{12} \cos \omega_1$$

$$15) \phi_2' = \arcsin \left[\frac{(a^2 - \ell_2^2)^{1/2}}{\ell_2 e'} \right]$$

$$16) \phi_2 = \arctan \left[\frac{\tan \phi_2'}{1 - e^2} \right]$$

$$17) N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{1/2}}$$

$$18) \omega_0 = \arcsin \left[\frac{d_{12} \sin \omega_1}{\ell_2} \right]$$

$$19) \Delta \lambda = \arccos \left[\frac{\cos \omega_0 - \sin \phi_1' \sin \phi_2'}{\cos \phi_1' \cos \phi_2'} \right]$$

$$20) \lambda_2 = \lambda_1 - \Delta \lambda$$

$$21) \quad a_{21} = \arccot \left[\frac{\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Delta\lambda}{\cos \phi_1 \sin (-\Delta\lambda)} + e^2 \left[\frac{N_2/N_1}{N_1} \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \right] \cos \phi_2 \right]$$

2.2 - Calcul direct par la méthode de Hradilek: exemples

1er exemple:

Le premier exemple en est un pour une distance moyenne (33 km).

Voici les coordonnées de deux points géodésiques dans la région de Montréal telles que publiées par les Levés Géodésiques du Canada et par le service de la géodésie du ministère des Terres et Forêts du Québec:

point #1: Royal $\phi = 45^\circ 30' 31,23200''$
 $\lambda = 73^\circ 35' 24,85900''$

point #2: St-Hilaire $\phi = 45^\circ 33' 00,93000''$
 $\lambda = 73^\circ 10' 22,18590''$

azimut 1-2 = $81^\circ 47' 03,12505''$

azimut 2-1 = $262^\circ 04' 55,45101''$

distance = 32 933,6898 m

$\varphi_1 = 45,508\ 675\ 555\ 55 \quad (45^\circ 30' 31,23200'')$

$\lambda_1 = -73,590\ 238\ 611\ 11 \quad (73^\circ 35' 24,85900'')$

$a_{12} = 81,784\ 201\ 402\ 78 \quad (81^\circ 47' 03,12505'')$

$\ell_{12} = 32\ 933,689\ 8$

$a = 6\ 378\ 206,4$

$e^2 = 0,006\ 768\ 657\ 997\ 291$

$e'^2 = 0,006\ 814\ 784\ 945\ 915$

$\varphi_1' = 45,314\ 128\ 999\ 45$

$\lambda_1^2 = 4,054\ 186\ 013\ 14 \times 10^{13}$

N₁ = 6 389 219,464 167
 M₁ = 6 367 906,758 044
 R = 6 388 782,811 908
 d₁₂ = 32 933,653 335 22
 C = 0,058 888 805 266 62
 G = 0,008 267 206 615 550
 H = 0,003 399 312 348 705
 F = 0,000 486 879 197 070 4
 K = 387,978 991 998 4
 μ = 0,147 677 326 854 0
 cos ω₁ = 0,003 062 655 397 444
 ω₁ = 89,824 522 497 13
 ℓ₂² = 4,054 166 029 901 × 10¹³
 φ₂ = 45,355 716 036 11
 φ₂ = 45,550 258 331 11 (45° 33' 00,929992")
 N₂ = 6 389 235,208 963
 ω₀ = 0,296 354 602 667 7
 Δλ = 0,417 409 203 029 4
 λ₂ = -73,172 829 408 09 (73° 10' 22,185869")
 a₂₁ = 82,082 070 375 42 (262° 04' 55,45335")

2ième exemple:

Ce deuxième exemple est pour une distance plus longue (108 km). Les coordonnées des deux points géodésiques suivants ne sont pas officielles et sont le résultat d'une compensation spéciale effectuée par le service de la géodésie du ministère des Terres et Forêts à l'aide du programme TOGAS.

point #1: Bélair $\phi = 46^\circ 49' 18,73588''$
 $\lambda = 71^\circ 29' 32,76906''$

point #2: Fournier $\phi = 47^\circ 07' 25,60870''$
 $\lambda = 70^\circ 08' 47,45004''$

azimut 1-2 = $71^\circ 21' 53,51588''$

azimut 2-1 = $252^\circ 20' 55,67834''$

distance = 107 777,9058 m

$\phi_1 = 46,821\ 871\ 077\ 77$ ($46^\circ 49' 18,73588''$)

$\lambda_1 = -71,492\ 435\ 850\ 00$ ($71^\circ 29' 32,76906''$)

$a_{12} = 71,364\ 865\ 522\ 22$ ($71^\circ 21' 53,51588''$)

$\ell_{12} = 107\ 777,905\ 8$

$a = 6\ 378\ 206,4$

$e^2 = 0,006\ 768\ 657\ 997\ 291$

$e'^2 = 0,006\ 814\ 784\ 945\ 915$

$\phi_1' = 46,627\ 656\ 978\ 70$

$\lambda_1^2 = 4,053\ 555\ 311\ 461$

$N_1 = 6\ 389\ 716,375\ 479$

$M_1 = 6\ 369\ 392,634\ 850$

$R = 6\ 387\ 635,254\ 283$

d_{12} = 107 776,627 308 8
 c = 0,060 199 174 216 03
 g = 0,018 050 059 172 25
 M = 0,003 297 061 742 169
 F = 0,001 086 952 790 974
 K = 118,534 703 001 8
 μ = 0,483 364 115 296 3
 $\cos \omega_1$ = 0,009 519 244 513 5
 ω_1 = 89,454 579 227 54
 λ_2^2 = 4,053 410 494 768 $\times 10^{13}$
 ϕ_2' = 46,929 700 249 84
 ϕ_2 = 47,123 780 158 44 $(47^\circ 07' 25,608570'')$
 N_2 = 6 389 830,466 837
 ω_0 = 0,969 924 640 329 7
 $\Delta\lambda$ = 1,345 921 972 093
 λ_2 = -70,146 513 877 91 $(70^\circ 08' 47,449960'')$
 a_{21} = 72,348 801 829 07 $(252^\circ 20' 55,68658'')$

2.3 - Calcul inverse par la méthode de Hradilek: liste des
formules par ordre chronologique

données: ϕ_1 a
 λ_1 e^2
 ϕ_2 e^{t^2}
 λ_2

$$1) \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$2) \phi_1' = \arctan \left[(1 - e^2) \tan \phi_1 \right]$$

$$3) \phi_2' = \arctan \left[(1 - e^2) \tan \phi_2 \right]$$

$$4) N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{1/2}}$$

$$5) N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{1/2}}$$

$$6) M_1 = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}}$$

$$7) M_2 = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{3/2}}$$

$$8) \lambda_1^2 = \frac{a^2}{1 + e^{t^2} \sin^2 \phi_1'}$$

$$9) \ell_2^2 = \frac{a^2}{1 + e'^2 \sin^2 \phi_2'}$$

$$10) d_{12} = \left[\ell_1^2 + \ell_2^2 - 2 \ell_1 \ell_2 (\cos \phi_1' \cos \phi_2' \cos \Delta\lambda + \sin \phi_1' \sin \phi_2') \right]^{1/2}$$

$$11) a_{12} = \text{arcot} \begin{Bmatrix} \sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 \cos \Delta\lambda \\ \sin \phi_2 \cos \phi_1 \left(N_1/N_2 \right) \sin \phi_1 - \sin \phi_2 \\ \cos \phi_2 \sin \Delta\lambda \end{Bmatrix}_{(\pm 180^\circ)}$$

$$12) a_{21} = \text{arcot} \begin{Bmatrix} \sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Delta\lambda \\ \sin \phi_1 \cos \phi_2 \left(N_2/N_1 \right) \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \\ \cos \phi_1 \sin (-\Delta\lambda) \end{Bmatrix}_{(\pm 180^\circ)}$$

$$13) \bar{a}_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}$$

$$14) \bar{R} = \frac{(M_1 M_2) (N_1 N_2)}{2 \left[(M_1 M_2) \sin^2 a_{12} + (N_1 N_2) \sin^2 a_{12} \right]}$$

$$15) \ell_{12} = d_{12} + \frac{d_{12}^3}{24 \bar{R}^2}$$

2.4 - Calcul inverse par la méthode de Hradilek: exemples

1er exemple:

Le premier exemple est le problème inverse correspondant au premier exemple de la section 2.2. Voici les coordonnées de deux points géodésiques dans la région de Montréal telles que publiées par les Levés Géodésiques du Canada et par le service de la géodésie du ministère des Terres et Forêts du Québec:

point #1: Royal $\phi = 45^\circ 30' 31,23200''$

$\lambda = 73^\circ 35' 24,85900''$

point #2: St-Hilaire $\phi = 45^\circ 33' 00,93000''$

$\lambda = 73^\circ 10' 22,18590''$

azimut 1-2 = $81^\circ 47' 03,12505''$

azimut 2-1 = $262^\circ 04' 55,45101''$

distance = 32 933,6898 m

ϕ_1 = 45,508 675 555 55 ($45^\circ 30' 31,23200''$)

λ_1 = -73,590 238 611 11 ($73^\circ 35' 24,85900''$)

ϕ_2 = 45,550 258 333 33 ($45^\circ 33' 00,93000''$)

λ_2 = -73,172 829 416 66 ($73^\circ 10' 22,18590''$)

a = 6 378 206,4

e^2 = 0,006 768 657 997 291

e'^2 = 0,006 814 784 945 915

$\Delta\lambda$ = 0,417 409 194 45
 ϕ_1' = 45,314 128 999 45
 ϕ_2' = 45,355 716 037 95
 N_1 = 6 389 219,464 163
 N_2 = 6 389 235,208 963
 M_1 = 6 367 906,758 040
 M_2 = 6 367 953,834 999
 ℓ_1^2 = 4,054 186 013 138 $\times 10^{13}$
 ℓ_2^2 = 4,054 166 029 900 $\times 10^{13}$
 d_{12} = 32 933,654 671 17
 a_{12} = 81,784 201 407 15 (81° 47' 03,12507")
 a_{21} = 82,082 069 790 89 (262° 04' 55,45125")
 a_{12} = 81,933 135 599 00
 R = 6 388 806,577 569
 ℓ_{12} = 32 933,691 14

2ième exemple:

Dans ce deuxième exemple, la distance est plus longue (108 km). Il s'agit du problème inverse correspondant au 2ième exemple de la section 2.2.

point #1: Bélair ϕ = 46° 49' 18,73588"
 λ = 71° 29' 32,76906"

point #2: Fournier ϕ = 47° 07' 25,60870"
 λ = 70° 08' 47,45004"

azimut	1-2	=	71° 21' 53,51588"
azimut	2-1	=	252° 20' 55,67834"
distance		=	107 777,9058 m

N.B. Coordonnées non officielles

ϕ_1	=	46,821 871 077 77	(46° 49' 18,73588")
λ_1	=	-71,492 435 850 00	(71° 29' 32,76906")
ϕ_2	=	47,123 780 194 44	(47° 07' 25,60870")
λ_2	=	-70,146 513 900 00	
a	=	6 378 206,4	
e^2	=	0,006 768 657 997 291	
e'^2	=	0,006 814 784 945 915	
$\Delta\lambda$	=	1,345 921 950 000	
ϕ_1'	=	46,627 656 978 70	
ϕ_2'	=	46,929 700 285 42	
N_1	=	6 389 716,375 479	
N_2	=	6 389 830,466 850	
M_1	=	6 369 392,634 764	
M_2	=	6 369 733,826 340	
ℓ_1^2	=	4,053 555 311 460 $\times 10^{13}$	
ℓ_2^2	=	4,053 410 494 754 $\times 10^{13}$	
d_{12}	=	107 776,626 733 2	
a_{12}	=	71,364 865 499 21	(71° 21' 53,51580")
a_{21}	=	72,348 799 514 95	(252° 20' 55,67825")
a_{12}	=	71,856 832 507 05	
R	=	6 378 808,121 197	
λ_{12}	=	107 777,905 109 7	

3.0 - La méthode de Vincenty

Une utilisation judicieuse du système de coordonnées cartésiennes tridimensionnelles permet à Monsieur Vincenty de nous présenter une solution très avantageuse. Le système de coordonnées utilisé a son origine au centre de l'ellipsoïde, mais il a la caractéristique que le plan XOZ coincide avec le plan du méridien du point P_1 (figure 3.1). On obtient donc d'une manière très simple les coordonnées X, Y et Z du point P_1 .

$$X_1 = N_1 \cos \phi_1 \quad (3.1)$$

$$Y_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$Z_1 = N_1 (1 - e^2) \sin \phi_1 \quad (3.3)$$

A partir de ces valeurs connues, les coordonnées du Point P_2 dans le même système de référence sont obtenues par les formules exactes suivantes:

$$X_2 = X_1 - d_{12} (\cos \phi_1 \sin \mu + \sin \phi_1 \cos a_{12} \cos \mu) \quad (3.4)$$

$$Y_2 = d_{12} \sin a_{12} \cos \mu \quad (3.5)$$

$$Z_2 = Z_1 + d_{12} (\cos \phi_1 \cos a_{12} \cos \mu - \sin \phi_1 \sin \mu) \quad (3.6)$$

où d_{12} = corde de la section normale du point P_1 au Point P_2

a_{12} = azimut géodésique du Point P_2 mesuré au Point P_1

μ = angle de dépression

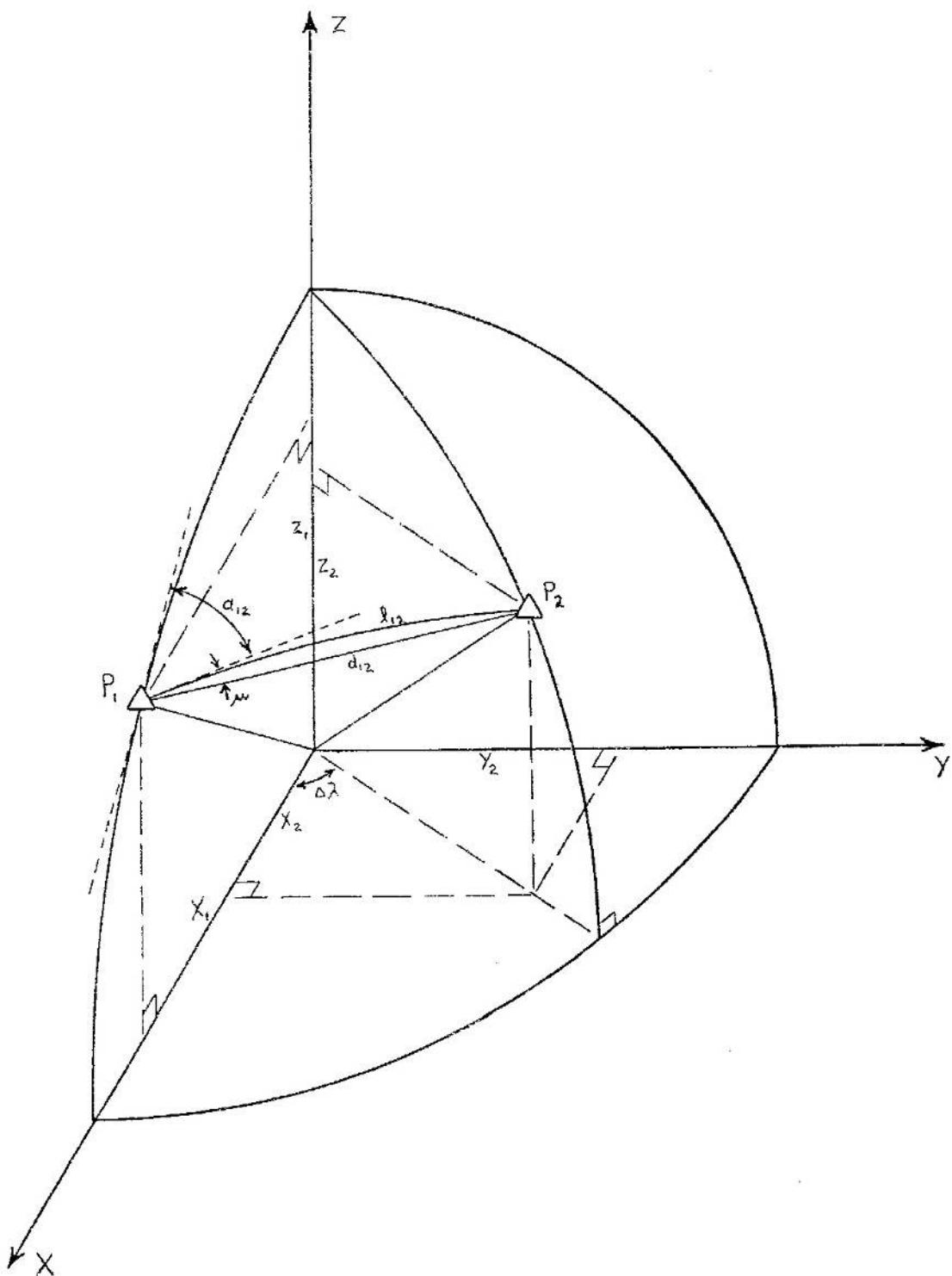


Figure 3.1 -: Représentation de la méthode de Vincenty

Tous les éléments nécessaires à cette transformation sont connus par les données du problème direct, sauf un seul paramètre: l'angle de dépression μ . Nous devrons avoir recours à un procédé itératif pour établir sa valeur avec précision. On obtient une valeur approximative pour μ par la relation suivante:

$$\mu = \arcsin \left[\frac{d_{12}}{2R} \right] \quad (3.7)$$

Les valeurs X_2 , Y_2 et Z_2 , qui sont le résultat du calcul des équations 3.4, 3.5 et 3.6 doivent être les coordonnées d'un point à la surface de l'ellipsoïde. L'imprécision relative à la valeur de l'angle μ écartera la position calculée du point P_2 de cette même surface d'une altitude h (positive ou négative) qui servira à calculer un terme correctif pour μ . L'équation de l'ellipsoïde de révolution est la suivante:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.8)$$

On obtient la différence h (approximativement égale à une altitude) par la relation suivante, déduite de la précédente:

$$\left[X_2^2 + Y_2^2 + \frac{Z_2^2}{1 - e^2} \right]^{1/2} - a = h \quad (3.9)$$

On calcule ensuite la correction à apporter à l'angle μ par la relation suivante:

$$\delta\mu = \frac{h}{d_{12} \cos \mu} \quad (3.10)$$

A l'aide de la valeur μ corrigée, on calcule à nouveau les valeurs X_2 , Y_2 et Z_2 , puis h . A la suite de ce second calcul, on pourra noter une nette amélioration de la valeur de h qui s'approche de 0. Lorsqu'on utilise la valeur R du rayon de courbure au Point P_1 , dans la direction $P_1 - P_2$ pour la détermination de l'angle μ approximatif, il suffit en général de refaire le calcul de X_2 , Y_2 et Z_2 une seconde fois. De plus, à l'aide de ce procédé itératif, on peut contrôler les résultats et visualiser l'amélioration de la précision, puisque la valeur de h sera égale à la précision en position que l'on désirera obtenir. La configuration spéciale du système de coordonnées nous permet de calculer directement les valeurs ϕ_2 et $\Delta\lambda$ cherchées dans le problème direct.

On a, pour le point P_2 :

$$X_2 = N_2 \cos \phi_2 \cos \Delta\lambda \quad (3.11)$$

$$Y_2 = N_2 \cos \phi_2 \sin \Delta\lambda \quad (3.12)$$

$$Z_2 = N_2 (1 - e^2) \sin \phi_2 \quad (3.13)$$

On trouve $\Delta\lambda$ en divisant l'équation 3.12 par l'équation 3.11.

$$\frac{Y_2}{X_2} = \frac{N_2 \cos \phi_2 \sin \Delta\lambda}{N_2 \cos \phi_2 \cos \Delta\lambda}$$

$$\Delta\lambda = \arctan \left[\frac{Y_2}{X_2} \right] \quad (3.14)$$

On a, par l'équation 3.13:

$$\sin \phi_2 = \frac{Z_2}{N_2 (1 - e^2)} \quad (3.15)$$

Puis, par l'équation 3.12:

$$\cos \phi_2 = \frac{Y_2}{N_2 \sin \Delta\lambda} \quad (3.16)$$

Par la figure 3.1, on peut retracer les éléments suivants:

$$\sin \Delta\lambda = \frac{Y_2}{(X_2^2 + Y_2^2)^{1/2}} \quad (3.17)$$

Remplaçons la valeur de $\sin \Delta\lambda$ dans l'équation 3.16:

$$\cos \phi_2 = \left[\frac{(X_2^2 + Y_2^2)^{1/2}}{N_2} \right] \quad (3.18)$$

Par les équations 3.15 et 3.18, on peut isoler la valeur de ϕ_2 .

$$\phi_2 = \arctan \left[\frac{Z_2}{(1 - e^2)(X_2^2 + Y_2^2)^{1/2}} \right]$$

Le choix particulier du plan XOZ en coïncidence avec le plan du méridien du point P_1 a permis d'établir les relations directes et exactes liant les coordonnées géodésiques du point P_2 à ses coordonnées rectangulaires.

On peut également calculer l'azimut de retour a_{21} par la formule exacte suivante:

$$a_{21} = \arctan \left[\frac{X_1 \sin \Delta\lambda}{(Z_2 - Z_1) \cos \phi_2 - (N_2 \cos \phi_2 - X_1 \cos \Delta\lambda) \sin \phi_2} \right] \quad (3.20)$$

En ce qui concerne la solution au problème inverse, la dernière relation nous permet, utilisée dans les deux directions, de calculer les azimuts direct et de retour entre deux points de coordonnées géodésiques connues. Le calcul de la distance se fait par la formule de Pythagore.

$$d_{12} = \left[(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

La méthode de Vincenty est simple et les résultats, on le verra plus loin, sont suffisamment précis pour que la puissance de calcul de l'ordinateur ne soit plus nécessaire. Il est même possible d'utiliser une calculatrice de poche non-programmable. Il y a d'ailleurs un exemple à cet effet dans la section 3.2 (1er exemple) et dans la section 3.4 (1er exemple).

3.1 - Calcul direct par la méthode de Vincenty: liste des formules
par ordre chronologique.

données: ϕ_1 a
 λ_1 e^2
 a_{12}
 λ_{12}

$$1) \quad N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{1/2}}$$

$$2) \quad M_1 = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}}$$

$$3) \quad R = \frac{M_1 N_1}{M_1 \sin^2 a_{12} + N_1 \cos^2 a_{12}}$$

$$4) \quad d_{12} = \lambda_{12} - \frac{\lambda_{12}^3}{24 R^2}$$

$$5) \quad X_1 = N_1 \cos \phi_1$$

$$6) \quad Z_1 = N_1 (1 - e^2) \sin \phi_1$$

$$7) \quad \mu = \arcsin \left[\frac{d_{12}}{2 R} \right]$$

$$8) \quad X_2 = X_1 - d_{12} (\cos \phi_1 \sin \mu + \sin \phi_1 \cos a_{12} \cos \mu)$$

$$9) \quad Y_2 = d_{12} \sin a_{12} \cos \mu$$

$$10) Z_2 = Z_1 + d_{12} (\cos \phi_1 \cos a_{12} \cos \mu - \sin \phi_1 \sin \mu)$$

$$11) h = \left[X_2^2 + Y_2^2 + \frac{Z_2^2}{(1 - e^2)} \right]^{1/2} - a$$

$$12) \delta\mu = \frac{180 h}{\pi d_{12} \cos \mu}$$

Si $h < 0.00001$, $\delta\mu$ est négligeable et on passe à l'étape 13, sinon on fait $\mu = \mu + \delta\mu$ et on recommence à l'étape 8.

$$13) \phi_2 = \arctan \left[\frac{Z_2}{(1 - e^2)(X_2^2 + Y_2^2)^{1/2}} \right]$$

$$14) \Delta\lambda = \arctan \left[\frac{Y_2}{X_2} \right]$$

$$15) \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$$

$$16) N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{1/2}}$$

$$17) a_{21} = \arctan \left[\frac{X_1 \sin \Delta\lambda}{(Z_2 - Z_1) \cos \phi_2 - (N_2 \cos \phi_2 - X_1 \cos \Delta\lambda) \sin \phi_2} \right]$$

3.2 - Calcul direct par la méthode de Vincenty: exemples

1er exemple:

Les données sont les mêmes que celles du 1er exemple de la section 2.2, calculé par la méthode de Hradilek. Les calculs sont cependant effectués à l'aide d'une calculatrice de poche non-programmable semblable au modèle HP-45: il s'agit du modèle SR-51 de Texas Instruments. Pour chaque résultat, seulement 10 chiffres sont conservés pour les calculs ultérieurs.

point #1: Royal $\phi = 45^\circ 30' 31,23200''$
 $\lambda = 73^\circ 35' 24,85900''$

point #2: St-Hilaire $\phi = 45^\circ 33' 00,93000''$
 $\lambda = 73^\circ 10' 22,18590''$

azimut 1-2 = $81^\circ 47' 03,12505''$
 azimut 2-1 = $262^\circ 04' 55,45101''$
 distance = 32 933,6898 m

ϕ_1	=	45,508 675 56	($45^\circ 30' 31,23200''$)
λ_1	=	-73,590 238 61	($73^\circ 35' 24,85900''$)
a_{12}	=	81,784 201 39	($81^\circ 47' 03,12505''$)
a	=	6 378 206,4	
e^2	=	$6,768\ 657\ 997 \times 10^{-3}$	
$(1-e^2)$	=	0,993 231 342 0	
ℓ_{12}	=	32 933,689 8	

$N_1 = 6\ 389\ 219,464$
 $M_1 = 6\ 367\ 906,758$
 $R = 6\ 388\ 782,812$
 $d_{12} = 32\ 933,653\ 34$
 $X_1 = 4\ 477\ 573,038$
 $Z_1 = 4\ 526\ 941,553$
 $\mu = 0,147\ 677\ 694\ 2$
 $X_2 = 4\ 474\ 156,306$
 $Y_2 = 32\ 595,542\ 54$
 $Z_2 = 4\ 530\ 179,156$
 $h = 0,006\ 506$
 $\phi_2 = 45,550\ 258\ 34 \quad (45^\circ\ 33' 00,9300'')$
 $\Delta\lambda = 0,417\ 409\ 194\ 2$
 $\lambda_2 = -73,172\ 829\ 42 \quad (73^\circ\ 10' 22,1859'')$
 $N_2 = 6\ 389\ 235,209$
 $a_{21} = 82,082\ 069\ 05 \quad (262^\circ\ 04' 55.45'')$

2ième exemple:

Utilisons encore les mêmes données et effectuons maintenant le calcul à l'aide du programme donné à la section 4.3.

$\phi_1 = 45,508\ 675\ 555\ 55 \quad (45^\circ\ 30' 31,23200'')$
 $\lambda_1 = -73,590\ 238\ 611\ 11 \quad (73^\circ\ 35' 24,85900'')$
 $a_{12} = 81,784\ 201\ 402\ 77 \quad (81^\circ\ 47' 03,12505'')$
 $\lambda_{12} = 32\ 933,689\ 8$
 $a = 6\ 378\ 206.4$

e^2 = 0,006 768 657 997 291
 $(1-e^2)$ = 0,993 231 342 003 0
 N_1 = 6 389 219,464 163
 M_1 = 6 367 906,758 044
 R = 6 388 782,811 902
 d_{12} = 32 933,653 335 22
 X_1 = 4 477 573,038 225
 Z_1 = 4 526 941,552 375
 μ = 0,147 677 694 225 9
 X_2 = 4 474 156,306 084
 Y_2 = 32 595,542 537 86
 Z_2 = 4 530 179,154 904
 h = -0,000 226
 $\delta\mu$ = -0,000 000 393 181 1
 μ = 0,147 677 301 044 9
 X_2 = 4 474 156,306 242
 Y_2 = 32 595,542 538 41
 Z_2 = 4 530 179,155 065
 h = 0
 ϕ_2 = 45,550 258 333 11 ($45^\circ 33' 00,9299992''$)
 $\Delta\lambda$ = 0,417 409 194 148 6
 λ_2 = -73,172 829 416 97 ($73^\circ 10' 22,1859012''$)
 N_2 = 6 389 235,208 968
 a_{21} = 82,082 069 800 29 ($262^\circ 04' 55,45128''$)

3ième exemple:

Dans ce troisième exemple, la distance est plus longue (108 km). Les données sont les mêmes que celles du 2ième exemple de la section 2.2, calculé par la méthode de Hradilek.

point #1: Bélair $\phi = 46^\circ 49' 18,73588''$
 $\lambda = 71^\circ 29' 32,76906''$

point #2: Fournier $\phi = 47^\circ 07' 25,60870''$
 $\lambda = 70^\circ 08' 47,45004''$

azimut 1-2 = $71^\circ 21' 53,51588''$
azimut 2-1 = $252^\circ 20' 55,67834''$
distance = 107 777,9058 m

N.B. Coordonnées non officielles

$\phi_1 = 46,821\ 871\ 077\ 77 \quad (46^\circ 49' 18,73588'')$
 $\lambda_1 = -71,492\ 435\ 850\ 00 \quad (71^\circ 29' 32,76906'')$
 $a_{12} = 71,364\ 865\ 522\ 22 \quad (71^\circ 21' 53,51588'')$
 $\lambda_{12} = 107\ 777,9058$
 $a = 6\ 378\ 206,4$
 $e^2 = 0,006\ 768\ 657\ 997\ 291$
 $(1-e^2) = 0,993\ 231\ 342\ 003$
 $N_1 = 6\ 389\ 716,375\ 479$
 $M_1 = 6\ 369\ 392,634\ 850$
 $R = 6\ 387\ 635,254\ 293$
 $d_{12} = 107\ 776,627\ 308\ 9$
 $x_1 = 4\ 372\ 283,508\ 462$
 $z_1 = 4\ 628\ 033,063\ 423$

μ = 0,483 372 866 543 5
 x_2 = 4 346 548,296 186
 y_2 = 102 122,549 164 9
 z_2 = 4 650 934,705 180
 h = -0,016 491
 $\delta\mu$ = -0,000 008 767 191 5
 μ = 0,483 364 099 352 1
 x_2 = 4 346 548,307 438
 y_2 = 102 122,549 296 7
 z_2 = 4 650 934,717 236
 h = 0,000 028
 $\delta\mu$ = 0,000 000 014 885 8
 μ = 0,483 364 114 237 8
 x_2 = 4 346 548,307 419
 y_2 = 102 122,549 296 4
 z_2 = 4 650 934,717 216
 h = -0,000 001
 ϕ_2 = 47,123 780 193 56 (47° 07' 25,608697")
 $\Delta\lambda$ = 1,345 921 948 544
 λ_2 = -70,146 513 901 46 (70° 08' 47,450045")
 N_2 = 6 389 830,466 85
 a_{21} = 72,348 799 542 16 (252° 20' 55,67835")

3.3 - Calcul inverse par la méthode de Vincenty: liste des formules
par ordre chronologique

données: ϕ_1 a
 λ_1 e^2
 ϕ_2
 λ_2

$$1) \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$2) N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{1/2}}$$

$$3) N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{1/2}}$$

$$4) M_1 = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_1)^{3/2}}$$

$$5) M_2 = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_2)^{3/2}}$$

$$6) X_1 = N_1 \cos \phi_1$$

$$7) Z_1 = N_1 (1 - e^2) \sin \phi_1$$

$$8) X_2 = N_2 \cos \phi_2$$

$$9) Z_2 = N_2 (1 - e^2) \sin \phi_2$$

$$10) \quad a_{12} = \arctan \left[\frac{x_2 \sin \Delta\lambda}{(N_1 \cos \phi_1 - x_2 \cos \Delta\lambda) \sin \phi_1 - (z_1 - z_2) \cos \phi_1} \right] \\ (\pm 180^\circ)$$

$$11) \quad a_{21} = \arctan \left[\frac{x_1 \sin \Delta\lambda}{(z_2 - z_1) \cos \phi_2 - (N_2 \cos \phi_2 - x_1 \cos \Delta\lambda) \sin \phi_2} \right] \\ (\pm 180^\circ)$$

$$12) \quad x_2' = x_2 \cos \Delta\lambda$$

$$13) \quad y_2 = x_2 \sin \Delta\lambda$$

$$14) \quad d_{12} = \sqrt{[(x_2' - x_1)^2 + y_2^2 + (z_2 - z_1)^2]}^{1/2}$$

$$15) \quad \bar{a}_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}$$

$$16) \quad \bar{R} = \frac{(N_1 + N_2)(M_1 + M_2)}{2 \left[(M_1 + M_2) \sin^2 \bar{a}_{12} + (N_1 + N_2) \cos^2 \bar{a}_{12} \right]}$$

$$17) \quad l_{12} = d_{12} + \frac{d_{12}^3}{24 \bar{R}^2}$$

3.4 - Calcul inverse par la méthode de Vincenty: exemples

1er exemple:

Le premier exemple est le problème inverse correspondant au premier exemple de la section 3.2. Les calculs sont effectués ici aussi à l'aide d'une calculatrice non-programmable SR-51. Pour chaque résultat, seulement 10 chiffres sont conservés pour les calculs ultérieurs.

point #1: Royal $\phi = 45^\circ 30' 31,23200''$
 $\lambda = 73^\circ 35' 24,85900''$

point #2: St-Hilaire $\phi = 45^\circ 33' 00,93000''$
 $\lambda = 73^\circ 10' 22,18590''$

azimut 1-2 = $81^\circ 47' 03,12505''$

azimut 2-1 = $262^\circ 04' 55,45101''$

distance = 32 933,6898 m

$\phi_1 = 45,508\ 675\ 56 \quad (45^\circ 30' 31,23200'')$

$\lambda_1 = -73,590\ 238\ 61 \quad (73^\circ 35' 24,85900'')$

$\phi_2 = 45,550\ 258\ 33 \quad (45^\circ 33' 00,93000'')$

$\lambda_2 = -73,172\ 829\ 42 \quad (73^\circ 10' 22,18590'')$

a = 6 378 206,4

$e^2 = 6,768\ 657\ 997 \times 10^{-3}$

$(1-e^2) = 0,993\ 231\ 342\ 0$

$\Delta\lambda = 0,417\ 409\ 19$

$N_1 = 6\ 389\ 219,464$
 $N_2 = 6\ 389\ 235,209$
 $M_1 = 6\ 367\ 906,758$
 $M_2 = 6\ 367\ 953,835$
 $X_1 = 4\ 477\ 573,038$
 $Z_1 = 4\ 526\ 941,553$
 $X_2 = 4\ 474\ 275,039$
 $Z_2 = 4\ 530\ 179,155$
 $a_{12} = 81,784\ 203\ 08 \quad (81^\circ 47' 03,13'')$
 $a_{21} = 82,082\ 071\ 15 \quad (262^\circ 04' 55,46'')$
 $X_2' = 4\ 474\ 156,307$
 $Y_2 = 32\ 595,542\ 21$
 $d_{12} = 32\ 933,652\ 84$
 $a_{12} = 81,933\ 137\ 12$
 $R = 6\ 388\ 806,578$
 $\lambda_{12} = 32\ 933,689\ 3$

2ième exemple:

Utilisons encore les mêmes données et effectuons maintenant le calcul à l'aide du programme donné à la section 4.4.

$\phi_1 = 45,508\ 675\ 555\ 55 \quad (45^\circ 30' 31,23200'')$
 $\lambda_1 = -73,590\ 238\ 611\ 11 \quad (73^\circ 35' 24,85900'')$
 $\phi_2 = 45,550\ 258\ 333\ 33 \quad (45^\circ 33' 00,93000'')$
 $\lambda_2 = -73,172\ 829\ 416\ 66 \quad (73^\circ 10' 22,18590'')$
 $a = 6\ 378\ 206,4$

e^2 = 0,006 768 657 997 291
 $(1-e^2)$ = 0,993 231 342 003
 $\Delta\lambda$ = 0,417 409 194 45
 N_1 = 6 389 219,464 167
 N_2 = 6 389 235,208 969
 M_1 = 6 367 906,758 044
 M_2 = 6 367 953,834 999
 X_1 = 4 477 573,038 228
 Z_1 = 4 526 941,552 378
 X_2 = 4 474 275,038 712
 Z_2 = 4 530 179,155 062
 a_{12} = 81,784 201 408 98 (81° 47' 03,12507")
 a_{21} = 82,082 069 793 24 (262° 04' 55,45126")
 X_2' = 4 474 156,306 239
 Y_2 = 32 595,542 557 67
 d_{12} = 32 933,653 354 11
 \bar{a}_{12} = 81,933 135 601 10
 \bar{R} = 6 388 806,577 566
 ℓ_{12} = 32 933,689 82

3ième exemple:

Dans ce troisième exemple, la distance est plus longue (108 km). Il s'agit du problème inverse correspondant au 3ième exemple de la section 3.2.

point #1: Bélair $\phi = 46^\circ 49' 18,73588''$
 $\lambda = 71^\circ 29' 32,76906''$

point #2: Fournier $\phi = 47^\circ 07' 25,60870''$
 $\lambda = 70^\circ 08' 47,45004''$

azimut 1-2 = $71^\circ 21' 53,51588''$
azimut 2-1 = $252^\circ 20' 55,67834''$
distance = 107 777,9058 m

N.B. Coordonnées non officielles

ϕ_1	=	46,821 871 077 77	($46^\circ 49' 18,73588''$)
λ_1	=	-71,492 435 850 00	($71^\circ 29' 32,76906''$)
ϕ_2	=	47,123 780 194 44	($47^\circ 07' 25,60870''$)
λ_2	=	-70,146 513 900 00	($70^\circ 08' 47,45004''$)
a	=	6 378 206.4	
e^2	=	0,006 768 657 997 291	
$(1-e^2)$	=	0,993 231 342 003 0	
$\Delta\lambda$	=	1,345 921 950 000	
N_1	=	6 389 716,375 479	
N_2	=	6 389 830,466 850	
M_1	=	6 369 392,634 850	
M_2	=	6 369 733,826 384	
X_1	=	4 372 283,508 462	

$Z_1 = 4\ 628\ 033,063\ 426$
 $X_2 = 4\ 347\ 747,831\ 140$
 $Z_2 = 4\ 650\ 934,717\ 266$
 $a_{12} = 71,364\ 865\ 497\ 66 \quad (71^\circ 21' 53,51579'')$
 $a_{21} = 72,348\ 799\ 515\ 00 \quad (252^\circ 20' 55,67825'')$
 $X_2' = 4\ 346\ 548,307\ 347$
 $Y_2 = 102\ 122,549\ 401\ 0$
 $d_{12} = 107\ 776,627\ 434\ 5$
 $\bar{a}_{12} = 71,856\ 832\ 506\ 3$
 $\bar{R} = 6\ 387\ 808,121\ 203$
 $\lambda_{12} = 107\ 777,905\ 811$

4.0 - Programmes de calcul

Afin de faciliter mon travail dans l'étude des différentes méthodes proposées et surtout dans le but de fournir au lecteur éventuel un dossier complet et utilisable sur les méthodes proposées, des programmes de calcul ont été élaborés pour chacune des méthodes analysées.

Je considère ces programmes de calcul comme le cœur du présent mémoire, puisqu'ils font la preuve que les calculs géodésiques sont possibles et même faciles à effectuer. Ils pourraient devenir une partie importante d'une banque de programmes à la disposition d'un arpenteur-géomètre. D'ailleurs, j'ai été renseigné qu'une certaine demande existait à cet effet.

Ces programmes ne sont pas parfaits et il est certain qu'à force de les utiliser, je trouverais le moyen de les améliorer. Un programme est personnel et j'encourage les éventuels utilisateurs à les "mettre à leur main". De toutes façons il est certain que le langage utilisé et le type d'ordinateur ne satisfera qu'une minorité de gens, dont moi-même.

4.1 - Hradilek direct

C'est le plus long des quatre programmes (536 étapes) en ce qui concerne la programmation et en ce qui concerne le temps de calcul.

Il a été impossible de concentrer tout le contenu dans un maximum de 240 étapes: il excède donc la capacité de l'ordinateur TI-58. Le programme a donc été conçu pour être utilisé sur TI-59 où l'enregistrement des étapes sur cartes magnétiques élimine bien des problèmes d'utilisation.

Il est important de souligner l'entrée des données angulaires qui se fait d'une manière spéciale. L'ordinateur calcule avec 13 chiffres significatifs, mais l'affichage n'en contient que 10. Il est donc important d'additionner la partie entière d'un angle à sa partie fractionnaire (minutes, secondes, et fractions de secondes transformées en fractions décimales de degrés) et ce, dans le but de conserver la précision de calcul à son maximum. Pour obtenir les résultats, on enlève la partie entière de l'angle et on transforme ensuite la partie fractionnaire en minutes, secondes et fractions de secondes.

L'azimut de retour a_{21} est donné à 180° près, il est toujours dans le quadrant opposé à celui de l'azimut direct a_{12} .

Une chose importante dans ce programme, la solution de l'équation 12 (section 2.1) est calculée à l'aide d'un sous-programme en librairie dans un module enfichable: il s'agit du programme ML-08 (Zeros of functions) compris dans un module fournis à l'achat de l'ordinateur.

PROGRAM DESCRIPTION

Calcul géodésique direct par la méthode de Hradilek, selon un article publié dans le Bulletin Géodésique vol. 50 (1976), pp. 301-306.

Utilisable avec TI-59 seulement.

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY
1	<u>Entrée des paramètres</u> (négatif pour longitude ouest)	ϕ_1 λ_1 a_{12} ℓ_{12}	[A] [B] [C] [D]	ϕ_1 λ_1 a_{12} ℓ_{12}
2	<u>Résultats</u> (attendre 4 min. approx.)		[E] [B'] [C'] [D']	ϕ_2 λ_2 a_{21} (180°) d_{12}
	N.B. 1) Angles traités en degrés décimaux 2) Entrer un angle: DDD + .MMSSssss [DMS] = → DDD.ddddd Retrouver un angle: DDD.ddddd [INV] [INT] [INV] [DMS] → .MMSSsssss DDD.MMSSsssss → degrés, minutes, secondes et fractions de secondes DDD.ddddd → degrés et fractions décimales de degrés			

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS (INV [INT])		LABELS (Op 08)	
A entrée de ϕ_1	o ₀ utilisée	1 ₀ utilisée	INV	[Inv]
B entrée de λ_1	o ₁ ω_1	1 ₁ ϕ_1	[CE]	[CE]
C entrée de a_{12}	o ₂ ℓ_2^2	1 ₂ λ_1	[STO]	[RCL]
D entrée de ℓ_{12}	o ₃ ϕ_2'	1 ₃ a_{12}	[SBR]	[SUM]
E calcul de ϕ_2	o ₄ ϕ_2	1 ₄ ℓ_{12}	[INT]	[X]
F solution de μ	o ₅ N_2	1 ₅ a	[+]	[GTO]
G calcul de λ_2	o ₆ ω_0	1 ₆ e ²	[RST]	[RS]
H calcul de a_{21}	o ₇ $\Delta\lambda$	1 ₇ e ^{1/2}	[+]	[INV]
I calcul de d_{12}	o ₈ λ_2	1 ₈ ϕ_1'	[INV]	[INV]
J	o ₉ a_{21}	1 ₉ ℓ_1^2	[INT]	[INT]
FLAGS	0	1	2	3
			4	5
			6	7
			8	9

TITLE HRADILEK DIRECT

PAGE 2 OF 6

TI Programmable
Program Record

PROGRAMMER _____

DATE _____

/54

Partitioning (Op 17) Library Module _____

Printer _____ Cards _____

PROGRAM DESCRIPTION

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY

USER DEFINED KEYS		DATA REGISTERS (INV)			LABELS (Op 08)						
A	2 ⁰	N ₁	0		INV	Inv	CE	CLR	x ⁻¹	x ²	
B	2 ¹	M ₁	1		AC	V _Z	STO	RCL	SUM	Y ²	
C	2 ²	R	2		EE	()	±	GTO	X	
D	2 ³	d ₁₂	3		SBR	-	RST	+	R/S	*	
E	2 ⁴	C	4		+/	=	CLR	INV	DEG	DEG	
A	2 ⁵	G	5		EQ	1	2	3	4	5	
B	2 ⁶	H	6		EQ	1	2	3	4	5	
C	2 ⁷	F	7		EQ	1	2	3	4	5	
D	2 ⁸	K	8		EQ	1	2	3	4	5	
E	2 ⁹	μ	9		EQ	1	2	3	4	5	
FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

TITLE HRADILEK DIRECT

PAGE 3 OF 6

TI Programmable Coding Form



PROGRAMMER.

DATE

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
000	76	LBL		055	95	=		110	15	15	
001	11	A	$\leftarrow \phi_1$	056	42	STO	$\rightarrow e^2$	111	33	X ²	
002	42	STO		057	16	16		112	95	=	
003	11	11		058	93	.		113	42	STO	$\rightarrow \lambda_1^2$
004	91	R/S		059	00	0		114	19	19	
005	76	LBL		060	00	0		115	43	RCL	
006	12	B	$\leftarrow \lambda_1$	061	06	6		116	15	15	
007	42	STO		062	08	8		117	55	\div	
008	12	12		063	01	1		118	53	(
009	91	R/S		064	04	4		119	01	1	
010	76	LBL		065	07	7		120	75	-	
011	13	C	$\leftarrow a_{12}$	066	08	8		121	43	RCL	
012	42	STO		067	04	4		122	16	16	
013	13	13		068	09	9		123	65	x	
014	91	R/S		069	85	+		124	43	RCL	
015	76	LBL		070	04	4		125	11	11	
016	14	D	$\leftarrow \lambda_{12}$	071	93	.		126	38	SIN	
017	42	STO		072	05	5		127	33	X ²	
018	14	14		073	09	9		128	54)	
019	91	R/S		074	01	1		129	42	STO	
020	76	LBL		075	05	5		130	00	06	
021	15	E		076	52	EE		131	34	\sqrt{X}	
022	06	6		077	01	1		132	95	=	
023	03	3		078	01	1		133	42	STO	$\rightarrow N_1$
024	07	7		079	94	+/-		134	20	20	
025	08	8		080	95	=		135	43	RCL	
026	02	2		081	42	STO	$\rightarrow e^{1/2}$	136	15	15	
027	00	0		082	17	17		137	65	x	
028	06	6		083	01	1		138	43	RCL	
029	93	.		084	75	-		139	10	10	
030	04	4		085	43	RCL		140	55	\div	
031	42	STO	$\rightarrow a$	086	16	16		141	43	RCL	
032	15	15		087	95	=		142	00	00	
033	93	.		088	42	STO	$\rightarrow 1-e^2$	143	45	YY	
034	00	0		089	10	10		144	01	1	
035	00	0		090	65	x		145	93	.	
036	06	6		091	43	RCL		146	05	5	
037	07	7		092	11	11		147	95	=	$\rightarrow M_1$
038	06	6		093	30	TAN		148	42	STO	
039	08	8		094	95	=		149	21	21	
040	06	6		095	22	INV		150	65	x	
041	05	5		096	30	TAN		151	43	RCL	
042	07	7		097	42	STO	$\rightarrow \phi_1$	152	20	20	
043	09	9		098	18	18		153	55	+	
044	85	+		099	38	SIN		154	53	c	
045	09	9		100	33	X ²		155	43	RCL	
046	93	.		101	65	x		156	20	20	
047	07	7		102	43	RCL		157	65	x	
048	02	2		103	17	17		158	43	RCL	
049	09	9		104	85	+		159	13	13	
050	01	1		105	01	1					
051	52	EE		106	95	=					
052	01	1		107	35	1/X					
053	01	1		108	65	x					
054	94	+/-		109	43	RCL					

TITLE

HRADILEK DIRECT

PAGE 4 OF 6

TI Programmable
Coding Form

156

PROGRAMMER

DATE

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
160	39	COS		215	85	+		270	08	08	
161	33	X ²		216	43	RCL		271	12	B	
162	85	+		217	24	24		272	35	1/X	
163	43	RCL		218	33	X ²		273	36	PGM	
164	21	21		219	95	=		274	08	08	
165	65	x		220	55	÷		275	13	C	
166	43	RCL		221	53	c		276	01	I	
167	13	13		222	01	1		277	52	EE	
168	38	SIN		223	85	+		278	01	1	
169	33	X ²		224	43	RCL		279	02	2	
170	95	=		225	25	25		280	94	+/-	
171	42	STO	→ R	226	33	X ²		281	22	INV	
172	22	22		227	95	=		282	52	EE	
173	43	RCL		228	42	STO	→ H	283	36	PGM	
174	14	14		229	26	26		284	08	08	
175	75	-		230	01	1		285	14	D	
176	24	CE		231	75	-		286	36	PGM	
177	45	YX		232	43	RCL		287	08	08	
178	03	3		233	25	25		288	15	E	→ solution de F (μ)
179	55	÷		234	33	X ²		289	43	RCL	
180	02	2		235	95	=		290	13	13	
181	04	4		236	35	1/X		291	39	COS	
182	55	÷		237	65	x		292	65	x	
183	43	RCL		238	43	RCL		293	53	c	
184	22	22		239	24	24		294	43	RCL	
185	33	X ²		240	65	x		295	11	11	
186	95	=		241	43	RCL		296	75	-	
187	42	STO	→ d ₁₂	242	25	25		297	43	RCL	
188	23	23		243	95	=		298	18	18	
189	43	RCL		244	42	STO	→ F	299	54)	
190	17	17		245	27	27		300	42	STO	
191	34	∫X		246	02	2		301	00	00	
192	65	x		247	65	x		302	38	STN	
193	43	RCL		248	43	RCL		303	65	x	
194	11	11		249	20	20		304	43	RCL	
195	38	SIN		250	55	÷		305	29	29	
196	95	=		251	43	RCL		306	39	COS	
197	42	STO	→ C	252	23	23		307	85	+	
198	24	24		253	55	÷		308	43	RCL	
199	43	RCL		254	53	c		309	00	00	
200	17	17		255	01	1		310	39	COS	
201	34	∫X		256	85	+		311	65	x	
202	65	x		257	43	RCL		312	43	RCL	
203	43	RCL		258	25	25		313	29	29	
204	11	11		259	33	X ²		314	38	SIN	
205	39	COS		260	95	=		315	95	=	
206	65	x		261	42	STO	→ K	316	22	INV	
207	43	RCL		262	28	28		317	39	COS	
208	13	13		263	00	D		318	42	STO	→ w ₁
209	39	COS		264	36	PGM		319	01	01	
210	95	=		265	08	08					MERGED CODES
211	42	STO	→ G	266	11	A		62	STO	83	GTG
212	25	25		267	01	1		63	RCL	84	GTG
213	33	X ²		268	00	0		64	SUM	74	INV_SBR
214	94	+/-		269	36	PGM					Texas Instruments Incorporated

PROGRAMMER _____

DATE _____

TI Programmable
Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
320	39	COS		375	01	1		430	11	11	
321	65	X		376	95	=		431	38	SIN	
322	43	RCL		377	34	JX		432	65	X	
323	23	23		378	35	1/X		433	43	RCL	
324	65	X		379	65	X		434	04	04	
325	43	RCL		380	43	RCL		435	39	COS	
326	19	19		381	15	15		436	75	-	
327	34	JX		382	95	=	+ N ₂	437	43	RCL	
328	65	X		383	42	STO		438	II	11	
329	02	2		384	05	05		439	39	COS	
330	94	+/-		385	43	RCL		440	65	X	
331	85	+		386	23	23		441	43	RCL	
332	43	RCL		387	65	X		442	04	04	
333	19	19		388	43	RCL		443	38	SIN	
334	85	+		389	01	01		444	65	X	
335	43	RCL		390	38	SIN		445	43	RCL	
336	23	23		391	55	/		446	07	07	
337	33	X ²		392	43	RCL		447	39	COS	
338	95	=		393	02	02		448	85	+	
339	42	STO		394	34	JX		449	43	RCL	
340	02	02		395	95	=		450	16	16	
341	94	+/-		396	22	INV		451	65	X	
342	85	+		397	38	SIN		452	43	RCL	
343	43	RCL		398	42	STO	+ w ₀	453	04	04	
344	15	15		399	06	06		454	39	COS	
345	33	XZ		400	39	COS		455	65	X	
346	95	=		401	75	-		456	53	(
347	55	/		402	43	RCL		457	43	RCL	
348	43	RCL		403	18	18		458	05	05	
349	02	02		404	38	SIN		459	55	/	
350	55	/		405	65	X		460	43	RCL	
351	43	RCL		406	43	RCL		461	20	20	
352	17	17		407	03	03		462	65	X	
353	95	=		408	38	SIN		463	43	RCL	
354	34	JX		409	95	=		464	04	04	
355	22	INV		410	55	/		465	38	SIN	
356	38	SIN		411	43	RCL		466	75	-	
357	42	STO	+ φ ₂	412	18	18		467	43	RCL	
358	03	03		413	39	COS		468	II	11	
359	30	TAN		414	55	/		469	38	SIN	
360	55	/		415	43	RCL		470	95	=	
361	43	RCL		416	03	03		471	55	/	
362	10	10		417	39	COS		472	43	RCL	
363	95	=		418	95	=		473	II	11	
364	22	INV		419	22	INV		474	39	COS	
365	30	TAN	+ φ ₂	420	39	COS	+ Δλ	475	55	/	
366	42	STO		421	42	STO		476	43	RCL	
367	04	04		422	07	07		477	07	07	
368	38	SIN		423	85	+		478	94	+/-	
369	33	X ²		424	43	RCL		479	38	SIN	MERGED CODES
370	65	X		425	12	12		62	STO	STO	83 STO
371	43	RCL		426	95	=		63	RCL	RCL	84 RCL
372	16	16		427	42	STO	+ λ ₂	64	SUM	SUM	92 INV SER
373	94	+/-		428	08	08					
374	05	1		429	42	DCI					

TI Programmable
Coding Form

PROGRAMMER _____ DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
480	95	=		535	92	RTN					
481	35	1/X		536	00	0	retourne à ML-08				
482	22	INV		537	00	0					
483	30	TAN		538	00	0					
484	42	STD	→ a ₂₁	539	00	0					
485	09	09									
486	43	RCL									
487	04	04	→ φ ₂								
488	91	R/S									
489	76	LBL									
490	17	B'									
491	43	RCL									
492	08	08	→ λ ₂								
493	91	R/S									
494	76	LBL									
495	18	C'									
496	43	RCL									
497	09	09	→ a ₂₁								
498	91	R/S									
499	76	LBL									
500	19	D'									
501	43	RCL									
502	23	23	→ d ₁₂								
503	91	R/S									
504	76	LBL	Calcul de F (μ)								
505	16	A'									
506	53	(
507	42	STO									
508	29	29									
509	38	SIN									
510	33	X ²									
511	65	X									
512	43	RCL									
513	26	26									
514	75	-									
515	43	RCL									
516	27	27									
517	65	X									
518	53	(
519	02	2									
520	65	X									
521	43	RCL									
522	29	29									
523	54)									
524	38	SIN									
525	75	-									
526	43	RCL									
527	28	28									
528	65	X									
529	43	RCL									
530	29	29									
531	38	SIN									
532	85	+									
533	01	1									
534	54)									

MERGED CODES

62	STO	72	STO	83	GTO
63	STO	73	STO	84	GTO
64	STO	74	SUM	92	IPY SER

TEXAS INSTRUMENTS
INCORPORATED

4.2 - Hradilek inverse

Pour ce programme, l'utilisation du modèle 59 est encore de rigueur. Il est cependant moins long que celui du problème direct. Il pourrait être utile de mentionner que le modèle 58 pourrait être utilisé, mais qu'il faudrait entrer le programme en deux séries et qu'il faudrait aussi entrer le programme à nouveau pour chaque calcul à effectuer, méthode plutôt fastidieuse.

Les mêmes remarques qu'à la section 4.1 sont à appliquer en ce qui concerne l'entrée et la sortie des valeurs angulaires.

Les valeurs des azimuts direct et inverse seront dans le même quadrant: une seule est exacte, l'autre diffère de 180° avec la valeur donnée. Pour savoir laquelle est laquelle, un petit dessin ou une brève réflexion est de rigueur.

PROGRAM DESCRIPTION

Calcul géodésique inverse par la méthode de Hradilek selon un article publié dans le Bulletin Géodésique Vol. 50 (1976), pp. 301-306.

Utilisable avec TI-59 seulement

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY
1	<u>Entrée des paramètres</u> (négatif pour longitude ouest)	ϕ_1 λ_1 ϕ_2 λ_2	[A] [B] [C] [D]	ϕ_1 λ_1 ϕ_2 λ_2
2	<u>Résultats</u>		[E] [A'] [B'] [C']	a_{12} a_{21} λ_{12} d_{12}
	N.B. 1) Angles traités en degrés décimaux 2) Entrer un angle: DDD + .MMSSsss Retrouver un angle: DDD.ddddd ↓ DDD	DMS = → DDD.ddddd INV INT INV DMS → .MMSSsssss		
	DDD.MMSSsssss → degrés, minutes, secondes et fractions de secondes DDD.ddddd → degrés et fractions décimales de degrés			

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS (INV INT)				LABELS (Op 08)									
ϕ entrée de ϕ_1	o ⁰		l ⁰	ϕ_2'	INV	Int	CE	CLR	x ¹	x ²				
λ entrée de λ_1	o ¹	ϕ_1	l ¹	N ₁	STO	RCL	SUM	Z ¹						
ϕ entrée de ϕ_2	o ²	λ_1	l ²	N ₂	EE	EE	EE	GTO	X					
λ entrée de λ_2	o ³	ϕ_2	l ³	M ₁	SBR	RST	+	R/S						
λ calcul de a_{12}	o ⁴	λ_2	l ⁴	M ₂	INT	INT	INT	INT						
λ calcul de a_{21}	o ⁵	a	l ⁵	λ_1^2										
λ calcul de λ_{12}	o ⁶	e ²	l ⁶	λ_2^2										
λ calcul de d_{12}	o ⁷	e^2	l ⁷											
$\Delta\lambda$	o ⁸	$\Delta\lambda$	l ⁸	d ₁₂										
ϕ_1'	o ⁹	ϕ_1'	l ⁹	a ₁₂										
FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				

TITLE HRADILEK INVERSE PAGE 2 OF 5
 PROGRAMMER _____ DATE _____

/61

**TI Programmable
Program Record**



Partitioning (Op 17) Library Module _____ Printer _____ Cards _____

PROGRAM DESCRIPTION

--

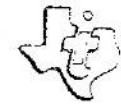
USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY

USER DEFINED KEYS		DATA REGISTERS (INV:)			LABELS (Op 08)					
A	2 ⁰	a ₂₁	0		INV	INT	CE	CLR	Σ _Σ	x ^x
B	2 ¹	R	1		✓	T/A	STO	ROL	SUM	y ^y
C	2 ²	ℓ_{12}	2		EE	1	2	+	GTO	X
D	2 ³	a ₁₂	3		SQR	-	RST	+	R/S	.
E	2 ⁴	1-e ²	4		INT	INT	INT	INT	INT	INT
F	2 ⁵	N ₁ N ₂	5		INT	INT	INT	INT	INT	INT
G	2 ⁶	R ₁ R ₂	6		INT	INT	INT	INT	INT	INT
H	2 ⁷		7		INT	INT	INT	INT	INT	INT
I	2 ⁸		8		INT	INT	INT	INT	INT	INT
J	2 ⁹		9		INT	INT	INT	INT	INT	INT
FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TITLE HRADILEK INVERSE

PAGE 3 OF 5

TI Programmable
Coding Form

PROGRAMMER _____

DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
000	76	LBL		055	95	=		110	24	24	
001	11	A		056	42	STO	$\rightarrow e^2$	111	65	X	
002	42	STO	$\leftarrow \phi_1$	057	06	06		112	43	RCL	
003	01	01		058	93	.		113	03	03	
004	91	R/S		059	00	0		114	30	TAN	
005	76	LBL	$\leftarrow \lambda_1$	060	00	0		115	95	=	
006	12	B		061	06	6		116	22	INV	
007	42	STO		062	08	8		117	30	TAN	
008	02	02		063	01	1		118	42	STO	$\rightarrow \phi_2$
009	91	R/S		064	04	4		119	10	10	
010	76	LBL		065	07	7		120	43	RCL	
011	13	C		066	08	8		121	05	05	
012	42	STO	$\leftarrow \phi_2$	067	04	4		122	55	\div	
013	03	03		068	09	9		123	53	(
014	91	R/S		069	85	+		124	01	1	
015	76	LBL		070	04	4		125	75	-	
016	14	D		071	93	.		126	43	RCL	
017	42	STO	$\leftarrow \lambda_2$	072	05	5		127	06	06	
018	04	04		073	09	9		128	65	X	
019	91	R/S		074	01	1		129	43	RCL	
020	76	LBL		075	05	5		130	01	01	
021	15	E		076	52	EE		131	38	SIN	
022	06	6		077	01	1		132	33	X ²	
023	03	3		078	01	1		133	54)	
024	07	7		079	94	+/-	$\rightarrow e^{1/2}$	134	34	\sqrt{X}	
025	08	8		080	95	=		135	95	=	
026	02	2		081	42	STO		136	42	STO	$\rightarrow N_1$
027	00	0		082	07	07		137	11	11	
028	06	6		083	22	INV		138	43	RCL	
029	93	.		084	52	EE		139	05	05	
030	04	4		085	43	RCL		140	55	\div	
031	42	STO	$\rightarrow a$	086	04	04		141	53	(
032	05	05		087	75	-		142	01	1	
033	93	.		088	43	RCL		143	75	-	
034	00	0		089	02	02		144	43	RCL	
035	00	0		090	95	=	$\rightarrow \Delta\lambda$	145	06	06	
036	06	6		091	42	STO		146	65	X	
037	07	7		092	08	08		147	43	RCL	
038	06	6		093	01	1		148	03	03	
039	08	8		094	75	-		149	38	SIN	
040	06	6		095	43	RCL		150	33	X ²	
041	05	5		096	06	06		151	54)	
042	07	7		097	95	=	$\rightarrow (1-e^2)$	152	34	\sqrt{X}	
043	09	9		098	42	STO		153	95	=	$\rightarrow N_2$
044	85	+		099	24	24		154	42	STO	
045	09	9		100	65	X		155	12	12	
046	93	.		101	43	RCL		156	45	YX	
047	07	7		102	01	01		157	03	3	
048	02	2		103	30	TAN		158	55	\div	
049	09	9		104	95	=		159	43	RCL	
050	01	1		105	22	INV		MERGED JUDGES			
051	52	EE		106	30	TAN		62	STO	72	GTO
052	01	1		107	42	STO		63	RCL	73	SR
053	01	1		108	09	09		64	SUM	74	INV SR
054	94	+/-		109	43	RCL		TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED			

PROGRAMMER _____

DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
160	05	05		215	16	16		270	75	-	
161	33	X ²		216	85	+		271	43	RCL	
162	65	X		217	43	RCL		272	03	03	
163	43	RCL		218	15	15		273	39	COS	
164	24	24		219	75	-		274	65	X	
165	95	=		220	02	2		275	43	RCL	
166	42	STD		221	65	X		276	01	01	
167	14	14		222	43	RCL		277	38	SIN	
168	43	RCL		223	15	15		278	65	X	
169	11	11		224	34	JX		279	43	RCL	
170	45	YX		225	65	X		280	08	08	
171	03	3		226	43	RCL		281	39	COS	
172	55	÷		227	16	16		282	85	+	
173	43	RCL		228	34	JX		283	43	RCL	
174	05	05		229	65	X		284	06	06	
175	33	X ²		230	53	C		285	65	X	
176	65	X		231	43	RCL		286	43	RCL	
177	43	RCL		232	09	09		287	01	01	
178	24	24		233	39	COS		288	39	COS	
179	95	=		234	65	X		289	65	X	
180	42	STD		235	43	RCL		290	53	C	
181	13	13		236	10	10		291	43	RCL	
182	43	RCL		237	39	COS		292	11	11	
183	05	05		238	65	X		293	55	÷	
184	33	X ²		239	43	RCL		294	43	RCL	
185	55	÷		240	08	08		295	12	12	
186	53	C		241	39	COS		296	65	X	
187	01	1		242	85	+		297	43	RCL	
188	85	+		243	43	RCL		298	01	01	
189	43	RCL		244	09	09		299	38	SIN	
190	07	07		245	38	SIN		300	75	-	
191	65	X		246	65	X		301	43	RCL	
192	43	RCL		247	43	RCL		302	03	03	
193	09	09		248	10	10		303	38	SIN	
194	38	SIN		249	38	SIN		304	95	=	
195	33	X ²		250	95	=		305	22	INV	
196	95	=		251	34	JX		306	30	TAN	
197	42	STD		252	42	STO		307	42	STO	
198	15	15		253	18	18		308	19	19	
199	43	RCL		254	43	RCL		309	91	R/S	
200	05	05		255	03	03		310	76	LBL	
201	33	X ²		256	39	COS		311	16	A'	
202	55	÷		257	65	X		312	43	RCL	
203	53	C		258	43	RCL		313	01	01	
204	01	1		259	08	08		314	39	COS	
205	85	+		260	38	SIN		315	65	X	
206	43	RCL		261	55	÷		316	43	RCL	
207	07	07		262	53	C		317	08	08	
208	65	X		263	43	RCL		318	94	+/-	
209	43	RCL		264	03	03		319	38	SIN	
210	10	10		265	38	SIN					MERGED CODES
211	38	SIN		266	65	X		62	STO		72 STO
212	33	X ²		267	43	RCL		63	RCL		73 RCL
213	95	=		268	01	01		64	SUM		74 SUM

TITLE HRADILEK INVERSE

PAGE 5 OF 5

TI Programmable
Coding Form

PROGRAMMER _____

DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
320	55	÷		375	43	RCL		430	02	2	
321	53	(376	12	12		431	04	4	
322	43	RCL		377	54)		432	55	÷	
323	01	01		378	42	STO		433	43	RCL	
324	38	SIN		379	25	25		434	21	21	
325	65	X		380	65	X		435	33	X ²	
326	43	RCL		381	53	(436	95	=	
327	03	03		382	43	RCL		437	42	STO	
328	39	COS		383	13	13		438	22	22	
329	75	-		384	85	+		439	91	R/S	→ d ₁₂
330	43	RCL		385	43	RCL		440	76	LBL	
331	01	01		386	14	14		441	18	C'	
332	39	COS		387	54)		442	43	RCL	
333	65	X		388	42	STO		443	18	18	
334	43	RCL		389	26	26		444	91	R/S	+ d ₁₂
335	03	03		390	55	÷		445	00	0	
336	38	SIN		391	02	2		446	00	0	
337	65	X		392	55	÷		447	00	0	
338	43	RCL		393	53	(448	00	0	
339	08	08		394	43	RCL		449	00	0	
340	39	COS		395	26	26		450	00	0	
341	85	+		396	65	X		451	00	0	
342	43	RCL		397	53	(452	00	0	
343	06	06		398	53)		453	00	0	
344	65	X		399	43	RCL		454	00	0	
345	43	RCL		400	19	19		455	00	0	
346	03	03		401	85	+		456	00	0	
347	39	COS		402	43	RCL		457	00	0	
348	65	X		403	20	20		458	00	0	
349	53	(404	54)		459	00	0	
350	43	RCL		405	55	÷		460	00	0	
351	12	12		406	02	2		461	00	0	
352	55	÷		407	54)		462	00	0	
353	43	RCL		408	42	STO		463	00	0	
354	11	11		409	23	23		464	00	0	
355	65	X		410	38	SIN		465	00	0	
356	43	RCL		411	33	X ²		466	00	0	
357	03	03		412	85	+		467	00	0	
358	38	SIN		413	43	RCL		468	00	0	
359	75	-		414	25	25		469	00	0	
360	43	RCL		415	65	X		470	00	0	
361	01	01		416	43	RCL		471	00	0	
362	38	SIN		417	23	23		472	00	0	
363	95	=		418	39	COS		473	00	0	
364	22	INV		419	33	X ²		474	00	0	
365	30	TAN		420	95	=		475	00	0	
366	42	STO		421	42	STO	→ R	476	00	0	
367	20	20		422	21	21		477	00	0	
368	91	R/S		423	43	RCL		478	00	0	
369	76	LBL		424	18	18		479	00	0	
370	17	B'		425	85	+		MENGED LODES			
371	53	(426	24	CE		62	STO	72 STO	
372	43	RCL		427	45	YX		63	RCL	73 RCL	
373	11	11		428	03	3		64	SUM	74 SUM	
374	85	+		429	55	÷		92	INV	93 INV	

TEXAS INSTRUMENTS
INCORPORATED

4.3 - Vincenty direct

Utilisable avec le modèle 58, le temps de calcul approximativement de 45 secondes, la précision renversante, c'est celui que je suggère.

L'espace de programmation étant utilisé au maximum, les données et les constantes de calcul doivent être entrées manuellement dans les mémoires. Il n'est pas nécessaire d'effacer les mémoires après un calcul, de cette sorte, les valeurs constantes peuvent demeurer dans leurs mémoires respectives, 5, 6 et 7. L'entrée de la valeur e^2 , donnée à 13 chiffres significatifs, se fait de la façon suivante:

$$0,006\ 768\ 657\ 9 + 9,7291 \times 10^{-11} = \text{STO } 06$$

L'addition permet de conserver tous les chiffres de cette constante importante.

Les mêmes remarques qu'à la section 4.1 sont à appliquer en ce qui concerne l'entrée et la sortie des valeurs angulaires.

TITLE VINCENTY DIRECT

PAGE 1 OF 3

TI Programmable
Program Record

PROGRAMMER André Verville

DATE 05-02-78

Partitioning (Op 17) [3.1.9.1.9] Library Module

Printer _____ Cards _____

PROGRAM DESCRIPTION

Calcul géodésique direct par la méthode de Vincenty, selon un article publié dans le Bulletin Géodésique vol. 51, pp. 242-243 (1977).

Utilisable avec TI-58 et TI-59.

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY
1	<u>Entrée des paramètres</u> (négatif pour longitude ouest) (distance suivant l'arc) 6 378 206.4 0,006 768 657 997 291 (facteur de précision) 0.00001	ϕ_1 λ_1 a_{12} ℓ_{12} a e^2 $(1 - e^2)$ 0.00001	[STO] [0] [1] [STO] [0] [2] [STO] [0] [3] [STO] [0] [4] [STO] [0] [5] [STO] [0] [6] [STO] [0] [7] [x ⁻¹]	ϕ_1 λ_1 a_{12} ℓ_{12} a e^2 $(1 - e^2)$ 0
2	<u>Résultats</u> (attendre 45 sec.)		[A] [B] [C]	ϕ_2 λ_2 $a_{21} (\pm 180^\circ)$
	N.B. Angles traités en degrés décimaux N.B. Entrer un angle: DDD + .MMSSsssss DMS = DDD.ddddd Retrouver un angle: DDD.ddddd [INV] [INT] [INV] [DMS] → .MMSSsssss ↓ DDD DDD.MMSSsssss → degrés, minutes, secondes et fractions de secondes DDD.ddddd → degrés et fractions décimales de degrés			

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS (INV F _N)				LABELS (Op 08)								
A calcul de ϕ_2	o ⁰	1 ⁰	Z ₁		[INV]	[Inv]	[CE]	[CLR]	[x ⁻¹]	[x ²]			
B calcul de λ_2	o ¹	1 ¹	μ		[x ²]	[V _x]	[STO]	[RCL]	[SUM]	[Y _x]			
C calcul de a_{21}	o ²	1 ²	X ₂		[EE]	[1]	[1]	[÷]	[GTO]	[X]			
D	o ³	1 ³	Y ₂		[SGR]	[–]	[RST]	[+]	[X]	[R/S]			
E	o ⁴	1 ⁴	Z ₂		[+/–]	[=]	[CIR]	[REV]	[S ₄]	[S ₅]			
F	o ⁵	1 ⁵	utilisée		[S ₆]	[S ₇]	[A ₁]	[A ₂]	[S ₈]	[S ₉]			
G	o ⁶	1 ⁶	ϕ_2		[S ₁₀]	[S ₁₁]	[B ₁]	[B ₂]	[S ₁₂]	[S ₁₃]			
H	o ⁷	1 ⁷	$\Delta\lambda$		[S ₁₄]	[S ₁₅]	[C ₁]	[C ₂]	[S ₁₆]	[S ₁₇]			
I	o ⁸	1 ⁸	R		[S ₁₈]	[S ₁₉]	[D ₁]	[D ₂]	[S ₂₀]	[S ₂₁]			
J calcul de N(ϕ)	o ⁹	1 ⁹	d ₁₂		[S ₂₂]	[S ₂₃]	[E ₁]	[E ₂]	[S ₂₄]	[S ₂₅]			
FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			

PROGRAMMER _____

DATE _____

TI Programmable
Coding Form


LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
000	76	LBL		055	95	=	+ d ₁₂	110	01	01	
001	11	A		056	42	STO		111	38	SIN	
002	43	RCL		057	19	19		112	65	X	
003	01	01		058	43	RCL		113	43	RCL	
004	10	E'	+ X ₁	059	08	08		114	03	03	
005	42	STO		060	65	X		115	39	COS	
006	08	08		061	43	RCL		116	65	X	
007	45	YX		062	01	01		117	43	RCL	
008	03	3		063	39	COS		118	11	11	
009	55	÷		064	95	=	+ X ₁	119	39	COS	
010	43	RCL		065	42	STO		120	95	=	+ X ₂
011	05	05		066	09	09		121	42	STO	
012	33	X ₂		067	43	RCL		122	12	12	
013	65	X		068	08	08		123	33	X ₂	
014	43	RCL		069	65	X		124	85	+	
015	07	07		070	43	RCL		125	53	(
016	95	=	+ X ₁	071	01	01		126	43	RCL	
017	42	STO		072	38	SIN		127	19	19	
018	18	18		073	65	X		128	65	X	
019	65	X		074	43	RCL		129	43	RCL	
020	43	RCL		075	07	07		130	03	03	
021	08	08		076	95	=	+ Z ₁	131	38	SIN	
022	55	÷		077	42	STO		132	65	X	
023	53	(078	10	10		133	43	RCL	
024	43	RCL		079	43	RCL		134	11	11	
025	18	18		080	19	19		135	39	COS	
026	65	X		081	55	÷		136	54)	
027	43	RCL		082	02	2		137	42	STO	
028	03	03		083	55	÷		138	13	13	
029	38	SIN		084	43	RCL		139	33	X ₂	
030	33	X ₂		085	18	18		140	85	+	
031	85	+		086	95	=		141	53	(
032	43	RCL		087	22	INV		142	43	RCL	
033	08	08		088	38	SIN	+ μ ₀	143	10	10	
034	65	X		089	42	STO		144	85	+	
035	43	RCL		090	11	11		145	43	RCL	
036	03	03		091	76	LBL	Début de la boucle	146	19	19	
037	39	COS		092	95	=		147	65	X	
038	33	X ₂		093	53	(148	53	(
039	95	=	+ R	094	43	RCL		149	43	RCL	
040	42	STO		095	09	09		150	01	01	
041	18	18		096	75	-		151	39	COS	
042	43	RCL		097	43	RCL		152	65	X	
043	04	04		098	19	19		153	43	RCL	
044	75	-		099	65	X		154	03	03	
045	24	CE		100	53	(155	39	COS	
046	45	YX		101	43	RCL		156	65	X	
047	03	3		102	01	01		157	43	RCL	
048	55	÷		103	39	COS		158	11	11	
049	02	2		104	65	X		159	39	COS	
050	04	4		105	43	RCL					MERGED CODES
051	55	÷		106	11	11		62	STO		72 STO
052	43	RCL		107	38	SIN		63	RCL		73 RCL
053	18	18		108	85	+		64	SWT		74 SWT
054	33	X ₂		109	43	RCL					83 GTO
											84 INV
											92 SSR

PROGRAMMER _____

DATE _____

TI Programmable

Coding Form

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
160	75	-		215	53	(270	43	RCL	
161	43	RCL		216	43	RCL		271	09	09	
162	01	01		217	12	12		272	65	X	
163	38	SIN		218	33	X ²		273	43	RCL	
164	65	X		219	85	+		274	17	17	
165	43	RCL		220	43	RCL		275	39	COS	
166	11	11		221	13	13		276	54)	
167	38	SIN		222	33	X ²		277	65	X	
168	54)		223	54)		278	43	RCL	
169	54)	→ Z ₂	224	34	JX		279	16	16	
170	42	STO		225	95	=		280	38	SIN	
171	14	14		226	22	INV		281	95	=	
172	33	X ²		227	30	TAN	→ φ ₂	282	35	1/X	
173	55	÷		228	42	STO		283	65	X	
174	43	RCL		229	16	16		284	43	RCL	
175	07	07		230	91	R/S		285	09	09	
176	95	=		231	76	LBL		286	65	X	
177	34	JX		232	12	B		287	43	RCL	
178	75	-		233	43	RCL		288	17	17	
179	43	RCL		234	13	13		289	38	SIN	
180	05	05		235	55	÷		290	95	=	
181	95	=	→ h	236	43	RCL		291	22	INV	
182	42	STO		237	12	12		292	30	TAN	→ a ₂₁
183	15	15		238	95	=		293	91	R/S	
184	50	I _X 1		239	22	INV		294	76	LBL	
185	22	INV		240	30	TAN		295	10	E'	
186	77	GE	h < t ?	241	42	STO		296	53	(
187	85	+	→ Sortir	242	17	17		297	42	STO	Sous -
188	43	RCL		243	85	+		298	15	15	programme
189	15	15		244	43	RCL		299	43	RCL	de calcul
190	55	÷		245	02	02		300	05	05	de N (φ)
191	43	RCL		246	95	=	→ λ ₂	301	55	÷	
192	19	19		247	91	R/S		302	53	(
193	55	÷		248	76	LBL		303	01	1	
194	43	RCL		249	13	C		304	75	-	
195	11	11		250	43	RCL		305	43	RCL	
196	39	COS		251	14	14		306	06	06	
197	95	=		252	75	-		307	65	X	
198	70	RAD		253	43	RCL		308	43	RCL	
199	38	SIN		254	10	10		309	15	15	
200	60	DEG		255	95	=		310	38	SIN	
201	22	INV		256	65	X		311	33	X ²	
202	38	SIN	→ Δ μ	257	43	RCL		312	54)	
203	44	SUM		258	16	16		313	34	JX	
204	11	11		259	39	COS		314	54)	
205	61	GTO		260	75	-		315	92	RTN	
206	95	=	→ Retourne	261	53	(316	00	0	
207	76	LBL		262	43	RCL		317	00	0	
208	85	+	→ Sortie	263	16	16		318	00	0	
209	43	RCL	de boucle	264	10	E'		319	00	0	Retourne au demandeur
210	14	14		265	65	X					
211	55	÷		266	43	RCL		62	STO	72	GTO
212	43	RCL		267	16	16		63	STO	73	RTN
213	07	07		268	39	COS		64	STO	74	SUM
214	55	÷		269	75	-					92 INV 588

MENGER CODES

62	STO	72	GTO
63	STO	73	RTN
64	STO	74	SUM

TEXAS INSTRUMENTS
INCORPORATED

4.4 - Vincenty inverse

Le programme est utilisable avec le modèle 58, le temps de calcul est approximativement de 20 secondes pour chacun des azimuts direct et inverse.

Les mêmes remarques qu'à la section 4.1 sont à appliquer en ce qui concerne l'entrée et la sortie des valeurs angulaires.

Les valeurs des azimuts direct et inverse seront dans le même quadrant: une seule est exacte, l'autre diffère de 180° avec la valeur donnée. Pour savoir laquelle est laquelle, un petit dessin ou une brève réflexion est de rigueur.

TITLE VINCENTY INVERSE

PAGE 1 OF 3

PROGRAMMER André Verville

DATE 09-02-78

TI Programmable
Program Record

Partitioning (Op 17) Library Module Printer Cards

PROGRAM DESCRIPTION

Calcul géodésique inverse par la méthode de Vincenty, selon un article publié dans le Bulletin Géodésique vol. 51 (1977), pp. 242-243.

Utilisable avec TI-58 et TI-59

USER INSTRUCTIONS

STEP	PROCEDURE	ENTER	PRESS	DISPLAY
1	Entrée des paramètres (négatif pour longitude ouest)	ϕ_1 λ_1 ϕ_2 λ_2	[A] [B] [C] [D]	ϕ_1 λ_1 ϕ_2 λ_2
2	Résultats (attendre 20 secondes)		[E] [A'] [B'] [C']	a_{12} (180°) a_{21} (180°) λ_{12} d_{12}
	N.B. Angles traités en degrés décimaux N.B. Entrer un angle: DDD + .MMSSsss [DMS] = → DDD.ddddd Retrouver un angle: DDD.ddddd [INV] [INT] [INV] [DMS] → DDD.MMSSsss DDD.MMSSssss → degrés, minutes, secondes et fractions de secondes DDD.ddddd → degrés et fractions décimales de degrés			

USER DEFINED KEYS	DATA REGISTERS ([INV] [INT])			LABELS (Op 08)								
A entrée de ϕ_1	ϕ^0 utilisée	1 ⁰	Z ₁	INV	Int	C.E.	CLR	Ext	\times^2			
B entrée de λ_1	ϕ_1	1 ₁	M ₁	[A]	[1/2]	STO	RCL	SUM	y^2			
C entrée de ϕ_2	ϕ_2	1 ₂	N ₂	[EE]	[0]	[1]	[+]	GTO	X			
D entrée de λ_2	ϕ_2	1 ₃	X ₂	[SBR]	[–]	RST	[+]	R/S	*			
E calcul de a_{12}	λ_2	1 ₄	Z ₂	[4]	[GR]	RND	[0]	[1]				
F calcul de a_{21}	a	1 ₅	M ₂	[5]	[Int]	INT	[2]	[3]				
G calcul de λ_{12}	e^2	1 ₆	utilisée	[6]	[Inv]	INV	[4]	[5]				
H calcul de d_{12}	$(1 - e^2)$	1 ₇	utilisée	[7]	[Int]	INT	[6]	[7]				
I	N_1	1 ₈	utilisée	[8]	[Inv]	INV	[8]	[9]				
J	X ₁	1 ₉	utilisée	[9]	[Int]	INT	[9]	[0]				
FLAGS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

TITLE VINCENTY INVERSE

PAGE 2 OF 3

TI Programmable
Coding Form

PROGRAMMER _____ DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
000	76	LBL	← φ ₁	055	01	1		110	19	19	
001	11	A		056	95	=		111	65	X	
002	42	STO		057	42	STO	→ (1 - e ²)	112	43	RCL	
003	01	01		058	07	07		113	01	01	
004	91	R/S		059	08	8		114	39	COS	
005	76	LBL	← λ ₁	060	42	STO		115	95	=	
006	12	B		061	00	00		116	22	INV	
007	42	STO		062	43	RCL		117	30	TAN	→ a ₁₂
008	02	02		063	01	01		118	42	STO	
009	91	R/S		064	10	E [•]		119	17	17	
010	76	LBL	← φ ₂	065	43	RCL		120	91	R/S	
011	13	C		066	03	03		121	76	LBL	
012	42	STO		067	10	E [•]		122	16	A [°]	
013	03	03		068	43	RCL		123	43	RCL	
014	91	R/S		069	04	04		124	09	09	
015	76	LBL	← λ ₂	070	75	-		125	65	X	
016	14	D		071	43	RCL		126	43	RCL	
017	42	STO		072	02	02		127	00	00	
018	04	04		073	95	=		128	38	SIN	
019	91	R/S		074	42	STO	→ Δλ	129	55	÷	
020	76	LBL		075	00	00		130	53	C	
021	15	E		076	38	SIN		131	43	RCL	
022	06	6		077	65	X		132	19	19	
023	03	3		078	43	RCL		133	94	+/-	
024	07	7		079	13	13		134	65	X	
025	08	8		080	55	÷		135	43	RCL	
026	02	2		081	53	C		136	03	03	
027	00	0		082	53	C		137	39	COS	
028	06	6		083	43	RCL		138	75	-	
029	93	.		084	08	08		139	53	C	
030	04	4		085	65	X		140	43	RCL	
031	42	STO	→ a	086	43	RCL		141	12	12	
032	05	05		087	01	01		142	65	X	
033	33	X ²		088	39	COS		143	43	RCL	
034	75	-		089	75	-		144	03	03	
035	06	6		090	43	RCL		145	39	COS	
036	03	3		091	13	13		146	75	-	
037	05	5		092	65	X		147	43	RCL	
038	06	6		093	43	RCL		148	09	09	
039	05	5		094	00	00		149	65	X	
040	08	8		095	39	COS		150	43	RCL	
041	03	3		096	54)		151	00	00	
042	93	.		097	65	X		152	39	COS	
043	08	8		098	43	RCL		153	54)	
044	33	X ²		099	01	01		154	65	X	
045	95	=		100	38	SIN		155	43	RCL	
046	55	÷		101	75	-		156	03	03	
047	43	RCL		102	53	C		157	38	SIN	
048	05	05		103	43	RCL		158	95	=	
049	33	X ²		104	10	10		159	22	INV	
050	95	=		105	75	-					MERGED CODES
051	42	STO	→ e ²	106	43	RCL		62	STO	72	GTO
052	06	06		107	14	14		63	RCL	73	END
053	94	+/-		108	54)		64	SUM	74	SSR
054	85	+		109	42	STO					

TEXAS INSTRUMENTS
INCORPORATED

TITLE VINCENTY INVERSE

PAGE 3 OF 3

TI Programmable
Coding Form

PROGRAMMER _____

DATE _____

LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS	LOC	CODE	KEY	COMMENTS
160	30	TAN		215	85	+		270	00	00	
161	44	SUM		216	53	(271	42	STO	
162	17	17		217	43	RCL		272	17	17	
163	91	R/S		218	13	13		273	65	X	
164	76	LBL		219	65	X		274	43	RCL	
165	17	B'		220	43	RCL		275	16	16	
166	43	RCL		221	00	00		276	39	COS	
167	08	08		222	38	SIN		277	95	=	
168	44	SUM		223	54)		278	69	DP	
169	12	12		224	33	X ²		279	20	20	
170	43	RCL		225	85	+		280	72	ST*	+ X ₁ , X ₂
171	11	11		226	43	RCL		281	00	00	
172	44	SUM		227	19	19		282	43	RCL	
173	15	15		228	33	X ²		283	17	17	
174	02	2		229	95	=		284	65	X	
175	35	1/X		230	34	JK		285	43	RCL	
176	49	PRD		231	42	STO	+ d ₁₂	286	16	16	
177	17	17		232	19	19		287	38	SIN	
178	43	RCL		233	85	+		288	65	X	
179	15	15		234	24	CE		289	43	RCL	
180	65	X		235	45	YX		290	07	07	
181	43	RCL		236	03	3		291	95	=	
182	12	12		237	55	÷		292	69	DP	
183	55	÷		238	02	2		293	20	20	
184	02	2		239	04	4		294	72	ST*	+ z ₁ , z ₂
185	55	÷		240	55	÷		295	00	00	
186	53	(241	32	X ¹ T		296	43	RCL	
187	43	RCL		242	33	X ²		297	17	17	
188	15	15		243	95	=	+ l _{1,2}	298	45	YX	
189	65	X		244	91	R/S		299	03	3	
190	43	RCL		245	76	LBL		300	55	÷	
191	17	17		246	18	C'		301	43	RCL	
192	38	SIN		247	43	RCL	+ d ₁₂	302	05	05	
193	33	X ²		248	19	19		303	33	X ²	
194	85	+		249	91	R/S		304	65	X	
195	43	RCL		250	76	LBL		305	43	RCL	
196	12	12		251	10	E'		306	07	07	
197	65	X		252	42	STO		307	95	=	
198	43	RCL		253	16	16		308	69	DP	
199	17	17		254	38	SIN		309	20	20	
200	39	COS		255	33	X ²		310	72	ST*	+ M ₁ , M ₂
201	33	X ²		256	65	X		311	00	00	
202	95	=		257	43	RCL		312	69	DP	
203	32	X ¹ T		258	06	06		313	20	20	
204	43	RCL		259	94	+/-		314	92	RTN	retourne au demandeur
205	13	13		260	85	+		315	00	0	
206	65	X		261	01	1		316	00	0	
207	43	RCL		262	95	=		317	00	0	
208	00	00		263	34	JK		318	00	0	
209	39	COS		264	35	1/X		319	00	0	
210	75	-		265	65	X					MERGED CODES
211	43	RCL		266	43	RCL		62	STO	14	83 GTO
212	09	09		267	05	05		63	RCL	24	84 RTN
213	95	=		268	95	=		64	SUM	14	92 INV SBR
214	33	X ²		269	72	ST*	+ N ₁ , N ₂				TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED

5.0 - Conclusion

La méthode que Monsieur Vincenty nous propose possède tous les avantages sur celle de Monsieur Hradilek. Les imprécisions d'ordre numérique rencontrées dans cette dernière lui font perdre beaucoup de crédit. Dans un domaine comme les sciences géodésiques, de tels défauts sont souvent craints par les professionnels dans les résultats de leurs opérations de mesure.

Tout portait à croire que la méthode de Hradilek se tirerait beaucoup mieux d'affaire dans les calculs de lignes plus longues. Il n'en fut rien: on a rencontré une différence de 0.00013" en latitude et de 0.00008" en longitude, qui correspondent respectivement à des différences en distance de 4 mm en latitude et de 2.5 mm en longitude. Lors du même calcul par la méthode de Vincenty, les différences étaient de 0.000003" en latitude et de 0.000005" en longitude, résultats parfaits, puisqu'ils sont dans l'ordre d'arrondissement des valeurs de référence. Pour le calcul inverse, les résultats sont les mêmes en ce qui concerne les azimut direct et inverse, que l'on utilise la méthode de Hradilek ou celle de Vincenty; on note d'ailleurs la similitude des formules utilisées. Quant à l'imprécision du calcul par la loi des cosinus mentionnée dans la section 2.0, les résultats se sont améliorés avec la méthode de Hradilek appliquée à des distances plus longues: de 1.3 mm qu'elle était pour une distance de 33 km, l'erreur est passée à 0.7 mm pour une distance de 108 km. Le même calcul par la méthode de Vincenty nous

donne une différence en distance de 0.02 mm pour une ligne de 33 km et 0.01 mm pour une ligne de 108 km, ces valeurs sont considérées comme parfaites, puisqu'elles sont encore dans l'ordre d'arrondissement des valeurs de référence.

Les chiffres parlent par eux-mêmes. Je dois cependant rendre hommage à Monsieur Hradilek, qui a soulevé le problème en écrivant cet article dans le Bulletin Géodésique. De cette façon il a suscité un intérêt pour des solutions géodésiques plus simples et plus accessibles.
