

TP1: Modelo simple de canal inalámbrico con dos caminos.

Avetta, Gastón
Fundamentos de las comunicaciones inalámbricas

24 de agosto de 2022

1. Introducción

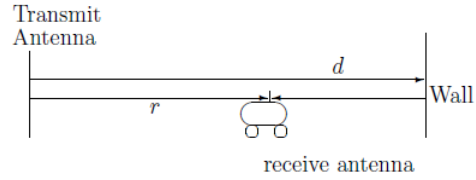
En este trabajo se describe la respuesta en frecuencia (en realidad, su módulo cuadrado) de un canal inalámbrico de dos caminos. En el dominio del tiempo (τ), su respuesta impulsiva es

$$h(\tau; t) = a_1(\tau)\delta(\tau - \tau_1(t)) + a_2(\tau)\delta(\tau - \tau_2(t)),$$

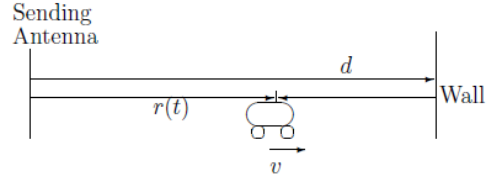
donde τ_i es el tiempo en el que la onda recorre el i -ésimo camino y a_i representa la atenuación que sufre la onda en el mismo ($i=1,2$). La dependencia de estos parámetros con el tiempo t hace referencia a que el canal inalámbrico no es estático y que sus propiedades cambian con el tiempo. Por suerte, estos cambios ocurren a una escala de tiempo mayor a la que nos interesa para analizar la respuesta impulsiva (representado por la variable τ).

2. Modelo de canal inalámbrico

Para este trabajo en particular, trabajaremos con el sistema de la figura 2.1, donde además del camino directo entre la antena transmisora y la receptora, se tiene el camino de la onda que se refleja en la pared a la derecha de la antena receptora.



(a) Antena receptora quieta.



(b) Antena receptora móvil.

Figura 2.1: Modelo de canal inalámbrico de dos caminos utilizado. [1]

De esta forma, tenemos que el tiempo que tarda la onda en recorrer cada camino es $\tau_1 = \frac{r(t)}{c}$ y $\tau_2 = \frac{2d-r(t)}{c}$. En el caso de la antena móvil (Fig. 2.1b), tenemos $r(t) = r_0 + v \cdot t$, mientras que para la antena fija (Fig. 2.1a), $r(t) = r_0$.

Si suponemos que la atenuación y las propiedades receptivas de la antena son similares para ambos caminos, entonces podemos decir que $|a_1| \approx |a_2|$. Por otro lado, dado que al reflejarse en la pared la onda cambia de fase en 180° , tenemos que $a = a_1 \approx -a_2$. Por lo tanto, la respuesta impulsiva del canal se puede aproximar por

$$h(\tau; t) = a(t) \cdot (\delta(\tau - \tau_1(t)) - \delta(\tau - \tau_2(t))).$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a esta respuesta impulsiva, obtendremos la respuesta en frecuencia del canal, la cual resulta

$$H(f; t) = a(t) \cdot (e^{j\theta_1} - e^{j\theta_2}),$$

donde $\theta_i = 2\pi f_c \tau_i(t)$, con $i = 1, 2$ y f_c es la frecuencia portadora de la señal transmitida.

Operando un poco con esta expresión (ver Apéndice 5), podemos ver que el módulo cuadrado de dicha respuesta en frecuencia resulta

$$|H(f; t)|^2 = 4|a|^2 \sin^2(2\pi \frac{f_c}{c} (d - r(t))), \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$).

3. Resultados

En ambos problemas, trabajamos con $a = 1$ y $d = 200$ metros.

3.1. Antena receptora móvil, frecuencia portadora fija.

Para el sistema representado por el esquema de la Fig. 2.1b y definiendo los parámetros

- $r_0 = 80$ metros,
- $v = 17 \frac{m}{s}$ ($60 \frac{km}{h}$),
- $f_c = 1$ GHz,

el módulo cuadrado de la respuesta en frecuencia del canal, a medida que pasa el tiempo y la antena receptora se desplaza, resulta ser el de la Fig. 3.1.

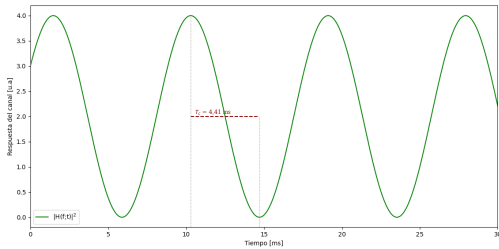


Figura 3.1: Respuesta en frecuencia del canal (módulo cuadrado) a medida que la antena receptora se desplaza, para una frecuencia de portadora de $f_c = 1$ GHz.

Con los valores asignados a los distintos parámetros, se obtiene un *tiempo de coherencia* $T_c = \frac{c}{4v \cdot f_c} \approx 4,41ms$. Este parámetro representa el

tiempo necesario para que la respuesta del canal pase de un máximo a un mínimo (o viceversa), debido a la interferencia (constructiva o destructiva, respectivamente) de las señales provenientes de ambos caminos. El valor obtenido analíticamente se puede corroborar observando lo graficado en la Fig. 3.1, donde la diferencia en tiempo entre un máximo y un mínimo resulta ser T_c .

Vale la pena notar que el valor de los parámetros d y r_0 no influyen para nada en el valor del tiempo de coherencia, sino que este depende de la variación de la posición de la antena en relación a la longitud de onda de la señal transmitida.

Otro concepto a analizar en este modelo es el *Doppler spread*. Dado que la antena receptora se está desplazando a velocidad v , una de las señales recibidas tiene un corrimiento a frecuencias más altas y el otro, a más bajas, provocando corrimiento en la frecuencia de la señal recibida para ambas señales. La diferencia entre estos corrimientos $D_s = D_2 - D_1 = 2 \cdot f_c \frac{v}{c}$ y representa la diferencia de frecuencias entre las dos señales que interfieren en la antena receptora. Esta interferencia implica un *batido* cuya modulación tiene una frecuencia $\frac{D_s}{2}$ y, por lo tanto, un período $\frac{2}{D_s}$. De esta forma, la diferencia de tiempo entre un máximo y un mínimo de interferencia, que es un cuarto de este período, resulta $T_c = \frac{1}{2D_s}$, relacionando así el Doppler spread con el tiempo de coherencia

3.2. Antena receptora fija, frecuencia portadora variable.

Para este sistema, esquematizado en la Fig. 2.1a y con la antena receptora fija en $r = 80$ metros, variando la frecuencia de portadora en ± 2 MHz alrededor de la frecuencia central $f_c = 1$ GHz, el módulo cuadrado de la respuesta en frecuencia del canal resulta el de la Fig. 3.2.

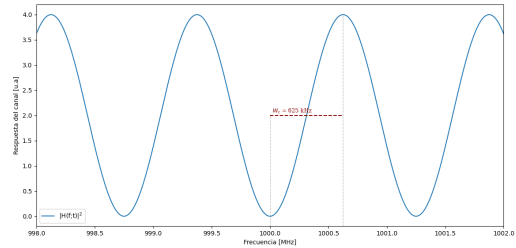


Figura 3.2: Respuesta en frecuencia del canal (módulo cuadrado) para distintos valores de f_c alrededor de 1 GHz, con la antena receptora fija.

El ancho de banda de coherencia resulta $W_c = \frac{c}{4 \cdot (d-r)} = 625 \text{ kHz}$. Análogo al tiempo de coherencia, este parámetro representa cuánto debe variar la frecuencia portadora para que la respuesta en frecuencia del canal pase de un máximo a un mínimo, debido a la interferencia (constructiva o destructiva) entre las señales provenientes de los distintos caminos.

Otro concepto relacionado es T_d , el *delay spread*, que es la diferencia entre los tiempos que tarda la señal en recorrer cada uno de los dos caminos posibles. Para el modelo propuesto (Fig. 2.1a), resulta $T_d = \frac{2d-r_0}{c} - \frac{r_0}{c} = 2 \frac{d-r_0}{c}$. Al traducir esta diferencia de tiempos a diferencia de distancias en longitud de onda de la señal y teniendo en cuenta que al alterar la frecuencia de la señal estamos alterando la longitud de la onda transmitida en ambos caminos, obtenemos que $W_c = \frac{1}{2T_d}$, pudiendo relacionar así el delay spread con el ancho de banda de coherencia.

4. Conclusiones

En este trabajo se logró ver la respuesta en frecuencia (su módulo cuadrado) del canal inalámbrico de dos caminos cuando se tiene una pared reflejante después de la antena receptora. Para poder analizar el tiempo de coherencia del mismo, se analizó el caso en que la antena receptora se desplaza a una velocidad constante v y se logró relacionar este concepto con el Doppler spread generado por este desplazamiento. Por otro lado, para analizar el ancho de banda de coherencia, se utilizó un modelo donde la antena receptora permanece siempre en la misma posición pero la frecuencia portadora varía alrededor de una frecuencia central, pudiendo relacionar además este concepto con el delay spread. También es considerable la analogía entre ambos casos, dado que para ambos modelos se tiene la misma forma funcional, pero con una variable independiente distinta y dependiendo del valor de distintos parámetros en cada caso.

5. Apéndice

Partiendo de la expresión obtenida al transformar,

$$H(f; t) = a(t) \cdot (e^{j\theta_1} - e^{j\theta_2}).$$

Sacando factor común, tenemos

$$H(f; t) = a(t) \cdot e^{j\theta_1} \cdot (1 - e^{j(\theta_2 - \theta_1)}),$$

Luego, definimos $\theta_d = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ y multiplicamos toda la expresión por $e^{j\theta_d} \cdot e^{-j\theta_d} = 1$, obteniendo

$$H(f; t) = a(t) \cdot e^{j\theta_d} \cdot e^{-j\theta_d} \cdot e^{j\theta_1} \cdot (1 - e^{2j\theta_d}),$$

y, distribuyendo $e^{-j\theta_d}$ dentro del paréntesis y reescribiendo $e^{j\theta_d} \cdot e^{j\theta_1}$,

$$H(f; t) = a(t) \cdot e^{j\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} (e^{-j\theta_d} - e^{j\theta_d}),$$

que, gracias a la identidad de Euler, es igual a

$$H(f; t) = -2j \cdot a(t) \cdot e^{j\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \text{sen}(\theta_d)$$

Reemplazando θ_d , θ_1 y θ_2 por sus definiciones, llegamos a

$$H(f; t) = -2j \cdot a(t) \cdot e^{j\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \text{sen}(2\pi \frac{f_c}{c} (d - r(t)))$$

y, al tomar módulo cuadrado, finalmente llegamos a la expresión 2.1

$$|H(f; t)|^2 = 4|a|^2 \text{sen}^2(2\pi \frac{f_c}{c} (d - r(t))).$$

Referencias

- [1] David Tse; Pramod Viswanath. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2004.