

Dinámica de sistemas acoplados

Avetta, Gastón
Redes neuronales

12 de septiembre de 2023

1. Neuronas Hodgkin-Huxley idénticas y conectadas simétricamente

Simular la dinámica de dos neuronas HH idénticas y conectadas simétricamente con interacciones sinápticas excitatorias. Tomar una corriente externa tal que las neuronas estén oscilando periódicamente (...)

Para realizar las simulaciones de este problema, utilizamos una corriente externa de $20 \frac{\mu A}{cm^2}$ y potenciales iniciales de -30 mV y -80 mV para las neuronas 1 y 2, respectivamente. Además, se varía la conductividad que caracteriza a la interacción sináptica, g_{syn} , en el rango entre 0,1 y $10,1 \frac{mS}{cm^2}$.

Todas las simulaciones son realizadas en Python y el método numérico utilizado es Runge-Kutta 5. El código en cuestión se encuentra adjunto en el apéndice al final del informe.

1.1. Caso excitatorio

En este caso, donde el potencial que caracteriza a la interacción sináptica, V_{syn} , es 0 mV, las neuronas se acoplan **en fase**. Es decir, luego de cierto tiempo, sus *spikes* de potencial ocurren al mismo tiempo. En la figura 1.1 se puede observar el comportamiento de dichas neuronas en función del tiempo para dos de los valores de g_{syn} simulados.

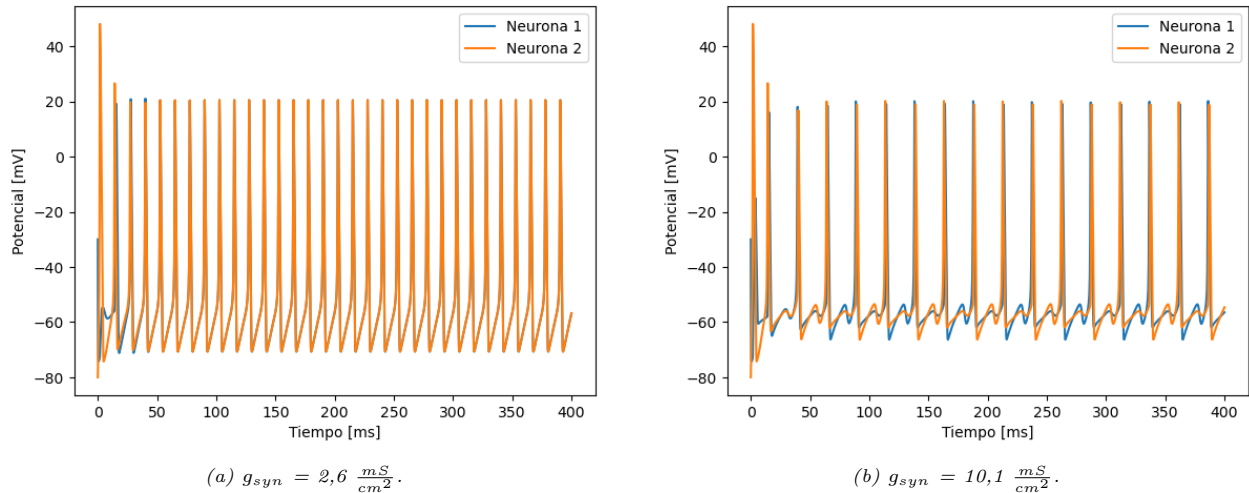


Figura 1.1: Potencial de ambas neuronas en función del tiempo para distintos valores de g_{syn} .

Se puede observar que en ambos casos las neuronas se acoplan en fase, teniendo picos de potencial en los mismos instantes de tiempo. En el caso de la figura 1.1a, luego de un breve período transitorio (aproximadamente 30 ms), el comportamiento de ambas neuronas pasa a ser idéntico en todo momento, mientras que en la figura 1.1, cuando no se trata de un máximo, los potenciales de ambas neuronas difieren.

Habiendo barrido todo un rango de valores de g_{syn} , se obtuvo la tasa de disparo de ambas neuronas y el tiempo que tarda el sistema en *estabilizarse*^(*) en la fase correspondiente para cada uno de estos valores. Estos resultados se grafican en la figura 1.2.

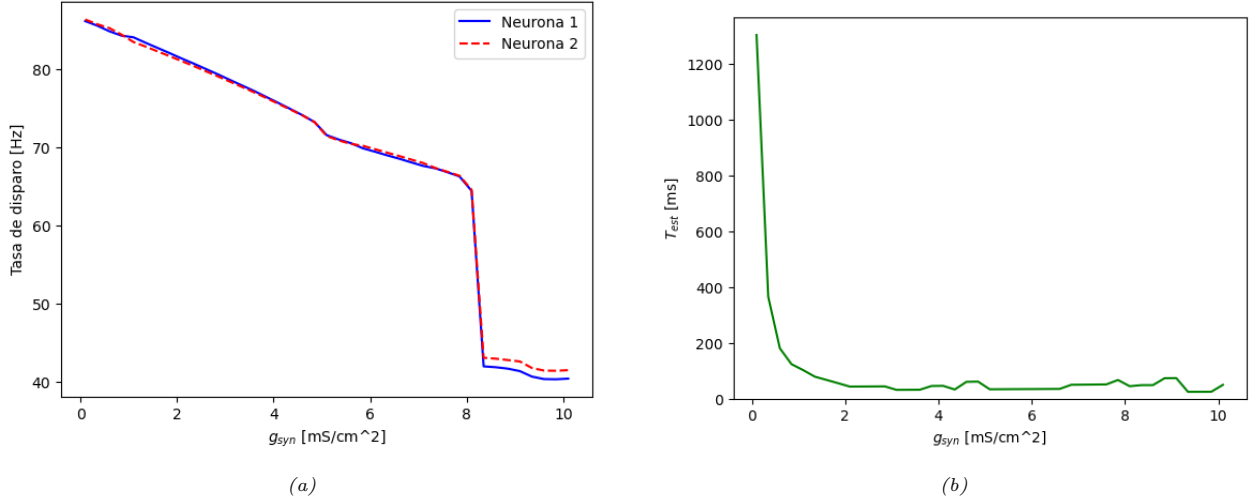


Figura 1.2: Tasa de disparo de ambas neuronas y tiempo de estabilización del sistema en función de g_{syn} para el caso excitatorio.

Lógicamente, la tasa de disparo de ambas neuronas es prácticamente idéntica sin importar el valor de la conductividad g_{syn} . Por otro lado, se puede concluir que, a medida que aumenta g_{syn} , dicha tasa de disparo disminuye considerablemente.

Por otro lado, el tiempo que tarda el sistema en estabilizarse en la fase indicada también disminuye al aumentar g_{syn} . Esto es de esperarse debido a que, a mayor g_{syn} , mayor es la influencia de cada neurona sobre la otra, logrando llegar al equilibrio más rápido.

1.2. Caso inhibitorio

Ahora, el potencial característico de la interacción sináptica es $V_{syn} = -80$ mV, lo cual provoca que las neuronas se acoplen **en contrafase**. En la figura 1.3 se puede ver el comportamiento de ambas neuronas para uno de los casos simulados.

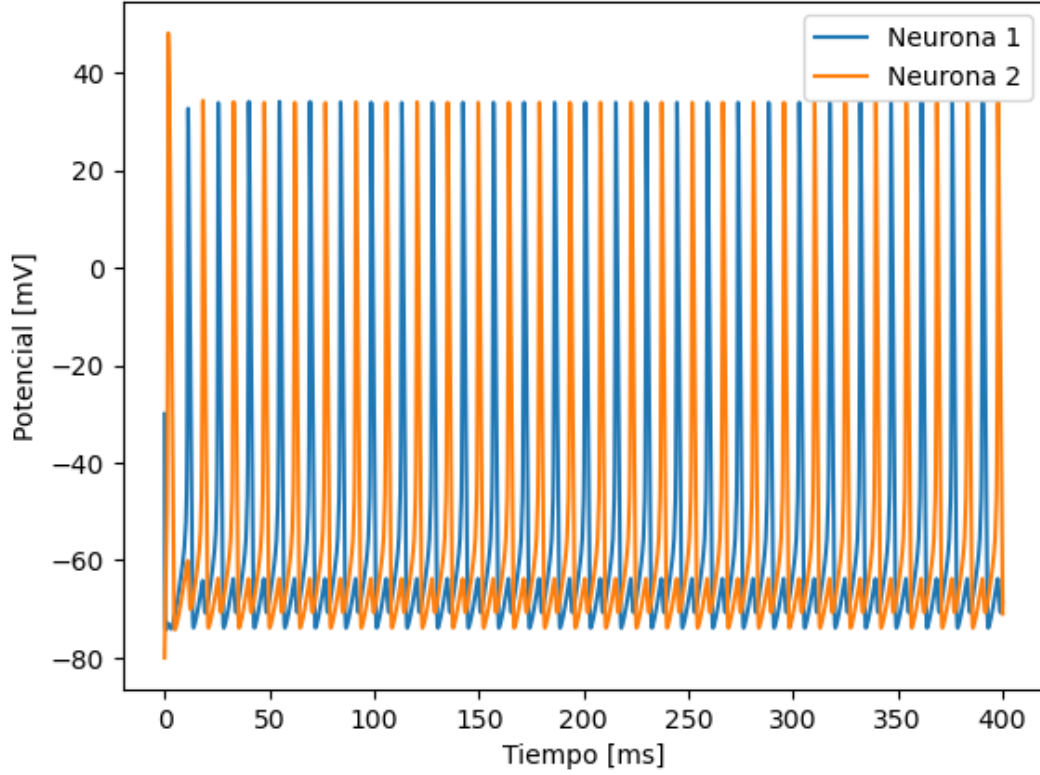


Figura 1.3: Potencial de ambas neuronas en función del tiempo para $g_{syn} = 7,6 \frac{mS}{cm^2}$.

Se puede observar que, como ya fue mencionado, las neuronas se acoplan en contrafase, es decir, los *spikes* de una neurona ocurren justo entre medio de los spikes de la otra.

A continuación, en la figura 1.4 se grafican la tasa de disparo de ambas neuronas y el tiempo de estabilización de la fase entre ellas para los distintos valores de g_{syn} simulados.

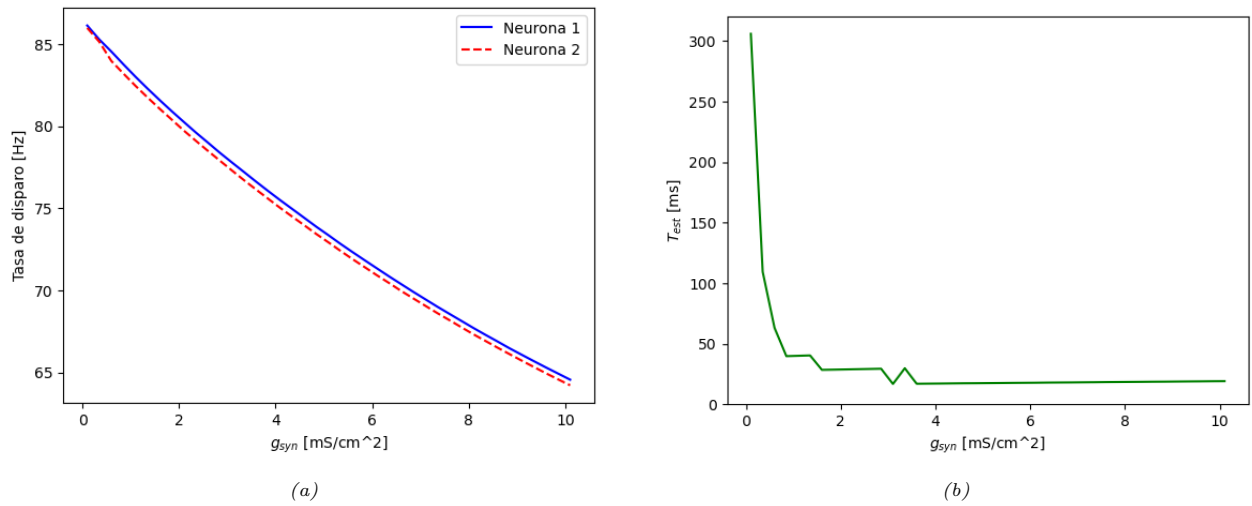


Figura 1.4: Tasa de disparo de ambas neuronas y tiempo de estabilización del sistema en función de g_{syn} para el caso inhibitorio.

Las conclusiones son, en general, las mismas que en el caso anterior: al aumentar g_{syn} disminuyen tanto

la tasa de disparo de ambas neuronas como el tiempo que tarda en *estabilizarse*^(*) la fase entre sus spikes. Vemos que, en este caso, la tasa de disparos decrece *continuamente* a medida que aumenta la conductividad, mientras que en el caso excitatorio (Fig. 1.2a) dicha curva tiene un quiebre alrededor de $g_{syn} \approx 8 \frac{mS}{cm^2}$

Tiempo de estabilización

(*) Para calcular el tiempo en el que se estabiliza el sistema:

- Se calcula la diferencia de tiempo entre los picos de potencial de ambas neuronas.
- Conociendo el período con el que obtienen estos picos, dicha diferencia de tiempos se transforma en una diferencia de fases.
- Se busca el instante de tiempo en el cual la fase entre ambas neuronas difiere menos de 5° de la fase esperada (0° para el caso excitatorio, 180° para el inhibitorio) para cuatros spikes consecutivos. De ocurrir esto, se dice que el sistema ya está estable

2. Poblaciones de neuronas excitatorias e inhibitorias

(...) Encontrar bajo qué condiciones este sistema tiene una solución en la cual la actividad de las dos poblaciones es diferente de 0 y en qué condiciones esta solución es estable.

Tenemos un sistema de dos poblaciones de neuronas, excitatorias e inhibitorias, respectivamente, caracterizadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de la expresión 2.1,

$$\begin{aligned}\tau \frac{dh_e}{dt} &= -h_e + g_{ee}f_e - g_{ei}f_i + I_e \\ \tau \frac{dh_i}{dt} &= -h_i + g_{ie}f_e - g_{ii}f_i + I_i,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde f_e y f_i son funciones de h_e y h_i , respectivamente, según la expresión

$$f_a(h_a) = \begin{cases} h_a & \text{si } h_a \geq 0 \\ 0 & \text{si } h_a < 0, \end{cases}$$

donde $a = \{e, i\}$.

Buscamos soluciones donde ambas poblaciones tienen actividades distintas de 0, es decir, $h_{e,i} > 0$, lo cual implica $f_{e,i} = h_{e,i}$.

Planteamos el sistema lineal correspondiente a este caso:

$$\begin{aligned}h_e \cdot (g_{ee} - 1) + h_i \cdot (-g_{ei}) &= -I_e \\ h_e \cdot g_{ie} + h_i \cdot (-g_{ii} - 1) &= -I_i.\end{aligned}$$

Al tratarse de un sistema de dos variables y dos ecuaciones linealmente independiente, tiene una única solución, la cual es

$$\begin{aligned} h_e &= \frac{I_e \cdot (1 + g_{ii}) - I_i \cdot g_{ei}}{g_{ei}g_{ie} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} - g_{ee} + 1} \\ h_i &= \frac{I_i \cdot (1 - g_{ee}) - I_e \cdot g_{ie}}{g_{ei}g_{ie} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} - g_{ee} + 1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tanto para h_e como para h_i , hay dos formas de cumplir con la condición de que sea mayor a 0: que tanto el denominador como el numerador sean mayores o menores a 0.

Analicemos ahora las condiciones para que la solución hallada sea estable. Para eso, debemos analizar la matriz A, donde el elemento a_{ij} es la derivada de la i-ésima ecuación diferencial respecto a la j-ésima variable de la expresión 2.1.

$$\begin{pmatrix} g_{ee} - 1 & -g_{ei} \\ g_{ie} & -g_{ii} - 1 \end{pmatrix}$$

Como vimos en el análisis de la *Teoría de bifurcaciones* para sistemas bidimensionales, lo único que necesitamos analizar de esta matriz para conocer la estabilidad de la solución son su traza y su determinante, los cuales resultan:

$$\begin{aligned} Tr(A) &= g_{ee} - g_{ii} - 2 \\ det(A) &= g_{ei}g_{ie} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} - g_{ee} + 1. \end{aligned}$$

Para que las soluciones halladas anteriormente sean soluciones estables, se debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} Tr(A) &< 0 \\ det(A) &> 0. \end{aligned}$$

Podemos ver que, en la expresión 2.2, el denominador de ambas soluciones es $det(A)$. Por lo cual, teniendo en cuenta la condición de estabilidad 2.3

$$det(A) = g_{ei}g_{ie} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} - g_{ee} + 1 > 0, \quad (2.3)$$

surge que, para que las soluciones halladas sean mayores a 0, se deben cumplir las condiciones de la expresión 2.4, las cuales restringen los valores de las corrientes externas de cada población en función de las distintas conductividades del sistema.

$$\begin{aligned} I_e &> I_i \cdot \left(\frac{g_{ei}}{g_{ii} + 1} \right) \\ I_e &> I_i \cdot \left(\frac{g_{ee} - 1}{g_{ie}} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además de la condición 2.3 ya mencionada, para que las soluciones halladas sean estables se debe cumplir con la condición 2.5 sobre la traza de la matriz A.

$$g_{ee} - g_{ii} < 2. \quad (2.5)$$

Código utilizado

A continuación, se adjunta el *Jupyter Notebook* donde se realizaron las simulaciones para el ejercicio 1 (Sección 1):

<https://drive.google.com/file/d/1xWhzh9Z1iP66yX0KLKkIXfuTzek3Y5H3/view?usp=sharing>.

En el mismo se pueden simular tanto el caso inhibitorio como el excitatorio, sólo hay que comentar/descomentar tres secciones de código indicadas allí mismo.