Mémoire M2

Antoine VEZIER

18 avril 2018

Table des matières

Introduction

Conventions

— Sauf mention explicite du contraire, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les résultats où l'hypothèse sur la caractéristique est nécessaire seront clairement balisés.
— Un anneau désigne un anneau commutatif unitaire.
— Un groupe algébrique désigne un groupe algébrique affine.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Algèbre commutative

On collecte dans cette partie des définitions et résultats d'algèbre commutative utilisés dans la suite. Soit A un anneau, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et $f \in A$ un élément. On note $A_\mathfrak{p}$ la localisation de A en la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$, et A_f la localisation de A en la partie multiplicative $\{1, f, f^2, ...\}$.

1.1.1 Extensions entières d'anneaux

Définition 1.1.1.1 (Anneau intègralement clos)**.** Un anneau A est intégralement clos si il est intègre et égal à sa clôture intégrale.

Remarque 1.1.1.2. Il existe une notion plus générale qu'il est utile de mentionner pour la consistance avec la terminologie de variété normale que nous verrons plus loin. Pour un anneau quelconque A, on dit que A est normal si tout localisé de A en idéal premier est un anneau intègre et intégralement clos. On note qu'un anneau intègre est intégralement clos si et seulement si il est normal ([6] 5.13). Mentionnons que nous ne rencontrerons pas dans ce mémoire d'anneaux normaux non-intègres, donc la définition ci-dessus sera suffisante.

Théorème 1.1.1.3. *Soit A un anneau intègre noetherien intégralement clos. Alors*

1. *Tous les premiers associés d'un idéal principal non-nul sont de hauteur 1.*
2. $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1} A_\mathfrak{p}$.

Démonstration. Voir [4] 11.5 □

Théorème 1.1.1.4. *Soit A un anneau noetherien intégralement clos. Alors,*
A est factoriel $\iff$ Tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

Démonstration. Voir [4] 20.1 □

1.1.2 Anneaux locaux, Anneaux de valuation discrète

Définition 1.1.2.1. Un anneau local noethérien A de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$ est régulier si $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Théorème 1.1.2.2. *Un anneau local régulier est factoriel.*

Démonstration. Voir [4] 20.3 □

Théorème 1.1.2.3. *Soit A un anneau intègre et I un idéal fractionnaire de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *I est inversible*
2. *I est un A-module projectif*
3. *I est de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'idéal fractionnaire $I_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ est principal.*

Démonstration. Voir [4] 11.3 □

Théorème 1.1.2.4 (Critère de Serre pour la normalité)**.** *Soit A un anneau intègre. Alors A est intégralement clos si et seulement si il satisfait les deux conditions suivantes*

1. *Pour tout idéal premier de hauteur $\leqslant 1$, L'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier.*
2. *Les idéaux premiers associés d'un idéal principal non-nul sont de hauteur 1.*

Démonstration. Voir [4] 23.8 □

Proposition 1.1.2.5 (Critère de Serre pour la normalité)**.** *Soit $k[x_1, ..., x_n]$ un anneau de polynômes, et $f \in A$ un élément premier. Alors $A = k[x_1, ..., x_n]/(f)$ satisfait la condition 2 du théorème précédent.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un premier associé de $A/(f)$, on veut montrer qu'il est de hauteur 1. En remplaçant A par sa localisation en $\mathfrak{p}$, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Par définition, il existe $g \in A \setminus (f)$ tel que $\mathfrak{p} = \{x \in A \mid gx = 0 \bmod(f)$. Soit $y = g/f \in \mathrm{Frac}(A)$. Si $y\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, c'est à dire $(x \in A$ et $gx = 0 \bmod(f)) \implies (g/f)x = 0 \bmod(f)$, ou encore $(g/f^n)x = 0 \bmod(f)$ pour tout $n > 0$. On en déduit $g \in (f)$, contradiction. Ainsi $y\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, ou encore $\mathfrak{p} = (f/g)$. Par le théorème de l'idéal principal de Krull (voir 1.3.1.2) on en déduit $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1$. □

1.1.3 Algèbres graduées

1.2 Schémas

Notre principale référence est [3]. On résume dans cette partie certains faits et définitions.

1.2.1 Généralités

Soit A un anneau, on note $X = \mathrm{Spec}\, A$ l'ensemble de ses idéaux premiers, il est naturellement muni d'une topologie en définissant que les fermés sont les parties de la forme $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A. On munit X d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$, dit faisceau structural, constitué pour tout ouvert $U \subset X$ des sections $s : U \mapsto \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ telles que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, et pour tout $\mathfrak{p} \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ et des éléments $a, f \in A$ tels que pour tout $\mathfrak{q} \in V$, on ait $f \notin \mathfrak{q}$ et $s(\mathfrak{q}) = a/f \in A_{\mathfrak{q}}$. Les sections s sur un ouvert U sont appelées les fonctions régulières sur U. On peut définir le même faisceau structural d'une manière différente en remarquant que X possède une base d'ouverts, dits principaux, de la forme $X_f := X \setminus \mathcal{V}_X((f))$ avec $f \in A$. On pose alors $\mathcal{O}(X_f) = A_f$ et on vérifie grâce aux propriétés $(A_f)_g \simeq A_{fg}$ et $X_{fg} = X_f \cap X_g$ que cela définit bien un "faisceau" sur cette base d'ouverts. qui se prolonge donc de manière unique en un faisceau sur X. En particulier on obtient immédiatement $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et sans difficulté $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}$.

Définition 1.2.1.1 (Espace annelé)**.** Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ tel que les tiges $\mathcal{O}_{X,x}$ soient des anneaux locaux en tout point $x \in X$.

Un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ et un morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ tel que les morphismes induits entre les tiges soient locaux, c'est à dire $f_x^{\sharp -1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.1.2 (Schéma affine, schéma)**.** Un schéma affine est un espace annelé isomorphe au spectre d'un anneau muni de son faisceau structural. Un schéma est espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathcal{O}_U)$ soit un schéma affine. Un morphisme de schémas est un morphisme d'espaces annelés.

Tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ définit un morphisme de schémas affines $(f, f^\sharp) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. En effet, on pose $f(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Puis, pour tout ouvert $V \subset \operatorname{Spec} A$, $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)$, et $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$, on pose $f^\sharp(s)(\mathfrak{p}) := \varphi_\mathfrak{p} \circ s \circ f(\mathfrak{p})$, où $\varphi_\mathfrak{p} : A_{f(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$ est la localisation de φ. Réciproquement, tout morphisme entre schémas affines $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ définit un morphisme d'anneaux en prenant les sections globales $\Gamma(\operatorname{Spec} A, f^\sharp) : A \to B$. Ces deux procédés sont inverses l'un de l'autre et on obtient :

Proposition 1.2.1.3. *Les foncteurs* Spec *et* $\Gamma(.)$ *définissent une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des schémas affines et la catégorie des anneaux (commutatifs).*

Soit X un schéma, $f \in \mathcal{O}(X)$ une fonction régulière sur X, et x un point de X. On dit que f s'annule en x si son germe n'est pas inversible dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $U = \operatorname{Spec} A$ un voisinage affine de x, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier correspondant à x. Alors f s'annule en x revient à dire que $f_{|U} \in \mathfrak{p}$. On peut alors par exemple parler de l'idéal de $\mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières s'annulant sur un fermé F de X, on le note $\mathcal{I}_X(F)$. Ainsi, F définit un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_F : U \mapsto \mathcal{I}_U(F \cap U)$ radicaux qui définit une structure de schéma $(F, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_F))$ sur F, où i est l'inclusion. Si $X = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine, on a alors pour un idéal $\mathfrak{a}$ et une partie Y de X les formules

$$\mathcal{I}_X(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}, \quad \mathcal{I}_X(\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}, \quad \mathcal{V}_X(\mathcal{I}_X(Y)) = \overline{Y}$$

Remarque 1.2.1.4. On remarque que si on considère une algèbre affine, c'est à dire une k-algèbre de type fini réduite, et que l'on suppose de plus le corps algébriquement clos. Alors si l'on remplace "premier" par "maximal" dans les formules ci-dessus relatives aux opérations $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$, on retombe sur les définitions classiques de ces opérations qui donnent les ensemble algébriques et leurs équations dans un espace affine de dimension finie sur k. En effet le Nullstellensatz assure dans ce cas que les points de l'ensemble algébrique correspondent aux idéaux maximaux de l'algèbre et que $\mathcal{I}(Y) = \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{m}_y$.

Par ailleurs, une fonction régulière s sur un ouvert U d'un schéma X peuvent être vue comme une fonction à valeurs dans les différents corps résiduels $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ pour chaque $\mathfrak{p} \in U$ en prenant $s(\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Dans le cas d'une variété affine, c'est à dire $X = \operatorname{Spec} A$ où A est une k-algèbre affine sur un corps algébriquement clos, tous les corps résiduels sont isomorphes à k. D'après le Nullstellensatz, l'évaluation de $s \in A$ en les points fermés, c'est à dire les idéaux maximaux, coïncide avec l'évaluation de s en les points correspondants de l'ensemble algébrique associé à A. Enfin, considérons deux k-algèbres affines A et B sur un corps algébriquement clos, et X, Y les variétés affines correspondantes. Étant donné un morphisme $f : X \to Y$, le morphisme de k-algèbres correspondant s'identifie à $\varphi : A \to B, s \mapsto s \circ f$. En considérant X et Y plongés dans un espace affine et en prenant pour s les différentes coordonnées de Y on retrouve la définition classique que les morphismes entre ensembles algébriques sont les applications polynomiales.

Construction 1.2.1.5 (Recollement de schémas)**.** Soit $(X_i)_{u \in I}$ une famille de schémas. Supposons $\forall i, j$ on ait des ouverts $X_{ij} \subset X_i$ et des isomorphismes $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ tels que $\forall i, j, k \in I$ on ait :

1. $X_{ii} = X_i$ et $f_{ii} = id$
2. $f_{ij}^{-1}(X_{ji} \cap X_{jk}) = X_{ij} \cap X_{ik}$
3. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \cap X_{ik} \arrow[rr, "f_{ik}"] \arrow[dr, "f_{ij}"'] & & X_{ki} \cap X_{kj} \\
& X_{ji} \cap X_{jk} \arrow[ur, "f_{jk}"'] &
\end{tikzcd}$$

Alors on peut définir un schéma X comme la réunion disjointe des X_i modulo la relation d'équivalence $x \sim x' \iff (x \in X_{ij}, x' \in X_{ji}$ et $f_{ij}(x) = x')$. On note $f_i : X_i \to X$ les applications canoniques, et on munit X de la topologie finale associée aux f_i. On vérifie que chaque f_i est une immersion ouverte dont on note U_i l'image. Le faisceau structural est définit en recollant les $\mathcal{O}_{U_i} := f_{i\star}\mathcal{O}_{X_i}$, ses sections sur un ouvert $W \subset X$ étant

$$\mathcal{O}_X(W) = \{(s_i)_{i \in I} \mid s_i \in \mathcal{O}_{U_i}(W \cap U_i), f_{ij}(s_i|_{W \cap U_i \cap U_j}) = s_j|_{W \cap U_i \cap U_j}\}$$

Définition 1.2.1.6. Soit S un schéma. Un S-schéma, où schéma sur S, est un schéma X muni d'un morphisme $X \to S$ appelé morphisme structural.

Soit S un schéma de base. Les S-schémas forment une sous-catégorie où l'on demande que morphismes soient compatibles avec les morphismes structuraux. Le produit existe dans cette catégorie, on l'appelle le produit fibré sur S. Cette construction se fait par recollement en remarquant que pour des schémas affines X, Y sur un schéma affine S, le produit fibré $X \times_S Y$ est naturellement $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_S(S)} \mathcal{O}_Y(Y)$. En effet, cela vient de 1.2.1.3 et du fait que le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_S(S)$ est le co-produit dans la catégorie des $\mathcal{O}_S(S)$-algèbres. Comme tout anneau est naturellement une $\mathbb{Z}$-algèbre, tout schéma est naturellement un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Le produit de deux schéma est par définition le produit sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

1.2.2 Quelques propriétés des schémas

Schémas réduits, irréductibles, intègres, noetheriens

Définition 1.2.2.1 (Schéma réduit)**.** Un schéma X est réduit si pour tout $x \in X$ les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont réduits.

Proposition 1.2.2.2. *Un schéma X est réduit si et seulement si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est réduit.*

Démonstration. Supposons X réduit et $f \in \mathcal{O}(U)$ nilpotent. Si f est non-nul, alors il existe un germe f_x non-nul pour un point $x \in U$. Mais alors $f_x^n = 0$ pour un $n > 0$, et donc $f_x = 0$, contradiction. Réciproquement, soit $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ nilpotent alors f_x est la classe d'une fonction nilpotente $f \in \mathcal{O}(U)$ pour un ouvert $U \subset X$. Cela implique $f_x = 0$. □

Définition 1.2.2.3 (Schéma irréductible)**.** Un schéma irréductible si l'espace topologique sous-jacent est irréductible, c'est à dire qu'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres.

Définition 1.2.2.4 (Schéma noetherien)**.** Un schéma X est noetherien si c'est une union finie d'ouverts affines U_i tels que $\mathcal{O}(U_i)$ est un anneau noetherien.

Proposition 1.2.2.5. *Soit X un schéma noetherien. Alors*

1. *Les tiges de X sont des anneaux noetheriens. Tout sous-schéma ouvert ou fermé de X est noetherien.*
2. *X est quasi-compact et $\mathcal{O}(U)$ est noetherien pour tout ouvert affine $U \subset X$.*

Par le lemme de Zorn, on montre que l'ensemble des fermés irréductibles d'un schéma X admet des éléments maximaux, appelés composantes irréductibles. Si X est noetherien, ce nombre est fini et X s'écrit donc de manière unique comme réunion de ses composantes irréductibles. Pour tout point $x \in X$, les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ correspondent bijectivement aux composantes irréductibles de X passant par x.

Proposition 1.2.2.6. *Un schéma $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et $\mathfrak{a}$ un idéal.*

1. *$\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est premier*
2. *Soit $(\mathfrak{p}_i)$ les premiers minimaux de A. Alors $(\mathcal{V}_X(\mathfrak{p}_i))$ sont les composantes irréductibles de X.*
3. *X est irréductible si et seulement si A admet un unique idéal premier minimal. Dans ce cas, cet idéal est nécessairement (0), et A est intègre.*

Définition 1.2.2.7 (Schéma intègre)**.** Un schéma est intègre si il est réduit et irréductible.

Proposition 1.2.2.8. *Un schéma X est intègre si et seulement si $\mathcal{O}(U)$ est intègre pour tout ouvert $U \subset X$ non-vide.*

Un point x d'un espace topologique X est dit générique si $\overline{\{x\}} = X$. Ainsi, si X admet un point générique, il est irréductible. Pour un schéma X on a en fait une correspondance bijective entre fermés irréductibles de X et points génériques donnée par $x \mapsto \overline{\{x\}}$.

Un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ est intègre si et seulement si A est intègre. Alors le point générique η de X correspond à l'idéal (0), et $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est la localisation $A_{(0)}$, c'est à dire le corps des fractions de A. Plus généralement, on définit le corps des fonctions rationnelles d'un schéma intègre X comme les fonctions régulières sur un ouvert non-vide de X. Comme tout ouvert non-vide contient le point générique η de X, il s'agit de $\mathcal{O}_{X,\eta}$ qui est bien un corps d'après ce qui précède. On le note $k(X)$.

Proposition 1.2.2.9. *Soit X un schéma intègre et $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles.*

1. *Pour tous ouverts $U \subset V \subset X$ non-vides, les applications suivantes sont injectives*

$$\mathcal{O}(V) \xhookrightarrow{res_{V,U}} \mathcal{O}(U) \xhookrightarrow{f \mapsto f_\eta} k(X)$$

2. *Pour tout ouvert non-vide $U \subset X$ et tout recouvrement $U = \cup_i U_i$, on a dans $k(X)$:*

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

1.2.3 Quelques propriétés des morphismes de schémas

Immersion ouverte, immersion fermée

Définition 1.2.3.1 (Immersion ouverte, immersion fermée)**.** Un morphisme de schémas $(f, f^\sharp) : X \to Y$ est une immersion ouverte (resp. fermée) si f est une immersion ouverte topologique (resp. immersion fermée topologique), et si $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{X,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme (resp. surjective) pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.3.2. Un schéma X est quasi-affine si il est quasi-compact et il existe une immersion ouverte dans un schéma affine.

Morphismes de type fini

Définition 1.2.3.3 (Morphisme quasi-compact)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est quasi-compact si l'image réciproque tout ouvert affine de Y est quasi-compact.

Définition 1.2.3.4 (Morphisme de type fini)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est de type fini si il est quasi-compact et pour tout ouvert affine $V \subset Y$, et tout ouvert affine $U \subset f^{-1}(V)$, le morphisme canonique $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ fait de $\mathcal{O}_X(U)$ une $\mathcal{O}_Y(V)$-algèbre de type fini. Un S-schéma est dit de type fini si son morphisme structural est de type fini.

Remarque 1.2.3.5. Pour qu'un morphisme soit de type fini il suffit qu'il existe un recouvrement par des ouverts affines qui satisfont la condition de la définition.

Morphismes finis, normalité

Définition 1.2.3.6 (Morphisme fini)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est fini si pour tout ouvert affine V de Y, si la $\mathcal{O}_Y(V)$-algèbre $(\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)), f^\sharp(V))$ est finie.

Remarque 1.2.3.7. Pour qu'un morphisme soit fini il suffit qu'il existe un recouvrement par des ouverts affines qui satisfont la condition de la définition.

Définition 1.2.3.8 (Schéma normal)**.** Un point d'un schéma est dit normal si l'anneau local en ce point est intégralement clos. Un schéma est dit normal si il est normal en chacun de ses points.

Proposition 1.2.3.9. *Un schéma intègre X est normal si et seulement si pour tout ouvert affine $U \subset X$ non-vide, $\mathcal{O}(U)$ est intégralement clos.*

Soit X un schéma intègre, et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement affine de X. Pour chaque $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ on pose $\widetilde{U_i} = \operatorname{Spec} \widetilde{A_i}$ où $\widetilde{A_i}$ est la clôture intégrale de A_i, c'est naturellement un schéma intègre sur U_i. De plus, comme la normalisation commute à la localisation, on a des isomorphismes naturels $\widetilde{U_i \cap U_j} \simeq \widetilde{U_i} \cap \widetilde{U_j}$. On construit alors par recollement un schéma intègre et normal $\widetilde{X}$ sur X qui satisfait de plus la propriété universelle que tout morphisme dominant d'un schéma intègre Z vers X se factorise de manière unique à travers $\widetilde{X}$. On dit que $\widetilde{X}$ est la normalisation de X. De plus, si X est de type fini sur un corps k, alors d'après **??**, le morphisme structural de $\widetilde{X}$ est fini.

Morphismes affines

Définition 1.2.3.10 (Morphisme affine)**.** Un morphisme de variétés algébriques $\varphi : X \to Y$ est dit affine si pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(V)$ est affine.

Exemple 1.2.3.11. Un morphisme de schémas affines $\varphi : X \to Y$ est affine. En effet, soit V un ouvert affine de Y et $U = \varphi^{-1}(V)$. En considérant le diagramme commutatif ci-dessous on constate que l'on a $U \simeq (\varphi \times i_2)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\} \subset X \times V$. Comme $X \times V$ est affine, U aussi.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Morphismes séparés

Définition 1.2.3.12 (Morphisme séparé, schéma séparé)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ est l'unique morphisme $X \to X \times_Y X$ tel que la composition avec les projections $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ est l'identité de X. On dit que f est séparé si le morphisme diagonal est une immersion fermée. Un S-schéma est séparé si son morphisme structural est séparé. En particulier un schéma est séparé si il est séparé sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Les morphismes entre schémas affines sont séparés et en particulier les schémas affines sont séparés. En effet, considérons $X = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} B$, le morphisme diagonal est donné par $\rho : B \otimes_A B \to B, x \otimes 1 \mapsto x, 1 \otimes y \mapsto y$ qui est clairement surjectif, c'est donc une immersion fermée. Le critère suivant est utile et nous dit de plus que les intersections d'affines sont affines dans les schémas séparés.

Proposition 1.2.3.13. *Soit X un schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *X est séparé*
2. *Pour tous ouverts affines U et V de X, $U \cap V$ est affine et le morphisme naturel $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U \cap V), f \otimes g \mapsto f_{U\cap V} g_{U \cap V}$*
3. *Il existe un recouvrement affine (U_i) tel que pour tout i, j, $U_i \cap U_j$ est affine et le morphisme naturel $\mathcal{O}(U_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(U_j) \to \mathcal{O}(U_i \cap U_j), f \otimes g \mapsto f_{U_i \cap U_j} g_{U_i \cap U_j}$*

Proposition 1.2.3.14. *Le morphisme composé de deux morphismes séparés est séparé.*

Morphismes propres

1.3 Variétés algébriques

Dans ce mémoire, on travaille principalement dans la catégorie des k-schémas réduits séparés de type fini sur k, où k est un corps algébriquement clos fixé. Ces objets sont appelés des k-variétés algèbriques, ou tout simplement variétés. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des k-variétés algébriques au sens de [10] en ne considérant que les points fermés. D'ailleurs, par un point d'une variété X, on entendra point fermé, sauf mention du contraire. Soit X_0 le sous espace des points fermés de X muni de la topologie induite. Alors les treillis des ouverts des topologies de X et X_0 sont isomorphes. On bénéficie ainsi des résultats sur les morphismes et la dimension démontrés par exemple dans [10] ou [1] chap I. On rappel que le corps de base est supposé de caractéristique nulle.

Un schéma de type fini sur un corps est noetherien, on en déduit que toute partie localement fermée d'une variété admet une unique structure de variété, et tout fermé se décompose de manière unique en une union finie de composantes irréductibles. Enfin, le produit sur k préserve l'irréductibilité.

1.3.1 Dimension des variétés algébriques

Généralités

Définition 1.3.1.1 (Dimension d'une variété)**.** Soit X une variété. La dimension de X est la borne supérieure des longueurs de chaînes de parties fermées irréductibles

$$\emptyset \subsetneq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_r$$

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. La codimension de F dans X, notée $\operatorname{codim}_X F$ est la borne supérieure des longueurs de chaînes de parties fermées irréductibles

$$F \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_r$$

Soit X une variété, et $X = \cup_{i=1}^r X_i$ sa décomposition en composantes irréductibles. Alors $\dim X = \sup_i \dim X_i$. De plus, si X est irréductible (i.e $r = 1$), alors pour tout ouvert $U \subset X$ non-vide, on a $\dim X = \dim U$. On se ramène donc ainsi à l'étude de la dimension des variétés affines. On suppose donc $X = \operatorname{Spec} A$ affine. Par la correspondance entre fermés irréductibles de X et idéaux premier de A on obtient $\dim X = \dim A$, où $\dim A$ est la dimension de Krull de A. En particulier, comme A est une k-algèbre de type fini intègre, on a le résultat fondamental (Voir [4] 5.6)

$$\dim X = \dim A = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Frac} A$$

Cela assure en particulier que la dimension d'une variété est finie. Par ailleurs, la hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A correspond à la codimension de la sous-variété F qu'il définit. Pour une k-algèbre de type fini intègre, on a $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$. On en déduit

$$\dim X = \dim F + \operatorname{codim}_X F, \qquad \text{et } \dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}, \text{ pour tout } x \in X \text{ (fermé)}$$

Théorème 1.3.1.2. *Soit X une variété irréductible, $U \subset X$ un ouvert non-vide et $f \in \mathcal{O}_X(U)$ non nul et non-inversible. Soit Z une composante irréductible de $\mathcal{V}_U((f))$. Alors $\dim Z = \dim(X) - 1$.*

Démonstration. Voir [1] I.7 Th.2, après réduction au cas X affine, la preuve consiste en une réduction au cas facile où $\mathcal{O}(X)$ est factoriel. □

Ce théorème peut aussi être vu comme une version géométrique du théorème de l'idéal principal de Krull qui assure les idéaux premiers minimaux sur un idéal principal d'un anneau noetherien sont au plus de hauteur 1.

Dimension des fibres d'un morphisme

Théorème 1.3.1.3. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles. Alors il existe un ouvert $U \subset Y$ tel que*

1. *$U \subset f(X)$*
2. *Pour tout fermé irréductible $W \subset Y$ tel que $U \cap X \neq \emptyset$, et pour toute composante irréductible Z de $f^{-1}(W)$ telle que $f^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$, on a $\dim Z = \dim W + r$, où $r := \dim X - \dim Y$*

En particulier, pour tout $Y \in U$, on a $\dim f^{-1}(y) = r$.

On s'intéresse maintenant aux morphismes dont les fibres sont des ensembles finis. Cette étude s'achève avec un résultat important pour la suite, on obtient un critère pour qu'un morphisme bijectif en caractéristique zéro soit un isomorphisme.

Définition 1.3.1.4 (Morphisme quasi-fini)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés. On dit que f est quasi-fini si les fibres de f sont finies.

Théorème 1.3.1.5 (Théorème principal de Zariski)**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel quasi-fini séparé de variétés irréductibles. On suppose de plus que Y est normale. Alors f est une immersion ouverte.*

Démonstration. Voir [9] 4.4.6 □

Proposition 1.3.1.6. *Soient X, Y deux variétés algébriques affines irréductibles de même dimension et $f : X \mapsto Y$ un morphisme dominant. Alors il existe $g \in \mathcal{O}(Y)$ non nulle tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit fini, surjectif avec des fibres de même cardinal.*

Démonstration. Par hypothèse, l'extension $k(Y) \xrightarrow{f^*} k(X)$ est algébrique finie, disons de degré n. En caractéristique zéro on peut trouver $u \in k(X)$ tel que $k(X) = k(Y)[u]$. On remarque que l'on peut imposer $u \in \mathcal{O}(X)$. On considère $P := P_{min}(u, k(Y)) = T^n + a_1T^{n-1} + ... + a_0$. En réduisant au même dénominateur on a $P \in \mathcal{O}(Y)_v[T]$ pour un $v \in \mathcal{O}(Y)$. De plus, en prenant l'intersection avec d'autres ouverts principaux on peut supposer $\mathcal{O}(X)_v$ entier sur $\mathcal{O}(Y)_v$, et $\mathcal{O}(Y)_v[u]$ intégralement clos, ce qui donne $\mathcal{O}(Y)_v[u] = \mathcal{O}(X)_v$ et $\mathcal{O}(X)_v$ entier sur $\mathcal{O}(Y)_v$. Ainsi $f : X_v \to Y_v$ est fini et donc surjectif car dominant.

On a donc une factorisation de $f^\sharp(Y_v) : \mathcal{O}(Y)_v \xrightarrow{p_1^*} \mathcal{O}(Y)_v[T] \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}(Y)_v[T]/(P) \xrightarrow{\overline{ev_f}} \mathcal{O}(Y)_v[u]$ qui donne $f : X_v \xrightarrow{\simeq} \{(y,t) \in Y_v \times \mathbb{A}^1 \mid P(y)(t) = 0\} \hookrightarrow Y_v \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p_1} Y_v$. Ainsi le cardinal de la fibre $f^{-1}(y), y \in Y_v$ est le cardinal de l'ensemble des zéros du polynôme $P(y)(T)$. On peut s'assurer que cet ensemble est de cardinal constant en intersectant à nouveau avec l'ouvert principal du discriminant de P qui est un polynôme en les coefficients de P. □

Ce résultat reste vrai en caractéristique positive, voir [10] 5.1.6 pour une preuve légèrement différente dans ce cadre. On y montre que le cardinal de la fibre générale est $[k(X) : k(Y)]_s$. En revanche pour le corollaire immédiat suivant, la caractéristique zéro est essentielle (penser par exemple au morphisme de Frobenius $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{A}^1$).

Corollaire 1.3.1.7. *Avec les hypothèses de 1.3.1.6, si de plus f est injectif, alors il existe $g \in \mathcal{O}(Y)$ non-nulle tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit un isomorphisme.*

Théorème 1.3.1.8. *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme bijectif de variétés irréductibles avec Y normale. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après 1.3.1.3 on peut appliquer 1.3.1.7 et on obtient ainsi que f est birationnel. Ensuite, 1.3.1.5 nous dit que f est une immersion ouverte. Mais f est surjective par hypothèse, c'est donc un isomorphisme. □

1.3.2 Variétés lisses

Définition 1.3.2.1 (Variété lisse, point régulier)**.** Soit X une variété. On dit que $x \in X$ est un point régulier si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. On dit que la variété est lisse si chacun de ses points est régulier. Un point est singulier si il n'est pas régulier.

Par définition, un point x d'une variété X irréductible est régulier si l'espace tangent $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ en x est de dimension $\dim X$. L'ensemble des point singuliers de X est un fermé propre. Dans le cas d'une variété normale, ce fermé est de codimension $\geqslant 2$ comme on le verra en 1.3.3.2, on dit dans ce cas que la variété est régulière en codimension 1. Cela explique d'ailleurs la nécessité de la condition 1 de 1.1.2.4. Réciproquement, le théorème 1.1.2.2 entraine qu'un point lisse est un point normal. On dispose d'un critère effectif pour déterminer si un point d'une variété est lisse.

Proposition 1.3.2.2. *Soit X une variété affine que l'on peut supposer plongée dans $\mathbb{A}^n$ avec des équations $f_1, ...f_t \in k[x_1, ..., x_n]$. Un point p de X est régulier si et seulement si le rang de la matrice $((\partial f_i/\partial x_j)(p))_{i,j}$ est $n - r$, où $r := \dim X$.*

Démonstration. Voir [3] I.5.1 □

1.3.3 Propriétés des variétés normales

Proposition 1.3.3.1. *Une variété normale est union disjointe de ses composantes irréductibles.*

Démonstration. Si un point $p \in X$ d'une variété se situe à l'intersection de deux composantes irréductibles, l'anneau local en p contient au moins deux premiers minimaux et n'est donc pas intègre. □

Proposition 1.3.3.2. *Le lieu singulier d'une variété normale est un fermé de codimension $\geqslant 2$*

Démonstration. □

Proposition 1.3.3.3. *Soit X une variété normale irréductible. Pour toute sous-variété fermée Y de codimension $\geqslant 2$, la restriction $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus Y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On peut traiter le problème localement et supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine. On considère f régulière sur $U := X \setminus Y$. On remarque que tout $p \in \operatorname{Spec} A$ de hauteur 1 est un point de U. En effet, dans le cas contraire il contiendrait les idéaux premiers correspondants aux composantes irréductibles de Y, ce qui est impossible car ils sont de hauteur $\geqslant 2$. On en déduit, en tenant compte de l'irréductibilité de X, des injections $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_p = A_p$ dans les tiges qui peuvent être vues comme des inclusions dans le corps des fonctions rationnelles de X. On a ainsi en tenant compte de 1.1.1.3 un morphisme $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \cap_p A_p = A = \mathcal{O}(X)$ qui est inverse de la restriction, d'où le résultat. □

Proposition 1.3.3.4. *Soit X une variété affine irréductible. Pour toute variété irréductible Y contenant X, le complémentaire $Y \setminus X$ est de codimension 1.*

Démonstration. On considère l'application de normalisation η_Y. Alors l'application induite $\eta_Y^{-1}(X) \to X$ est l'application de normalisation de X. On en déduit que $\eta_Y^{-1}(X)$ est affine. De plus, comme η_Y est finie, la dimension du complémentaire de X ne change pas en remplaçant Y par sa normalisation et X par sa préimage. On peut donc supposer Y normal.

Quitte à soustraire de Y les composantes irréductibles de codimension 1 de $Y \setminus X$, on peut supposer $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus X) \geqslant 2$. Soit V un ouvert affine de Y. Par irréductibilité de Y, on a $U := X \cap V$ non-vide et $\operatorname{codim}_V(V \setminus U) = \operatorname{codim}_Y(Y \setminus X) \geqslant 2$. Ainsi d'après 1.3.3.3, la restriction $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ est un isomorphisme. Comme U et V sont affines, cela signifie que l'inclusion $U \subset V$ est un isomorphisme, d'où $U = V$ puis $X = Y$. □

Chapitre 2

Groupes algébriques et théorie des invariants

Notre principale référence pour les groupes algébriques est [10]. Dans ce chapitre, pour coller aux notations traditionnelles, on notera $k[X]$ l'algèbre des coordonnées d'une variété affine X, au lieu de $\mathcal{O}(X)$.

2.1 Groupes algébriques affines

2.1.1 Généralités

2.1.2 G-variétés, représentations

Définition 2.1.2.1 (G-variété)**.** Soit G un groupe algébrique. Une G-variété est une variété algébrique X sur laquelle G agit algébriquement. C'est à dire qu'on a un morphisme de groupes de G dans le groupe d'automorphismes X.

Proposition 2.1.2.2. *Soit G un groupe algébrique, X une G-variété et $x \in X$.*

1. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*
2. *Toute composante irréductible de $G.x$ a pour dimension $dim(G) - dim(G.x)$.*
3. *$\overline{G.x} \setminus G.X$ est une union d'orbites de dimension $< dim(\overline{G.x})$.*
4. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*

Démonstration. On suppose d'abord G connexe.

1. D'après **??**, $G.x$ contient un ouvert dense U de $\overline{G.x}$. Or, G est réunion de translatés de U.
2. D'après **??**, il existe un ouvert dense de $G.x$ tel que toute les fibres de cet ouvert ont pour dimension $\dim(G){-}\dim(G.x){=}\dim(G_x)$.
3. $\overline{G.x} \setminus G.x$ est un fermé propre de $\overline{G.x}$ donc de dimension inférieure d'après **??**. Par ailleurs, $\overline{G.x}$ est G-stable donc $\overline{G.x} \setminus G.x$ est réunion d'orbites.
4. Enfin si $\dim(G.x)$ est minimal, $\overline{G.x} \setminus G.x$ est vide

Enfin, G n'est pas connexe, on écrit $G = \cup_{i=1}^n g_i G^\circ .x$ avec $g_1 = e$. D'où $\overline{G.x} = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^\circ .x}$. Les $\overline{g_i G^\circ}$ sont égales où disjointes, c'est donc la décomposition en composantes irréductibles. On construit un ouvert de $\overline{G.x}$ inclus dans $G.x$ en posant $U = G^\circ .x \setminus \cup_{i=2}^n \overline{g_i G^\circ .x}$. On a $\dim(G^\circ){-}\dim((G^\circ)_x){=}\dim(G){-}\dim(G_x)$ car $(G_x)^\circ \subset (G^\circ)_x \subset G_x$, d'où $\dim(G_x){=}\dim((G^\circ)_x)$. Or chaque composante de $G.x$ est l'adhérence d'un orbite pour G°, d'où 2) d'après le cas connexe. On a $\overline{G.x} \setminus G.x = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^\circ .x} \setminus g_i G^\circ .x = \cup_{i=1}^n g_i(\overline{G^\circ .x} \setminus G^\circ .x)$ qui est une union finie de fermés de dimension inférieure à $\overline{G.x}$ ce qui prouve 3). On utilise le même argument pour prouver 4) dans le cas général. $\square$

Définition 2.1.2.3 (G-module, simple, semi-simple)**.** Une représentation de G, ou G-module (rationnel) est un couple (V, ρ) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de groupes algébriques de G dans $GL(V)$.
On étend cette définition au cas où V est de dimension infinie, on demande alors que V soit réunion de G-modules de dimension finie.
On dit qu'un G-module est simple si il n'admet pas de sous G-module non trivial. On dit qu'un G-module est semi-simple si tout sous G-module admet un G-module supplémentaire.

Proposition 2.1.2.4. *Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. $k[X]$ est naturellement muni d'une action $(g.f)(x) := f(g^{-1}.x), \forall f \in k[X], g \in G, x \in X$*
Muni de cette action, $k[X]$ un G-module.

Démonstration. On note $a : G \times X \to X$ le morphisme associé à l'action de G. Cela donne $\forall g, x \in G \times X$, $a^*(f)(g, x) = g^{-1}.f(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i(x)$, d'où $g.f = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i \in k[X]$. Ainsi les translaté $g.f$ pour $g \in G$ engendrent un k-ev $V(f)$ de dimension finie et G-stable.
De plus l'action est algébrique. En effet $\forall l \in V(f)^*$, qu'on prolonge en $l' \in \mathrm{Vect}_k(\psi_1, ..., \psi_r)^*$. On a $\forall h \in G, g \mapsto l(g.(h.f)) = \sum_{i=1}^r \varphi_i((gh)^{-1})l'(\psi_i) \in k[G]$.
Finalement $k[X] = \cup_{f\in k[X]}V(f)$ est un G-module. □

Théorème 2.1.2.5. *Soit G un groupe algébrique et X une G variété. X est isomorphe en tant que G-variété à une sous G-variété fermée d'un G-module de dimension finie.*

Corollaire 2.1.2.6. *Tout groupe algébrique est linéaire.*

Définition 2.1.2.7 (Groupe réductif)**.** Un groupe algébrique G est dit réductif si tout G-module est semi-simple.

Exemple 2.1.2.8. Les groupes finis et les groupe diagonalisables sont réductifs.

2.1.3 Groupes quotients

Théorème 2.1.3.1. *Soit G un groupe algébrique et $H \leqslant G$ fermé.*
Alors il existe un G-module V de dimension finie et une ligne $L \subset V$ telle que $H = Stab_G(L) := \{g \in G \mid g.v \in L, \forall v \in L\}$.

Théorème 2.1.3.2. *Soit G un groupe algébrique et $H \lhd G$ fermé.*
Alors il existe un G-module (V, ρ) de dimension finie tel que $H = \mathrm{Ker}\,\rho$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il prouve l'existence des groupes quotients dans la catégorie des groupes algébriques. Le groupe quotient est alors unique à isomorphisme près, c'est une conséquence formelle de la propriété universelle du quotient.

Théorème 2.1.3.3 (Car. 0)**.** *Soient $G, H, (V, \rho)$ comme dans le théorème précédent, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques tel que $H \subset \mathrm{Ker}\, f$.*

Alors il existe une unique factorisation
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"] & G' \\ \rho(G) \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme φ recherché existe en tant que morphisme de groupes abstraits, il est G-équivariant pour les actions naturelles de G sur $\rho(G)$ et G' via ρ et f. Concrètement cela signifie $\forall g_1, g_2 \in G, \varphi(\rho(g_1)\rho(g_2)) = f(g_1)\varphi(\rho(g_2))$. Si G est connexe, d'après le lemme suivant, φ est un morphisme sur un ouvert U non-vide de $\rho(G)$. Or on a un recouvrement de $\rho(G)$ par des $g.U$. En écrivant pour $x \in g.U, \varphi(x) = f(g)\varphi(g^{-1}.x))$, on constate que φ est un morphisme de groupes algébriques.
Supposons G quelconque mais $H \leqslant G^\circ$. Comme φ est algébrique sur le sous-groupe G°/H d'après ce qui

précède, on a φ algébrique partout à nouveau par G-équivariance.
On peut se ramener au cas précédent en procédant en deux étapes. Dans un premier temps, on quotiente par le sous-groupe normal connexe H° (on a bien $H^\circ \leqslant G^\circ$), puis on quotiente par le sous-groupe normal fini H/H°. Il reste donc à prouver le cas H fini, c'est un corollaire direct du théorème 2.2.2.2. $\square$

Lemme 2.1.3.4. *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles. Soit $g : X \to Z$ constant sur les fibres de f. Alors il existe $h \in \mathcal{O}(Y)^*$ et une factorisation*

$$\begin{tikzcd} X_h \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ Y_h \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère $\varphi = (f, g) : X \to Y \times Z$ et le diagramme commutatif ci-contre. Comme f est dominant, π_1 l'est aussi. De plus $\overline{\varphi(X)}$ est irréductible et $\varphi(X)$ contient un ouvert dense de $\overline{\varphi(X)}$. Par ailleurs comme g est constante sur les fibres de f on vérifie que π_1 est injective sur $\varphi(X)$. Par le corollaire 1.3.1.7, π_1 réalise un isomorphisme $\overline{\varphi(X)}_h \xrightarrow{\pi_1} Y_h$ pour un $h \in \mathcal{O}(Y)$ non-nul. Finalement, le morphisme recherché est $Y_h \xrightarrow{\pi_2 \pi_1^{-1}} Z$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & \overline{\varphi(X)} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "i=\subset"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Y & Y \times Z \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\square$

2.1.4 Groupes diagonalisables, actions de groupes diagonalisables

Groupes diagonalisables

Soit G un groupe algébrique. Le groupe $X^*(G)$ des caractères de G est un sous-groupe de $k[G]^\times$ qui est de type fini comme on le verra dans la partie 3.2.5. On remarque que X^* est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes algébriques dans la catégorie des groupes abéliens de type fini, l'image d'un morphisme $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ étant simplement la (co)-restriction $\varphi^* {}^{|X^*(G_1)}_{|X^*(G_2)}$ du comorphisme φ^* entre les algèbres de coordonnées. On signale qu'en caractéristique $p > 0$, les groupes de caractères ont de plus la propriété d'être sans p-torsion. Tout ce qui suit reste vrai en caractéristique p, avec cette contrainte supplémentaire sur les groupes de caractères.

Exemple 2.1.4.1.
1. $X^*(GL_n) = \{\det^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. En effet, $k[GL_n]^\times = \{\lambda \det^k \mid k \in \mathbb{Z}, \lambda \in k^*\}$, puisque $k[X_{ij}]$ est factoriel et det irréductible. En évaluant en I_n, on a nécessairement $\lambda = 1$. Comme $\det^k$ est un caractère, le résultat suit.
2. $X^*(SL_n) = 1$ car $D(SL_n) = SL_n$.
3. Les unités de $k[\mathbb{G}_m]$ sont les monômes. On en déduit que les caractères sont exactement les $t \mapsto t^k, k \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on remarque que $X^*(G_1 \times G_2) = X^*(G_1) \times X^*(G_2)$, d'où $X^*(D_n) = \{\text{monômes à coefficient unitaire}\} \simeq \mathbb{Z}^n$.

On remarque que les caractères de D_n engendrent $k[D_n]$ comme k-ev, ils en forment donc une k-base par le lemme de Dedekind qui assurent que les caractères sont libres dans $\mathrm{Map}(D_n, k)$. On a plus généralement :

Proposition 2.1.4.2. *Soit G un groupe algébrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *G est diagonalisable (i.e. $\simeq$ à un sous-groupe fermé de D_n)*
2. *$k[G] = Vect_k(X^*(G))$.*
3. *Tout G-module est somme directe G-modules de dimension 1.*

Démonstration.
1. 1) $\Longrightarrow$ 2) La restriction $k[D_n] \xrightarrow{res_G} k[G]$ est surjective et la restriction d'un caractère est un caractère.

2. 2) $\Longrightarrow$ 3) G est abélien, car $\forall \chi \in X^*(G)$, $g, h \in G, \chi(gh) = \chi(hg)$. C'est donc vrai pour toute fonction régulière, on en conclut $gh = hg$.
   On observe que l'action naturelle de G sur $k[G]$ est semi-simple. En effet, les caractères forment une base de diagonalisation de $k[G]$. Ainsi G est semi-simple par la décomposition de Jordan. Soit (V, ρ) le G-module considéré et $W \subset V$ un sous G-module de dimension finie, disons n. Par la décomposition de Jordan, $\rho(G)$ est semi-simple. De plus, c'est un sous groupe abélien fermé de GL_n. Il est donc conjugué à un sous-groupe fermé de D_n. On voit ainsi que $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(G)} V_\chi$, où $V_\chi := \{v \in v \mid g.f = \chi(g)f, \forall g \in G\}$. En effet, ils sont en somme directe, et tout élément de V se décompose de cette manière.
3. 3) $\Longrightarrow$ 1) On peut supposer $G \subset GL_n$, et considérer l'action naturelle sur k^n après choix d'une base $(e_1, ..., e_n)$. Par hypothèse, on peut écrire $k^n = (f_1) \oplus ... \oplus (f_n)$, avec les (f_i) sous G-module de dimension 1. G est donc conjugué à un sous-groupe de D_n.

□

Ce constat motive la définition suivante :

Définition 2.1.4.3 (Tore, Groupe diagonalisable)**.** Un groupe diagonalisable est un groupe algébrique G tel que $k[G] = \mathrm{Vect}_k(X^*(G))$. Un tore est un groupe diagonalisable connexe.

On travaille désormais dans la catégorie des groupes diagonalisables. On considère un groupe diagonalisable G et le groupe $X^{**}(G) := (X^*)^2(G)$.

Proposition 2.1.4.4. *G et $X^{**}(G)$ sont naturellement isomorphes en tant que groupes abstraits, et aussi en tant que groupes algébriques par transport de structure. L'isomorphisme est $ev_G : G \to \mathrm{Hom}(X^*(G), \mathbb{G}_m), g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$.*

Démonstration. ev_G est injective : Soit $g \in G$ tel que $\chi(g) = 1 = \chi(e_G), \forall \chi \in X^*(G)$. Alors $g = e_G$ car G est un groupe diagonalisable.
ev_G est surjective : Soit $\varphi \in \chi^{**}(G)$. On a un prolongement unique de φ en un morphisme de k-algèbre $k[X^*(G)] = k[G] \to k$ qui est donc de la forme $k[G] \to k, f \mapsto f(g)$ pour un $g \in G$. En restreignant à $X^*(G)$, on trouve que $\varphi = \mathrm{ev}_G(g)$. □

Autrement dit on a un isomorphisme de foncteurs $(X^*)^2 \simeq Id$, d'où une équivalence de catégories entre les groupes diagonalisables et les groupes abéliens de type fini. Une autre façon de voir cela est d'introduire l'algèbre de groupe d'un groupe abélien de type fini M, c'est par définition $k[M] = \{\sum_{finie} \lambda_g g,\ \lambda_g \in k, g \in G\}$ avec la multiplication définie par l'opération de groupe de G. La propriété suivante montre que l'on construit ainsi un autre inverse de $X^*(.)$

Proposition 2.1.4.5. *Soient, M, M_1, M_2 des groupes abéliens de type fini, et G un groupe diagonalisable. Alors $k[M]$ est de type fini, réduite et on a $k[M_1 \oplus M_2] \simeq k[M_1] \otimes k[M_2]$. De plus, $k[M]$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Hopf et on a $k[G] = k[X^*(G)]$ et donc $G = \mathrm{Spec} \circ k[X^*(G)]$.*

Démonstration. On a deux morphismes d'algèbre $k[M_1] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_1} \mapsto e_{(m_1,0)}$ et $k[M_2] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_2} \mapsto e_{(0,e_{m_2})}$, d'où l'existence d'un morphisme $k[M_1] \otimes k[M_2]$ dont on vérifie que c'est un isomorphisme. Comme on a $M \simeq \mathbb{Z}^r \oplus (\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$, il suffit de traiter les cas $M = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a $k[\mathbb{Z}] \simeq k[t, t^{-1}]$ qui est intègre, de type fini, et réduite. On a $k[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}] \simeq k[t]/(t^d - 1)$. On voit, par le théorème chinois par exemple, que cette algèbre de type fini non-intègre est réduite si et seulement si les racine de $t^d - 1$ sont simples, ce qui est le cas en caractéristique zéro.
Enfin la structure d'algèbre de Hopf sur $k[M]$ est donnée par $\Delta(e_m) = e_m \otimes e_m$, $i(e_m) = e_{-m}$, $e(e_m) = e_0$. □

Corollaire 2.1.4.6. *Soit G un groupe diagonalisable. Alors :*

1. *G est isomorphe au produit direct d'un tore et d'un groupe abélien fini.*
2. *G est un tore $\iff$ $X^*(G)$ est libre de type fini $\iff$ G est connexe.*

Action d'un groupe diagonalisable sur une variété affine

On a montré dans la partie précédente que l'algèbre des coordonnées d'un groupe diagonalisable G était naturellement munie d'une $X^*(G)$-graduation. Cela peut être vu comme la traduction algébrique de l'action de G sur lui même par multiplication à gauche. On précise, cela ci-dessous en montrant que les foncteurs Spec et $k[.]$ réalisent une équivalence de catégories entre les variétés affines munies d'une action d'un groupe diagonalisable et les algèbres graduées par un groupe abélien de type fini. On a déjà l'équivalence entre variétés affines et algèbres affines. Il s'agit donc de vérifier que les (co)-restrictions des deux foncteurs $k[.]$ et Spec sont bien définies et que les actions et graduations sont préservées.

Construction 2.1.4.7. Soit H un groupe diagonalisable et X une H-variété affine. Le H-module $k[X]$ est somme directe de H-module de dimension 1 d'après la partie précédente et on peut écrire :

$$k[X] = \bigoplus_{\chi \in X^*(H)} V_\chi, \text{ où } V_\chi := \{f \in k[X] \mid h.f = \chi(h)f, \forall h \in H\}$$

On voit immédiatement que cette somme directe est $X^*(H)$-graduée. De plus, cette construction est fonctorielle, en effet en considérant les diagrammes commutatifs ci-dessous. Le premier est la traduction de la donnée d'un morphisme $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ d'une H-variété affine X vers une H'-variété affine X'. Le second est obtenu par passage aux algèbres de coordonnées.

$$\begin{array}{ccc} H \times X & \xrightarrow{a_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\varphi}\times\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ H' \times X' & \xrightarrow{a_2} & X' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} k[H] \otimes k[X] & \xleftarrow[a_1^*]{} & k[X] \\ {\scriptstyle \widetilde{\varphi}^*\otimes\varphi^*}\uparrow & & {\scriptstyle \varphi}\uparrow \\ k[H'] \otimes k[X'] & \xleftarrow[a_2^*]{} & k[X'] \end{array}$$

Le petit calcul ci-dessous montre que $\forall f \in V'_{\chi'} \subset k[X'],$ on a $\varphi^*(f) \in V_{\widetilde{\varphi}^*(\chi')}$, ce qui montre que $(\widetilde{\varphi}^*, \varphi^*)$ est un morphisme d'algèbres graduées.

$$\forall h \in H,\, x \in X,\, \varphi^*(f)(h.x) = a_1^*\varphi^*(f)(h,x) = (\widetilde{\varphi} \otimes \varphi)a_2^*(f)(h,x) = \widetilde{\varphi}^*(\chi')(h)\varphi^*(f)(x)$$

Construction 2.1.4.8. Soit K un groupe abélien de type fini et A une k-algèbre affine K-graduée. On pose $X := \mathrm{Spec}(A)$ et on choisit des générateurs homogènes $f_{\omega_1}, ..., f_{\omega_r}$ de A, ce qui donne une immersion fermée $i : X \to k^r, x \mapsto (f_1(x), ..., f_r(x))$. On transporte la graduation à $k[k^r] = k[t_1, ..., t_r]$ en posant $\deg(t_i) = \omega_i$, ce qui fait de $k[i(X)] = k[t_1, ..., t_r]/\operatorname{Ker} i^* \xrightarrow{\overline{i^*}} A$ un isomorphisme d'algèbres graduées. Enfin, on munit k^r de l'action diagonale associée aux caractères $\chi^{\omega_1}, ..., \chi^{\omega_r}$ de $H := \mathrm{Spec}(k[K])$, c'est à dire $\forall h \in H,\, t \in k^r,\, h.t := (\chi^{\omega_1}(h)t_1, ..., \chi^{\omega_r}(h)t_r)$. On a donc concrètement pour $f := \sum \alpha_{i_1,...,i_r} t_1^{i_1}...t_r^{i_r} \in k[k^r],\ f(h.t) = f(\chi^{\omega_1}(h)t_1, ..., \chi^{\omega_r}(h)t_r) = \sum \alpha_{i_1,...,i_r} \chi^{\sum i_k\omega_k}(h) t_1^{i_1}...t_r^{i_r}$. Ainsi on a, $f \in k[k^r]_\omega \iff \forall (i_1, ..., i_r),\, \sum_k i_k\omega_k = \omega \iff f(h.t) = \chi^\omega(h) \sum \alpha_{i_1,...,i_r} t_1^{i_1}...t_r^{i_r} = \chi^\omega(h)f(t), \forall h \in H$. Cette condition montre que l'idéal homogène $\operatorname{Ker} i^*$ est H-stable et donc que $i(X)$ est une H-variété. On transporte en retour cette action sur X et on voit que l'action obtenue est indépendante du choix initiale des f_i, en effet la condition d'homogénéité exprimée ci-dessus définit complètement le comorphisme de l'action de $H : a^* : A \to k[K] \otimes A,\ f_\omega \mapsto \chi^\omega \otimes f_\omega$.
Pour finir, vérifions la fonctorialité. Soit $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ un morphisme entre la K-algèbre graduée A et la K'-algèbre graduée A'. La construction montre que l'on définit deux morphismes $a_1 : A \to k[K] \otimes A$ et $a_2 : A' \to k[K'] \otimes A'$. Et on a,

$$\forall h_\omega \in A_\omega,\, (\widetilde{\varphi} \otimes \varphi) \circ a_1(h_\omega) = (\widetilde{\varphi} \otimes \varphi)(\chi^\omega \otimes h_\omega) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

$$\forall h_\omega \in A_\omega,\, a_2 \circ \varphi(h_\omega) = a_2(\varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

D'où le diagramme commutatif de gauche ci-dessous, qui donne le diagramme de droite par application du foncteur Spec. Ce dernier diagramme finit de prouver la fonctorialité.

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[d, "\widetilde{\varphi}^* \otimes \varphi^*"'] & A \arrow[l, "a_1"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ K' \otimes A' & A' \arrow[l, "a_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k[K]) \times \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "a_1^\circ"] & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{Spec}(k[K']) \times \mathrm{Spec}(A') \arrow[u, "\widetilde{\varphi} \times \varphi"] \arrow[r, "a_2^\circ"] & \mathrm{Spec}(A') \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

On voit que dans les deux constructions on a la même condition sur l'homogénéité qui détermine à la fois l'action et la graduation, c'est ce qu'on voulait vérifier.
Ainsi les actions de groupe diagonalisable sur les variétés affines peuvent être caractérisé en terme algébrique grâce à cette équivalence. C'est l'objet des propositions suivantes.

Proposition 2.1.4.9. *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. Soit $Y \subset X$ une sous variété fermée, et $I = \mathcal{I}(Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Y est H-stable.*
2. *I est un idéal homogène.*

Démonstration. Comme I est radical, Y est H-stable si et seulement si $\forall P \in I$, $h \in H$, $y \in Y$, $P(h.y) = 0$. Supposons que cette dernière condition soit vérifiée, on écrit $P = \sum_{finie} P_\omega$ sa décomposition en composantes homogènes. On a alors, $P(h.y) = \sum \chi^\omega \otimes P_\omega(h, y) = \sum \chi^\omega(h) P_\omega(y) = 0$. Les caractères étant libres, on a $P_\omega(y) = 0, \forall y, \omega$, c'est à dire $P_\omega \in I, \forall \omega$. Ainsi I est homogène. La réciproque est immédiate. □

Dans la construction 2.1.4.8, on voit que la situation générale est assez proche de l'exemple le plus simple de l'action diagonale de $(k^*)^n$ sur k^r par un choix de r caractères. On voit bien dans ce cas que la géométrie de l'orbite d'un point $p \in k^r$ va être assez dépendante de la nullité des coordonnées $x_1, ..., x_r$ au point p. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.1.4.10 (Monoïde d'orbite, Groupe d'orbite)**.** Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$ sur $X := \operatorname{Spec} A$.

1. Le monoïde d'orbite d'un point $x \in X$ est le sous-monoïde $S_x \subset K$ engendré par $\{\omega \in K \mid \exists f \in A_\omega \text{ telle que } f(x) \neq 0\}$
2. Le groupe d'orbite d'un point $x \in X$ est le sous-groupe $K_x \subset K$ engendré par le monoïde d'orbite.

Proposition 2.1.4.11. *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$, et $x \in X$. On a le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\omega \mapsto \chi^\omega", "\simeq"'] & K/K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^*(H/H_x) \arrow[r, "\pi^*"] & X^*(H) \arrow[r, "i^*"] & X^*(H_x) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $i : H_x \to H$ est l'inclusion du stabilisateur de x, et $\pi : H \to H/H_x$ la projection canonique. En particulier, on obtient $H_x \simeq \mathrm{Spec}(k[K/K_x])$.

Démonstration. La deuxième ligne est obtenue par le théorème 2.1.3.3, puis application du foncteur X^*. Elle est bien exacte par exactitude du foncteur X^*. La flèche verticale centrale est l'isomorphisme canonique déduit de $X^* \circ \operatorname{Spec} \circ k[.] \simeq Id$.
Comme $\overline{H.x}$ est H-stable, la graduation est préservée sur $k[\overline{H.x}]$ d'après la proposition 2.1.4.9. De plus si $f \in k[X]_\omega$ est telle que $f(x) \neq 0$, cela reste le cas modulo $\mathcal{I}_X(\overline{H.x})_\omega$ et réciproquement. Ainsi, S_x et K_x ne sont pas modifiés si on remplace X par $\overline{H.x}$.
Considérons le fermé propre $\overline{H.x} \setminus H.x$, éventuellement vide. Il est H-stable comme réunion d'orbites. Alors $\mathcal{I}_{\overline{H.x}}(\overline{H.x} \setminus H.x)$ est homogène d'après la proposition 2.1.4.9, et $\neq \{0\}$. Choisissons $f \neq 0$ homogène dans ce H-module, c'est donc un vecteur propre. Ainsi, f est non-nulle quelque part sur $H.x$ et donc partout par transitivité et choix de f. On en conclut $H.x = (\overline{H.x})_f$. Considérons la graduation naturelle associée à $k[\overline{H.x}]_f$. Comme on a inversé f, le monoïde de poids est potentiellement plus gros. En revanche on voit

facilement que K_x n'est pas modifié.
Supposons donc $X = H.x$. Dans ce cas, on voit qu'une fonction homogène non-nulle est partout non-nulle, donc inversible. On a donc dans ce cas $S_x = K_x = S(k[H.x]) = K(k[H.x])$, où $S(k[H.x])$ et $K(k[H.x])$ sont respectivement les monoïdes et groupes de poids de l'algèbre K-graduée $k[H.x]$.
D'après **??** (ou 2.2.2.6) et 1.3.1.8 on a le diagramme commutatif de gauche ci-dessous. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur $k[.]$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, two heads, "h\mapsto h.x"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & H.x \\ H/H_x \arrow[ur, dashed, "\exists!\simeq\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k[H] & k[H.x] \arrow[l, hook', "f_\omega\mapsto f_\omega(x)\chi^\omega"'] \arrow[dl, dashed, "\exists!\simeq\varphi^*"] \\ k[H/H_x] \arrow[u, hook, "\pi^*"] & \end{tikzcd}$$

Comme les flèches du diagramme de gauche sont des morphismes de H-variétés, les morphismes du diagramme de droite préservent la graduation. Ainsi, φ^* induit un isomorphisme sur les groupes de poids $K_x \xrightarrow{\omega\mapsto\chi^\omega} X^*(H/H_x)$. Enfin, toujours en utilisant le diagramme, cet isomorphisme est l'unique faisant commuter le carré de gauche dans le diagramme de la proposition. □

Proposition 2.1.4.12. *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$, et $x \in X$. Cette action induit une action de H/H_x sur $\overline{H.x}$. De plus, $\overline{H.x}$ et $\operatorname{Spec}(k[S_x])$ sont isomorphes en tant que H/H_x-variétés.*

Démonstration. On suppose $X = \overline{H.x}$ ce qui ne modifie pas S_x et K_x. De plus on a $S(k[\overline{H.x}]) = S_x$ et $K(k[\overline{H.x}]) = K_x$. D'après la preuve précédente, $k[K_x]$ et $k[H/H_x]$ sont canoniquement isomorphes et on a un isomorphisme de K_x-algèbres graduées $k[H.x] \to k[K_x]$, $f_\omega \mapsto f_\omega(x)\chi^\omega$. On a également le morphisme de K_x-algèbres graduées $k[\overline{H.x}] \to k[S_x]$ définit par la même formule. On voit facilement qu'il est injectif. Pour la surjectivité, on peut par exemple voir que le premier isomorphisme est en fait le prolongement par localisation en un élément homogène de ce morphisme (voir démonstration précédente), d'où un diagramme commutatif de K_x-algèbres graduées. Cela donne la proposition par application de Spec.

$$\begin{tikzcd} k[H.x] \arrow[r, "\simeq"] & k[K_x] \\ k[\overline{H.x}] \arrow[u, "f\mapsto f_{|H.x}"] \arrow[r, "\simeq"] & k[S_x] \arrow[u, "\subset"'] \end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.1.4.13. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. Alors il existe un ouvert affine non-vide $U \subset X$ tel que :*

$$S_x = S(A), \;\; K_x = K(A), \;\; \forall x \in U$$

Démonstration. On choisit des générateurs homogènes $f_1, ..., f_r$ de A. On pose $U := X_{f_1 ... f_r}$ qui est non-vide car A est intègre. $\forall \omega \in S(A)$, $\exists g \neq 0 \in A_\omega$ car A est intègre. Quitte à décomposer g, on peut le supposer de la forme $f_1^{i_1} ... f_r^{i_r}$. On en déduit que $\omega \in S_x$, $\forall x \in U$. Comme l'autre inclusion est immédiate, U satisfait la propriété. □

Pour finir voyons une caractérisation algébrique des actions fidèles de groupes diagonalisables sur des variétés affines.

Proposition 2.1.4.14. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. L'action de H est fidèle si et seulement si $K = K(A)$.*

Démonstration. Soit $g \in \cap_{x\in X} H_x$. L'action de g sur les fonctions régulières est triviale, donc en particulier sur les fonctions homogènes. Comme A est intègre, $\forall \omega \in S(A), \exists f_\omega \neq 0 \in A_\omega$, on en déduit $g \in \cap_{\chi\in S(A)} \mathrm{Ker}(\chi)$ puis facilement $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \mathrm{Ker}(\chi)$ d'où $g = e_H$ si $K = K(A)$ car H est un groupe diagonalisable.

Sinon comme $K(A) \subsetneq K$, on peut choisir $g \neq e_H \in H$ tel que $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \mathrm{Ker}(\chi)$. En effet $\cap_{\chi\in K(A)} \mathrm{Ker}(\chi)$ est un sous-groupe fermé non-trivial de H car son groupe de caractère est $K/K(A)$. Ainsi g agit trivialement sur les fonctions homogènes et donc sur les fonctions régulières. On en déduit que g agit trivialement sur X. □

2.2 Théorie des invariants

2.2.1 L'algèbre des invariants

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété affine. $k[X]$ est un G-module rationnel pour l'action naturelle de G sur les fonctions régulières. On définit la sous-algèbre des invariants $k[X]^G := \{f \in k[X] \mid g.f = f, \forall g \in G\}$. C'est par définition la sous-algèbre des fonctions constantes sur les orbites de l'action de G sur X.

Une question naturelle est de se demander si cette algèbre est de type fini sur k, c'est le 14e des 23 problèmes que Hilbert pose en 1900 à la communauté mathématique. En 1959, Nagata exhibe une algèbre d'invariants pour l'action d'un groupe algébrique qui n'est pas de type fini sur k, répondant ainsi au problème. Avec des hypothèses sur G, on peut cependant montrer que c'est le cas, c'est l'objectif de cette partie. Supposons G réductif. Le G-module $k[X]$ est alors semi-simple, en particulier, $k[X]^G$ admet un supplémentaire G-stable que l'on note $k[X]_G$. On définit l'opérateur de Reynolds $R_{k[X]}$ comme la projection sur $k[X]^G$ associée à cette décomposition. Voici quelques propriétés de $R_{k[X]}$:

Proposition 2.2.1.1. 1. *Soit $f : V \to W$ un morphisme de G-module et $f^G : V^G \to W^G$ le morphisme induit. On a $R_W f = f R_V$. En particulier, si f est surjective, f^G l'est aussi.*

2. *$R_{k[X]}$ est $K[X]^G$-linéaire*

Démonstration. 1. Ok

2. Soit $a \in k[X]^G$. on considère m_a la multiplication par a dans $k[X]$. C'est un endomorphisme de G-module, il commute donc avec $R_{k[X]}$.

□

Théorème 2.2.1.2 (Hilbert)**.** *Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine. Alors l'algèbre des invariant $k[X]^G$ est de type fini.*

Démonstration. Supposons que X soit un G-module V de dimension finie. L'action de k^* sur V par homothétie donne une $\mathbb{N}$-graduation $k[V] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} k[V]_n$, $k[V]_n$ étant le sous espace des polynômes homogènes de degré n. Cette graduation est G-stable et se restreint sur l'algèbre des invariants en une $\mathbb{N}$-graduation $k[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} k[V]_n^G$. Or on remarque que $k[V]^G$ est noetherien. En effet, soit I un idéal de $k[V]^G$, et J son extension dans $k[V]$. J est un sous G-module, donc la contraction de J dans $k[V]^G$ est $R_{k[V]}(J) = IR_{k[V]}(k[V]) = I$. On voit donc que la condition de chaîne est satisfaite sur $k[V]^G$ si elle satisfaite sur $k[V]$, ce qui est le cas car ce dernier est noetherien par le théorème de la base de Hilbert. Ainsi, on a le résultat d'après la proposition **??**.
Dans le cas général, on peut d'après le théorème 2.1.2.5 supposer X inclus dans un G-module V. On obtient alors un G-morphisme surjectif $k[V] \to k[X]$ qui induit un G-morphisme surjectif $k[V]^G \to k[X]^G$ d'après la proposition 2.2.1.1. Cela montre que $k[X]^G$ est de type fini. □

On constate que cette preuve n'est pas effective. Il est en général difficile de calculer l'algèbre des invariants. On présente ci-dessous la méthode des sections qui permet le calcul dans certains cas.
Soit $S \subset X$ une sous-variété fermée. Définissons $Z(S) = \{g \in G \mid g.s = s, \forall s \in S\}$ et $N(S) = \{g \in G \mid g.s \in S, \forall s \in S\}$. Clairement, $Z(S)$ est un sous-groupe normal de $N(S)$, et le quotient $W = N(S)/Z(S)$ agit sur S. La surjection $k[X] \to k[S]$, induit un morphisme $k[X]^G \xrightarrow{\varphi} k[S]^W$.

Supposons que l'on ait un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\forall x \in U$, $G.x$ intersecte S, alors on voit que φ est injective. Si de plus, $k[S]^W$ est engendré par des $\varphi(f_1), ..., \varphi(f_r)$, alors φ est un isomorphisme et $k[X]^G$ est engendré par $f_1, ..., f_r$.

Exemple 2.2.1.3. $G = GL_n,\ X = M_n,\ g.A = gAg^{-1}$, $S = D_n$, $U = X_{disc(\chi)}$. En considérant un élément de U, qui a donc ses valeurs propres deux à deux distinctes, on a par un calcul direct $Z(S) = D_n$. Puis on a $N(S) = \{\text{matrices monomiales}\}$ car la conjugaison préserve les espaces propres. Ainsi, W est isomorphe au groupe symétrique Σ_n et agit sur S en permutant les entrées diagonales. On a ainsi $k[S]^W = k[\sigma_1, ..., \sigma_n]$, l'algèbre engendrée par les fonctions symétriques élémentaires. C'est une algèbre de polynômes.
Soient $f_1, ..., f_n$ les coefficient du polynôme caractéristique générique. Ce sont des éléments de $k[X]^G$, et on a $f_{i|S} = (-1)^i\sigma_i$, d'où $k[X]^G = k[f_1, ..., f_n]$.

2.2.2 Quotient d'une variété algébrique sous l'action d'un groupe algébrique

Quotient catégorique

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. En tant que groupe abstrait agissant sur un ensemble, le quotient de X par G (noté $X//G$) est par définition l'ensemble des orbites. On note $\pi : X \to X//G$ l'application qui à un élément de X associe son orbite. $X//G$ satisfait une propriété universelle, il représente le foncteur Ens $\to$ Ens, $Y \mapsto \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f \text{ est constante sur les orbites}\}$, il est donc unique à isomorphisme près. Pour cette raison la paire $(X//G, \pi)$ est appelée le quotient catégorique de X par G.
On peut ainsi transporter cette définition dans la catégorie des variétés algébriques. Toutefois, il n'est pas clair que ce quotient existe toujours. L'exemple suivant montre que lorsqu'il existe, le quotient catégorique ne coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des orbites.

Exemple 2.2.2.1. On considère l'action naturelle de GL_n sur $\mathbb{A}^n$. Le quotient catégorique existe et est un point. En effet soir $f : \mathbb{A}^n \to Z$ constant sur les orbites, alors f est constante car il existe un orbite dense. En revanche il y a un deuxième orbite, c'est le fermé $\{0\}$.

On suppose X affine et $k[X]^G$ de type fini avec $f_1, ..., f_r$ des générateurs, c'est en particulier le cas lorsque G est réductif d'aprés le théorème 2.2.1.2. Dans ce cadre, l'algèbre des invariants définit une variété algébrique affine, notons la Y. On définit le morphisme $\varphi : X \to k^r$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_r(x))$. Son comorphisme φ^* admet une factorisation : $k[t_1, ..., t_r] \twoheadrightarrow k[X]^G \xrightarrow{\subset} k[X]$, d'où $Y \simeq \overline{\varphi(X)}$. On peut donc voir $X \xrightarrow{\varphi} \overline{\varphi(X)}$ comme une réalisation du morphisme $\pi : X \to Y$ associé à $k[X]^G \subset k[X]$. On appelle ce morphisme, le morphisme quotient. De la même manière on voit que tout morphisme G-invariant de variétés affines $X \to Z$ se factorise à travers Y. De ce fait, Y semble être un bon candidat pour le quotient catégorique. Toutefois il faut être prudent, dans [11] 6.4.10, on exhibe un exemple de cette situation qui n'admet pas de quotient catégorique. On a toutefois le résultat suivant :

Théorème 2.2.2.2. *Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine.*

1. *Le morphisme quotient $\pi : X \to Y$ est surjectif.*
2. *(Y, π) est un quotient catégorique. On écrit donc $Y = X//G$.*
3. *Soit $Z \subset X$ une sous G-variété fermée. Le morphisme induit $Z//G \to X//G$ est une immersion fermé. On peut ainsi identifier π_Z et π_X restreint à Z. De plus, soit Z' une autre sous G-variété fermée, on a $\pi_X(Z \cap Z') = \pi_X(Z) \cap \pi_X(Z')$.*
4. *Chaque fibre de π_X contient un unique orbite fermé.*

Démonstration. 1. Soit $x \in Y$ et m_x l'ideal maximal de $k[X]^G$ correspondant. La fibre $\pi^{-1}(x)$ correspond à l'ensemble des idéaux maximaux contenant l'extension I de m_x dans $k[X]$. Or on a déjà vu que l'extension dans $k[X]$ était injective, I est donc un idéal propre contenu dans au moins un idéal maximal. La fibre étant non-vide, π est surjective.

2. L'existence de la factorisation a déjà était vue. Avec 1) on a maintenant l'unicité.

3. On note i l'inclusion $Z \subset X$. $\pi_X i$ est constant sur les orbites de Z d'où l'existence d'un unique morphisme $\varphi : Z//G \to X//G$ tel que $\varphi\pi_Z = \pi_X i$. La projection $k[X] \to k[Z]$ est un morphisme de G-module surjectif. D'après la proposition 2.2.1.1, cette projection induit un morphisme de k-algèbre surjectif $k[X]^G \xrightarrow{\varphi^*} k[Z]^G$, donc φ est une immersion fermée. Soit I (resp. I') l'idéal de Z (resp. Z') dans $k[X]$. L'idéal de $Z \cap Z'$ est $I + I'$ et l'idéal de $\pi_X(Z)$ est $\mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z)) = I \cap k[X]^G = R_X(I)$. Ainsi $\mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z \cap Z')) = R_X(I + I') = R_X(I) + R_X(I') = \mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z) \cap \pi_X(Z'))$.
4. d'après 3), π_X envoie deux orbites fermés distincts sur deux points distincts.

□

On remarque que les propriétés du théorème précédent s'étendent automatiquement au cas d'une G-variété X si le théorème est vérifié localement sur un recouvrement affine d'un candidat (Y, π) pour le quotient $X//G$. De ce constat découle la notion de bon quotient.

Définition 2.2.2.3 (Bon quotient)**.** Soit G un groupe réductif et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un bon quotient si elle vérifie :
(i) π est affine et G-invariant.
(ii) $\pi^* : \mathcal{O}_Y \to (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

Exemple 2.2.2.4. Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine. D'après le théorème 2.2.2.2 et l'exemple 1.2.3.11, $X//G$ est un bon quotient.

Quotient géométrique

Parmi les quotients catégoriques $(X//G, \pi)$, on cherche à caractériser ceux ayant les propriétés géométriques intuitivement attendues pour un quotient, c'est à dire que $X//G$ soit l'ensemble des orbites avec une topologie aussi fine que possible. C'est la notion de quotient géométrique :

Définition 2.2.2.5 (Quotient géométrique)**.** Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un quotient géométrique si elle vérifie :
(i) π est surjective et ses fibres sont exactement les orbites.
(ii) La topologie de Y coïncide avec la topologie quotient associée à π.
(iii) $\pi^* : \mathcal{O}_Y \to (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

On remarque que pour un quotient géométrique $(X//G, \pi)$, tous les orbites sont fermés dans X et l'application quotient est ouverte. En effet, soit U un ouvert de X, on a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g \in G} g.U$ qui est ouvert.

Exemple 2.2.2.6. Soit G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé. Dans la catégorie des ensemble, le quotient $(G/H, \pi)$ est exactement le quotient catégorique $(G//H, \pi)$ pour l'action de H sur G par multiplication à droite. Dans [10] 5.5.5, en caractéristique quelconque, on munit G/H d'une structure d'espace annelé en lui attribuant la topologie quotient puis en définissant le faisceau structural par $\mathcal{O}_{G/H}(U) := \{f \in \mathrm{Map}(U, k) \mid f\pi \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))\}$. Par construction, il vérifie la propriété universelle de factorisation. De plus, on montre ensuite que cet espace annelé est isomorphe à une variété quasi-projective, ce qui montre l'existence du quotient catégorique $(G//H, \pi)$ dans la catégorie des variétés algébriques. Par définition de $\mathcal{O}_{G/H}$, on a une flèche $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\pi^*} (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$. Elle est injective par la surjectivité de π, et elle est surjective, par la propriété universelle du quotient. $(G//H, \pi)$ est donc un quotient géométrique. Cela généralise bien sur le théorème 2.1.3.3.

Exemple 2.2.2.7. Un bon quotient $(X//G, \pi)$ est un quotient géométrique si les fibres de π sont exactement les orbites. En effet, d'après ce qui précède, il reste alors à vérifier que $X//G$ est muni de la topologie quotient. Soit un ouvert de X de la forme $\pi^{-1}(A)$ où A est une partie de $X//G$. En tenant compte de 2.2.2.2 (iii) et de la surjectivité de π on a : $\pi(X \setminus \pi^{-1}(A)) = Y \setminus A$ qui est fermé, donc A est ouvert.

Un exemple : La construction Proj

Dans cette partie, on va détailler une construction qui à la fois éclaire et généralise la construction de la variété algébrique $\mathbb{P}^n(k)$. On considère A une algèbre affine $\mathbb{N}$-graduée et on pose $X := \mathrm{Spec}(A)$. X est donc muni d'une action de k^*. Une orbite $k^*.x$ est de dimension 0 ou 1. Si elle est de dimension 0, c'est un point fixe car k^* est connexe. Si elle est de dimension 1, elle est soit fermée, soit son adhérence est constituée de $k^*.x$ et d'une réunion de points fixes, en fait un seul comme on va le voir.

On note F l'ensemble des points fixes et on remarque que $F = \mathcal{V}_X(A_{>0})$, où $A_{>0} := (f \mid f \in A_d \text{ pour un } d > 0)$ est l'idéal dit inconvenant. En effet, F est l'ensemble des idéaux maximaux qui sont k^*-stables. Or, un idéal maximal et homogène contient nécessairement $A_{>0}$.

On remarque que $A^{k^*} = A_0 = A/A_{>0}$, et comme le bon quotient $Y_0 := X//k^* = \mathrm{Spec}(A_0)$ paramètre les orbites fermés, on obtient en particulier que si $k^*.x$ n'est pas fermé, son adhérence contient un unique point fixe. En résumé, $W := X \setminus F$ est la réunion des orbites de dimension 1, et ils sont tous fermés dans W. On va montrer que W admet un quotient géométrique, c'est la construction Proj.
Pour tout $f \in A_{>0}$ homogène, la localisation A_f est $\mathbb{Z}$-graduée de la manière suivante :

$$A_f = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}, \quad (A_f)_d := \{h/f^l \mid \deg(h) - l\deg(f) = d\}$$

On note $A_{(f)} := (A_f)_0$ en remarquant qu'il s'agit de l'algèbre des invariants de la k^*-variété affine X_f. On a ainsi trouvé le bon quotient $U_f := \mathrm{Spec}(A_{(f)}) = X_f//k^*$. De plus, comme $F \subset \mathcal{V}_X(f)$, il s'agit d'un quotient géométrique d'après ce qui précède. Or on peut recouvrir W par un nombre fini de X_{f_i} avec les f_i homogènes de degrés > 0. Considérons les diagrammes commutatifs ci-dessous. Dans le diagramme de gauche, toutes les flèches sont des inclusions. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur Spec :

$$\begin{tikzcd}
A_{f_i} \arrow[r] & A_{f_if_j} & A_{f_j} \arrow[l] \\
A_{(f_i)} \arrow[u] \arrow[r] & A_{(f_if_j)} \arrow[u] & A_{(f_j)} \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_{f_i} \arrow[d, "\pi_i"] & X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_jf_j} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X_{f_j} \arrow[d, "\pi_j"] \\
U_{f_i} & U_{f_if_j} \arrow[l] \arrow[r] & U_{f_j}
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales du diagramme de droite sont des immersions ouvertes, en effet on a $U_{f_if_j} \simeq (U_{f_i})_{f_j}$. Les conditions de la construction 1.2.1.5 sont satisfaites, on peut former une prevariété $\mathrm{Proj}(A)$ par recollement des U_{f_i} le long de ces immersions. De plus, les (U_{f_i}, π_i) sont des quotients géométriques et le diagramme exprime que l'on a les conditions de recollement sur les intersections qui font de $\mathrm{Proj}(A)$ le quotient géométrique global $W//k^*$.

Enfin, on remarque que les fermés de $\mathrm{Proj}(A)$ correspondent aux fermés k^*-stables de W, c'est à dire aux idéaux radicaux homogènes qui ne contiennent pas l'idéal inconvenant. On appelle ces fermés des variétés projectives. La topologie quotient sur $\mathrm{Proj}(A)$ que l'on vient de définir est aussi appelé la topologie de Zariski.

Chapitre 3

Faisceaux divisoriels sur une variété algébrique

3.1 Faisceaux quasi-cohérents

3.1.1 Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma

Spectre relatif d'une $\mathcal{O}_X$-algèbre

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et B une A-algèbre. C'est en particulier un A-module, et on remarque que $\widetilde{B}$ est naturellement munit de faisceau d'algèbres dans le sens où pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\widetilde{B}(U)$ est naturellement une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre. Cela mène à la définition suivante.

Définition 3.1.1.1 ($\mathcal{O}_X$-algèbre)**.** Soit X un schéma. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre est un faisceau d'anneaux $\mathcal{S}$ sur X muni d'un morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{S}$ est quasi-cohérente si elle l'est en tant que $\mathcal{O}_X$-module. On dit qu'elle est localement de type fini si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{S}(U)$ soit de type fini en tant que $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre.

On introduit ci-dessous la version relative du spectre d'un anneau. Cette construction nous sera très utile par la suite.

Construction 3.1.1.2 (Spectre relatif)**.** Soit X un schéma séparé, $\mathcal{S}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement affine de X. Il existe un schéma $\operatorname{Spec}_X \mathcal{S}$ construit par recollement des schémas affines $\operatorname{Spec}(\mathcal{S}(U_i))$, unique à isomorphisme canonique près. Ce schéma est séparé sur X via le recollement des morphismes $\operatorname{Spec}(\mathcal{S}(U_i)) \to U_i$ donnés par la structure d'algèbre. De plus, le morphisme p est affine est on a l'égalité de faisceaux

$$p_*(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}_X \mathcal{S}}) = \mathcal{S}$$

Enfin, si X est une variété et que $\mathcal{S}$ est faisceau d'algèbres réduites localement de type fini, alors $\operatorname{Spec}_X \mathcal{S}$ est une variété.

Démonstration. On note $U_{ij} := U_i \cap U_j$, $A_i := \mathcal{S}(U_i)$ et $A_{ij} := \mathcal{S}(U_{ij})$. Les données donnent naturellement un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_{ij} := \operatorname{Spec} A_{ij} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "p_{ij}"] & \widetilde{X}_i := \operatorname{Spec} A_i \arrow[d, "p_i"] \\
U_{ij} \arrow[r, "\iota=\subset"] & U_i
\end{tikzcd}$$

On a $\mathcal{S}_{|U_{ij}} = \iota^*(\mathcal{S}_{|U_i})$ donc $\widetilde{A_{ij}} = \iota^*(\widetilde{A_i}) = \widetilde{R_{ij} \otimes_{R_i}} A_i$, où $R_i := \mathcal{O}_X(U_i)$ et $R_{ij} := \mathcal{O}_X(U_{ij})$, ce qui donne $A_{ij} \simeq R_{ij} \otimes_{R_i} A_i$, puis $\widetilde{X}_{ij} \simeq U_{ij} \times_{U_i} \widetilde{X}_i$. Cela prouve que φ_i est une immersion ouverte. On a de même une immersion ouverte $\varphi_j : \widetilde{X}_{ij} \to \widetilde{X}_j$. Les $\varphi_{ij} := \varphi_j \varphi_i^{-1}$ vérifient bient les conditions de recollement de 1.2.1.5. On a donc un schéma $\widetilde{X}$ sur X car les p_i se recollent en un morphisme $p : \widetilde{X} \to X$ qui est affine par construction. Ce morphisme est séparé d'après 1.2.3.13. La dernière assertion est claire par définition. □

3.1.2 Faisceaux quasi-cohérents sur une variété projective

3.1.3 Cohomologie des faisceaux et applications

Généralités

On rappelle sans démonstrations quelques définitions et résultats de base, l'objectif étant de définir les groupes de cohomologie d'un faisceau sur un schéma relatifs au foncteur sections globales. La référence principale est [3] chap III.

Soit X un schéma, on considère la catégorie $\mathcal{A}b(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X, et la catégorie $\mathcal{M}od(X)$ des $\mathcal{O}_X$-modules. Soit $A^\cdot$ un complexe dans $\mathcal{A}b(X)$, c'est à dire une famille d'objets $(A^i)_{i\geqslant 0}$ et des morphismes $d^i : A^i \to A^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Un morphisme de complexes $f : A^\cdot \to B^\cdot$ est une famille de morphismes $f^i : A^i \to B^i$ qui commutent avec les applications d^i. Le i^e groupe de cohomologie $h^i(A^\cdot)$ du complexe $A^\cdot$ est le groupe $\ker d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$. Soit $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ une suite exacte courte de complexes, on obtient grâce au lemme du serpent ([6] 2.10) des morphismes $\delta^i : h^i(C^\cdot \to h^{i+1}(A^\cdot)$ dits de connexion, donnant une suite exacte longue :

$$... \to h^i(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot) \to h^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\cdot) \to ... \tag{3.1}$$

Ces définitions ont également un sens dans la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, et si on se donne un foncteur $F : \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$, alors F envoie des complexes de faisceaux sur des complexes de groupes. On suppose de plus que F est covariant exact à gauche. Pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ (resp. tout $\mathcal{O}_X$-module) on peut obtenir une résolution injective, c'est à dire une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} I^0 \to I^1 \to ...$$

telle que les faisceaux I^k soient injectifs. Cela signifie que les foncteurs $\operatorname{Hom}(., I^k)$ sont exacts (ils sont exacts seulement à gauche en général). On définit les foncteurs dérivés à droite R^iF de F pour $i \geqslant 0$ par $R^iF(\mathcal{F}) = h^i(F(I^\cdot))$, et on a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.1.3.1. *1. Les R^iF définissent des foncteurs $\mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$. De plus, ils ne dépendent pas du choix des résolutions injectives à isomorphisme près.*

2. On a un isomorphisme $F \simeq R^0F$

3. Pour tout suite exacte courte $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ dans $\mathcal{A}b(X)$, il existe un morphisme naturel de connexion $\delta^i : R^iF(\mathcal{F}'') \to R^{i+1}F(\mathcal{F}')$, tel que l'on obtient une suite exacte longue :

$$... \to R^iF(\mathcal{F}') \to R^iF(\mathcal{F}) \to R^iF(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(R^{i+1}) \to ...$$

Définition 3.1.3.2. Soit $\Gamma(X, .) : \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$ le foncteur sections globales. Les foncteurs de cohomologie $H^i(X, .)$ sont les foncteurs dérivés à droite de $\Gamma(X, .)$. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$, les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$ sont appelés les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$.

Un faisceau $\mathcal{F}$ est dit acyclique si $H^i(X, \mathcal{F})$ est nul pour tout $i > 0$. On peut toujour remplacer une résolution injective de $\mathcal{F}$ par une résolution acyclique pour le calcul des groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$. Les faisceaux flasques donne une classe de faisceaux acycliques, ce sont les faisceaux dont les flèches de restriction sont surjectives. De plus, tout faisceau injectif est flasque, on en déduit que l'on peut utiliser des résolutions injectives dans $\mathcal{M}od(X)$ pour calculer les groupes de cohomologie d'un $\mathcal{O}_X$-module.

Cohomologie à support

Soit X un schéma, $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$, et Z un fermé de X. Le support $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ est l'ensemble des points où la tige et non-nulle. De même, le support d'une section est l'ensemble des points où le germe est non-nul, c'est un fermé de X. On définit le sous-faisceau $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{Z \cap V}(V, \mathcal{F})$ où $\Gamma_{Z\cap V}(V, \mathcal{F})$ est le sous-groupe de $\Gamma(V, \mathcal{F})$ constitué des sections à support contenu dans $Z \cap V$. C'est bien un faisceau car les sections locales se recollent de manière unique en sections de $\mathcal{F}$ qui restent à support dans Z. On a de plus une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}_{|U}) \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.3.3. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine noetherien, M un A-module et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, $\mathfrak{a}$ un idéal et $Z = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$. Soit $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, alors $\operatorname{Supp} m = \mathcal{V}(\operatorname{Ann} m)$, où $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid am = 0\}$ est l'annulateur de m. En effet, soit $p \in X$, alors $m_p \neq 0 \iff \forall a \in A \setminus p, fm \neq 0 \iff \operatorname{Ann}(m) \subset p$.

On définit un sous-module $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ de M par $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ pour un } n > 0\}$. Alors on a $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)\tilde{} = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$. En effet, tout d'abord $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ est quasi-cohérent comme noyau d'un morphisme entre faisceaux quasi-cohérents, cela d'après la suite exacte ci-dessus et **??**. En utilisant **??**, il reste donc à montrer que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \simeq \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ en tant que A-modules. Soit $m \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$, on a par définition $\operatorname{Supp} m = \mathcal{V}(\operatorname{Ann} m) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, d'où $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\operatorname{Ann} m}$. Or, $\mathfrak{a}$ est de type fini car A est noetherien, on en conclut que $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. En effet, si on a k générateurs $x_1, ..., x_k$ de $\mathfrak{a}$, on peut trouver un exposant commun n tel que x_i^n annule m pour tout i. Alors on a par exemple $\mathfrak{a}^{n^k} m = 0$. Réciproquement, si $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, alors $\mathfrak{a}^n \subset \operatorname{Ann} m$ pour un $n > 0$, ce qui donne $\operatorname{Supp} m \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a}^n) = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, puis $m \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$. Finalement on a bien $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$.

Il est facile de montrer que $\Gamma_Z(X, .)$ est un foncteur exact à gauche, on définit alors les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ à support dans Z comme ses foncteurs dérivés à droite, on les note $H_Z^i(X, \mathcal{F})$. Si $\mathcal{F}$ est flasque, en appliquant le foncteur sections globales $\Gamma(X, .)$ à la suite exacte 3.2, on obtient la suite exacte courte ci-dessous :

$$0 \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to 0$$

On choisit maintenant une résolution injective $\mathcal{I}^\cdot$ de $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{I}^\cdot$ est flasque et donc $\mathcal{I}_{|U}$ aussi, on peut donc utiliser cette dernière pour calculer les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}_{|U}$. En utilisant la suite exacte courte ci-dessus on obtient une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \to \Gamma_Z(X, \mathcal{I}^\cdot) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^\cdot) \to \Gamma(U, \mathcal{I}^\cdot) \to 0$$

Les techniques utilisées pour obtenir la suite exacte longue 3.1 s'appliquent dans la catégorie des groupes abéliens et on obtient ainsi une suite exacte longue :

$$0 \to H_Z^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{F}_{|U}) \to H_Z^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}_{|U}) \to ... \tag{3.3}$$

Remarquons enfin qu'avec les notations de l'exemple 3.1.3.3, on a $\Gamma_Z(X, .) \circ \tilde{} = \Gamma_{\mathfrak{a}}(.)$ en tant que foncteurs A-$\mathcal{M}od \to A$-$\mathcal{M}od$. On en déduit que le foncteur $\Gamma_{\mathfrak{a}}(.)$ est exact à gauche et que ses foncteurs dérivés à droite, notés $H_{\mathfrak{a}}^i$, sont égaux aux foncteurs $H_Z^i(X, .) \circ \tilde{}$. En effet, soit $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ et $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$. Comme le tilde réalise une équivalence de catégories (voir **??**), il envoie une résolution injective de M sur une résolution injective de $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$. En utilisant cette dernière pour calculer les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ à support dans Z, on obtient le résultat par l'égalité des foncteurs $\Gamma_Z(X, .) \circ \tilde{} = \Gamma_{\mathfrak{a}}(.)$.

Cohomologie sur un schéma affine

L'objectif de cette partie est de montrer que les $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérents sur un schéma affine noetherien $X = \operatorname{Spec} A$ sont acycliques. Le point clé sera de montrer que pour un A-module injectif I, le faisceau $\widetilde{I}$ est flasque. On commence par des préliminaires d'algèbre commutative :

Théorème 3.1.3.4 (de Krull)**.** *Soit A un anneau noetherien, $M \subset N$ des A-modules de type fini, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors, la topologie $\mathfrak{a}$-adic sur M est induite par la topologie $\mathfrak{a}$-adic sur N. En particulier, pour tout $n > 0$, il existe $n' \geqslant n$ tel que $\mathfrak{a}^{n'} N \cap M \subset \mathfrak{a}^n M$.*

Démonstration. Voir [6] 10.11 □

Corollaire 3.1.3.5. *$\mathfrak{a}$ un idéal de A, et I un A-module injectif. Alors le sous-module $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ est aussi un A-module injectif.*

Démonstration. Voir [3] III.3.2 □

Lemme 3.1.3.6. *Soit A un anneau noetherien et I un A-module injectif. Alors pour tout $f \in A$, la flèche de localisation $I \to I_f$ est surjective.*

Démonstration. Voir [3] III.3.3 □

Proposition 3.1.3.7. *Soit A un anneau noetherien et I un A-module injectif. Alors le faisceau $\widetilde{I}$ est flasque.*

Démonstration. On prouve le résultat par induction noetherienne sur les fermés non-vides de la forme $Y := \overline{\operatorname{Supp} \widetilde{I}}$ en utilisant le fait que X est un espace topologique noetherien, c'est à dire que tout ensemble non-vide de fermés de X admet un élément minimal. On remarque que le résultat est immédiatement vérifié si Y est l'ensemble vide. Il suffit donc de montrer qu'étant donné un fermé Y de la forme $\overline{\operatorname{Supp} \widetilde{I}}$ on est ramené à montrer le résultat pour un fermé propre de Y de même forme.

Supposons maintenant le résultat montré pour tout fermé propre de $Y := \overline{\operatorname{Supp} \widetilde{I}}$. Il est suffisant de montrer que $\Gamma(X, \widetilde{I}) \to \Gamma(U, \widetilde{I})$ est surjectif pour tout ouvert $U \subset X$. Si $Y \cap U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, il existe $f \in A$ tel que $X_f \subset U$ et $X_f \cap Y \neq \emptyset$. On note $Z = X \setminus X_f$, et on Considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \widetilde{I}) \arrow[r] & \Gamma(U, \widetilde{I}) \arrow[r] & \Gamma(X_f, \widetilde{I}) \\
\Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma_Z(U, \widetilde{I}) \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Soit une section $s \in \Gamma(U, \widetilde{I})$, et s' son image dans $\Gamma(X_f, \widetilde{I})$. D'après le lemme précédent et **??**, s' admet un antécédent $t \in \Gamma(X, \widetilde{I})$. On note t' la restriction de t à U. Alors $s - t'$ se restreint en la section nulle sur X_f, et a donc support dans Z. Si on peut trouver un antécédent u de $s - t'$ dans $\Gamma_Z(X, \widetilde{I})$, alors $t + u$ est antécédent de s dans $\Gamma(X, \widetilde{I})$. On est donc ramenés à prouver la surjectivité de $\Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$.

Posons $J = \Gamma_Z(X, \widetilde{I})$, et $\mathfrak{a} = fA$. Alors d'après l'exemple 3.1.3.3, on a $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Puis d'après 3.1.3.5, J est un A-module injectif. Enfin, le support de $\widetilde{J}$ est contenu dans $Y \cap Z$ qui est fermé propre de Y. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc que $\widetilde{J}$ est flasque. Mais toujours d'après l'exemple 3.1.3.3, on a $\widetilde{J} = \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ ce qui termine la preuve. □

Théorème 3.1.3.8. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine noetherien. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X, et pour tout $i > 0$, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. Soit $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, et $M \to I^{\cdot}$ une résolution injective de M. On obtient d'après **??** une résolution injective $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M} \to \widetilde{I}^{\cdot}$ de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Or cette résolution est flasque d'après 3.1.3.7. Cela suffit à montrer le théorème car une résolution flasque de faisceau est acyclique, et peut être utiliser pour calculer la cohomologie. □

Une application

On introduit la notion de profondeur d'un A-module M relative à un idéal $\mathfrak{a} \subset A$ et on en donne une interprétation en termes de cohomologie à support. On en déduit un corollaire qui donne une réciproque à 1.3.3.3 et nous sera utile par la suite.

Définition 3.1.3.9 (suite M-régulière)**.** Soit A un anneau, M un A-module. Une suite $x_1, ..., x_r$ d'éléments de A est M-régulière si x_1 n'est pas diviseur de zéro dans M, et pour tout $i = 2, ..., r$, x_i n'est pas diviseur de zéro dans $M/(x_1, ..., x_r)M$.

Définition 3.1.3.10 (Profondeur)**.** Soit A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. La $\mathfrak{a}$-profondeur de M est la longueur maximale des suites régulières de M contenues dans $\mathfrak{a}$.

Proposition 3.1.3.11. *Soit A un anneau noetherien, $\mathfrak{a}$ un idéal, et M un A-module de type fini. Alors pour tout $n \geqslant 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n$.
2. $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ *pour tout* $i < n$.

Démonstration. Montrons cette équivalence par récurrence. Le cas $n = 0$ est trivial, mais nous aurons besoin du cas $n = 1$ dans la récurrence, on le démontre maintenant. Supposons $n = 1$, et $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant 1$. Alors il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que x n'est pas diviseur de zéro dans M. Soit $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, ainsi il existe $k \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{a}^k m = 0$. En particulier, $x^n m = 0$, ce qui prouve $m = 0$. D'où $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Réciproquement, supposons $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Cela signifie que pour tout $m \in M$ et $k \geqslant 0$, il existe $x \in \mathfrak{a}^k$ tel que $mx \neq 0$. On en déduit que $\mathfrak{a}$ n'est inclus dans aucun idéal premier associé à M (voir **??**), d'où $\mathfrak{a} \nsubseteq \cup_{p \in \operatorname{Ass} M} p$ par le lemme d'évitement **??**. Cette dernière union étant d'après **??** l'ensemble des éléments de A qui annule un élément de M. On peut ainsi trouver un $x \in \mathfrak{a}$ qui n'est pas diviseur de zéro pour M, c'est à dire $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant 1$.

Supposons maintenant le résultat acquis pour $n \geqslant 1$. Pour le sens direct on suppose $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n + 1$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence il reste à montrer que $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Choisissons $x \in \mathfrak{a}$ égal au premier terme d'une suite M-régulière de longueur $n + 1$, ce qui est possible par hypothèse. Alors x n'est pas diviseur de zéro dans M et $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M/xM \geqslant n$. On considère alors la suite exacte de A-modules :

$$0 \to M \xrightarrow{x\cdot} M \to M/xM \to 0$$

et la suite exacte longue de cohomologie associée :

$$.. \to H^{n-1}_{\mathfrak{a}}(M/xM) \to H^n_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{x\cdot} H^n_{\mathfrak{a}}(M) \to ...$$

Comme $H^{n-1}_{\mathfrak{a}}(M/xM) = 0$ par hypothèse de récurrence, l'application $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \to H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ est injective. Or ceci ne peut être le cas que si $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ car on peut remarquer que $H^n_{\mathfrak{a}}$ est un quotient d'un $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ pour un module N, ses éléments sont donc annulés par des puissances de x.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ pour tout $i < n + 1$. Par hypothèse de récurrence et comme $n \geqslant 1$, il existe $x \in \mathfrak{a}$ qui n'est pas diviseur de zéro pour M. On peut à nouveau utiliser la suite exacte longue ci-dessus et en déduire immédiatement que $H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM) = 0$ pour $i < n$. Ainsi, $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M/xM \geqslant n$, ce qui montre $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n + 1$. □

Corollaire 3.1.3.12. *Soit X une variété affine et $Z \subset X$ un fermé tel que la restriction $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus Z)$ soit un isomorphisme. Alors Z est de codimension au moins 2 dans X.*

Démonstration. On pose $U := X \setminus Z$ et on utilise la suite exacte longue 3.3. Compte tenu de l'hypothèse et de 3.1.3.8 on obtient que $H^0_Z(X, \mathcal{O}_X) = H^1_Z(X, \mathcal{O}_X) = 0$. D'après la propriété précédente cela donne $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{O}(X)) \geqslant 2$, où $\mathfrak{a} := \mathcal{I}(Z)$. Mais d'après, 1.3.1.2 on obtient facilement $\operatorname{codim}_X(Z) \geqslant \operatorname{depth}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{O}(X))$. □

3.1.4 Faisceaux inversibles, Fibrés en droites

Définition 3.1.4.1. Soit X une variété. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1. Autrement dit, tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert $U \subset X$ tel que $\mathcal{L}|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_U$.

On peut toujours trivialiser deux faisceaux inversibles sur un même recouvrement ouvert de X. On voit ainsi que le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ de faisceaux inversibles est inversible. Par ailleurs, le faisceau dual $\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est clairement inversible car sur les ouverts U où $\mathcal{L}$ est trivial, se donner un morphisme $\mathcal{L}_{|U} \to \mathcal{O}_{|U}$ revient à se donner une section de $\mathcal{O}(U)$. De plus, l'application naturelle $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X, (s, f) \mapsto f(s)$ est un isomorphisme. Ainsi, les classes d'isomorphie de faisceaux inversible sur X munies du produit tensoriel forment un groupe appelé groupe de Picard de X, noté $\mathrm{Pic}(X)$.

Exemple 3.1.4.2. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ irréductible. Alors se donner un faisceau inversible sur X revient (à isomorphisme près) à se donner un idéal fractionnaire I de $k[X]$ qui est inversible (cf 1.1.2.3), son inverse est alors $I^{-1} := (A : I)$. Les idéaux fractionnaires inversibles donnant le faisceau inversible trivial sont les idéaux fractionnaires principaux. Le groupe de Picard de X est ainsi isomorphe au groupe des idéaux fractionnaires inversibles modulo les idéaux fractionnaires principaux. Les idéaux de A qui sont inversibles forment une partie génératrice de ce groupe.

Si de plus A est localement factoriel, par exemple si X est lisse, les idéaux inversibles sont les idéaux de hauteur 1 pure, c'est à dire tels que ses idéaux premiers associés sont tous de hauteur 1. De plus tout idéal inversible s'écrit de manière unique comme produit de puissances d'idéaux premiers de hauteur 1. Pic(X) est donc le quotient du groupe libre sur les idéaux premiers de hauteur 1 par les idéaux fractionnaires principaux.

On va maintenant voir que les faisceaux inversibles sur X s'incarnent naturellement en des variétés sur X, ce sont les fibrés en droites.

Définition 3.1.4.3 (Fibré en droites, morphismes, faisceau des sections)**.** Soit X une variété. Un fibré en droite sur X est une variété L munie d'un morphisme $\pi : L \to X$ tel que X admet un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ satisfaisant :

1. $\forall i \in I$, il existe un isomorphisme $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^1$ de variétés sur U_i.
2. $\forall i, j \in I$, l'isomorphisme $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1$ est de la forme $(x, z) \mapsto (x, a_{ij}(x) z)$.

Un morphisme de fibrés en droites sur X est un morphisme de variétés sur X avec la conditions supplémentaire que les morphismes induits sur les fibres soient linéaires. Une section d'un fibré en droites (L, π) est une section de π, et on a la version locale de cette notion.

On constate qu'un fibré en droite (L, π) sur X est obtenu en recollant des fibrés en droites de la forme $U_i \times \mathbb{A}^1 \to U_i$ appelés fibrés triviaux via des automorphismes linéaires sur les intersections définis par des fonctions $a_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^*$, dites de transition. De plus, un automorphisme de fibré en droites est donnée par une fonction $f \in \mathcal{O}(X)^*$. En effet, localement il s'agit d'automorphismes de fibrés triviaux qui sont nécessairement de cette forme.

Considérons un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X trivialisé sur un recouvrement affine $(U_i)_{i \in I}$ avec un générateur $s_i \in \mathcal{L}(U_i)$ sur chaque U_i. Sur $U_i \cap U_j$, on a $s_j = a_{ij} s_i$ avec $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. On considère au dessus de chaque U_i le fibré trivial $(U_i \times \mathbb{A}^1, \pi_i)$, et on les recolle avec des isomorphismes définis par $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \otimes_k k[t] \to \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \otimes k[u]$, $f \otimes_k 1 \mapsto f \otimes_k 1$, $1 \otimes_k t \mapsto a_{ij} \otimes_k u$. On a ainsi construit un fibré en droites sur X.

Réciproquement, considérons le $\mathcal{O}_X$-module des sections d'un fibré en droite L sur X. Sur les ouverts U_i où L est trivialisé on voit que les sections forment un faisceau isomorphe à $\mathcal{O}_{X|U_i}$. En effet se donner une section sur U_i revient à se donner un morphisme $U_i \to \mathbb{A}^1$, c'est à dire un élément de $\mathcal{O}_X(U_i)$. C'est donc un faisceau inversible. Les sections globales de L s'identifie via les trivialisations locales aux familles $(f_i)_{i \in I}$ telles que $f_i = a_{ij} f_j$ sur $U_i \cap U_j$. En effet, un telle section donne sur les intersections $U_i \cap U_j$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\mathrm{id} \times m_{a_{ij}}"] & & U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1 \\ & U_i \cap U_j \arrow[ul, "\mathrm{id} \times f_i"] \arrow[ur, "\mathrm{id} \times f_j"'] & \end{tikzcd}$$

où $m_{a_{ij}}$ est la multiplication par a_{ij}

En composant les deux opérations on trouve le faisceau inversible dual du faisceau de départ, car les sections de L s'identifient naturellement à des éléments de $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, et on a particulier $\Gamma(X, L) =$

$\Gamma(X, \mathcal{L}^\vee)$. Ces opérations sont fonctorielles et réalisent une anti-équivalence de catégorie entre faisceaux inversibles sur X et fibrés en droites sur X. Cela permet de transporter la structure du groupe de Picard sur les classes d'isomorphie de fibrés en droites. En particulier, on définit le fibré dual L^{-1} de L comme le fibré en droites construit à partir de $\mathcal{L}^\vee$. Il est défini par les fonctions de transition a_{ij}^{-1}.

Remarque 3.1.4.4. Si on se donne un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une variété X, le fibré en droites qu'on lui associe dans la discussion précédente n'est autre que $\mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$, où $\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$ est l'algèbre symétrique associée à $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{O}_X$. En effet, on recolle les $\mathrm{Spec}_{U_i}(\mathrm{Sym}(\mathcal{L})_{|U_i})) \simeq \mathrm{Spec}_{U_i}(\mathcal{O}_{U_i}[t]) \simeq U_i \times_k \mathbb{A}^1_k$, où $(U_i)_i$ est un recouvrement qui trivialise $\mathcal{L}$).

Soit (L, π) un fibré en droite sur X, et $f : X' \to X$ un morphisme de variétés. L'image inverse de $f^*(L)$ est le produit fibré $X' \times_X L$ muni de sa projection vers X'. C'est un fibré en droites sur X', en effet c'est un recollement des fibrés triviaux $f^{-1}(U_i) \times \mathbb{A}^1 \to f^{-1}(U_i)$ via les fonctions de transition $f^\sharp(a_{ij})$. Si on a $L = \mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$ pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$, on constate que $f^*(L)$ est le fibré en droites construit à partir du faisceau inversible $f^*(\mathcal{L})$. Enfin, si on se donne un morphisme $\varphi : (L_1, \pi_1) \to (L_2, \pi_2)$ de fibrés en droites sur X et un morphisme de variétés $f : X' \to X$ on définit l'image inverse $f^*(\varphi)$ comme l'unique morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
f^*(L_1) = X' \times_X L_1 \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f^*(\varphi)"] \arrow[ddr, bend right] & & L_1 \arrow[d, bend left, "\varphi"] \\
& f^*(L_2) = X' \times_X L_2 \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
& X' \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.1.4.5. Notons qu'un fibré en droites (L, π) est muni d'une action de $\mathbb{G}_m$, c'est l'action de multiplication par les scalaires dans les fibres. L'ensemble L_0 des points fixes sous $\mathbb{G}_m$ est le fermé correspondant à l'image de la section nulle. Son complémentaire $L^\times := L \setminus L_0$ est une $\mathbb{G}_m$-variété et π se restreint en $\pi^\times : L^\times \to X$ qui est un quotient géométrique. En effet sur les U_i, on a $\pi^{\times -1}(U_i) \simeq U_i \times_k \mathbb{G}_m$ et l'action de $\mathbb{G}_m$ se fait par multiplication sur le facteur de droite. Cette action sur L se traduit par une graduation du faisceau d'algèbres $\pi_* \mathcal{O}_L = \mathrm{Sym}\, \mathcal{L} = \oplus_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X. Le sous-espace de poids 1 de $\mathcal{O}(L) = \pi_* \mathcal{O}_L(X)$ s'identifie alors à $\Gamma(X, L^{-1})$.

3.1.5 G-linearisation d'un fibré en droite

Dans cette section on se pose la question de la possibilité d'étendre une action d'un groupe algébrique G sur une variété X à un fibré en droite (L, π) sur X tout en préservant la structure du fibré. C'est la notion de G-linéarisation.

Définition 3.1.5.1. Soit G un groupe algébrique, X une G-variété, et (L, π) un fibré en droites. Une G-linéarisation de (L, π) est une action de G sur L telle que π est G-équivariante et pour tout $(g, x) \in G \times X$ l'application $L_x \to L_{g.x}$, $l \mapsto g.l$ est linéaire.

Autrement dit, le morphisme associé à une G-linéarisation est à valeurs dans le groupe d'automorphisme de fibrés en droites de (L, π). On note $\alpha : G \times X \to X$ l'action de G sur X et $p_2 : G \times X \to X$ la projection sur X. Pour tout $g \in G$ on a une application :

$$g \times \mathrm{id} : X \to G \times X,\ x \mapsto (g, x)$$

Les images inverses de ces deux fibrés en droites par cette application sont explicitement :

$$(g \times \mathrm{id})^* \alpha^*(L) = X \times_{G \times X} (G \times X) \times_X L = \{(x, (g', x'), l) \mid \alpha(g', x') = \pi(l) \text{ et } (g, x) = (g', x')\}$$

$$(g \times \mathrm{id})^* p_2^*(L) = X \times_{G \times X} (G \times X) \times_X L = \{(x, (g', x'), l) \mid x' = \pi(l) \text{ et } (g, x) = (g', x')\}$$

On obtient ainsi des isomorphismes canoniques $(g \times \mathrm{id})^*\alpha^*(L) \simeq g^*L$ et $(g \times \mathrm{id})^*p_2^*(L) \simeq L$, où g^*L est l'image inverse de L par l'automorphisme de X associé à l'action de g, et on fait ces identifications par la suite. Ainsi, vu la discussion suivant 3.1.4.3, tout morphisme de fibrés en droites $\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$ induit pour tout $g \in G$ un morphisme $\Phi_g : g^*(L) \to L$.

Lemme 3.1.5.2. *Avec les notations ci-dessus, on a une correspondance bijective entre les G-linéarisations de L et les isomorphismes*

$$\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$$

de fibrés en droites sur $G \times X$ tels que $\Phi_{gh} = \Phi_h \circ h^*(\Phi_g)$ pour tous $g, h \in G$.

Démonstration. Soit $\beta : G \times L \to L$ une G-linéarisation. Par définition, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\beta} & L \\ \downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Par la propriété universelle du produit fibré on a donc un morphisme $\gamma : G \times L \to \alpha^*(L)$ de variétés sur $G \times X$. On remarque que l'on a un isomorphisme canonique $G \times L \to p_2^*(L)$, $(g, l) \mapsto ((g, \pi(l)), l)$. Avec cette identification, γ s'écrit explicitement $\gamma(g, l) = ((g, \pi(l)), \beta(g, l))$. C'est un isomorphisme car on a un inverse évident $\Phi((g, x), l) = (g, \beta(g^{-1}, l))$. Pour $g \in G$ fixé, l'image inverse de γ par $g \times \mathrm{id}$ est simplement $\gamma_g : L \to g^*L, l \mapsto (\pi(l), \beta(g, l))$. Soit maintenant $h \in G$, et on note également h l'automorphisme de X donné par son action. En tenant compte des identifications précédentes on a pour $l \in L$ les formules $h^*(\gamma_g) \circ \gamma_h(l) = h^*(\gamma_g)(\pi(l), \beta(h, l)) = (\pi(l), \beta(g, \beta(h, l))) = (\pi(l), \beta(gh, l)) = \gamma_{gh}(l)$. Ainsi, Φ satisfait la condition de l'énoncé.

Réciproquement, étant donné un Φ comme dans l'énoncé, on note $\gamma := \Phi^{-1}$ et $p_L : \alpha^*(L) \to L$ la projection sur L. On a alors un morphisme $\beta := p_L \circ \gamma : G \times L \to L$. La condition sur Φ exprime qu'il s'agit d'une action de G sur L. Enfin, pour $g \in G$ fixé, $p_L \circ \gamma_g$ est un automorphisme de (L, π), autrement dit on obtient un diagramme commutatif comme ci-dessus. On a donc bien une G-linéarisation. $\square$

Lemme 3.1.5.3. *Soient G un groupe algébrique connexe, X une G-variété irréductible, et (L, π) un fibré en droites sur X. Alors L admet une G-linéarisation si et seulement si $\alpha^*(L)$ et $p_2^*(L)$ sont isomorphes en tant que fibrés en droites sur $G \times X$.*

Démonstration. L'implication directe est contenue dans le lemme précédent. Pour la réciproque, on considère un isomorphisme $\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$ de fibrés en droites sur $G \times X$. Comme $\alpha(e, x) = x$ pour tout $x \in X$, on a une identification canonique $(e \times \mathrm{id})^*\alpha^*(L) \simeq L$, d'où un automorphisme $(e \times \mathrm{id})^*(\Phi) : L \to L$ de fibré en droites. Cet automorphisme est donné d'après 3.1.4.3 par une fonction $f \in \mathcal{O}(X)^*$. En remplaçant Φ par $\Phi \circ p_2^\sharp(f^{-1})$, on peut supposer $f = 1$. On obtient ainsi un morphisme $\beta : G \times L \to L$ qui satisfait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\beta} & L \\ \downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

De plus, on a modifié Φ de telle manière que l'on ait $\forall l \in L$, $\beta(e, l) = l$. Il reste maintenant à prouver que la condition d'associativité d'une action de groupe est satisfaite. On note $\beta_1 : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \beta(g, \beta(h, x))$, $\beta_2 : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \beta(gh, x)$, et par abus $\alpha : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \alpha(gh, x)$. On obtient deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times L & \xrightarrow{\beta_1} & L \\ \downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times G \times L & \xrightarrow{\beta_2} & L \\ \downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

On obtient ainsi deux isomorphismes $\gamma_1 : G \times G \times L \to \alpha^*(L), (g, h, l) \mapsto ((g, h, \pi(l)), \beta_1(g, h, l))$ et $\gamma_2 : G \times G \times L \to \alpha^*(L), (g, h, l) \mapsto ((g, h, \pi(l)), \beta_2(g, h, l))$. La condition d'associativité correspond à $\gamma_1\gamma_2^{-1} = \mathrm{id}$. Or $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est un automorphisme du fibré en droite $(G \times G \times L, \mathrm{id} \times \pi)$, donc correspond à une fonction $\varphi \in \mathcal{O}(G \times G \times X)^*$. D'après **??**, il existe $\chi \in X^*(G \times G)$ et $\psi \in \mathcal{O}(X)^*$ tels que $\varphi(g, h, x) = \chi(g, h)\psi(x)$ pour tout $g, h \in G$ et $x \in X$. En évaluant en $g = h = e$ on obtient $\psi = 1$, puis comme $\varphi(g, e, x) = 1 = \varphi(e, g, x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$, on obtient $\chi(g, e) = \chi(e, g)$ pour tout $g \in G$. Comme l'application naturelle $X^*(G) \times X^*(G) \to X^*(G \times G)$ est un isomorphisme, on conclut que $\chi = 1$ et donc $\varphi = 1$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 3.1.5.4. *Soit X une G-variété et L un fibré en droite G-linéarisé sur X. Alors le k-ev des sections globales $\Gamma(X, L)$ a une structure naturelle de G-module.*

Démonstration. Comme L^{-1} admet aussi une G-linéarisation d'après **??**, il s'agit d'une $G \times \mathbb{G}_m$-variété où l'action de $\mathbb{G}_m$ est l'action naturelle sur les fibres par multiplication. D'après 2.1.2.4, $\mathcal{O}(L^{-1})$ est un $G \times \mathbb{G}_m$-module, donc en particulier un $\mathbb{G}_m$-module. Le sous-espace de poids 1 pour l'action de $\mathbb{G}_m$ de ce module est $\Gamma(X, L)$ d'après 3.1.4.5. Il est facile de vérifier que ce sous-espace est stable par l'action de G, ce qui en fait un G-module. □

3.2 Diviseurs

3.2.1 Diviseurs de Weil

En se rappelant le résultat 1.3.3.3, on voit que la "géométrie en codimension 1" d'une variété normale, c'est à dire le comportement des fonctions sur les fermés irréductibles de codimension 1, contient beaucoup d'information sur la variété. Ces fermés sont appelés des diviseurs premiers, on va voir qu'ils permettent de définir un invariant particulièrement intéressant de la variété, et fondamental pour la construction de l'anneau de Cox, c'est le groupe des classes. Notre cadre est celui d'une variété normale que l'on supposera de plus irréductible pour plus de simplicité, suivant la remarque 1.3.3.1.

Définition 3.2.1.1 (Diviseur premier, diviseur de Weil, diviseur effectif)**.** Soit X une variété normale irréductible. Un diviseur premier D est une sous-variété fermée irréductible de codimension 1. On définit $\mathrm{WDiv}(X)$ le groupe libre engendré par les diviseurs premiers. Un élément de $\mathrm{WDiv}(X)$ est appelé un diviseur de Weil. Enfin, un diviseur est dit effectif si il est à coefficients $\geqslant 0$.

On introduit maintenant pour chaque diviseur de Weil D une valuation sur $k(X)$ donnant des informations sur le comportement des fonctions rationnelles sur D. C'est l'analogue de l'ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fonction rationnelle de la droite affine en un point. Soit η le point générique de D, et $\mathcal{O}_{\eta,X}$ son anneau local. Par hypothèse et grâce aux propriétés de la localisation, il est noethérien normal et de dimension 1, c'est donc un anneau de valuation discrète. La valuation associée $v_D : k(X) \to \mathbb{Z}$ donne par définition l'ordre d'annulation d'une fonction rationnelle le long de D. La propriété ci-dessous montre que les fonctions rationnelles permettent de définir des diviseurs de Weil.

Proposition 3.2.1.2. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors $v_D(f) = 0$ sauf pour un nombre fini de diviseurs premiers D.*

Démonstration. Soit $f = g/h \in k(X)^*$, où l'on peut supposer X affine. Comme $v_D(f) = v_D(g) - v_D(h)$, on peut supposer $f \in k[X]$. Soit D une diviseur premier et p son point générique. Si $f \in k[X]_p^\times$ alors $v_D(f) = 0$. Sinon, $f \in p$ et donc $D \subset \mathcal{V}_X(f)$. Or, d'après le théorème 1.3.1.2, les composantes irréductibles Z_i de $\mathcal{V}_X(f)$ sont des diviseurs premiers. Ainsi $v_D(f) = 0$ à moins que D ne soit l'un des Z_i. □

Ainsi l'application $k(X)^* \to \mathrm{WDiv}(X)$, $f \mapsto \mathrm{div}(f) := \sum_D v_D(f)D$ définit un morphisme de groupes. Son image est le *groupe des diviseurs principaux* noté $\mathrm{PDiv}(X)$. La relation modulo $\mathrm{PDiv}(X)$ s'appelle *l'équivalence linéaire*, et le groupe quotient $\mathrm{Cl}(X)$ est le *groupe des classes de diviseurs*.
$\mathrm{Cl}(X)$ est un invariant en général difficile à calculer. Ci-dessous on liste quelques outils et exemples.

Proposition 3.2.1.3. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ une variété affine normale et irréductible. Alors A est factoriel si et seulement si* $\mathrm{Cl}(X) = 0$

Démonstration. C'est une conséquence de 1.1.1.3 et 1.1.1.4. Voir [3] II.6.2. □

Corollaire 3.2.1.4. $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}_k^n) = 0$ *pour* $n \geqslant 1$

Théorème 3.2.1.5. *Soit X une variété normale et irréductible et Z une sous-variété fermée propre. On pose $U := X \setminus Z$. Alors :*

1. *$Cl(X) \to Cl(U)$ défini par $\sum_i n_i D_i \mapsto \sum_i n_i (D_i \cap U)$, avec $D_i \cap U = 0$ si $D_i \cap U = \emptyset$, est un morphisme de groupe surjectif.*
2. *Si $codim(Z, X) \geqslant 2$, alors $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ est un isomorphisme.*
3. *Soient $D_1, ..., D_s$ les composantes irréductibles de Z qui sont des diviseurs. Alors la suite ci-dessous exacte*

$$\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}D_j \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{.\cap U} \mathrm{Cl}(U) \to 0$$

Démonstration.

1. Si $D \cap U \neq \emptyset$ alors $\dim X = \dim U$ et $\dim D = \dim D \cap U$ car ce sont des ouverts de variétés irréductibles donc la dimension est préservée. Ainsi cela définit une application $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ qui est un morphisme par construction. De plus, comme un diviseur principal est envoyé sur un diviseur principal, on a bien le morphisme attendu. Il est surjectif car pour tout $D \in \mathrm{WDiv}(U)$ premier, on a $D = \overline{D} \cap U$.
2. Dans ce cas on ne peut avoir $D \subset Z$ cause de la dimension donc $D \cap U \neq \emptyset$. Ainsi, le noyau du morphisme $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ est exactement $\mathrm{PDiv}(X)$ d'où l'isomorphisme.
3. Le noyau de $.\cap U$ est exactement l'ensemble des $\pi(D)$ où D est un diviseur dont le support est contenu dans $X \setminus U = Z$, d'où le résultat.

□

3.2.2 Faisceau d'algèbres divisorielles

La proposition suivante montre que l'on peut caractériser les sections du faisceau structural de X en terme de diviseurs.

Proposition 3.2.2.1. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors*

1. *$div(f) \geqslant 0 \iff f \in \mathcal{O}_X(X)$*
2. *$div(f) = 0 \iff f \in \mathcal{O}_X(X)^\times$*

Démonstration. Il est suffisant de vérifier ces propriétés localement sur les ouverts affines. Or dans ce cas, f est une section globale si et seulement si f appartient à tous les anneaux locaux des diviseurs premier d'après 1.1.1.3. Cette dernière condition revient à dire que $\mathrm{div}(f)$ est effectif, cela prouve 1).
Pour la deuxième assertion, on remarque que $\mathrm{div}(f) = 0 \iff \mathrm{div}(f) \geqslant 0$ et $\mathrm{div}(f^{-1}) \geqslant 0$. □

Plus généralement, on définit pour chaque diviseur D un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X(D)$ dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ sont définies par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in k(X)^* \mid (\mathrm{div}(f) + D)_{|U} \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

On vérifie, grâce aux propriétés des valuations v_D, qu'il s'agit d'un sous $\mathcal{O}_X(U)$-module de $k(X)$, autrement dit un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_X(U)$, pour tout ouvert affine U. C'est donc un sous $\mathcal{O}_X$-module de la $\mathcal{O}_X$-algèbre $k(X)$. Dans le cas où X est affine on a une description explicite des sections globales :

Proposition 3.2.2.2. *Soit X une variété affine normale et irréductible, $A := k[X]$.*

1. *Soit un diviseur de Weil $D = a_{p_1}Y_{p_1} + ... + a_{p_r}Y_{p_r}$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigcap_{ht(p)=1} p^{-a_p}A_p$, où $a_p = 0$ si $p \notin \{p_1, ..., p_r\}$.*
2. *Soit $(Y_i)_{i\leqslant r}$ des diviseurs premiers de Cartier et $D = a_{p_1}Y_{p_1} + ... + a_{p_r}Y_{p_r}$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \prod_{i=1}^{n} p^{-a_p}$.*
3. *Pour un diviseur premier Y_p, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-Y_p)) = p$. Si de plus p est inversible et $a \in \mathbb{Z}$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(aY_p)) = p^{-a}$.*

Démonstration. 1. Pour tout idéal premier p de hauteur 1, A_p est un DVR. On a donc $pA_p = (\pi)$ pour un certain $\pi \in A_p \subset k(X)$. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on définit un sous A_p-module de $k(X)$ isomorphe à pA_p en posant $p^aA_p := (\pi^a)$. C'est un idéal fractionnaire de A_p et on a pour $f \in k(X)^*$, $v_{Y_p}(f) \geqslant a \iff f \in p^aA_p$. Or, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \iff \mathrm{div}(f) \geqslant -D \iff v_{Y_p}(f) \geqslant -a_p$, pour tout p de hauteur 1, avec a_p le coefficient de Y_p dans D.

2. Cela est une conséquence de 3.2.3.2 et 3.1.4.2.
3. Dans ce cas, Y_p est effectif, donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-Y_p))$ est un sous-module de A, donc un idéal. On a donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-Y_p)) = pA_p \cap A = p$. Pour l'autre assertion, c'est immédiat car $\mathcal{O}_X(Y_p)$ est alors inversible d'après 3.1.4.2, c'est à dire que Y_p est de Cartier.

□

On forme maintenant la somme directe des $\mathcal{O}_X(D)$ et on la munit d'un produit de la façon suivante : pour $f_1 \in \mathcal{O}_X(D_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}_X(D_2)$, on définit le produit de f_1 et f_2 comme l'élément f_1f_2 de $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$. On voit que cette algèbre est naturellement WDiv-graduée, avec pour chaque degré D un contrôle prescrit quant au comportement des fonctions sur le support de D. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 3.2.2.3 (Faisceau d'algèbres divisorielles)**.** Soit X une variété normale et irréductible. Le faisceau d'algèbres divisorielles associé à un sous-groupe $K \in \mathrm{WDiv}(X)$ est le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres K-graduées

$$\bigoplus_{D\in K} S_D, \qquad S_D := \mathcal{O}_X(D)$$

Exemple 3.2.2.4. On considère la droite projective $\mathbb{P}^1$, $D = \{\infty\}$ et $K = \mathbb{Z}D$. Cherchons la forme d'une section $f \in S_{nD}(\mathbb{P}^1)$. On se place sur la carte affine $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ associée au repère projectif $(\infty, 0, 1) = (e_0, e_1, e_0 + e_1)$, on note z la coordonnée associée. Par hypothèse, f est régulière sur U_0, c'est donc un polynôme en z. On fait agir l'homographie $z \mapsto w = 1/z$ pour se placer sur la carte $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{e_1\}$ associée au repère $(0, \infty, 1)$. Sur cette carte, la fonction qui coïncide avec f sur $U_0 \cap U_1$ est $g(w) = f(1/w)$. Or si on écrit $f(z) = z^kh(z)$ avec $z \nmid h(z)$, on obtient $g(w) = w^{-k-\deg(h)}h(w)$. Comme on doit avoir $k + \deg(h) \leqslant n$, on obtient que f est un polynôme de degré $\leqslant n$.
Ainsi on voit que l'application $\varphi_n : k[t_0, t_1]_n \to S_{nD}(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ est un isomorphisme de k-ev. De plus, on a facilement $\varphi_n\varphi_m = \varphi_{n+m}$. Finalement, $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ avec $\varphi : k[t_0, t_n] \to S(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ et $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z} \to K, n \mapsto nD$ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Proposition 3.2.2.5. *Soit X une variété normale et irréductible et $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. Alors $\mathcal{O}_X(D)$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. En particulier, le faisceau d'algèbres divisorielles associé à un sous-groupe $K \in \mathrm{WDiv}(X)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente.*

Démonstration. On peut supposer $X = \mathrm{Spec}\, A$ affine car le problème est local. Alors d'après **??**, $\mathcal{O}_X(D) \simeq \tilde{M}$ où $M = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Il s'agit donc de montrer que M est un A-module de type fini. Mais d'après 3.2.2.2, on voit que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ est un idéal fractionnaire de A, il est donc isomorphe à un idéal de A en tant A-module après multiplication par une certaine fonction rationnelle. Comme A est noetherien cela conclut la preuve. En fait, cela revient à constater que les fonctions $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ peuvent admettre des pôles uniquement sur les diviseurs premiers intervenant dans l'écriture de D, soit un nombre fini. L'ordre de ces pôle peut donc être borné par un même $d \in \mathbb{N}$. □

Proposition 3.2.2.6. *Soit X une variété normale et irréductible et $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. Alors pour tout ouvert $U \subset X$ tels que $X \setminus U$ soit de codimension $\geqslant 2$ dans X, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.*

Démonstration. Encore une fois, on peut traiter le problème localement et supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine. La restriction est injective et comme en 1.3.3.3, on remarque que U contient tous les premiers p de hauteur 1. On écrit $D = a_{p_1}Y_{p_1} + ... + a_{p_r}Y_{p_r}$ comme en 3.2.2.2, et on considère les injections dans les tiges $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))_p = p^{-a_p}A_p$. On construit ainsi l'inverse de la restriction $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigcap_{ht(p)=1} p^{-a_p}A_p$, en procédant comme en 1.3.3.3. □

3.2.3 Diviseurs de Cartier et groupe de Picard

Sur des variétés plus générales, par exemple avec des singularités, les anneaux locaux associés aux diviseurs premiers ne sont plus en général des DVR. On a alors des difficultés pour définir par exemple le diviseur d'une fonction rationnelle. On a néanmoins la notion générale de diviseur de Cartier, qui dans le cadre des variétés normales irréductibles correspondra aux diviseur de Weil "localement principaux".

Définition 3.2.3.1 (Diviseur de Cartier)**.** Soit X une variété irréductible. Un diviseur de Cartier sur X est une section globale du faisceau $k(X)^\times/\mathcal{O}_X^\times$. Ainsi un diviseur de Cartier est la donnée d'une famille $(U_i, f_i)_{i\in I}$ telle que pour tout i, U_i est un ouvert de X, $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, $f_i \in k(X)^\times$, et pour tout $i, j \in I$, $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$.
Un diviseur de cartier est dit principal si il provient d'une section globale de $k(X)^\times$ c'est à dire d'une fonction rationnelle. Deux diviseurs de Cartier sont dits linéairement équivalents si ils sont égaux modulo le sous-groupe des diviseurs principaux. Le groupe quotient se note $\mathrm{CaCl}(X)$.

Soit X une variété irréductible. On remarque que pour un diviseur de Cartier $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$ de X, $\mathcal{O}_X(D)_{|U_i}$ est le $(\mathcal{O}_X)_{|U_i}$-module libre de base (f_i^{-1}). Il est donc localement libre de rang 1, c'est à dire inversible. On récupère facilement D à partir de $\mathcal{O}_X(D)$ en prenant un recouvrement qui le trivialise. Enfin, pour tout sous-faisceau inversible de $k(X)^\times$ on construit de la même manière un diviseur de Cartier. On a donc une correspondance bijective entre diviseurs de Cartier et sous-faisceau inversible de $k(X)^\times$. Par cette correspondance, deux diviseurs sont linéairement équivalents si et seulement si les faisceaux inversibles sont isomorphes. On a ainsi définit une application injective $\mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ dont on voit facilement que c'est un morphisme de groupe. Comme X est supposé irréductible, c'est un isomorphisme car tout faisceau inversible est isomorphe à un sous-faisceau inversible de $k(X)^\times$. En résumé on a le résultat suivant :

Proposition 3.2.3.2. *Soit X une variété irréductible. L'application $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ définit un isomorphisme de groupe $CaCl(X) \simeq Pic(X)$.*

On suppose à nouveau X normale et irréductible. Dans ce cadre, tout diviseur de Cartier $(U_i, f_i)_{i\in I}$ définit un unique diviseur de Weil de la façon suivante. Pour tout diviseur premier Y, on choisit un indice $i \in I$ tel que $U_i \cap Y \neq \emptyset$ et on prend $v_Y(f_i)$ pour coefficient de Y. Cette somme est finie par la même preuve que 3.2.1.2. Par ailleurs elle ne dépend pas du choix des indices car si j est un autre indice possible, $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$ par définition, donc $v_Y(f_i) = v_Y(f_j)$. On a ainsi un diviseur de Weil tel que sa restriction à tout ouvert du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ est principal. D'où la terminologie "localement principal". Ce constat permet de voir $\mathrm{CaCl}(X)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Cl}(X)$ (on vérifie que les diviseurs principaux se correspondent).

Ce sous-groupe est propre en général (cf [3] 6.11.3). En revanche, si X est lisse, tout diviseur de Weil est localement principal . En effet dans ce cas, les anneaux locaux sont factoriels, on obtient ainsi en tout point une équation locale d'un diviseur premier car un idéal premier de hauteur 1 d'un anneau factoriel est principal, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.2.3.3. *Soit X une variété normale irréductible, $D, E \in \mathrm{WDiv}\, X$ avec D de Cartier. Alors le morphisme naturel $\alpha : \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{O}_X(D + E)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Écrivons $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$. Alors sur chaque U_i, le morphisme α induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-module. En effet on a un morphisme inverse, il s'agit de la multiplication par f_i composée avec l'inverse de l'isomorphisme $\mathcal{O}_{U_i}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{O}_{U_i}(E) \simeq \mathcal{O}_{U_i}(D)$, localement donné par $a \otimes b \mapsto abf_i$. □

Par analogie avec les diviseurs de Weil, un diviseur de Cartier $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$ est dit effectif si pour tout $i \in I$, $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Dans ce cas $\mathcal{O}_X(-D)$ est un sous $\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{O}_X$, c'est concrètement le faisceau d'idéaux localement généré sur chaque U_i par f_i. D'après 1.3.1.2 cela définit un sous-schéma fermé de X de codimension 1. L'inclusion $\mathcal{O}_X(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ est une section globale de $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(-D), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(D)$ appelée section canonique et notée 1_D puisqu'elle correspond à la multiplication par 1. Réciproquement, la donnée d'un couple $(\mathcal{L}, s)$ constitué d'un faisceau inversible sur X et d'une section globale définit un diviseur de Cartier effectif de la manière suivante. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement qui trivialise $\mathcal{L}$. Sur chaque U_i on a un isomorphisme $\varphi_i : \mathcal{L}_{|U_i} \to \mathcal{O}_{X|U_i}$. On voit que $(U_i, \varphi_i(s))_i$ définit un diviseur de Cartier effectif indépendant du choix des φ_i, et donc du couple $(\mathcal{L}, s)$ à isomorphisme près. On l'appelle le diviseur des zéros de s et on le note $\mathrm{div}_D(s)$. Les deux procédés que l'on vient de décrire sont inverses l'un de l'autre, on obtient ainsi une correspondance bijective :

$$\big\{\text{Diviseurs de Cartier effectif sur } X\big\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{couples } (\mathcal{L}, s) \text{ constitués d'un faisceau} \\ \text{inversible et d'une section globale}\end{matrix}\right\}$$

Considérons un diviseur de Cartier D quelconque et $\mathcal{O}_X(D)$ le sous-faisceau inversible de $k(X)$ qui lui correspond. En faisant varier s non-nulle dans les couples $(\mathcal{O}_X(D), s)$ tels que ci-dessus, on obtient tous les diviseurs de Cartier effectifs linéairement équivalent à D. En effet, $\mathrm{div}_D(s)$ est par définition un diviseur effectif linéairement équivalent à D. Réciproquement un diviseur effectif linéairement équivalent à D s'écrit $D + \mathrm{div}(s) \geqslant 0$ où s est donc une section globale s de $\mathcal{O}_X(D)$.

3.2.4 L'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$

Faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}^n_k$

Morphismes vers l'espace projectif

Soit X une variété munie d'un morphisme $(f, f^\sharp) : X \to \mathbb{P}^n_k$, où $\mathbb{P}^n_k$ =Proj$k[x_0, ..., x_n]$. On considère le faisceau tordu de Serre $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_k$. C'est un faisceau inversible engendré par les sections globales $x_0, ..., x_n$. $f^*\mathcal{O}(1)$ est également inversible et on a un morphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-module $\alpha : \mathcal{O}(1) \to f_*f^*\mathcal{O}(1)$ où la structure de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-module sur $f_*f^*\mathcal{O}(1)$ est donnée par $\lambda.t = f^\sharp(\lambda)t$ pour tout ouvert $V \subset \mathbb{P}^n_k$, $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(V)$, $t \in f_*f^*\mathcal{O}(1)(V)$. On définit des sections globales $f^*(x_0) := s_0 := \alpha(\mathbb{P}^n_k)(x_0), ..., f^*(x_n) := s_n := \alpha(\mathbb{P}^n_k)(x_n)$ de $f^*\mathcal{O}(1)$ dont on voit facilement qu'elles engendrent $f^*\mathcal{O}(1)$.
Considérons un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une variété Y, une section globale l, et un morphisme $(g, g^\sharp) : X \to Y$. On définit l'ouvert

$$Y_l := \{y \in Y \mid \mathcal{O}_{Y,y}l_y = \mathcal{L}_y\} = \{y \in Y \mid l_y \notin m_y\mathcal{L}_y\}$$

C'est tout simplement le complémentaire du support du diviseur des zéros associé au couple $(\mathcal{L}, l)$. Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$ il s'agit de l'ouvert principal Y_l, et on a de plus $g^{-1}(Y_l) = X_{g^\sharp(l)} = X_{g^*(l)}$ car $g^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ et $\alpha = g^\sharp$ dans ce cas. Revenant dans le cas général, on voit facilement que $g^*\mathcal{L}$ est inversible et en raisonnant localement sur des ouverts affines qui trivialisent $\mathcal{L}$, on voit d'après ce qui précède que $g^{-1}(Y_l) = X_{g^*(l)}$. D'autre part, si $l_1, ..., l_n$ sont des sections globales qui engendrent $\mathcal{L}$, on voit que (Y_{l_i}) est un recouvrement de Y qui trivialise $\mathcal{L}$. En effet, sur chaque Y_{l_i}, on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{Y|Y_{l_i}} \to \mathcal{L}_{Y|Y_{l_i}}$, $\lambda \mapsto \lambda l_i$, et par hypothèse, l'intersection des complémentaires des Y_{l_i} est vide. Enfin, on note sans ambiguïté l_j/l_i l'unique élément de $\mathcal{O}_{Y|Y_{l_i}}(Y_l)$ tel que $l_j/l_i.l_i = l_j$ par l'isomorphisme précédent.
Revenons au cas initial et notons $U_i = D_+(x_i) = \mathcal{O}(1)_{x_i}$. La k-algèbre $\mathcal{O}_{P^n_k}(U_i)$ est engendrée par les éléments x_j/x_i et on a $s_j/s_i.s_i = s_j = \alpha(U_i)(x_j) = \alpha(U_i)(x_j/x_i.x_i) = f^\sharp(x_j/x_i).\alpha(U_i)(x_i) = f^\sharp(x_j/x_i).s_i$. On a donc nécessairement $f^\sharp(x_j/x_i) = s_j/s_i$. Comme les U_i sont affines, cela définit des morphismes $f_i : X_{s_i} \to P^n_k$ en composant avec l'inclusion. C'est morphismes se recollent en un unique morphisme, car ils coïncident sur les $X_{s_i} \cap X_{s_j}$. Autrement dit, on récupère f par la donnée des s_i, et f est ainsi l'unique morphisme tel que $f^*(x_i) = s_i$.
Réciproquement montrons que la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et de sections globales $l_0, ..., l_n$ qui l'engendrent définissent un unique morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ tel que $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}(1)$, ce dernier isomorphisme étant celui qui envoie $f^*(x_i)$ sur l_i. Si f existe avec ces propriétés, il est unique d'après ce qui précède.

Pour l'existence, on construit comme précédemment des morphismes $f_i : X_{l_i} \to U_i$ qui se recollent en un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_k$. Par construction, $\mathcal{L}$ et $f^*\mathcal{O}(1)$ se trivialisent sur le même recouvrement $(f^{-1}(U_i) = X_{l_i} = X_{f^*(x_i)})_i$. On a des isomorphismes locaux $\varphi_i : \mathcal{L}_{|f^{-1}(U_i)} \to f^*\mathcal{O}(1)_{|f^{-1}(U_i)}$, $l_i \mapsto f^*x_i$. Ce sont des sections locales de $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}(1))$ sur un recouvrement de X. Pour vérifier qu'elles coïncident aux intersections $X_{l_i} \cap X_{l_j}$, on remarque que l'on a $l_i/l_j = f^\sharp(U_i \cap U_j)(x_i/x_j) = f^*(x_i)/f^*(x_j) \in \mathcal{O}_X(X_{l_i} \cap X_{l_j})^\times$. Ces sections se recollent donc en un unique isomorphisme $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}(1)$ qui est bien l'isomorphisme recherché.

Notons que cette propriété caractérise l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ à isomorphisme près. En effet il représente le foncteur (voir stacks)...

Variétés quasi-projectives, faisceaux inversible très amples

Définition 3.2.4.1. Soit X une variété et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X engendré par une famille finie de sections globales. Si ces sections définissent une immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$, on dit que $\mathcal{L}$ est très ample. Cela revient à dire que $\mathcal{L} \simeq i^*\mathcal{O}(1)$ pour une immersion $i :\hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$.
Si X est normale et irréductible, un diviseur de Cartier D est dit très ample si on a $\mathcal{O}_X(D) \simeq i^*\mathcal{O}(1)$ pour une immersion $i :\hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$.

Supposons maintenant X lisse (donc normale) et projective, $D \in \mathrm{WDiv}(X)$, $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau inversible associé. On a vu que l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D est $\{\mathrm{div}_D(s) \mid s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}\}$. D'autre part deux sections globales s, s' non nulles ont même diviseur des zéros si et seulement si elles sont colinéaires dans le k-ev $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$, en effet dans ce cas $s/s' \in \mathcal{O}_X^\times(X) = k^*$, car k est algébriquement clos. Notons enfin que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie ([3] II.5.19). Ainsi l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalent à D est naturellement muni d'une structure d'espace projectif, cela amène la définition suivante :

Définition 3.2.4.2 (Système linéaire, point de base)**.** Soit X une variété lisse et projective, et D un diviseur. Le système linéaire complet définit par D est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D, on le note $|D|$. Un système linéaire est une partie de $|D|$ correspondant à un sous espace projectif. On dit que $p \in X$ est un point de base d'un système linéaire $\mathbb{P}(V) \subset |D|$ si l'intersection des $X \setminus X_s$ pour $s \in V$ est non vide.

Autrement dit dans ce langage, se donner un morphisme $X \to \mathbb{P}^n_k$ est équivalent à se donner un système linéaire $\mathbb{P}(V) \subset |D|$ sans point de base et une base de V.

3.2.5 Le groupe des unités d'une variété irréductible

Soit X une variété, le groupe des unités $U(X)$ de X est le quotient du groupe $\mathcal{O}(X)^*$ des fonctions régulières inversibles par le sous-groupe k^* des fonctions constantes. On va appliquer les techniques précédentes pour obtenir un résultat de finitude de $U(X)$ lorsque X est irréductible, ainsi que du groupe des caractères d'un groupe algébrique.

Proposition 3.2.5.1. *Soit X une variété irréductible. Alors $U(X)$ est libre de type fini.*

Démonstration. Comme $\mathcal{O}(X)^*$ s'injecte dans $\mathcal{O}(U)^*$ pour tout ouvert $U \subset X$, on peut supposer X affine car un sous-groupe d'un groupe abélien libre de type fini est aussi libre de type fini. Soit $\eta_X : \widetilde{X} \to X$ l'application de normalisation. Alors $\widetilde{X}$ est affine, on a une injection $\eta_X^\sharp : \mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{X})$ qui induit une injection $U(X) \hookrightarrow U(\widetilde{X})$. On peut donc supposer X normale.

D'après **??**, on peut supposer que X est un ouvert d'une variété projective normale $\bar{X}$. On note $D_1, ..., D_r$ les composantes irréductibles de $\bar{X} \setminus X$. Ceux sont des diviseurs premiers car ils sont définis par l'équation de l'hyperplan à l'infini. Dans chaque carte affine qui les rencontre, il s'agit donc de sous-variétés fermés de codimension 1 d'après 1.3.1.2. Chacun de ces diviseurs premiers D_i définit un anneau de valuation discrète dont on note v_i la valuation. On considère l'application :

$$\mathcal{O}(X)^* \to \mathbb{Z}^r, f \mapsto (v_1(f), ..., v_r(f))$$

C'est un morphisme de groupes de noyau k^* d'après [3] I.3.4. ce qui conclut la preuve. □

Proposition 3.2.5.2. *Soit X, Y des variétés irréductibles. Alors le morphisme :*

$$\mathcal{O}(X)^* \times \mathcal{O}(Y)^* \to \mathcal{O}(X \times Y)^*,\ (f,g) \mapsto ((x,y) \mapsto f(x)g(y))$$

est surjectif.

Démonstration. Il suffit de montrer que $f \in \mathcal{O}(X \times Y)^*$ peut s'écrire $f = gh$ pour $g \in k(X)$ et $h \in k(Y)$. En effet, on considère un point $y \in Y$ où h est régulière. D'autre part on constate que $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est régulière sur X, ce qui se voit sur les ouverts affines $U \times V$. En effet $\mathcal{O}(U \times V)$ est alors le coproduit des algèbres de coordonnées $\mathcal{O}(U)$ et $\mathcal{O}(V)$, c'est à dire leur produit tensoriel. De plus, f_y ne s'annule pas donc est inversible dans $\mathcal{O}(X)$. Cela prouve que g est en fait régulière, et h aussi par le même raisonnement.

On peut ainsi remplacer X et Y par deux ouverts affines lisses. Le produit $X \times Y$ est encore affine et lisse d'après **??**. D'après **??**, on peut supposer que X est un ouvert d'une variété projective normale $\bar{X}$, et on note $D_1, ..., D_r$ les diviseurs premiers correspondants aux composantes irréductibles de $\bar{X} \setminus X$. Soit $f \in \mathcal{O}(X \times Y)^*$ que l'on regarde comme une fonction rationnelle sur $\bar{X} \times Y$, qui est normal d'après **??**. Le diviseur associé à f est à support dans $(\bar{X} \setminus X) \times Y$, on a donc $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^r n_i D_i \times Y$ pour des entiers $n_1, ..., n_r$. Soit π_i une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\bar{X}, D_i}$. Il existe $x_0 \in D_i$ tel que π_i définisse une équation locale de D_i. Soit $y_0 \in Y$, on peut écrire une équation locale de $D_i \times Y$ en (x_0, y_0) s'écrit $f_i(x)u(x,y)$ avec u inversible sur un voisinage de (x_0, y_0). Ainsi il existe un ouvert non-vide $V \subset Y$ tel que pour tout $y \in V$, on ait $\operatorname{div}(f_y) = \sum_{i=1}^r n_i D_i$. Choisissons $y_0 \in V$, alors $\operatorname{div}(f_y f_{y_0}^{-1}) = 0$ donc $f_y f_{y_0}^{-1}$ définit une fonction régulière sur $\bar{X}$. Comme $\bar{X}$ est complète (voir **??**), $f_y f_{y_0}^{-1}$ est en fait constante. Ainsi $h := f/f_{y_0}$ définit une fonction rationnelle sur Y telle que $f = f_{y_0} h$ comme désiré. ☐

Soit X, Y des variétés irréductibles. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to k^* \to \mathcal{O}(X)^* \to U(X) \to 0 \tag{3.4}$$

Elle est scindée car tout choix de $x \in X$ définit une section. En effet, le sous-groupe de $\mathcal{O}(X)^*$ des fonctions valant 1 en x s'envoie isomorphiquement sur $U(X)$. On a donc $\mathcal{O}(X)^* \simeq k^* \times U(X)$. De plus, le noyau du morphisme naturel $\mathcal{O}(X)^* \times \mathcal{O}(Y)^* \to U(X \times Y)$ est $k^* \times k^*$. Comme il est surjectif d'après la proposition précédente, on obtient $U(X \times Y) \simeq U(X) \times U(Y)$. On applique maintenant ces résultats au groupe de caractères d'un groupe algébrique connexe.

Proposition 3.2.5.3. *Soit G un groupe algébrique connexe, et $f \in \mathcal{O}(G)^*$ telle que $f(e) = 1$. Alors $f \in X^*(G)$.*

Démonstration. L'application

$$f \circ m : G \times G \to \mathbb{A}^1, (g,h) \mapsto f(gh)$$

est régulière inversible sur $G \times G$ qui est connexe donc irréductible. On applique donc la proposition précédente pour trouver $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(G)^*$ tels que $f(gh) = \varphi(g)\psi(g)$, $\forall g, h \in G$. Quitte à multiplier φ par un scalaire, on peut supposer $\varphi(e) = 1$. En fixant $g = e$ on obtient $\psi = f$, puis en fixant cette fois $h = e$, on obtient $g = \varphi$. Finalement, $f(gh) = f(g)f(h)$, donc f est un caractère. ☐

Ainsi, pour un groupe algébrique connexe G, le groupe des caractères $X^*(G)$ définit un scindage de la suite exacte courte 3.4. On a donc $X^*(G) \simeq U(G)$ et donc $X^*(G \times H) \simeq X^*(G) \times X^*(H)$ pour tout autre groupe algébrique connexe H. En particulier on en déduit que le groupe des caractères d'un groupe algébrique quelconque est de type fini comme on le voit en considérant l'injection $X^*(G) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r U(g_i G^o)$, où les $g_i G^o$ désignent les composantes connexes de G. Le corollaire suivant nous sera utile par la suite.

Corollaire 3.2.5.4. *Soit G un groupe algébrique connexe, et X une G-variété. Alors l'application naturelle $X^*(G) \times \mathcal{O}(X)^* \to \mathcal{O}(G \times X)^*$ est un isomorphisme.*

Si X est de plus une G-variété. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(X)^*$, il existe $\chi_f \in X^*(G)$ tel que $f(g.x) = \chi_f(g) f(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

Démonstration. L'application est bien surjective d'après le corollaire et la proposition précédente et son noyau est clairement trivial. Pour le deuxième point, il suffit de considérer l'application $(g,x) \mapsto f(g.x) \in \mathcal{O}(G \times X)^*$. ☐

Chapitre 4

Anneaux de Cox

4.1 Un exemple introductif

Soit $X = \mathrm{Proj}(B/I)$ une variété projective et irréductible, où $B = k[x_0, ..., x_n]$ et $I \subset B$ un idéal homogène. A la différence du cas affine, l'algèbre graduée B/I des coordonnées homogènes de X n'est pas un invariant. Par exemple, $\mathbb{P}^1_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, x_1])$ est isomorphe à tous ses plongements de Veronese, ces isomorphismes provenant de morphismes injectifs mais non surjectifs entre les algèbres de coordonnées homogènes correspondantes.

On considère maintenant le cas où X est donnée par une immersion fermée $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n_k$ avec $i(X) = \mathrm{Proj}(B/I)$. On note d'après 3.2.4 que cela revient à se donner un diviseur très ample D tel que $\mathcal{O}_X(D) \simeq i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$. Considérons l'application canonique $\alpha : \oplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l) \to i_*i^* \oplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l) \simeq i_* \oplus_{l\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(lD)$. Sur les sections globales cela donne $\alpha(\mathbb{P}^n_k) : k[x_0, ..., x_n] \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{S}(X)$, ou $\mathcal{S}$ est le faisceau d'algèbres divisorielles sur X associé à $\mathbb{Z}D$. Au degré zéro, $\alpha_0 = i^\sharp$, on en déduit $\ker\alpha = \Gamma_*(\mathcal{I}_{i(X)}) = I$ d'après **??**, puis $\mathrm{Im}\,\alpha \simeq B/I$. On a ainsi retrouvé l'algèbre des coordonnées du plongement à partir d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible, c'est à dire un élément de son groupe de Picard, qui est un objet intrinsèquement défini sur X.

D'après [3] ex II.5.14, $\mathcal{S}(X)$ est la clôture intégrale de B/I. Ainsi, B/I est normal si et seulement si $\alpha(\mathbb{P}^n_k)$ est surjective, on dit alors que le plongement est projectivement normal. Cette remarque montre en particulier que $\mathcal{S}(X)$ est une k-algèbre de type fini. On redémontre maintenant ce fait en donnant un éclairage géométrique sur ces constructions. Le fibré en droites $L = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^n_k}(\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^n_k}(\oplus_{l\geqslant 0}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(l))$ est l'éclatement en l'origine de $\mathbb{A}^{n+1}$. En effet, on montre facilement que le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-module des sections de l'éclatement en l'origine de $\mathbb{A}^{n+1}$ vu comme fibré en droites sur $\mathbb{P}^n_k$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)$, ce qui permet de conclure d'après la discussion 3.1.4.3. On a le diagramme commutatif suivant, où L_X est le fibré en droites $\mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_X(D))$, j est une immersion fermée (comme recollement d'immersions fermées) et π est propre.

$$\begin{tikzcd}
L_X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_X"] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{A}^{n+1}_k \\
X \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^n_k &
\end{tikzcd}$$

On considère comme en 3.1.4.3 l'action de $\mathbb{G}_m$ sur les fibres de L, l'ensemble des points fixes L_0, et $L^\times$ son complémentaire. $L^\times$ est constitué de recollements de schémas isomorphes à $\mathrm{Spec}_{U_i}(\mathcal{O}_{U_i}[t, t^{-1}]) \simeq U_i \times_k \mathbb{G}_m$, ce qui donne $L^\times = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^n_k}(\oplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(lD))$. De plus, $L^\times$ est isomorphe à $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ par restriction de π. D'autre part, p se restreint en une application $p^\times : L^\times \to \mathbb{P}^n_k$ qui est le quotient géométrique de l'action de $\mathbb{G}_m$. On résume cela dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} := L_X^\times \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_X^\times"] & L^\times \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "p^\times"] & \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \\
X \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}_k^n &
\end{tikzcd}$$

Notons encore π la restriction πj, c'est une application propre. Ainsi, $\pi_*\mathcal{O}_{L_X}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}$-module cohérent. On en déduit que $\mathcal{O}(L_X) = \pi_*\mathcal{O}_{L_X}(\mathbb{A}_k^{n+1})$ est un $k[x_0, ..., x_n]$-module de type fini, c'est en particulier une k-algèbre de type fini. De plus comme les $\mathcal{O}_X(lD)$ n'ont pas de sections globales non nulles pour $l < 0$, on en déduit que $\mathcal{O}(\widetilde{X}) = \Gamma(X, \oplus_{l\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(lD)) = \mathcal{O}(L_X)$ est de type fini sur k. C'est de plus une algèbre $\mathbb{N}$-graduée, son spectre $\bar{X}$ est donc muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ avec un unique point fixe p_0 appartenant à l'adhérence de tout orbite. Enfin, pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(lD))$ avec f non nulle et $l > 0$, on a $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p_X^{\times -1}(X_f)) = \Gamma(X_f, \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(lD)) = \Gamma(X, \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(lD))_f = \mathcal{O}(L_X)_f$. L'unique maximal contenant chaque f correspond à p_0, on voit ainsi que ces spectres se recollent en $\widetilde{X} = \bar{X}\setminus\{p_0\}$, où $\bar{X} = \operatorname{Spec}\mathcal{O}(\widetilde{X})$.

Prenons maintenant un exemple concret, soit $X \subset \mathbb{P}_k^3$ la quadrique projective d'équation en coordonnées homogènes $x_1x_2 = x_3x_4$, et D le diviseur des zéros de la section $x_4 \in \mathcal{O}_X(1)$. Le diviseur D est de Cartier sur X, on peut le décrire sur les ouverts standards par $(U_i, x_4/x_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$. De plus, D est très ample car $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(1)$. En effet, en regardant ces $\mathcal{O}_X$-modules comme sous-modules de $k(x_1, ..., x_4)$, on voit l'isomorphisme en multipliant les générateurs locaux x_i/x_4 de $\mathcal{O}_X(D)$ par x_4. L'algèbre des coordonnées homogènes de X est normale d'après 1.1.2.5 et 1.3.2.2, donc en reprenant les notations précédentes on obtient que $\bar{X}$ est le cone affine d'équation $t_1t_2 - t_3t_4$ dans $\mathbb{A}^4$ et $\widetilde{X} = \bar{X} \setminus \{0\}$ le cône épointé.

On va maintenant utiliser cette construction pour calculer le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\bar{X}) \simeq \mathrm{Cl}(\widetilde{X})$. En tant que fibré en droite sur X on voit en utilisant [3] II.6.6 que $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Cl}(L_X)$, et l'image inverse de D par cet isomorphisme est exactement $\pi^{-1}(0)$. Puis on a $\widetilde{X} = L_X \setminus \pi^{-1}(0)$ où le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à X. D'après ce qui précède et comme $\pi^{-1}(0)$ est irréductible et de codimension 1 dans $\widetilde{X}$, on a d'après 3.2.1.5 une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \to 0,\ \varphi(1) = D$$

Par ailleurs dans [3] II.6.6.1 on calcule $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ avec $D = (1, 1)$. On en déduit $\mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \simeq \mathbb{Z}$ avec deux générateurs de somme nulle, $D_1 = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_1)$ avec $\mathfrak{p}_1 = (t_1, t_4)$ et $D_2 = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_2)$ avec $\mathfrak{p}_2 = (t_2, t_4)$.

Calculons maintenant les sections globales du faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ sur $Y := \widetilde{X}$ associé à $K = \mathbb{Z}D_2$. On a $\mathcal{S}_{-D_2}(Y) = \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(-D_2)) = \mathfrak{p}_2$ d'après 3.2.2.2. Puis comme comme le cône épointé Y est lisse, D_2 est Cartier dessus. Ainsi $\mathcal{S}_{-D_2}$ est un faisceau inversible sur Y d'inverse $\mathcal{O}_Y(D_2)$, ce dernier étant la restriction à Y du $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module $\widetilde{(t_4^{-1}\mathfrak{p}_1)}$. En effet, on a $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (t_4)$ car ce sont deux idéaux radicaux définissant le même fermé. On a donc $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_2)) = t_4^{-1}\mathfrak{p}_1 = (1, t_4^{-1}t_1)$. Les applications naturelles $\mathcal{S}_{\pm D2}(Y)^{\otimes^n} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\pm nD2}(Y)$ avec $n > 0$, ne sont pas surjectives à priori. On est donc contraint d'examiner localement la situation sur un recouvrement bien choisi. On a quatre ouverts affines Y_{t_i} qui recouvrent Y, et $\mathcal{S}_{\pm nD2}(Y) = \cap_i\mathcal{S}_{\pm nD2}(Y_{t_i})$, où l'intersection est prise dans $k(X)$. On a d'après **??**, $\mathcal{S}_{\pm D_2}(Y_{t_i}) = \mathcal{S}_{\pm D_2}(Y)_{t_i}$, et on calcule

$$\mathcal{S}_{-nD_2}(Y_{t_1}) = (t_4^n)_{t_1},\ \mathcal{S}_{-nD_2}(Y_{t_2}) = (1)_{t_2},\ \mathcal{S}_{-nD_2}(Y_{t_3}) = (t_2^n)_{t_3},\ \mathcal{S}_{-nD_2}(Y_{t_4}) = (1)_{t_4}$$
$$\mathcal{S}_{nD_2}(Y_{t_i}) = (1, t_4^{-1}t_1, (t_4^{-1}t_1)^2, ..., (t_4^{-1}t_1)^n)_{t_i}$$

On voit que l'on a $\cap_i\mathcal{S}_{\pm nD2}(Y_{t_i}) \subset \mathcal{S}_{\pm D2}(Y)^{\pm n}$ et on en déduit que l'application $\mathcal{S}_{\pm D2}(Y)^{\otimes^n} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\pm nD2}(Y)$ est un isomorphisme. Ainsi $\Gamma(Y, \mathcal{S})$ est engendré en tant que $\mathcal{O}(Y)$-algèbre par les éléments algébriquement libres $(z_1, z_2, z_3, z_4) := (1, t_4^{-1}t_1, t_2, t_4)$. De plus d'après les équations suivantes, la composante homogène de degré zéro est incluse dans $k[z_1, z_2, z_3, z_4]$:

$$z_2z_4 = t_1,\ z_1z_3 = t_2,\ z_2z_3 = t_3,\ z_1z_4 = t_4$$

On a donc $\Gamma(Y, \mathcal{S}) = k[z_1, z_2, z_3, z_4]$, c'est une algèbre de polynômes naturellement graduée par $\deg(z_1) = \deg(z_2) = 1$, $\deg(z_3) = \deg(z_4) = -1$. Cette $\mathbb{Z}$-graduation se traduit en une action de $\mathbb{G}_m$ sur Y donnée concrètement par $\lambda.z = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^{-1}z_3, \lambda^{-1}z_4)$. L'algèbre des invariants sous cette action est $k[z_1z_2, z_1z_4, z_2z_3, z_2z_4]$ ce qui donne un isomorphisme $\operatorname{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{S})^{\mathbb{G}_m}) \simeq Y$.

On vient ainsi de voir dans cet exemple qu'un faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ bien choisi permet de retrouver Y comme bon quotient d'une H-variété construite à partir de ce faisceau (où H définit la graduation de $\mathcal{S}$). C'est ce qu'on va étudier de manière générale dans cette partie.

4.2 Faisceau et anneau de Cox dans le cas sans torsion

4.2.1 Le spectre relatif d'une algèbre divisorielle

On souhaiterait réaliser géométriquement un faisceau d'algèbre divisorielles $\mathcal{S}$ d'une variété normale irréductible X associé à un sous-groupe $K \leqslant \mathrm{WDiv}(X)$ de type fini. Une idée naturelle est de prendre le spectre relatif $(\widetilde{X}, p)$ de ce faisceau d'algèbres quasi-cohérent. Toutefois, ce spectre relatif ne définira pas une variété en général. Il faudrait pouvoir recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines U_i tels que $\mathcal{R}(U_i)$ soit de type fini réduit, on dit alors que $\mathcal{S}$ est localement de type fini. Sous certaines conditions, on pourra s'en assurer. Par exemple si X est lisse, tous les diviseurs sont de Cartier, et notons dans ce cas $D_1, ..., D_s$ une base de K et U un ouvert sur lequel chaque D_i est principal. On a localement un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_k k[t_1^{\pm}, ..., t_s^{\pm}] \to \mathcal{R}(U),\ g \otimes t_1^{\nu_1} ... t_s^{\nu_s} \mapsto g f_1^{-\nu_1} ... f_s^{-\nu_s} \tag{4.1}$$

Par recollement on obtient que $\widetilde{X}$ est le produit $L_1^{\times} \times ... \times L_s^{\times}$ où, avec les notation de l'exemple d'introduction, L_i est le fibré en droite correspondant à $\mathcal{O}_X(D_i)$.

Construction 4.2.1.1. Soit X une variété normale et irréductible, $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ un sous-groupe de type fini, $\mathcal{S}$ le faisceau d'algèbres divisorielles associé. On suppose que $\mathcal{S}$ est localement de type fini.

Alors le spectre relatif $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{S})$ muni de son morphisme structural p est naturellement équipé d'une action du tore $H := \mathrm{Spec}\, k[K]$ pour laquelle (X, p) est un bon quotient.

Démonstration. En effet, p est affine par construction et sur chaque U_i, $\mathcal{R}(U_i)$ est K-graduée avec pour éléments homogènes de degré zéro $\mathcal{S}(U_i)_0 = \mathcal{O}_X(U_i)$. Ces quotients locaux coïncident aux intersections et se recollent globalement en p. □

Remarque 4.2.1.2. Reprenons les données de la construction précédente en supposant de plus que X est lisse. Alors, l'isomorphisme 4.1 nous dit que localement on a un diagramme commutatif dans lequel les flèches sont H-équivariantes et H agit sur le produit par multiplication sur le premier facteur :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "p"] & H \times U \arrow[dl, "pr_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Proposition 4.2.1.3. *Avec les données de 4.2.1.1, $\widetilde{X}$ est une variété irréductible et normale. De plus, pour tout fermé $A \subset X$ de codimension $\geqslant 2$, $p^{-1}(A)$ est aussi de codimension $\geqslant 2$.*

Démonstration. Tout d'abord, $\widetilde{X}$ est séparé comme spectre relatif sur une variété. Ensuite, on recouvre l'ouvert des points réguliers X_{reg} par un nombre fini d'ouverts U_i comme dans le diagramme ci-dessus, ce qui est possible car tout ouvert de X est quasi-compact. Ainsi les $p^{-1}(U_i)$ sont irréductibles, et leur réunion $p^{-1}(X_{reg})$ également car leur intersection est non-vide (cf **??**). De plus, $p^{-1}(X_{reg})$ est lisse car c'est vrai localement par le diagramme. On recouvre maintenant X par des ouverts affines $V_1, ..., V_s$ et on a d'après 3.2.2.6, $\mathcal{S}(V_i \cap X_{reg}) = \mathcal{S}(V_i) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(V_i))$. Ces anneaux sont normaux et intègre car $p^{-1}(X_{reg})$ est irréductible et lisse. Comme les $p^{-1}(V_i)$ recouvrent $\widetilde{X}$ on en déduit la normalité et l'irréductibilité. Pour la dernière assertion, c'est une conséquence directe du fait que $p_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{S}$ et de 3.1.3.12. □

Remarquons qu'une section de $s \in \mathcal{S}(U)$ homogène de degré $D \in K$ sur un ouvert $U \subset X$ peut être vue à la fois comme une fonction rationnelle sur X vérifiant $\mathrm{div}(s) + D \geqslant 0$ et comme une fonction régulière sur $\widetilde{X}$ qui est homogène de degré D pour l'action de H. De plus, si D est Cartier, $\mathrm{div}(s) + D$ est le diviseur des zéros de s sur X. Dans tous les cas on adopte la notation $\mathrm{div}_D(s)$ pour ce diviseur effectif et $X_{D,s}$ pour le complémentaire de son support. On explore maintenant les relation entre ces points de vue. Notons tout d'abord que comme p est un morphisme dominant de variétés irréductibles, on peut définir le pullback $p^*(D)$ d'un diviseur de Cartier simplement par le pullback de ses équations locales, c'est un morphisme de groupe injectif $\mathrm{WDiv}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(\widetilde{X})$. Pour un diviseur de Weil D, on considère sa restriction D' à X_{reg} et on définit $p^*(D)$ comme l'unique diviseur de Weil à correspondant à $p^*(D')$ via l'isomorphisme $\mathrm{WDiv}(\widetilde{X}) \simeq \mathrm{WDiv}(p^{-1}(X_{reg}))$. Le pullback envoie les diviseurs principaux sur des diviseurs principaux et on obtient un morphisme de groupes $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(\widetilde{X})$.

Proposition 4.2.1.4. *Les données sont celles de 4.2.1.1. Pour tout $D \in K$ et $s \in \mathcal{S}_D(X)$, on a $\mathrm{div}(s) = p^*(\mathrm{div}_D(s))$. Si de plus X_s est affine, on a $\mathrm{Supp}(\mathrm{div}(s)) = p^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathrm{div}_D(s))$.*

Démonstration. Comme $\widetilde{X} \setminus p^{-1}(X_{reg})$ est de codimension $\geqslant 2$ on peut supposer pour ce problème X et donc $\widetilde{X}$ lisse. On écrit $D = (U_i, f_i)$, on a ainsi $s_i := s_{|U_i} = \alpha_i f_i^{-1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, et localement on a $p^*(\mathrm{div}_D(s)_{|U_i}) = p^*(\mathrm{div}(\alpha_i)) = \mathrm{div}(p^\sharp(\alpha_i)) = \mathrm{div}(\alpha_i) = \mathrm{div}(\alpha_i f_i^{-1}) = \mathrm{div}(s_{|U_i})$, l'avant dernière égalité étant due au fait que f_i est inversible sur $p^{-1}(U_i)$. En effet, sur U_i on a $D = \mathrm{div}(f_i)$ donc $f_i \in \mathcal{S}_{-D}(U_i) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(U_i))$ et $f_i^{-1} \in \mathcal{S}_D(U_i) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(U_i))$.

La deuxième assertion, il faut montrer $p^{-1}(X_{D,s}) = \widetilde{X}_s$. On remarque $s^{-1} \in \mathcal{S}_{-D}(X_{D,s})$ donc s est inversible sur $p^{-1}(X_{D,s})$, ce qui montre $p^{-1}(X_{D,s}) \subset \widetilde{X}_s$. Par ailleurs, $\mathrm{div}_D(s)$ est de Cartier sur X_{reg} et son pullback est le pullback de ses équations locales, on obtient donc $p^{-1}(X_{D,s}) \cap p^{-1}(X_{reg}) = \widetilde{X}_s \cap p^{-1}(X_{reg})$. Ainsi $\widetilde{X}_s \setminus p^{-1}(X_{D,s})$ est le complémentaire d'un ouvert affine de codimension $\geqslant 2$, donc est vide d'après 1.3.3.4. $\square$

Corollaire 4.2.1.5. *Les données sont celles de 4.2.1.1. Soit $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ tel que $H.\tilde{x}$ est fermé dans $\widetilde{X}$. Pour tout $D \in K, f \in \mathcal{S}_D(X)$ non-nulle, on a :*

$$f(\tilde{x}) = 0 \iff p(\tilde{x}) \in \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_D(f))$$

Démonstration. Remarquons que l'on a $\mathrm{Supp}(p^*(D)) \subset p^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$. Puis comme p est surjective, on trouve $\overline{p(\mathrm{Supp}(p^*(D)))} \subset \mathrm{Supp}(D)$. En effet, on peut supposer D effectif et on a $p(\mathrm{Supp}(p^*(D))) = p(\overline{\mathrm{Supp}(p^*(D'))}) \subset \overline{p(\mathrm{Supp}(p^*(D')))}$, où on a noté $D' = D \cap X_{reg}$. Or $x \in \mathrm{Supp}(p^*(D')) \iff x \in \mathcal{V}_{p^{-1}(U_i)}(p^\sharp(f_i))$ en écrivant $D' = (U_i, f_i)_i$. On en déduit $p(x) \in \mathcal{V}_{U_i}(f_i)$, d'où $p(x) \in \mathrm{Supp}(D')$. Comme $\overline{\mathrm{Supp}(D')} = \mathrm{Supp}(D)$, on a bien le résultat annoncé. De plus, $p(\mathrm{Supp}(p^*(D)))$ et $\mathrm{Supp}(D)$ coïncident sur l'ouvert dense X_{reg} et $p(\mathrm{Supp}(p^*(D)))$ est fermé d'après 2.2.2.2. On a donc l'égalité :

$$p(\mathrm{Supp}(p^*(D))) = \mathrm{Supp}(D)$$

Ainsi en appliquant la proposition précédente, on a $p(\mathrm{Supp}(\mathrm{div}(f))) = \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_D(f))$ et donc $f(\tilde{x}) = 0 \implies p(\tilde{x}) \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{div}_D(f)$. Réciproquement, si $p(\tilde{x}) \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{div}_D(f)$, on a $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ pour un $\tilde{x}' \in \mathrm{Supp}(\mathrm{div}(f))$. Toujours d'après 2.2.2.2 et en utilisant que $H.\tilde{x}$ est fermé on obtient $H.\tilde{x} \subset \overline{H.\tilde{x}'}$ ce qui prouve $f(\tilde{x}) = 0$ car f est nulle sur $H.\tilde{x}'$, étant homogène et s'annulant en $\tilde{x}'$. $\square$

Toujours avec les données de 4.2.1.1, on établit maintenant un résultat important sur le groupe des classes de $\widetilde{X}$. On a d'abord besoin d'un lemme préliminaire assurant l'existence de H-linéarisations sur les fibrés en droites sur $\widetilde{X}$.

Lemme 4.2.1.6. *Soit X une variété irréductible munie d'une action d'un tore H, et (L, π) un fibré en droites sur X. Alors il existe une H-linéarisation de cette action sur L.*

Démonstration. On note $p_2 : H \times X \to X$ la projection. En utilisant [3] II.6.6, on obtient in isomorphisme $p_2^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(H \times X)$, d'où avec les notations de 3.1.5.3, $\alpha^*(L) \simeq p_2^*(M)$ pour un certain fibré en droites M sur X. En prenant l'image inverse par $e \times \mathrm{id}$ on obtient un isomorphisme de fibré en droites $L \simeq M$. On a ainsi un isomorphisme de fibrés en droites $\alpha^*(L) \simeq p_2^*(L)$, ce qui conclut la preuve d'après 3.1.5.3. $\square$

Théorème 4.2.1.7. *Les données sont celles de 4.2.1.1, en supposant de plus que X est lisse. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La projection $c : K \to \mathrm{Cl}(X)$ est surjective.*
2. *Le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\widetilde{X})$ est trivial.*

Démonstration. Supposons la projection c surjective. Soit $\widetilde{D} \in \mathrm{WDiv}(\widetilde{X})$ un diviseur. Il est de Cartier par hypothèse et on veut montrer qu'il est principal. On a une action du tore $H = \mathrm{Spec}\, k[K]$ sur $\widetilde{X}$ par la K-graduation de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$. En utilisant 4.2.1.6 et 4.2.1.3, on munit L d'une H-linéarisation et on obtient un H-module $\mathcal{S}_{\widetilde{D}}(\widetilde{X})$ d'après 3.1.5.4. On en déduit que pour tout $h \in H$ et $f \in \mathcal{S}_{\widetilde{D}}(\widetilde{X})$, on a $\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(h.f) = h.\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(f)$. Choisissant f homogène pour cette représentation (cf **??**) on a ainsi construit un diviseur $\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(f)$ fixe pour l'action de H et linéairement équivalent à D. On peut donc supposer que $\widetilde{D}$ est H-invariant. En utilisant le diagramme du début de cette partie qui s'applique localement ici et en remarquant que H agit transitivement sur lui même on conclut que via cet isomorphisme, $\widetilde{D}$ est de la forme $H \times D$, pour un diviseur $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. On en déduit que $D = p(\widetilde{D})$ et $\widetilde{D} = p^*(D)$. Or, par hypothèse D est linéairement équivalent à un $D' \in K$, on a ainsi le résultat car $p^*(D')$ est principal d'après la proposition précédente.

Supposons maintenant $\mathrm{Cl}(\widetilde{X})$ trivial. Soit $D \in \mathrm{WDiv}(X)$, on veut montrer que D est linéairement équivalent à un $D' \in K$, et on remarque que l'on peut supposer D effectif. L'image inverse $p^*(D)$ est principal par hypothèse et effectif. Donc $p^*(D) = \mathrm{div}(f)$ pour un $f \in \mathcal{O}(\widetilde{X})$, et on affirme que f est homogène pour la K-graduation. On introduit pour montrer cela une fonction régulière inversible sur $H \times \widetilde{X}$:

$$F : H \times \widetilde{X} \to k,\ (h, x) \mapsto f(h.x)/f(x)$$

En effet, $p^*(D)$ est H-invariant en tant qu'image inverse par l'application quotient p. On en déduit que pour tout $h \in H$, on a $\mathrm{div}(x \mapsto f(h.x)/f(x)) = 0$, ce qui prouve que $F \in \mathcal{O}(H \times \widetilde{X})^*$ d'après 3.2.2.1. Comme H est connexe en tant que tore, on peut appliquer le résultat 3.2.5.4. Ainsi il existe $\chi \in X^*(H)$ et $g \in \mathcal{O}(\widetilde{X})^*$ tel que $F(h, x) = \chi(h)g(x)$ pour tout $h \in H$ et $x \in \widetilde{X}$. Fixons $h = e$, on obtient $g = 1$, d'où $f(h.x) = \chi(h)f(x)$. Ainsi, $f \in \Gamma(X, \mathcal{S}_{D'})$ pour un $D' \in K$. Avec 4.2.1.4, on tire l'égalité $p^*(D) = \mathrm{div}(f) = p^*(\mathrm{div}_{D'}(f))$, et on conclut que $D = D' + \mathrm{div}(f)$, ce qu'on voulait montrer.

□

Remarque 4.2.1.8. On remarque que si on ne suppose plus que X est lisse, l'implication $1 \implies 2$ reste vraie dans le théorème précédent. En effet, comme $p^{-1}(X_{sing})$ est de codimension $\geqslant 2$ on peut alors supposer X et donc $\widetilde{X}$ lisse car on a un isomorphisme $\mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \simeq \mathrm{Cl}(\widetilde{X} \setminus p^{-1}(X_{sing}))$.

Corollaire 4.2.1.9. *Les données sont celles de 4.2.1.1. Alors $\widetilde{X}$ est quasi-affine.*

Démonstration. On recouvre X par des ouverts affine $X_1, ..., X_r$. D'après 1.3.3.4 chaque $X \setminus X_i$ est purement de codimension 1, c'est donc le support d'un diviseur effectif $D_i \in \mathrm{WDiv}(X)$. Sur X_{reg}, on a donc $\mathrm{Supp}(D_i) = \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_{D_i}(1))$ où 1 est vu comme une section globale de $\mathcal{O}_X(D_i)$. Cette égalité reste vrai sur X grâce aux isomorphismes $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_i) \simeq \Gamma(X_{reg}, \mathcal{O}_X(D_i))$ et $\mathrm{WDiv}(X) \simeq \mathrm{WDiv}(X_{reg})$. Ainsi, d'après 4.2.1.4, $\widetilde{X}$ est recouvert par des $\widetilde{X}_{f_i}$ qui sont affines car les $X_i = X_{D_i,1}$ le sont. Maintenant, notons que la propriété de finitude locale du faisceau structural de $\widetilde{X}$ reste vrai sur tout recouvrement affine de $\widetilde{X}$, on a donc en particulier pour tout i, $\mathcal{O}(\widetilde{X}_{f_i}) = k[(g_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}]$. Comme f_i est inversible sur chaque $\widetilde{X}_{f_i}$, on ne change rien en multipliant les g_{ij} par une puissance f_i^m, ce qui permet de supposer que les g_{ij} proviennent de sections globales en prenant un m suffisamment grand (Cf **??**). On a ainsi construit une sous-algèbre de type fini $R = k[(g_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n}]$ de $\mathcal{O}(\widetilde{X})$ telle que pour tout i, on a $R_{f_i} = \mathcal{O}(\widetilde{X}_{f_i}) = \mathcal{O}(\widetilde{X})_{f_i}$, la dernière égalité venant de **??**. On en déduit des immersions ouvertes $\widetilde{X}_{f_i} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ qui se recollent en une immersion ouverte $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ d'où le résultat. □

Corollaire 4.2.1.10. *Les données sont celles de 4.2.1.1. Soient $x \in X$, $K_x^0 \subset K$ le sous-groupe des diviseurs localement principaux en x, et $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ tel que $H.\tilde{x}$ est fermé. Alors le stabilisateur $H_{\tilde{x}}$ est égal à* $\mathrm{Spec}\, k[K/K_x^0]$.

Démonstration. Comme H agit localement sur $\widetilde{X}$ on peut se placer sur un voisinage affine de x, on suppose ainsi X et $\widetilde{X}$ affines. Ainsi, en appliquant 2.1.4.11, on a $H_{\tilde{x}} = \operatorname{Spec} k[K/K_{\tilde{x}}]$, où $K_{\tilde{x}}$ est le groupe d'orbite de $\tilde{x}$. Supposons que $D \in K$ soit principal sur ce voisinage de x, c'est à dire $D = \operatorname{div}(g)$ avec $g \in k(X)$. Choisissons $\alpha \in k[X]$ tel que $\alpha(x) \neq 0$. Alors $f := \alpha g^{-1} \in \mathcal{S}_D(X)$ et $\operatorname{div}_D(f) = \operatorname{div}(\alpha)$. En utilisant 4.2.1.5, on obtient $f(\tilde{x}) \neq 0$ et donc $D \in K_{\tilde{x}}$. Réciproquement, prenons $D \in K_{\tilde{x}}$, c'est à dire $f(\tilde{x}) \neq 0$ pour un $f \in \mathcal{S}_D(X)$. Alors $x \notin \operatorname{div}_D(f)$, et on a $D = -\operatorname{div}(f)$ au voisinage de x. Cela montre que D est localement principal. □

Corollaire 4.2.1.11. *Soit X vérifiant (†), et telle que tout diviseur soit de Cartier, par exemple si X est lisse. Alors H agit librement sur $\widetilde{X}$.*

4.2.2 Faisceau et anneau de Cox

Dans cette partie on définit l'anneau de Cox d'une variété X normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini. C'est en particulier le cas de l'exemple introductif

Construction 4.2.2.1 (Faisceau de Cox, Anneau de Cox)**.** Soit X une variété normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini et un sous-groupe $K \subset \operatorname{Cl}(X)$ se projetant isomorphiquement sur $\operatorname{Cl}(X)$. Il existe de tels K car $\operatorname{Cl}(X)$ est libre de type fini donc la projection admet des sections. On définit le faisceau de Cox sur X, noté $\mathcal{R}$ comme le faisceau d'algèbres divisorielles associé à K. Cette description ne dépend qu'à isomorphisme près du choix de K. L'anneau de Cox de X est l'algèbre des sections globales du faisceau de Cox.

Démonstration. Soient K, K' deux sous-groupes de $\operatorname{WDiv}(X)$ se projetant isomorphiquement sur $\operatorname{Cl}(X)$, et $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ les faisceaux de Cox correspondants. On choisit une base $(D_1, ..., D_s)$ de K. Cette base définit une section de la projection $c : \operatorname{WDiv}(X) \to \operatorname{Cl}(X)$ et on peut modifier cette section par des éléments du noyau, cela fournissant autant de bases de sous-groupes de $\operatorname{WDiv}(X)$ se projetant isomorphiquement sur $\operatorname{Cl}(X)$. Par ailleurs, chaque $D_i + \operatorname{Ker} c$ rencontre nécessairement K' sinon on aurait $\operatorname{rg} K' < \operatorname{rg} \operatorname{Cl}(X)$ comme rang de modules libres de type fini. On choisit ainsi $f_1, ..., f_s \in k(X)$ tels que $(D_i - \operatorname{div}(f_i))_i$ forme une base de K'. On définit un morphisme $\alpha : K \to k(X)^*, a_1 D_1 + ... + a_s D_s \mapsto f_1^{a_1} ... f_s^{a_s}$. Avec cela, l'isomorphisme linéaire faisant correspondre les bases de K et K' est $\widetilde{\psi} : K \to K'$, $D \mapsto -\operatorname{div}(\alpha(D)) + D$. Enfin on définit un isomorphisme d'algèbres divisorielles $(\psi, \widetilde{\psi}) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ en posant $f \in \Gamma(U, \mathcal{R}_D) \mapsto \alpha(D) f$. □

Exemple 4.2.2.2. Soit $X = \operatorname{Proj} B/I$ une variété projective normale et irréductible, où $B = k[x_0, ..., x_n]$ et $I \subset B$ un idéal homogène. Si X est projectivement normale, c'est à dire que B/I est intégralement clos, et que $\operatorname{Cl}(X)$ est libre de rang 1 engendré par l'intersection de X avec un hyperplan de $\mathbb{P}^n_k$. Alors $\mathcal{R}(X) = B/I = \mathcal{O}(\bar{X})$ où $\bar{X}$ est le cône affine dans $\mathbb{A}^{n+1}$ correspondant à X.

4.2.3 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox

Théorème 4.2.3.1. *Soit X une variété normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini. Alors :*

1. *L'anneau de Cox $\mathcal{R}(X)$ est factoriel.*
2. *Le groupe des unités de l'anneau de Cox est $\mathcal{R}(X)^\times = \Gamma(X, \mathcal{O}^\times)$*

Démonstration.
1. On peut supposer X lisse car X_{sing} est de codimension $\geqslant 2$ donc $\Gamma(X, \mathcal{R}) = \Gamma(X_{reg}, X)$. Ainsi $\widetilde{X}$ est lisse (par vérification locale immédiate) et le théorème 4.2.1.7 s'applique. Soit $f \in \mathcal{R}(X) = p_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(X) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})$. On a donc le diviseur effectif $\operatorname{div}(f) = \sum n_i D_i = \sum n_i \operatorname{div}(f_i) = \operatorname{div}(\prod f_i^{n_i})$ où les D_i sont des diviseurs premiers, chaque f_i est irréductible et appartient à $\mathcal{R}(X)$ d'après 3.2.2.1. L'unicité de l'écriture sur $\operatorname{WDiv}(X)$ donne l'unicité de l'écriture $f = u \prod f_i^{n_i}$ où $u \in \mathcal{R}(X)^\times$.
2. Une inclusion est évidente. Pour l'autre prenons $f \in \mathcal{R}(X)^\times$, qui est homogène d'après **??**, disons de degré D. Alors, $fg = 1 \in \mathcal{R}_0(X)$ pour un $g \in \mathcal{R}(X)^\times$ homogène de degré $-D$. Ainsi on a

$0 = \mathrm{div}_0(1) = \mathrm{div}_{D-D}(fg) = \mathrm{div}_D(f) + \mathrm{div}_{-D}(g)$. Les deux derniers diviseurs étant effectifs, on a $\mathrm{div}_D(f) = 0$ et donc $D = -\mathrm{div}(f)$, ce qui donne $f \in \mathcal{R}_0(X) = \mathcal{O}(X)^\times$ d'où le résultat.

□

Exemple 4.2.3.2. Reprenons le cas du cône affine de l'exemple introductif. $\mathcal{R}(Y)$ est l'algèbre de polynômes sur k à 4 indéterminés, donc est factoriel en particulier. Par ailleurs, $\mathcal{O}(Y)^\times = k^*$ car en inversant par exemple t_1 on obtient $Y_{t_1} \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^2$, d'où le résultat.

Proposition 4.2.3.3. *Soit X une variété normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini. Alors :*

1. *Soient $f \in \mathcal{R}_D(X)$ et $g \in \mathcal{R}_E(X)$ non nulles. Alors $f \mid g \iff \mathrm{div}_D(f) \leqslant \mathrm{div}_E(g)$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{R}_D(X)$ non nulle. Alors f est premier si et seulement si $\mathrm{div}_D(f)$ est premier.*

Démonstration. Soit f, g des fonctions régulières non-nulles sur $\widetilde{X}$. Comme $\widetilde{X}$ est intègre, on peut les voir comme des éléments de $k(X)^*$. Ainsi $f \mid g$ dans $\mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\mathrm{div}(f^{-1}g) \geqslant 0$. Prenant f, g comme dans l'énoncé et en utilisant 4.2.1.4, on voit que c'est équivalent à $\mathrm{div}_D(f) \leqslant \mathrm{div}_E(g)$. La preuve du deuxième énoncé est similaire. □

4.3 Faisceau et anneau de Cox dans le cas général

4.3.1 Faisceau et anneau de Cox

On souhaite maintenant définir l'anneau de Cox d'une variété X dans le cas où le groupe des classes est de type fini avec de la torsion. On suppose comme toujours X normale et irréductible. L'idée est de construire le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ associé à un sous-groupe $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ se projetant surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$, puis d'identifier des composantes homogènes $\mathcal{S}_{D_1}$ et $\mathcal{S}_{D_2}$ si $D_1 = D_2 + E$, où $E \in \ker(c : K \to \mathrm{Cl}(X))$. Pour cela on remarque que l'on a, d'après 3.2.3.3, un isomorphisme $\mathcal{S}_{D_1} \simeq \mathcal{S}_{D_2} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{S}_E$. Posons $E = \mathrm{div}(g)$ avec $g \in k(X)$, et considérons $f_2 \in \mathcal{S}_{D_2}(U)$ une section sur un ouvert $U \in X$. Par l'isomorphisme, on voit que f_2 est de la forme $g_{|U} f_1$, où $f_1 \in \mathcal{S}_{D_1}(U)$. Pour identifier f_1 et f_2, il faut imposer $g_{|U} = 1_{|U}$, où $1 \in \mathcal{S}_0(X)$, c'est ce que l'on fait dans la construction ci-dessous.

Construction 4.3.1.1. Soit X une variété normale irréductible, telle que $\Gamma(X, \mathcal{O}^\times) = k^*$ et $\mathrm{Cl}(X)$ est de type fini. On se fixe un sous-groupe $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ tel que la projection $c : K \to \mathrm{Cl}(X)$ est surjective. Soit $K^0 := \ker c$ et $\chi : K^0 \to k(X)^*$ un caractère, c'est à dire un morphisme de groupes tel que $\mathrm{div}(\chi(E)) = E$, pour tout $E \in K^0$. Soit $\mathcal{S}$ le faisceau d'algèbres divisorielles sur X associé à K. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux défini par l'image du morphisme

$$\bigoplus_{E \in K^0} \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ E \mapsto 1 - \chi(E), \quad \text{où } 1 \in \mathcal{S}_0(X)$$

Le faisceau de Cox associé à K et χ est le faisceau quotient $\mathcal{R} := \mathcal{S}/\mathcal{I}$. C'est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente et $\mathrm{Cl}(X)$-graduée de la manière suivante :

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{[D] \in \mathrm{Cl}(X)} \mathcal{R}_{[D]}, \quad \mathcal{R}_{[D]} := \pi\Big(\bigoplus_{D' \in c^{-1}([D])} \mathcal{S}_{D'}\Big), \quad \text{où } \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{R} \text{ est la projection}$$

L'anneau de Cox associé à K et χ est l'anneau des sections globales de $\mathcal{R}$.

La $\mathrm{Cl}(X)$-graduation de $\mathcal{R}$ annoncée ci-dessus n'est pas évidente à priori. On clarifie cela dans la proposition ci-dessous.

Proposition 4.3.1.2. *Avec les notation de la construction 4.4.2.1, $\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une $\mathrm{Cl}(X)$-graduation :*

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{[D] \in \mathrm{Cl}(X)} \mathcal{S}_{[D]}, \quad \mathcal{S}_{[D]} := \bigoplus_{D' \in c^{-1}([D])} \mathcal{S}_{D'}$$

Soit $f \in \Gamma(U,\mathcal{I})$ et $D \in K$, alors la composante $\mathrm{Cl}(X)$-homogène $f_{[D]} \in \Gamma(U, \mathcal{S}_{[D]})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f_{[D]} = \sum_{E \in K^0} (1-\chi(E))f_E, \text{ où } f_E \in \Gamma(U, \mathcal{S}_D), \text{ et } \chi(E) \in \Gamma(U, \mathcal{S}_{-E})$$

En particulier, $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes, et π est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathrm{Cl}(X)$-graduées. De plus, si $f \in \Gamma(U,\mathcal{I})$ est K-homogène, alors c'est la section nulle.

Démonstration. On montre d'abord l'unicité. Si on obtient une telle écriture alors les composantes K-homogènes $f_{[D]}$ sont facilement identifiables, il s'agit pour chaque degré $D - E \in c^{-1}([D])$ de $-\chi(E)f_E$.

Montrons l'existence. Par définition de $\mathcal{I}$, chaque germe $f_{[D],x}$ a une représentation sur un voisinage ouvert U_x de x par une section

$$g = \sum_{E \in K^0} (1-\chi(E))g_E \in \Gamma(U_x, \mathcal{I}), \text{ où } g_E \in \Gamma(U_x, \mathcal{S}_{[D]})$$

On écrit la décomposition en composantes K-homogènes de chaque g_E :

$$g_E = \sum_{D' \in D + K^0} g_{E,D'}, \text{ où } g_{E,D'} \in \Gamma(U_x, \mathcal{S}_{D'})$$

La section $g'_{E,D'} := \chi(D'-D)g_{E,D'}$ est K-homogène de degré D et on a l'identité

$$(1-\chi(E))g_{E,D'} = (1-\chi(E+D-D'))g'_{E,D'} - (1-\chi(D-D'))g'_{E,D'}$$

On obtient ainsi l'écriture désirée localement sur des ouverts qui recouvrent X. Par irréductibilité de X, on obtient l'unicité de l'écriture globalement en recollant ces sections. □

Corollaire 4.3.1.3. *Supposons K de type fini, et soit $E_1, ..., E_s$ une base de K^0. Alors pour tout ouvert $U \subset X$, l'idéal $\Gamma(U,\mathcal{I})$ est engendré par $1-\chi(E_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente et des identités suivantes :

$$1-\chi(E+E') = (1-\chi(E)) + (1-\chi(E'))\chi(E)$$

$$1-\chi(-E) = (1-\chi(E))(-\chi(-E))$$

□

4.3.2 Invariance de l'anneau de Cox

Notre objectif est maintenant de vérifier que l'anneau de Cox construit en 4.4.2.1 est indépendants des choix faits à isomorphisme près. On aura donc une construction intrinsèque car elle ne dépend à isomorphisme près que de données intrinsèques de la variété (faisceau structural, groupe des classes).

Lemme 4.3.2.1. *Avec les données de 4.4.2.1. Soit $f \in \mathcal{S}(U)$ une section locale $\mathrm{Cl}(X)$-homogène de degré $[D]$, avec $D \in K$. Alors il existe $f' \in \mathcal{S}_D(U)$ tel que $f - f' \in \mathcal{I}(U)$.*

Démonstration. Cela se voit grâce à l'astuce d'écriture

$$f = \sum_{D' \in D+K^0} f_{D'} = \sum_{D' \in D+K^0} \chi(D'-D)f_{D'} + \sum_{D' \in D+K^0} (1-\chi(D'-D))f_{D'}$$

□

Proposition 4.3.2.2. *Avec les données de 4.4.2.1, on a pour tout $D \in K$ un isomorphisme de faisceaux $\pi_{|\mathcal{S}_D} : \mathcal{S}_D \to \mathcal{R}_{[D]}$.*

Démonstration. Considérons pour $x \in X$ le morphisme induit entre les tiges $\pi_x : \mathcal{S}_{D,x} \to \mathcal{R}_{[D],x}$, et montrons que c'est un isomorphisme. La proposition 4.3.1.2 montre qu'il existe un unique élément de $\mathcal{S}_{D,x}$ se projetant sur 0, on a donc l'injectivité. Pour la surjectivité, il suffit de montrer que toute section f de $\mathcal{S}_{[D]}$ sur un voisinage U de x s'écrit, éventuellement sur un voisinage V de x plus petit, sous la forme $f' + s$ avec $f' \in \mathcal{S}_D(V)$, et $s \in \mathcal{I}(V)$. Il suffit d'appliquer le lemme précédent. $\square$

Proposition 4.3.2.3. *Avec les données de 4.4.2.1, on a pour tout ouvert $U \subset X$ un isomorphisme canonique $\mathcal{R}(U) \simeq \mathcal{S}(U)/\mathcal{I}(U)$.*

Démonstration. L'application canonique $\psi_U : \Gamma(U, \mathcal{S})/\Gamma(U, \mathcal{I}) \to \Gamma(U, \mathcal{S}/\mathcal{I})$ est $\mathrm{Cl}(X)$-homogène et injective, montrons qu'elle est surjective. Soit $h \in \Gamma(U, \mathcal{S}/\mathcal{I})$, c'est donc un recollement de sections locales $h_i := \varphi_{U_i}(g_i)$, avec $U = \cup_{i\in I} U_i$, et telles que la restriction de $g_i - g_j$ à $U_i \cap U_j$ appartient à $\mathcal{I}(U_i \cap U_j)$ pour tout couple $(i, j) \in I$. Soit $g_{i,[D]} \in \mathcal{S}_{[D]}(U_i)$ la composante $\mathrm{Cl}(X)$-homogène de degré $[D]$ de g_i. Comme $\mathcal{I}$ est $\mathrm{Cl}(X)$-homogène d'après 4.3.1.2, on a $g_{j,[D]} - g_{i,[D]} \in \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$ pour tout couple $(i, j) \in I$. De plus, d'après le lemme 4.3.2.1, il existe des éléments $f_{i,D} \in \mathcal{S}_D(U_i)$ tels que $g_{i,[D]} - f_{i,D} \in \mathcal{I}(U_i)$, et on a $f_{i,D} - f_{j,D} \in \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$. Ainsi $f_{i,D} = f_{j,D}$ sur $U_i \cap U_j$ d'après 4.3.1.2, et on obtient que les $f_{i,D}$ se recollent en un section $f_D \in \mathcal{S}_D(U)$ telle que $\psi(f_D) = h_{[D]}$. Finalement, $f = \sum f_D$ est un antécédent de h par ψ. $\square$

Théorème 4.3.2.4. *Avec les données de 4.4.2.1. Soit K', χ' un autre choix de sous-groupe et de caractères. Alors les faisceaux de Cox associés sont isomorphes en tant que faisceaux d'algèbre* $\mathrm{Cl}(X)$*-graduées.*

Démonstration. Dans un premier temps, montrons que l'on peut se ramener à des faisceaux de Cox définis par un sous-groupe de $\mathrm{WDiv}(X)$ de type fini. Soit donc $K_1 \subset K$ de type fini se projetant surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. Un tel K_1 existe car il suffit par exemple de prendre le sous-groupe de K engendré par des antécédents par c de générateurs de $\mathrm{Cl}(X)$. La restriction de χ à K_1 définit un caractère $\chi_1 : K_1^0 \to k(X)^*$. L'inclusion $K_1 \subset K$ définit une injection $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}$, qui envoie l'idéal $\mathcal{I}_1$ défini par χ_1 dans $\mathcal{I}$. Cela donne une injection $\mathrm{Cl}(X)$-graduée $\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}_1$ est le faisceau de Cox associé à K_1 et χ_1. Mais dans lemme 4.3.2.1, on peut toujours choisir $D \in K_1$, cela donne la surjectivité de ce morphisme.

On suppose donc K de type fini. Montrons que tout choix de caractères $\chi, \chi' : K^0 \to k(X)^*$ définit un isomorphisme entre les faisceaux de cox $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ associés. Notons que $\chi^{-1}\chi'$ envoie K^0 dans $\mathcal{O}(X)^* = k^*$. On peut étendre $\chi^{-1}\chi'$ en un caractère $\theta : K \to k^*$, en effet considérons une $\mathbb{Z}$-base $(D_1, ..., D_r)$ de K adaptée à K^0. Il existe donc des entiers positifs $n_1, ...n_s$ avec $s \leqslant k$ tels que $n_1D_1, ..., n_sD_s$ soit une $\mathbb{Z}$-base de K^0. Soit $\alpha_i := \chi^{-1}\chi'(n_iD_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Choisissons une racine n_i-iéme de α_i que l'on note β_i, pour $1 \leqslant i \leqslant s$. En posant $\theta(D_i) = \beta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, et $\theta(D_i) = 1$ pour $s+1 \leqslant i \leqslant r$ on définit un prolongement de $\chi^{-1}\chi'$. Enfin, on définit un automorphisme K-gradué (α, id) de $\mathcal{S}$ en posant :

$$\alpha_D : \mathcal{S}_D \to \mathcal{S}_D, \quad f \mapsto \theta(D)f$$

Cet automorphisme envoie $\mathcal{I}'$ sur $\mathcal{I}$ par construction et induit donc un isomorphisme entre $\mathcal{S}/\mathcal{I}'$ et $\mathcal{S}/\mathcal{I}$.

Pour finir considérons deux sous-groupes de type fini $K, K' \subset \mathrm{WDiv}(X)$ se projetant chacun surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. Soit $(D_1, ..., D_r)$ une $\mathbb{Z}$-base de K. On choisit $E_i \in c^{-1}([D_i]) \cap K' = (D_i + \ker c) \cap K'$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et on définit un morphisme $\tilde{\alpha} : K \to K'$ en posant $\alpha(D_i) = E_i$. Comme E_i est de la forme $D_i - \mathrm{div}(f_i)$ avec $f_i \in k(X)^*$, on voit que $\tilde{\alpha}$ est de la forme $\tilde{\alpha}(D) = D - \mathrm{div}(\eta(D))$, où $\eta : K \to k(X)^*$ est un morphisme de groupes. Choisissons un caractère $\chi' : K'^0 \to k(X)^*$ associé à K'. Alors, pour $D \in K^0$, on a

$$D - \mathrm{div}(\eta(D)) = \tilde{\alpha}(D) = \mathrm{div}(\chi'(\tilde{\alpha}(D)))$$

On obtient que D est le diviseur de la fonction $\chi(D) := \chi'(\tilde{\alpha}(D))\eta(D)$, et cette formule définit un caractère $\chi : K^0 \to k(X)^*$. On obtient ainsi un morphisme K-gradué $(\alpha, \tilde{\alpha}) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ entre les faisceaux associés à K et K' défini par

$$\alpha_D : \mathcal{S}_D \to \mathcal{S}'_{\tilde{\alpha}(D)}, \quad f \mapsto \eta(D)f$$

Ce morphisme envoie l'idéal $\mathcal{I}$ défini par χ dans l'idéal $\mathcal{I}'$ défini par χ', et induit un un morphisme injectif $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$. Comme les α_D sont des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules on voit que ce morphisme est également surjectif en utilisant 4.3.2.2. $\square$

Remarque 4.3.2.5. Avec les données de 4.4.2.1. Si on se donne un point régulier $x \in X$, on peut définir de manière canonique le faisceau de Cox de la variété pointée (X, x). Soit $K^x := \{D \in \mathrm{WDiv}(X) \mid x \notin \mathrm{Supp}\, D\}$. Ce sous-groupe de $\mathrm{WDiv}(X)$ se projette surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. En effet pour tout $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$, choisissons $D \in c^{-1}([D])$. Si $D \notin K^x$, alors comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, on a localement $D = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in k(X)$. Ainsi, $D - \mathrm{div}(f) \in K^x$ et $c(D - \mathrm{div}(f)) = [D]$. Pour tout $E \in K^{x,0}$, on a $E = \mathrm{div}(f_E)$ pour un $f_E \in k(X)$ défini sur un voisinage de x, car $x \notin \mathrm{Supp}\, E$. Si l'on impose $f_E(x) = 1$, alors f_E est unique et on définit ainsi un caractère $\chi^x : K^x \to k(X)^*$, $E \mapsto f_E$. On note $\mathcal{R}^x$ le faisceau de Cox obtenu canoniquement à partir de ces données.

4.3.3 Exemples

Exemple 4.3.3.1. Considérons la surface affine $X \subset \mathbb{A}^3_k$ d'équation $t_1 t_2 - t_3^2$. Cette surface est irréductible et normale d'après 1.1.2.5 et 1.3.2.2. On note f_i la fonction régulière sur X associée à la restriction de la coordonnée t_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Soit $D_2 := \mathcal{V}_X(f_2, f_3)$, on a facilement $\mathcal{O}_{D_2}(D_2) \simeq k[f_1]$ donc D_2 est un fermé irréductible de codimension 1 de X, c'est donc un diviseur premier et (f_2, f_3) est son point générique. On a $(f_2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_1 f_2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_3^2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)}$ donc f_3 est une uniformisante dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)}$. Dans cet anneau, on a $f_2 = f_1^{-1} f_3^2$, d'où $v_{D_2}(f_2) = 2$, puis $\mathrm{div}(f_2) = 2D_2$ car $\mathrm{Supp}\,\mathrm{div}(f_2) = D_2$. On a de même $\mathrm{div}(f_1) = 2D_1$, et $\mathrm{div}(f_3) = D_1 + D_2$.

Par ailleurs, $\mathcal{O}(X \setminus D_2) = \mathcal{O}(X)_{f_2} \simeq k[f_2, f_2^{-1}, f_3]$ est factoriel donc $\mathrm{Cl}(X \setminus D_2) = 0$ d'après 3.2.1.3. Notons que cela montre aussi que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$. D'après 3.2.1.5, $\mathrm{Cl}(X)$ est engendré par D_2. Montrons que D_2 n'est pas principal. Soit l'idéal maximal $\mathfrak{m} := (f_1, f_2, f_3)$. Le k-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension 3 engendré par les classes $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ des f_i modulo $\mathfrak{m}^2$. Mais $(f_2, f_3) \subset \mathfrak{m}$, et son image dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ contient $\bar{f}_2$ et $\bar{f}_3$, il ne peut donc pas être principal. Ainsi, $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on a le choix entre deux générateurs de somme nulle D_1 et D_2.

Calculons le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ associé à $K = \mathbb{Z}D_2$. D'après ce qui précède on a $\mathcal{S}_{2D_2}(X) = (f_2^{-1})$ et $\mathcal{S}_{-2D_2}(X) = (f_2)$ comme $\mathcal{O}(X)$-modules. On a $\mathcal{S}_{-D_2}(X) = (f_2, f_3)$, puis d'après 3.2.3.3 et **??**, on a $\mathcal{S}_{D_2}(X) = (f_2, f_3)(f_2^{-1}) = (1, f_2^{-1} f_3)$. Posons

$$g_1 := 1 \in \mathcal{S}_{D_2}(X),\ g_2 := f_2^{-1} f_3 \in \mathcal{S}_{D_2}(X),\ g_3 := f_2^{-1} \in \mathcal{S}_{2D_2}(X),\ g_4 := f_2 \in \mathcal{S}_{-2D_2}(X)$$

Compte tenu des relations ci-dessous, $\mathcal{S}(X)$ est engendrée comme k-algèbre par g_1, g_2, g_3 et g_4.

$$f_1 = g_2^2 g_4 \in \mathcal{S}_0(X) = \mathcal{O}(X),\ f_2 = g_1^2 g_4,\ f_3 = g_1 g_2 g_4$$

Soit $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{S})$ le spectre relatif de $\mathcal{S}$ muni de son morphisme structural p. Comme (X, p) est un bon quotient pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\widetilde{X}$ défini par la $\mathbb{Z}$-graduation $\deg(g_1) = 1, \deg(g_2) = 1, \deg(g_3) = 2$ et $\deg(g_4) = -2$, on a $\dim \widetilde{X} = \dim X + 1$. De plus, $\dim \widetilde{X} = \dim \mathcal{S}(X)$ car on a une immersion ouverte $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{S}(X)$. On en déduit que $g_3 g_4 = 1$ engendre toutes les relations dans $\mathcal{S}(X)$. On a ainsi un isomorphisme d'algèbres graduées $\mathcal{S}(X) \simeq k[t_1, t_2, t_3, t_3^{-1}]$, où les t_i sont des indéterminées et $\deg(t_i) := \deg(g_i)$.

Le noyau de la projection $\mathbb{Z}D_2 \to \mathrm{Cl}(X)$ est $K^0 := 2\mathbb{Z}D_2$, et un caractère est donnée par $\chi : K^0 \to k(X),\ 2nD_2 \mapsto f_2^n$. L'idéal $\mathcal{I}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_X$-module par la section globale $1 - g_4$. Finalement l'anneau de Cox de X est donné à ismorphisme près par

$$\mathcal{R}(X) \simeq k[t_1, t_2, t_3^{\pm}]/(1 - t_3^{-1}) \simeq k[t_1, t_2]$$

la $\mathrm{Cl}(X)$-graduation étant donnée par $\deg(t_1) = \deg(t_2) = [D_2]$.

Exemple 4.3.3.2. Considérons la surface affine $X \subset \mathbb{A}^3_k$ d'équation $t_1^2 - t_2 t_3 - 1$. Cette surface est lisse et irréductible. On note f_i la fonction régulière sur X associée à la restriction de la coordonnée t_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Considérons les diviseurs premiers

$$D_+ = \mathcal{V}_X(f_1 - 1, f_2) = \{1\} \times \{0\} \times k$$

$$D_- = \mathcal{V}_X(f_1 + 1, f_2) = \{-1\} \times \{0\} \times k$$

Dans chaque anneau local $\mathcal{O}_{X,D_\pm}$, on voit facilement que f_2 est une uniformisante, et on obtient $\mathrm{div}(f_2) = D_+ + D_-$. De plus, $X \setminus \mathrm{Supp}\,\mathrm{div}(f_2) = X_{f_2} \simeq \mathbb{A}_k^{1*} \times \mathbb{A}^1$ car $\mathcal{O}(X_{f_2}) \simeq k[f_1, f_2^{\pm 1}]$. Cela montre que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et que $\mathrm{Cl}(X)$ est engendré par $[D+]$, d'après 3.2.1.3, 3.2.1.5, et le fait que D_+ et $-D_-$ soient linéairement équivalents. Supposons qu'il existe $n > 0$ tel que $n[D_+] = 0$, alors $nD_+ = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in \mathcal{O}(X)$ car D_+ est effectif. On a de fait $f_2^n = fh$ avec $h \in \mathcal{O}(X)$ tel que $\mathrm{div}(h) = nD_-$. Si on munit $k[t_1, t_2, t_2]$ de la graduation $\deg(t_1) = 0$, $\deg(t_2) = 1$, $\deg(t_3) = -1$ alors l'équation $t_1^2 - t_2 t_3 - 1$ est homogène, est $\mathcal{O}(X)$ hérite d'une graduation induite avec $\deg(f_i) = \deg(t_i)$. Tout élément de degré positif est multiple de f_2, en particulier on voit dans l'écriture $f_2^n = fh$ que f ou h est nécessairement multiple de f_2, ce qui est impossible vu leur diviseurs respectifs. On conclut que $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}[D_+]$.

X est naturellement muni d'une action de $G := \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $x \mapsto -x$. D'après, 2.2.2.2 on a l'existence du bon quotient $\pi : X \to Y := X//G$, qui est de plus irréductible et normal. L'algèbre des invariants est facilement identifiable, on obtient $Y = \mathrm{Spec}\, k[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_1 f_2, f_1 f_3, f_2 f_3]$, avec π donné par l'inclusion de cette algèbre. On montre maintenant que $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par la classe de $D := \pi(D+)$. On a une action naturelle de G sur $\mathrm{WDiv}(X)$ et l'orbite de D_+ est $\{D_-, D_+\}$. Ainsi, G agit sur X_{f_2} et le quotient $\pi(X_{f_2})$ a pour algèbre d'invariants $k[f_1^2, f_2^{\pm 2}]$. Ce dernier anneau est factoriel, on en déduit que $[D]$ engendre $\mathrm{Cl}(Y)$. Par ailleurs, D n'est pas principal sinon $\pi^*(D) = D_+ + D_-$ serait le diviseur d'une fonction G-invariante, ce qui n'est pas le cas. Enfin, comme on a $2D = \mathrm{div}(f_2^2)$, le résultat est démontré.

Déterminons maintenant l'anneau de Cox de Y. Calculons le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ sur Y associé à $K = \mathbb{Z}D$. On a $\mathcal{S}_{-D}(Y) = \mathcal{I}_Y(D) = \pi^\sharp(Y)^{-1}((f_2)) = k[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_1 f_2, f_1 f_3, f_2 f_3] \cap (f_2) = (f_1 f_2, f_2^2, f_2 f_3)$. On voit facilement que est Cartier car il est principal localement en 0 et aussi sur les ouverts affines principaux associés à $f_1 f_2, f_2 f_3$ et $f_1 f_3$ qui recouvrent $Y \setminus \{0\}$. Par exemple on a

$$(f_1 f_2, f_2^2, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = (f_1^2 f_2 f_3, f_1^2 f_2^2 f_3^2, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = ((f_2 f_3 + 1) f_2 f_3, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = (f_2 f_3)_{f_1 f_3}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_{-D}(Y)$ est inversible et on a $\mathcal{S}_D(Y) = \mathcal{S}_{-D}(Y)^{-1} = (\mathcal{O}(Y) : \mathcal{S}_{-D}(Y))$. On trouve facilement des sections

$$a_1 := 1,\ \ a_2 := f_1 f_2^{-1},\ \ a_3 := f_2^{-1} f_3 \in \mathcal{S}_D(Y)$$

Or rappelons que $\mathcal{S}_{-D}(Y)$ est engendré par les sections

$$b_1 := f_1 f_2,\ \ b_2 := f_2^2,\ \ b_3 := f_2 f_3$$

Donc compte tenu de la relation $a_2 b_1 - a_1 b_3 = 1$ on conclut que $\mathcal{S}_D(Y) = (a_1, a_2, a_3)$. Et comme

$$f_1^2 = a_2 b_1,\ \ f_2^2 = a_1 b_2,\ \ f_3^2 = a_3 b_3,\ \ f_1 f_2 = a_1 b_1,\ \ f_1 f_3 = a_3 b_1,\ \ f_2 f_3 = a_1 b_3 \in \mathcal{S}_0(Y)$$

on trouve que $\mathcal{S}(Y)$ est engendrée comme k-algèbre par $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Prenons le caractère $\chi : K^0 \to k(Y)^*, 2nD \mapsto f_2^{2n}$. L'idéal $\mathcal{I}(Y)$ de $\mathcal{O}(Y)$ est engendré par $1 - f_2^2$ avec $1 \in \mathcal{S}_0(Y)$ et $f_2^2 \in \mathcal{S}_{-2D}(Y)$, d'après 4.3.1.3, et $\mathcal{R}(Y)$ est engendré par les classes $\overline{a_i}$ des a_i module $\mathcal{I}(Y)$. Or on remarque que

$$a_1 - b_2 = (1 - f_2^2) a_1,\ \ a_2 - b_1 = (1 - f_2^2) a_2,\ \ a_3 - b_3 = (1 - f_2^2) a_3$$

et on en déduit que $\mathcal{R}(Y)$ est engendré par $z_1 := \overline{a_2} = \overline{b_1}, z_2 := \overline{a_1} = \overline{b_2}, z_3 = \overline{a_3} = \overline{b_3}$. La relation $z_1^2 - z_2 z_3 - 1 = 0$, engendre toute les relations pour des raisons de dimension. Ainsi $\mathcal{R}(Y) \simeq \mathcal{O}(X)$, en particulier l'anneau de Cox n'est pas factoriel car le groupes des classes de X n'est pas trivial.

4.4 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox

4.4.1 Intégrité et normalité

Notre objectif est de montrer que les anneaux de Cox sont intégralement clos. Remarquons tout de suite que l'on peut travailler avec une variété lisse pour cela.

Proposition 4.4.1.1. *On considère les données de la construction 4.4.2.1. Alors pour tous ouverts $V \subset U \subset X$ tels que $U \setminus V$ est de codimension $\geqslant 2$ dans U, la restriction $\mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a déjà vu l'isomorphisme $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}(V)$ en 3.2.2.6. De plus, la proposition 4.3.1.2 montre que la restriction $\mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(V)$ est un isomorphisme. On conclut en appliquant la proposition 4.3.2.3. □

Construction 4.4.1.2. On considère les données de la construction 4.4.2.1. On suppose de plus que X est lisse. On considère les spectres relatifs $(\widetilde{X}, p) = \operatorname{Spec}_X \mathcal{S}$ et $(\widehat{X}, p_X) = \operatorname{Spec}_X \mathcal{R}$. De plus, on peut toujours supposer K de type fini et ces spectres sont sont munis respectivement d'une action du tore $H := \operatorname{Spec} k[K]$ et du groupe diagonalisable $k[\mathrm{Cl}(X)]$. On a une immersion fermée $\widehat{X} \overset{i}{\hookrightarrow} \widetilde{X}$ d'image $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "p_X"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

De même, H_X se plonge dans H, et l'immersion fermée i est H_X équivariante pour ce plongement. Les morphismes p_X et p sont des quotients géométriques. En particulier, $(p_X, \widehat{X})$ et $(p, \widetilde{X})$ sont des fibrés principaux. Enfin, $\widehat{X}$ est une variété lisse et quasi-affine. Enfin

Démonstration. Les actions de H et H_X sont dues aux graduations respectives de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ par K et $\mathrm{Cl}(X)$. Pour tout ouvert affine $U \subset X$, notons $U_1 := p_X^{-1}(U)$ et $U_2 := p^{-1}(U)$. La projection $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{R}(U)$ donne localement une immersion fermée $U_1 \hookrightarrow U_2$ d'image $\mathcal{V}_{U_2}(\mathcal{I}(U_2))$. De plus, ces immersions respectent les graduation par la projection $c : K \to \mathrm{Cl}(X)$. Ces immersions se recollent en une immersion i d'image $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ qui est H_X-équivariante. De plus les mêmes arguments qu'en 4.2.1.1 nous donne que p_X et p sont des bon quotients car on a

$$(p_X)_*(\mathcal{O}_{\widehat{X}})_0 \simeq \mathcal{R}_0 \simeq \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{S}_0 \simeq p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_0$$

Puis la remarque 4.2.1.2 nous dit que ce sont en fait des quotients géométriques.

Montrons que maintenant que $\widehat{X} \simeq \mathcal{V}_{\widetilde{X}}(\mathcal{I})$ est une variété. C'est un schéma de type fini sur k et séparé d'après **??**, il reste à montrer qu'il est réduit. On peut travailler localement sur un ouvert affine que l'on peut choisir de la forme $\widetilde{U} = p^{-1}(U) = \operatorname{Spec}(\mathcal{S}(U))$ pour un ouvert affine U de X. Soit $f \in \sqrt{\mathcal{I}(U)}$, comme c'est un idéal $\mathrm{Cl}(X)$-homogène, il contient les composantes $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes de f. Soit $f_{[D]}$ l'une d'entre elles, elle s'écrit $f_{[D]} = f_D + g$ avec $f_D \in \mathcal{S}_D(U)$ et $g \in \mathcal{I}(U)$ (voir 4.3.2.2). On obtient facilement $f_D^n \in \mathcal{I}(U)$ pour un $n > 0$. Cela impose $f_D^n = 0$ compte tenu de 4.3.1.2 et donc $f_D = 0$. Finalement, $f \in \mathcal{I}(U)$ ce qui montre que $\mathcal{I}(U)$ est radical.

Elle est de plus quasi-affine d'après 4.2.1.9. Montrons pour finir qu'elle est lisse. □

Théorème 4.4.1.3. *On considère les données de la construction 4.4.2.1. On suppose de plus que $\mathcal{R}$ est localement de type fini. Alors pour tout ouvert $U \in X$, l'anneau $\mathcal{R}(U)$ est intégralement clos.*

Démonstration. On peut supposer X lisse donc être dans le contexte de 4.4.1.2. Alors $\widehat{X}$ est lisse donc normale. Il suffit donc de prouver son irréductibilité d'après **??** et **??**. Comme p_X est surjective, une de ses composantes irréductibles $\widehat{X}_1$ domine X car une variété irréductible ne peut être réunion de fermés irréductibles de codimensions non-nulles. Soit U un ouvert de X. Si $p_X^{-1}(U)$ est irréductible alors il est inclus dans $\widehat{X}_1$. Par ailleurs, comme $p_X^{-1}(U)$ est isomorphe à la sous variété de $p^{-1}(U)$ définie par $\mathcal{I}(U)$. Il suffit de montrer que l'on peut recouvrir X par des ouverts U tels que $\mathcal{V}_{p^{-1}(U)}(\mathcal{I}(U))$ est irréductible, on aura alors $\widehat{X}_1 = \widehat{X}$.

On peut supposer K de type fini d'après **??**. Soit $(D_1, ..., D_s)$ une base de K telle que $(n_1 D_1, ..., n_k D_k)$ soit une base de K^0 avec $1 \leqslant k \leqslant s$. Une telle base existe d'après la théorie des $\mathbb{Z}$-modules. On peut également supposer que les D_i ne sont pas des multiples dans K, quitte à remplacer K si nécessaire. On choisit un ouvert $U \subset X$ tel que chaque D_i est principal, disons égal à $\mathrm{div}(f_i)$ avec $f_i \in k(X)$. D'après le corollaire 4.3.1.3, l'idéal $\mathcal{I}(U)$ est engendré par les générateurs $1 - \chi(n_i D_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. L'isomorphisme 4.1 identifie $p^{-1}(U)$ à $U \times \mathbb{G}_m^s$. Par cet identification, $p_X^{-1}(U)$ est donné par les équations $1 - \chi(n_i D_i) f_i^{n_i} t_i^{n_i}$. Maintenant, comme X est lisse, on peut la recouvrir par de tels ouverts. □

4.4.2 Localisation et groupe des unités

Construction 4.4.2.1. Dans la situation de la construction 4.4.2.1, considérons un diviseur $D \in K$ et une section globale homogène $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$. D'après la proposition 4.3.2.2, il existe un unique élément $\tilde{f} \in \mathcal{S}_D(X)$ tel que $\pi(\tilde{f}) = f$. On définit le $[D]$-diviseur de f comme le diviseur de Weil effectif

$$\mathrm{div}_{[D]}(f) := \mathrm{div}_D(\tilde{f}) = \mathrm{div}(\tilde{f}) + D$$

Ce diviseur ne dépend ni du choix de $D \in c^{-1}(D)$, ni des choix faits en 4.4.2.1.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$, et deux isomorphismes $\varphi_i : \mathcal{O}_X(D_i) \to \mathcal{R}_{[D]}$. On note $\tilde{f}_i$ les deux sections telles que $\varphi(\tilde{f}_i) = f$. En raisonnant sur l'ouvert régulier de X, on voit que l'isomorphisme $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est donné par la multiplication par un $h \in k(X)^*$ satisfaisant $\mathrm{div}(h) = D_1 - D_2$. On a ainsi $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 h$ et on obtient facilement les égalités

$$D_2 + \mathrm{div}(\tilde{f}_2) = D_1 + \mathrm{div}(\tilde{f}_1)$$

□

Proposition 4.4.2.2. *Avec les notations de la proposition précédentes, on a :*

1. *Pour tout diviseur de Weil effectif E, il existe $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$ et $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ tels que $E = \mathrm{div}_{[D]}(f)$.*
2. *Soit $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$ et $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ non-nulle. Alors $\mathrm{div}_{[D]}(f) = 0 \implies [D] = 0$ dans $\mathrm{Cl}(X)$.*
3. *Pour tous $f \in \mathcal{R}_{[D_1]}(X)$ et $g \in \mathcal{R}_{[D_2]}(X)$, on a $\mathrm{div}_{[D_1]+[D_2]}(fg) = \mathrm{div}_{[D_1]}(f) + \mathrm{div}_{[D_2]}(g)$.*

Démonstration. La première assertion est claire d'après **??**. Pour la deuxième, si $\mathrm{div}_{[D]}(f) = 0$, alors $\mathrm{div}_{[D]}(\tilde{f}) = 0$ pour un certain représentant $\tilde{f} \in \mathcal{S}_D(X)$ de f. Cela montre que D est principal. La troisième assertion est claire par définition. □

On remarque que le système linéaire complet associé à un diviseur D d'une variété projective irréductible et normale s'écrit

$$|D| = \{\mathrm{div}_{[D]}(f) \mid f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)\} = \mathbb{P}(\mathcal{R}_{[D]}(X))$$

Définition 4.4.2.3. Dans la situation de la construction 4.4.2.1. Pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$, on définit la $[D]$-localisation de X par f comme l'ouvert de X

$$X_{[D],f} := X \setminus \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_{[D]}(f))$$

Proposition 4.4.2.4. *Dans la situation de la construction 4.4.2.1. Pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ on a isomorphisme canonique*

$$\Gamma(X_{[D],f}, \mathcal{R}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{R})_f$$

Démonstration. C'est une conséquence de **??**, 4.3.2.3 et du fait que la localisation est compatible avec le passage au quotient. □

On s'intéresse maintenant aux unités de l'anneau de Cox. Le résultat suivant montre en particulier que les unités de l'anneau de Cox d'une variété projective irréductible et normale sont les fonctions constantes.

Proposition 4.4.2.5. *Dans la situation de la construction 4.4.2.1,*

1. *Tout élément homogène inversible de $\mathcal{R}(X)$ est constant.*
2. *Si $\Gamma(X, \mathcal{O}) = k$, tout élément inversible de $\mathcal{R}(X)$ est constant.*

Démonstration. Considérons $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ inversible. Pour la première assertion, l'inverse g de f appartient à $\mathcal{R}_{-[D]}(X)$ et on a $fg = 1$ dans $\mathcal{R}_0(X)^* = k^*$. D'après 4.4.2.2 on a $0 = \mathrm{div}_0(fg) = \mathrm{div}_{[D]}(f) + \mathrm{div}_{[-D]}(g)$. Comme les deux derniers diviseurs sont effectifs, ils sont nécessairement nuls. Toujours d'après 4.4.2.2 on obtient $[D] = 0$, et donc $f \in k^*$. Montrons la seconde assertion. On doit montrer que tout $f \in \mathcal{R}(X)^*$ est de degré 0. On considère la $K_0 \oplus K_t$ où K_t est le sous $\mathbb{Z}$-module de torsion de K. On considère la graduation épaissie

$$\mathcal{R}(X) = \bigoplus_{w \in K_0} R_w, \quad R_w := \bigoplus_{u \in K_t} \mathcal{R}(X)_{w+u}$$

Avec cette graduation, on peut appliquer **??** et en déduire que f et f^{-1} sont homogènes de degré respectifs $w \in K_0$ et $-w$. On écrit les décompositions de f et f^{-1} en composantes $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes

$$f = \sum_{u \in K_t} f_{w+u}, \quad f^{-1} = \sum_{u \in K_t} f^{-1}_{-w-u}$$

Comme $fg = 1$ on a $f_{w+u} f^{-1}_{-w-u} \neq 0$ pour au moins un $u \in K_t$. Comme $\Gamma(X, \mathcal{O}) = k$, $f_{w+u} f^{-1}_{-w-u}$ est une constante non-nulle, on en déduit $w + u = 0$ comme plus haut et donc $w = 0$. Ainsi, tous les f_{w+u} sont de torsion pour la $\mathrm{Cl}(X)$-graduation. Ainsi pour un certain $n > 0$, on a $n \operatorname{div}_{w+u}(f_{w+u}) = 0$, toujours en utilisant $\Gamma(X, \mathcal{O}) = k$. Cela force $f_{w+u} = 0$ si $u \neq 0$. On en déduit que f est homogène de degré 0 donc constante. □

4.4.3 Propriétés de divisibilité

Dans le cas d'un groupe des classes de type fini sans torsion on a vu que l'anneau de Cox etait factoriel. Ce n'est pas le cas en général en présence de torsion comme le montre l'exemple **??**. Toutefois, si l'on se restreint aux éléments homogènes on peut obtenir des critères intéressants de divisibilité.

Définition 4.4.3.1. Soit K un groupe abélien et R une algèbre K-graduée intègre.

1. Soit $f \in R$ un élément non-nul et non-inversible. On dit que f est K-premier si il est homogène et si $f \mid gh$ avec g et h homogènes implique que $f \mid g$ ou $f \mid h$.
2. On dit que R est K-factoriel si tout élément f homogène non-nul et non-inversible est produit d'éléments K-premiers.
3. On dit d'un idéal $\mathfrak{a}$ qu'il est K-principal si il est engendré par un élément homogène.
4. On dit d'un idéal $\mathfrak{a}$ qu'il est K-premier si il est homogène et pour tous éléments $f, g \in R$ homogènes tels que $fg \in \mathfrak{a}$, on ait $f \in \mathfrak{a}$ ou $g \in \mathfrak{a}$.
5. On dit qu'un idéal K-premier $\mathfrak{a}$ est de K-hauteur d si cet entier est la longueur maximale des chaines $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset ... \subset \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$ d'idéaux K-premiers.

On peut considérer ces notions d'un point de vue géométrique. Soit $H = \operatorname{Spec} k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété affine irréductible et normale. Alors $\mathrm{WDiv}(X)$ est naturellement muni d'une action de H par

$$h. \sum a_D D = \sum A_D (h.D)$$

Considérons le support d'un diviseur, c'est à dire la réunion des supports d'un nombre fini de diviseurs premiers. Ce support est H-stable si et seulement si l'idéal $\mathfrak{a}$ qu'il définit est K-homogène. De plus, dire que $\mathfrak{a}$ est K-premier, revient à dire que l'on ne peut pas l'écrire comme intersection d'idéaux K-homogènes qui le contiennent strictement. On voit que cela est équivalent au fait que H agisse transitivement sur les diviseurs premiers envisagés. Cela amène la définition suivante.

Définition 4.4.3.2. Soit $H = \operatorname{Spec} k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété irréductible et normale.

1. Un diviseur H-premier est un diviseur de Weil non-nul $\sum a_D D$ tel les D sont premiers, $a_D \in \{0, 1\}$, et les a_D égaux à 1 sont permutés transitivement par l'action de H.
2. Un fonction rationnelle H-homogène est un élément $f \in k(X)$ défini sur un ouvert H-invariant de X, et qui est H-homogène sur cet ouvert.
3. On dit que X est H-factoriel si tout diviseur de Weil H-invariant est le diviseur d'une fonction rationnelle H-homogène.

Proposition 4.4.3.3. *Soit $H = \operatorname{Spec} k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété irréductible quasi-affine et normale. Considérons l'algèbre K-graduée $R := \mathcal{O}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout idéal K-premier de K-hauteur 1 de R est K-principal.*
2. *La variété X est H-factoriel.*
3. *L'algèbre R est K-factoriel.*

De plus si une de ces assertions est vérifiée, alors un élément homogène non-nul et non-inversible $f \in R$ est K-premier si et seulement si le diviseur $\operatorname{div}(f)$ est H-premier, et tout diviseur H-premier est de la forme $\operatorname{div}(f)$ pour un élément K-premier $f \in R$.

Démonstration. On suppose que 1 est vérifié et on veut montrer 2. Soit D un diviseur de Weil H-invariant. On vérifie immédiatement que l'on peut l'écrire de manière unique $D = a_1D_1 + ... + a_rD_r$ où les D_i sont des diviseurs H-premiers. Si $\mathfrak{a}_i = \mathcal{I}(\operatorname{Supp}(D_i))$ est de K-hauteur 1, alors par hypothèse $D_i = \operatorname{div}(f_i)$ avec $f_i \in R$ homogène, puis on obtient $D = \operatorname{div}(f_1^{a_1}...f_r^{a_r})$. On voit donc qu'il suffit de montrer que $\mathfrak{a}_i$ est de hauteur 1. Supposons que X soit affine, on montrera ensuite que l'on peut faire cette simplification. Par l'absurde, supposons qu'il existe un idéal K-premier non-nul $\mathfrak{a}$ strictement contenu dans $\mathfrak{a}_i$. On peut donc trouver $f \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}$ que l'on peut de plus choisir homogène. Remarquons que $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ est de codimension 1 car il contient $\mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$ et que $\mathfrak{a}$ est non-nul. Sa décomposition en composantes irréductibles s'écrit donc $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = D'_1 \cup ... \cup D'_s \cup Z_1 \cup ... \cup Z_t$, où les D'_i sont les diviseurs premiers intervenant dans l'écriture de D_i. Notons $Z = Z_1 \cup ... \cup Z_t$, alors f s'annule sur $\operatorname{Supp}(D_i)$ mais pas sur Z car sinon une puissance de f appartiendrai à $\mathfrak{a}$, et donc f aussi car cet idéal est K-premier. Par ailleurs, $W := \overline{Z \setminus \operatorname{Supp}(D_i)}$ est un fermé propre non-vide de X (et de $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$), qui est de plus H-invariant. On peut donc trouver une fonction g homogène non-nulle s'annulant sur Z mais pas sur $\operatorname{Supp}(D_i)$. On obtient ainsi $(fg)^n \in \mathfrak{a}$ pour un $n > 0$ alors que $f \notin \mathfrak{a}$ et $g \notin \mathfrak{a}$, contradiction. Enfin, revenons au cas où X est quasi-affine. On plonge X dans une H-variété Y affine normale irréductible, par une immersion ouverte H-équivariante telle qu'il existe des fonctions régulières homogènes $f \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}$, et $h \in \mathfrak{a}$ qui s'étendent en des fonctions régulières sur Y. Alors l'idéal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}(Y)$ est K-premier, non-nul, et strictement contenu dans l'idéal K-premier $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_i \cap \mathcal{O}(Y)$. On a de plus $\mathcal{V}_Y(\mathfrak{b}_i) = \overline{D_i}$ qui est un diviseur de Weil H-premier de Y. On s'est donc ramené au cas affine.

Supposons 2 et montrons 3. Soit $f \in R \setminus R^*$ non-nul. Écrivons $\operatorname{div}(f) = D_1 + ... + D_r$ où les D_i sont H-premiers. Par hypothèse, $D_i = \operatorname{div}(f_i)$ pour un élément $f_i \in R$ homogène, qui est de plus K-premier. On en déduit $f = uf_1...f_r$ où u est une unité homogène de R. C'est ce qu'on voulait montrer.

Enfin, supposons 3 et considérons un idéal $\mathfrak{a}$ K-premier de hauteur 1. Soit $f \in \mathfrak{a}$ non-nul et non-inversible. Par hypothèse on peut trouver un facteur K-premier f_1 de f qui de plus appartient à $\mathfrak{a}$. On obtient ainsi une chaine d'idéaux K-premiers $\{0\} \subsetneq (f_1) \subset \mathfrak{a}$, ce qui force $(f_1) = \mathfrak{a}$. □

On remarque avec cette proposition que la factorialité de R entraine sa K factorialité. Munit de ces définitions on va pouvoir généraliser les résultats de divisibilité dans l'anneau de Cox obtenus en 4.2.3.3 dans le cas sans torsion.

Lemme 4.4.3.4. *Avec les données de 4.4.1.2, on a pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$*

$$\operatorname{div}(f) = p_X^*(\operatorname{div}_{[D]}(f))$$

Démonstration. Avec les notations de 4.4.1.2, soit $D \in c^{-1}([D])$ et $\tilde{f} \in \mathcal{R}_D(X)$ se projetant sur f. Le diagramme commutatif de 4.4.1.2 donne

$$\operatorname{div}(f) = i^*(\operatorname{div}(\tilde{f})) = i^*(p^*(\operatorname{div}_D(\tilde{f}))) = p_X^*(\operatorname{div}_{[D]}(f))$$

□

Proposition 4.4.3.5. *Soit X une variété normale irréductible telle que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et $\operatorname{Cl}(X)$ est de type fini.*

1. *Soient $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ et $g \in \mathcal{R}_{[E]}(X)$ non-nuls. Alors $f \mid g \iff \operatorname{div}_{[D]}(f) \leqslant \operatorname{div}_{[E]}(g)$.*

2. *Soient* $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ *et* $g \in \mathcal{R}_{[E]}(X)$ *non-nuls. Alors ces éléments sont associés si et seulement si* $\mathrm{div}_{[D]}(f) = \mathrm{div}_{[E]}(g)$*. Dans ce cas, on a* $[D] = [E]$*.*
3. *Soit* $f \in \mathcal{R}_D(X)$ *non-nuls. Alors* f *est* $\mathrm{Cl}(X)$*-premier si et seulement si* $\mathrm{div}_D(f)$ *est* $\mathrm{Cl}(X)$*-premier.*

Démonstration. En utilisant 4.4.1.1 on peut supposer X lisse et donc se placer dans la situation de la construction 4.4.1.2. Alors la variété quasi-affine $\widehat{X}$ est lisse et son algèbre de fonction régulières est $\mathcal{R}(X)$. Ainsi on a $f \mid g$ dans $\mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\mathrm{div}(f) \leqslant \mathrm{div}(g)$ dans $WDiv(\widehat{X})$. D'après le lemme précédent, c'est équivalent à $\mathrm{div}_{[D]}(f) \leqslant \mathrm{div}_{[E]}(g)$. Avec cela on obtient directement 2.

Montrons le point 3. Supposons $\mathrm{div}_{[D]}(f)$ premier. Comme il est non-trivial, $\mathrm{div}(f)$ l'est aussi d'après le lemme précédent. Ainsi f est non-nul et non-inversible. Si f divise un produit $f_1 f_2$ d'éléments homogènes non-nuls de $\mathcal{R}(X)$ alors d'après 1, il divise l'un des deux car $\mathrm{div}_{[D]}(f)$ étant premier, il est nécessairement inférieur ou égal à l'un des deux diviseurs effectifs $\mathrm{div}_{[D]}(f_i)$. Ainsi f est $\mathrm{Cl}(X)$-premier. Réciproquement, supposons par l'absurde que f est $\mathrm{Cl}(X)$-premier et $\mathrm{div}_{[D]}(f)$ non-premier. Alors $\mathrm{div}_{[D]}(f) = D_1 + D_2$ avec chaque D_i non-nul et effectif. D'après 4.4.2.2 1), on obtient des $f_i \mathcal{R}_{[D_i]}(X)$ tels que $\mathrm{div}_{[D_i]}(f_i) = D_i$. D'après 1), f divise $f_1 f_2$ mais ne divise aucun des facteurs, contradiction. □

En particulier, la seconde assertion nous indique que l'élément $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ avec $E = \mathrm{div}_{[D]}(f)$ obtenu en 4.4.2.2 1) pour un diviseur effectif E donné est unique à association près. On l'appel la section canonique de E. On termine par une généralisation du théorème 4.2.3.1.

Théorème 4.4.3.6. *Avec les données de 4.4.2.1, L'anneau de Cox* $\mathcal{R}(X)$ *est* $\mathrm{Cl}(X)$*-factoriel.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ non-nul et non-inversible. On écrit $\mathrm{div}_{[D]}(f) = D_1 + ... + D_r$ où les diviseurs D_i sont premiers et effectifs. D'après 4.4.2.2 on obtient des éléments $f_i \in \mathcal{R}_{[D_i]}(X)$ tels que $\mathrm{div}_{[D_i]}(f_i) = D_i$. Or d'après la proposition précédente, chaque f_i est $\mathrm{Cl}(X)$-premier et on a $f = u f_1 ... f_r$ où $u \in \mathcal{R}(X)^*$. □

Remarque 4.4.3.7. Avec les données de 4.4.2.1, l'application $f \mapsto \mathrm{div}_{[D]}(f)$ induit un isomorphisme entre le monoïde des éléments homogènes de $\mathcal{R}(X)$ modulo les inversibles et le monoïde $\mathrm{WDiv}^+(X)$ des diviseurs de Weil effectifs. Le fait que $\mathcal{R}(X)$ soit factoriel reflète le fait tout diviseur de Weil effectif s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de diviseur premiers.

Exemple 4.4.3.8. Dans l'exemple **??**, l'anneau de Cox est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-factoriel mais pas factoriel.

Bibliographie

[1] D.Mumford. *The red book of varieties and schemes*. Springer, 1999.

[2] I.Arzhantsev et al. *Cox Rings*. Cambridge University Press, 2014.

[3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.

[4] H.Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 1986.

[5] I.Arzhantsev. Introduction to algebraic groups and invariant theory. http://halgebra.math.msu.su/staff/arzhan/driver.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[6] I.MacDonald M.Atiyah. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[7] M.Brion. Introduction to actions of algebraic groups. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_luminy.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[8] M.Brion. Linearization of algebraic group actions. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/lin_rev.pdf. Accessed : 2018-18-03.

[9] Q.Liu. Algebraic geometry and arithmetic curves. 2006.

[10] T.A.Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhauser, 1998.

[11] A.Rittatore W.Ferrer Santos. *Actions and invariants of algebraic groups*. Chapman and Hall, 2005.