Mémoire M2

Antoine VEZIER

28 janvier 2018

Table des matières

Introduction

Blabla

Conventions

— Sauf mention explicite du contraire, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les résultats où l'hypothèse sur la caractéristique est nécessaire seront clairement balisés.
— Un anneau désigne un anneau commutatif unitaire.
— Un groupe algébrique désigne un groupe algébrique affine.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Résultats d'algèbre commutative

1.1.1 Lemme de normalisation de Noether et applications

1.1.2 Décomposition primaire des modules noetheriens

1.1.3 Extensions entières d'anneaux

Définition 1.1.1. Un anneau intègre est dit intégralement clos si il est égal à sa clôture intégrale.

Théorème 1.1.1. *Soit A un anneau intègre noetherien intégralement clos. Alors*

1. *Tous les diviseurs premiers d'un idéal principal non-nul sont de hauteur 1.*
2. $A = \cap_{p \text{ premier, } ht(p)=1} A_p$

Démonstration. Prendre la preuve dans [5] thm 11.5 p81 □

Théorème 1.1.2. *Soit A un anneau intègre noetherien intégralement clos.*
Alors, A est factoriel $\iff$ Tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

Démonstration. □

1.1.4 Anneaux de valuation discrète

1.2 Algèbres graduées

Proposition 1.2.1. *Soit A un anneau $\mathbb{Z}$-gradué. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) A est noetherien
(ii) A_0 est noetherien et A est de type fini en tant que A_0-algèbre

Démonstration. AtiyahMcdo p106 □

1.3 Variétés algébriques

1.3.1 Généralités

La référence principale est [9]. On rappelle ci-dessous les définitions et résultats de base. On rappelle que k est un corps algébriquement clos (voir conventions).

La topologie de Zariski dans k^n

Définition 1.3.1 (Ens. alg. affine)**.** Un ensemble algébrique affine est une partie de k^n constituée de zéros communs à un ensemble de polynômes de $S := k[X_1, ..., X_n]$.
Soient Σ_1, Σ_2 deux ensembles algébriques affine de k^{n_1} (resp. k^{n_2}). Un morphisme est une application $\varphi : \Sigma_1, \to \Sigma_2$ telle que les composantes de φ soient polynomiales.

On remarque que les ensembles algébriques affines munis de leur morphismes constituent une catégorie. Les ensembles algébriques affines sont de la forme $\mathcal{V}(I) := \{x \in k^n \mid \forall P \in I, P(x) = 0\}$ où I est un idéal de S. Ils sont stables par intersection quelconque, et on a $\mathcal{V}(S) = \emptyset$ et $\mathcal{V}(\{0\}) = k^n$. Ainsi les ensembles algébriques affines constituent les fermés d'une topologie, dite de Zariski.
Par ailleurs, à tout ensemble algébrique affine Σ on associe l'idéal $\mathcal{I}(\Sigma) := \{P \in k[X_1, ...X_n] \mid P(x) = 0, \forall x \in \Sigma\}$. L'ensemble des morphismes $\Sigma \to k$ est doté d'une structure de k-algèbre évidente que l'on note $k[\Sigma]$. Cette algèbre est naturellement isomorphe à $S/\mathcal{I}(\Sigma)$. Elle est de type fini réduite, on dit que c'est une k-algèbre affine. D'après le Nullstellensatz on a $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$, d'où une bijection entre les sous-ensembles algébriques affines de Σ et les idéaux radicaux de $k[\Sigma]$. En particulier les points de Σ sont en bijection avec les idéaux maximaux de $k[\Sigma]$. On note $\mathrm{Specm}(k[\Sigma])$ cet ensemble.

Proposition 1.3.1. *La construction qui à Σ associe $k[\Sigma]$ est fonctorielle. Le foncteur est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Démonstration. □

Irréductibilité

Définition 1.3.2 (espace irréductible)**.**

La catégorie des k-variétés algébriques affines

Définition 1.3.3 (Espace annelé, Morphisme)**.** Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau de k-algèbres de fonctions sur X à valeurs dans k. On dénote $\mathcal{O}_X$ ce faisceau.
Soient $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés. Un morphisme d'espace annelé est une application continue $\varphi : X \to Y$ telle que que la pré-composition par φ induit, pour tout ouvert U de Y, un morphisme de k-algèbres $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}U)$.

Définition 1.3.4 (Fonction régulière)**.** Soit Σ un ensemble algébrique affine, $x \in \Sigma$ et U un ouvert contenant x. Une application $f : U \to k \in \mathrm{Map}(U, k)$ est dite régulière en x si $\exists\, g, h \in k[\Sigma]$ et un ouvert $V \subset U \cap D(h)$ contenant x tel que $f(y) = g(y)/h(y), \forall y \in V$.
f est dite régulière sur U si elle est régulière en tout point de U.

Remarque 1.3.1. Une fonction f régulière sur U n'est pas nécessairement de la forme g/h avec $g, h \in k[\Sigma]$ et h ne s'annulant pas sur U. Par exemple prenons $\Sigma =$ Cf Mumford ex + preuve p21

On voit que les fonctions régulières sur les ouverts de X définissent un faisceau. Ainsi un ensemble algébrique affine muni de la topologie de Zariski et de son faisceau de fonctions régulières est un espace annelé.

Proposition 1.3.2. *Soit Σ un ensemble algébrique affine et $f \in k[\Sigma]^*$. On a $\mathcal{O}_\Sigma(D(f)) \simeq k[\Sigma][1/f]$.*

Démonstration. □

Définition 1.3.5 (Variété algébrique affine)**.** Une k-variété algébrique affine est un espace annelé isomorphe à un ensemble algébrique affine.

Remarque 1.3.2. Soit Σ un ensemble algébrique affine. En utilisant la bijection entre Σ et $\mathrm{Specm}(k[\Sigma])$, on voit comment définir directement la topologie de Zariski sur $\mathrm{Specm}(k[\Sigma])$ ainsi qu'un faisceau structural, faisant de Specm une variété algébrique affine canoniquement isomorphe à Σ. Concrètement, les fermés de

Specm($k[\Sigma]$) sont les $\mathcal{V}(I) := \{m \in \mathrm{Specm}(k[\Sigma]) \mid I \subset m\}$. Les éléments de $k[\Sigma]$ définissent des fonctions sur Specm($k[\Sigma]$) en les considérant modulo m, pour $m \in \mathrm{Specm}(k[\Sigma])$. On peut définir le faisceau sur la base des ouverts principaux $D(f) := \{m \in \mathrm{Specm}(k[\Sigma]) \mid f \notin m\}$ en posant $\mathcal{O}_{\mathrm{Specm}(k[\Sigma])}(D(f)) \simeq k[\Sigma][1/f]$.
Cela donne une manière intrinsèque de définir une variété algébrique affine à partir d'une algèbre affine A, indépendamment d'un plongement dans un espace affine quelconque.
De même on peut munir $\mathrm{Hom}(k[\Sigma], k)$ d'une structure de variété affine canoniquement isomorphe à Σ. On peut voir cela comme une généralisation de la bidualité de l'algèbre linéaire, qui correspond aux polynômes homogènes de degré 1. Avec cette même analogie on peut voir le Nullstellensatz comme une généralisation de l'égalité $F = F^{\perp\circ}$ pour un sous k-ev F d'un k-ev E de dimension finie.

Remarque 1.3.3. On remarque que la catégorie des variétés algébriques est équivalente à celle des ensembles algébriques affines.

Exemple 1.3.1. Soit X une variété algébrique affine et $f \in k[X]$. $(D(f), \mathcal{O}_X(D(f)))$ est une variété algébrique affine.

Démonstration. □

Proposition 1.3.3. *On note $\mathcal{O}_x$ la k-algèbre des fonctions régulières en $x \in X$. C'est par définition $\varinjlim_{x \in U} \mathcal{O}(U)$. On a $\mathcal{O}_x \simeq k[X]_{m_x}$ (localisé en l'idéal maximal m_x).*

Démonstration. □

Corollaire 1.3.1. *Soit X une variété algébrique affine. On a $\mathcal{O}_X(X) \simeq k[X]$.*

Proposition 1.3.4. *Soient X, Y deux variétés algébriques affines.*
(i) le produit $X \times Y$ existe dans la catégorie des variétés algébriques affines. De plus on a $k[X \times Y] \simeq k[X] \otimes_k k[Y]$.
(ii) Si X et Y sont irréductibles, alors $X \times Y$ aussi.

Démonstration. □

La catégorie des k-variétés algébriques

Construction 1.3.1. Soit $(X_i)_{u \in I}$ une famille finie de prevariétés. Supposons $\forall i, j$ avec $i \neq j$ on ait des ouverts $U_{ij} \subset X_i$ et des isomorphismes $f_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ tels que $\forall i, j, k \in I$ distincts on ait :

1. $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$
2. $U_{ij} \cup f_{ij}^{-1}(U_{jk}) \subset U_{ik}^{-1}$ et $f_{jk} f_{ij} = f_{ik}$ sur $U_{ij} \cup f_{ij}^{-1}(U_{jk})$

Alors on définit une prevariété X comme la réunion disjointe des X_i modulo la relation d'équivalence $a \sim f_{ji}(a), \forall a \in U_{ij} \subset X_i$, et $a \sim a \forall a$. La topologie est la topologie finale associée aux inclusions $inc_i : X_i \subset X$. Le faisceau structural est définit par $\mathcal{O}_X(U) := \{\varphi \in \mathrm{Map}(U, k) \mid inc_i^* \varphi \in \mathcal{O}_{X_i}(inc_i^{-1}(U))\}$.

1.3.2 Dimension

Théorème 1.3.1. *Soit X une variété irréductible, $U \subset X$ un ouvert non-vide et $f \in \mathcal{O}_X(U)^*$ non inversible. Soit Z une composante irréductible de $\{x \in U \mid f(x) = 0$. Alors dim(Z)=dim(X)-1.*

Démonstration. Voir [3] I.7 Th.2, après réduction au cas X affine, la preuve consiste en une réduction au cas facile où $k[X]$ est factoriel. □

1.3.3 Normalité

1.3.4 Quelques résultats sur les morphismes

Généralités

Définition 1.3.6 (Morphisme affine)**.** Un morphisme de variétés algébriques $\varphi X \to Y$ est dit affine si pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(V)$ est affine.

Exemple 1.3.2. Un morphisme de variétés affines $\varphi X \to Y$ est affine. En effet, soit V un ouvert affine de Y et $U = \varphi^{-1}(V)$. En considérant le diagramme commutatif ci-dessous on constate que l'on a $U \simeq (\varphi \times i_2)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\} \subset X \times V$. Comme $X \times V$ est affine, U aussi.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_1"] & V \arrow[d, "i_2"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Dimension des fibres

Applications rationnelles

Morphismes finis, normalité

Définition 1.3.7 (Morphisme fini, localement fini)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés affines. On dit que f est fini si la $k[Y]$-algèbre $(k[X], f^*)$ est finie.
On dit qu'un morphisme est localement fini en $x \in X$ si ils existe un morphisme fini $\mu : Y' \to Y$ et un isomorphisme ν d'un ouvert de X contenant x sur un ouvert de Y', tel que $\mu\nu = f_{|U}$.

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y deux variétés algébriques affines irréductibles de même dimension et f : $X \mapsto Y$ un morphisme dominant.*
Alors il existe $g \in k[Y]^*$ tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit fini, surjectif avec des fibres de même cardinal.

Démonstration. Par hypothèse, l'extension $k(Y) \xrightarrow{f^*} k(X)$ est algébrique finie, disons de degré n. En caractéristique zéro on peut trouver $u \in k(X)$ tel que $k(X) = k(Y)[u]$. On remarque que l'on peut imposer $u \in k[X]$. On considère $P := P_{min}(u, k(Y)) = T^n + a_1 T^{n-1} + ... + a_0$. En réduisant au même dénominateur on a $P \in k[Y]_v[T]$ pour un $v \in k[Y]$. De plus, en prenant l'intersection avec d'autres ouverts principaux on peut supposer $k[X]_v$ entier sur $k[Y]_v$, et $k[Y]_v[u]$ intégralement clos, ce qui donne $k[Y]_v[u] = k[X]_v$ et $k[X]_v$ entier sur $k[Y]_v$. Ainsi $f : X_v \to Y_v$ est fini et donc surjectif car dominant.
On a donc une factorisation de $f^* : k[Y]_v \xrightarrow{p_1^*} k[Y]_v[T] \xrightarrow{\pi} k[Y]_v[T]/(P) \xrightarrow{\overline{ev_f}} k[Y]_v[u]$ qui donne $f : X_v \xrightarrow{\simeq} \{(y,t) \in Y_v \times \mathbb{A}^1 \mid P(y)(t) = 0\} \hookrightarrow Y_v \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p_1} Y_v$. Ainsi le cardinal de la fibre $f^{-1}(y), y \in Y_v$ est le cardinal de l'ensemble des zéros du polynôme $P(y)(T)$. On peut s'assurer que cet ensemble est de cardinal constant en intersectant à nouveau avec l'ouvert principal du discriminant de P qui est un polynôme en les coefficients de P. □

Ce résultat reste vrai en caractéristique positive, voir [9] 5.1.6 pour une preuve légèrement différente dans ce cadre. On y montre que le cardinal de la fibre générale est $[k(X) : k(Y)]_s$. En revanche pour le corollaire immédiat suivant, la caractéristique zéro est essentielle (penser par exemple au morphisme de Frobenius $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{A}^1$).

Corollaire 1.3.2. *Avec les hypothèses de 5, si de plus f est injectif, alors il existe $g \in k[Y]^*$ tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit un isomorphisme.*

Proposition 1.3.6. *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles. Soit $g : X \to Z$ constant sur les fibres de f. Alors il existe $h \in k[Y]^*$ et une factorisation*

$$\begin{tikzcd} X_h \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ Y_h \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère $\varphi = (f, g) : X \to Y \times Z$ et le diagramme commutatif ci-contre. Comme f est dominant, π_1 l'est aussi. De plus $\overline{\varphi(X)}$ est irréductible et $\varphi(X)$ contient un ouvert dense de $\overline{\varphi(X)}$. Par ailleurs comme g est constante sur les fibres de f on vérifie que π_1 est injective sur $\varphi(X)$. Par le corollaire précédent, π_1 réalise un isomorphisme $\overline{\varphi(X)}_h \xrightarrow{\pi_1} Y_h$ pour un $h \in k[Y]^*$. Finalement, le morphisme recherché est $Y_h \xrightarrow{\pi_2\pi_1^{-1}} Z$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & \overline{\varphi(X)} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "i=\subset"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Y & Y \times Z \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

□

Proposition 1.3.7. *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme de variétés affines et $x \in X$. Si la fibre de $f(x)$ est finie, alors f est localement fini en x.*

Démonstration. Cf [9] 5.2.6 □

Théorème 1.3.2. *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme bijectif de variétés irréductibles avec Y normale. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. □

1.4 Groupes algébriques affines

1.4.1 Généralités

1.4.2 G-variétés, représentations

Définition 1.4.1 (G-variété)**.** Soit G un groupe algébrique. Une G-variété est une variété algébrique X sur laquelle G agit algébriquement. C'est à dire qu'on a un morphisme de groupes de G dans le groupe d'automorphismes X.

Proposition 1.4.1. *Soit G un groupe algébrique, X une G-variété et $x \in X$.*

1. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*
2. *Toute composante irréductible de $G.x$ a pour dimension $dim(G) - dim(G.x)$.*
3. *$\overline{G.x} \setminus G.X$ est une union d'orbites de dimension $< dim(\overline{G.x})$.*
4. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*

Démonstration. On suppose d'abord G connexe.

1. D'après **??**, $G.x$ contient un ouvert dense U de $\overline{G.x}$. Or, G est réunion de translatés de U.
2. D'après **??**, il existe un ouvert dense de $G.x$ tel que toute les fibres de cet ouvert ont pour dimension $\dim(G){-}\dim(G.x){=}\dim(G_x)$.
3. $\overline{G.x} \setminus G.x$ est un fermé propre de $\overline{G.x}$ donc de dimension inférieure d'après **??**. Par ailleurs, $\overline{G.x}$ est G-stable donc $\overline{G.x} \setminus G.x$ est réunion d'orbites.
4. Enfin si $\dim(G.x)$ est minimal, $\overline{G.x} \setminus G.x$ est vide

Enfin, G n'est pas connexe, on écrit $G = \cup_{i=1}^n g_i G^\circ.x$ avec $g_1 = e$. D'où $\overline{G.x} = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^\circ.x}$. Les $\overline{g_i G^\circ}$ sont égales où disjointes, c'est donc la décomposition en composantes irréductibles. On construit un ouvert de $\overline{G.x}$ inclus dans $G.x$ en posant $U = G^\circ.x \setminus \cup_{i=2}^n \overline{g_i G^\circ.x}$. On a $\dim(G^\circ) - \dim((G^\circ)_x) = \dim(G) - \dim(G_x)$ car $(G_x)^\circ \subset (G^\circ)_x \subset G_x$, d'où $\dim(G_x) = \dim((G^\circ)_x)$. Or chaque composante de $G.x$ est l'adhérence d'un orbite pour G°, d'où 2) d'après le cas connexe. On a $\overline{G.x} \setminus G.x = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^\circ.x} \setminus g_i G^\circ.x = \cup_{i=1}^n g_i(\overline{G^\circ.x} \setminus G^\circ.x)$ qui est une union finie de fermés de dimension inférieure à $\overline{G.x}$ ce qui prouve 3). On utilise le même argument pour prouver 4) dans le cas général. $\square$

Définition 1.4.2 (*G*-module, simple, semi-simple)**.** Une représentation de G, ou G-module (rationnel) est un couple (V, ρ) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de groupes algébriques de G dans $GL(V)$.
On étend cette définition au cas où V est de dimension infinie, on demande alors que V soit réunion de G-modules de dimension finie.
On dit qu'un G-module est simple si il n'admet pas de sous G-module non trivial. On dit qu'un G-module est semi-simple si tout sous G-module admet un G-module supplémentaire.

Proposition 1.4.2. *Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. $k[X]$ est naturellement muni d'une action $(g.f)(x) := f(g^{-1}.x), \forall f \in k[X], g \in G, x \in X$*
Muni de cette action, $k[X]$ un G-module.

Démonstration. On note $a : G \times X \to X$ le morphisme associé à l'action de G. Cela donne $\forall g, x \in G \times X$, $a^*(f)(g,x) = g^{-1}.f(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i(x)$, d'où $g.f = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i \in k[X]$. Ainsi les translaté $g.f$ pour $g \in G$ engendrent un k-ev $V(f)$ de dimension finie et G-stable.
De plus l'action est algébrique. En effet $\forall l \in V(f)^*$, qu'on prolonge en $l' \in \mathrm{Vect}_k(\psi_1, ..., \psi_r)^*$. On a $\forall h \in G, g \mapsto l(g.(h.f)) = \sum_{i=1}^r \varphi_i((gh)^{-1}) l'(\psi_i) \in k[G]$.
Finalement $k[X] = \cup_{f \in k[X]} V(f)$ est un G-module. $\square$

Théorème 1.4.1. *Soit G un groupe algébrique et X une G variété. X est isomorphe en tant que G-variété à une sous G-variété fermée d'un G-module de dimension finie.*

Corollaire 1.4.1. *Tout groupe algébrique est linéaire.*

Définition 1.4.3 (Groupe réductif)**.** Un groupe algébrique G est dit réductif si tout G-module est semi-simple.

Exemple 1.4.1. Les groupes finis et les quasitores sont réductifs.

1.4.3 Groupes quotients

Théorème 1.4.2. *Soit G un groupe algébrique et $H \leqslant G$ fermé.*
Alors il existe un G-module V de dimension finie et une ligne $L \subset V$ telle que $H = Stab_G(L) := \{g \in G \mid g.v \in L, \forall v \in L\}$.

Théorème 1.4.3. *Soit G un groupe algébrique et $H \lhd G$ fermé.*
Alors il existe un G-module (V, ρ) de dimension finie tel que $H = \mathrm{Ker}\,\rho$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il prouve l'existence des groupes quotients dans la catégorie des groupes algébriques. Le groupe quotient est alors unique à isomorphisme près, c'est une conséquence formelle de la propriété universelle du quotient.

Théorème 1.4.4 (Car. 0)**.** *Soient $G, H, (V, \rho)$ comme dans le théorème précédent, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques tel que $H \subset \mathrm{Ker}\, f$.*

Alors il existe une unique factorisation
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & G' \\ \rho(G) \arrow[ur, dashed, "\exists! \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme φ recherché existe en tant que morphisme de groupes abstraits, il est G-équivariant pour les actions naturelles de G sur $\rho(G)$ et G' via ρ et f. Concrètement cela signifie $\forall g_1, g_2 \in G, \varphi(\rho(g_1)\rho(g_2)) = f(g_1)\varphi(\rho(g_2))$. Si G est connexe, d'après la proposition 1.3.6, φ est algébrique sur un ouvert U non-vide de $\rho(G)$. Or on a un recouvrement de $\rho(G)$ par des $g.U$. En écrivant pour $x \in g.U, \varphi(x) = f(g)\varphi(g^{-1}.x))$, on constate que φ est un morphisme de groupes algébriques.
Supposons G quelconque mais $H \leqslant G^\circ$. Comme φ est algébrique sur le sous-groupe G°/H d'après ce qui précède, on a φ algébrique partout à nouveau par G-équivariance.
On peut se ramener au cas précédent en procédant en deux étapes. Dans un premier temps, on quotiente par le sous-groupe normal connexe H° (on a bien $H^\circ \leqslant G^\circ$), puis on quotiente par le sous-groupe normal fini H/H°. Il reste donc à prouver le cas H fini, c'est un corollaire direct du théorème 1.5.2. ☐

1.4.4 Quasitores, actions de quasitores

Quasitores

Soit G un groupe algébrique. Le groupe $X^*(G)$ des caractères de G est un sous-groupe de $k[G]^\times$. On remarque que $X^*(.)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes algébriques dans la catégorie des groupes abéliens de type fini, l'image d'un morphisme $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ étant simplement la (co)-restriction $\varphi^*{}^{|X^*(G_1)}_{|X^*(G_2)}$ du co-morphisme φ^* entre les algèbres de coordonnées. On signale qu'en caractéristique $p > 0$, les $X^*(G)$ ont de plus la propriété d'être sans p-torsion. Tout ce qui suit reste vrai en caractéristique p, avec cette contrainte supplémentaire sur les groupes de caractères.

Exemple 1.4.2.
1. $X^*(GL_n) = \{\det^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. En effet, $k[GL_n]^\times = \{\lambda \det^k \mid k \in \mathbb{Z}, \lambda \in k^*\}$, puisque $k[X_{ij}]$ est factoriel et det irréductible.
2. $X^*(SL_n) = 1$ car $D(SL_n) = SL_n$.
3. Les unités de $k[\mathbb{G}_m]$ sont les monômes. On en déduit que les caractères sont exactement les $t \mapsto t^k, k \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on remarque que $X^*(G_1 \times G_2) = X^*(G_1) \times X^*(G_2)$, d'où $X^*(D_n) = \{\text{monômes à coefficient unitaire}\} \simeq \mathbb{Z}^n$.

On remarque que les caractères de D_n engendrent $k[D_n]$ comme k-ev, ils en forment donc une k-base par le lemme de Dedekind qui assurent que les caractères sont libres dans $\mathrm{Map}(D_n, k)$. On a plus généralement :

Proposition 1.4.3. *Soit G un groupe algébrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *G est diagonalisable (i.e. $\simeq$ à un sous-groupe fermé de D_n)*
2. *$k[G] = Vect_k(X^*(G))$.*
3. *Tout G-module est somme directe G-modules de dimension 1.*

Démonstration.
1. 1) $\Longrightarrow$ 2) La restriction $k[D_n] \xrightarrow{res} G$ est surjective et la restriction d'un caractère est un caractère.
2. 2) $\Longrightarrow$ 3) G est abélien, car $\forall \chi \in X^*(G)$, $g, h \in G, \chi(gh) = \chi(hg)$. C'est donc vrai pour toute fonction régulière, on en conclut $gh = hg$.
   On observe que l'action naturelle de G sur $k[G]$ est semi-simple. En effet, les caractères forment une base de diagonalisation, G est donc semi-simple. Soit (V, ρ) le G-module considéré et $W \subset V$ un sous G-module de dimension finie, disons n. Par la décomposition de Jordan, $\rho(G)$ est semi-simple. De plus, c'est un sous groupe abélien fermé de GL_n. Il est donc conjugué à un sous-groupe fermé de D_n. On voit ainsi que $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(G)} V_\chi$, où $V_\chi := \{v \in v \mid g.f = \chi(g)f, \forall g \in G\}$. En effet, ils sont en somme directe, et tout élément de V se décompose de cette manière.
3. 3) $\Longrightarrow$ 1) On peut supposer $G \subset GL_n$, et considérer l'action naturelle sur k^n après choix d'une base $(e_1, ..., e_n)$. Par hypothèse, on peut écrire $k^n = (f_1) \oplus ... \oplus (f_n)$, avec les (f_i) sous G-module de dimension 1. G est donc conjugué à un sous-groupe de D_n.

☐

Ce constat motive la définition suivante :

Définition 1.4.4 (Quasitore)**.** Un quasitore est un groupe algébrique G tel que $k[G] = \mathrm{Vect}_k(X^*(G))$. Un tore est un quasitore connexe.

On travaille désormais dans la catégorie des quasitores. On considère un quasitore G et le groupe $\chi^{**}(G) := (\chi^*)^2(G)$.

Proposition 1.4.4. *G et $\chi^{**}(G)$ sont naturellement isomorphes en tant que groupes abstraits, et aussi en tant que groupes algébriques par transport de structure. L'isomorphisme est $ev_G : G \to \mathrm{Hom}(X^*(G), \mathbb{G}_m), g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$.*

Démonstration. ev_G est injective : Soit $g \in G$ tel que $\chi(g) = 1 = \chi(e_G), \forall \chi \in X^*(G)$. Alors $g = e_G$ car G est un quasitore.
ev_G est surjective : Soit $\varphi \in \chi^{**}(G)$. On a un prolongement unique de φ en un morphisme de k-algèbre $k[X^*(G] = k[G] \to k$ qui est donc de la forme $k[G] \to k, f \mapsto f(g)$ pour un $g \in G$. En restreignant à $X^*(G)$, on trouve que $\varphi = ev_G(g)$. □

Autrement dit on a un isomorphisme de foncteurs $(\chi^*)^2(.) \simeq Id$, d'où une équivalence de catégories entre les quasitores et les groupes abéliens de type fini. Une autre façon de voir cela est d'introduire l'algèbre de groupe d'un groupe abélien de type fini M, c'est par définition $k[M] = \{\sum_{finie} \lambda_g g, \, \lambda_g \in k, g \in G\}$ avec la multiplication définie par l'opération de groupe de G. La propriété suivante montre que l'on construit ainsi un autre inverse de $\chi^*(.)$

Proposition 1.4.5. *Soient, M, M_1, M_2 des groupes abéliens de type fini, et G un quasitore.*
Alors $k[M]$ est de type fini, réduite et on a $k[M_1 \oplus M_2] \simeq k[M_1] \otimes k[M_2]$. De plus, $k[M]$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Hopf et on a $k[G] = k[X^*(G)]$ et donc $G = \mathrm{Specm} \circ k[X^*(G)]$.

Démonstration. On a deux morphismes d'algèbre $k[M_1] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_1} \mapsto e_{(m_1,0)}$ et $k[M_2] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_2} \mapsto e_{(0,e_{m_2})}$, d'où l'existence d'un morphisme $k[M_1] \otimes k[M_2]$ dont on vérifie que c'est un isomorphisme. Comme on a $M \simeq \mathbb{Z}^r \oplus (\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$, il suffit de traiter les cas $M = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a $k[\mathbb{Z}] \simeq k[t, t^{-1}]$ qui est intègre, de type fini, et réduite. On a $k[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}] \simeq k[t]/(t^d - 1)$. On voit, par le théorème chinois par exemple, que cette algèbre de type fini non-intègre est réduite si et seulement si les racine de $t^d - 1$ sont simples, ce qui est le cas en caractéristique zéro.
Enfin la structure d'algèbre de Hopf sur $k[M]$ est donnée par $\Delta(e_m) = e_m \otimes e_m$, $i(e_m) = e_{-m}$, $e(e_m) = e_0$. □

Corollaire 1.4.2. *Soit G un quasitore. Alors :*

1. *G est isomorphe au produit direct d'un tore et d'un groupe abélien fini.*
2. *G est un tore $\iff$ $X^*(G)$ est libre de type fini $\iff$ G est connexe.*

Action d'un quasitore sur une variété affine

On a montré dans la partie précédente que l'algèbre des coordonnées d'un quasitore G était naturellement munie d'une $X^*(G)$-graduation. Cela peut être vu comme la traduction algébrique de l'action de G sur lui même par multiplication à gauche. On précise, cela ci-dessous en montrant que les foncteurs Specm et $k[.]$ réalisent une équivalence de catégories entre les variétés affines munies d'une action d'un quasitore et les algèbres graduées par un groupe abélien de type fini. On a déjà l'équivalence entre variétés affines et algèbres affines. Il s'agit donc de vérifier que les (co)-restrictions des deux foncteurs sont bien définies et que les actions et graduations sont préservées.

Construction 1.4.1. Soit H un quasitore et X une H-variété affine. Le H-module $k[X]$ est somme directe de H-module de dimension 1 d'après la partie précédente et on peut écrire :

$$k[X] = \bigoplus_{\chi \in X^*(H)} V_\chi, \text{ où } V_\chi := \{f \in k[X] \mid h.f = \chi(h)f, \, \forall h \in H\}$$

On voit immédiatement que cette somme directe est $X^*(H)$-graduée. De plus, cette construction est fonctorielle, en effet en considérons les diagrammes commutatifs ci-dessous. Le premier est la traduction de la donnée d'un morphisme d'un morphisme $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ d'une H-variété affine X vers une H'-variété affine X'. Le second est obtenu par passage aux algèbres de coordonnées.

$$\begin{tikzcd} H \times X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}\times\varphi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ H' \times X' \arrow[r, "a_2"] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k[H] \otimes k[X] & k[X] \arrow[l, "a_1^*"'] \\ k[H'] \otimes k[X'] \arrow[u, "\widetilde{\varphi}^*\otimes\varphi^*"] & k[X'] \arrow[l, "a_2^*"'] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Le petit calcul ci-dessous montre que $\forall f \in V'_{\chi'} \subset k[X']$, $\varphi^*(f) \in V_{\widetilde{\varphi}^*(\chi')}$, ce qui montre que $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ est un morphisme d'algèbres graduées.

$$\forall h \in H,\, x \in X,\, \varphi^*(f)(h.x) = a_1^*\varphi^*(f)(h,x) = (\widetilde{\varphi}\otimes\varphi)a_2^*(f)(h,x) = \widetilde{\varphi}^*(\chi')(h)\varphi^*(f)(x)$$

Construction 1.4.2. Soit K un groupe abélien de type fini et A une k-algèbre affine K-graduée. On pose $X := \mathrm{Specm}(A)$ et on choisit des générateurs homogènes $f_{\omega_1}, ..., f_{\omega_r}$ de A, ce qui donne une immersion fermée $i : X \to k^r, x \mapsto (f_1(x), ..., f_r(x))$. On transporte la graduation à $k[k^r] = k[t_1, ..., t_r]$ en posant $\deg(t_i) = \omega_i$, ce qui fait de $k[i(X)] = k[t_1, ..., t_r]/\operatorname{Ker} i^* \xrightarrow{\overline{i^*}} A$ un isomorphisme d'algèbres graduées. Enfin, on munit k^r de l'action diagonale associée aux caractères $\chi^{\omega_1}, ..., \chi^{\omega_r}$ de $H := \mathrm{Specm}(k[K])$, c'est à dire $\forall h \in H$, $t \in k^r$, $h.t := (\chi^{\omega_1}(h)t_1, ..., \chi^{\omega_r}(h)t_r)$. On a donc concrètement pour $f := \sum \alpha_{i_1,...,i_r} t_1^{i_1}...t_r^{i_r} \in k[k^r]$, $f(h.t) = f(\chi^{\omega_1}(h)t_1, ..., \chi^{\omega_r}(h)t_r) = \sum \alpha_{i_1,...,i_r} \chi^{\sum i_k\omega_k}(h) t_1^{i_1}...t_r^{i_r}$. Ainsi on a, $f \in k[k^r]_\omega \iff \forall (i_1, ..., i_r)$, $\sum_k i_k\omega_k = \omega \iff f(h.t) = \chi^\omega(h) \sum \alpha_{i_1,...,i_r} t_1^{i_1}...t_r^{i_r} = \chi^\omega(h) f(t), \forall h \in H$. Cette condition montre que l'idéal homogène $\operatorname{Ker} i^*$ est H-stable et donc que $i(X)$ est une H-variété. On transporte en retour cette action sur X et on voit que l'action obtenue est indépendante du choix initiale des f_i, en effet la condition d'homogénéité exprimée ci-dessus définit complètement le comorphisme de l'action de $H : a^* : A \to k[K] \otimes A$, $f_\omega \mapsto \chi^\omega \otimes f_\omega$.
Pour finir, vérifions la fonctorialité. Soit $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ un morphisme entre la K-algèbre graduée A et la K'-algèbre graduée A'. La construction montre que l'on définit deux morphismes $a_1 : A \to k[K] \otimes A$ et $a_2 : A' \to k[K'] \otimes A'$. Et on a,

$$\forall h_\omega \in A_\omega,\, (\widetilde{\varphi}\otimes\varphi)\circ a_1(h_\omega) = (\widetilde{\varphi}\otimes\varphi)(\chi^\omega \otimes h_\omega) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

$$\forall h_\omega \in A_\omega,\, a_2 \circ \varphi(h_\omega) = a_2(\varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(h_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

D'où le diagramme commutatif de gauche ci-dessous, qui donne le diagramme de droite par application du foncteur Specm. Ce dernier diagramme finit de prouver la fonctorialité.

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[d, "\widetilde{\varphi}^*\otimes\varphi^*"] & A \arrow[l, "a_1"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ K' \otimes A' & A' \arrow[l, "a_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Specm}(k[K]) \times \mathrm{Specm}(A) \arrow[r, "a_1^\circ"] & \mathrm{Specm}(A) \\ \mathrm{Specm}(k[K']) \times \mathrm{Specm}(A') \arrow[r, "a_2^\circ"] \arrow[u, "\widetilde{\varphi}\times\varphi"] & \mathrm{Specm}(A') \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

On voit que dans les deux constructions on a la même condition sur l'homogénéité qui détermine à la fois l'action et la graduation, c'est ce qu'on voulait vérifier.
Ainsi les actions de quasitore sur les variétés affines peuvent être caractérisé en terme algébrique grâce à cette équivalence. C'est l'objet des propositions suivantes.

Proposition 1.4.6. *Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \mathrm{Specm}\, k[K]$ sur $X := \mathrm{Specm}\, A$. Soit $Y \subset X$ une sous variété fermée, et $I = \mathcal{I}(Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Y est H-stable.*
2. *I est un idéal homogène.*

Démonstration. Comme I est radical, Y est H-stable si et seulement si $\forall P \in I$, $h \in H$, $y \in Y$, $P(h.y) = 0$. Supposons que cette dernière condition soit vérifiée, on écrit $P = \sum_{finie} P_\omega$ sa décomposition en composantes homogènes. On a alors, $P(h.y) = \sum \chi^\omega \otimes P_\omega(h, y) = \sum \chi^\omega(h) P_\omega(y) = 0$. Les caractères étant libres, on a $P_\omega(y) = 0, \forall y, \omega$, c'est à dire $P_\omega \in I, \forall \omega$. Ainsi I est homogène. La réciproque est immédiate. $\square$

Dans la construction 1.4.2, on voit que la situation générale est assez proche de l'exemple le plus simple de l'action diagonale de $(k^*)^n$ sur k^r par un choix de r caractères. On voit bien dans ce cas que la géométrie de l'orbite d'un point $p \in k^r$ va être assez dépendante de nullité des coordonnées $x_1, ..., x_r$ au point p. Cela motive la définition suivante.

Définition 1.4.5 (Monoïde d'orbite, Groupe d'orbite)**.** Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Specm} k[K]$ sur $X := \operatorname{Specm} A$.

1. Le monoïde d'orbite d'un point $\in X$ est le sous-monoïde $S_x \subset K$ engendré par $\{\omega \in K \mid \exists f \in A_\omega \text{ telle que } f(x) \neq 0\}$
2. Le groupe d'orbite d'un point $\in X$ est le sous-groupe $K_x \subset K$ engendré par le monoïde d'orbite.

Proposition 1.4.7. *Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Specm} k[K]$ sur $X := \operatorname{Specm} A$, et $x \in X$. On a le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\omega \overset{\simeq}{\longmapsto} \chi^\omega"] & K/K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^*(H/H_x) \arrow[r, "\pi^*"] & X^*(H) \arrow[r, "i^*"] & X^*(H_x) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $i : H_x \to H$ est l'inclusion du stabilisateur de x, et $\pi : H \to H/H_x$ la projection canonique. En particulier, on obtient $H_x \simeq \operatorname{Specm}(k[K/K_x])$.

Démonstration. La deuxième ligne est obtenue par le théorème 1.4.4, puis application du foncteur X^*. Elle est bien exacte par exactitude du foncteur X^*. La flèche verticale centrale est l'isomorphisme canonique déduit de $X^* \circ \operatorname{Specm} \circ k[.] \simeq Id$.
Comme $\overline{H.x}$ est H-stable, la graduation est préservée sur $k[\overline{H.x}]$ d'après la proposition 1.4.6. De plus si $f \in k[X]_\omega$ est telle que $f(x) \neq 0$, cela reste le cas modulo $\mathcal{I}_X(\overline{H.x})_\omega$ et réciproquement. Ainsi, S_x et K_x ne sont pas modifiés si on remplace X par $\overline{H.x}$.
Considérons le fermé propre $\overline{H.x} \setminus H.x$, éventuellement vide. Il est H-stable comme réunion d'orbites. Alors $\mathcal{I}_{\overline{H.x}}(\overline{H.x} \setminus H.x)$ est homogène d'après la proposition 1.4.6, et $\neq \{0\}$. Choisissons $f \neq 0$ homogène dans ce H-module, c'est donc un vecteur propre. Ainsi, f est non-nulle quelque part sur $H.x$ et donc partout par transitivité et choix de f. On en conclut $H.x = (\overline{H.x})_f$. Considérons la graduation naturelle associée à $k[\overline{H.x}]_f$. Comme on a inversé f, le monoïde de poids est potentiellement plus gros. En revanche on voit facilement que K_x n'est pas modifié.
Supposons donc $X = H.x$. Dans ce cas, on voit qu'une fonction homogène non-nulle est partout non-nulle, donc inversible. On a donc dans ce cas $S_x = K_x = S(k[H.x]) = K(k[H.x])$, où $S(k[H.x])$ et $K(k[H.x])$ sont respectivement les monoïdes et groupes de poids de l'algèbre K-graduée $k[H.x]$.
D'après la proposition 1.3.6 et le théorème 1.3.2 on a le diagramme commutatif de gauche ci-dessous. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur $k[.]$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, two heads, "h \mapsto h.x"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & H.x \\
H/H_x \arrow[ur, dashed, "\exists ! \simeq \varphi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[H] & k[H.x] \arrow[l, hook', "f_\omega \mapsto f_\omega(x)\chi^\omega"'] \arrow[dl, dashed, "\exists ! \simeq \varphi^*"] \\
k[H/H_x] \arrow[u, hook, "\pi^*"] &
\end{tikzcd}$$

Comme les flèches du diagramme de gauche sont des morphismes de H-variétés, les morphismes du diagramme de droite préservent la graduation. Ainsi, φ^* induit un isomorphisme sur les groupes de poids $K_x \xrightarrow{\omega \mapsto \chi^\omega} X^*(H/H_x)$. Enfin, toujours en utilisant le diagramme, cet isomorphisme est l'unique faisant commuter le carré de gauche dans le diagramme de la proposition. $\square$

Proposition 1.4.8. *Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Specm} k[K]$ sur $X := \operatorname{Specm} A$, et $x \in X$. Cette action induit une action de H/H_x sur $\overline{H.x}$. De plus, $\overline{H.x}$ et $\operatorname{Specm}(k[S_x])$ sont isomorphes en tant que H/H_x-variétés.*

Démonstration. On suppose $X = \overline{H.x}$ ce qui ne modifie pas S_x et K_x. De plus on a $S(k[\overline{H.x}]) = S_x$ et $K(k[\overline{H.x}]) = K_x$. D'après la preuve précédente, $k[K_x]$ et $k[H/H_x]$ sont canoniquement isomorphes et on a un isomorphisme de K_x-algèbres graduées $k[H.x] \to k[K_x]$, $f_\omega \mapsto f_\omega(x)\chi^\omega$. On le morphisme de K_x-algèbres graduées $k[\overline{H.x}] \to k[S_x]$ définit par la même formule. On voit facilement qu'il est injectif. Pour la surjectivité on peut par exemple voir que le premier isomorphisme est en fait le prolongement par localisation en un élément homogène de ce morphisme (voir démonstration précédente). D'où un diagramme commutatif de K_x-algèbres graduées. qui donne la proposition par application de Specm.

$$\begin{tikzcd} k[H.x] \arrow[r, "\simeq"] & k[K_x] \\ k[\overline{H.x}] \arrow[u, "f\mapsto f_{|H.x}"] \arrow[r, "\simeq"] & k[S_x] \arrow[u, "\subset"'] \end{tikzcd}$$

□

Proposition 1.4.9. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Specm} k[K]$ sur $X := \operatorname{Specm} A$. Alors il existe un ouvert affine non-vide $U \subset X$ tel que :*

$$S_x = S(A), \;\; K_x = K(A), \;\; \forall x \in U$$

Démonstration. On choisit des générateurs homogènes $f_1, ..., f_r$ de A. Alors $U := X_{f_1 \dots f_r}$ est non-vide car A est intègre et U satisfait la propriété d'après ce qui précède. □

Pour finir voyons une caractérisation algébrique des actions fidèles de quasitores sur des variétés affines.

Proposition 1.4.10. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Specm} k[K]$ sur $X := \operatorname{Specm} A$. L'action de H est fidèle si et seulement si $K = K(A)$.*

Démonstration. Soit $g \in \cap_{x\in X} H_x$. L'action de g sur les fonctions régulières est triviale, donc en particulier sur les fonctions homogènes. Comme A est intègre, $\forall \omega \in S(A), \exists f_\omega \neq 0 \in A_\omega$, on en déduit $g \in \cap_{\chi\in S(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ puis facilement $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ d'où $g = e_H$ si $K = K(A)$ car H est un quasitore.
Sinon comme $K(A) \subsetneq K$, on peut choisir $g \neq e_H \in H$ tel que $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$. En effet $\cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ est un sous-groupe fermé non-trivial de H car son groupe de caractère est $K/K(A)$. Ainsi g agit trivialement sur les fonctions homogènes et donc sur les fonctions régulières. On en déduit que g agit trivialement sur X. □

1.5 Théorie des invariants

1.5.1 L'algèbre des invariants

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété affine. $k[X]$ est un G-module rationnel pour l'action naturelle de G sur les fonctions régulières. on définit la sous-algèbre des invariants $k[X]^G := \{f \in k[X] \mid g.f = f, \forall g \in G\}$. C'est par définition la sous-algèbre des fonctions constantes sur les orbites de l'action de G sur X.
Une question naturelle est de se demander si cette algèbre est de type fini. Ce n'est pas le cas en général. En effet, dans la perspective de répondre au 14e problème de Hilbert, Nagata exhiba en 1959 une algèbre d'invariants pour l'action d'un groupe algèbrique qui n'est pas de type fini. Avec des hypothèses sur G, on peut cependant montrer que c'est le cas, c'est l'objectif de cette partie.
Supposons G réductif. Le G-module $k[X]$ est alors semi-simple, en particulier, $k[X]^G$ admet un supplémentaire G-stable que l'on note $k[X]_G$. On définit l'opérateur de Reynolds $R_{k[X]}$ comme la projection sur $k[X]^G$ associée à cette décomposition. Voici quelques propriétés de $R_{k[X]}$:

Proposition 1.5.1. *1. Soit $f : V \to W$ un morphisme de G-module et $f^G : V^G \to W^G$ le morphisme induit. On a $R_W f = f R_V$. En particulier, si f est surjective, f^G l'est aussi.*

2. $R_{k[X]}$ est $K[X]^G$-linéaire

Démonstration. 1. Ok

2. Soit $a \in k[X]^G$. on considère m_a la multiplication par a dans $k[X]$. C'est un endomorphisme de G-module, il commute donc avec $R_{k[X]}$.

□

Théorème 1.5.1 (Hilbert)**.** *Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine. Alors l'algèbre des invariant $k[X]^G$ est de type fini.*

Démonstration. Supposons que X soit un G-module V de dimension finie. L'action de k^* sur V par homothétie donne une $\mathbb{N}$-graduation $k[V] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} k[V]_n$, $k[V]_n$ étant le sous espace des polynômes homogènes de degré n. Cette graduation est G-stable et se restreint sur l'algèbre des invariants en une $\mathbb{N}$-graduation $k[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} k[V]_n^G$. Or on remarque que $k[V]^G$ est noetherien. En effet, soit I un idéal de $k[V]^G$, et J son extension dans $k[V]$. J est un sous G-module, donc la contraction de J dans $k[V]^G$ est $R_{k[V]}(J) = IR_{k[V]}(k[V]) = I$. On voit donc que la condition de chaîne est satisfaite sur $k[V]^G$ si elle satisfaite sur $k[V]$, ce qui est le cas car ce dernier est noetherien par le théorème de la base de Hilbert. Ainsi, on a le résultat d'après la proposition 1.2.1.
Dans le cas général, on peut d'après le théorème 1.4.1 supposer X inclus dans un G-module V. On obtient alors un G-morphisme surjectif $k[V] \to k[X]$ qui induit un G-morphisme surjectif $k[V]^G \to k[X]^G$ d'après la proposition 1.5.1. Cela montre que $k[X]^G$ est de type fini. □

On constate que cette preuve n'est pas effective. Il est en général difficile de calculer l'algèbre des invariants. On présente ci-dessous la méthode des sections qui permet le calcul dans certains cas.
Soit $S \subset X$ une sous-variété fermée. Définissons $Z(S) = \{g \in G \mid g.s = s, \forall s \in S\}$ et $N(S) = \{g \in G \mid g.s \in S, \forall s \in S\}$. Clairement, $Z(S)$ est un sous-groupe normal de $N(S)$, et le quotient $W = N(S)/Z(S)$ agit sur S. La surjection $k[X] \to k[S]$, induit un morphisme $k[X]^G \xrightarrow{\varphi} k[S]^W$.
Supposons que l'on ait un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\forall x \in U$, $G.x$ intersecte S, alors on voit que φ est injective. Si de plus, $k[S]^W$ est engendré par des $\varphi(f_1), ..., \varphi(f_r)$, alors φ est un isomorphisme et $k[X]^G$ est engendré par $f_1, ..., f_r$.

Exemple 1.5.1. $G = GL_n,\ X = M_n,\ g.A = gAg^{-1}$, $S = D_n$, $U = X_{disc(\chi)}$. En considérant un élément de U, qui a donc ses valeurs propres deux à deux distinctes, on a par un calcul direct $Z(S) = D_n$. Puis on a $N(S) = \{\text{matrices monomiales}\}$ car la conjugaison préserve les espaces propres. Ainsi, W est isomorphe au groupe symétrique Σ_n et agit sur S en permutant les entrées diagonales. On a ainsi $k[S]^W = k[\sigma_1, ..., \sigma_n]$, l'algèbre engendrée par les fonctions symétriques élémentaires. C'est une algèbre de polynômes.
Soient $f_1, ..., f_n$ les coefficient du polynôme caractéristique générique. Ce sont des éléments de $k[X]^G$, et on a $f_{i|S} = (-1)^i \sigma_i$, d'où $k[X]^G = k[f_1, ..., f_n]$.

1.5.2 Quotient d'une variété algébrique sous l'action d'un groupe algébrique

Quotient catégorique

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. En tant que groupe abstrait agissant sur un ensemble, le quotient de X par G (noté $X//G$) est par définition l'ensemble des orbites. On note $\pi : X \to X//G$ l'application qui à un élément de X associe son orbite. $X//G$ satisfait une propriété universelle, il représente le foncteur $\text{Ens} \to \text{Ens}, Y \mapsto \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f \text{ est constante sur les orbites}\}$, il est donc unique à isomorphisme près. Pour cette raison la paire $(X//G, \pi)$ est appelée le quotient catégorique de X par G.
On peut ainsi transporter cette définition dans la catégorie des variétés algébriques. Toutefois, il n'est pas clair que ce quotient existe toujours. L'exemple suivant montre que lorsqu'il existe, le quotient catégorique ne coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des orbites.

Exemple 1.5.2. On considère l'action naturelle de GL_n sur $\mathbb{A}^n$. Le quotient catégorique existe et est un point. En effet soir $f : \mathbb{A}^n \to Z$ constant sur les orbites, alors f est constante car il existe un orbite dense. En revanche il y a un deuxième orbite, c'est le fermé $\{0\}$.

On suppose X affine et $k[X]^G$ de type fini avec $f_1, ..., f_r$ des générateurs, c'est en particulier le cas lorsque G est réductif d'aprés le théorème 1.5.1. Dans ce cadre, l'algèbre des invariants définit une variété algébrique affine, notons la Y. On définit le morphisme $\varphi : X \to k^r$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_r(x))$. Son comorphisme φ^* admet une factorisation : $k[t_1, ..., t_r] \twoheadrightarrow k[X]^G \xrightarrow{\subset} k[X]$, d'où $Y \simeq \overline{\varphi(X)}$. On peut donc voir $X \xrightarrow{\varphi} \overline{\varphi(X)}$ comme une réalisation du morphisme $\pi : X \to Y$ associé à $k[X]^G \subset k[X]$. On appelle ce morphisme, le morphisme quotient. De la même manière on voit que tout morphisme G-invariant de variétés affines $X \to Z$ se factorise à travers Y. De ce fait, Y semble être un bon candidat pour le quotient catégorique. Toutefois il faut être prudent, dans [10] 6.4.10, on exhibe un exemple de cette situation qui n'admet pas de quotient catégorique. On a toutefois le résultat suivant :

Théorème 1.5.2. *Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine.*

1. *Le morphisme quotient $\pi : X \to Y$ est surjectif.*
2. *(Y, π) est un quotient catégorique. On écrit donc $Y = X//G$.*
3. *Soit $Z \subset X$ une sous G-variété fermée. Le morphisme induit $Z//G \to X//G$ est une immersion fermé. On peut ainsi identifier π_Z et π_X restreint à Z. De plus, soit Z' une autre sous G-variété fermée, on a $\pi_X(Z \cap Z') = \pi_X(Z) \cap \pi_X(Z')$.*
4. *Chaque fibre de π_X contient un unique orbite fermé.*

Démonstration.

1. Soit $x \in Y$ et m_x l'ideal maximal de $k[X]^G$ correspondant. La fibre $\pi^{-1}(x)$ correspond à l'ensemble des idéaux maximaux contenant l'extension I de m_x dans $k[X]$. Or on a déjà vu que l'extension dans $k[X]$ était injective, I est donc un idéal propre contenu dans au moins un idéal maximal. La fibre étant non-vide, π est surjective.
2. L'existence de la factorisation a déjà était vue. Avec 1) on a maintenant l'unicité.
3. On note i l'inclusion $Z \subset X$. $\pi_X i$ est constant sur les orbites de Z d'où l'existence d'un unique morphisme $\varphi : Z//G \to X//G$ tel que $\varphi\pi_Z = \pi_X i$. La projection $k[X] \to k[Z]$ est un morphisme de G-module surjectif. D'après la proposition 1.5.1, cette projection induit un morphisme de k-algèbre surjectif $k[X]^G \xrightarrow{\varphi^*} k[Z]^G$, donc φ est une immersion fermée. Soit I (resp. I') l'idéal de Z (resp. Z') dans $k[X]$. L'idéal de $Z \cap Z'$ est $I + I'$ et l'idéal de $\pi_X(Z)$ est $\mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z)) = I \cap k[X]^G = R_X(I)$. Ainsi $\mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z \cap Z')) = R_X(I + I') = R_X(I) + R_X(I') = \mathcal{I}_{X//G}(\pi_X(Z) \cap \pi_X(Z'))$.
4. d'après 3), π_X envoie deux orbites fermés distincts sur deux points distincts.

□

On remarque que les propriétés du théorème précédent s'étendent automatiquement au cas d'une G-variété X si le théorème est vérifié localement sur un recouvrement affine d'un candidat Y pour le quotient $X//G$. De ce constat découle la notion de bon quotient.

Définition 1.5.1 (Bon quotient)**.** Soit G un groupe réductif et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un bon quotient si elle vérifie :
(i) π est affine et G-invariant.
(ii) $\pi^* : \mathcal{O}_Y \to (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

Exemple 1.5.3. Soit G un groupe réductif et X une G-variété affine. D'après le théorème 1.5.2 et l'exemple 1.3.2, $X//G$ est un bon quotient.

Quotient géométrique

Parmi les quotients catégoriques $(X//G, \pi)$, on cherche à caractériser ceux ayant les propriétés géométriques intuitivement attendues pour un quotient, c'est à dire que $X//G$ soit l'ensemble des orbites avec une topologie aussi fine que possible. C'est la notion de quotient géométrique :

Définition 1.5.2 (Quotient géométrique)**.** Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un quotient géométrique si elle vérifie :
(i) π est surjective et ses fibres sont exactement les orbites.
(ii) La topologie de Y coïncide avec la topologie quotient associée à π.
(iii) $\pi^* : \mathcal{O}_Y \to (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

On remarque que pour un quotient géométrique $(X//G, \pi)$, tous les orbites sont fermés dans X et l'application quotient est ouverte. En effet, soit U un ouvert de X, on a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g \in G} g.U$ qui est ouvert.

Exemple 1.5.4. Soit G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé. Dans la catégorie des ensemble, le quotient $(G/H, \pi)$ est exactement le quotient catégorique $(G//H, \pi)$ pour l'action de H sur G par multiplication à droite. Dans [9] 5.5.5, en caractéristique quelconque, on munit G/H d'une structure d'espace annelé en lui attribuant la topologie quotient puis en définissant le faisceau structural par $\mathcal{O}_{G/H}(U) := \{f \in \mathrm{Map}(U, k) \mid f\pi \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))\}$. Par construction, il vérifie la propriété universelle de factorisation. De plus, on montre ensuite que cet espace annelé est isomorphe à une variété quasi-projective, ce qui montre l'existence du quotient catégorique $(G//H, \pi)$ dans la catégorie des variétés algébriques. Par définition de $\mathcal{O}_{G/H}$, on a une flèche $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\pi^*} (\pi_* \mathcal{O}_X)^G$. Elle est injective par la surjectivité de π, et elle est surjective, par la propriété universelle du quotient. $(G//H, \pi)$ est donc un quotient géométrique. Cela généralise bien sur le théorème 1.4.4.

Exemple 1.5.5. Un bon quotient $(X//G, \pi)$ est un quotient géométrique si les fibres de π sont exactement les orbites. En effet, d'après ce qui précède, il reste à vérifier que $X//G$ est muni de la topologie quotient. Soit un ouvert de X de la forme $\pi^{-1}(A)$ où A est une partie de $X//G$. En tenant compte de 1.5.2 (iii) et de la surjectivité de π on a : $\pi(X \setminus \pi^{-1}(A)) = Y \setminus A$ qui est fermé, donc A est ouvert.

Un exemple : La construction Proj

Dans cette partie, on va détailler une construction qui à la fois éclaire et généralise la construction de la variété algébrique $\mathbb{P}^n(k)$. On considère une variété affine X munie d'une action de k^*. Une orbite $k^*.x$ est de dimension 0 ou 1. Si elle est de dimension 0, c'est un point fixe car k^* est connexe. Si elle est de dimension 1, elle est soit fermée, soit son adhérence est constituée de $k^*.x$ et d'une réunion de points fixes, en fait un seul comme on va le voir. On note F l'ensemble des points fixes.
L'algèbre affine $A := k[X]$ est $\mathbb{N}$-graduée par l'action de k^* et on remarque que $F = \mathcal{V}_X(A_{>0})$, où $A_{>0} := (f \mid f \in A_d \text{ pour un } d \geqslant 0)$ est l'idéal dit inconvenant. En effet, F est l'ensemble des idéaux maximaux qui sont k^*-stables. Or on peut remarquer qu'un idéal radical est k^*-stable si et seulement si il est homogène. Enfin, un idéal maximal et homogène contient nécessairement $A_{>0}$.
On remarque que $A^{k^*} = A_0 = A/A_{>0}$, et comme le bon quotient $Y_0 := X//k^* = \mathrm{Specm}(A_0)$ paramètre les orbites fermés, on obtient en particulier que si $k^*.x$ n'est pas fermé, son adhérence contient un unique point fixe. En résumé, $W := X \setminus F$ est la réunion des orbites de dimension 1, et ils sont tous fermés dans W. On va montrer que W admet un quotient géométrique, c'est la construction Proj.
Pour tout $f \in A_{>0}$ homogène, la localisation A_f est $\mathbb{Z}$-graduée de la manière suivante :

$$A_f = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}}, \quad (A_f)_d := \{h/f^l \mid \deg(h) - l\deg(f) = d\}$$

On note $A_{(f)} := (A_f)_0$ en remarquant qu'il s'agit de l'algèbre des invariants de la k^*-variété affine X_f. On a ainsi trouvé le bon quotient $U_f := \mathrm{Specm}(A_{(f)}) = X_f//k^*$. De plus, comme $F \subset \mathcal{V}_X(f)$, il s'agit d'un quotient géométrique d'après ce qui précède. Or on peut recouvrir W par un nombre fini de X_{f_i} avec les f_i homogènes de degrés > 0. Considérons les diagrammes commutatifs ci-dessous. Dans le diagramme de gauche, toutes les flèches sont des inclusions. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur Specm :

$$
\begin{array}{ccccc}
A_{f_i} & \longrightarrow & A_{f_if_j} & \longleftarrow & A_{f_j} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A_{(f_i)} & \longrightarrow & A_{(f_if_j)} & \longleftarrow & A_{(f_j)}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
X_{f_i} & \longleftarrow & X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_jf_j} & \longrightarrow & X_{f_j} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_j} \\
U_{f_i} & \longleftarrow & U_{f_if_j} & \longrightarrow & U_{f_j}
\end{array}
$$

Les flèches horizontales du diagramme de droite sont des immersions ouvertes, en effet on a $U_{f_if_j} \simeq (U_{f_i})_{f_j}$. Les conditions de la construction 1.3.1 sont satisfaites, on peut former une prevariété $\mathrm{Proj}(A)$ par recollement des U_{f_i} le long de ces immersions. De plus, les (U_{f_i}, π_i) sont des quotients géométriques et le diagramme exprime que l'on a les conditions de recollement sur les intersections qui font de $\mathrm{Proj}(A)$ le quotient géométrique global $W//k^*$.
Enfin, on remarque que les fermés de $\mathrm{Proj}(A)$ correspondent aux fermés k^*-stables de W, c'est à dire aux idéaux radicaux homogènes qui ne contiennent pas l'idéal inconvenant. On appelle ces fermés des variétés projectives. La topologie quotient sur $\mathrm{Proj}(A)$ que l'on vient de définir est aussi appelé la topologie de Zariski.

Pourquoi c'est séparé ? Est ce que c'est irréductible ? sections globales ? c'est complet ?

bijection avec les fermées qui sont des cones Action de PGL sur $(P^1)^4$. Quotient $= P1$ avec birapport ? Quid de l 'exemple des matrice diagonalisables ?

1.6 Diviseurs

1.6.1 Généralités

Partant de l'observation qu'en géométrie classique dans le plan projectif, il existe une dualité entre les droites et les points, il parait intéressant de s'intéresser aux sous-variétés fermées de codimension 1 et de conférer une structure naturelle à cet ensemble. C'est l'idée de diviseur, dont on va voir qu'un cadre privilégié est celui d'une variété normale, que l'on supposera de plus irréductible suivant la remarque **??**.

Définition 1.6.1 (Diviseur premier, $\mathrm{WDiv}(X)$, diviseur de Weil, diviseur effectif)**.** Soit X une variété normale irréductible. Un diviseur premier D est une sous-variété fermée irréductible de codimension 1. On définit $\mathrm{WDiv}(X)$ le groupe libre engendré par les diviseurs premiers. Un élément de $\mathrm{WDiv}(X)$ est appelé un diviseur de Weil. Enfin, un diviseur est dit effectif si il est à coefficients $\geqslant 0$.

On introduit maintenant pour chaque diviseur D une valuation sur $k(X)$ donnant des informations sur le comportement des fonctions rationnelles sur D. C'est l'analogue de l'ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fonction rationnelle de la droite affine en un point. On pose

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{f \in k(X) \mid f \text{ est définie sur } U \subset X \text{ ouvert tel que } U \cap D \neq \emptyset\}$$

Soit V un ouvert affine qui intersecte D. Comme X et D sont irréductibles, on voit que $\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{V,V\cap D}$. On peut donc supposer X affine avec $A = k[X]$ intègre. Dans ce contexte, D correspond à un idéal premier p de hauteur 1, et on a par définition :

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{f/g \in k(X) \mid f, g \in A,\ g \notin p\} = A_p$$

A_p est un anneau local d'idéal maximal pA_p, il est de plus noetherien et normal car la localisation préserve ces propriétés. De plus, A_p est de dimension 1 car on a une correspondance entre les idéaux premiers de A inclus dans p, et les idéaux premiers de A_p. On conclut d'après **??** que $\mathcal{O}_{X,D}$ est un DVR. La valuation associée $\mathrm{ord}_D : k(X) \to \mathbb{Z}$ donne par définition l'ordre d'annulation d'une fonction rationnelle le long de D. La propriété ci-dessous montre que les fonctions rationnelles permettent de définir des diviseurs de Weil.

Proposition 1.6.1. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors $\mathrm{ord}_D(f) = 0$ sauf pour un nombre fini de diviseurs premiers D.*

Démonstration. Soit $f = g/h \in k(X)^*$, où l'on peut supposer X affine. Comme $\mathrm{ord}_D(f) = \mathrm{ord}_D(g) - \mathrm{ord}_D(h)$, on peut supposer $f \in k[X]$. Soit D une diviseur et p son idéal. Si $f \in k[X]_p^\times$ alors $\mathrm{ord}_D(f) = 0$. Sinon, $f \in p$

et donc $D \subset \mathcal{V}_X(f)$. Or, d'après le théorème 1.3.1, les composantes irréductibles Z_i de $\mathcal{V}_X(f)$ sont des diviseurs premiers. Ainsi $\mathrm{ord}_D(f) = 0$ à moins que D ne soit l'un des Z_i. On peut aussi voir que les les diviseurs associés à f sont ses ideaux premiers associés minimaux □

Ainsi l'application $k(X)^* \to \mathrm{WDiv}(X)$, $f \mapsto \mathrm{div}(f) := \sum_D \mathrm{ord}_D(f)D$ définit un morphisme de groupe. Son image est le *groupe des diviseurs principaux* noté $\mathrm{PDiv}(X)$. La relation modulo $\mathrm{PDiv}(X)$ s'appelle *l'équivalence linéaire*, et le groupe quotient $\mathrm{Cl}(X)$ est le *groupe des classes de diviseurs*.

Théorème 1.6.1. *Soit X une variété normale et irréductible et Z une sous-variété fermée propre. On pose $U = X \setminus Z$. Alors :*

1. *$Cl(X) \to Cl(U)$ défini par $\sum_i n_i D_i \mapsto \sum_i n_i(D_i \cap U)$, avec $D_i \cap U = 0$ si $D_i \cap U = \emptyset$, est un morphisme de groupe surjectif.*
2. *Si $codim(Z, X) \geqslant 2$, then $Cl(X) \to Cl(U)$ est un isomorphisme.*
3. *Soient $D_1, ..., D_s$ les composantes irréductibles de Z qui sont des diviseurs. Alors la suite ci-dessous exacte*

$$\bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{Z}D_j \xrightarrow{\pi} Cl(X) \xrightarrow{.\cap U} Cl(U) \to 0$$

Démonstration.

1. Si $D \cap U \neq \emptyset$ alors $\dim(X)$=$\dim(U)$ et $\dim(D)$=$\dim(D \cap U)$ car ce sont des ouverts de variétés irréductibles donc la dimension est préservée. Ainsi cela définit une application $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ qui est un morphisme par construction. De plus, comme un diviseur principal est envoyé sur un diviseur principal, on a bien le morphisme attendu. Il est surjectif car pour $D \in \mathrm{WDiv}(U)$, on a $D = \overline{D} \cap U$.
2. Dans ce cas on ne peut avoir $D \subset Z$ cause de la dimension donc $D \cap U \neq \emptyset$. Ainsi, le noyau du morphisme $\mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(U)$ est exactement $\mathrm{PDiv}(X)$ d'où l'isomorphisme.
3. Le noyau de $.\cap U$ est exactement l'ensemble des $\pi(D)$ où D est un diviseur dont le support est contenu dans $X \setminus U = Z$, d'où le résultat.

□

Exemple 1.6.1. On écrit $\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$. En choisissant une carte affine contenant $\{\infty\}$ on voit tout de suite que $\{\infty\}$ est un diviseur. D'autre part, le théorème précédent nous donne la suite exacte

$$\mathbb{Z}\{\infty\} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{.\cap k} \mathrm{Cl}(k) \to 0$$

Mais d'après 1.1.1, on a $\mathrm{Cl}(k) = \{0\}$, donc π est surjective. Elle est injective car $a\{\infty\} = \mathrm{div}(f)$ donne $\mathrm{div}(f) \cap k = 0$ donc f est constante, ce qui force $a = 0$. Enfin, on a $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$.

La proposition suivante montre que l'on peut définir le faisceau structural de X en terme de diviseurs.

Proposition 1.6.2. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors*

1. *$div(f) \geqslant 0 \iff f$ est régulière, i.e $f \in \mathcal{O}_X(X)$*
2. *$div(f) = 0 \iff f$ est régulière et inversible, i.e $f \in \mathcal{O}_X(X)^\times$*

Démonstration. Si f est régulière, comme $f \in \mathcal{O}_{X,D}$ pour tout diviseur premier D, on a bien que $\mathrm{div}(f)$ est effectif. Pour la réciproque, on peut supposer X affine et c'est une application directe de 1.2.1. Pour la deuxième assertion, on remarque que $\mathrm{div}(f) = 0 \iff \mathrm{div}(f) \geqslant 0$ et $\mathrm{div}(f^{-1}) \geqslant 0$. □

Plus généralement, on définit pour chaque diviseur D un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X(D)$ dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ sont définies par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in k(X)^* \mid (\mathrm{div}(f) + D)_{|U} \geqslant 0\} \cup \{0\}$$

On vérifie, grâce aux propriétés des valuations ord_D, qu'il s'agit d'un sous $\mathcal{O}_X(U)$-module de $k(X)$, autrement dit un idéal fractionnaire, pour tout ouvert U. C'est donc un sous $\mathcal{O}_X$-module de la $\mathcal{O}_X$-algèbre $k(X)$. Dans le cas où X est affine on a une description explicite des sections globales :

Proposition 1.6.3. *Soit X une variété affine normale et irréductible, $A := k[X]$.*

1. *Pour un diviseur de Weil $D = a_{p_1}D_{p_1} + ... + a_{p_r}D_{p_r}$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \cap_{ht(p)=1} p^{-a_p} A_p$.*
2. *Pour un diviseur premier D_p, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D_p)) = p$.*

Démonstration.

1. Si a_{p_i} est < 0, comme A_{p_i} est un DVR, on a $p_i A_{p_i} = (\pi)$ pour un certain $\pi \in A_{p_i} \subset k[X]$. On définit un sous A_{p_i}-module de $k(X)$ isomorphe à $p_i A_{p_i}$ en posant $p_i^{a_{p_i}} A_{p_i} = \pi^{a_{p_i}} p_i A_{p_i}$. Avec cette définition on voit que pour $f \in k(X)^*$, on a $\mathrm{ord}_{D_{p_i}}(f) \geqslant a_{p_i} \iff f \in p_i^{a_{p_i}} A_{p_i}$. Or, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \iff \mathrm{div}(f) \geqslant -D \iff \mathrm{ord}_{D_p}(f) \geqslant -a_p, \forall p$ de hauteur 1.
2. Dans ce cas, comme D_p est effectif, $\mathrm{div}(f)$ aussi, donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D_p))$ est un sous-module de A, donc un idéal. On a donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D_p)) = pA_p \cap A = p$.

□

On forme maintenant la somme directe des $\mathcal{O}_X(D)$ et on la munit d'un produit de la façon suivante : pour $f_1 \in \mathcal{O}_X(D_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}_X(D_2)$, on définit le produit de f_1 et f_2 comme l'élément $f_1 f_2$ de $\mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$. On voit que cette algèbre est naturellement WDiv-graduée, avec à chaque étage D un contrôle prescrit quant au comportement des fonctions sur le support de D. Ceci mène à la définition suivante.

Définition 1.6.2 (Faisceau d'algèbres divisorielles)**.** Soit X une variété normale et irréductible. Le faisceau d'algèbres divisorielles associé à un sous-groupe $K \in$WDiv(X) est le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres K-graduées

$$\bigoplus_{D \in K} S_D, \qquad S_D := \mathcal{O}_X(D)$$

Exemple 1.6.2. On considère la droite projective $\mathbb{P}^1$, $D = \{\infty\}$ et $K = \mathbb{Z}D$. Cherchons la forme d'une section $f \in S_{nD}(\mathbb{P}^1)$. On se place sur la carte affine $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ associée au repère projectif $(\infty, 0, 1) = (e_0, e_1, e_0 + e_1)$, on note z la coordonnée associée. Par hypothèse, f est régulière sur U_0, c'est donc un polynôme en z. On fait agir l'homographie $z \mapsto w = 1/z$ pour se placer sur la carte $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{e_1\}$ associée au repère $(0, \infty, 1)$. Sur cette carte, la fonction qui coïncide avec f sur $U_0 \cap U_1$ est $g(w) = f(1/w)$. Or si on écrit $f(z) = z^k h(z)$ avec $z \nmid h(z)$, on obtient $g(w) = w^{-k-\deg(h)} h(w)$. Comme on doit avoir $k + \deg(h) \leqslant n$, on obtient que f est un polynôme de degré $\leqslant n$.
Ainsi on voit que l'application $\varphi_n : k[t_0, t_1]_n \to S_{nD}(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ est un isomorphisme de k-ev. De plus, on a facilement $\varphi_n \varphi_m = \varphi_{n+m}$. Finalement, $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ avec $\varphi : k[t_0, t_n] \to S(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ et $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z} \to K, n \mapsto nD$ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Bibliographie

[1] auteur. titre. *journal*, 2015.

[2] D.Cox. Toric varieties, 2009.

[3] D.Mumford. *The red book of varieties and schemes*. Springer, 1999.

[4] I.Arzhantsev et al. *Cox Rings*. Cambridge University Press, 2014.

[5] H.Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 1986.

[6] I.Arzhantsev. Introduction to algebraic groups and invariant theory. http://halgebra.math.msu.su/staff/arzhan/driver.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[7] JS.Milne. Algebraic geometry. http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[8] M.Brion. Introduction to actions of algebraic groups. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_luminy.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[9] T.A.Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhauser, 1998.

[10] Alvaro Rittatore Walter Ferrer Santos. *Actions and invariants of algebraic groups*. Chapman and Hall, 2005.