Université Grenoble Alpes

Institut Fourier

Mémoire de Master 2 MF

Introduction aux anneaux de Cox

Étudiant :
Antoine Vezier

Encadrant :
Michel Brion

13 mai 2018

This work has been partially supported by the LabEx PERSYVAL-Lab (ANR-11-LABX-0025-01) funded by the French program Investissement d'avenir

Table des matières

1 Préliminaires **5**
- 1.1 Algèbre commutative . . . 5
  - 1.1.1 Décomposition primaire des modules noetheriens . . . 5
  - 1.1.2 Extensions entières d'anneaux . . . 6
  - 1.1.3 Lemme de normalisation de Noether et applications . . . 7
  - 1.1.4 Anneaux locaux . . . 8
  - 1.1.5 Algèbres graduées . . . 9
- 1.2 Schémas . . . 10
  - 1.2.1 Généralités . . . 10
  - 1.2.2 Quelques propriétés des schémas . . . 12
  - 1.2.3 Quelques propriétés des morphismes de schémas . . . 13
- 1.3 Variétés algébriques . . . 15
  - 1.3.1 Dimension des variétés algébriques . . . 15
  - 1.3.2 Variétés lisses . . . 17
  - 1.3.3 Propriétés des variétés normales . . . 18

2 Groupes algébriques et théorie des invariants **19**
- 2.1 Groupes algébriques . . . 19
  - 2.1.1 Généralités . . . 19
  - 2.1.2 G-variétés, représentations . . . 19
  - 2.1.3 Groupes quotients . . . 21
  - 2.1.4 Groupes diagonalisables, actions de groupes diagonalisables . . . 22
- 2.2 Théorie des invariants . . . 28
  - 2.2.1 L'algèbre des invariants . . . 28
  - 2.2.2 Quotient d'une variété algébrique sous l'action d'un groupe algébrique . . . 29

3 Faisceaux divisoriels sur une variété algébrique **33**
- 3.1 Faisceaux de modules . . . 33
  - 3.1.1 Faisceaux quasi-cohérents . . . 33
  - 3.1.2 Spectre relatif d'une $\mathcal{O}_X$-algèbre . . . 34
  - 3.1.3 Faisceaux quasi-cohérents sur une variété projective . . . 35
  - 3.1.4 Cohomologie des faisceaux et applications . . . 36
  - 3.1.5 Faisceaux inversibles, Fibrés en droites . . . 40
  - 3.1.6 G-fibré principal . . . 41
  - 3.1.7 G-linearisation d'un fibré en droites . . . 42
- 3.2 Diviseurs . . . 43
  - 3.2.1 Diviseurs de Weil . . . 43
  - 3.2.2 Faisceau d'algèbres divisorielles . . . 45
  - 3.2.3 Diviseurs de Cartier et groupe de Picard . . . 46
  - 3.2.4 L'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ . . . 48

3.2.5 Le groupe des unités d'une variété irréductible 50

4 Anneaux de Cox **52**
4.1 Un exemple introductif 52
4.2 Faisceau et anneau de Cox dans le cas sans torsion 54
4.2.1 Le spectre relatif d'une algèbre divisorielle 54
4.2.2 Faisceau et anneau de Cox 57
4.2.3 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox 58
4.3 Faisceau et anneau de Cox dans le cas général 58
4.3.1 Faisceau et anneau de Cox 58
4.3.2 Invariance de l'anneau de Cox 60
4.3.3 Exemples 61
4.4 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox 63
4.4.1 Intégrité et normalité 63
4.4.2 Localisation et groupe des unités 66
4.4.3 Propriétés de divisibilité 67

Introduction

L'objectif du stage était d'entrer dans le sujet des anneaux de Cox en suivant la présentation de Arzhantzev, Derenthal, Hausen et Laface dans le chapitre 1 du livre récent [4]. Il m'a fallu dans un premier temps acquérir des notions de base en théorie des invariants, que j'ai pu trouver dans la note de synthèse [9]. Puis, je me suis naturellement intéressé à la théorie des diviseurs sur une variété algébrique, qui constitue un autre ingrédient important de la construction des anneaux de Cox. La meilleure exposition que j'ai pu trouver sur ce sujet est celle du livre [5], ce qui m'a amené à me familiariser avec le langage des schémas. Cet effort m'a permis à la fois d'élargir ma vision et d'accéder à des résultats qui m'étaient nécessaires pour compléter ou clarifier certains points dans l'exposition de [4]. Le premier était de comprendre pourquoi la bijection naturelle $H/H_x \simeq H.x$, où $H.x$ est l'orbite d'un point x d'une H-variété sous l'action d'un groupe algébrique diagonalisable, était un isomorphisme de variétés, c'est le théorème 1.3.1.9 du mémoire. Le second point m'ayant demandé un effort substantiel est le résultat 3.1.4.13, utilisé implicitement à plusieurs reprises dans le livre [4]. Pour l'obtenir, j'ai mis en oeuvre des techniques de cohomologie des faisceaux sur un schéma, cela fait l'objet de la section 3.1.4. Le théorème important de la théorie 4.2.1.10 faisait référence à des articles de recherche à deux reprises. La première concernait l'existence de G-linéarisation d'un fibré en droites. La seconde pointait des résultats de Rosenlicht sur les groupes des unités d'une variété et les groupes de caractères d'un groupe algébrique. Pour tout cela, la note [10] m'a été très utile. Enfin, la preuve de la construction 4.4.1.2 pointait un résultat très fort, or il était possible dans cette situation de procéder de manière plus "économique" en utilisant principalement le résultat 2.2.2.9 tiré de [2].

Donnons maintenant un bref aperçu du sujet. On considère une variété X normale irréductible dont le groupe des classes est de type fini et les fonctions régulières inversibles sont constantes. L'anneau de Cox de X est l'anneau $\mathcal{R}(X)$ des sections globales d'un faisceau d'algèbres $\mathcal{R}$ sur X, dit faisceau de Cox. Ce faisceau est construit essentiellement à partir du faisceau structural de X et de son groupe des classes. Certains choix sont faits dans la construction mais le faisceau obtenu n'en dépend qu'à isomorphisme près. De plus, le faisceau et l'anneau de Cox sont $\mathrm{Cl}(X)$-gradués par construction. Géométriquement, cela signifie que leur spectres $\widetilde{X} := \operatorname{Spec}_X \mathcal{R}$ et $\overline{X} := \operatorname{Spec} \mathcal{R}(X)$ sont équipés d'une action du groupe algébrique diagonalisable $H := \operatorname{Spec}(k[\mathrm{Cl}(X)])$. D'autre part, $\widetilde{X}$ est naturellement un schéma sur X, via un morphisme p provenant de la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre sur $\mathcal{R}$, et (X, p) est un bon quotient de $\widetilde{X}$ pour l'action de H. Enfin, le morphisme naturel $\widetilde{X} \to \overline{X}$ est une immersion ouverte H-équivariante, ce qui fait de $\widetilde{X}$ un schéma quasi-affine, et en fait une variété quasi-affine lorsque le faisceau de Cox est localement de type fini. On résume cela dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} = \operatorname{Spec}_X \mathcal{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p=/H"] & \overline{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{R}(X) \\ X & \end{tikzcd}$$

Par exemple, le d-espace projectif $\mathbb{P}^d_k$ peut se construire en tant que variété comme le quotient géométrique de $\mathbb{A}^{d+1}_k \setminus \{0\}$ sous l'action de $\mathbb{G}_m$ agissant par homothéties. Le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^d_k)$ est libre de rang 1 engendré par la classe d'un hyperplan quelconque. Le faisceau de Cox est alors $\mathbb{Z}$-gradué et engendré en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-algèbre par $d+1$ sections globales de degré 1. On trouve facilement

$$\operatorname{Spec}_X \mathcal{R} = \mathbb{A}^{d+1}_k \setminus \{0\}, \text{ et } \operatorname{Spec} \mathcal{R}(X) = \mathbb{A}^{d+1}_k$$

La $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathcal{R}$ se traduit par l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^{d+1}_k \setminus \{0\}$ par homothéties. Notons que $\operatorname{Spec}_X \mathcal{R}$ peut dans cet exemple être vu comme un fibré en droites sur $\mathbb{P}^d_k$, munit de l'action naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur les fibres. Ce point de vue permet, en première approximation, de se donner une manière géométrique de penser les faisceaux et anneaux de Cox.

Enfin mentionnons qu'au delà d'un invariant riche d'information algébro-géométrique, la théorie des anneaux de Cox a des applications importantes en arithmétique, notamment concernant la distribution des points rationnels sur une variété.

Remerciements

Je souhaite remercier Michel BRION pour le sujet passionnant qu'il m'a proposé, sa disponibilité, ainsi que pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Conventions

- Sauf mention explicite du contraire, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les résultats où l'hypothèse sur la caractéristique est nécessaire seront clairement balisés.
- Un anneau désigne un anneau commutatif unitaire.
- Un groupe algébrique désigne un groupe algébrique affine.
- Une variété est un k-schéma réduit séparé de type fini sur k.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Algèbre commutative

On collecte dans cette partie des définitions et résultats d'algèbre commutative utilisés dans la suite. Notre principale référence est [6]. Soit A un anneau, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et $f \in A$ un élément. On note $A_{\mathfrak{p}}$ la localisation de A en la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$, et A_f la localisation de A en la partie multiplicative $\{1, f, f^2, ...\}$.

1.1.1 Décomposition primaire des modules noetheriens

On fixe dans cette partie un A-module non-nul M de type fini avec A noetherien. On pense par exemple à $A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A. Voir [6, Chap. 6] pour les preuves et plus de résultats.

Définition 1.1.1.1 (Idéal premier associé)**.** Un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier associé à M si c'est l'annulateur $\mathrm{Ann}(m)$ d'un élément $m \in M$. Si M est de la forme $A/\mathfrak{a}$, on parle d'idéal premier associé à $\mathfrak{a}$. On note $\mathrm{Ass}_A M$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M. Les éléments minimaux de $\mathrm{Ass}_A M$ sont appelés premiers isolés, les autres sont appelés premiers immergés.

Exemple 1.1.1.2. $A = k[x, y], M = A/(xy), \mathfrak{p} = (x) = \mathrm{Ann}(\bar{y}) = ((xy) : y)$.

Définition 1.1.1.3 (Élément M-régulier)**.** Un élément $x \in A$ est M-régulier si la multiplication par x est un endomorphisme injectif de M, c'est-à-dire que x n'est pas diviseur de zéro d'un élément de M. Si x n'est pas régulier on dit que c'est un diviseur de zéro de M.

Définition 1.1.1.4 (Support d'un module)**.** Le support de M est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que $M_{\mathfrak{p}} \neq \{0\}$.

Proposition 1.1.1.5.
1. *$\mathrm{Ass}_A M$ est non-vide et fini.*
2. *$\mathrm{Ass}_A M \subset \mathrm{Supp}\, M$ et leurs éléments minimaux coïncident.*
3. *L'union des idéaux premiers associés à M est l'ensemble des diviseurs de zéro de M.*

Proposition 1.1.1.6. *Soient $\mathfrak{a}_1, ...\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}$ des idéaux d'un anneau B, avec $\mathfrak{b} \subset \cup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{a}_i$. Si au plus deux des $\mathfrak{a}_i$ ne sont pas premiers, alors $\mathfrak{b}$ est contenu dans au moins un idéal $\mathfrak{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Corollaire 1.1.1.7. *Tout idéal constitué de diviseurs de zéros de M annule au moins un élément de M.*

Définition 1.1.1.8 (Sous-module primaire)**.** Un sous-module $N \subset M$ est dit primaire si $\mathrm{Ass}_A(M/N)$ est réduit à un seul idéal premier $\mathfrak{p}$. On dit alors qu'il est $\mathfrak{p}$-primaire.

Proposition 1.1.1.9. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$N \subset M$ est $\mathfrak{p}$-primaire.*

2. $\mathfrak{p}$ *est minimal sur* $\mathrm{Ann}(M/N)$ *et tout élément en dehors de* $\mathfrak{p}$ *est* M/N*-régulier.*
3. *Une puissance de* $\mathfrak{p}$ *annule* M/N *et tout élément en dehors de* $\mathfrak{p}$ *est* M/N*-régulier.*

Remarque 1.1.1.10. Ainsi pour un sous-module $\mathfrak{p}$-primaire N de M, on a $\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}$. Or on a aussi $\mathrm{Ann}(M/N) \subset \mathfrak{p}$. D'où $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}$. On a ainsi pour tout $a \in A$

$$a \text{ est diviseur de zéro de } M/N \implies a \in \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}$$

Réciproquement, si cette assertion est vérifiée pour un sous-module N, alors $\sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}$ est l'ensemble des diviseurs de zéro de M/N, et on a $\mathrm{Ass}_A(M/N) = \{\mathfrak{p} := \sqrt{\mathrm{Ann}(M/N)}\}$, ce qui montre que N est $\mathfrak{p}$-primaire. Avec $M = A$ et $N = \mathfrak{a}$ un idéal de A on retrouve la définition plus classique

$$\mathfrak{a} \text{ est } \mathfrak{p}\text{-primaire} \iff (x \in A,\, y \in A \setminus \mathfrak{a},\, xy \in \mathfrak{a} \implies x \in \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p})$$

Un sous-module N est dit irréductible si on ne peut pas l'écrire comme une intersection de sous-modules qui le contiennent strictement. Une décomposition irréductible de N est une écriture $N = N_1 \cap ... \cap N_r$ avec N_i irréductible pour tout i. Cette écriture n'est pas unique en général, même si elle est réduite, c'est-à-dire qu'on ne peut ôter aucun facteur.

Théorème 1.1.1.11.
1. *Un sous-module irréductible est primaire.*
2. *Tout sous-module admet une décomposition irréductible.*
3. *Soit* N *un sous-module de* M*, et* $N = N_1 \cap ... \cap N_r$ *une décomposition irréductible réduite. Alors* $\{N_1, ..., N_r\} \to \mathrm{Ass}\, M/N, N_i \mapsto \mathrm{Ass}(M/N_i)$ *définit une application surjective.*
4. *Dans l'assertion précédente, si la décomposition est minimale en nombre de termes, l'application est une bijection.*

1.1.2 Extensions entières d'anneaux

Soit $f : A \to B$ une extension d'anneau. Un élément $b \in B$ est dit *entier* sur A si il existe un polynôme unitaire P de $A[x]$ tel que $P^f(b) = 0$, où P^f désigne l'image de P par l'application canonique $f : A[x] \to B[x]$. L'extension $f : A \to B$ est dite *entière* si B est constitué d'éléments entiers sur A.

Proposition 1.1.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*
1. $b \in B$ *est entier sur* A*.*
2. $A[b]$ *est un* A*-module de type fini.*
3. *Il existe un* $A[b]$*-module* M *qui est fidèle et de type fini en tant que* A*-module.*

Démonstration. [8, 5.1] □

Ainsi, l'ensemble des éléments de B entiers sur A forme un sous-anneau de B, c'est la *clôture intégrale* de A dans B, notée $\overline{A_B}$. Si $\overline{A_B} = A$, on dit que A est *intégralement clos* dans B. Dans le cas où A est intègre et $B = \mathrm{Frac}\, A$, on dit tout simplement intégralement clos. Si A n'est pas intègre, remarquons qu'il existe une notion plus générale qu'il est utile de mentionner pour la consistance avec la terminologie de variété normale que nous verrons plus loin. Pour un anneau quelconque A, on dit que A est *normal* si tout localisé de A en un idéal premier est un anneau intégralement clos. On note qu'un anneau intègre est intégralement clos si et seulement si il est normal ([8] 5.13). Notons que nous ne rencontrerons pas dans ce mémoire d'anneaux normaux non-intègres.

Corollaire 1.1.2.2. *Soit* B *une* A*-algèbre de type fini. Alors* B *est entière sur* A *si et seulement si elle est finie.*

Définition 1.1.2.3 (Hauteur d'un idéal premier)**.** La hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, notée $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}$, est la borne supérieure des longueurs de chaînes d'idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq ... \supsetneq \mathfrak{p}_r$$

Théorème 1.1.2.4. *Soit A un anneau intègre noetherien intégralement clos. Alors*

1. *Tous les idéaux premiers associés d'un idéal principal non-nul sont de hauteur 1.*
2. *A est l'intersection des localisés $A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur* 1.

Démonstration. [6, 11.5] □

Théorème 1.1.2.5. *Soit A un anneau noetherien intégralement clos. Alors, A est factoriel si et seulement si tout idéal premier de hauteur* 1 *est principal.*

Démonstration. [6, 20.1] □

Théorème 1.1.2.6 (Critère de Serre pour la normalité)**.** *Soit A un anneau noetherien intègre. Alors A est intégralement clos si et seulement si il satisfait les deux conditions suivantes*

1. *Pour tout idéal premier de hauteur $\leqslant 1$, l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier.*
2. *Les idéaux premiers associés d'un idéal principal non-nul sont de hauteur* 1.

Démonstration. [6, 23.8] □

Proposition 1.1.2.7. *Soit $k[x_1, ..., x_n]$ un anneau de polynômes, et $f \in A$ un élément premier. Alors $A = k[x_1, ..., x_n]/(f)$ satisfait la condition* 2 *du théorème précédent.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un premier associé de $A/(f)$, on veut montrer qu'il est de hauteur 1. En remplaçant A par sa localisation en $\mathfrak{p}$, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Par définition, il existe $g \in A \setminus (f)$ tel que $\mathfrak{p} = \{x \in A \mid gx = 0 \bmod (f)\}$. Soit $y := g/f \in \mathrm{Frac}(A)$. Si $y\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, c'est-à-dire ($x \in A$ et $gx = 0 \bmod (f)) \implies g(x/f) = 0 \bmod (f)$, ou encore $g(x/f^n) = 0 \bmod (f)$ pour tout $n > 0$. On en déduit $g \in (f)$, c'est une contradiction. Ainsi $y\mathfrak{p} = A$, ou encore $\mathfrak{p} = (f/g)$. Par le théorème de l'idéal principal de Krull (voir 1.3.1.2) on en déduit $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$. □

Proposition 1.1.2.8 (Car. zéro)**.** *Soit A et B deux k-algèbres intégralement closes. Alors $A \otimes_k B$ est intégralement clos.*

1.1.3 Lemme de normalisation de Noether et applications

Théorème 1.1.3.1 (Lemme de normalisation de Noether)**.** *Soit A une algèbre de type fini sur un corps quelconque k. Alors il existe des éléments $a_1, ..., a_n \in A$ tels que A soit une extension finie de $k[a_1, ..., a_n]$.*

Démonstration. [3, I.1] □

Théorème 1.1.3.2. *Soit A une algèbre de type fini intègre sur un corps k quelconque, $K = \mathrm{Frac}\, A$ son corps des fractions, et $K \to L$ une extension finie de K. Alors la clôture intégrale $\overline{A_L}$ de A dans L est une extension finie de A, et une k-algèbre de type fini.*

Démonstration. [1, 4.14] □

Théorème 1.1.3.3 (Nullstellensatz)**.** *Soit k un corps algébriquement clos, et $A = k[x_1, ..., x_n]$ une algèbre de polynômes. Alors les idéaux maximaux de A sont les $\mathfrak{m}_\alpha = (x_1 - \alpha_1, ..., x_n - \alpha_n)$ avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in k^n$.*

Démonstration. [6, 5.3] □

Définition 1.1.3.4 (Dimension de Krull)**.** La dimension de Krull d'un anneau A, notée $\dim A$, est la borne supérieure des longueurs de chaînes d'idéaux premiers

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq ... \supsetneq \mathfrak{p}_r$$

Théorème 1.1.3.5. *Soit A une algèbre de type fini intègre sur un corps k quelconque, $K = \mathrm{Frac}\, A$ son corps des fractions. Alors $\dim A = \mathrm{trdeg}_k\, A$.*

Démonstration. [6, 5.6] □

1.1.4 Anneaux locaux

Définition 1.1.4.1 (Anneau local régulier)**.** Un anneau local noethérien A de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$ est régulier si $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Proposition 1.1.4.2. *Soit A un anneau local noetherien. Alors*

$$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim A$$

Démonstration. [6, 5.14] □

Théorème 1.1.4.3. *Soit A un anneau local régulier, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Alors $A_{\mathfrak{p}}$ est encore régulier.*

Démonstration. [6, 19.3] □

Théorème 1.1.4.4. *Un anneau local régulier est factoriel.*

Démonstration. [6, 20.3] □

Définition 1.1.4.5 (Valuation discrète sur un corps)**.** Soit K un corps. Une valuation discrète sur K est une application surjective $v : K^* \to \mathbb{Z}$ telle que

1. v est un morphisme de groupes.
2. Pour tous $x, y \in K^*$, on a $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$.

L'ensemble constitué de 0 et des éléments $x \in K^*$ tels que $v(x) \geqslant 0$ est un anneau, on dit que c'est *l'anneau de valuation* associé à v.

Définition 1.1.4.6 (Anneau de valuation discrète)**.** Un anneau intègre A est un *anneau de valuation discrète* si il existe une valuation discrète de son corps des fractions telle que A soit l'anneau de valuation associé.

Proposition 1.1.4.7. *Soit A un anneau intègre local noetherien de dimension 1. Soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est un anneau de valuation discrète.*
2. *A est intégralement clos.*
3. *$\mathfrak{m}$ est principal.*
4. *A est régulier.*
5. *Tout idéal non-nul est une puissance de $\mathfrak{m}$.*

En particulier, un générateur de l'idéal maximal d'un anneau de valuation discrète est appelé une uniformisante.

Démonstration. [8, 9.2] □

Définition 1.1.4.8 (Idéal fractionnaire)**.** Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. Un idéal fractionnaire est un sous A-module de K tel qu'il existe $x \in A$ non-nul vérifiant $xM \subset A$.

Définition 1.1.4.9 (Idéal inversible)**.** Un sous A-module M de K est inversible si il existe un sous A-module N de K tel que $MN = A$.

Un sous A-module inversible M de K est nécessairement de type fini, donc fractionnaire. De plus, on a $M^{-1} = (A : M) = \{x \in K \mid xM \subset A\}$. Si A est noetherien, les idéaux fractionnaires sont exactement les sous A-modules de type fini de K.

Soit A un anneau intègre, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 tel que $A_{\mathfrak{p}}$ soit un anneau de valuation discrète. L'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est principal, engendré par une uniformisante π. Tout idéal fractionnaire non-nul de $A_{\mathfrak{p}}$ est inversible, et cette condition est même suffisante pour que $A_{\mathfrak{p}}$ soit un anneau de valuation discrète (voir [8] 9.7). Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on a en tant que $A_{\mathfrak{p}}$-modules

$$(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^k = (\pi)^k = \{x \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant k\},$$

et tout idéal fractionnaire de $A_{\mathfrak{p}}$ est de cette forme.

Théorème 1.1.4.10. *Soit A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathfrak{a}$ est inversible*
2. *$\mathfrak{a}$ est un A-module projectif*
3. *$\mathfrak{a}$ est de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'idéal fractionnaire $I_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ est principal.*

Démonstration. [6, 11.3] □

1.1.5 Algèbres graduées

On fixe dans cette partie un anneau R et un monoïde abélien K. A partir de K on peut construire le groupe des différences $K^{\pm}$ comme l'ensemble des paires $(w_1, w_2) \in K^2$ modulo la relation d'équivalence $(w_1, w_2) \sim (z_1, z_2) \iff w_1 + z_2 = w_2 + z_1$.

Définition 1.1.5.1 (Algèbre graduée, élément homogène)**.** Une R-algèbre A est K-graduée si on a une décomposition en somme directe de sous R-modules

$$A = \bigoplus_{w \in K} A_w, \text{ où pour tout } w, w' \in K, \text{ on a } A_w A_{w'} \subset A_{w+w'}$$

Un élément $f \in A$ est K-homogène de degré w si $f \in A_w$.

Un morphisme d'une algèbre K-graduée A vers une algèbre K'-graduée A' est une paire $(\psi, \widetilde{\psi})$, où $\psi : A \to A'$ est un morphisme de R-algèbres, $\widetilde{\psi} : K \to K'$ est un morphisme de monoïdes, et

$$\psi(A_w) \subset A'_{\widetilde{\psi}(w)}, \forall w \in K$$

Définition 1.1.5.2 (Module gradué)**.** Soit A une R-algèbre K-graduée, et M un A-module. M est K-gradué si on a une décomposition en somme directe de sous-groupes

$$M = \bigoplus_{w \in K} M_w, \text{ où pour tout } w, w' \in K, \text{ on a } R_w M_{w'} \subset M_{w+w'}$$

Un morphisme $\psi : M \to M'$ de A-modules gradués est un morphisme de A-modules tel que l'on ait $\psi(M_w) \subset M'_w$, pour tout $w \in K$.

Exemple 1.1.5.3 (Module gradué décalé)**.** Soit A une R-algèbre K-graduée et M un A-module K-gradué. Soit $w \in K$, on définit le A-module $M(w)$ tel que $M(w)_d = M_{w+d}$, pour tout $d \in K$.

Définition 1.1.5.4 (Idéal homogène)**.** Soit A une R-algèbre K-graduée. Un idéal $\mathfrak{a}$ de A est homogène si c'est un sous-module K-gradué de A.

Proposition 1.1.5.5. *Un idéal $\mathfrak{a}$ de A est homogène si et seulement si il est engendré par des éléments homogènes.*

Remarque 1.1.5.6. Soit A une R-algèbre K-graduée et $\mathfrak{a}$ un idéal homogène. Alors, $A/\mathfrak{a}$ est une R-algèbre K-graduée, et la projection est un morphisme de R-algèbres K-graduées, le morphisme $K \to K$ associé étant l'identité.

Définition 1.1.5.7 (Monoïde des poids)**.** Soit A une R-algèbre K-graduée. Le monoïde des poids de A est le sous-monoïde $S(A) \subset K$ engendré par les éléments $w \in K$ tels que $A_w \neq \{0\}$. Le groupe des poids de A est le sous-groupe $K(A) \subset K^{\pm}$ engendré par $S(A)$.

Remarque 1.1.5.8. Si A est intègre, alors $S(A) = \{w \in K \mid A_w \neq \{0\}\}$. En effet, soit $w \in S(A)$, alors par définition A_w contient un produit fini d'éléments non-nuls, donc un élément non-nul par intégrité de A. Cela prouve $S(A) \subset \{w \in K \mid A_w \neq \{0\}\}$. L'autre inclusion est évidente par définition.

Proposition 1.1.5.9. *Soit A une R-algèbre $\mathbb{Z}^r$-graduée telle que $ff' \neq 0$ pour tous $f, f' \in A$ homogènes non-nuls. Alors*

1. *A est intègre*
2. *Si gg' est homogène pour deux éléments non-nuls $g, g' \in A$, alors g et g' sont homogènes.*
3. *Tout élément inversible est homogène.*

Démonstration. On se donne un ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^r$, et deux éléments $g, g' \in A$. On écrit les décompositions en éléments homogènes $g = \sum f_u$ et $g' = \sum f'_u$. Alors la composante maximale (resp.minimale) de gg' est $f_w f'_{w'} \neq 0$ où f_w et $f'_{w'}$ sont les composantes maximales (resp.minimales) de g (resp. g'). Cela prouve les deux premières assertions. Pour la troisième, on observe que $1 \in A$ est nécessairement homogène de degré zéro. $\square$

1.2 Schémas

Notre principale référence est [5]. On résume dans cette partie certains faits et définitions.

1.2.1 Généralités

Soit A un anneau, on note $X = \operatorname{Spec} A$ l'ensemble de ses idéaux premiers, il est naturellement muni d'une topologie en définissant que les fermés sont les parties de la forme $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) = \operatorname{Supp} A/\mathfrak{a} = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, c'est *la topologie de Zariski*. On munit X d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$, dit *faisceau structural*, constitué pour tout ouvert $U \subset X$ des sections $s : U \mapsto \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p}$ telles que $s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}$, et pour tout $\mathfrak{p} \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de $\mathfrak{p}$ et des éléments $a, f \in A$ tels que pour tout $\mathfrak{q} \in V$, on ait $f \notin \mathfrak{q}$ et $s(\mathfrak{q}) = a/f \in A_\mathfrak{q}$. Les sections s sur un ouvert U sont appelées les *fonctions régulières* sur U. On peut définir le même faisceau structural d'une manière différente en remarquant que X possède une base d'ouverts, dits *principaux*, de la forme $X_f := X \setminus \mathcal{V}_X((f))$ avec $f \in A$. En effet, si $X_f \subset X_g$, alors on a une application canonique $A_g \to A_f$. On pose alors $\mathcal{O}(X_f) = A_f$ et on vérifie grâce aux propriétés $(A_f)_g \simeq A_{fg}$ et $X_{fg} = X_f \cap X_g$ que cela définit bien un "faisceau" sur cette base d'ouverts. qui se prolonge donc de manière unique en un faisceau sur X. En particulier on obtient immédiatement $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, et sans difficulté $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \simeq A_\mathfrak{p}$.

Définition 1.2.1.1 (Espace annelé)**.** Un espace annelé est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ tel que les tiges $\mathcal{O}_{X,x}$ soient des anneaux locaux en tout point $x \in X$.

Un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ et un morphisme $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ tel que les morphismes induits entre les tiges soient locaux, c'est-à-dire $f_x^{\sharp -1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.1.2 (Schéma affine, schéma)**.** Un schéma affine est un espace annelé isomorphe au spectre d'un anneau muni de son faisceau structural. Un schéma est espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathcal{O}_U)$ soit un schéma affine. Un morphisme de schémas est un morphisme d'espaces annelés.

Tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ définit un morphisme de schémas affines $(f, f^\sharp) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. En effet, on pose $f(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Puis, pour tout ouvert $V \subset \operatorname{Spec} A$, $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(V)$, et $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$, on pose $(f^\sharp(V)(s))(\mathfrak{p}) := \varphi_\mathfrak{p} \circ s \circ f(\mathfrak{p})$, où $\varphi_\mathfrak{p} : A_{f(\mathfrak{p})} \to B_\mathfrak{p}$ est la localisation de φ. Réciproquement, tout morphisme entre schémas affines $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ définit un morphisme d'anneaux $f^\sharp(\operatorname{Spec} A) : A \to B$. Ces deux procédés sont inverses l'un de l'autre et on obtient :

Proposition 1.2.1.3. *Les foncteurs* Spec *et* $\Gamma(.)$ *définissent une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des schémas affines et la catégorie des anneaux (commutatifs).*

Soit X un schéma, on peut étendre l'opération $\mathcal{V}_X(.)$ définie plus haut pour les schémas affines. On considère un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$, et on pose $\mathcal{V}_X(\mathcal{I}) = \operatorname{Supp} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. De même, soit $f \in \mathcal{O}(X)$ une fonction régulière sur X, et x un point de X. On dit que f s'annule en x si son germe n'est pas inversible dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $U \simeq \operatorname{Spec} A$ un voisinage affine de x, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier correspondant à x. Alors f s'annule en x revient à dire que $f_{|U} \in \mathfrak{p}$, et on note encore $X_f := X \setminus \mathcal{V}_X(f\mathcal{O}_X)$. On peut alors définir l'idéal des fonctions régulières sur X s'annulant sur une partie Y de X, on le note $\mathcal{I}_X(Y)$, c'est un idéal radical. Si $X \simeq \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine, on a alors pour un idéal $\mathfrak{a}$ et une partie Y de X les formules

$$\mathcal{I}_X(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathfrak{p}, \quad \mathcal{I}_X(\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}, \quad \mathcal{V}_X(\mathcal{I}_X(Y)) = \overline{Y}$$

Remarque 1.2.1.4. On considère une *algèbre affine*, c'est-à-dire une k-algèbre de type fini réduite, et on suppose de plus k algébriquement clos. Alors si l'on remplace "premier" par "maximal" dans les formules ci-dessus relatives aux opérations $\mathcal{V}$ et $\mathcal{I}$, on retombe sur les définitions classiques de ces opérations qui donnent les ensemble algébriques et leurs équations dans un espace affine de dimension finie sur k. En effet, le Nullstellensatz (1.1.3.3) assure dans ce cas que les points de l'ensemble algébrique correspondent aux idéaux maximaux de l'algèbre et que $\mathcal{I}(Y) = \bigcap_{y \in Y} \mathfrak{m}_y$.

Par ailleurs, une fonction régulière s sur un ouvert U d'un schéma X peut être vue comme une fonction à valeurs dans les différents corps résiduels $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ pour chaque $\mathfrak{p} \in U$ en prenant $s(\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Dans le cas d'une variété affine, c'est-à-dire $X \simeq \operatorname{Spec} A$ où A est une k-algèbre affine sur un corps algébriquement clos, tous les corps résiduels sont isomorphes à k. D'après le Nullstellensatz, l'évaluation de $s \in A$ en les points fermés, c'est-à-dire les idéaux maximaux, coïncide avec l'évaluation de s en les points correspondants de l'ensemble algébrique associé à A. Enfin, considérons deux k-algèbres affines A et B sur un corps algébriquement clos, et X, Y les variétés affines correspondantes. Étant donné un morphisme $f : X \to Y$, le morphisme de k-algèbres correspondant s'identifie à $\varphi : A \to B, s \mapsto s \circ f$. En considérant X et Y plongés dans un espace affine et en prenant pour s les différentes coordonnées de Y on retrouve la définition classique des morphismes entre ensembles algébriques, c'est-à-dire telles que sur chaque coordonnées les applications soient polynomiales.

Construction 1.2.1.5 (Recollement de schémas)**.** Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de schémas. Supposons que pour tout $i, j \in I$ on ait des ouverts $X_{ij} \subset X_i$ et des isomorphismes $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ tels que pour tout $i, j, k \in I$ on ait :

1. $X_{ii} = X_i$ et $f_{ii} = id$
2. $f_{ij}^{-1}(X_{ji} \cap X_{jk}) = X_{ij} \cap X_{ik}$
3. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X_{ij} \cap X_{ik} \arrow[rr, "f_{ik}"] \arrow[dr, "f_{ij}"'] & & X_{ki} \cap X_{kj} \\ & X_{ji} \cap X_{jk} \arrow[ur, "f_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

Alors on peut définir un schéma X comme la réunion disjointe des X_i modulo la relation d'équivalence $x \sim x' \iff (x \in X_{ij}, x' \in X_{ji}$ et $f_{ij}(x) = x')$. On note $f_i : X_i \to X$ les applications canoniques, et on munit X de la topologie finale associée aux f_i. On vérifie que chaque f_i est une immersion ouverte dont on note U_i l'image. Le faisceau structural est défini en recollant les $\mathcal{O}_{U_i} := f_{i*}\mathcal{O}_{X_i}$, ses sections sur un ouvert $W \subset X$ étant

$$\mathcal{O}_X(W) = \{(s_i)_{i \in I} \mid s_i \in \mathcal{O}_{U_i}(W \cap U_i), f_{ij}(s_i|_{W \cap U_i \cap U_j}) = s_j|_{W \cap U_i \cap U_j}\}$$

Définition 1.2.1.6 (Schéma relatif)**.** Soit S un schéma. Un S-schéma, ou schéma sur S, est un schéma X muni d'un morphisme $X \to S$ appelé morphisme structural.

Soit S un schéma de base. Les S-schémas forment une sous-catégorie où l'on demande que les morphismes soient compatibles avec les morphismes structuraux. Le produit existe dans cette catégorie, on l'appelle le *produit fibré sur S*. Cette construction se fait par recollement en remarquant que pour des schémas affines X, Y sur un schéma affine S, le produit fibré $X \times_S Y$ est naturellement $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_S(S)} \mathcal{O}_Y(Y))$. En effet, cela vient de 1.2.1.3 et du fait que le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_S(S)$ est le co-produit dans la catégorie des $\mathcal{O}_S(S)$-algèbres. Comme tout anneau est naturellement une $\mathbb{Z}$-algèbre, tout schéma est naturellement un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Le produit de deux schémas est par définition le produit sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

1.2.2 Quelques propriétés des schémas

Schémas réduits, irréductibles, intègres, noetheriens

Définition 1.2.2.1 (Schéma réduit)**.** Un schéma X est réduit si pour tout $x \in X$ les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont réduits.

Proposition 1.2.2.2. *Un schéma X est réduit si et seulement si pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ est réduit.*

Démonstration. Supposons X réduit et $f \in \mathcal{O}(U)$ nilpotent. Si f est non-nul, alors il existe un germe f_x non-nul pour un point $x \in U$. Mais alors $f_x^n = 0$ pour un $n > 0$, et donc $f_x = 0$, contradiction. Réciproquement, soit $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ nilpotent alors f_x est la classe d'une fonction nilpotente $f \in \mathcal{O}(U)$ pour un ouvert $U \subset X$. Cela implique $f_x = 0$. □

Définition 1.2.2.3 (Schéma irréductible)**.** Un schéma est irréductible si l'espace topologique sous-jacent est irréductible, c'est-à-dire qu'il est non vide et n'est pas réunion de deux fermés propres.

Définition 1.2.2.4 (Schéma noetherien)**.** Un schéma X est noetherien si c'est une union finie d'ouverts affines U_i tels que $\mathcal{O}(U_i)$ est un anneau noetherien.

Définition 1.2.2.5 (Schéma quasi-compact)**.** Un schéma X est quasi-compact si l'espace topologique sous-jacent est quasi-compact, c'est-à-dire que tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Proposition 1.2.2.6. *Soit X un schéma noetherien. Alors*

1. *Les tiges de X sont des anneaux noetheriens. Tout sous-schéma ouvert ou fermé de X est noetherien.*
2. *X est quasi-compact et $\mathcal{O}(U)$ est noetherien pour tout ouvert affine $U \subset X$.*

Démonstration. [11, 2.3.46] □

Par le lemme de Zorn, on montre que l'ensemble des fermés irréductibles d'un schéma X admet des éléments maximaux, appelés *composantes irréductibles*. Si X est noetherien, ce nombre est fini. En effet, comme X est quasi-compact, on peut le supposer affine, et le résultat découle de 1.1.1.5 car les composantes irréductibles correspondent aux idéaux premiers associés minimaux du $\mathcal{O}(X)$-module $\mathcal{O}(X)$. Ainsi, X s'écrit de manière unique comme réunion de ses composantes irréductibles. Pour tout point $x \in X$, les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ correspondent bijectivement aux composantes irréductibles de X passant par x.

Proposition 1.2.2.7. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A.*

1. *$\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est premier.*
2. *Soit $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ les premiers minimaux de A. Alors $(\mathcal{V}_X(\mathfrak{p}_i))_{i \in I}$ sont les composantes irréductibles de X.*
3. *X est irréductible si et seulement si A admet un unique idéal premier minimal. Dans ce cas, cet idéal est nécessairement (0), et A est intègre.*

Démonstration. Les points 2 et 3 découlent immédiatement de 1. On donne la preuve de 1 dans le cas où X est noetherien. Dans ce cas, $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{a}$ est irréductible, et dans ce cas, il est primaire, ce qui montre que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est premier. Réciproquement, si $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est premier il est irréductible. Alors $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) = \mathcal{V}_X(\sqrt{\mathfrak{a}})$ est irréductible. □

Définition 1.2.2.8 (Schéma intègre)**.** Un schéma est intègre si il est réduit et irréductible.

Proposition 1.2.2.9. *Un schéma X est intègre si et seulement si $\mathcal{O}(U)$ est intègre pour tout ouvert $U \subset X$ non-vide.*

Démonstration. [5, II.3.1] □

Un point x d'un espace topologique X est dit *générique* si $\overline{\{x\}} = X$. Ainsi, si X admet un point générique, il est irréductible. Pour un schéma X on a en fait une correspondance bijective entre fermés irréductibles de X et points génériques donnée par $x \mapsto \overline{\{x\}}$.

Un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ est intègre si et seulement si A est intègre. Alors le point générique η de X correspond à l'idéal (0), et $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est la localisation $A_{(0)}$, c'est-à-dire le corps des fractions de A. Plus généralement, on définit le *corps des fonctions rationnelles* d'un schéma intègre X comme les fonctions régulières sur un ouvert non-vide de X. Comme tout ouvert non-vide contient le point générique η de X, il s'agit de $\mathcal{O}_{X,\eta}$ qui est bien un corps d'après ce qui précède, on le note $k(X)$.

Proposition 1.2.2.10. *Soit X un schéma intègre et $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles.*

1. *Pour tous ouverts $U \subset V \subset X$ non-vides, les applications suivantes sont injectives*

$$\mathcal{O}(V) \xhookrightarrow{res_{V,U}} \mathcal{O}(U) \xhookrightarrow{f \mapsto f_\eta} k(X)$$

2. *Pour tout ouvert non-vide $U \subset X$ et tout recouvrement $U = \cup_i U_i$, on a dans $k(X)$:*

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_i \mathcal{O}(U_i) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

Démonstration. [14, 3.29] □

1.2.3 Quelques propriétés des morphismes de schémas

Immersion ouverte, immersion fermée

Définition 1.2.3.1 (Immersion ouverte, immersion fermée)**.** Un morphisme de schémas $(f, f^\sharp) : X \to Y$ est une immersion ouverte (resp. fermée) si f est une immersion ouverte topologique (resp. immersion fermée topologique), et si $f^\sharp_x : \mathcal{O}_{X,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme (resp. morphisme surjectif) pour tout $x \in X$.

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et $g \in A$. Considérons l'ouvert principal X_g et notons i l'inclusion. Vu la construction du faisceau structural $\mathcal{O}_X$, on voit que $(X_g, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ est naturellement un schéma isomorphe à $\operatorname{Spec} A_g$. Grâce à cette observation, on voit que tout ouvert U d'un schéma X est naturellement muni d'une structure de schéma en prenant la restriction du faisceau structural, c'est la notion de *sous-schéma ouvert*. De plus, toute immersion ouverte $X \to Y$ se factorise à travers un sous-schéma ouvert.

Définition 1.2.3.2 (Schéma quasi-affine)**.** Un schéma X est quasi-affine si il est quasi-compact et il admet une immersion ouverte dans un schéma affine.

Définition 1.2.3.3 (Morphisme quasi-compact)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est quasi-compact si l'image réciproque de tout ouvert affine de Y est quasi-compact.

Proposition 1.2.3.4. *Un schéma X est quasi-affine si et seulement si le morphisme canonique $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ est une immersion ouverte quasi-compacte.*

Démonstration. [12, Lemma 01P9] □

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors la projection $A \to A/\mathfrak{a}$ définit une immersion fermée $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to X$ d'image $\mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$. On a un isomorphisme canonique $(\mathcal{V}_X(\mathfrak{a}), i^{-1}(\mathcal{O}_X/\operatorname{Ker} i^\sharp)) \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$, où $i : \mathcal{V}_X(\mathfrak{a}) \to X$ est l'inclusion. Réciproquement, pour tout immersion fermée $j : Z \to X$, il existe un unique idéal $\mathfrak{a}$ tel que j se factorise via un isomorphisme $Z \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ et l'immersion fermée $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to X$. Un *sous-schéma fermé* d'un schéma X est un fermé Z de X muni d'une structure de schéma et d'une immersion fermée $Z \to X$.

Morphismes de type fini

Définition 1.2.3.5 (Morphisme de type fini)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est de type fini si il est quasi-compact et pour tout ouvert affine $V \subset Y$, et tout ouvert affine $U \subset f^{-1}(V)$, le morphisme canonique $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ fait de $\mathcal{O}_X(U)$ une $\mathcal{O}_Y(V)$-algèbre de type fini. Un S-schéma est dit de type fini si son morphisme structural est de type fini.

Remarque 1.2.3.6. Pour qu'un morphisme soit de type fini il suffit qu'il existe un recouvrement par des ouverts affines qui satisfont la condition de la définition.

Morphismes affines

Définition 1.2.3.7 (Morphisme affine)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est affine si pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est affine.

Exemple 1.2.3.8. Un morphisme de schémas affines $\varphi : X \to Y$ est affine. En effet, soit V un ouvert affine de Y et $U = \varphi^{-1}(V)$. En considérant le diagramme commutatif ci-dessous on constate que l'on a $U \simeq (\varphi \times i_2)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\} \subset X \times V$. Comme $X \times V$ est affine, U aussi.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Morphismes finis, normalité

Définition 1.2.3.9 (Morphisme fini)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est fini si il est affine et pour tout ouvert affine V de Y, la $\mathcal{O}_Y(V)$-algèbre $(\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)), f^\sharp(V))$ est finie.

Remarque 1.2.3.10. Pour qu'un morphisme soit fini il suffit qu'il existe un recouvrement par des ouverts affines qui satisfont la condition de la définition.

Définition 1.2.3.11 (Schéma normal)**.** Un point d'un schéma est dit normal si l'anneau local en ce point est intégralement clos. Un schéma est dit normal si il est normal en chacun de ses points.

Proposition 1.2.3.12. *Un schéma intègre X est normal si et seulement si pour tout ouvert affine $U \subset X$ non-vide, $\mathcal{O}(U)$ est intégralement clos.*

Démonstration. [11, 4.1.5] □

Soit X un schéma intègre, et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement affine de X. Pour chaque $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ on pose $\widetilde{U_i} = \operatorname{Spec} \widetilde{A}_i$ où $\widetilde{A}_i$ est la clôture intégrale de A_i, c'est naturellement un schéma intègre sur U_i. De plus, comme la clôture intégrale commute à la localisation, on a des isomorphismes naturels $\widetilde{U_i \cap U_j} \simeq \widetilde{U_i} \cap \widetilde{U_j}$. On construit alors par recollement un schéma intègre et normal $\widetilde{X}$ sur X qui satisfait de plus la propriété universelle que tout morphisme dominant d'un schéma intègre Z vers X se factorise de manière unique à travers $\widetilde{X}$. On dit que $\widetilde{X}$ est la *normalisation* de X. De plus, si X est de type fini sur un corps k, alors d'après 1.1.3.2, le morphisme structural de $\widetilde{X}$ est fini.

Morphismes séparés

Définition 1.2.3.13 (Morphisme séparé, schéma séparé)**.** Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times_Y X$ est l'unique morphisme $X \to X \times_Y X$ tel que la composition avec les projections $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ est l'identité de X. On dit que f est séparé si le morphisme diagonal est une immersion fermée. Un S-schéma est séparé si son morphisme structural est séparé. En particulier un schéma est séparé si il est séparé sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Les morphismes entre schémas affines sont séparés et en particulier les schémas affines sont séparés. En effet, considérons $X = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} B$, le morphisme diagonal est donné par $\rho : B \otimes_A B \to B, x \otimes 1 \mapsto x, 1 \otimes y \mapsto y$ qui est clairement surjectif, c'est donc une immersion fermée. Le critère suivant est utile et nous dit de plus que les intersections d'affines sont affines dans les schémas séparés.

Proposition 1.2.3.14. *Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas.*

1. *Si f est séparé, alors pour toute paire (U, V) d'ouverts affines de X dont les images sont contenues dans un même ouvert affine de S, l'ouvert $U \cap V$ est affine, et le morphisme naturel $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U \cap V), f \otimes g \mapsto f_{U\cap V} g_{U \cap V}$ est surjectif.*
2. *On suppose pour toute paire (x_1, x_2) de points de X au-dessus d'un même point $s \in S$, on a des ouverts affines $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$ dont l'image est contenue dans un même ouvert affine de S, et qui vérifient : l'ouvert $U \cap V$ est affine, et le morphisme naturel $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U \cap V), f \otimes g \mapsto f_{U\cap V} g_{U\cap V}$ est surjectif. Alors f est séparé.*

Démonstration. [12, Lemma 01KP] □

Proposition 1.2.3.15. *Les deux assertions ci-dessous s'appliquent à des morphismes entre schémas noetheriens.*

1. *Le morphisme composé de deux morphismes séparés est séparé.*
2. *Les immersions ouvertes ou fermées sont séparées.*

Démonstration. [5, II.4.6] □

1.3 Variétés algébriques

Dans ce mémoire, on travaille principalement dans la sous-catégorie des k-schémas réduits séparés de type fini sur k, où k est un corps algébriquement clos fixé. Ces objets sont appelés des *k-variétés algèbriques*, ou tout simplement *variétés*. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des variétés au sens de [13] en ne considérant que les points fermés. D'ailleurs, par un point d'une variété X, on entendra point fermé, sauf mention du contraire. Soit X_0 le sous espace des points fermés de X muni de la topologie induite. Alors les treillis des ouverts des topologies de X et X_0 sont isomorphes. On bénéficie ainsi des résultats sur les morphismes et la dimension démontrés par exemple dans [13] ou [3] chap I.

Un schéma de type fini sur un corps est noetherien, on en déduit que tout fermé se décompose de manière unique en une union finie de composantes irréductibles. De plus, toute partie localement fermée d'une variété admet une unique structure de variété. Enfin, le produit sur k préserve l'irréductibilité.

1.3.1 Dimension des variétés algébriques

Généralités

Définition 1.3.1.1 (Dimension d'une variété)**.** Soit X une variété. La dimension de X est la borne supérieure des longueurs de chaînes de parties fermées irréductibles

$$\emptyset \subsetneq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_r$$

Soit $F \subset X$ un fermé irréductible. La codimension de F dans X, notée $\operatorname{codim}_X F$ est la borne supérieure des longueurs de chaînes de parties fermées irréductibles

$$F \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_r$$

Soit X une variété, et $X = \cup_{i=1}^r X_i$ sa décomposition en composantes irréductibles. Alors $\dim X = \sup_i \dim X_i$. De plus, si X est irréductible (i.e $r = 1$), alors pour tout ouvert $U \subset X$ non-vide, on a $\dim X = \dim U$, et pour tout fermé propre $F \subset X$, on a $\dim F < \dim X$. On se ramène ainsi à l'étude de la dimension des variétés affines. On suppose donc $X = \operatorname{Spec} A$ affine. Par la correspondance entre fermés irréductibles de X et idéaux premier de A on obtient $\dim X = \dim A$, où $\dim A$ est la dimension de Krull de A. En particulier, comme A est une k-algèbre de type fini intègre, on a d'après 1.1.3.5 le résultat fondamental

$$\dim X = \dim A = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Frac} A$$

Cela assure en particulier que la dimension d'une variété est finie. Par ailleurs, la hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A correspond à la codimension de la sous-variété F qu'il définit. Pour une k-algèbre de type fini intègre, on a $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$. On en déduit

$$\dim X = \dim F + \operatorname{codim}_X F, \qquad \text{et } \dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}, \text{ pour tout } x \in X \text{ (fermé)}$$

Théorème 1.3.1.2. *Soit X une variété irréductible, $U \subset X$ un ouvert non-vide et $f \in \mathcal{O}_X(U)$ non nul et non-inversible. Soit Z une composante irréductible de $\mathcal{V}_U((f))$. Alors $\dim Z = \dim(X) - 1$.*

Démonstration. Voir [3, I.7 Th.2], après réduction au cas X affine, la preuve consiste en une réduction au cas facile où $\mathcal{O}(X)$ est factoriel. □

Ce théorème peut aussi être vu comme une version géométrique du théorème de l'idéal principal de Krull qui assure que les idéaux premiers minimaux sur un idéal principal d'un anneau noetherien sont au plus de hauteur 1.

Dimension des fibres d'un morphisme

Théorème 1.3.1.3. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles. Alors il existe un ouvert $U \subset Y$ tel que*

1. *$U \subset f(X)$*
2. *Pour tout fermé irréductible $W \subset Y$ tel que $W \cap U \neq \emptyset$, et pour toute composante irréductible Z de $f^{-1}(W)$ telle que $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, on a $\dim Z = \dim W + r$, où $r := \dim X - \dim Y$*

En particulier, pour tout $Y \in U$, on a $\dim f^{-1}(y) = r$.

Démonstration. (Voir [3, I.8.3]) Après réduction au cas où X et Y sont affines. On utilise le lemme clé 1.1.3.1 pour obtenir une factorisation de f de la forme

$$X_g \xrightarrow{\pi \text{ fini et surjectif}} U \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{p_U} U := Y_g$$

□

On s'intéresse maintenant aux morphismes dont les fibres sont des ensembles finis. Cette étude s'achève avec un résultat important pour la suite, donnant un critère pour qu'un morphisme bijectif en caractéristique zéro soit un isomorphisme.

Définition 1.3.1.4 (Morphisme quasi-fini)**.** Un morphisme de variétés $f : X \to Y$ est quasi-fini si les fibres de f sont finies.

Exemple 1.3.1.5. Un morphisme fini de variété algébriques est quasi-fini.

Théorème 1.3.1.6 (Théorème principal de Zariski)**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel quasi-fini de variétés irréductibles. On suppose de plus que Y est normale. Alors f est une immersion ouverte.*

Démonstration. [11, 4.4.6] □

Proposition 1.3.1.7 (Car. zéro)**.** *Soient X, Y deux variétés algébriques affines irréductibles de même dimension et $f : X \mapsto Y$ un morphisme dominant. Alors il existe $g \in \mathcal{O}(Y)$ non nul tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit fini, surjectif avec des fibres de même cardinal.*

Démonstration. Par hypothèse, l'extension $k(Y) \xrightarrow{f^*} k(X)$ est algébrique finie, disons de degré n. En caractéristique zéro on peut trouver $u \in k(X)$ tel que $k(X) = k(Y)[u]$. On remarque que l'on peut imposer $u \in \mathcal{O}(X)$. On considère $P := P_{min}(u, k(Y)) = t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_0$. En réduisant au même dénominateur on a $P \in \mathcal{O}(Y)_v[t]$ pour un $v \in \mathcal{O}(Y)$. De plus, en prenant l'intersection avec d'autres ouverts principaux on peut supposer $\mathcal{O}(X)_v$ entier sur $\mathcal{O}(Y)_v$, et $\mathcal{O}(Y)_v[u]$ intégralement clos, ce qui donne $\mathcal{O}(Y)_v[u] = \mathcal{O}(X)_v$ et $\mathcal{O}(X)_v$ entier sur $\mathcal{O}(Y)_v$. Ainsi $f : X_v \to Y_v$ est fini et donc surjectif car dominant.

On a donc une factorisation de $f^\sharp(Y_v) : \mathcal{O}(Y)_v \xrightarrow{p_1^\sharp} \mathcal{O}(Y)_v[t] \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}(Y)_v[t]/(P) \xrightarrow{\overline{ev_u}} \mathcal{O}(Y)_v[u]$ qui donne $f : X_v \xrightarrow{\simeq} \{(y,t) \in Y_v \times \mathbb{A}^1 \mid P(y)(t) = 0\} \hookrightarrow Y_v \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p_1} Y_v$. Ainsi, pour $y \in Y_v$ donné, le cardinal de la fibre $f^{-1}(y)$ est le cardinal de l'ensemble des zéros du polynôme $P(y)(t)$. On peut s'assurer que cet ensemble est de cardinal constant en intersectant à nouveau avec l'ouvert principal du discriminant de P qui est un polynôme en les coefficients de P. □

Corollaire 1.3.1.8 (Car. zéro)**.** *Avec les hypothèses de 1.3.1.7, si de plus f est injectif, alors il existe $g \in \mathcal{O}(Y)$ non-nulle tel que le morphisme induit $f : X_g \mapsto Y_g$ soit un isomorphisme.*

Théorème 1.3.1.9 (Car. zéro)**.** *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme bijectif de variétés irréductibles avec Y normale. Alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après 1.3.1.3 on peut appliquer 1.3.1.8 et on obtient ainsi que f est birationnel. Ensuite, 1.3.1.6 nous dit que f est une immersion ouverte. Mais f est surjective par hypothèse, c'est donc un isomorphisme. □

Remarque 1.3.1.10. L'hypothèse sur la caractéristique est essentielle. En effet, considérons un corps de base k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Le morphisme de Frobenius $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{A}^1$ est bijectif entre deux variétés irréductibles et normales, mais ce n'est pas un isomorphisme. En effet l'image du comorphisme est $k[x^p]$, il n'est donc pas surjectif.

1.3.2 Variétés lisses

Définition 1.3.2.1 (Variété lisse, point régulier)**.** Soit X une variété. On dit que $x \in X$ est un point régulier si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. On dit que la variété est lisse si chacun de ses points est régulier. Un point est singulier si il n'est pas régulier.

Par définition, un point x d'une variété X irréductible est régulier si *l'espace tangent* $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ en x est de dimension $\dim X$. L'ensemble des point singuliers de X est un fermé propre. Dans le cas d'une variété normale, ce fermé est de codimension $\geqslant 2$ comme on le verra en 1.3.3.2, on dit dans ce cas que la variété est régulière en codimension 1. Cela explique d'ailleurs la nécessité de la condition 1 de 1.1.2.6. Réciproquement, le théorème 1.1.4.4 entraine qu'un point lisse est un point normal. On dispose d'un critère effectif pour déterminer si un point d'une variété est lisse.

Proposition 1.3.2.2. *Soit $X \subset \mathbb{A}_k^n$ une variété affine et $f_1, ...f_t \in k[x_1, ..., x_n]$ des générateurs de $\mathcal{I}_{\mathbb{A}_k^n}(X)$. Un point p de X est régulier si et seulement si le rang de la matrice $((\partial f_i/\partial x_j)(p))_{i,j}$ est $n-r$, où $r := \dim X$.*

Démonstration. [5, I.5.1] □

Définition 1.3.2.3 (Module plat)**.** Soit A un anneau. Un A-module M est plat sur A si le foncteur $\mathcal{M}od(A) \to \mathcal{M}od(A)$, $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact.

Définition 1.3.2.4 (Morphisme plat)**.** Un morphisme $f : X \to Y$ de variétés est plat si pour tout $x \in X$, le $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module $\mathcal{O}_{X,x}$ est plat.

Définition 1.3.2.5 (Morphisme non-ramifié, morphisme/revêtement étale)**.** Un morphisme $f : X \to Y$ est non-ramifié si pour tout $x \in X$, $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)})\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$. Le morphisme est étale si il est plat et non-ramifié. Si f est étale, fini et surjectif, on dit que (X, f) est un revêtement étale de Y.

Proposition 1.3.2.6. *Soit (X, f) un revêtement étale d'une variété Y. Alors X est lisse si et seulement si Y est lisse.*

Démonstration. [5, ex III.10.4] □

1.3.3 Propriétés des variétés normales

Proposition 1.3.3.1. *Une variété normale est union disjointe de ses composantes irréductibles.*

Démonstration. Supposons qu'un point x d'une variété normale se situe à l'intersection de deux composantes irréductibles. Alors l'anneau local en x contient au moins deux premiers minimaux et n'est donc pas intègre. C'est une contradiction. □

Proposition 1.3.3.2. *Le lieu singulier d'une variété normale est un fermé de codimension* $\geqslant 2$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une composante irréductible Y de X_{sing} de codimension 1 dans X, et notons η_Y son point générique. La tige $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$ est un anneau de valuation discrète car il est local noetherien normal et de dimension 1. Soit π une uniformisante de cet anneau, il existe donc un ouvert affine U contenant η_Y tel que $Y' := Y \cap U = \mathcal{V}_U((\pi))$. Maintenant, Y' en tant que sous-variété contient au moins un point non-singulier y. L'anneau local $\mathcal{O}_{Y',y}$ est régulier, c'est-à-dire que l'on a des paramètres locaux $u_1, ..., u_{n-1} \in \mathfrak{m}_{Y',y}$ tels que leur image forment une base du k-espace vectoriel $\mathfrak{m}_{Y',y}/\mathfrak{m}^2_{Y',y}$. Comme $\mathcal{O}_{Y',y} \simeq \mathcal{O}_{U,\eta_Y}/(\pi)$, on voit que $\mathfrak{m}_{U,y}$ est engendré par $(v_1, ..., v_{n-1}, \pi)$, où les éléments v_i sont des antécédents des éléments u_i par la projection dans le quotient $\mathcal{O}_{U,\eta_Y}/(\pi)$. Ainsi $\dim_k \mathfrak{m}_{U,y}/\mathfrak{m}^2_{U,y} \leqslant n$ ce qui prouve que y est un point régulier de X' appartenant à Y, contradiction. □

Proposition 1.3.3.3. *Soit X une variété normale irréductible. Pour toute sous-variété fermée Y de codimension $\geqslant 2$, la restriction $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus Y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On peut traiter le problème localement et supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine. On considère f régulière sur $U := X \setminus Y$. On remarque que tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ de hauteur 1 est un point de U. En effet, dans le cas contraire il contiendrait les idéaux premiers correspondants aux composantes irréductibles de Y, ce qui est impossible car ils sont de hauteur $\geqslant 2$. On en déduit, en tenant compte de l'irréductibilité de X, des injections $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$ dans les tiges qui peuvent être vues comme des inclusions dans le corps des fonctions rationnelles de X. On a ainsi en tenant compte de 1.1.2.4 un morphisme $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \cap_\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} = A = \mathcal{O}(X)$ qui est inverse de la restriction, d'où le résultat. □

Remarque 1.3.3.4. On verra en 3.1.4.13 que la réciproque de la proposition précédente est vraie sans hypothèse de normalité.

Proposition 1.3.3.5. *Soit X une variété affine irréductible. Pour toute variété irréductible Y contenant X comme ouvert, le complémentaire $Y \setminus X$ est de codimension 1 pure.*

Démonstration. On considère l'application de normalisation η_Y. Alors l'application induite $\eta_Y^{-1}(X) \to X$ est l'application de normalisation de X. On en déduit que $\eta_Y^{-1}(X)$ est affine. De plus, comme η_Y est finie, la dimension du complémentaire de X ne change pas en remplaçant Y par sa normalisation et X par sa préimage. On peut donc supposer Y normal.

Quitte à soustraire de Y les composantes irréductibles de codimension 1 de $Y \setminus X$, on peut supposer $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus X) \geqslant 2$. Soit V un ouvert affine de Y. Par irréductibilité de Y, on a $U := X \cap V$ non-vide et $\operatorname{codim}_V(V \setminus U) = \operatorname{codim}_Y(Y \setminus X) \geqslant 2$. Ainsi d'après 1.3.3.3, la restriction $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ est un isomorphisme. Comme U et V sont affines, cela signifie que l'inclusion $U \subset V$ est un isomorphisme, d'où $U = V$ puis $X = Y$. □

Chapitre 2

Groupes algébriques et théorie des invariants

Notre principale référence pour les groupes algébriques est [13]. On rappelle que dans ce mémoire, le terme groupe algébrique désigne un groupe algébrique affine.

2.1 Groupes algébriques

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.1.1 (Groupe algébrique (affine))**.** Un groupe algébrique est une variété affine G munie d'une structure de groupe telle que l'application produit

$$\mu : G \times G \to G$$

et l'inverse

$$\iota : G \to G$$

soient des morphismes de variétés. Les morphismes de groupes algébriques sont les morphisme de groupes qui sont également des morphismes de variétés.

Exemple 2.1.1.2.
1. Tout groupe fini est algébrique
2. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ est l'ouvert principal de $\mathrm{M}_n(k)$ défini par le déterminant. De plus, le produit et l'inverse sont des applications polynomiales en les coordonnées. Pour $n = 1$ on note ce groupe $\mathbb{G}_m := \mathrm{GL}_1(k)$.
3. Tout sous groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$ est un groupe algébrique. Par exemple $\mathrm{SL}_n(k)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. Mentionnons aussi D_n, le sous groupe des matrices diagonales. Il est défini par l'annulation des coefficients hors-diagonale.

Pour un groupe algébrique G, les composantes irréductibles et les composantes connexes coïncident. On note G^o la composante connexe contenant le neutre e_G, on l'appelle la *composante neutre*. C'est un sous-groupe normal et fermé de G, et les autres composantes connexes de G sont les classes à gauche de G^o.

2.1.2 G-variétés, représentations

Définition 2.1.2.1 (G-variété)**.** Soit G un groupe algébrique. Une G-variété est une variété algébrique X sur laquelle G agit algébriquement. C'est-à-dire que l'action de G est définie par un morphisme de variétés $a : G \times X \to X$. Un morphisme de G-variétés est un morphisme qui commute à l'action de G.

Définition 2.1.2.2 (Orbite, stabilisateur)**.** Soit G un groupe algébrique, X une G-variété, et $x \in X$. L'orbite $G.x$ de x est l'image de l'application d'orbite $a_x : G \to X$, $g \mapsto g.x$. Le stabilisateur G_x (ou $\mathrm{Stab}_G(x)$) de x est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g.x = x$.

Le stabilisateur d'un point x de G est un sous-groupe fermé de G. En effet, c'est la fibre de x pour l'application d'orbite a_x. De plus pour tout $g.x$ dans l'image de a_x, la fibre de $g.x$ est $g.G_x$, donc toutes les fibres de a_x sont isomorphes.

Proposition 2.1.2.3. *Soit G un groupe algébrique, X une G-variété et $x \in X$.*

1. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*
2. *Toute composante irréductible de $G.x$ a pour dimension* $\dim G - \dim G.x$*.*
3. *$\overline{G.x} \setminus G.X$ est une union d'orbites de dimension strictement inférieure à* $\dim \overline{G.x}$*.*
4. *$G.x$ est ouvert dans $\overline{G.x}$.*

Démonstration. On suppose d'abord G connexe.

1. D'après 1.3.1.3, $G.x$ contient un ouvert dense U de $\overline{G.x}$. Or, G est réunion de translatés de U.
2. D'après 1.3.1.3, il existe un ouvert dense de $G.x$ tel que toute les fibres de cet ouvert ont pour dimension $\dim G - \dim G.x = \dim G_x$.
3. $\overline{G.x} \setminus G.x$ est un fermé propre de $\overline{G.x}$ donc de dimension inférieure. Par ailleurs, $\overline{G.x}$ est G-stable donc $\overline{G.x} \setminus G.x$ est réunion d'orbites.
4. Enfin si $\dim(G.x)$ est minimal, $\overline{G.x} \setminus G.x$ est vide

Enfin, G n'est pas connexe, on écrit $G = \cup_{i=1}^n g_i G^\circ .x = \cup_{i=1}^n G^\circ g_i .x$ car G^o est normal. D'où $\overline{G.x} = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^\circ .x}$. Les $\overline{g_i G^\circ}$ sont égales ou disjointes, c'est donc la décomposition en composantes irréductibles. On construit un ouvert de $\overline{G.x}$ inclus dans $G.x$ en posant $U = G^\circ .x \setminus \cup_{i=2}^n \overline{g_i G^\circ .x}$. On a $\dim G^o - \dim(G^o)_x = \dim G - \dim G_x$ car $(G_x)^o \subset (G^o)_x \subset G_x$, d'où $\dim G_x = \dim(G^o)_x$. Or chaque composante de $G.x$ est l'adhérence d'un orbite pour G^o, d'où 2) d'après le cas connexe. On a $\overline{G.x} \setminus G.x = \cup_{i=1}^n \overline{g_i G^o .x} \setminus g_i G^o .x = \cup_{i=1}^n g_i (\overline{G^\circ .x} \setminus G^o .x)$ qui est une union finie de fermés de dimension inférieure à $\overline{G.x}$ ce qui prouve 3). On utilise le même argument pour prouver 4) dans le cas général. ☐

Proposition 2.1.2.4. *Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes algébriques. Alors* $\mathrm{Im} f$ *est fermé, et* $\dim G = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$*.*

Démonstration. G agit sur H par $g.h = f(g).h$. Les orbites sont les classes à droite de $f(G)$, et elles sont toutes isomorphes. Comme il existe un orbite fermé, on obtient que $\mathrm{Im} f$ est fermé. Pour $h \neq e_H$, le stabilisateur G_h est $\mathrm{Ker} f$, d'où $\dim f(G) = \dim G - \mathrm{Ker} f$. ☐

Définition 2.1.2.5 (G-module, simple, semi-simple)**.** Une représentation de G, ou G-module (rationnel) est un couple (V, ρ) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de groupes algébriques de G dans $GL(V)$. On étend cette définition au cas où V est de dimension infinie en demandant que V soit réunion de G-modules de dimension finie.

On dit qu'un G-module est simple si il n'admet pas de sous G-module non trivial. On dit qu'un G-module est semi-simple si tout sous G-module admet un G-module supplémentaire.

Proposition 2.1.2.6. *Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. Alors $\mathcal{O}(X)$ est naturellement un G-module. L'action de G est donnée par*

$$(g.f)(x) := f(g^{-1}.x), \text{ pour tout } g \in G,\ f \in \mathcal{O}(X),\ x \in X.$$

Démonstration. L'action est bien linéaire, montrons que $\mathcal{O}(X)$ est réunion de G-modules de dimension finie. Pour tout $g \in G$, $f \in \mathcal{O}(X)$, $x \in X$, on a $a^\sharp(X)(f)(g,x) = f(g.x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i(x)$, d'où $g^{-1}.f = \sum_{i=1}^r \varphi_i(g)\psi_i \in \mathcal{O}(X)$. Ainsi les translaté $g.f$ pour $g \in G$ engendrent un k-espace vectoriel $V(f)$ de dimension finie G-stable, et on a bien $\mathcal{O}(X) = \cup_{f \in \mathcal{O}(X)} V(f)$.

Montrons que l'action est algébrique. Comme les translatés de f engendrent $V(f)$, il suffit de montrer que pour tout $l \in V(f)^*$, $h, g \in G$, on a $g \mapsto l(g.(h.f)) \in \mathcal{O}(G)$. On prolonge l en $l' \in \mathrm{Vect}_k(\psi_1, ..., \psi_r)^*$ et on a $g \mapsto l(g.(h.f)) = \sum_{i=1}^r \varphi_i((gh)^{-1}) l'(\psi_i) \in \mathcal{O}(G)$. ☐

Théorème 2.1.2.7. *Soit G un groupe algébrique et X une G variété affine. Alors X est isomorphe en tant que G-variété à une sous G-variété fermée d'un G-module de dimension finie.*

Démonstration. D'après la proposition précédente on voit que $\mathcal{O}(X) = k[f_1, ..., f_n]$ est engendré comme k-algèbre par un sous G-module V de $\mathcal{O}(X)$ de dimension finie, en prenant par exemple la somme des $V(f_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On introduit le morphisme $\varphi : X \to V^*, x \mapsto ev_x$, c'est une immersion fermée. En effet, il suffit de montrer que V est dans l'image de $\varphi^\sharp$. Or $V^{**} \subset \mathcal{O}(V^*)$, et pour tout $ev_f \in V^{**}$, on a $\varphi^\sharp(ev_f) = ev_f \circ \varphi = f$. Enfin, en munissant V^* de la représentation duale, on a $\varphi(g.x)(f) = ev_{g.x}(f) = ev_x(g^{-1}.f) = (g^{-1})^t(ev_x)(f) = (g.\varphi(x))(f)$, pour tout $g \in G, x \in X, f \in V$. Ainsi φ est un morphisme de G-variétés. $\square$

Corollaire 2.1.2.8. *Tout groupe algébrique (affine) est linéaire.*

Démonstration. On munit G de son action sur lui même par multiplication à gauche. D'après le théorème précédent on peut supposer $G \subset V$, où (V, ρ) est un G-module avec $\rho(g).h = g.h$ pour tout $g, h \in G$. Montrons que ρ est une immersion fermée. On a $\rho^\sharp(k[\mathrm{GL}(V)]) = k[\{g \in G \mapsto l(\rho(g).v) \mid l \in V^*, v \in V\}]$, donc en prenant $v = e_G$, on voit que cette algèbre contient la restriction des fonctions de $\mathcal{O}(V)$ à G. Cela montre que $\rho^\sharp$ est surjectif car G est fermé dans V. $\square$

2.1.3 Groupes quotients

Théorème 2.1.3.1 (Chevalley)**.** *Soit G un groupe algébrique et $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Alors il existe un G-module V de dimension finie et une droite $L \subset V$ telle que $H = Stab_G(L) := \{g \in G \mid g.v \in L, \forall v \in L\}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a} := \mathcal{I}_G(H)$, on a $\mathfrak{a} = \{g \in G \mid g.\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$. En effet, on a les équivalences

$$g.\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \iff Hg = H \iff g \in H$$

L'idéal $\mathfrak{a}$ est de type fini, donc engendré par un sous k-espace vectoriel E de dimension finie H-stable. Alors $H = \{g \in G \mid g.E = E\}$ car si g stabilise E, il stabilise aussi l'idéal engendré par E, c'est-à-dire $\mathfrak{a}$. On choisit maintenant un G-module de dimension finie $F \subset \mathcal{O}(G)$ contenant E. Alors G agit sur les sous-espaces vectoriels de F, et c'est en particulier le stabilisateur de E. Soit $m = \dim_k E$, alors $\wedge^m E$ est une droite de $\wedge^m F$, et ce dernier est naturellement un G-module. Or on a $\mathrm{Stab}_G(E) = \mathrm{Stab}_G(\wedge^m E)$. Une inclusion est facile, pour l'autre on choisit une base $(v_1, ..., v_m)$ de E que l'on complète en une base $(v_1, ..., v_n)$ de F. Alors $(v_1 \wedge ... \wedge v_m)$ est une base de $\wedge^m E$, et on remarque que $E = \{v \in F \mid v \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_m = 0\}$. $\square$

Théorème 2.1.3.2 (Chevalley)**.** *Soit G un groupe algébrique et $H \lhd G$ un sous-groupe normal fermé. Alors il existe un G-module (V, ρ) de dimension finie tel que $H = \mathrm{Ker}\,\rho$.*

Démonstration. Soit V et L comme dans le théorème précédent, alors H agit sur L via un caractère χ_1, et on note $V_{\chi_1} := \{v \in V \mid h.v = \chi_1(h)v, \forall h \in H\}$ le sous-espace propre associé à χ_1. On note $V_{\chi_1}, ..., V_{\chi_n}$ tous les sous-espaces propres de V, ils sont en somme directe et cette somme est G-stable car H est normal. On peut donc supposer $V = \bigoplus_{i=1}^n V_{\chi_i}$, et comme $L \subset V_{\chi_1}$, on a $H = \{g \in G \mid g.V_{\chi_i} = \chi_i(g)V_{\chi_i}\}$. Maintenant, G agit linéairement sur $\mathrm{End}(V)$ par conjugaison, et en particulier G agit sur $\prod_{i=1}^n \mathrm{End}\, V_{\chi_i}$. On peut voir H est le noyau de cette action. $\square$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il prouve l'existence des groupes quotients dans la catégorie des groupes algébriques. Le groupe quotient est alors unique à isomorphisme près, c'est une conséquence formelle de la propriété universelle du quotient.

Théorème 2.1.3.3 (Car. zéro)**.** *Soient $G, H, (V, \rho)$ comme dans le théorème précédent, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes algébriques tel que $H \subset \mathrm{Ker}\, f$.*

Alors il existe une unique factorisation
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"] & G' \\ \rho(G) \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme φ recherché existe en tant que morphisme de groupes abstraits, il est G-équivariant pour les actions naturelles de G sur $\rho(G)$ et G' via ρ et f. Concrètement cela signifie $\forall g_1, g_2 \in G, \varphi(\rho(g_1)\rho(g_2)) = f(g_1)\varphi(\rho(g_2))$. Si G est connexe, d'après le lemme suivant, φ est un morphisme sur un ouvert U non-vide de $\rho(G)$. Or on a un recouvrement de $\rho(G)$ par les ouverts $g.U$ pour $g \in G$. En écrivant pour $x \in g.U, \varphi(x) = f(g)\varphi(g^{-1}.x))$, on constate que φ est un morphisme de groupes algébriques.
Supposons G quelconque mais $H \leqslant G^\circ$. Comme φ est algébrique sur le sous-groupe G°/H d'après ce qui précède, on a φ algébrique partout à nouveau par G-équivariance.
On peut se ramener au cas précédent en procédant en deux étapes. Dans un premier temps, on quotiente par le sous-groupe normal connexe H° (on a bien $H^\circ \leqslant G^\circ$), puis on quotiente par le sous-groupe normal fini H/H°. Il reste donc à prouver le cas H fini, qui sera un corollaire direct du théorème 2.2.2.2. $\square$

Lemme 2.1.3.4 (Car. zéro)**.** *Soit $f : X \mapsto Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles. Soit $g : X \to Z$ constant sur les fibres de f. Alors il existe $h \in \mathcal{O}(Y)^*$ et une factorisation*

$$\begin{tikzcd} X_h \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ Y_h \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On considère $\varphi = (f, g) : X \to Y \times Z$ et le diagramme commutatif ci-contre. Comme f est dominant, π_1 l'est aussi. De plus $\overline{\varphi(X)}$ est irréductible et $\varphi(X)$ contient un ouvert dense de $\overline{\varphi(X)}$. Par ailleurs comme g est constante sur les fibres de f on vérifie que π_1 est injective sur $\varphi(X)$. Par le corollaire 1.3.1.8, π_1 réalise un isomorphisme $\overline{\varphi(X)}_h \xrightarrow{\pi_1} Y_h$ pour un $h \in \mathcal{O}(Y)$ non-nul. Finalement, le morphisme recherché est $Y_h \xrightarrow{\pi_2\pi_1^{-1}} Z$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & \overline{\varphi(X)} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "i=\subset"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Y & Y \times Z \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\square$

2.1.4 Groupes diagonalisables, actions de groupes diagonalisables

Groupes diagonalisables

Soit G un groupe algébrique. Le groupe $X^*(G)$ des *caractères* de G est un sous-groupe de $\mathcal{O}(G)^*$ qui est de type fini comme on le verra dans la partie 3.2.5. On remarque que X^* est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes algébriques dans la catégorie des groupes abéliens de type fini, l'image d'un morphisme $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ étant simplement la (co)-restriction $\varphi^* {}^{|X^*(G_1)}_{|X^*(G_2)}$ du comorphisme φ^* entre les algèbres de coordonnées. On signale qu'en caractéristique $p > 0$, les groupes de caractères ont de plus la propriété d'être sans p-torsion. Tout ce qui suit reste vrai en caractéristique p, avec cette contrainte supplémentaire sur les groupes de caractères.

Exemple 2.1.4.1.
1. $X^*(\mathrm{GL}_n) = \{\det^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. En effet, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_n)^* = \{\lambda \det^k \mid k \in \mathbb{Z}, \lambda \in k^*\}$, puisque $k[X_{ij}]$ est factoriel et det irréductible. En évaluant en I_n, on a nécessairement $\lambda = 1$. Comme $\det^k$ est un caractère, le résultat suit.
2. $X^*(\mathrm{SL}_n) = 1$ car SL_n est égal à son groupe dérivé et on a une correspondance naturelle entre le groupe des caractères d'un groupe et le groupe des caractères de son abélianisé.
3. Les unités de $k[\mathbb{G}_m]$ sont les monômes. On en déduit que les caractères sont exactement les $t \mapsto t^k, k \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on montrera en 3.2.5 que $X^*(G_1 \times G_2) \simeq X^*(G_1) \times X^*(G_2)$ pour tous groupes algébriques connexes G_1 et G_2, d'où $X^*(\mathrm{D}_n) = \{\text{monômes à coefficient unitaire}\} \simeq \mathbb{Z}^n$.

Définition 2.1.4.2 (Groupe diagonalisable, tore)**.** Un groupe diagonalisable est un groupe algébrique isomorphe à un sous groupe fermé de D_n. Un tore est un groupe diagonalisable connexe.

On remarque que les caractères de D_n engendrent $\mathcal{O}(D_n)$ comme k-espace vectoriel, ils en forment donc une k-base par le lemme de Dedekind qui assure que les caractères sont libres dans $\mathrm{Map}(\mathrm{D}_n, k)$. On a plus généralement :

Proposition 2.1.4.3. *Soit G un groupe algébrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est diagonalisable.*
2. *$\mathcal{O}(G) = \mathrm{Vect}_k(X^*(G))$.*
3. *Tout G-module est somme directe de G-modules de dimension 1.*

Si l'une de ces assertions est vérifiée, tout G-module V est naturellement un k-espace vectoriel $X^*(G)$-gradué

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(G)} V_\chi$$

où les sous-espaces V_χ sont les sous-espaces propres pour l'action G. On appelle V_χ le sous-espace de poids χ. Réciproquement, tout k-espace vectoriel $X^*(G)$-gradué est naturellement un G-module.

Démonstration.
1. 1) $\implies$ 2) La restriction $\mathcal{O}(D_n) \xrightarrow{res_G} \mathcal{O}(G)$ est surjective et la restriction d'un caractère est un caractère.
2. 2) $\implies$ 3) G est abélien, car $\forall \chi \in X^*(G),\ g, h \in G$, on a $\chi(gh) = \chi(hg)$. Cette relation est donc vérifiée pour toute fonction régulière sur G, on en conclut $gh = hg$. On observe que l'action naturelle de G sur $\mathcal{O}(G)$ est semi-simple. En effet, les caractères forment une base de diagonalisation de $\mathcal{O}(G)$. Ainsi G est semi-simple par la décomposition de Jordan. Soit (V, ρ) le G-module considéré et $W \subset V$ un sous G-module de dimension finie, disons n. Par la décomposition de Jordan, $\rho_{|W}(G)$ est semi-simple. De plus, c'est un sous-groupe abélien fermé de GL_n. Il est donc conjugué à un sous-groupe fermé de D_n. On voit ainsi que $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(G)} V_\chi$, où $V_\chi := \{v \in v \mid g.f = \chi(g)f,\ \forall g \in G\}$. En effet, ils sont en somme directe, et tout élément de V se décompose de cette manière.
3. 3) $\implies$ 1) On peut supposer $G \subset \mathrm{GL}_n$, et considérer l'action naturelle sur k^n après choix d'une base $(e_1, ..., e_n)$. Par hypothèse, on peut écrire $k^n = (f_1) \oplus ... \oplus (f_n)$, avec les (f_i) sous G-module de dimension 1. On obtient donc que G est conjugué à un sous-groupe de D_n.

□

On travaille désormais dans la catégorie des groupes diagonalisables. On considère un groupe diagonalisable G et le groupe $X^{**}(G) := (X^*)^2(G)$.

Proposition 2.1.4.4. *G et $X^{**}(G)$ sont naturellement isomorphes en tant que groupes abstraits, et aussi en tant que groupes algébriques par transport de structure. L'isomorphisme est $ev_G : G \to \mathrm{Hom}(X^*(G), \mathbb{G}_m), g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$.*

Démonstration. ev_G est injective, en effet considérons $g \in G$ tel que $\chi(g) = 1 = \chi(e_G)$, pour tout $\chi \in X^*(G)$. Alors $g = e_G$ car G est un groupe diagonalisable. ev_G est surjective, en effet considérons $\varphi \in X^{**}(G)$. On a un prolongement unique de φ en un morphisme de k-algèbre $k[X^*(G)] = \mathcal{O}(G) \to k$ qui est donc de la forme $\mathcal{O}(G) \to k, f \mapsto f(g)$ pour un $g \in G$. En restreignant à $X^*(G)$, on trouve que $\varphi = \mathrm{ev}_G(g)$. □

Corollaire 2.1.4.5. *Le foncteur X^* réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des groupes diagonalisables et la catégorie des groupes abéliens de type fini.*

Démonstration. En effet on a un isomorphisme de foncteurs $(X^*)^2 \simeq Id$ d'après la proposition précédente. □

Une autre façon de voir cela est d'introduire *l'algèbre de groupe* d'un groupe abélien de type fini M, c'est par définition $k[M] := \{\sum_{\text{finie}} \lambda_m e_m,\ \lambda_m \in k, e_m \in M\}$ avec la multiplication définie par l'opération de groupe de M, et la structure d'algèbre donnée par le morphisme naturel $k \to k[M], \lambda \mapsto \lambda e_0$. La propriété suivante montre que l'on construit ainsi un autre inverse de X^*.

Proposition 2.1.4.6. *Soient, M, M_1, M_2 des groupes abéliens de type fini, et G un groupe diagonalisable. Alors $k[M]$ est de type fini, réduite et on a $k[M_1 \oplus M_2] \simeq k[M_1] \otimes k[M_2]$. De plus,* $\operatorname{Spec} k[M]$ *est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique et on a $G = \operatorname{Spec} k[X^*(G)]$.*

Démonstration. On a deux morphismes d'algèbre $k[M_1] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_1} \mapsto e_{(m_1,0)}$ et $k[M_2] \to k[M_1 \oplus M_2], e_{m_2} \mapsto e_{(0,e_{m_2})}$, d'où l'existence d'un morphisme $k[M_1] \otimes_k k[M_2] \to k[M_1 \oplus M_2]$, dont on vérifie que c'est un isomorphisme. D'autre part, comme $M \simeq \mathbb{Z}^r \oplus (\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$, il suffit de traiter les cas $M = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a $k[\mathbb{Z}] \simeq k[t, t^{-1}]$ qui est intègre, de type fini, et réduite. On a $k[\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}] \simeq k[t]/(t^d - 1)$. On voit, par le théorème chinois par exemple, que cette algèbre de type fini non-intègre est réduite si et seulement si les racine de $t^d - 1$ sont simples, ce qui est le cas en caractéristique zéro.

On regarde k comme une sous-algèbre de $k[M]$ en considérant l'image du morphisme $\lambda \mapsto \lambda e_0$. Par ailleurs, on vérifie que les formules $\Delta(e_m) = e_m \otimes_k e_m$, $i(e_m) = e_{-m}$, et $e(e_m) = e_0$ définissent des morphismes de k-algèbres

$$\Delta : k[M] \to k[M] \otimes_k k[M],\ i : k[M] \to k[M], \text{ et } e : k[M] \to k$$

De plus, on peut voir que les comorphismes Δ^o et i^o définissent une structure de groupe algébrique sur $\operatorname{Spec} k[M]$ en posant $gh := \Delta^o(g,h)$ et $g^{-1} := i^o(g)$ pour tous $g, h \in \operatorname{Spec} k[M]$, le neutre étant le point de $\operatorname{Spec} k[M]$ correspondant à e, on le note e également. Par exemple vérifions que $\varphi : \operatorname{Spec} k[M] \to \operatorname{Spec} k[M], g \mapsto \Delta^o \circ (\mathrm{Id} \times i^o)(g,g)$ est le morphisme constant égal à e. Son comorphisme est $\varphi^\sharp : m \circ (\mathrm{Id} \otimes i) \circ \Delta = e$, où $m : k[M] \otimes_k k[M] \to k[M]$ est la multiplication. Ainsi on a pour tout $g \in \operatorname{Spec} k[M]$, $ev_{\varphi(g)} = ev_g \circ \varphi^\sharp = ev_g \circ e = e$, si bien que $\varphi(g) = e$. Pour la dernière assertion, il suffit de voir que $\mathcal{O}(G) = k[X^*(G)]$.

□

On déduit maintenant quelques résultats de base sur les groupes diagonalisables.

Proposition 2.1.4.7. *Soit G un groupe diagonalisable. Alors :*

1. *G est isomorphe au produit direct d'un tore et d'un groupe abélien fini.*
2. *G est un tore $\iff$ $X^*(G)$ est libre de type fini $\iff$ G est connexe.*

Proposition 2.1.4.8. *Soit G un groupe diagonalisable, et H un sous-groupe fermé de G. Alors H est diagonalisable, et de la forme $\cap_{\chi \in K} \operatorname{Ker} \chi$, pour un sous-groupe K de $X^*(G)$.*

Réciproquement, pour tout sous-groupe K de $X^*(G)$, le sous-groupe diagonalisable $H := \cap_{\chi \in K} \operatorname{Ker} \chi$ de G est tel que $X^*(H) \simeq X^*(G)/K$.

Démonstration. H est bien diagonalisable car la restriction $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(H)$ est surjective, et la restriction d'un caractère est un caractère, on conclut avec 2.1.4.3. Notons $i : H \to G$ le morphisme d'inclusion. On a d'après 2.1.4.4,

$$\begin{aligned} H &\simeq \operatorname{Hom}_{gp}(X^*(H), \mathbb{G}_m) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{gp}(X^*(G)/\operatorname{Ker} i^\sharp, \mathbb{G}_m) \\ &\simeq \{ev_G(x) \in \operatorname{Hom}_{gp}(X^*(G), \mathbb{G}_m) \mid \forall \chi \in \operatorname{Ker} i^\sharp,\ \chi(x) = 1\} \\ &\simeq \cap_{\chi_{|H}=1} \operatorname{Ker} \chi \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour la seconde assertion, avec ce choix on a $\operatorname{Hom}_{gp}(X^*(H), \mathbb{G}_m) \simeq \operatorname{Hom}_{gp}(X^*(G)/K, \mathbb{G}_m)$, on en déduit $X^*(H) \simeq X^*(G)/K$. □

Proposition 2.1.4.9. *Soit G un tore et H un sous-tore. Alors H est facteur direct dans G, c'est-à-dire qu'il existe un sous-tore H' tel que le morphisme naturel $H \times H' \to G$, $(h, h') \mapsto hh'$ soit un isomorphisme. Si H est seulement diagonalisable il existe un sous-tore H' tel que le morphisme ci-dessus soit surjectif à noyau fini.*

Démonstration. On note $i : H \to G$ le morphisme d'inclusion. Par 2.1.4.5, on obtient la suite exacte courte ci-dessous où $i^\sharp$ est la restriction des caractères de G à H.

$$0 \to X^*(G/H) \simeq \operatorname{Ker} i^\sharp \to X^*(G) \xrightarrow{i^\sharp} X^*(H) \to 0$$

Comme $X^*(G)$ et $X^*(H)$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres on trouve des bases respectives tels que la matrice de $i^\sharp$ soit $\operatorname{diag}(a_1, ...a_r, 0, ..., 0)$, on en déduit facilement une section s de $i^\sharp$. On a ainsi $X^*(G) = \operatorname{Ker} i^\sharp \oplus s(X^*(H))$, puis $G \simeq \operatorname{Spec} k[\operatorname{Ker} i^\sharp] \times \operatorname{Spec} k[s(X^*(H))] \simeq H' \times H$, où $H' := \operatorname{Spec} k[\operatorname{Ker} i^\sharp]$.

Dans le cas où H est seulement diagonalisable, considérons une base de $X^*(G)$ adaptée à $\operatorname{Ker} i^\sharp$. Cela fournit des coordonnées telles que $G \simeq \mathbb{G}_m^n$ et $H \simeq \{1\} \times ... \times \{1\} \times \mu_{n_1} \times ... \times \mu_{n_s} \times \mathbb{G}_m^r$, où μ_{n_i} est le groupe des racines n_i-ièmes de l'unité. Par cet isomorphisme, $H' := \mathbb{G}_m^{n-r} \times \{1\} \times ... \times \{1\}$ convient. □

Action d'un groupe diagonalisable sur une variété affine

Les paires (H, X) constituées d'un groupe diagonalisable H et d'une variété affine X munie d'une action de H forment une catégorie dans laquelle les morphismes sont les paires $(\varphi, \widetilde{\varphi})$, où $\varphi : X \to X'$ est un morphisme de variétés affines, $\widetilde{\varphi} : H \to H'$ est un morphisme de groupes diagonalisables, et pour tout $x \in X, h \in H$, on a $\varphi(h.x) = \widetilde{\varphi}(h)\varphi(x)$.

D'après 2.1.2.6, $\mathcal{O}(X)$ est un H-module. C'est aussi un k-espace vectoriel K-gradué avec $K := X^*(H)$, d'après 2.1.4.3. C'est en fait une algèbre affine K-graduée, en effet considérons $(f_1, f_2) \in \mathcal{O}(X)_{\chi_1} \times \mathcal{O}(X)_{\chi_2}$, alors pour tout $g \in G$, $g.f_1 f_2 = (g.f_1)(g.f_2) = (\chi_1(g)f_1)(\chi_2(g)f_2) = (\chi_1\chi_2)(g)f_1 f_2$, ce qui prouve que $f_1 f_2 \in \mathcal{O}(X)_{\chi_1\chi_2}$. De plus, cette construction est fonctorielle, en effet considérons une H'-variété X', ainsi qu'un morphisme $(\varphi, \widetilde{\varphi}) : X \to X'$. On a donc par définition le diagramme de gauche ci-dessous, le second est obtenu par application de $\mathcal{O}(.)$.

$$\begin{tikzcd} H \times X \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}\times\varphi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ H' \times X' \arrow[r, "a_2"] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) \otimes \mathcal{O}(X) & \mathcal{O}(X) \arrow[l, "a_1^\sharp"'] \\ \mathcal{O}(H') \otimes \mathcal{O}(X') \arrow[u, "\widetilde{\varphi}^\sharp\otimes\varphi^\sharp"] & \mathcal{O}(X') \arrow[l, "a_2^\sharp"'] \arrow[u, "\varphi^\sharp"'] \end{tikzcd}$$

Le petit calcul ci-dessous montre que $\forall f \in \mathcal{O}(X')_{\chi'}$, on a $\varphi^\sharp(f) \in \mathcal{O}(X)_{\widetilde{\varphi}^\sharp(\chi')}$. Cela montre que $(\widetilde{\varphi}^\sharp, \varphi^\sharp)$ est un morphisme d'algèbres graduées car $\widetilde{\varphi}^\sharp$ envoie des caractères sur des caractères en tant que comorphisme d'un morphisme de groupes diagonalisables.

$$\forall h \in H,\, x \in X,\, \varphi^\sharp(f)(h.x) = a_1^\sharp \varphi^\sharp(f)(h, x) = (\widetilde{\varphi} \otimes \varphi)a_2^\sharp(f)(h, x) = \widetilde{\varphi}^\sharp(\chi')(h)\varphi^\sharp(f)(x)$$

Réciproquement, considérons une paire (A, K) constituée d'une algèbre affine A graduée par un groupe abélien K de type fini. On a un morphisme d'algèbres affines naturel que l'on peut définir sur les éléments homogènes par $a : A \to k[K] \otimes A$, $f_\omega \mapsto \chi^\omega \otimes f_\omega$. On voit facilement que ce morphisme définit une action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$ sur $X := \operatorname{Spec} A$. De plus, cette association est fonctorielle, en effet considérons A' une algèbre affine K'-graduée , ainsi qu'un morphisme $(\widetilde{\varphi}, \varphi) : A \to A'$ d'algèbres graduées. On a pour tout $f_w \in A_w$

$$(\widetilde{\varphi} \otimes \varphi) \circ a(f_\omega) = (\widetilde{\varphi} \otimes \varphi)(\chi^\omega \otimes f_\omega) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(f_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

$$a' \circ \varphi(f_\omega) = a'(\varphi(f_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}) = \chi'^{\widetilde{\varphi}(\omega)} \otimes \varphi(f_\omega)_{\widetilde{\varphi}(\omega)}$$

D'où le diagramme commutatif de gauche ci-dessous, qui donne le diagramme de droite par application du foncteur Spec. Ce dernier diagramme finit de prouver la fonctorialité.

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[d, "\widetilde{\varphi}\otimes\varphi"] & A \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ K' \otimes A' & A' \arrow[l, "a'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(k[K]) \times \operatorname{Spec}(A) \arrow[r, "a^o"] & \operatorname{Spec}(A) \\ \operatorname{Spec}(k[K']) \times \operatorname{Spec}(A') \arrow[u, "\widetilde{\varphi}^o\times\varphi^o"] \arrow[r, "a'^o"] & \operatorname{Spec}(A') \arrow[u, "\varphi^o"'] \end{tikzcd}$$

Finalement on a obtenu le résultat suivant qui va nous permettre dans la suite de caractériser l'action d'un groupe diagonalisable sur une variété affine en termes algébriques.

Proposition 2.1.4.10. *Les foncteurs $X^* \times \operatorname{Spec}$ et $k[.] \times \mathcal{O}(.)$ réalisent une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des variétés affines munies d'une action de groupe diagonalisable et la catégorie des algèbres affines graduées par un groupe abélien de type fini.*

Proposition 2.1.4.11. *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. Soit $Y \subset X$ une sous variété fermée, et $\mathfrak{a} = \mathcal{I}_X(Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Y est H-stable.*
2. *$\mathfrak{a}$ est un idéal homogène.*

Démonstration. Y est H-stable si et seulement si pour tout $P \in \mathfrak{a}$, $h \in H$, $y \in Y$, $P(h.y) = 0$. Supposons que cette dernière condition soit vérifiée, on écrit $P = \sum P_w$ sa décomposition en composantes homogènes. On a alors, $P(h.y) = \sum \chi^w \otimes P_w(h,y) = \sum \chi^w(h) P_w(y) = 0$. Les caractères étant libres, on a $P_\omega(y) = 0$, pour tout $w \in K$ intervenant dans la décomposition, et tout $y \in Y$, c'est-à-dire $P_w \in \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. Ainsi $\mathfrak{a}$ est homogène. La réciproque est immédiate. $\square$

Soit X une H-variété affine où H est un groupe diagonalisable. On souhaite étudier l'orbite d'un point $x \in X$. En choisissant des générateurs homogènes $f_{w_1}, ..., f_{w_r}$ de $\mathcal{O}(X)$, on peut supposer X plongée dans un espace affine $\mathbb{A}^n$ avec l'action de H donnée par $h.t = (\chi^{w_1}(h)t_1, ..., \chi^{w_r}(h)t_r)$, pour tout $t = (t_1, ..., t_r) \in X \subset \mathbb{A}^n$ et $h \in H$. On voit alors que la géométrie de l'orbite d'un point $p \in X$ va être assez dépendante de la nullité des coordonnées $t_1, ..., t_r$ en p. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.1.4.12 (Monoïde d'orbite, Groupe d'orbite)**.** Soit A une algèbre affine K-graduée munie de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$ sur $X := \operatorname{Spec} A$.

1. Le monoïde d'orbite d'un point $x \in X$ est le sous-monoïde $S_x \subset K$ engendré par $\{\omega \in K \mid \exists f \in A_\omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$
2. Le groupe d'orbite d'un point $x \in X$ est le sous-groupe $K_x \subset K$ engendré par le monoïde d'orbite.

Pour l'étude de la géométrie de l'orbite d'un point, les diagrammes ci-dessous seront d'une grande aide. Le diagramme de gauche est obtenu avec 2.1.3.4 (ou 2.2.2.6) et 1.3.1.9. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur $\mathcal{O}(.)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, two heads, "h \mapsto h.x"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & H.x \\ H/H_x \arrow[ur, dashed, "\exists ! \simeq \varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(H) & \mathcal{O}(H.x) \arrow[l, hook', "f_\omega \mapsto f_\omega(x)\chi^\omega"'] \arrow[dl, dashed, "\exists ! \simeq \varphi^\sharp"] \\ \mathcal{O}(H/H_x) \arrow[u, hook, "\pi^*"] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.4.13 (Car. zéro)**.** *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$, et $x \in X$. On a le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K \arrow[r] \arrow[d, "\omega \overset{\simeq}{\mapsto} \chi^\omega"] & K/K_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^*(H/H_x) \arrow[r, "\pi^*"] & X^*(H) \arrow[r, "i^*"] & X^*(H_x) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $i : H_x \to H$ est l'inclusion du stabilisateur de x, et $\pi : H \to H/H_x$ la projection canonique. En particulier, on obtient $H_x \simeq \operatorname{Spec}(k[K/K_x])$.

Démonstration. La deuxième ligne est obtenue par le théorème 2.1.3.3, puis application du foncteur X^*, elle est bien exacte par exactitude du foncteur X^*. La flèche verticale centrale est l'isomorphisme canonique $X^*(\operatorname{Spec} k[K]) \simeq K$. Comme $\overline{H.x}$ est H-stable, la graduation est préservée sur $\mathcal{O}(\overline{H.x})$ d'après la proposition 2.1.4.11. De plus si $f \in \mathcal{O}(X)_\omega$ est telle que $f(x) \neq 0$, cela reste le cas modulo $\mathcal{I}_X(\overline{H.x})_\omega$ et réciproquement. Ainsi, S_x et K_x ne sont pas modifiés si on remplace X par $\overline{H.x}$. Considérons le fermé propre $\overline{H.x} \setminus H.x$, éventuellement vide. Il est H-stable comme réunion d'orbites. Alors $\mathcal{I}_{\overline{H.x}}(\overline{H.x} \setminus H.x)$ est homogène et $\neq \{0\}$.

Choisissons $f \neq 0$ homogène dans ce H-module, c'est donc un vecteur propre. Ainsi, f est non-nulle quelque part sur $H.x$ et donc partout par transitivité et choix de f. On en conclut $H.x = (\overline{H.x})_f$. Considérons la graduation naturelle associée à $\mathcal{O}(\overline{H.x})_f$. Comme on a inversé f, le monoïde des poids est potentiellement plus gros. En revanche on voit facilement que K_x n'est pas modifié. Finalement, on peut donc supposer $X = H.x$, qui est affine comme on va le voir.

Dans ce cas, on voit qu'une fonction homogène non-nulle est partout non-nulle, donc inversible. On a donc dans ce cas $S_x = K_x = S(\mathcal{O}(H.x)) = K(\mathcal{O}(H.x))$, où $S(\mathcal{O}(H.x))$ et $K(\mathcal{O}(H.x))$ sont respectivement les monoïdes et groupes des poids de l'algèbre K-graduée $\mathcal{O}(H.x)$. Dans les deux diagrammes de 2.2, les flèches sont respectivement des morphismes de H-variétés, et des morphismes d'algèbres graduées. Ainsi, $\varphi^\sharp$ induit un isomorphisme sur les groupes des poids $K(\mathcal{O}(H.x)) = K_x \xrightarrow{w \mapsto \chi^w} K(\mathcal{O}(H/H_x)) = X^*(H/H_x)$. Enfin, toujours en utilisant le diagramme, cet isomorphisme est l'unique faisant commuter le carré de gauche dans le diagramme de la proposition. □

On extrait de la preuve précédente le lemme ci-dessous, puis on l'utilise pour donner une caractérisation de l'adhérence de l'orbite d'un point en terme de son monoïde d'orbite.

Lemme 2.1.4.14. *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$, et $x \in X$. Alors il existe $f \in \mathcal{O}(\overline{H.x})$ homogène non-nul tel que $H.x = (\overline{H.x})_f$.*

Proposition 2.1.4.15 (Car. zéro)**.** *Soit A une algèbre affine K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$, et $x \in X$. Cette action induit une action de H/H_x sur $\overline{H.x}$. De plus, $\overline{H.x}$ et $\operatorname{Spec}(k[S_x])$ sont isomorphes en tant que H/H_x-variétés.*

Démonstration. On suppose $X = \overline{H.x}$ ce qui ne modifie pas S_x et K_x. De plus on a $S(k[\overline{H.x}]) = S_x$ et $K(k[\overline{H.x}]) = K_x$. D'après la proposition précédente et 2.1.4.5, on a des isomorphismes canoniques $k[K_x] \simeq k[X^*(H/H_x)] \simeq \mathcal{O}(H/H_x)$ et le diagramme 2.2 induit un isomorphisme d'algèbres K_x-graduées $\mathcal{O}(H.x) \to k[K_x]$, $f_w \mapsto f_\omega(x)\chi^w$. On a également le morphisme de K_x-algèbres graduées $\mathcal{O}(\overline{H.x}) \to k[S_x]$ définit par la même formule. On voit facilement qu'il est injectif. Pour la surjectivité, on peut par exemple voir en utilisant le lemme précédent que le premier isomorphisme est en fait le prolongement par localisation en un élément homogène $f \in \mathcal{O}(\overline{H.x})$ de ce morphisme. On obtient donc le diagramme commutatif d'algèbres affines K_x-graduées ci-dessous. Cela donne la proposition par application de Spec.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(H.x) = \mathcal{O}(\overline{H.x})_f \arrow[r, "\simeq"] & k[K_x] \\
\mathcal{O}(\overline{H.x}) \arrow[u, "f \mapsto f_{|H.x}"] \arrow[r, "\simeq"] & k[S_x] \arrow[u, "\subset"']
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.1.4.16. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. Alors il existe un ouvert affine non-vide $U \subset X$ tel que :*

$$S_x = S(A), \ \ K_x = K(A), \ \ \forall x \in U$$

Démonstration. On choisit des générateurs homogènes $f_1, ..., f_r$ de A. On pose $U := X_{f_1 \dots f_r}$ qui est non-vide car A est intègre. Pour tout $w \in S(A)$, il existe $g \neq 0 \in A_w$ car A est intègre. Quitte à décomposer g, on peut le supposer de la forme $f_1^{i_1} ... f_r^{i_r}$. On en déduit que $w \in S_x$, pour tout $x \in U$. Comme l'autre inclusion est immédiate, U satisfait la propriété. □

Pour finir voyons une caractérisation algébrique des actions fidèles de groupes diagonalisables sur des variétés affines.

Proposition 2.1.4.17. *Soit A une algèbre affine intègre K-graduée, $X := \operatorname{Spec} A$ muni de l'action de $H := \operatorname{Spec} k[K]$. L'action de H est fidèle si et seulement si $K = K(A)$.*

Démonstration. Soit $g \in \cap_{x\in X} H_x$. L'action de g sur les fonctions régulières est triviale, donc en particulier sur les fonctions homogènes. Comme A est intègre, $\forall \omega \in S(A), \exists f_\omega \neq 0 \in A_\omega$, on en déduit $g \in \cap_{\chi\in S(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ puis facilement $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ d'où $g = e_H$ si $K = K(A)$ car H est un groupe diagonalisable.

Sinon comme $K(A) \subsetneq K$, on peut choisir $g \neq e_H \in H$ tel que $g \in \cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$. En effet $\cap_{\chi\in K(A)} \operatorname{Ker}(\chi)$ est un sous-groupe fermé non-trivial de H car son groupe de caractère est $K/K(A)$. Ainsi g agit trivialement sur les fonctions homogènes et donc sur les fonctions régulières. On en déduit que g agit trivialement sur X. □

2.2 Théorie des invariants

2.2.1 L'algèbre des invariants

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété affine. Alors $\mathcal{O}(X)$ est un G-module rationnel pour l'action naturelle de G sur les fonctions régulières. On définit *l'algèbre des invariants* $\mathcal{O}(X)^G := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid g.f = f, \forall g \in G\}$. C'est par définition la sous-algèbre des fonctions constantes sur les orbites de l'action de G sur X.

Une question naturelle est de se demander si cette algèbre est de type fini sur k, c'est le 14e des 23 problèmes que Hilbert posa en 1900 à la communauté mathématique. En 1959, Nagata exhiba une algèbre d'invariants pour l'action d'un groupe algébrique qui n'est pas de type fini sur k, répondant ainsi au problème. Avec des hypothèses sur G, on peut cependant s'assurer de la finitude de l'algèbre des invariants, c'est l'objectif de cette partie.

Définition 2.2.1.1 (Groupe linéairement réductif)**.** Un groupe algébrique G est linéairement réductif si tout G-module est semi-simple.

Exemple 2.2.1.2. Les groupes finis sont linéairement réductifs par le théorème de Maschke. Dans la partie 2.1.4 on verra un autre exemple de groupes linéairement réductifs, les groupes diagonalisables.

Soit G linéairement réductif, et V un G-module. Le sous-espace V^G des éléments G-invariants admet un unique supplémentaire G-stable que l'on note V_G, il s'agit de la somme directe des sous G-modules non-triviaux de V. On définit *l'opérateur de Reynolds* R_V comme la projection sur V^G associée à cette décomposition. Voici quelques propriétés de R_V :

Proposition 2.2.1.3.
1. *Soit $f : V \to W$ un morphisme de G-module et $f^G : V^G \to W^G$ le morphisme induit. On a $R_W f = f^G R_V$. En particulier, si f est surjective, f^G l'est aussi.*
2. *$R_{\mathcal{O}(X)}$ est $\mathcal{O}(X)^G$-linéaire*

Démonstration. Seule la deuxième assertion n'est pas évidente. Considérons $a \in \mathcal{O}(X)^G$ et m_a la multiplication par a dans $\mathcal{O}(X)$. C'est un endomorphisme de G-module, il commute donc avec $R_{\mathcal{O}(X)}$. □

Théorème 2.2.1.4 (Hilbert)**.** *Soit G un groupe linéairement réductif et X une G-variété affine. Alors l'algèbre des invariant $\mathcal{O}(X)^G$ est de type fini.*

Démonstration. Supposons que X soit un G-module V de dimension finie. L'action de $\mathbb{G}_m$ sur V par homothétie donne une $\mathbb{N}$-graduation $\mathcal{O}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(V)_n$, $\mathcal{O}(V)_n$ étant le sous espace des polynômes homogènes de degré n. Cette graduation est G-stable et se restreint sur l'algèbre des invariants en une $\mathbb{N}$-graduation $\mathcal{O}(V)^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(V)_n^G$. Or on remarque que $\mathcal{O}(V)^G$ est noetherien. En effet, soit I un idéal de $\mathcal{O}(V)^G$, et J son extension dans $\mathcal{O}(V)$. L'idéal J est un sous G-module, donc la contraction de J dans $\mathcal{O}(V)^G$ est $R_{\mathcal{O}(V)}(J) = IR_{\mathcal{O}(V)}(\mathcal{O}(V)) = I$. On voit donc que la condition de chaîne est satisfaite sur $\mathcal{O}(V)^G$ si elle satisfaite sur $\mathcal{O}(V)$, ce qui est le cas car ce dernier est noetherien par le théorème de la base de Hilbert.

Dans le cas général, on peut d'après le théorème 2.1.2.7 supposer X inclus dans un G-module V. On obtient alors un G-morphisme surjectif $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(X)$ qui induit un G-morphisme surjectif $\mathcal{O}(V)^G \to \mathcal{O}(X)^G$ d'après la proposition 2.2.1.3. Cela montre que $\mathcal{O}(X)^G$ est de type fini. □

On constate que cette preuve n'est pas effective. Il est en général difficile de calculer l'algèbre des invariants. On présente maintenant la méthode des sections qui permet le calcul dans certains cas. Soit $S \subset X$ une sous-variété fermée. Définissons

$$Z(S) := \{g \in G \mid g.s = s, \forall s \in S\} \text{ et } N(S) := \{g \in G \mid g.s \in S, \forall s \in S\}$$

Clairement, $Z(S)$ est un sous-groupe normal de $N(S)$, et le quotient $W = N(S)/Z(S)$ agit sur S. La surjection $\mathcal{O}(X) \to k[S]$, induit un morphisme $\mathcal{O}(X)^G \xrightarrow{\varphi} k[S]^W$. Supposons que l'on ait un ouvert dense $U \subset X$ tel que pour tout $x \in U$, $G.x$ intersecte S, alors on voit que φ est injective. Si de plus, $k[S]^W$ est engendré par des éléments $\varphi(f_1), ..., \varphi(f_r)$, alors φ est un isomorphisme et $\mathcal{O}(X)^G$ est engendré par $f_1, ..., f_r$.

Exemple 2.2.1.5. $G = \mathrm{GL}_n,\ X = \mathrm{M}_n,\ g.A = gAg^{-1}$, $S = \mathrm{D}_n$, $U = X_{\mathrm{disc}(\chi)}$, où χ est le polynôme caractéristique générique sur X (c'est bien une fonction régulière sur X). En considérant un élément de U, qui a donc ses valeurs propres deux à deux distinctes, on a par un calcul direct $Z(S) = \mathrm{D}_n$. Puis on a $N(S) = \{\text{matrices monomiales}\}$ car la conjugaison préserve les espaces propres. Ainsi, W est isomorphe au groupe symétrique Σ_n et agit sur S en permutant les entrées diagonales. On a ainsi $k[S]^W = k[\sigma_1, ..., \sigma_n]$, l'algèbre engendrée par les fonctions symétriques élémentaires. C'est une algèbre de polynômes car les σ_i sont algébriquement libres. Soient $f_1, ..., f_n$ les coefficients du polynôme caractéristique générique. Ce sont des éléments de $\mathcal{O}(X)^G$, et on a $f_{i|S} = (-1)^i \sigma_i$, d'où $\mathcal{O}(X)^G = k[f_1, ..., f_n]$.

2.2.2 Quotient d'une variété algébrique sous l'action d'un groupe algébrique

Quotient catégorique

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. En tant que groupe abstrait agissant sur un ensemble, le quotient de X par G (noté X/G) est par définition l'ensemble des orbites. On note $\pi : X \to X/G$ l'application qui à un élément de X associe son orbite. X/G satisfait une propriété universelle, il représente le foncteur $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}, Y \mapsto \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f \text{ est constante sur les orbites}\}$, il est donc unique à isomorphisme près. Pour cette raison la paire $(X/G, \pi)$ est appelée le *quotient catégorique* de X par G.

On peut ainsi transporter cette définition dans la catégorie des variétés algébriques. Toutefois, il n'est pas clair que ce quotient existe toujours. L'exemple suivant montre que lorsqu'il existe, le quotient catégorique ne coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des orbites.

Exemple 2.2.2.1. On considère l'action naturelle de GL_n sur $\mathbb{A}^n$. Le quotient catégorique existe et est un point. En effet soit $f : \mathbb{A}^n \to Z$ constant sur les orbites, alors f est constante car il existe un orbite dense. En revanche il y a un deuxième orbite, c'est le fermé $\{0\}$.

On suppose X affine et $\mathcal{O}(X)^G$ de type fini, c'est en particulier le cas lorsque G est linéairement réductif d'aprés le théorème 2.2.1.4. Dans ce cadre, l'algèbre des invariants définit une variété algébrique affine $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)^G$ muni d'un morphisme π défini par l'inclusion $\mathcal{O}(X)^G \subset \mathcal{O}(X)$. On constate que tout morphisme G-invariant de variétés affines $X \to Z$ se factorise à travers Y, car le comorphisme est alors à valeurs dans $\mathcal{O}(X)^G$. De ce fait, Y semble être un bon candidat pour le quotient catégorique. Toutefois il faut être prudent, dans [15, 6.4.10], on exhibe un exemple de cette situation qui n'admet pas de quotient catégorique. En effet, le morphisme d'un quotient catégorique est toujours surjectif, c'est une conséquence de la propriété universelle de factorisation (Voir [15, 6.4.5]). Or π n'est pas nécessairement surjectif. On a toutefois le résultat suivant :

Théorème 2.2.2.2. *Soit G un groupe linéairement réductif et X une G-variété affine.*

1. *Le morphisme quotient $\pi : X \to Y$ est surjectif.*
2. *(Y, π) est un quotient catégorique.*
3. *Soit $Z \subset X$ une sous G-variété fermée. Le morphisme induit $Z/G \to X/G$ est une immersion fermée. On peut ainsi identifier π_Z et π_X restreint à Z. De plus, soit Z' une autre sous G-variété fermée, on a $\pi_X(Z \cap Z') = \pi_X(Z) \cap \pi_X(Z')$.*

4. Chaque fibre de π_X contient un unique orbite fermé.

5. Si X est irréductible, alors Y aussi. Si de plus X est normale, alors Y est normale.

Démonstration. 1. Soit $x \in Y$ et $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}(X)^G$ correspondant. La fibre $\pi^{-1}(x)$ correspond à l'ensemble des idéaux maximaux contenant l'extension I de $\mathfrak{m}_x$ dans $\mathcal{O}(X)$. Or on a déjà vu que l'extension des idéaux de $\mathcal{O}(X)^G$ dans $\mathcal{O}(X)$ était injective, I est donc un idéal propre contenu dans au moins un idéal maximal. La fibre étant non-vide, π est surjective.

2. L'existence de la factorisation a déjà été vue. Avec 1) on a maintenant l'unicité.

3. On note i l'inclusion $Z \subset X$. $\pi_X i$ est constant sur les orbites de Z d'où l'existence d'un unique morphisme $\varphi : Z/G \to X/G$ tel que $\varphi\pi_Z = \pi_X i$. La projection $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Z)$ est un morphisme de G-module surjectif. D'après la proposition 2.2.1.3, cette projection induit un morphisme de k-algèbre surjectif $\mathcal{O}(X)^G \xrightarrow{\varphi^*} k[Z]^G$, donc φ est une immersion fermée. Soit I (resp. I') l'idéal de Z (resp. Z') dans $\mathcal{O}(X)$. L'idéal de $Z \cap Z'$ est $I + I'$ et l'idéal de $\pi_X(Z)$ est $\mathcal{I}_{X/G}(\pi_X(Z)) = I \cap \mathcal{O}(X)^G = R_X(I)$. Ainsi $\mathcal{I}_{X/G}(\pi_X(Z \cap Z')) = R_X(I + I') = R_X(I) + R_X(I') = \mathcal{I}_{X/G}(\pi_X(Z) \cap \pi_X(Z'))$.

4. D'après 3), π_X envoie deux orbites fermés distincts sur deux points distincts.

5. Le premier point est immédiat. Pour le deuxième, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(X)^G$ est intégralement clos dans $k(X)^G$ car ce dernier contient $k(Y) = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(X)^G)$. Or c'est immédiat car $\mathcal{O}(X)$ est intégralement clos par hypothèse.

□

On remarque que les propriétés du théorème précédent s'étendent automatiquement au cas d'une G-variété X si le théorème est vérifié localement sur un recouvrement affine d'un candidat (Y, π) pour le quotient X/G. De ce constat découle la notion de bon quotient.

Définition 2.2.2.3 (Bon quotient)**.** Soit G un groupe linéairement réductif et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un bon quotient si elle vérifie :

1. π est affine et G-invariant.
2. $\pi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to (\pi_*\mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

Un bon quotient est noté $X//G$.

Exemple 2.2.2.4. Soit G un groupe linéairement réductif et X une G-variété affine. D'après le théorème 2.2.2.2 et l'exemple 1.2.3.8, $X//G$ est un bon quotient.

Quotient géométrique

Parmi les quotients catégoriques $(X/G, \pi)$, on cherche à caractériser ceux ayant les propriétés géométriques intuitivement attendues pour un quotient, c'est-à-dire que X/G soit l'ensemble des orbites avec une topologie aussi fine que possible. C'est la notion de quotient géométrique :

Définition 2.2.2.5 (Quotient géométrique)**.** Soit G un groupe algébrique et X une G-variété. Une paire (Y, π) où Y est une variété et π un morphisme $X \to Y$ est un quotient géométrique si elle vérifie :
(i) π est surjective et ses fibres sont exactement les orbites.
(ii) La topologie de Y coïncide avec la topologie quotient associée à π.
(iii) $\pi^\sharp : \mathcal{O}_Y \to (\pi_*\mathcal{O}_X)^G$ est un isomorphisme.

On remarque que pour un quotient géométrique $(X/G, \pi)$, tous les orbites sont fermés dans X et l'application quotient est ouverte. En effet, soit U un ouvert de X, on a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g\in G} g.U$ qui est ouvert.

Exemple 2.2.2.6. Soit G un groupe algébrique et H un sous-groupe fermé. Dans la catégorie des ensemble, le quotient $(G/H, \pi)$ est exactement le quotient catégorique pour l'action de H sur G par multiplication à droite. Dans [13, 5.5.5], en caractéristique quelconque, on munit G/H d'une structure d'espace annelé en lui attribuant la topologie quotient puis en définissant le faisceau structural par $\mathcal{O}_{G/H}(U) := \{f \in \mathrm{Map}(U, k) \mid$

$f\pi \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U))\}$. Par construction, cet espace annelé vérifie la propriété universelle de factorisation. De plus, on montre ensuite qu'il est isomorphe à une variété quasi-projective, ce qui montre l'existence du quotient catégorique $(G/H, \pi)$ dans la catégorie des variétés algébriques. Par définition de $\mathcal{O}_{G/H}$, on a une flèche $\mathcal{O}_{G/H} \xrightarrow{\pi^\sharp} (\pi_*\mathcal{O}_G)^H$. Elle est injective par la surjectivité de π, et elle est surjective construction du faisceau sur G/H. Ainsi, $(G/H, \pi)$ est un quotient géométrique. Cela généralise bien sur le théorème 2.1.3.3.

Exemple 2.2.2.7. Un bon quotient $(X//G, \pi)$ est un quotient géométrique si les fibres de π sont exactement les orbites. En effet, d'après ce qui précède, il reste alors à vérifier que $X//G$ est muni de la topologie quotient. Soit un ouvert de X de la forme $\pi^{-1}(A)$ où A est une partie de $X//G$. En tenant compte de 2.2.2.2 (iii) et de la surjectivité de π on a : $\pi(X \setminus \pi^{-1}(A)) = Y \setminus A$ qui est fermé, donc A est ouvert.

Proposition 2.2.2.8. *Soit X une G-variété affine avec G fini, et $(X//G, \pi)$ le bon quotient. Alors π est fini et c'est un quotient géométrique.*

Démonstration. Le bon quotient existe d'après 2.2.1.2 et 2.2.2.2, il s'agit du comorphisme de l'inclusion $\mathcal{O}(X)^G \subset \mathcal{O}(X)$. Soit $f \in \mathcal{O}(X)$, on considère le polynôme $\prod_{g\in G}(t - g.f)$ en la variable t. On constate que c'est un polynôme unitaire de $\mathcal{O}(X)^G[t]$ dont f est une racine. Cela prouve que $\mathcal{O}(X)$ est entier sur $\mathcal{O}(X)^G$, et donc une extension finie. Le morphisme π est donc fini. Pour montrer que c'est un quotient géométrique, il suffit de montrer que des orbites disjointes $G.x_1$ et $G.x_2$ s'appliquent sur des points distincts. On peut trouver une fonction $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que f prennent comme valeurs 1 sur les points de $G.x_1$ et 0 sur les points de $G.x_2$. Alors $R_{\mathcal{O}(X)}(f)$ conserve cette propriété car on vérifie que l'on a la formule explicite

$$R_{\mathcal{O}(X)}(f) = \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.f$$

On en déduit que $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ car leurs idéaux maximaux sont distincts dans $\mathcal{O}(X)^G$. En effet, $R_{\mathcal{O}(X)}(f) \in \mathfrak{m}_{\pi(x_2)} \setminus \mathfrak{m}_{\pi(x_1)}$. □

Proposition 2.2.2.9. *Soit X une G-variété avec G fini agissant librement et telles que les orbites admettent des voisinages ouverts affines. Alors le bon quotient $(X//G, \pi)$ est un quotient géométrique. De plus, (X, π) est un revêtement étale de X/G.*

Démonstration. Voir [2, II.7] □

Un exemple : La construction Proj

Dans cette partie, on va détailler une construction qui à la fois éclaire et généralise la construction de la variété algébrique $\mathbb{P}^n_k$. On considère A une algèbre affine $\mathbb{N}$-graduée et on pose $X := \mathrm{Spec}(A)$, ainsi muni d'une action de $\mathbb{G}_m$. Une orbite $\mathbb{G}_m.x$ est de dimension 0 ou 1. Si elle est de dimension 0, c'est un point fixe car k^* est connexe. Si elle est de dimension 1, elle est soit fermée, soit son adhérence est constituée de $\mathbb{G}_m.x$ et d'une réunion de points fixes, en fait un seul comme on va le voir.

On note F l'ensemble des points fixes et on remarque que $F = \mathcal{V}_X(A_{>0})$, où $A_{>0} := (f \mid f \in A_d \text{ pour un } d > 0)$ est l'idéal dit inconvenant. En effet, F est l'ensemble des idéaux maximaux qui sont $\mathbb{G}_m$-stables. Or, un idéal maximal et homogène contient nécessairement $A_{>0}$.

On remarque que $A^{\mathbb{G}_m} = A_0 = A/A_{>0}$, et comme le bon quotient $Y_0 := X//\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\, A_0$ paramètre les orbites fermés, on obtient en particulier que si $\mathbb{G}_m.x$ n'est pas fermé, son adhérence contient un unique point fixe. En résumé, $W := X \setminus F$ est la réunion des orbites de dimension 1, et ils sont tous fermés dans W. On va maintenant montrer que W admet un quotient géométrique, c'est la construction Proj.

Pour tout $f \in A_{>0}$ homogène, la localisation A_f est $\mathbb{Z}$-graduée de la manière suivante :

$$A_f = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}(A_f)_d, \quad \text{avec } (A_f)_d := \{h/f^l \mid \deg(h) - l\deg(f) = d\}$$

On note $A_{(f)} := (A_f)_0$ en remarquant qu'il s'agit de l'algèbre des invariants de la $\mathbb{G}_m$-variété affine X_f. On a ainsi trouvé le bon quotient $U_f := \mathrm{Spec}(A_{(f)}) = X_f//\mathbb{G}_m$. De plus, comme $F \subset \mathcal{V}_X(f)$, il s'agit d'un quotient géométrique d'après ce qui précède. Or on peut recouvrir W par un nombre fini de X_{f_i} avec les f_i homogènes de degrés > 0. Considérons les diagrammes commutatifs ci-dessous. Dans le diagramme de gauche, les flèches sont soit des inclusions, soit des localisations. Le diagramme de droite est obtenu par application du foncteur Spec :

$$\begin{tikzcd} A_{f_i} \arrow[r] & A_{f_i f_j} & A_{f_j} \arrow[l] \\ A_{(f_i)} \arrow[u] \arrow[r] & A_{(f_i f_j)} \arrow[u] & A_{(f_j)} \arrow[u] \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_{f_i} \arrow[d, "\pi_i"] & X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_j f_j} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X_{f_j} \arrow[d, "\pi_j"] \\ U_{f_i} & U_{f_i f_j} \arrow[l] \arrow[r] & U_{f_j} \end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales du diagramme de droite sont des immersions ouvertes, en effet on a $U_{f_i f_j} \simeq (U_{f_i})_{f_j}$. Les conditions de la construction 1.2.1.5 sont satisfaites, on peut former un schéma $\mathrm{Proj}(A)$ par recollement des U_{f_i} le long de ces immersions. Il est facile de montrer que $\mathrm{Proj}\, k[t_1, ..., t_n]$, où les t_i sont des indéterminées, est séparé en utilisant 1.2.3.14. On en déduit que $\mathrm{Proj}(A)$ est séparé en utilisant 1.2.3.15, et donc que c'est une variété. Enfin, les (U_{f_i}, π_i) sont des quotients géométriques et le diagramme exprime que l'on a les conditions de recollement sur les intersections pour définir un morphisme global $\pi : X \to \mathrm{Proj}(A)$ qui fait de $(\mathrm{Proj}\, A, \pi)$ le quotient géométrique global $W/\mathbb{G}_m$.

Enfin, on remarque que les fermés de $\mathrm{Proj}(A)$ correspondent aux fermés $\mathbb{G}_m$-stables de W, c'est-à-dire aux idéaux radicaux homogènes qui ne contiennent pas l'idéal inconvenant. Si A admet n générateurs homogènes de degré 1, alors $\mathrm{Proj}(A)$ est un fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k := \mathrm{Proj}\, B$, où $B := k[x_0, ..., x_n]$ avec la graduation habituelle. Un tel fermé muni du faisceau défini ci-dessus est une *variété projective*. La topologie quotient sur $\mathrm{Proj}(A)$ que l'on vient de définir est aussi appelé la topologie de Zariski. Elle admet une base d'ouverts affines de la forme X_f avec $f \in A$ homogène, ils sont appelés les *ouverts principaux*.

Remarque 2.2.2.10. Plus généralement on peut définir un schéma $\mathrm{Proj}\, A$ pour tout anneau $\mathbb{N}$-gradué A ([5] II.2.5). L'espace topologique $\mathrm{Proj}\, A$ est alors le sous-espace de $\mathrm{Spec}\, A$ constitué des idéaux premiers homogènes qui ne contiennent pas $A_+ := \oplus_{d>0} A_d$, on le munit de la topologie induite. En particulier, pour tout anneau R, on définit le n-espace projectif sur $\mathrm{Spec}\, R$ en posant $\mathbb{P}^n_R := \mathrm{Proj}\, R[x_0, ..., x_n]$, avec la graduation standard.

Chapitre 3

Faisceaux divisoriels sur une variété algébrique

3.1 Faisceaux de modules

Dans cette partie on utilise les références [11] et [5].

Soit X un schéma. Un $\mathcal{O}_X$*-module* est un faisceau $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}(U)$ soit un $\mathcal{O}_X(U)$-module pour tout ouvert $U \subset X$, en demandant de plus que les actions soient compatibles aux restrictions, c'est-à-dire que pour tout ouvert $V \subset U$, $a \in \mathcal{O}(U)$, $f \in \mathcal{F}(U)$, on ait $(af)_{|V} = a_{|V} f_{|V}$. Un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-modules est un morphisme de prefaisceaux tel que pour tout ouvert U, la flèche $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ soit un morphisme de $\mathcal{O}(U)$-modules.

3.1.1 Faisceaux quasi-cohérents

Soit X un schéma. Un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est *quasi cohérent* si localement il admet une *présentation*, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $x \in U$ tel que l'on ait une suite exacte

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_{X|U} \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X|U} \to \mathcal{F}_{|U} \to 0$$

On dit que $\mathcal{F}$ est *cohérent* si sur chaque voisinage, la présentation est finie, c'est-à-dire que les famille I et J sont finies. Soit $X \simeq \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et M un A-module. On définit un $\mathcal{O}_X$-module $\widetilde{M}$ sur le même modèle que le faisceau structural en posant $\widetilde{M}(X_f) = M_f$ pour chaque ouvert principal X_f. On vérifie que cela définit un $\mathcal{O}_X$-module tel que $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in X$, et $\widetilde{M}(X) = M$.

Proposition 3.1.1.1. *Soit $X \simeq \operatorname{Spec} A$ un schéma affine. L'application $M \mapsto \widetilde{M}$ définit un foncteur exact, plein et fidèle de la catégorie des A-modules vers la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules. De plus il commute aux sommes directes et au produit tensoriel.*

Démonstration. [5, II.5.2] $\square$

Proposition 3.1.1.2. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur un schéma X. On suppose X noetherien, ou quasi-compact et séparé. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, le morphisme canonique*

$$\mathcal{F}(X)_f = \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X)_f \to \mathcal{F}(X_f)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. [11, 5.1.6] $\square$

Théorème 3.1.1.3. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module sur un schéma X. Alors $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si et seulement si pour tout ouvert affine $U \subset X$, on a $\mathcal{F}(U)\tilde{} \simeq \mathcal{F}_{|U}$.*

En particulier, si $X \simeq \operatorname{Spec} A$ est affine, alors les foncteurs $M \mapsto \widetilde{M}$ et $\Gamma(X, .)$ réalisent une équivalence de catégories entre la catégorie des A-modules et la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X.

Démonstration. [11, 5.1.7] □

Proposition 3.1.1.4. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur un schéma noetherien X. Alors $\mathcal{F}$ est cohérent si et seulement si pour tout ouvert affine $U \subset X$, le module $\mathcal{F}(U)$ est de type fini.*

Démonstration. [11, 5.1.11] □

Proposition 3.1.1.5. *Soit X un schéma, alors on a les propriétés suivantes*

1. *Une somme directe de faisceaux quasi-cohérents est un faisceau quasi-cohérent. Si X est noetherien, une somme directe finie de faisceaux cohérents est un faisceau cohérent.*
2. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux quasi-cohérents sur X, alors $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est quasi-cohérent. Si X est noetherien et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ cohérents, alors $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ est cohérent. Enfin, si X est affine, alors $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert $U \subset X$.*
3. *Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux quasi-cohérents. Alors $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Coker} f$ sont quasi-cohérents. Si X est noetherien, et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ cohérents, alors $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Coker} f$ sont cohérents.*
4. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent. Soit U un ouvert affine de X tel que $f(U)$ est contenu dans un ouvert affine V de Y. Alors*
$$f^*\mathcal{G}_{|U} \simeq (\mathcal{G}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U))\tilde{}$$
En particulier, $f^*\mathcal{G}$ est quasi-cohérent sur X. Si X est noetherien et $\mathcal{G}$ cohérent, alors $f^*\mathcal{G}$ est cohérent.
5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Si X est noetherien, ou si f est séparé et quasi-compact, alors $f_*\mathcal{F}$ est quasi-cohérent sur Y.*
6. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Si Y est noetherien, alors $f_*\mathcal{F}$ est cohérent sur Y.*

Démonstration. [11, 5.1.14] □

3.1.2 Spectre relatif d'une $\mathcal{O}_X$-algèbre

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et B une A-algèbre. Ces données définissent naturellement un schéma $\widetilde{X} := \operatorname{Spec} B$ sur X via un morphisme $f : \widetilde{X} \to X$ défini par la structure de A-algèbre sur B. De plus, $f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ est un faisceau d'algèbres sur X dans le sens où pour tout ouvert $U \subset X$, l'anneau $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(f^{-1}(U))$ est naturellement une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre. Finalement, $f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent car il s'agit de $\widetilde{B}$.

Définition 3.1.2.1 ($\mathcal{O}_X$-algèbre)**.** Soit X un schéma. Une $\mathcal{O}_X$-algèbre est un faisceau d'anneaux $\mathcal{S}$ sur X muni d'un morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{S}$ est quasi-cohérente si elle l'est en tant que $\mathcal{O}_X$-module. On dit qu'elle est localement de type fini si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{S}(U)$ soit de type fini en tant que $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre.

On introduit ci-dessous la version relative du spectre d'un anneau. On se donne un schéma de base X que l'on suppose séparé pour les applications que l'on a en vue, et une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{S}$. A partir de ces données, on souhaite construire un schéma $\operatorname{Spec}_X S$ sur X dont le morphisme structural est affine. Cette construction nous sera très utile par la suite.

Construction 3.1.2.2 (Spectre relatif)**.** Soit X un schéma séparé, $\mathcal{S}$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente, et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement affine de X. Il existe un schéma $\operatorname{Spec}_X \mathcal{S}$ construit par recollement des schémas affines $\operatorname{Spec}(\mathcal{S}(U_i))$, unique à isomorphisme canonique près. Ce schéma est séparé sur X via le recollement des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathcal{S}(U_i)) \to U_i$ donnés par la structure d'algèbre. De plus, le morphisme structural p est affine et on a l'égalité de faisceaux

$$p_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_X \mathcal{S}}) = \mathcal{S}$$

Enfin, si X est une variété et que $\mathcal{S}$ est un faisceau d'algèbres réduites, localement de type fini, alors $\mathrm{Spec}_X \mathcal{S}$ est une variété.

Démonstration. On note $U_{ij} := U_i \cap U_j$, $A_i := \mathcal{S}(U_i)$ et $A_{ij} := \mathcal{S}(U_{ij})$. Les données donnent naturellement un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_{ij} := \mathrm{Spec}\, A_{ij} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "p_{ij}"] & \widetilde{X}_i := \mathrm{Spec}\, A_i \arrow[d, "p_i"] \\ U_{ij} \arrow[r, "\iota = \subset"] & U_i \end{tikzcd}$$

On a $\mathcal{S}_{|U_{ij}} = \iota^*(\mathcal{S}_{|U_i})$ donc $\widetilde{A_{ij}} = \iota^*(\widetilde{A_i}) = A_i \widetilde{\otimes_{R_i}} R_{ij}$ d'après 3.1.1.5 4, où $R_i := \mathcal{O}_X(U_i)$ et $R_{ij} := \mathcal{O}_X(U_{ij})$, ce qui donne $A_{ij} \simeq A_i \otimes_{R_i} R_{ij}$ d'après 3.1.1.3, puis $\widetilde{X}_{ij} \simeq U_{ij} \times_{U_i} \widetilde{X}_i$. Cela prouve que φ_i est une immersion ouverte. On a de même une immersion ouverte $\varphi_j : \widetilde{X}_{ij} \to \widetilde{X}_j$. Les $\varphi_{ij} := \varphi_j \varphi_i^{-1}$ vérifient bien les conditions de recollement de 1.2.1.5. On a donc un schéma $\widetilde{X}$ sur X car les p_i se recollent en un morphisme $p : \widetilde{X} \to X$ qui est affine par construction. Ce morphisme est séparé d'après 1.2.3.14. La dernière assertion est claire par définition. □

Remarque 3.1.2.3. Soit X un schéma. On peut montrer ([14, 12.1]) que le foncteur $\mathcal{S} \mapsto \mathrm{Spec}_X \mathcal{S}$ définit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_X$-algèbres quasi-cohérentes et la catégorie des schémas qui sont affines sur X, c'est-à-dire dont le morphisme structural est affine. Un quasi-inverse est donnée par $(f : Y \to X) \mapsto f_*\mathcal{O}_Y$.

3.1.3 Faisceaux quasi-cohérents sur une variété projective

Soit $X := \mathrm{Proj}\, A$ une variété projective. Ainsi A est une algèbre affine $\mathbb{N}$-graduée engendrée par r éléments homogènes de degré 1 (2.2.2), et on note $i : X \to \mathbb{P}^r_k$ le plongement associé. Soit M un A-module $\mathbb{Z}$-gradué. On définit un $\mathcal{O}_X$-module $\widetilde{M}$ en posant $\widetilde{M}(X_f) := M_{(f)} := (M_f)_0$ pour tout ouvert principal X_f, avec $f \in A$ homogène. C'est un faisceau quasi-cohérent car $(\widetilde{M})_{|X_f} = \widetilde{M_{(f)}}$, où $M_{(f)}$ est un module sur $A_{(f)} = \mathcal{O}(X_f)$. Cette construction définit un foncteur exact de la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués vers la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X, qui commute au produit tensoriel.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{O}_X(n)$ le faisceau quasi-cohérent associé au A-module décalé $A(n)$. Plus généralement, étant donné un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, on définit le faisceau décalé $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$, c'est un faisceau quasi-cohérent. L'opération tilde commute au décalage, et on a $\mathcal{O}_X(n) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}(n))$.

On définit un foncteur exact à gauche de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules dans la catégorie des A-modules $\mathbb{Z}$-gradués en posant

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

En effet, tout élément homogène $f \in A_d$ définit une section globale de $\mathcal{O}_X(d)$ pour $d \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, on pose $ft = s \otimes_{\mathcal{O}(X)} t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$. Comme A est engendré par des éléments homogènes de degré 1, on a un isomorphisme naturel

$$\Gamma_*(\mathcal{F})^{\sim} \simeq \mathcal{F} \quad ([5, \text{II}.5.15])$$

Remarque 3.1.3.1. Si $X = \mathbb{P}^r_k$, c'est-à-dire $A = k[x_0, ..., x_r]$ on peut voir que l'on a un isomorphisme de k-algèbres graduées $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}) \simeq k[x_0, ..., x_r]$ ([5, II.5.13]). En revanche, on n'a pas en général $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = A$ pour une algèbre affine $\mathbb{N}$-graduée A quelconque. En effet, supposons $X = \mathrm{Proj}\, A$ irréductible et normale, avec $A = k[x_0, ..., x_r]/I$ où I est un idéal premier radical et homogène (2.2.2). Le plongement i donne lieu à une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{I}_X := \operatorname{Ker} i^\sharp \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k} \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathcal{O}_X \to 0$$

On a $\Gamma_*(\mathcal{I}_X) = I$ ([5, ex II.5.10]), et en appliquant Γ_* on obtient une suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{\subseteq} k[x_0, ..., x_r] \xrightarrow{\Gamma_*(i^\sharp)} \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$$

Le morphisme $\Gamma_*(i^\sharp)$ n'est pas surjectif en général. Son image est isomorphe à A, et on peut montrer ([5, II ex 5.14]) que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est la clôture intégrale de A. Comme exemple concret prenons l'immersion fermée $i : \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k$ donnée par le morphisme gradué $\varphi : k[x, y, z, w] \to k[s, t]$, $(x \mapsto s^m, t \mapsto s^{m-1}t, z \mapsto st^{m-1}, w \mapsto t^m)$. On peut voir que $\Gamma_*(\mathcal{O}_{i(\mathbb{P}^1_k)}) = \bigoplus_{d \geqslant 0} k[s, t]_{md}$ et que l'image de φ est strictement incluse dans cette algèbre pour $m \geqslant 4$.

3.1.4 Cohomologie des faisceaux et applications

Généralités

On rappelle sans démonstrations quelques définitions et résultats de base, l'objectif étant de définir les groupes de cohomologie d'un faisceau sur un schéma relatifs au foncteur sections globales. La référence principale est [5, chap III].

Soit X un schéma, on considère la catégorie $\mathcal{A}b(X)$ des faisceaux de groupes abéliens sur X, et la catégorie $\mathcal{M}od(X)$ des $\mathcal{O}_X$-modules. Soit $A^\cdot$ un *complexe* dans $\mathcal{A}b(X)$, c'est-à-dire une famille d'objets $(A^i)_{i \geqslant 0}$ et des morphismes $d^i : A^i \to A^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Un morphisme de complexes $f : A^\cdot \to B^\cdot$ est une famille de morphismes $f^i : A^i \to B^i$ qui commutent avec les applications d^i. Le i^e groupe de cohomologie $h^i(A^\cdot)$ du complexe $A^\cdot$ est le groupe $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$. Soit $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ une suite exacte courte de complexes, on obtient grâce au lemme du serpent ([8] 2.10) des morphismes $\delta^i : h^i(C^\cdot) \to h^{i+1}(A^\cdot)$ dits de connexion, donnant une suite exacte longue :

$$... \to h^i(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot) \to h^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\cdot) \to ... \tag{3.1}$$

Ces définitions ont également un sens dans la catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, et si on se donne un foncteur $F : \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$, alors F envoie des complexes de faisceaux sur des complexes de groupes. On se fixe un tel foncteur F et on suppose de plus qu'il est covariant exact à gauche. Pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ (resp. tout $\mathcal{F} \in \mathcal{M}od(X)$) on peut obtenir une résolution injective, c'est-à-dire une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} I^0 \to I^1 \to ...$$

telle que les faisceaux I^k soient injectifs dans leurs catégories respectives. Cela signifie que les foncteurs $\operatorname{Hom}(., I^k)$ sont exacts (ils sont exacts seulement à gauche en général). On définit les foncteurs dérivés à droite R^iF de F pour $i \geqslant 0$ par $R^iF(\mathcal{F}) = h^i(F(I^\cdot))$, et on a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.1.4.1.
1. *Les R^iF définissent des foncteurs $\mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$. De plus, ils ne dépendent pas du choix des résolutions injectives à isomorphisme près.*
2. *On a un isomorphisme $F \simeq R^0F$*
3. *Pour tout suite exacte courte $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ dans $\mathcal{A}b(X)$, il existe un morphisme naturel de connexion $\delta^i : R^iF(\mathcal{F}'') \to R^{i+1}F(\mathcal{F}')$, tel que l'on obtient une suite exacte longue :*

$$... \to R^iF(\mathcal{F}') \to R^iF(\mathcal{F}) \to R^iF(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(R^{i+1}) \to ...$$

Définition 3.1.4.2 (Groupes de cohomologie d'un faisceau)**.** Soit $\Gamma(X, .) : \mathcal{A}b(X) \to \mathcal{A}b$ le foncteur sections globales. Les foncteurs de cohomologie $H^i(X, .)$ sont les foncteurs dérivés à droite de $\Gamma(X, .)$. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$, les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$ sont appelés les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$.

Un faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ est dit *acyclique* si $H^i(X, \mathcal{F})$ est nul pour tout entier $i > 0$. On peut toujours remplacer une résolution injective de $\mathcal{F}$ par une résolution acyclique pour le calcul des groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$. Les faisceaux *flasques* donnent une classe de faisceaux acycliques, ce sont les faisceaux dont les flèches de restriction sont surjectives. De plus, tout $\mathcal{O}_X$-module injectif est flasque, on en déduit que l'on peut utiliser des résolutions injectives dans $\mathcal{M}od(X)$ pour calculer les groupes de cohomologie d'un $\mathcal{O}_X$-module vu comme faisceau de groupes abélien sur X.

Cohomologie à support

Soit X un schéma, $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$, et Z un fermé de X. Le support $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ est l'ensemble des points où la tige et non-nulle. De même, le support d'une section est l'ensemble des points où le germe de la section est non-nul, c'est un fermé de X. On définit le sous-faisceau $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{Z\cap V}(V, \mathcal{F})$ où $\Gamma_{Z\cap V}(V, \mathcal{F})$ est le sous-groupe de $\Gamma(V, \mathcal{F})$ constitué des sections à support contenu dans $Z \cap V$. C'est bien un faisceau car les sections locales se recollent de manière unique en sections de $\mathcal{F}$ qui restent à support dans Z. En notant $U := X \setminus Z$ et $j : U \to X$ l'inclusion, on a de plus une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}_{|U}) \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.4.3. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine noetherien, M un A-module, $\mathcal{F} := \widetilde{M}$, $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal, et $Z = \mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$. Soit $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, alors $\operatorname{Supp} m = \mathcal{V}_X(\operatorname{Ann} m)$, où $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid am = 0\}$ est l'annulateur de m. En effet, soit $\mathfrak{p}$ un point de X, alors $m_\mathfrak{p} \neq 0 \iff \forall a \in A \setminus \mathfrak{p}, am \neq 0 \iff \operatorname{Ann}(m) \subset \mathfrak{p}$.

On définit un sous-module $\Gamma_\mathfrak{a}(M)$ de M par $\Gamma_\mathfrak{a}(M) := \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ pour un } n > 0\}$. Alors on a $\Gamma_\mathfrak{a}(M)\tilde{} = \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$. En effet, tout d'abord $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ est quasi-cohérent comme noyau d'un morphisme entre faisceaux quasi-cohérents, cela d'après la suite exacte ci-dessus et 3.1.1.5 5 et 3. En utilisant 3.1.1.3, il reste donc à montrer que $\Gamma_\mathfrak{a}(M) \simeq \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F}))$ en tant que A-modules. Soit $m \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$, on a par définition $\operatorname{Supp} m = \mathcal{V}_X(\operatorname{Ann} m) \subset \mathcal{V}_X(\mathfrak{a})$, d'où $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\operatorname{Ann} m}$. Or, $\mathfrak{a}$ est de type fini car A est noetherien, on en conclut que $m \in \Gamma_\mathfrak{a}(M)$. En effet, si on a k générateurs $x_1, ..., x_k$ de $\mathfrak{a}$, on peut trouver un exposant commun n tel que x_i^n annule m pour tout i. Il s'en suit que l'on a par exemple $\mathfrak{a}^{n^k} m = 0$. Réciproquement, si $m \in \Gamma_\mathfrak{a}(M)$, alors $\mathfrak{a}^n \subset \operatorname{Ann} m$ pour un $n > 0$, ce qui donne $\operatorname{Supp} m \subset \mathcal{V}(\mathfrak{a}^n) = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$, puis $m \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$. Finalement on a bien $\Gamma_\mathfrak{a}(M) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$.

Il est facile de montrer que $\Gamma_Z(X, .)$ est un foncteur exact à gauche, on définit alors *les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ à support dans Z* comme ses foncteurs dérivés à droite, on les note $H^i_Z(X, \mathcal{F})$. Si $\mathcal{F}$ est flasque, il est acyclique pour $\Gamma_Z(X, .)$, et de plus, en appliquant le foncteur sections globales $\Gamma(X, .)$ à la suite exacte 3.2, on obtient la suite exacte courte ci-dessous :

$$0 \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to 0, \text{ où } \mathcal{F} \text{ est flasque.}$$

On choisit maintenant une résolution flasque $\mathcal{I}^\cdot$ de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{I}^\cdot_{|U}$ est flasque également. On peut donc utiliser ces résolutions pour calculer les groupes de cohomologie $H^i_Z(X, \mathcal{F})$, $H^i(X, \mathcal{F})$ et $H^i(U, \mathcal{F}_{|U})$. En utilisant la suite exacte courte ci-dessus on obtient une suite exacte courte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \to \Gamma_Z(X, \mathcal{I}^\cdot) \to \Gamma(X, \mathcal{I}^\cdot) \to \Gamma(U, \mathcal{I}^\cdot) \to 0$$

Les techniques utilisées pour obtenir la suite exacte longue 3.1 s'appliquent dans la catégorie des groupes abéliens et on obtient ainsi une suite exacte longue :

$$0 \to H^0_Z(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(U, \mathcal{F}_{|U}) \to H^1_Z(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}_{|U}) \to ... \tag{3.3}$$

Remarquons enfin qu'avec les notations et hypothèses de l'exemple 3.1.4.3, on a $\Gamma_Z(X, .) \circ \tilde{} = \Gamma_\mathfrak{a}(.)$ en tant que foncteurs A-$\mathcal{M}od \to A$-$\mathcal{M}od$. On en déduit que le foncteur $\Gamma_\mathfrak{a}(.)$ est exact à gauche et que ses foncteurs dérivés à droite, notés $H^i_\mathfrak{a}$, sont égaux aux foncteurs $H^i_Z(X, .) \circ \tilde{}$. En effet, soit $\mathcal{F} \in \mathcal{A}b(X)$ et $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$, le tilde envoie une résolution injective de M sur une résolution flasque de $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$, comme on va le voir en 3.1.4.7. En utilisant cette dernière pour calculer les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ à support dans Z, on obtient le résultat par l'égalité des foncteurs $\Gamma_Z(X, .) \circ \tilde{} = \Gamma_\mathfrak{a}(.)$.

Cohomologie sur un schéma affine

L'objectif de cette partie est de montrer que les $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérents sur un schéma affine noetherien $X = \operatorname{Spec} A$ sont acycliques. Le point clé sera de montrer que pour un A-module injectif I, le faisceau $\widetilde{I}$ est flasque. On commence par des préliminaires d'algèbre commutative :

Théorème 3.1.4.4 (de Krull)**.** *Soit A un anneau noetherien, $M \subset N$ des A-modules de type fini, et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors, la topologie $\mathfrak{a}$-adique sur M est induite par la topologie $\mathfrak{a}$-adic sur N. En particulier, pour tout $n > 0$, il existe $n' \geqslant n$ tel que $\mathfrak{a}^{n'} N \cap M \subset \mathfrak{a}^n M$.*

Démonstration. [8, 10.11] □

Corollaire 3.1.4.5. *Soient A un anneau noetherien, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, et I un A-module injectif. Alors le sous-module $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ est aussi un A-module injectif.*

Démonstration. [5, III.3.2] □

Lemme 3.1.4.6. *Soient A un anneau noetherien et I un A-module injectif. Alors pour tout $f \in A$, la flèche de localisation $I \to I_f$ est surjective.*

Démonstration. [5, III.3.3] □

Proposition 3.1.4.7. *Soient A un anneau noetherien et I un A-module injectif. Alors le faisceau $\widetilde{I}$ est flasque.*

Démonstration. On utilise que X est un espace topologique noetherien, et on considère les fermés de la forme $Y := \overline{\operatorname{Supp} \widetilde{I}}$, où I est un A-module injectif. On remarque que le résultat est immédiatement vérifié si Y est l'ensemble vide. Il suffit donc de montrer qu'étant donné un fermé Y de la forme $\overline{\operatorname{Supp} \widetilde{I}}$ on est ramené à montrer le résultat pour un fermé propre de Y de même forme.

Pour montrer que $\widetilde{I}$ est flasque, il est suffisant de montrer que $\Gamma(X, \widetilde{I}) \to \Gamma(U, \widetilde{I})$ est surjectif pour tout ouvert $U \subset X$. Si $Y \cap U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, il existe $f \in A$ tel que $X_f \subset U$ et $X_f \cap Y \neq \emptyset$. On note $Z = X \setminus X_f$, et on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, \widetilde{I}) \arrow[r] & \Gamma(U, \widetilde{I}) \arrow[r] & \Gamma(X_f, \widetilde{I}) \\ \Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma_Z(U, \widetilde{I}) \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Soit une section $s \in \Gamma(U, \widetilde{I})$, et s' son image dans $\Gamma(X_f, \widetilde{I})$. D'après le lemme précédent et 3.1.1.2, s' admet un antécédent $t \in \Gamma(X, \widetilde{I})$. On note t' la restriction de t à U. Alors $s - t'$ se restreint en la section nulle sur X_f, et a donc support dans Z. Si on peut trouver un antécédent u de $s - t'$ dans $\Gamma_Z(X, \widetilde{I})$, alors $t + u$ est antécédent de s dans $\Gamma(X, \widetilde{I})$. On est donc ramené à prouver la surjectivité de $\Gamma_Z(X, \widetilde{I}) \to \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$.

Posons $J = \Gamma_Z(X, \widetilde{I})$, et $\mathfrak{a} = fA$. Alors d'après l'exemple 3.1.4.3, on a $J = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Puis d'après 3.1.4.5, J est un A-module injectif. Enfin, le support de $\widetilde{J}$ est contenu dans $Y \cap Z$ qui est fermé propre de Y. Toujours d'après l'exemple 3.1.4.3, on a $\widetilde{J} = \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$. On est donc ramené à montrer que $\widetilde{J}$ est flasque, ce qui termine la preuve. □

Théorème 3.1.4.8. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine noetherien. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X, et pour tout $i > 0$, on a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. Soit $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, et $M \to I^\cdot$ une résolution injective de M. On obtient d'après 3.1.1.3 une résolution injective $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M} \to \widetilde{I}^\cdot$ de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents. Or cette résolution est flasque d'après 3.1.4.7. Cela suffit à montrer le théorème car une résolution flasque de faisceau est acyclique, et peut être utilisé pour calculer la cohomologie. □

Une application

On introduit la notion de profondeur d'un A-module M relative à un idéal $\mathfrak{a} \subset A$ et on en donne une interprétation en termes de cohomologie à support. On en déduit un corollaire qui donne une réciproque à 1.3.3.3 et nous sera utile par la suite.

Définition 3.1.4.9 (Élément M-régulier)**.** Un élément $x \in A$ est M-régulier si la multiplication par x est un endomorphisme injectif de M, c'est-à-dire que x n'est pas diviseur de zéro d'un élément de M. Si x n'est pas régulier on dit que c'est un diviseur de zéro de M.

Définition 3.1.4.10 (Suite M-régulière)**.** Soit A un anneau, M un A-module. Une suite $x_1, ..., x_r$ d'éléments de A est M-régulière si x_1 est M-régulier, et pour tout $i = 2, ..., r$, x_i est $M/(x_1, ..., x_{i-1})M$-régulier.

Définition 3.1.4.11 (Profondeur)**.** Soit A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. La $\mathfrak{a}$-profondeur de M, notée $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M$, est la longueur maximale des suites régulières de M contenues dans $\mathfrak{a}$.

Proposition 3.1.4.12. *Soit A un anneau noetherien, $\mathfrak{a}$ un idéal, et M un A-module de type fini. Alors pour tout $n \geqslant 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n$.
2. $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ *pour tout* $i < n$.

Démonstration. Montrons cette équivalence par récurrence. Le cas $n = 0$ est trivial, mais nous aurons besoin du cas $n = 1$ dans la récurrence, on le démontre maintenant. Supposons $n = 1$, et $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M \geqslant 1$. Alors il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que x n'est pas diviseur de zéro de M. Soit $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, ainsi il existe $k \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{a}^k m = 0$. En particulier, $x^k m = 0$, ce qui prouve $m = 0$, puis $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Réciproquement, supposons $H^0_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Cela signifie que pour tout $m \in M$ et $k \geqslant 0$, il existe $x \in \mathfrak{a}^k$ tel que $mx \neq 0$. Ainsi, d'après 1.1.1.7 on peut trouver un $x \in \mathfrak{a}$ qui n'est pas diviseur de zéro de M, c'est-à-dire $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M \geqslant 1$.

Supposons maintenant le résultat acquis pour $n \geqslant 1$. Pour le sens direct on suppose $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n+1$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence il reste à montrer que $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$. Choisissons $x \in \mathfrak{a}$ égal au premier terme d'une suite M-régulière de longueur $n+1$, ce qui est possible par hypothèse. Alors x n'est pas diviseur de zéro de M et $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M/xM \geqslant n$. On considère alors la suite exacte de A-modules

$$0 \to M \xrightarrow{x \cdot} M \to M/xM \to 0$$

et la suite exacte longue de cohomologie associée :

$$.. \to H^{n-1}_{\mathfrak{a}}(M/xM) \to H^n_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{x \cdot} H^n_{\mathfrak{a}}(M) \to ...$$

Comme $H^{n-1}_{\mathfrak{a}}(M/xM) = 0$ par hypothèse de récurrence, l'application $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \to H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ est injective. Or ceci ne peut être le cas que si $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ car on peut remarquer que $H^n_{\mathfrak{a}}$ est un quotient d'un $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ pour un module N, ses éléments sont donc annulés par des puissances de x.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ pour tout $i < n+1$. Par hypothèse de récurrence et comme $n \geqslant 1$, il existe $x \in \mathfrak{a}$ qui n'est pas diviseur de zéro pour M. On peut à nouveau utiliser la suite exacte longue ci-dessus et en déduire immédiatement que $H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM) = 0$ pour $i < n$. Ainsi, $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M/xM \geqslant n$, ce qui montre $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}} M \geqslant n+1$. $\square$

Corollaire 3.1.4.13. *Soit X une variété affine irréductible et $Z \subset X$ un fermé tel que la restriction $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X \setminus Z)$ soit un isomorphisme. Alors Z est de codimension au moins 2 dans X.*

Démonstration. On pose $U := X \setminus Z$ et on utilise la suite exacte longue 3.3. Compte tenu de l'hypothèse et de 3.1.4.8 on obtient que $H^0_Z(X, \mathcal{O}_X) = H^1_Z(X, \mathcal{O}_X) = 0$. D'après la propriété précédente cela donne $\operatorname{prof}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{O}(X)) \geqslant 2$, où $\mathfrak{a} := \mathcal{I}(Z)$. Mais d'après, 1.3.1.2 on obtient facilement $\operatorname{codim}_X(Z) \geqslant \operatorname{prof}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{O}(X))$. $\square$

3.1.5 Faisceaux inversibles, Fibrés en droites

Définition 3.1.5.1 (Faisceau inversible)**.** Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur un schéma X est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1. Autrement dit, tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert $U \subset X$ tel que $\mathcal{L}|_U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_U$.

On peut toujours trivialiser deux faisceaux inversibles sur un même recouvrement ouvert de X. On voit ainsi que le produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ de faisceaux inversibles est inversible. Par ailleurs, le faisceau dual $\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est clairement inversible car sur les ouverts U où $\mathcal{L}$ est trivial, se donner un morphisme $\mathcal{L}_{|U} \to \mathcal{O}_{|U}$ revient à se donner une section de $\mathcal{O}(U)$. De plus, l'application naturelle $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X, (s, f) \mapsto f(s)$ est un isomorphisme. Ainsi, les classes d'isomorphie de faisceaux inversibles sur X munies du produit tensoriel forment un groupe appelé groupe de Picard de X, noté $\mathrm{Pic}(X)$.

Exemple 3.1.5.2. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine irréductible. Alors se donner un faisceau inversible sur X revient (à isomorphisme près) à se donner un idéal fractionnaire I de A qui est inversible (cf 1.1.4.10), son inverse est alors $I^{-1} := (A : I)$. Les idéaux fractionnaires inversibles donnant le faisceau inversible trivial sont les idéaux fractionnaires principaux. Le groupe de Picard de X est ainsi isomorphe au groupe des idéaux fractionnaires inversibles modulo les idéaux fractionnaires principaux. Les idéaux de A qui sont inversibles forment une partie génératrice de ce groupe.

Si de plus A est localement factoriel, par exemple si X est lisse, les idéaux inversibles sont les idéaux de hauteur 1 pure, c'est-à-dire tels que leurs idéaux premiers associés sont tous de hauteur 1. De plus tout idéal inversible s'écrit de manière unique comme produit de puissances d'idéaux premiers de hauteur 1. Ainsi $\mathrm{Pic}(X)$ est donc le quotient du groupe libre sur les idéaux premiers de hauteur 1 par les idéaux fractionnaires principaux.

On va maintenant voir qu'un faisceau inversible sur une variété X s'incarne naturellement en une variété sur X, que l'on appelle un fibré en droites.

Définition 3.1.5.3 (Fibré en droites, morphismes, faisceau des sections)**.** Soit X une variété. Un fibré en droite sur X est une variété L munie d'un morphisme $\pi : L \to X$ tel que X admet un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ satisfaisant :

1. $\forall i \in I$, il existe un isomorphisme $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^{1`} - k$ de variétés sur U_i.
2. $\forall i, j \in I$, l'isomorphisme $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1_k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1_k$ est de la forme $(x, z) \mapsto (x, a_{ij}(x)z)$.

Un morphisme de fibrés en droites sur X est un morphisme de variétés sur X avec la conditions supplémentaire que les morphismes induits sur les fibres soient linéaires. Une section d'un fibré en droites (L, π) est une section de π, et on a la version locale de cette notion.

On constate qu'un fibré en droite (L, π) sur X est obtenu en recollant des fibrés en droites de la forme $U_i \times \mathbb{A}^1 \to U_i$ appelés fibrés triviaux via des automorphismes linéaires sur les intersections définis par des fonctions $a_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^*$, dites de transition. De plus, un automorphisme de fibré en droites est donné par une fonction $f \in \mathcal{O}(X)^*$. En effet, localement il s'agit d'automorphismes de fibrés triviaux qui sont nécessairement de cette forme.

Considérons un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X trivialisé sur un recouvrement affine $(U_i)_{i\in I}$ avec un générateur $s_i \in \mathcal{L}(U_i)$ sur chaque U_i. Sur $U_i \cap U_j$, on a $s_j = a_{ij}s_i$ avec $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. On considère au dessus de chaque U_i le fibré trivial $(U_i \times \mathbb{A}^1, \pi_i)$, et on les recolle avec des isomorphismes définis par $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \otimes_k k[t] \to \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \otimes k[u]$, $f \otimes_k 1 \mapsto f \otimes_k 1$, $1 \otimes_k t \mapsto a_{ij} \otimes_k u$. On a ainsi construit un fibré en droites sur X.

Réciproquement, considérons le $\mathcal{O}_X$-module des sections d'un fibré en droite L sur X. Sur les ouverts U_i où L est trivialisé on voit que les sections forment un faisceau isomorphe à $\mathcal{O}_{X|U_i}$. En effet se donner une section sur U_i revient à se donner un morphisme $U_i \to \mathbb{A}^1$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{O}_X(U_i)$. C'est donc un faisceau inversible. Les sections globales de L s'identifie via les trivialisations locales aux familles $(f_i)_{i\in I}$ telles que $f_i = a_{ij}f_j$ sur $U_i \cap U_j$. En effet, un telle section donne sur les intersections $U_i \cap U_j$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\mathrm{id} \times m_{a_{ij}}"] & & U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1 \\
& U_i \cap U_j \arrow[ul, "\mathrm{id} \times f_i"] \arrow[ur, "\mathrm{id} \times f_j"'] &
\end{tikzcd}$$
où $m_{a_{ij}}$ est la multiplication par a_{ij}

En composant les deux opérations on trouve le faisceau inversible dual du faisceau de départ, car les sections de L s'identifient naturellement à des éléments de $\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, et on a en particulier $\Gamma(X, L) = \Gamma(X, \mathcal{L}^\vee)$. Ces opérations sont fonctorielles et réalisent une anti-équivalence de catégorie entre la sous-catégorie des faisceaux inversibles sur X et la catégorie des fibrés en droites sur X. Cela permet de transporter la structure du groupe de Picard sur les classes d'isomorphie de fibrés en droites. En particulier, on définit le fibré dual L^{-1} de L comme le fibré en droites construit à partir de $\mathcal{L}^\vee$. Il est défini par les fonctions de transition a_{ij}^{-1}.

Remarque 3.1.5.4. Si on se donne un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une variété X, le fibré en droites qu'on lui associe dans la discussion précédente n'est autre que $\mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$, où $\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$ est l'algèbre symétrique associée à $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{O}_X$. En effet, on recolle les $\mathrm{Spec}_{U_i}(\mathrm{Sym}(\mathcal{L})_{|U_i})) \simeq \mathrm{Spec}_{U_i}(\mathcal{O}_{U_i}[t]) \simeq U_i \times_k \mathbb{A}^1_k$, où $(U_i)_i$ est un recouvrement qui trivialise $\mathcal{L}$.

Soit (L, π) un fibré en droite sur X, et $f : X' \to X$ un morphisme de variétés. L'image inverse de $f^*(L)$ est le produit fibré $X' \times_X L$ muni de sa projection vers X'. C'est un fibré en droites sur X', en effet c'est un recollement des fibrés triviaux $f^{-1}(U_i) \times \mathbb{A}^1 \to f^{-1}(U_i)$ via les fonctions de transition $f^\sharp(a_{ij})$. Si on a $L = \mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{L}))$ pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$, on constate que $f^*(L)$ est le fibré en droites construit à partir du faisceau inversible $f^*(\mathcal{L})$. Enfin, si on se donne un morphisme $\varphi : (L_1, \pi_1) \to (L_2, \pi_2)$ de fibrés en droites sur X et un morphisme de variétés $f : X' \to X$ on définit l'image inverse $f^*(\varphi)$ comme l'unique morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
f^*(L_1) = X' \times_X L_1 \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "f^*(\varphi)"] \arrow[ddr, bend right] & L_1 \arrow[dr, bend left, "\varphi"] & \\
& f^*(L_2) = X' \times_X L_2 \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
& X' \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.1.5.5. Notons qu'un fibré en droites (L, π) est muni d'une action de $\mathbb{G}_m$, c'est l'action de multiplication par les scalaires dans les fibres. L'ensemble L_0 des points fixes sous $\mathbb{G}_m$ est le fermé correspondant à l'image de la section nulle. Son complémentaire $L^\times := L \setminus L_0$ est une $\mathbb{G}_m$-variété et π se restreint en $\pi^\times : L^\times \to X$ qui est un quotient géométrique. En effet sur les U_i, on a $\pi^{\times -1}(U_i) \simeq U_i \times_k \mathbb{G}_m$ et l'action de $\mathbb{G}_m$ se fait par multiplication sur le facteur de droite. Cette action sur L se traduit par une graduation du faisceau d'algèbres $\pi_* \mathcal{O}_L = \mathrm{Sym}\, \mathcal{L} = \oplus_{n \geqslant 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X. Le sous-espace de poids 1 de $\mathcal{O}(L) = \pi_* \mathcal{O}_L(X)$ s'identifie alors à $\Gamma(X, L^{-1})$.

3.1.6 G-fibré principal

On se fixe un groupe algébrique G.

Définition 3.1.6.1 (G-fibré principal)**.** Soit X une G-variété, et $\pi : X \to Y$ un morphisme G-invariant. On dit que (X, π) est un G-fibré principal sur Y si

1. π est plat et surjectif.
2. Le morphisme $\Gamma : G \times X \to X \times_Y X$, $(g, x) \mapsto (x, g.x)$ est un isomorphisme.

Exemple 3.1.6.2.
1. La variété $G \times Y$ munie de sa deuxième projection, ou toute G-variété localement de cette forme.
2. Un fibré en droites est un $\mathbb{G}_m$-fibré principal. On peut montrer une "réciproque" (voir [10, 3.1.3]).

3.1.7 G-linearisation d'un fibré en droites

Dans cette section on s'interroge sur la possibilité d'étendre une action d'un groupe algébrique G sur une variété X à un fibré en droite (L, π) sur X tout en préservant la structure du fibré. C'est la notion de G-linéarisation.

Définition 3.1.7.1 (G-linéarisation)**.** Soit G un groupe algébrique, X une G-variété, et (L, π) un fibré en droites. Une G-linéarisation de (L, π) est une action de G sur L telle que π est G-équivariante et pour tout $(g, x) \in G \times X$ l'application $L_x \to L_{g.x}$, $l \mapsto g.l$ est linéaire.

Une action G-linéarisée définit donc un morphisme $G \to \operatorname{Aut} L$ à valeurs dans le groupe d'automorphisme de fibrés en droites de (L, π). On note $\alpha : G \times X \to X$ l'action de G sur X et $p_2 : G \times X \to X$ la projection sur X. Pour tout $g \in G$ on a une application :

$$g \times \mathrm{id} : X \to G \times X,\ x \mapsto (g, x)$$

Les images inverses des deux fibrés $\alpha^*(L)$ et $p_2^*(L)$ par cette application sont explicitement :

$$(g \times \mathrm{id})^* \alpha^*(L) = X \times_{G \times X} ((G \times X) \times_X L) = \{(x, (g', x'), l) \mid \alpha(g', x') = \pi(l) \text{ et } (g, x) = (g', x')\}$$

$$(g \times \mathrm{id})^* p_2^*(L) = X \times_{G \times X} ((G \times X) \times_X L) = \{(x, (g', x'), l) \mid x' = \pi(l) \text{ et } (g, x) = (g', x')\}$$

On obtient ainsi des isomorphismes canoniques $(g \times \mathrm{id})^* \alpha^*(L) \simeq g^* L$ et $(g \times \mathrm{id})^* p_2^*(L) \simeq L$, où $g^* L$ est l'image inverse de L par l'automorphisme de X associé à l'action de g, et on fait ces identifications par la suite. Ainsi, vu la discussion suivant 3.1.5.3, tout morphisme de fibrés en droites $\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$ induit pour tout $g \in G$ un morphisme $\Phi_g : g^*(L) \to L$.

Lemme 3.1.7.2. *Avec les notations ci-dessus, on a une correspondance bijective entre les G-linéarisations de L et les isomorphismes*

$$\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$$

de fibrés en droites sur $G \times X$ tels que $\Phi_{gh} = \Phi_h \circ h^*(\Phi_g)$ pour tous $g, h \in G$.

Démonstration. Soit $\beta : G \times L \to L$ une G-linéarisation. Par définition, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\beta} & L \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id \times \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Par la propriété universelle du produit fibré on a donc un morphisme $\gamma : G \times L \to \alpha^*(L)$ de variétés sur $G \times X$. On remarque que l'on a un isomorphisme canonique $G \times L \to p_2^*(L)$, $(g, l) \mapsto ((g, \pi(l)), l)$. Avec cette identification, γ s'écrit explicitement $\gamma(g, l) = ((g, \pi(l)), \beta(g, l))$. C'est un isomorphisme car on a un inverse évident $\Phi((g, x), l) = (g, \beta(g^{-1}, l))$. Pour $g \in G$ fixé, l'image inverse de γ par $g \times \mathrm{id}$ est simplement $\gamma_g : L \to g^* L, l \mapsto (\pi(l), \beta(g, l))$. Soit maintenant $h \in G$, et on note également h l'automorphisme de X donné par son action. En tenant compte des identifications précédentes on a pour $l \in L$ les formules $h^*(\gamma_g) \circ \gamma_h(l) = h^*(\gamma_g)(\pi(l), \beta(h, l)) = (\pi(l), \beta(g, \beta(h, l))) = (\pi(l), \beta(gh, l)) = \gamma_{gh}(l)$. Ainsi, Φ satisfait la condition de l'énoncé.

Réciproquement, étant donné un Φ comme dans l'énoncé, on note $\gamma := \Phi^{-1}$ et $p_L : \alpha^*(L) \to L$ la projection sur L. On a alors un morphisme $\beta := p_L \circ \gamma : G \times L \to L$. La condition sur Φ exprime qu'il s'agit d'une action de G sur L. Enfin, pour $g \in G$ fixé, $p_L \circ \gamma_g$ est un automorphisme de (L, π), autrement dit on obtient un diagramme commutatif comme ci-dessus. On a donc bien une G-linéarisation. □

Lemme 3.1.7.3. *Soient G un groupe algébrique connexe, X une G-variété irréductible, et (L, π) un fibré en droites sur X. Alors L admet une G-linéarisation si et seulement si $\alpha^*(L)$ et $p_2^*(L)$ sont isomorphes en tant que fibrés en droites sur $G \times X$.*

Démonstration. L'implication directe est contenue dans le lemme précédent. Pour la réciproque, on considère un isomorphisme $\Phi : \alpha^*(L) \to p_2^*(L)$ de fibrés en droites sur $G \times X$. Comme $\alpha(e, x) = x$ pour tout $x \in X$, on a une identification canonique $(e \times \mathrm{id})^*\alpha^*(L) \simeq L$, d'où un automorphisme $(e \times \mathrm{id})^*(\Phi) : L \to L$ de fibré en droites. Cet automorphisme est donné d'après 3.1.5.3 par une fonction $f \in \mathcal{O}(X)^*$. En remplaçant Φ par $\Phi \circ p_2^\sharp(f^{-1})$, on peut supposer $f = 1$. On obtient ainsi un morphisme $\beta : G \times L \to L$ qui satisfait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \xrightarrow{\beta} & L \\ \big\downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

De plus, on a modifié Φ de telle manière que l'on ait $\forall l \in L$, $\beta(e, l) = l$. Il reste maintenant à prouver que la condition d'associativité d'une action de groupe est satisfaite. On note $\beta_1 : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \beta(g, \beta(h, x))$, $\beta_2 : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \beta(gh, x)$, et par abus on note encore $\alpha : G \times G \times X \to X, (g, h, x) \mapsto \alpha(gh, x)$. On obtient deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times L & \xrightarrow{\beta_1} & L \\ \big\downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times G \times L & \xrightarrow{\beta_2} & L \\ \big\downarrow{\scriptstyle id\times\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times G \times X & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

On obtient ainsi deux isomorphismes $\gamma_1 : G \times G \times L \to \alpha^*(L), (g, h, l) \mapsto ((g, h, \pi(l)), \beta_1(g, h, l))$ et $\gamma_2 : G \times G \times L \to \alpha^*(L), (g, h, l) \mapsto ((g, h, \pi(l)), \beta_2(g, h, l))$. La condition d'associativité correspond à $\gamma_1\gamma_2^{-1} = \mathrm{id}$. Or $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est un automorphisme du fibré en droite $(G \times G \times L, \mathrm{id} \times \pi)$, donc correspond à une fonction $\varphi \in \mathcal{O}(G \times G \times X)^*$. D'après 3.2.5.5, il existe $\chi \in X^*(G \times G)$ et $\psi \in \mathcal{O}(X)^*$ tels que $\varphi(g, h, x) = \chi(g, h)\psi(x)$ pour tout $g, h \in G$ et $x \in X$. En évaluant en $g = h = e$ on obtient $\psi = 1$, puis comme $\varphi(g, e, x) = 1 = \varphi(e, g, x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$, on obtient $\chi(g, e) = \chi(e, g)$ pour tout $g \in G$. Comme l'application naturelle $X^*(G) \times X^*(G) \to X^*(G \times G)$ est un isomorphisme, on conclut que $\chi = 1$ et donc $\varphi = 1$, ce qui termine la preuve. ☐

Proposition 3.1.7.4. *Soit X une G-variété et L un fibré en droite G-linéarisé sur X. Alors le k-espace vectoriel des sections globales $\Gamma(X, L)$ a une structure naturelle de G-module.*

Démonstration. L^{-1} admet aussi une G-linéarisation d'après 3.1.7.2 et le fait que l'image inverse d'un fibré en droite commute à la prise de son dual. L^{-1} est en fait une $G \times \mathbb{G}_m$-variété où l'action de $\mathbb{G}_m$ est l'action naturelle sur les fibres par multiplication. D'après 2.1.2.6, $\mathcal{O}(L^{-1})$ est un $G \times \mathbb{G}_m$-module, donc en particulier un $\mathbb{G}_m$-module. Le sous-espace de poids 1 pour l'action de $\mathbb{G}_m$ de ce module est $\Gamma(X, L)$ d'après 3.1.5.5. Il est facile de vérifier que ce sous-espace est stable par l'action de G, ce qui en fait un G-module. ☐

3.2 Diviseurs

3.2.1 Diviseurs de Weil

En se rappelant le résultat 1.3.3.3, on voit que la "géométrie en codimension 1" d'une variété normale irréductible, c'est-à-dire le comportement des fonctions sur les fermés irréductibles de codimension 1, contient beaucoup d'information sur la variété. Ces fermés sont appelés des diviseurs premiers, on va voir qu'ils permettent de définir un invariant particulièrement intéressant de la variété, et fondamental pour la construction de l'anneau de Cox, c'est le groupe des classes. Notre cadre est celui d'une variété normale que l'on supposera de plus irréductible pour plus de simplicité, suivant la remarque 1.3.3.1.

Définition 3.2.1.1 (Diviseur premier, diviseur de Weil, diviseur effectif)**.** Soit X une variété normale irréductible. Un diviseur premier D est une sous-variété fermée irréductible de codimension 1. On définit $\mathrm{WDiv}(X)$ le groupe abélien libre engendré par les diviseurs premiers. Un élément de $\mathrm{WDiv}(X)$ est appelé un diviseur de Weil. Enfin, un diviseur est dit effectif si il est à coefficients $\geqslant 0$.

On introduit maintenant pour chaque diviseur premier D une valuation sur $k(X)$ donnant des informations sur le comportement des fonctions rationnelles en D. C'est l'analogue de l'ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fonction rationnelle de la droite affine en un point. Soit η le point générique de D, et $\mathcal{O}_{\eta,X}$ son anneau local. Par hypothèse et grâce aux propriétés de la localisation, il est noethérien normal et de dimension 1, c'est donc un anneau de valuation discrète (1.1.4.7). La valuation associée $v_D : k(X) \to \mathbb{Z}$ donne par définition l'ordre d'annulation d'une fonction rationnelle le long de D. La propriété ci-dessous montre que les fonctions rationnelles permettent de définir des diviseurs de Weil.

Proposition 3.2.1.2. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors $v_D(f) = 0$ sauf pour un nombre fini de diviseurs premiers D.*

Démonstration. Soit $f = g/h \in k(X)^*$, où l'on peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine. Comme $v_D(f) = v_D(g) - v_D(h)$, on peut supposer $f \in A$, et non-inversible. Soit D un diviseur premier et $\mathfrak{p}$ son point générique. Si $f \in A_{\mathfrak{p}}^*$ alors $v_D(f) = 0$. Sinon, $f \in \mathfrak{p}$ et donc $D \subset \mathcal{V}_X(f)$. Or, d'après 1.1.2.4 et 1.1.1.5, les éléments minimaux du support de $A/(f)$ sont en bijection avec les idéaux premiers associés à (f), qui sont tous de hauteur 1. On en déduit que les composantes irréductibles Z_i de $\mathcal{V}_X(f)$ qui leur correspondent sont des diviseurs premiers, en nombre fini. Ainsi $v_D(f) = 0$ à moins que D ne soit l'un des Z_i. □

Ainsi l'application $k(X)^* \to \operatorname{WDiv}(X)$, $f \mapsto \operatorname{div}(f) := \sum_D v_D(f)D$ définit un morphisme de groupes. Son image est le *groupe des diviseurs principaux* noté $\operatorname{PDiv}(X)$. La relation modulo $\operatorname{PDiv}(X)$ s'appelle *l'équivalence linéaire*, et le groupe quotient $\operatorname{Cl}(X)$ est le *groupe des classes de diviseurs*. Le groupe des classes de diviseurs de X est un invariant en général difficile à calculer. On liste ci-dessous quelques outils et exemples.

Proposition 3.2.1.3. *Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ une variété affine normale et irréductible. Alors A est factoriel si et seulement si $\operatorname{Cl}(X) = 0$.*

Démonstration. C'est une conséquence de 1.1.2.4 et 1.1.2.5. Voir [5] II.6.2. □

Corollaire 3.2.1.4. $\operatorname{Cl}(\mathbb{A}_k^n) = 0$ *pour* $n \geqslant 1$.

Théorème 3.2.1.5. *Soit X une variété normale et irréductible et Z une sous-variété fermée propre. On pose $U := X \setminus Z$. Alors :*

1. *Le morphisme $\operatorname{Cl}(X) \to \operatorname{Cl}(U)$ défini par $\sum_i n_i D_i \mapsto \sum_i n_i(D_i \cap U)$, avec $D_i \cap U = 0$ si $D_i \cap U = \emptyset$, est un morphisme de groupe surjectif.*
2. *Si $\operatorname{codim}(Z, X) \geqslant 2$, alors $\operatorname{Cl}(X) \to \operatorname{Cl}(U)$ est un isomorphisme.*
3. *Soient $D_1, ..., D_s$ les composantes irréductibles de Z qui sont des diviseurs. Alors la suite ci-dessous exacte*

$$0 \to \mathcal{O}(X)^* \to \mathcal{O}(X \setminus \cup_{i=1}^s D_i)^* \xrightarrow{\operatorname{div}} \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}D_i \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cl}(X) \xrightarrow{.\cap U} \operatorname{Cl}(U) \to 0$$

Démonstration.

1. Si $D \cap U \neq \emptyset$ alors $\dim X = \dim U$ et $\dim D = \dim D \cap U$ car ce sont des ouverts de variétés irréductibles donc la dimension est préservée. Ainsi cela définit une application $\operatorname{WDiv}(X) \to \operatorname{WDiv}(U)$ qui est un morphisme par construction. De plus, comme un diviseur principal est envoyé sur un diviseur principal, on a bien le morphisme attendu. Il est surjectif car pour tout $D \in \operatorname{WDiv}(U)$ premier, on a $D = \overline{D} \cap U$.
2. Dans ce cas on ne peut avoir $D \subset Z$ cause de la dimension donc $D \cap U \neq \emptyset$. Ainsi, le noyau du morphisme $\operatorname{WDiv}(X) \to \operatorname{WDiv}(U)$ est exactement $\operatorname{PDiv}(X)$ d'où l'isomorphisme.
3. Le noyau de $.\cap U$ est exactement l'ensemble des $\pi(D)$ où D est un diviseur dont le support est contenu dans $X \setminus U = Z$. De plus ce morphisme est surjectif donc les deux dernières flèches sont exactes. La deuxième flèche est injective car X est irréductible, et son image est bien l'ensemble des fonctions régulières et inversibles sur U de diviseur nul. Cela montre l'exactitude des deux premières flèches. La troisième et la quatrième flèches sont exacts par définition.

□

3.2.2 Faisceau d'algèbres divisorielles

La proposition suivante montre que l'on peut caractériser les sections du faisceau structural d'une variété normale irréductible en terme de diviseurs.

Proposition 3.2.2.1. *Soit X une variété normale et irréductible et $f \in k(X)^*$. Alors*

1. $\operatorname{div}(f) \geqslant 0 \iff f \in \mathcal{O}_X(X)$.
2. $\operatorname{div}(f) = 0 \iff f \in \mathcal{O}_X(X)^*$.

Démonstration. Il est suffisant de vérifier ces propriétés localement sur les ouverts affines. Or dans ce cas, f est une section globale si et seulement si f appartient à tous les anneaux locaux des diviseurs premier d'après 1.1.2.4. Cette dernière condition revient à dire que $\operatorname{div}(f)$ est effectif, cela prouve 1. Pour la deuxième assertion, on remarque que $\operatorname{div}(f) = 0 \iff \operatorname{div}(f) \geqslant 0$ et $\operatorname{div}(f^{-1}) \geqslant 0$. □

Plus généralement, on définit pour chaque diviseur $D \in \operatorname{WDiv}(X)$ le *faisceau divisoriel* $\mathcal{O}_X(D)$ associé à D en posant

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \{f \in k(X)^* \mid (\operatorname{div}(f) + D)_{|U} \geqslant 0\} \cup \{0\} \text{ pour tout ouvert } U \subset X$$

C'est un sous $\mathcal{O}_X$-module de $k(X)$, ce qui se vérifie grâce aux propriétés des valuations v_D. Pour tout ouvert affine U de X, les sections sur U d'un faisceau divisoriel forment un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_X(U)$ que l'on peut décrire explicitement :

Proposition 3.2.2.2. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ une variété affine normale et irréductible, et $D =:= \sum_i a_i D_i$ un diviseur de Weil sur X. Alors*

1. $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigcap_{\operatorname{ht} \mathfrak{p}_i = 1} (\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i})^{-a_i}$.
2. *Si D est premier correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D)) = \mathfrak{p}$. Si de plus $\mathfrak{p}$ est inversible et $a \in \mathbb{Z}$, on a $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(aD)) = \mathfrak{p}^{-a}$.*

Démonstration. 1. Cela vient de la discussion suivant 1.1.4.9.

2. Dans ce cas, D est effectif, donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D))$ est un sous-module de A, donc un idéal. On a donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-D)) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$. Pour l'autre assertion, c'est immédiat car $\mathcal{O}_X(D)$ est alors inversible d'après 3.1.5.2, c'est-à-dire que D est de Cartier.

□

On forme maintenant la somme directe $\mathcal{S} := \bigoplus_{D \in \operatorname{WDiv}(X)} \mathcal{O}_X(D)$. C'est naturellement une $\mathcal{O}_X$-algèbre WDiv-graduée. En effet, pour tout ouvert $U \subset X$, prenons des sections $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D_1))$, $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D_2))$, et formons le produit st dans $k(X)$. On a alors $\operatorname{div}(st)_{|U} + D_{1|U} + D_{2|U} = \operatorname{div}(s)_{|U} + D_{1|U} + \operatorname{div}(t)_{|U} + D_{2|U} \geqslant 0$, donc st définit bien un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D_1 + D_2))$.

Définition 3.2.2.3 (Faisceau d'algèbres divisorielles)**.** Soit X une variété normale et irréductible. Le faisceau d'algèbres divisorielles associé à un sous-groupe $K \subset \operatorname{WDiv}(X)$ est le faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres K-graduées

$$\bigoplus_{D \in K} \mathcal{S}_D, \qquad \mathcal{S}_D := \mathcal{O}_X(D)$$

Exemple 3.2.2.4. On considère la droite projective $\mathbb{P}^1$, $D = \{\infty\}$ et $K = \mathbb{Z}D$. Cherchons la forme d'une section $f \in S_{nD}(\mathbb{P}^1)$. On se place sur la carte affine $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ associée au repère projectif $(\infty, 0, 1) = (e_0, e_1, e_0 + e_1)$, on note z la coordonnée associée. Par hypothèse, f est régulière sur U_0, c'est donc un polynôme en z. On fait agir l'homographie $z \mapsto w = 1/z$ pour se placer sur la carte $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{e_1\}$ associée au repère $(0, \infty, 1)$. Sur cette carte, la fonction qui coïncide avec f sur $U_0 \cap U_1$ est $g(w) = f(1/w)$. Or si on écrit $f(z) = z^k h(z)$ avec $z \nmid h(z)$, on obtient $g(w) = w^{-k-\deg(h)} h(w)$. Comme on doit avoir $k + \deg(h) \leqslant n$, on obtient que f est un polynôme de degré $\leqslant n$.
Ainsi on voit que l'application $\varphi_n : k[t_0, t_1]_n \to S_{nD}(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ est un isomorphisme de k-ev. De plus, on a facilement $\varphi_n \varphi_m = \varphi_{n+m}$. Finalement, $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ avec $\varphi : k[t_0, t_n] \to S(\mathbb{P}^1), f \mapsto f(1, z)$ et $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z} \to K, n \mapsto nD$ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Proposition 3.2.2.5. *Soit X une variété normale et irréductible et $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. Alors $\mathcal{O}_X(D)$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. En particulier, le faisceau d'algèbres divisorielles associé à un sous-groupe $K \in \mathrm{WDiv}(X)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente.*

Démonstration. On peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine car le problème est local. Alors d'après 3.1.1.3, $\mathcal{O}_X(D) \simeq \tilde{M}$ où $M = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Il s'agit donc de montrer que M est un A-module de type fini. Mais d'après 3.2.2.2, on voit que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ est un idéal fractionnaire de A, il est donc isomorphe à un idéal de A en tant A-module après multiplication par une certaine fonction rationnelle. Comme A est noetherien cela conclut la preuve. $\square$

Proposition 3.2.2.6. *Soit X une variété normale et irréductible et $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. Alors pour tout ouvert $U \subset X$ tels que $X \setminus U$ soit de codimension $\geqslant 2$ dans X, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.*

Démonstration. Encore une fois, on peut traiter le problème localement et supposer $X = \operatorname{Spec} A$ affine. La restriction est injective et comme en 1.3.3.3, on remarque que U contient tous les premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1. On écrit $D = a_1 D_1 + ... + a_r D_r$ et on considère les injections dans les tiges $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{-a_{\mathfrak{p}}}$ (voir 3.2.2.2). On construit ainsi l'inverse de la restriction $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} (\mathfrak{p}A_p)^{-a_{\mathfrak{p}}}$, en procédant comme en 1.3.3.3. $\square$

Corollaire 3.2.2.7. *Soit X une variété normale et irréductible et $D \in \mathrm{WDiv}(X)$. On a des isomorphismes donnés par la restriction à X_{reg}*

$$\mathrm{WDiv}(X) \simeq \mathrm{WDiv}(X_{reg}), \text{ et } \mathcal{O}_X(D) = i_* \mathcal{O}_{X_{reg}}(D), \text{ où } i : X_{reg} \to X \text{ est l'inclusion.}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente, de 3.2.1.5, et de 1.3.3.2. $\square$

3.2.3 Diviseurs de Cartier et groupe de Picard

Sur des variétés quelconques, par exemple avec des singularités, les anneaux locaux associés aux diviseurs premiers ne sont pas en général des anneaux de valuation discrète. On a alors des difficultés pour définir par exemple le diviseur d'une fonction rationnelle. On a néanmoins la notion générale de diviseur de Cartier, qui dans le cadre des variétés normales irréductibles correspondra aux diviseurs de Weil *localement principaux.*

Définition 3.2.3.1 (Diviseur de Cartier)**.** Soit X une variété irréductible. Un diviseur de Cartier sur X est une section globale du faisceau $k(X)^*/\mathcal{O}_X^*$. Ainsi un diviseur de Cartier est la donnée d'une famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$ telle que les ouverts U_i recouvrent X, et pour tous $i, j \in I$, on a $f_i \in k(X)^*$ et $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$.

Un diviseur de Cartier est dit principal si il provient d'une section globale de $k(X)^*$ c'est-à-dire d'une fonction rationnelle. Deux diviseurs de Cartier sont dits linéairement équivalents si ils sont égaux modulo le sous-groupe des diviseurs principaux. Le groupe quotient se note $\mathrm{CaCl}(X)$.

Soit X une variété irréductible. On remarque que pour un diviseur de Cartier $D = (U_i, f_i)_{i \in I}$ de X, $\mathcal{O}_X(D)_{|U_i}$ est le $(\mathcal{O}_X)_{|U_i}$-module libre de base (f_i^{-1}). Il est donc localement libre de rang 1, c'est-à-dire inversible. On récupère facilement D à partir de $\mathcal{O}_X(D)$ en prenant un recouvrement qui le trivialise. Enfin, pour tout sous-faisceau inversible de $k(X)$ on construit de la même manière un diviseur de Cartier. On a donc une correspondance bijective entre diviseurs de Cartier et sous-faisceaux inversibles de $k(X)$.

$$\big\{\text{Diviseurs de Cartier sur } X\big\} \leftrightarrow \big\{\text{Sous-faisceaux inversibles de } k(X)\big\}$$

Par cette correspondance, deux diviseurs sont linéairement équivalents si et seulement si les faisceaux inversibles sont isomorphes. On a ainsi définit une application injective $\mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ dont on voit facilement que c'est un morphisme de groupes. Comme X est supposé irréductible, c'est un isomorphisme car tout faisceau inversible est isomorphe à un sous-faisceau inversible de $k(X)$. En résumé on a le résultat suivant :

Proposition 3.2.3.2. *Soit X une variété irréductible. L'application $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ définit un isomorphisme de groupes* $\mathrm{CaCl}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$.

On suppose à nouveau X normale et irréductible. Dans ce cadre, tout diviseur de Cartier $(U_i, f_i)_{i\in I}$ définit un unique diviseur de Weil de la façon suivante. Pour tout diviseur premier D, on choisit un indice $i \in I$ tel que $U_i \cap D \neq \emptyset$ et on prend $v_D(f_i)$ pour coefficient de D. Cette somme est finie par la même preuve que 3.2.1.2. Par ailleurs elle ne dépend pas du choix des indices car si j est un autre indice possible, $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ par définition, donc $v_D(f_i) = v_D(f_j)$. On a ainsi un diviseur de Weil tel que sa restriction à tout ouvert du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ est principal. D'où la terminologie "localement principal". Ce constat permet de voir $\mathrm{CaCl}(X)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Cl}(X)$ car on vérifie que les diviseurs principaux se correspondent.

Le sous-groupe $\mathrm{CaCl}(X)$ est propre en général (cf [5] 6.11.3). En revanche, si X est lisse, tout diviseur de Weil est localement principal . En effet dans ce cas, les anneaux locaux sont factoriels, on obtient ainsi en tout point une équation locale d'un diviseur premier car un idéal premier de hauteur 1 d'un anneau factoriel est principal, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.2.3.3. *Soit X une variété normale irréductible, $D, E \in \mathrm{WDiv}\, X$ avec D de Cartier. Alors le morphisme naturel $\alpha : \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(E) \to \mathcal{O}_X(D+E)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Écrivons $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$. Alors sur chaque U_i, le morphisme α induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-module. En effet on a un morphisme inverse, il s'agit de la multiplication par f_i composée avec l'inverse de l'isomorphisme $\mathcal{O}_{U_i}(D) \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{O}_{U_i}(E) \simeq \mathcal{O}_{U_i}(D)$, localement donné par $a \otimes b \mapsto abf_i$. ☐

Par analogie avec les diviseurs de Weil, un diviseur de Cartier $D = (U_i, f_i)_{i\in I}$ est dit effectif si pour tout $i \in I$, $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$. Dans ce cas $\mathcal{O}_X(-D)$ est un sous $\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{O}_X$, c'est concrètement le faisceau d'idéaux localement généré sur chaque U_i par f_i. D'après 1.3.1.2 cela définit un sous-schéma fermé de X de codimension 1. L'inclusion $\mathcal{O}_X(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ est une section globale de $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(-D), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(D)$ appelée *section canonique* et notée 1_D puisqu'elle correspond à la multiplication par 1. Réciproquement, la donnée d'un couple $(\mathcal{L}, s)$ constitué d'un faisceau inversible sur X et d'une section globale définit un diviseur de Cartier effectif de la manière suivante. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement qui trivialise $\mathcal{L}$. Sur chaque U_i on a un isomorphisme $\varphi_i : \mathcal{L}_{|U_i} \to \mathcal{O}_{X|U_i}$. On voit que $(U_i, \varphi_i(s))_i$ définit un diviseur de Cartier effectif indépendant du choix des isomorphismes φ_i, et donc du couple $(\mathcal{L}, s)$ à isomorphisme près, on l'appelle *le diviseur des zéros* de s. Lorsque l'on a un isomorphisme $(\mathcal{L}, s) \simeq (\mathcal{O}_X(D), f)$, on note ce diviseur $\mathrm{div}_D(f)$ et on a $\mathrm{div}_D(f) = \mathrm{div}(f) + D$. On voit qu'il existe un unique diviseur de Cartier effectif D tel que $(\mathcal{L}, s) \simeq (\mathcal{O}_X(D), 1_D)$. Les deux procédés que l'on vient de décrire sont inverses l'un de l'autre, on obtient ainsi une correspondance bijective :

$$\left\{\text{Diviseurs de Cartier effectifs sur } X\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Classes d'isomorphies de couples } (\mathcal{L}, s)\\ \text{constitués d'un faisceau inversible}\\ \text{et d'une section globale non-nulle}\end{array}\right\}$$

En faisant varier s non-nulle dans les couples $(\mathcal{O}_X(D), s)$ tels que ci-dessus, on obtient tous les diviseurs de Cartier effectifs linéairement équivalents à D. En effet, $\mathrm{div}_D(s)$ est par définition un diviseur effectif linéairement équivalent à D. Réciproquement un diviseur effectif linéairement équivalent à D s'écrit $D + \mathrm{div}(s) \geqslant 0$ où s est donc une section globale s de $\mathcal{O}_X(D)$.

On peut étendre la correspondance précédente en une correspondance entre diviseurs de Weil effectifs et couples $(\mathcal{O}_X(D), s)$ constitués d'un faisceau divisoriel et d'une section globale. En effet on a d'une part un isomorphisme $\mathrm{WDiv}(X) \simeq \mathrm{WDiv}(X_{reg})$ respectant l'effectivité (3.2.2.6 et 3.2.1.5). D'autre part on a une égalité $\mathcal{O}_X(D) = i_*\mathcal{O}_{X_{reg}}(D)$, pour tout diviseur $D \in \mathrm{WDiv}(X)$, où $i : X_{reg} \to X$ est l'inclusion. Comme tous les diviseurs de Weil sont de Cartier sur X_{reg}, on obtient

$$\left\{\text{Diviseurs de Weil effectifs sur } X\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Classes d'isomorphies de couples } (\mathcal{O}_X(D), s)\\ \text{constitués d'un faisceau divisoriel}\\ \text{et d'une section globale non-nulle}\end{array}\right\}$$

On note encore $\mathrm{div}_D(s) := \mathrm{div}(s) + D$ les diviseurs de Weil effectifs obtenus de cette manière.

3.2.4 L'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$

Faisceaux inversibles sur $\mathbb{P}^n_k$

Proposition 3.2.4.1. *Soit* $X := \mathbb{P}^n_k = \operatorname{Proj} k[x_0, ..., x_n]$. *Pour tout diviseur* $D = \sum a_i D_i \in \mathrm{WDiv}(X)$, *on définit le degré de* D *par* $\deg D := \sum a_i \deg D_i$, *où* $\deg D_i$ *est le degré de l'équation définissant* D_i *dans une carte affine standard qui intersecte* D_i. *Soit* H *l'hyperplan* $x_0 = 0$. *Alors*

1. *Si* D *est un diviseur de degré* $d \in \mathbb{Z}$, *alors* $D \sim dH$.
2. *Pour tout* $f \in k(X)^*$, *on a* $\deg \operatorname{div}(f) = 0$.
3. *Le degré définit un isomorphisme* $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. [5] II.6.4 □

La proposition précédente et 3.2.3.2 nous dit que $\mathrm{Pic}(X)$ est engendré librement par $\mathcal{O}_X(H)$ pour tout hyperplan H de $\mathbb{P}^k_n$. De plus, comme $k[x_0, ..., x_n]$ est engendré par des éléments homogènes de degré 1, le faisceau $\mathcal{O}_X(l)$ est inversible pour tout $l \in \mathbb{Z}$, et on a $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(l) \simeq \mathcal{O}_X(m+l)$, pour tout $m, l \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathcal{O}_X(1)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(H)$, on en déduit que tout faisceau inversible sur $\mathbb{P}^n_k$ est isomorphe à un faisceau $\mathcal{O}_X(l)$, pour un entier $l \in \mathbb{Z}$.

Faisceau engendré par ses sections globales, Image inverse d'une section globale

Un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ sur un schéma X est *engendré par des section globales* si on a une suite exacte

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to 0$$

Soient $f : Y \to X$ un morphisme de schémas, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module engendré par des sections globales $s_1, ..., s_n$. On considère le morphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-modules $\alpha : \mathcal{F} \to f_* f^* \mathcal{F}$, où la structure de $\mathcal{O}_X$-module sur $f_* f^* \mathcal{F}$ est donnée par $\lambda.t = f^\sharp(\lambda) t$ pour tout ouvert $V \subset X$, $\lambda \in \mathcal{O}_X(V)$, $t \in f_* f^* \mathcal{F}(V)$. On définit *l'image inverse* de la section s_i par $f^*(s_i) := \alpha(X)(s_i)$, c'est une section globale du faisceau de modules $f^*(\mathcal{F})$. On vérifie que $f^*(\mathcal{F})$ est engendré par les sections globales $f^*(s_1), ..., f^*(s_n)$.

Considérons maintenant une paire $(\mathcal{L}, s)$ constituée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, et d'une section globale s. On note $\mathcal{V}_X(s)$ le support du diviseur des zéros de s, et $X_s = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} s_x = \mathcal{L}_x\} = \{x \in X \mid s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x\}$ son complémentaire. Si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, il s'agit de l'ouvert principal X_s, et on a de plus $f^{-1}(X_s) = X_{f^\sharp(s)} = X_{f^*(s)}$ car $f^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ et $\alpha = g^\sharp$ dans ce cas. Dans le cas général, on voit facilement que $f^* \mathcal{L}$ est inversible et en raisonnant localement sur des ouverts affines qui trivialisent $\mathcal{L}$, on voit d'après ce qui précède que $f^{-1}(X_s) = Y_{f^*(s)}$.

Enfin, si $s_1, ..., s_n$ sont des sections globales qui engendrent $\mathcal{L}$, on voit que (X_{s_i}) est un recouvrement de X qui trivialise $\mathcal{L}$. En effet, sur chaque Y_{l_i}, on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{X_{s_i}} \to \mathcal{L}_{|X_{s_i}}$, $\lambda \mapsto \lambda s_i$, et par hypothèse, l'intersection $\cap_{i=1}^n \mathcal{V}_X(s_i)$ est vide. Enfin, on note sans ambiguïté s_j/s_i l'unique élément de $\mathcal{O}(X_{s_i})$ tel que $s_j/s_i.s_i = s_j$ par l'isomorphisme précédent.

Morphismes vers l'espace projectif

Soit A un anneau, X un schéma sur $\operatorname{Spec} A$, et $f : X \to \mathbb{P}^n_A$ un morphisme de schémas sur $\operatorname{Spec} A$ où $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[x_0, ..., x_n]$. On considère le faisceau décalé $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_A$. C'est un faisceau inversible engendré par les sections globales $x_0, ..., x_n$. Les sections globales $s_i := f^*(x_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$, engendrent $f^* \mathcal{O}(1)$ d'après la partie précédente. Sur la carte affine standard $U_i := \mathcal{O}(1)_{x_i}$, la A-algèbre $\mathcal{O}_{P^n_A}(U_i)$ est engendrée par les éléments x_j/x_i et on a $s_j/s_i.s_i = s_j = \alpha(U_i)(x_j) = \alpha(U_i)(x_j/x_i.x_i) = f^\sharp(x_j/x_i).\alpha(U_i)(x_i) = f^\sharp(x_j/x_i).s_i$. On a donc nécessairement $f^\sharp(x_j/x_i) = s_j/s_i$. Comme les U_i sont affines, cela définit des morphismes $f_i : X_{s_i} \to P^n_A$ en composant avec l'inclusion. Ces morphismes se recollent en un unique morphisme, car ils coïncident sur les $X_{s_i} \cap X_{s_j}$. En résumé, on récupère f par la donnée des sections s_i. Ainsi f est l'unique morphisme tel que $f^*(x_i) = s_i$.

Réciproquement montrons que la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et de sections globales $s_0, ..., s_n$ qui l'engendrent définissent un unique morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_A$ tel que $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}(1)$, ce dernier isomorphisme étant celui qui envoie $f^*(x_i)$ sur s_i. Si f existe avec ces propriétés, il est unique d'après ce qui précède. Pour l'existence, on construit comme précédemment des morphismes $f_i : X_{s_i} \to U_i$ qui se recollent en un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_A$. Par construction, $\mathcal{L}$ et $f^*\mathcal{O}(1)$ se trivialisent sur le même recouvrement $(f^{-1}(U_i) = X_{s_i} = X_{f^*(x_i)})_{0 \leqslant i \leqslant n}$. On a des isomorphismes locaux $\varphi_i : \mathcal{L}_{|f^{-1}(U_i)} \to f^*\mathcal{O}(1)_{|f^{-1}(U_i)}$, $s_i \mapsto f^*x_i$. Ce sont des sections locales de $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}(1))$ sur un recouvrement de X. Pour vérifier qu'elles coïncident aux intersections $X_{s_i} \cap X_{s_j}$, on remarque que l'on a $s_i/s_j = f^\sharp(U_i \cap U_j)(x_i/x_j) = f^*(x_i)/f^*(x_j) \in \mathcal{O}_X(X_{s_i} \cap X_{s_j})^*$. Ces sections se recollent donc en un unique isomorphisme $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}(1)$ qui est bien l'isomorphisme recherché. En résumé on a obtenu une correspondance bijective

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morphismes de schémas sur } \operatorname{Spec} A \\ f : X \to \mathbb{P}^n_A \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Classes d'isomorphies de uplets } (\mathcal{L}, s_0, ..., s_n) \\ \text{constituées d'un faisceau inversible} \\ \text{et de sections globales qui l'engendrent} \end{array} \right\}$$

Variétés quasi-projectives, faisceaux amples

On se fixe un anneau de base A.

Définition 3.2.4.2 (Morphisme projectif, quasi-projectif)**.** Un morphisme de schémas $f : X \to \operatorname{Spec} A$ est projectif si il se factorise à travers une immersion fermée $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ sur $\operatorname{Spec} A$, pour un entier $n > 0$. Le morphisme est quasi-projectif si il se factorise à travers une immersion ouverte $X \to X'$ sur $\operatorname{Spec} A$ composée avec un morphisme projectif $X' \to \operatorname{Spec} A$.

Définition 3.2.4.3 (Schéma projectif, quasi-projectif)**.** Un schéma X sur $\operatorname{Spec} A$ est projectif (resp. quasi-projectif) si le morphisme structural est projectif (resp. quasi-projectif).

Définition 3.2.4.4 (Faisceau très ample relativement à $\operatorname{Spec} A$)**.** Soit X un schéma sur $\operatorname{Spec} A$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X engendré par une famille finie de sections globales. Si ces sections définissent une immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$ sur $\operatorname{Spec} A$, on dit que $\mathcal{L}$ est très ample relativement à $\operatorname{Spec} A$. Cela revient à dire que $\mathcal{L} \simeq i^*\mathcal{O}(1)$ pour une immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A$.

Définition 3.2.4.5 (Faisceau ample)**.** Soit X un schéma. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X est ample si pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, le faisceau $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections globales.

Proposition 3.2.4.6. *Soit X un schéma sur $\operatorname{Spec} A$ avec A noetherien. Un faisceau très ample sur X relativement à $\operatorname{Spec} A$ est ample.*

Démonstration. [5, II.5.17] □

Théorème 3.2.4.7. *Soit X un schéma de type fini sur $\operatorname{Spec} A$ avec A noetherien, et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Alors $\mathcal{L}$ est ample si et seulement si $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est très ample relativement à $\operatorname{Spec} A$ pour un entier $m > 0$.*

Démonstration. [5, II.7.6] □

Considèrons maintenant X une variété lisse irréductible et projective, $D \in \operatorname{WDiv}(X)$, et $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau inversible associé. On a vu que l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D est $\{\operatorname{div}_D(s) \mid s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}\}$. D'autre part, deux sections globales s, s' non nulles ont même diviseur des zéros si et seulement si elles sont colinéaires dans le k-espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$, en effet dans ce cas $s/s' \in \mathcal{O}(X)^* = k^*$, car k est algébriquement clos. Notons enfin que $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$ est de dimension finie sur k ([5, II.5.19]). Ainsi l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalent à D est naturellement muni d'une structure d'espace projectif, cela amène la définition suivante :

Définition 3.2.4.8 (Système linéaire, point de base)**.** Soit X une variété lisse et projective, et D un diviseur. Le système linéaire complet défini par D est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D, on le note $|D|$. Un système linéaire est une partie de $|D|$ correspondant à un sous espace projectif. On dit que $p \in X$ est un point de base d'un système linéaire $\mathbb{P}(V) \subset |D|$ si l'intersection des $\mathcal{V}_X(s) := X \setminus X_s$ pour $s \in V$ est non-vide.

Autrement dit dans ce langage, se donner un morphisme $X \to \mathbb{P}^n_k$ est équivalent à se donner un système linéaire $\mathbb{P}(V) \subset |D|$ sans point de base et une base de V. Voir [5, II.7.8.2] pour une caractérisation des variétés projectives dans ce langage.

3.2.5 Le groupe des unités d'une variété irréductible

Soit X une variété, le groupe des unités $U(X)$ de X est le quotient du groupe $\mathcal{O}(X)^*$ des fonctions régulières inversibles par le sous-groupe k^* des fonctions constantes. On va appliquer les techniques précédentes pour obtenir un résultat de finitude de $U(X)$ lorsque X est irréductible, ainsi que du groupe des caractères d'un groupe algébrique. On commence par énoncer un lemme utile.

Lemme 3.2.5.1. *Soit X une variété affine irréductible. Il existe une variété projective irréductible $\bar{X}$ contenant X comme ouvert. Si X est normale, alors $\bar{X}$ peut être choisie normale également.*

Démonstration. On peut supposer que X est plongée dans un espace affine $\mathbb{A}^n_k$. On considère alors l'adhérence Y de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ (qui contient $\mathbb{A}^n_k$ comme ouvert). Par construction, Y est projective, irréductible et contient X comme ouvert.

Si X est normale, on considère la normalisation $\eta : \widetilde{Y} \to Y$. Alors $\widetilde{Y}$ contient encore X comme ouvert par hypothèse. Pour montrer que $\widetilde{Y}$ est projective, il suffit de montrer qu'elle est quasi-projective car comme η est fini, $\widetilde{Y}$ est propre sur Y et donc sur k ([5, II.4.8, ex II.4.1]), ce qui permet d'utiliser [5, ex II.4.4]. Par hypothèse, Y admet un faisceau ample $\mathcal{L}$, on va vérifier que $\eta^*\mathcal{L}$ est ample, ce qui achèvera la preuve. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\widetilde{Y}$. Alors $\eta_*\mathcal{F}$ est cohérent sur Y car η est fini et Y est noetherien (3.1.1.5 6). Comme $\mathcal{L}$ est ample, $\eta_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}^{\otimes m}$ est engendré par ses sections globales pour $m \gg 0$, ce qui donne un morphisme surjectif $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_Y \to \eta_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}^{\otimes m}$. Par la formule de projection ([5, ex II.5.1.d]), on a $\eta_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}^{\otimes m} = \eta_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} \eta^*(\mathcal{L}^{\otimes m}))$. Le foncteur η^* est exact à droite, commute au produit tensoriel et aux sommes directes. On obtient donc un morphisme surjectif

$$\oplus_{i\in I}\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \oplus_{i\in I}\eta^*\mathcal{O}_Y \to \eta^*\eta_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} (\eta^*\mathcal{L})^{\otimes m})$$

Finalement, comme l'application canonique $\eta^*\eta_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} (\eta^*\mathcal{L})^{\otimes m}) \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}} (\eta^*\mathcal{L})^{\otimes m}$ est surjective car η est affine, on obtient que $\eta^*\mathcal{L}$ est ample en composant les deux applications précédentes. □

Proposition 3.2.5.2. *Soit X une variété irréductible. Alors $U(X)$ est libre de type fini.*

Démonstration. Comme $\mathcal{O}(X)^*$ s'injecte dans $\mathcal{O}(U)^*$ pour tout ouvert $U \subset X$, on peut supposer X affine car un sous-groupe d'un groupe abélien libre de type fini est aussi libre de type fini. Soit $\eta_X : \widetilde{X} \to X$ l'application de normalisation. Alors $\widetilde{X}$ est affine, on a une injection $\eta_X^\sharp : \mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{X})$ qui induit une injection $U(X) \hookrightarrow U(\widetilde{X})$. On peut donc supposer X normale.

D'après 3.2.5.1, on peut supposer que X est un ouvert d'une variété projective normale $\bar{X}$. On note $D_1, ..., D_r$ les composantes irréductibles de $\bar{X} \setminus X$. Ceux sont des diviseurs premiers car ils sont définis par l'équation de l'hyperplan à l'infini. Dans chaque carte affine qui les rencontre, il s'agit donc de sous-variétés fermées de codimension 1 d'après 1.3.1.2. Chacun de ces diviseurs premiers D_i définit un anneau de valuation discrète dont on note v_i la valuation. On considère l'application :

$$\mathcal{O}(X)^* \to \mathbb{Z}^r, f \mapsto (v_1(f), ..., v_r(f))$$

C'est un morphisme de groupes de noyau k^* d'après [5, I.3.4]. ce qui conclut la preuve. □

Proposition 3.2.5.3. *Soit X, Y des variétés irréductibles. Alors le morphisme :*

$$\mathcal{O}(X)^* \times \mathcal{O}(Y)^* \to \mathcal{O}(X \times Y)^*, \ (f, g) \mapsto ((x, y) \mapsto f(x)g(y))$$

est surjectif.

Démonstration. Il suffit de montrer que $f \in \mathcal{O}(X \times Y)^*$ peut s'écrire $f = gh$ pour $g \in k(X)$ et $h \in k(Y)$. En effet, on considère un point $y \in Y$ où h est régulière. D'autre part on constate que $f_y : x \mapsto f(x, y)$ est régulière sur X, ce qui se voit sur les ouverts affines $U \times V$. En effet $\mathcal{O}(U \times V)$ est alors le coproduit des algèbres de coordonnées $\mathcal{O}(U)$ et $\mathcal{O}(V)$, c'est-à-dire leur produit tensoriel. De plus, f_y ne s'annule pas donc est inversible dans $\mathcal{O}(X)$. Cela prouve que g est en fait régulière, et h aussi par le même raisonnement.

On peut ainsi remplacer X et Y par deux ouverts affines lisses. Le produit $X \times Y$ est encore affine et lisse. D'après 3.2.5.1, on peut supposer que X est un ouvert d'une variété projective normale $\bar{X}$, et on note $D_1, ..., D_r$ les diviseurs premiers correspondants aux composantes irréductibles de $\bar{X} \setminus X$. Soit $f \in \mathcal{O}(X \times Y)^*$ que l'on regarde comme une fonction rationnelle sur $\bar{X} \times Y$, qui est normal d'après 1.1.2.8. Le diviseur associé à f est à support dans $(\bar{X} \setminus X) \times Y$, on a donc $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^r n_i D_i \times Y$ pour des entiers $n_1, ..., n_r$. Soit π_i une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\bar{X}, D_i}$. Il existe $x_0 \in D_i$ tel que π_i définisse une équation locale de D_i. Soit $y_0 \in Y$, on peut écrire une équation locale de $D_i \times Y$ en (x_0, y_0) sous la forme $\pi_i(x)u(x, y)$ avec u inversible sur un voisinage de (x_0, y_0). Ainsi il existe un ouvert non-vide $V \subset Y$ tel que pour tout $y \in V$, on ait $\operatorname{div}(f_y) = \sum_{i=1}^r n_i D_i$. Choisissons $y_0 \in V$, alors $\operatorname{div}(f_y f_{y_0}^{-1}) = 0$ donc $f_y f_{y_0}^{-1}$ définit une fonction régulière sur $\bar{X}$. Comme $\bar{X}$ est propre sur k ([5, II.4.9]), $f_y f_{y_0}^{-1}$ est en fait constante ([5, ex II.4.4]). Ainsi $h := f/f_{y_0}$ définit une fonction rationnelle sur Y telle que $f = f_{y_0} h$ comme désiré. □

Soit X, Y des variétés irréductibles. Considérons la suite exacte courte

$$0 \to k^* \to \mathcal{O}(X)^* \to U(X) \to 0 \tag{3.4}$$

Elle est scindée car tout choix de $x \in X$ définit une section. En effet, le sous-groupe de $\mathcal{O}(X)^*$ des fonctions valant 1 en x s'envoie isomorphiquement sur $U(X)$. On a donc $\mathcal{O}(X)^* \simeq k^* \times U(X)$. De plus, le noyau du morphisme naturel $\mathcal{O}(X)^* \times \mathcal{O}(Y)^* \to U(X \times Y)$ est $k^* \times k^*$. Comme il est surjectif d'après la proposition précédente, on obtient $U(X \times Y) \simeq U(X) \times U(Y)$. On applique maintenant ces résultats au groupe de caractères d'un groupe algébrique connexe.

Proposition 3.2.5.4. *Soit G un groupe algébrique connexe, et $f \in \mathcal{O}(G)^*$ telle que $f(e) = 1$. Alors $f \in X^*(G)$.*

Démonstration. L'application

$$f \circ m : G \times G \to \mathbb{A}^1, (g, h) \mapsto f(gh)$$

est régulière inversible sur $G \times G$ qui est connexe donc irréductible. On applique donc la proposition précédente pour trouver $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(G)^*$ tels que $f(gh) = \varphi(g)\psi(g)$, $\forall g, h \in G$. Quitte à multiplier φ par un scalaire, on peut supposer $\varphi(e) = 1$. En fixant $g = e$ on obtient $\psi = f$, puis en fixant cette fois $h = e$, on obtient $g = \varphi$. Finalement, $f(gh) = f(g)f(h)$, donc f est un caractère. □

Ainsi, pour un groupe algébrique connexe G, le groupe des caractères $X^*(G)$ définit un scindage de la suite exacte courte 3.4. On a donc $X^*(G) \simeq U(G)$ et donc $X^*(G \times H) \simeq X^*(G) \times X^*(H)$ pour tout autre groupe algébrique connexe H. En particulier on en déduit que le groupe des caractères d'un groupe algébrique quelconque est de type fini comme on le voit en considérant l'injection $X^*(G) \hookrightarrow \prod_{i=1}^r U(g_i G^o)$, où les $g_i G^o$ désignent les composantes connexes de G. Le corollaire suivant nous sera utile par la suite.

Corollaire 3.2.5.5. *Soit G un groupe algébrique connexe, et X une G-variété. Alors l'application naturelle $X^*(G) \times \mathcal{O}(X)^* \to \mathcal{O}(G \times X)^*$ est un isomorphisme.*

Si X est de plus une G-variété. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(X)^*$, il existe $\chi_f \in X^*(G)$ tel que $f(g.x) = \chi_f(g)f(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

Démonstration. L'application est bien surjective d'après le corollaire et la proposition précédente et son noyau est clairement trivial. Pour le deuxième point, il suffit de considérer l'application $(g, x) \mapsto f(g.x) \in \mathcal{O}(G \times X)^*$. □

Chapitre 4

Anneaux de Cox

4.1 Un exemple introductif

Soit $X = \mathrm{Proj}(B/I)$ une variété projective normale et irréductible, où $B = k[x_0, ..., x_d]$ et $I \subset B$ est un idéal premier homogène et radical. A la différence du cas affine, l'algèbre graduée B/I des coordonnées homogènes de X n'est pas un invariant. Par exemple, $\mathbb{P}^1_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, x_1])$ est isomorphe à tous ses plongements de Veronese, ces isomorphismes provenant de morphismes injectifs mais non surjectifs entre les algèbres de coordonnées homogènes correspondantes.

On considère maintenant le cas où X est donnée par une immersion fermée $X \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^d_k$ avec $i(X) \simeq \mathrm{Proj}\, B/I$. Considérons l'application canonique $\alpha : \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(n) \to i_* i^* \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(n) \simeq i_* \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$. Sur les sections globales cela donne $\alpha(\mathbb{P}^d_k) : k[x_0, ..., x_d] \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$. Au degré zéro, $\alpha_0 = i^\sharp$, on en déduit $\mathrm{Ker}\,\alpha(\mathbb{P}^d_k) = \Gamma_*(\mathcal{I}_{i(X)}) = I$ car I est radical (3.1.3 et [5, ex II.5.10]). Ainsi, $\mathrm{Im}\,\alpha(\mathbb{P}^d_k)$ est l'algèbre des coordonnées homogènes du plongement de X dans $\mathbb{P}^d_k$. On l'a déterminée à partir d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible, c'est-à-dire un élément de son groupe de Picard, qui est un objet intrinsèquement défini sur X. Notons qu'il existe un diviseur $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ tel que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(1)$, et qu'alors $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à l'anneau des sections globales du faisceau d'algèbres divisorielles sur X associé à $\mathbb{Z}D$.

D'après [5, ex II.5.14] , $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est la clôture intégrale de B/I. Ainsi, B/I est normal si et seulement si $\alpha(\mathbb{P}^d_k)$ est surjective, on dit alors que le plongement est projectivement normal. Cette remarque montre en particulier que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est une k-algèbre de type fini (1.1.3.2). On redémontre maintenant ce fait en donnant un éclairage géométrique sur ces constructions. Le fibré en droites $L = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^d_k}(\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(1))) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^d_k}(\oplus_{n\geqslant 0}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(n))$ est l'éclatement en l'origine de $\mathbb{A}^{d+1}$. En effet, on montre facilement que le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}$-module des sections de l'éclatement en l'origine de $\mathbb{A}^{d+1}$ vu comme fibré en droites sur $\mathbb{P}^d_k$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(-1)$, ce qui permet de conclure d'après la discussion suivant 3.1.5.3. On a le diagramme commutatif suivant, où L_X est le fibré en droites $\mathrm{Spec}_X(\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_X(1)))$, j est une immersion fermée (comme recollement d'immersions fermées) et π est propre.

$$\begin{tikzcd}
L_X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{A}^{d+1}_k \\
X \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^d_k &
\end{tikzcd}$$

On considère comme en 3.1.5.3 l'action de $\mathbb{G}_m$ sur les fibres de L, l'ensemble des points fixes L_0, et $L^\times$ son complémentaire. En considérant un recouvrement $(U_i)_i \in I$ qui trivialise $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(1)$, on voit que $L^\times$ est constitué de recollements de schémas isomorphes à $\mathrm{Spec}_{U_i}(\mathcal{O}_{U_i}[t, t^{-1}]) \simeq U_i \times_k \mathbb{G}_m$, ce qui donne $L^\times = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^d_k}(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_k}(n))$. De plus, $L^\times$ est isomorphe à $\mathbb{A}^{d+1}\backslash\{0\}$ par restriction de π. D'autre part, p se restreint en une application $p^\times : L^\times \to \mathbb{P}^d_k$ qui est le quotient géométrique de l'action de $\mathbb{G}_m$. On résume cela dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} := L_X^\times \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_X^\times"] & L^\times \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "p^\times"] & \mathbb{A}_k^{d+1} \setminus \{0\} \\
X \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}_k^d &
\end{tikzcd}$$

Notons encore π la restriction πj, c'est une application propre. Ainsi, $\pi_* \mathcal{O}_{L_X}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{d+1}}$-module cohérent. On en déduit que $\mathcal{O}(L_X) = \pi_* \mathcal{O}_{L_X}(\mathbb{A}_k^{d+1})$ est un $k[x_0, ..., x_d]$-module de type fini, c'est en particulier une k-algèbre de type fini. De plus comme les faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$ n'ont pas de sections globales non nulles pour $n < 0$, on en déduit que $\mathcal{O}(\widetilde{X}) = \Gamma(X, \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)) = \mathcal{O}(L_X)$ est de type fini sur k. C'est de plus une algèbre $\mathbb{N}$-graduée, son spectre $\bar{X}$ est donc muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ avec un unique point fixe p_0 appartenant à l'adhérence de tout orbite. Pour tout $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ avec f non nulle et $n > 0$, on a $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p_X^{\times -1}(X_f)) = \Gamma(X_f, \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)) = \Gamma(X, \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n))_f = \mathcal{O}(L_X)_f$. L'unique maximal contenant chaque f correspond à p_0, on voit ainsi que ces spectres se recollent en $\widetilde{X} = \bar{X} \setminus \{p_0\}$, où $\bar{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}(\widetilde{X})$. Enfin, $(X, p_X^\times)$ est le quotient géométrique de $\widetilde{X}$ pour l'action de $\mathbb{G}_m$.

Prenons maintenant un exemple concret, soit $X \subset \mathbb{P}_k^3$ la quadrique projective d'équation en coordonnées homogènes $x_1 x_2 = x_3 x_4$, et D le diviseur des zéros de la section $x_4 \in \mathcal{O}_X(1)$. Le diviseur D est de Cartier sur X, on peut le décrire sur les ouverts standards par $(U_i, x_4/x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$. De plus, D est très ample car $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(1)$. En effet, en regardant ces $\mathcal{O}_X$-modules comme sous-modules de $k(x_1, ..., x_4)$, on voit l'isomorphisme en multipliant les générateurs locaux x_i/x_4 de $\mathcal{O}_X(D)$ par x_4. L'algèbre des coordonnées homogènes de X est normale d'après 1.1.2.7 et 1.3.2.2, donc en reprenant les notations précédentes on obtient que $\bar{X}$ est le cone affine d'équation $t_1 t_2 - t_3 t_4$ dans $\mathbb{A}^4$ et $\widetilde{X} = \bar{X} \setminus \{0\}$ le cône épointé.

On va maintenant utiliser cette construction pour calculer le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\bar{X}) \simeq \mathrm{Cl}(\widetilde{X})$. En tant que fibré en droites sur X on voit en utilisant [5, II.6.6] que $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathrm{Cl}(L_X)$, et l'image inverse de D par cet isomorphisme est exactement $\pi^{-1}(0)$. Puis on a $\widetilde{X} = L_X \setminus \pi^{-1}(0)$ où le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à X. D'après ce qui précède et comme $\pi^{-1}(0)$ est irréductible et de codimension 1 dans $\widetilde{X}$, on a d'après 3.2.1.5 une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \to 0, \text{ où } \varphi(1) = D$$

Par ailleurs dans [5, II.6.6.1] on calcule $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ avec $D = (1, 1)$. On en déduit $\mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \simeq \mathbb{Z}$ avec deux générateurs de somme nulle, $D_1 = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_1)$ avec $\mathfrak{p}_1 = (t_1, t_4)$ et $D_2 = \mathcal{V}(\mathfrak{p}_2)$ avec $\mathfrak{p}_2 = (t_2, t_4)$.

Calculons maintenant les sections globales du faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ sur $\bar{X}$ associé à $K = \mathbb{Z}D_2$, on note également $\mathcal{S}$ sa restriction à $\widetilde{X}$ en se rappelant 3.2.2.7. On a $\mathcal{S}_{-D_2}(\bar{X}) = \mathfrak{p}_2$ d'après 3.2.2.2. Le diviseur D_2 est de Cartier sur le cône épointé lisse $\widetilde{X}$. Ainsi $\mathcal{S}_{-D_2}$ est un faisceau inversible sur $\widetilde{X}$ d'inverse $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D_2)$, ce dernier étant la restriction à $\widetilde{X}$ du $\mathcal{O}_{\bar{X}}$-module $(t_4^{-1}\mathfrak{p}_1)\tilde{}$. En effet, on a $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = (t_4)$ car ceux sont deux idéaux radicaux définissant le même fermé. On a donc $\mathcal{S}_{D_2}(\widetilde{X}) = t_4^{-1}\mathfrak{p}_1 = (1, t_4^{-1} t_1)$. Les applications naturelles $\mathcal{S}_{\pm D2}(\widetilde{X})^{\otimes n} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\pm nD2}(\widetilde{X})$ avec $n > 0$, ne sont pas surjectives à priori. On est donc contraint d'examiner localement la situation sur un recouvrement bien choisi. On a quatre ouverts affines $\widetilde{X}_{t_i}$ qui recouvrent $\widetilde{X}$, et $\mathcal{S}_{\pm nD2}(\widetilde{X}) = \cap_i \mathcal{S}_{\pm nD2}(\widetilde{X}_{t_i})$, où l'intersection est prise dans $k(\widetilde{X})$. On a d'après 3.1.1.2, $\mathcal{S}_{\pm nD_2}(\widetilde{X}_{t_i}) = \mathcal{S}_{\pm nD_2}(\widetilde{X})_{t_i}$, et on calcule

$$\mathcal{S}_{-nD_2}(\widetilde{X}_{t_1}) = (t_4^n)_{t_1}, \, \mathcal{S}_{-nD_2}(\widetilde{X}_{t_2}) = (1)_{t_2}, \, \mathcal{S}_{-nD_2}(\widetilde{X}_{t_3}) = (t_1^n)_{t_3}, \, \mathcal{S}_{-nD_2}(\widetilde{X}_{t_4}) = (1)_{t_4}$$

$$\mathcal{S}_{nD_2}(\widetilde{X}_{t_i}) = (1, t_4^{-1} t_1, (t_4^{-1} t_1)^2, ..., (t_4^{-1} t_1)^n)_{t_i}$$

On voit que l'on a $\cap_i \mathcal{S}_{\pm nD2}(\widetilde{X}_{t_i}) \subset \mathcal{S}_{\pm D2}(\widetilde{X})^{\pm n}$ et on en déduit que l'application $\mathcal{S}_{\pm D2}(\widetilde{X})^{\otimes n} \hookrightarrow \mathcal{S}_{\pm nD2}(\widetilde{X})$ est un isomorphisme. Ainsi $\Gamma(\bar{X}, \mathcal{S})$ est engendré en tant que $\mathcal{O}(\bar{X})$-algèbre par les éléments algébriquement libres $(z_1, z_2, z_3, z_4) := (1, t_4^{-1} t_1, t_2, t_4)$. De plus d'après les équations suivantes, la composante homogène de degré zéro est incluse dans $k[z_1, z_2, z_3, z_4]$:

$$z_2 z_4 = t_1, \, z_1 z_3 = t_2, \, z_2 z_3 = t_3, \, z_1 z_4 = t_4$$

On a donc $\Gamma(\bar{X},\mathcal{S}) = k[z_1,z_2,z_3,z_4]$, c'est une algèbre de polynômes naturellement graduée par $\deg z_1 = \deg z_2 = 1$, $\deg z_3 = \deg z_4 = -1$. Cette $\mathbb{Z}$-graduation se traduit en une action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^4 = \operatorname{Spec}\Gamma(\bar{X},\mathcal{S})$ donnée concrètement par $\lambda.z = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^{-1}z_3, \lambda^{-1}z_4)$. L'algèbre des invariants sous cette action est $k[z_1z_2, z_1z_4, z_2z_3, z_2z_4]$ ce qui donne un isomorphisme $\operatorname{Spec}(\Gamma(\bar{X},\mathcal{S})^{\mathbb{G}_m}) \simeq \widetilde{X}$.

On vient ainsi de voir dans cet exemple qu'un faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ bien choisi permet de retrouver $\bar{X}$ comme bon quotient d'une H-variété construite à partir de ce faisceau, où H est le groupe diagonalisable définissant la graduation de $\mathcal{S}$. C'est ce qu'on va étudier de manière générale dans cette partie.

4.2 Faisceau et anneau de Cox dans le cas sans torsion

4.2.1 Le spectre relatif d'une algèbre divisorielle

On souhaiterait réaliser géométriquement le faisceau d'algèbre divisorielles $\mathcal{S}$ d'une variété normale irréductible X associé à un sous-groupe $K \subset \operatorname{WDiv}(X)$ de type fini, donc libre de rang fini. Une idée naturelle est de prendre le spectre relatif $(\widetilde{X}, p)$ de ce faisceau d'algèbres quasi-cohérent. Toutefois, ce spectre relatif ne définira pas une variété si $\mathcal{S}$ n'est pas localement de type fini. Sous certaines conditions, on pourra s'en assurer, par exemple en supposant X lisse.

Remarque 4.2.1.1. Supposons X lisse et irréductible. Tous ses diviseurs sont de Cartier, et en choisissant une $\mathbb{Z}$-base $D_1, ..., D_s$ de K on a un isomorphisme

$$\widetilde{X} = \operatorname{Spec}_X(\textstyle\bigoplus_{a_1\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(a_1D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} ... \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigoplus_{a_s\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(a_sD_s)) \simeq L_1^\times \times_X ... \times_X L_s^\times$$

où, avec les notations de l'exemple d'introduction, L_i est le fibré en droites correspondant à $\mathcal{O}_X(D_i)$.

Tout point de X admet un voisinage ouvert U sur lequel chacun des diviseurs D_i est principal, égal disons à $\operatorname{div}(f_i)$. Cet ouvert trivialise chaque fibré L_i et on obtient un isomorphisme $p^{-1}(U) \simeq \mathbb{G}_m^s \times U$ qui provient de l'isomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_k k[t_1^\pm, ..., t_s^\pm] \to \mathcal{R}(U),\ g \otimes t_1^{\nu_1}...t_s^{\nu_s} \mapsto g f_1^{-\nu_1}...f_s^{-\nu_s}$$

En notant $H := \operatorname{Spec} k[K]$, si bien que $H \simeq \mathbb{G}_m^s$, on peut résumer la situation dans le digramme commutatif ci-dessous auquel on se référera ultérieurement. Les flèches sont H-équivariantes et H agit sur le produit par multiplication sur le premier facteur. En particulier, $(\widetilde{X}, p)$ est un H-fibré principal :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "p"] & H \times U \arrow[dl, "pr_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Construction 4.2.1.2. Soit X une variété normale et irréductible, $K \subset \operatorname{WDiv}(X)$ un sous-groupe de type fini, $\mathcal{S}$ le faisceau d'algèbres divisorielles associé. On suppose que $\mathcal{S}$ est localement de type fini. Alors le spectre relatif $\widetilde{X} = \operatorname{Spec}_X(\mathcal{S})$ muni de son morphisme structural p est naturellement équipé d'une action du tore $H := \operatorname{Spec} k[K]$ pour laquelle (X, p) est un bon quotient.

Démonstration. En effet, p est affine par construction. Puis, pour tout ouvert affine $U \subset X$, on a $p^{-1}(U) = \operatorname{Spec}\mathcal{S}(U)$, où $\mathcal{S}(U)$ est une $\mathcal{O}_X(U)$-algèbre K-graduée. On a $\mathcal{S}(U)_0 = \mathcal{O}_X(U)$, ce qui donne des quotients locaux par H qui se recollent globalement en p. □

Proposition 4.2.1.3. *Avec les données de 4.2.1.2, supposons de plus que tout diviseur soit de Cartier (par exemple si X est lisse). Alors H agit librement sur $\widetilde{X}$.*

Démonstration. C'est immédiat avec le diagramme de 4.2.1.1. □

Proposition 4.2.1.4. *Avec les données de 4.2.1.2, $\widetilde{X}$ est une variété irréductible et normale. De plus, pour tout fermé $A \subset X$ de codimension $\geqslant 2$, $p^{-1}(A)$ est aussi de codimension $\geqslant 2$.*

Démonstration. Tout d'abord, $\widetilde{X}$ est séparé comme spectre relatif sur une variété. Ensuite, on recouvre l'ouvert des points réguliers X_{reg} par un nombre fini d'ouverts U_i comme dans le diagramme ci-dessus, ce qui est possible car tout ouvert de X est quasi-compact. Ainsi les $p^{-1}(U_i)$ sont irréductibles, et leur réunion $p^{-1}(X_{reg})$ également car leur intersection est non-vide. De plus, $p^{-1}(X_{reg})$ est lisse car c'est vrai localement par le diagramme. On recouvre maintenant X par des ouverts affines $V_1, ..., V_s$ et on a d'après 3.2.2.6, $\mathcal{S}(V_i \cap X_{reg}) = \mathcal{S}(V_i) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(V_i))$. Ces anneaux sont intègralement clos car $p^{-1}(X_{reg})$ est irréductible et lisse. Comme les $p^{-1}(V_i)$ recouvrent $\widetilde{X}$ on en déduit la normalité et l'irréductibilité. Pour la dernière assertion, c'est une conséquence directe du fait que $p_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{S}$ et de 3.1.4.13. $\square$

Remarquons qu'une section de $s \in \mathcal{S}(U)$ homogène de degré $D \in K$ sur un ouvert $U \subset X$ peut être vue à la fois comme une fonction rationnelle sur X vérifiant $\operatorname{div}(s)+D \geqslant 0$ et comme une fonction régulière sur $\widetilde{X}$ qui est homogène de degré D pour l'action de H. On rappelle que $\operatorname{div}_D(s) := \operatorname{div}(s)+D$ est le diviseur des zéros de s sur X. C'est un diviseur effectif, on note $\mathcal{V}_X(D,s)$ sont support, et $X_{D,s}$ le complémentaire de ce support. On explore maintenant les relations entre ces points de vue. Notons tout d'abord que comme p est un morphisme dominant de variétés irréductibles, on peut définir l'image inverse $p^*(D)$ d'un diviseur de Cartier simplement par l'image inverse de ses équations locales. Pour un diviseur de Weil D, on considère sa restriction D' à X_{reg} et on définit $p^*(D)$ comme l'unique diviseur de Weil correspondant à $p^*(D')$ via l'isomorphisme $\operatorname{WDiv}(\widetilde{X}) \simeq \operatorname{WDiv}(p^{-1}(X_{reg}))$ (3.2.2.7). Cela définit un morphisme de groupes injectif $\operatorname{WDiv}(X) \hookrightarrow \operatorname{WDiv}(\widetilde{X})$, qui préservent les diviseurs principaux et l'effectivité. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\operatorname{Cl}(X) \to \operatorname{Cl}(\widetilde{X})$.

Proposition 4.2.1.5. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Pour tout $D \in K$ de Cartier et $s \in \mathcal{S}_D(X) \subset \mathcal{O}(\widetilde{X})$, on a $p^*(D) = \operatorname{div}(s - p^\sharp(s))$, où s est d'abord vue comme une fonction régulière sur $\widetilde{X}$, puis comme un élément de $k(X)$.*

Démonstration. On écrit $D = (U_i, f_i)$, on a ainsi $s_i := s_{|U_i} = \alpha_i f_i^{-1}$ avec $\alpha_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, et localement on a $p^*(\operatorname{div}_D(s)_{|U_i}) = p^*(\operatorname{div}(\alpha_i)) = \operatorname{div}(p^\sharp(\alpha_i)) = \operatorname{div}(\alpha_i) = \operatorname{div}(\alpha_i f_i^{-1}) = \operatorname{div}(s_{|U_i})$, l'avant dernière égalité étant due au fait que f_i est inversible sur $p^{-1}(U_i)$. En effet, sur U_i on a $D = \operatorname{div}(f_i)$ donc $f_i \in \mathcal{S}_{-D}(U_i) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(U_i))$ et $f_i^{-1} \in \mathcal{S}_D(U_i) \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(p^{-1}(U_i))$. $\square$

Proposition 4.2.1.6. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Pour tout $D \in K$ et $s \in \mathcal{S}_D(X) \subset \mathcal{O}(\widetilde{X})$, on a $\operatorname{div}(s) = p^*(\operatorname{div}_D(s))$. Si de plus $X_{D,s}$ est affine, on a $\mathcal{V}_{\widetilde{X}}(s) = p^{-1}(\mathcal{V}_X(D,s))$.*

Démonstration. On peut supposer pour la première assertion que X est lisse en utilisant 4.2.1.4 et 3.2.2.7. Ainsi $\widetilde{X}$ est également lisse d'après 4.2.1.1. Le résultat découle alors de la proposition précédente.

Pour la deuxième assertion, il faut montrer $p^{-1}(X_{D,s}) = \widetilde{X}_s$. On remarque que $s^{-1} \in \mathcal{S}_{-D}(X_{D,s})$ donc s est inversible sur $p^{-1}(X_{D,s})$, ce qui montre $p^{-1}(X_{D,s}) \subset \widetilde{X}_s$. Par ailleurs, $\operatorname{div}_D(s)$ est de Cartier sur X_{reg} et son image inverse est l'image inverse de ses équations locales, on obtient donc $p^{-1}(X_{D,s}) \cap p^{-1}(X_{reg}) = \widetilde{X}_s \cap p^{-1}(X_{reg})$, d'après la première assertion. Ainsi $\widetilde{X}_s \setminus p^{-1}(X_{D,s})$ est le complémentaire d'un ouvert affine, et il est de codimension $\geqslant 2$, donc est vide d'après 1.3.3.5. $\square$

Proposition 4.2.1.7. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Soit $D \in K$ et $f \in \Gamma(X, \mathcal{S}_D)$ non-nul. Alors on a un isomorphisme canonique d'algèbres K-graduées*

$$\Gamma(X_{D,f}, \mathcal{S}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{S})_f$$

Démonstration. On peut supposer que X est lisse, d'après 3.2.2.7. Dans ce cas on a $\mathcal{V}_{\widetilde{X}}(f) = p^{-1}(\mathcal{V}_X(D,f))$, et on conclut en utilisant 3.1.1.2 et le fait que $p_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{S}$. $\square$

Corollaire 4.2.1.8. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Soit $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ tel que $H.\tilde{x}$ est fermé dans $\widetilde{X}$. Pour tout $D \in K, f \in \mathcal{S}_D(X)$ non-nulle, on a :*

$$f(\tilde{x}) = 0 \iff p(\tilde{x}) \in \operatorname{Supp}(\operatorname{div}_D(f))$$

Démonstration. Montrons dans un premier temps que l'on a $\mathrm{Supp}(p^*(D)) \subset p^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$. Soit $x \in \mathrm{Supp}(p^*(D))$, comme $\mathrm{Supp}(p^*(D)) = \overline{\mathrm{Supp}_{p^{-1}(X_{reg})}(p^*(D_{|X_{reg}}))}$, on a $x \in \mathcal{V}_{\widetilde{X}}(p^\sharp(f_i))$ pour un $i \in I$, où l'on a écrit $D_{|X_{reg}} = (U_i, f_i)_{i\in I}$. On en déduit que $p(x) \in \mathcal{V}_X(f_i)$, c'est-à-dire $p(x) \in \overline{\mathrm{Supp}_{X_{reg}}(D_{|X_{reg}})} = \mathrm{Supp}(D)$. Maintenant, comme p est surjectif, on trouve $p(\mathrm{Supp}(p^*(D))) \subset \mathrm{Supp}(D)$. De plus, $p(\mathrm{Supp}(p^*(D)))$ et $\mathrm{Supp}(D)$ coïncident sur l'ouvert dense X_{reg} et $p(\mathrm{Supp}(p^*(D)))$ est fermé d'après 2.2.2.2. On a donc l'égalité :

$$p(\mathrm{Supp}(p^*(D))) = \mathrm{Supp}(D)$$

Ainsi en appliquant 4.2.1.6, on a $p(\mathrm{Supp}(\mathrm{div}(f))) = \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_D(f))$ et donc $f(\tilde{x}) = 0 \implies p(\tilde{x}) \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{div}_D(f)$. Réciproquement, si $p(\tilde{x}) \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{div}_D(f)$, on a $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ pour un $\tilde{x}' \in \mathrm{Supp}(\mathrm{div}(f))$. Toujours d'après 2.2.2.2 et en utilisant que $H.\tilde{x}$ est fermé on obtient $H.\tilde{x} \subset \overline{H.\tilde{x}'}$ ce qui prouve $f(\tilde{x}) = 0$ car f est nulle sur $H.\tilde{x}'$, étant homogène et s'annulant en $\tilde{x}'$. □

Toujours avec les données de 4.2.1.2, on établit maintenant un résultat important sur le groupe des classes de $\widetilde{X}$. On a d'abord besoin d'un lemme préliminaire assurant l'existence de H-linéarisations sur les fibrés en droites sur $\widetilde{X}$.

Lemme 4.2.1.9. *Soit X une variété irréductible munie d'une action d'un tore H, et (L, π) un fibré en droites sur X. Alors il existe une H-linéarisation de cette action sur L.*

Démonstration. On note $p_2 : H \times X \to X$ la projection. En utilisant [5, II.6.6], on obtient un isomorphisme $p_2^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(H \times X)$, d'où avec les notations de 3.1.7.3, $\alpha^*(L) \simeq p_2^*(M)$ pour un certain fibré en droites M sur X. En prenant l'image inverse par $e \times \mathrm{id}$ on obtient un isomorphisme de fibré en droites $L \simeq M$. On a ainsi un isomorphisme de fibrés en droites $\alpha^*(L) \simeq p_2^*(L)$, ce qui conclut la preuve d'après 3.1.7.3. □

Théorème 4.2.1.10. *Les données sont celles de 4.2.1.2, en supposant de plus que X est lisse. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La projection $c : K \to \mathrm{Cl}(X)$ est surjective.*
2. *Le groupe des classes $\mathrm{Cl}(\widetilde{X})$ est trivial.*

Démonstration. Supposons la projection c surjective. Soit $\widetilde{D} \in \mathrm{WDiv}(\widetilde{X})$ un diviseur. Il est de Cartier par hypothèse et on veut montrer qu'il est principal. On a une action du tore $H = \mathrm{Spec}\,k[K]$ sur $\widetilde{X}$ par la K-graduation de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$. Soit L le fibré en droites sur $\widetilde{X}$ associé au faisceau inversible $\mathcal{S}_{\widetilde{D}}$. En utilisant 4.2.1.9, on munit L d'une H-linéarisation et on obtient un H-module $\mathcal{S}_{\widetilde{D}}(\widetilde{X})$ d'après 3.1.7.4. On en déduit que pour tout $h \in H$ et $f \in \mathcal{S}_{\widetilde{D}}(\widetilde{X})$, on a $\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(h.f) = h.\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(f)$. D'après 2.1.4.3, on peut supposer que f est un vecteur propre pour l'action de H, et on a ainsi construit un diviseur $\mathrm{div}_{\widetilde{D}}(f)$ fixe pour l'action de H et linéairement équivalent à $\widetilde{D}$. On peut donc supposer que $\widetilde{D}$ est H-invariant. En utilisant le diagramme de 4.2.1.1 qui s'applique localement et en remarquant que H agit transitivement sur lui même on conclut que via cet isomorphisme, $\widetilde{D}$ est de la forme $H \times D$, pour un diviseur $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ et que $\widetilde{D} = p^*(D)$. Or, par hypothèse D est linéairement équivalent à un $D' \in K$, on a ainsi le résultat car $p^*(D')$ est principal d'après la proposition précédente.

Supposons maintenant $\mathrm{Cl}(\widetilde{X})$ trivial. Soit $D \in \mathrm{WDiv}(X)$, on veut montrer que D est linéairement équivalent à un diviseur $D' \in K$, et on remarque que l'on peut supposer D effectif. L'image inverse $p^*(D)$ est principal par hypothèse et effectif. Donc $p^*(D) = \mathrm{div}(f)$ pour un élément $f \in \mathcal{O}(\widetilde{X})$, et on affirme que f est homogène pour la K-graduation. On introduit pour montrer cela une fonction régulière inversible sur $H \times \widetilde{X}$:

$$F : H \times \widetilde{X} \to k,\ (h, x) \mapsto f(h.x)/f(x)$$

En effet, $p^*(D)$ est H-invariant en tant qu'image inverse par l'application quotient p. On en déduit que pour tout $h \in H$, on a $\mathrm{div}(x \mapsto f(h.x)/f(x)) = 0$, ce qui prouve que $F \in \mathcal{O}(H \times \widetilde{X})^*$ d'après 3.2.2.1. Comme H est connexe en tant que tore, on peut appliquer le résultat 3.2.5.5. Ainsi il existe $\chi \in X^*(H)$ et $g \in \mathcal{O}(\widetilde{X})^*$ tel que $F(h, x) = \chi(h)g(x)$ pour tout $h \in H$ et $x \in \widetilde{X}$. Fixons $h = e$, on obtient $g = 1$, d'où $f(h.x) = \chi(h)f(x)$.

Ainsi, $f \in \Gamma(X, \mathcal{S}_{D'})$ pour un diviseur $D' \in K$. Avec 4.2.1.6, on tire l'égalité $p^*(D) = \mathrm{div}(f) = p^*(\mathrm{div}_{D'}(f))$, et on conclut que $D = D' + \mathrm{div}(f)$, ce qu'on voulait montrer.

□

Remarque 4.2.1.11. On remarque que si on ne suppose plus que X est lisse, l'implication $1 \implies 2$ reste vraie dans le théorème précédent. En effet, comme $p^{-1}(X_{sing})$ est de codimension $\geqslant 2$ on peut alors supposer X lisse, car on a un isomorphisme $\mathrm{Cl}(\widetilde{X}) \simeq \mathrm{Cl}(\widetilde{X} \setminus p^{-1}(X_{sing}))$.

Corollaire 4.2.1.12. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Alors $\widetilde{X}$ est quasi-affine.*

Démonstration. On recouvre X par des ouverts affine $X_1, ..., X_r$. D'après 1.3.3.5 chaque $X \setminus X_i$ est purement de codimension 1, et donc le support d'un diviseur effectif. D'après 3.2.3, on a $X \setminus X_i = \mathrm{Supp}(\mathrm{div}_{D_i}(f_i))$ pour un couple $(\mathcal{O}_X(D_i), f_i)$, où $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_i))$. Ainsi, d'après 4.2.1.6, $\widetilde{X}$ est recouvert par des $\widetilde{X}_{f_i}$ qui sont affines car les $X_i = X_{D_i, f_i}$ le sont. Maintenant, notons que la propriété de finitude locale du faisceau structural de $\widetilde{X}$ reste vrai sur tout recouvrement affine de $\widetilde{X}$, on a donc en particulier pour tout i, $\mathcal{O}(\widetilde{X}_{f_i}) = k[(g_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}]$. Comme f_i est inversible sur chaque $\widetilde{X}_{f_i}$, on ne change rien en multipliant les g_{ij} par une puissance f_i^m, ce qui permet de supposer que les g_{ij} proviennent de sections globales en prenant un m suffisamment grand, car pour tout i on a $\mathcal{O}(\widetilde{X}_{f_i}) = \mathcal{O}(\widetilde{X})_{f_i}$ d'après 3.1.1.2. On a ainsi construit une sous-algèbre de type fini $R := k[(g_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n}]$ de $\mathcal{O}(\widetilde{X})$ telle pour tout i, on a $R_{f_i} = \mathcal{O}(\widetilde{X}_{f_i}) = \mathcal{O}(\widetilde{X})_{f_i}$. On en déduit des immersions ouvertes $\widetilde{X}_{f_i} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ qui se recollent en une immersion ouverte $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ d'où le résultat. □

Corollaire 4.2.1.13. *Les données sont celles de 4.2.1.2. Soient $x \in X$, $K_x^{prin} \subset K$ le sous-groupe des diviseurs localement principaux en x, et $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ tel que $H.\tilde{x}$ est fermé. Alors le stabilisateur $H_{\tilde{x}}$ est égal à $\mathrm{Spec}\, k[K/K_x^{prin}]$.*

Démonstration. Comme H agit localement sur $\widetilde{X}$ on peut se placer sur un voisinage affine de x, on suppose ainsi X et $\widetilde{X}$ affines. Ainsi, en appliquant 2.1.4.13, on a $H_{\tilde{x}} = \mathrm{Spec}\, k[K/K_{\tilde{x}}]$, où $K_{\tilde{x}}$ est le groupe d'orbite de $\tilde{x}$. Supposons que $D \in K$ soit principal sur ce voisinage de x, c'est-à-dire $D = \mathrm{div}(g)$ avec $g \in k(X)$. Choisissons $\alpha \in \mathcal{O}(X)$ tel que $\alpha(x) \neq 0$. Alors $f := \alpha g^{-1} \in \mathcal{S}_D(X)$ et $\mathrm{div}_D(f) = \mathrm{div}(\alpha)$. En utilisant 4.2.1.8, on obtient $f(\tilde{x}) \neq 0$ et donc $D \in K_{\tilde{x}}$. Réciproquement, prenons $D \in K_{\tilde{x}}$, c'est-à-dire $f(\tilde{x}) \neq 0$ pour un $f \in \mathcal{S}_D(X)$. Alors $x \notin \mathrm{div}_D(f)$, et on a $D = -\mathrm{div}(f)$ au voisinage de x. Cela montre que D est localement principal. □

4.2.2 Faisceau et anneau de Cox

Dans cette partie on définit l'anneau de Cox d'une variété X normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini. C'est en particulier le cas de l'exemple introductif

Construction 4.2.2.1 (Faisceau de Cox, Anneau de Cox)**.** Soit X une variété normale irréductible avec un groupe des classes libre de type fini. Soit $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ un sous-groupe se projetant isomorphiquement sur $\mathrm{Cl}(X)$ (il existe de tels K car $\mathrm{Cl}(X)$ est libre de type fini donc la projection admet des sections). On définit le faisceau de Cox sur X, noté $\mathcal{R}$ comme le faisceau d'algèbres divisorielles associé à K. Cette description ne dépend qu'à isomorphisme près du choix de K. L'anneau de Cox de X est l'algèbre des sections globales du faisceau de Cox.

Démonstration. Soient K, K' deux sous-groupes de $\mathrm{WDiv}(X)$ se projetant isomorphiquement sur $\mathrm{Cl}(X)$, et $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ les faisceaux de Cox correspondants. On choisit une base $(D_1, ..., D_s)$ de K. Cette base définit une section de la projection $c : \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$ et on peut modifier cette section par des éléments du noyau, ce qui fournit autant de bases de sous-groupes de $\mathrm{WDiv}(X)$ se projetant isomorphiquement sur $\mathrm{Cl}(X)$. Par ailleurs, chaque $D_i + \mathrm{Ker}\, c$ rencontre nécessairement K' sinon on aurait $\mathrm{rg}\, K' < \mathrm{rg}\, \mathrm{Cl}(X)$ comme rang de modules libres de type fini. On choisit ainsi $f_1, ..., f_s \in k(X)$ tels que $(D_i - \mathrm{div}(f_i))_i$ forme une base de K', et on définit un morphisme $\alpha : K \to k(X)^*, a_1 D_1 + ... + a_s D_s \mapsto f_1^{a_1} ... f_s^{a_s}$. Avec cela, l'isomorphisme linéaire faisant correspondre les bases de K et K' est $\widetilde{\psi} : K \to K'$, $D \mapsto D - \mathrm{div}(\alpha(D))$. Enfin, on définit un isomorphisme d'algèbres divisorielles $(\psi, \widetilde{\psi}) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ en posant $f \in \Gamma(U, \mathcal{R}_D) \mapsto \alpha(D) f$. □

Exemple 4.2.2.2. Soit $X = \operatorname{Proj} B/I$ une variété projective normale et irréductible, où $B = k[x_0, ..., x_n]$ et $I \subset B$ un idéal premier homogène et radical. On suppose que X est projectivement normale, c'est-à-dire que B/I est intégralement clos, et que $\mathrm{Cl}(X)$ est libre de rang 1 engendré par l'intersection de X avec un hyperplan de $\mathbb{P}^n_k$. Alors $\mathcal{R}(X) = B/I = \mathcal{O}(\bar{X})$ où $\bar{X}$ est le cône affine dans $\mathbb{A}^{n+1}$ correspondant à X. Voir l'exemple 4.1.

4.2.3 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox

Théorème 4.2.3.1. *Soit X une variété normale irréductible dont le groupe des classes est libre de type fini. Alors :*

1. *L'anneau de Cox $\mathcal{R}(X)$ est factoriel.*
2. *Le groupe des unités de l'anneau de Cox est $\mathcal{R}(X)^* = \mathcal{O}(X)^*$*

Démonstration.

1. On peut supposer X lisse d'après 3.2.2.7. Soit $f \in \mathcal{R}(X) = p_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(X) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widetilde{X})$. En vertu du théorème 4.2.1.10 le diviseur de f s'écrit $\operatorname{div}(f) = \sum n_i D_i = \sum n_i \operatorname{div}(f_i) = \operatorname{div}(\prod f_i^{n_i})$ où les D_i sont des diviseurs premiers, chaque f_i est irréductible et appartient à $\mathcal{R}(X)$ d'après 3.2.2.1. L'unicité de l'écriture sur $\mathrm{WDiv}(X)$ donne l'unicité de l'écriture $f = u \prod f_i^{n_i}$ où $u \in \mathcal{R}(X)^*$.
2. L'inclusion $\mathcal{O}(X)^* \subset \mathcal{R}(X)^*$ est évidente par définition. Pour l'autre prenons $f \in \mathcal{R}(X)^*$, qui est homogène d'après 1.1.5.9, disons de degré D. Alors, $fg = 1 \in \mathcal{R}_0(X)$ pour un $g \in \mathcal{R}(X)^*$ homogène de degré $-D$. Ainsi on a $0 = \operatorname{div}_0(1) = \operatorname{div}_{D-D}(fg) = \operatorname{div}_D(f) + \operatorname{div}_{-D}(g)$. Les deux derniers diviseurs étant effectifs, on a $\operatorname{div}_D(f) = 0$ et donc $D = -\operatorname{div}(f)$, ce qui donne $f \in \mathcal{R}_0(X) = \mathcal{O}(X)$ d'où le résultat.

□

Exemple 4.2.3.2. Reprenons le cas du cône affine de l'exemple introductif. L'anneau de Cox $\mathcal{R}(\bar{X})$ est l'algèbre de polynômes sur k à 4 indéterminés, donc est factoriel en particulier. Par ailleurs, $\mathcal{O}(\bar{X})^\times = k^*$ car en inversant par exemple t_1 on obtient $\bar{X}_{t_1} \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^2$, et les fonctions régulières inversibles sur cet ouvert sont nécessairement constantes.

Proposition 4.2.3.3. *Soit X une variété normale irréductible dont le groupe des classes est libre de type fini. Alors :*

1. *Soient $f \in \mathcal{R}_D(X)$ et $g \in \mathcal{R}_E(X)$ non nulles. Alors $f \mid g \iff \operatorname{div}_D(f) \leqslant \operatorname{div}_E(g)$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{R}_D(X)$ non nulle. Alors f est premier si et seulement si $\operatorname{div}_D(f)$ est premier.*

Démonstration. Soit f, g des fonctions régulières non-nulles sur $\widetilde{X}$. Comme $\widetilde{X}$ est intègre, on peut les voir comme des éléments de $k(X)^*$. Ainsi $f \mid g$ dans $\mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\operatorname{div}(f^{-1}g) \geqslant 0$. Prenant f, g comme dans l'énoncé et en utilisant 4.2.1.6, on voit que c'est équivalent à $\operatorname{div}_D(f) \leqslant \operatorname{div}_E(g)$. La preuve du deuxième énoncé est similaire. □

4.3 Faisceau et anneau de Cox dans le cas général

4.3.1 Faisceau et anneau de Cox

On souhaite maintenant définir l'anneau de Cox d'une variété X dont le groupe des classes admet éventuellement de la torsion. On suppose comme toujours X normale irréductible, et $\mathrm{Cl}(X)$ de type fini. L'idée est de construire le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ associé à un sous-groupe $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ se projetant surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$, puis d'identifier des composantes homogènes $\mathcal{S}_{D_1}$ et $\mathcal{S}_{D_2}$ si $D_1 = D_2 + E$, où $E \in \operatorname{Ker}(c : K \to \mathrm{Cl}(X))$. Pour cela on remarque que l'on a, d'après 3.2.3.3, un isomorphisme $\mathcal{S}_{D_1} \simeq \mathcal{S}_{D_2} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{S}_E$. Posons $E = \operatorname{div}(g)$ avec $g \in k(X)$, et considérons $f_2 \in \mathcal{S}_{D_2}(U)$ une section sur un ouvert $U \subset X$. Par l'isomorphisme, on voit que f_2 est de la forme $g_{|U} f_1$, où $f_1 \in \mathcal{S}_{D_1}(U)$. Pour identifier f_1 et f_2, il faut imposer $g_{|U} = 1_{|U}$, où $1 \in \mathcal{S}_0(X)$, c'est ce que l'on fait dans la construction ci-dessous.

Construction 4.3.1.1 (Faisceau de Cox, Anneau de Cox)**.** Soit X une variété normale irréductible, telle que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et $\mathrm{Cl}(X)$ est de type fini. On se fixe un sous-groupe $K \subset \mathrm{WDiv}(X)$ tel que la projection $c : K \to \mathrm{Cl}(X)$ est surjective. Soit $K^0 := \mathrm{Ker}\, c$ et $\chi : K^0 \to k(X)^*$ un caractère, c'est-à-dire un morphisme de groupes tel que $\mathrm{div}(\chi(E)) = E$, pour tout $E \in K^0$. Pour construire un tel caractère, on peut considérer lorsque K est de type fini une base $(D_1, ..., D_s)$ de K^0 est des éléments $f_i \in k(X)$ tels que $D_i = \mathrm{div}(f_i)$. On définit le caractère en posant $\chi(D_i) = f_i$, il vérifie bien la condition voulue.

Soit $\mathcal{S}$ le faisceau d'algèbres divisorielles sur X associé à K. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{S}$ défini par l'image du morphisme

$$\bigoplus_{E \in K^0} \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ E \mapsto 1 - \chi(E), \quad \text{où } 1 \in \mathcal{S}_0(X)$$

Le faisceau de Cox associé à K et χ est le faisceau quotient $\mathcal{R} := \mathcal{S}/\mathcal{I}$. C'est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente et $\mathrm{Cl}(X)$-graduée de la manière suivante :

$$\mathcal{R} = \textstyle\bigoplus_{[D] \in \mathrm{Cl}(X)} \mathcal{R}_{[D]}, \quad \mathcal{R}_{[D]} := \pi(\bigoplus_{D' \in c^{-1}([D])} \mathcal{S}_{D'}), \quad \text{où } \pi : \mathcal{S} \to \mathcal{R} \text{ est la projection}$$

L'anneau de Cox associé à K et χ est l'anneau des sections globales de $\mathcal{R}$.

La $\mathrm{Cl}(X)$-graduation de $\mathcal{R}$ annoncée ci-dessus n'est pas évidente à priori. On clarifie cela dans la proposition ci-dessous.

Proposition 4.3.1.2. *Avec les notation de la construction 4.3.1.1, $\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une $\mathrm{Cl}(X)$-graduation :*

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{[D] \in \mathrm{Cl}(X)} \mathcal{S}_{[D]}, \quad \mathcal{S}_{[D]} := \bigoplus_{D' \in c^{-1}([D])} \mathcal{S}_{D'}$$

Soit $U \subset X$ un ouvert, $f \in \Gamma(U, \mathcal{I})$ et $D \in K$. La composante $\mathrm{Cl}(X)$-homogène $f_{[D]} \in \Gamma(U, \mathcal{S}_{[D]})$ s'écrit de manière unique sous la forme d'une somme finie :

$$f_{[D]} = \sum_{E \in K^0} (1 - \chi(E)) f_E, \ \text{ où } f_E \in \Gamma(U, \mathcal{S}_D), \ \text{ et } \chi(E) \in \Gamma(U, \mathcal{S}_{-E})$$

En particulier, $\mathcal{I}$ est un faisceau d'idéaux $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes, et π est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathrm{Cl}(X)$-graduées. De plus, si $f \in \Gamma(U, \mathcal{I})$ est K-homogène, alors c'est la section nulle.

Démonstration. Supposons que l'on obtienne une telle écriture. Alors les composantes K-homogènes de $f_{[D]}$ sont facilement identifiables, et définissent les éléments $f_E \in \Gamma(U, \mathcal{S}_D)$ pour $E \neq 0$. Une telle écriture est donc unique.

Montrons l'existence. Par définition de $\mathcal{I}$, chaque germe $f_{[D],x}$ admet une représentation sur un voisinage ouvert U_x de x par une section

$$g = \sum_{E \in K^0} (1 - \chi(E)) g_E \in \Gamma(U_x, \mathcal{I}), \text{ où } g_E \in \Gamma(U_x, \mathcal{S}_{[D]})$$

On écrit la décomposition en composantes K-homogènes de chaque section g_E :

$$g_E = \sum_{D' \in D + K^0} g_{E,D'}, \ \text{ où } g_{E,D'} \in \Gamma(U_x, \mathcal{S}_{D'})$$

La section $g'_{E,D'} := \chi(D' - D) g_{E,D'}$ est K-homogène de degré D et on a l'identité

$$(1 - \chi(E)) g_{E,D'} = (1 - \chi(E + D - D')) g'_{E,D'} - (1 - \chi(D - D')) g'_{E,D'}$$

On obtient ainsi l'écriture désirée localement sur des ouverts qui recouvrent X. Par irréductibilité de X, on obtient l'unicité de l'écriture globalement en recollant ces sections. □

Corollaire 4.3.1.3. *Supposons K de type fini. Soit $E_1, ..., E_s$ une base de K^0. Alors pour tout ouvert $U \subset X$, l'idéal $\Gamma(U, \mathcal{I})$ est engendré par $1 - \chi(E_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente et des identités suivantes :

$$1 - \chi(E + E') = (1 - \chi(E)) + (1 - \chi(E'))\chi(E)$$
$$1 - \chi(-E) = (1 - \chi(E))(-\chi(-E))$$

□

4.3.2 Invariance de l'anneau de Cox

Notre objectif est maintenant de vérifier que l'anneau de Cox construit en 4.3.1.1 est indépendant des choix faits à isomorphisme près. On aura donc une construction intrinsèque car ne dépendant à isomorphisme près que de données intrinsèques de la variété (faisceau structural, groupe des classes).

Lemme 4.3.2.1. *Avec les données de 4.3.1.1. Soit $U \subset X$ un ouvert, $f \in \mathcal{S}(U)$ une section $\mathrm{Cl}(X)$-homogène de degré $[D]$, où $D \in K$. Il existe $f' \in \mathcal{S}_D(U)$ tel que $f - f' \in \mathcal{I}(U)$.*

Démonstration. Cela se voit grâce à l'astuce d'écriture ci-dessous. En effet, le premier terme dans le membre de droite est homogène de degré D, le second appartient à $\mathcal{I}(U)$.

$$f = \sum_{D' \in D + K^0} f_{D'} = \sum_{D' \in D + K^0} \chi(D' - D) f_{D'} + \sum_{D' \in D + K^0} (1 - \chi(D' - D)) f_{D'}$$

□

Proposition 4.3.2.2. *Avec les données de 4.3.1.1, on a pour tout $D \in K$ un isomorphisme de faisceaux $\pi_{|\mathcal{S}_D} : \mathcal{S}_D \to \mathcal{R}_{[D]}$.*

Démonstration. Considérons pour $x \in X$ le morphisme induit entre les tiges $\pi_x : \mathcal{S}_{D,x} \to \mathcal{R}_{[D],x}$, et montrons que c'est un isomorphisme. D'après 4.3.1.2, seul le germe nul de $\mathcal{S}_{D,x}$ se projette sur 0, on a donc l'injectivité. Pour la surjectivité, il suffit de montrer que toute section f de $\mathcal{S}_{[D]}$ sur un voisinage U de x s'écrit, éventuellement sur un voisinage V de x plus petit, sous la forme $f' + s$ avec $f' \in \mathcal{S}_D(V)$, et $s \in \mathcal{I}(V)$. Il suffit d'appliquer le lemme précédent. □

Proposition 4.3.2.3. *Avec les données de 4.3.1.1, on a pour tout ouvert $U \subset X$ un isomorphisme canonique $\mathcal{R}(U) \simeq \mathcal{S}(U)/\mathcal{I}(U)$.*

Démonstration. L'application canonique $\psi_U : \Gamma(U, \mathcal{S})/\Gamma(U, \mathcal{I}) \to \Gamma(U, \mathcal{S}/\mathcal{I})$ est $\mathrm{Cl}(X)$-homogène et injective, montrons qu'elle est surjective. Soit $h \in \Gamma(U, \mathcal{S}/\mathcal{I})$, c'est donc un recollement de sections locales $h_i := \psi_{U_i}(g_i)$, avec $U = \cup_{i \in I} U_i$, et telles que la restriction de $g_i - g_j$ à $U_i \cap U_j$ appartient à $\mathcal{I}(U_i \cap U_j)$ pour tout couple $(i, j) \in I$. Soit $g_{i,[D]} \in \mathcal{S}_{[D]}(U_i)$ la composante $\mathrm{Cl}(X)$-homogène de degré $[D]$ de g_i. Comme $\mathcal{I}$ est $\mathrm{Cl}(X)$-gradué d'après 4.3.1.2, on a $g_{j,[D]} - g_{i,[D]} \in \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$ pour tout couple $(i, j) \in I$. De plus, d'après le lemme 4.3.2.1, il existe des éléments $f_{i,D} \in \mathcal{S}_D(U_i)$ tels que $g_{i,[D]} - f_{i,D} \in \mathcal{I}(U_i)$, et on a $f_{i,D} - f_{j,D} \in \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$. Ainsi $f_{i,D} = f_{j,D}$ sur $U_i \cap U_j$ d'après 4.3.1.2, et on obtient que les $f_{i,D}$ se recollent en une section $f_D \in \mathcal{S}_D(U)$ telle que $\psi(f_D) = h_{[D]}$. Finalement, $f = \sum f_D$ est un antécédent de h par ψ. □

Théorème 4.3.2.4. *Avec les données de 4.3.1.1, soit K', χ' un autre choix de sous-groupe et de caractères. Alors les faisceaux de Cox associés sont isomorphes en tant que faisceaux d'algèbres $\mathrm{Cl}(X)$-graduées.*

Démonstration. Dans un premier temps, montrons que l'on peut se ramener à des faisceaux de Cox définis par un sous-groupe de $\mathrm{WDiv}(X)$ de type fini. Soit donc $K_1 \subset K$ de type fini se projetant surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. Un tel K_1 existe car il suffit par exemple de prendre le sous-groupe de K engendré par des antécédents de générateurs de $\mathrm{Cl}(X)$ par c. La restriction de χ à K_1 définit un caractère $\chi_1 : K_1^0 \to k(X)^*$. L'inclusion $K_1 \subset K$ définit une injection $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}$, qui envoie l'idéal $\mathcal{I}_1$ défini par χ_1 dans $\mathcal{I}$. Cela donne une injection $\mathrm{Cl}(X)$-graduée $\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}_1$ est le faisceau de Cox associé à K_1 et χ_1. Mais d'après 4.3.2.1, toute section $\mathrm{Cl}(X)$-homogène de $\mathcal{R}$ peut se représenter par un section K_1-homogène, cela donne la surjectivité de ce morphisme.

On suppose donc K de type fini. Montrons que tout choix de caractères $\chi, \chi' : K^0 \to k(X)^*$ définit un isomorphisme entre les faisceaux de Cox $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ associés. Notons que $\chi^{-1}\chi'$ envoie K^0 dans $\mathcal{O}(X)^* = k^*$. On peut ainsi étendre $\chi^{-1}\chi'$ en un caractère $\theta : K \to k^*$. En effet considérons une $\mathbb{Z}$-base $(D_1, ..., D_r)$ de K adaptée à K^0. Il existe alors des entiers positifs $n_1, ...n_s$ avec $s \leqslant k$ tels que $n_1D_1, ..., n_sD_s$ soit une $\mathbb{Z}$-base de K^0. Soit $\alpha_i := \chi^{-1}\chi'(n_iD_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Choisissons une racine n_i-ième de α_i que l'on note β_i, pour $1 \leqslant i \leqslant s$. En posant $\theta(D_i) = \beta_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, et $\theta(D_i) = 1$ pour $s+1 \leqslant i \leqslant r$ on définit un prolongement de $\chi^{-1}\chi'$. Ce prolongement permet de définir un automorphisme K-gradué (α, id) de $\mathcal{S}$ en posant :

$$\alpha_D : \mathcal{S}_D \to \mathcal{S}_D, \ \ f \mapsto \theta(D)f$$

Cet automorphisme envoie $\mathcal{I}'$ sur $\mathcal{I}$ par construction et induit donc un isomorphisme entre $\mathcal{S}/\mathcal{I}'$ et $\mathcal{S}/\mathcal{I}$.

Pour finir considérons deux sous-groupes de type fini $K, K' \subset \mathrm{WDiv}(X)$ se projetant chacun surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. Soit $(D_1, ..., D_r)$ une $\mathbb{Z}$-base de K. On choisit $E_i \in c^{-1}([D_i]) \cap K' = (D_i + \operatorname{Ker} c) \cap K'$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et on définit un morphisme $\tilde{\alpha} : K \to K'$ en posant $\alpha(D_i) = E_i$. Comme E_i est de la forme $D_i - \mathrm{div}(f_i)$ avec $f_i \in k(X)^*$, on voit que $\tilde{\alpha}$ est de la forme $\tilde{\alpha}(D) = D - \mathrm{div}(\eta(D))$, où $\eta : K \to k(X)^*$ est un morphisme de groupes. Choisissons un caractère $\chi' : K'^0 \to k(X)^*$ associé à K'. Alors, pour $D \in K^0$, on a

$$D - \mathrm{div}(\eta(D)) = \tilde{\alpha}(D) = \mathrm{div}(\chi'(\tilde{\alpha}(D)))$$

On obtient que D est le diviseur de la fonction $\chi(D) := \chi'(\tilde{\alpha}(D))\eta(D)$, et cette formule définit un caractère $\chi : K^0 \to k(X)^*$. On obtient ainsi un morphisme K-gradué $(\alpha, \tilde{\alpha}) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ entre les faisceaux associés à K et K' défini par

$$\alpha_D : \mathcal{S}_D \to \mathcal{S}'_{\tilde{\alpha}(D)}, \ \ f \mapsto \eta(D)f$$

Ce morphisme envoie l'idéal $\mathcal{I}$ défini par χ dans l'idéal $\mathcal{I}'$ défini par χ', et induit un morphisme injectif $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$. Comme les α_D sont des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules on voit que ce morphisme est également surjectif en utilisant 4.3.2.2. $\square$

Remarque 4.3.2.5. Avec les données de 4.3.1.1. Si on se donne un point régulier $x \in X$, on peut définir de manière canonique le faisceau de Cox de la variété pointée (X, x). Soit $K^x := \{D \in \mathrm{WDiv}(X) \mid x \notin \operatorname{Supp} D\}$. Ce sous-groupe de $\mathrm{WDiv}(X)$ se projette surjectivement sur $\mathrm{Cl}(X)$. En effet pour tout $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$, choisissons $D \in c^{-1}([D])$. Si $D \notin K^x$, alors comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, on a localement $D = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in k(X)$. Ainsi, $D - \mathrm{div}(f) \in K^x$ et $c(D - \mathrm{div}(f)) = [D]$. Pour tout $E \in K^{x,0}$, on a $E = \mathrm{div}(f_E)$ pour une fonction rationnelle $f_E \in k(X)$ définie sur un voisinage de x, car $x \notin \operatorname{Supp} E$. Si l'on impose $f_E(x) = 1$, alors f_E est unique car $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et on définit ainsi un caractère $\chi^x : K^x \to k(X)^*$, $E \mapsto f_E$. On note $\mathcal{R}^x$ le faisceau de Cox obtenu canoniquement à partir de ces données.

4.3.3 Exemples

Exemple 4.3.3.1. Considérons la surface affine $X \subset \mathbb{A}^3_k$ d'équation $t_1t_2 - t_3^2$. Cette surface est irréductible et normale d'après 1.1.2.7 et 1.3.2.2. On note f_i la fonction régulière sur X associée à la restriction de la coordonnée t_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Soit $D_2 := \mathcal{V}_X(f_2, f_3)$, on a facilement $\mathcal{O}_{D_2}(D_2) \simeq k[f_1]$ donc D_2 est un fermé irréductible de codimension 1 de X, c'est donc un diviseur premier et (f_2, f_3) est son point générique. On a $(f_2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_1f_2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_3^2, f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)} = (f_3)\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)}$ donc f_3 est une uniformisante dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}(X)_{(f_2,f_3)}$. Dans cet anneau, on a $f_2 = f_1^{-1}f_3^2$, d'où $v_{D_2}(f_2) = 2$, puis $\mathrm{div}(f_2) = 2D_2$ car $\operatorname{Supp}\mathrm{div}(f_2) = D_2$. On a de même $\mathrm{div}(f_1) = 2D_1$, et $\mathrm{div}(f_3) = D_1 + D_2$.

Par ailleurs, $\mathcal{O}(X \setminus D_2) = \mathcal{O}(X)_{f_2} \simeq k[f_2^{\pm 1}, f_3]$ est factoriel donc $\mathrm{Cl}(X \setminus D_2) = 0$ d'après 3.2.1.3. Notons que cela montre aussi que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$. D'après 3.2.1.5, $\mathrm{Cl}(X)$ est engendré par D_2. Montrons que D_2 n'est pas principal. Soit l'idéal maximal $\mathfrak{m} := (f_1, f_2, f_3)$. Le k-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension 3 engendré par les classes $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ des fonctions f_i modulo $\mathfrak{m}^2$. Mais $(f_2, f_3) \subset \mathfrak{m}$, et son image dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ contient $\bar{f}_2$ et $\bar{f}_3$, il ne peut donc pas être principal. Ainsi, $\mathrm{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on a deux générateurs de somme nulle D_1 et D_2.

Calculons le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ associé à $K = \mathbb{Z}D_2$. D'après ce qui précède on a $\mathcal{S}_{2D_2}(X) = (f_2^{-1})$ et $\mathcal{S}_{-2D_2}(X) = (f_2)$ comme $\mathcal{O}(X)$-modules. On a $\mathcal{S}_{-D_2}(X) = (f_2, f_3)$, puis d'après 3.2.3.3 et 3.1.1.5 2, on a $\mathcal{S}_{D_2}(X) = (f_2, f_3)(f_2^{-1}) = (1, f_2^{-1}f_3)$. Posons

$$g_1 := 1 \in \mathcal{S}_{D_2}(X),\ g_2 := f_2^{-1}f_3 \in \mathcal{S}_{D_2}(X),\ g_3 := f_2^{-1} \in \mathcal{S}_{2D_2}(X),\ g_4 := f_2 \in \mathcal{S}_{-2D_2}(X)$$

Compte tenu des relations ci-dessous, $\mathcal{S}(X)$ est engendrée comme k-algèbre par g_1, g_2, g_3 et g_4.

$$f_1 = g_2^2 g_4 \in \mathcal{S}_0(X) = \mathcal{O}(X), \text{ de même, } f_2 = g_1^2 g_4 \text{ et } f_3 = g_1 g_2 g_4$$

Soit $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{S})$ le spectre relatif de $\mathcal{S}$ muni de son morphisme structural p. Comme (X, p) est un bon quotient pour l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\widetilde{X}$ défini par la $\mathbb{Z}$-graduation $\deg(g_1) = 1, \deg(g_2) = 1, \deg(g_3) = 2$ et $\deg(g_4) = -2$, on a $\dim \widetilde{X} = \dim X + 1$. De plus, $\dim \widetilde{X} = \dim \mathcal{S}(X)$ car on a une immersion ouverte $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathcal{S}(X)$. On en déduit que $g_3 g_4 = 1$ engendre toutes les relations dans $\mathcal{S}(X)$ car ce dernier est intègre. On a ainsi un isomorphisme d'algèbres graduées $\mathcal{S}(X) \simeq k[t_1, t_2, t_3, t_3^{-1}]$, où les t_i sont des indéterminées et $\deg(t_i) := \deg(g_i)$.

Le noyau de la projection $\mathbb{Z}D_2 \to \mathrm{Cl}(X)$ est $K^0 := 2\mathbb{Z}D_2$, et un caractère est donné par $\chi : K^0 \to k(X),\ 2nD_2 \mapsto f_2^n$. L'idéal $\mathcal{I}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_X$-module par la section globale $1 - g_4$. Finalement l'anneau de Cox de X est donné à ismorphisme près par

$$\mathcal{R}(X) \simeq k[t_1, t_2, t_3^{\pm}]/(1 - t_3^{-1}) \simeq k[t_1, t_2]$$

la $\mathrm{Cl}(X)$-graduation étant donnée par $\deg(t_1) = \deg(t_2) = [D_2]$.

Exemple 4.3.3.2. Considérons la surface affine $X \subset \mathbb{A}_k^3$ d'équation $t_1^2 - t_2 t_3 - 1$. Cette surface est lisse et irréductible. On note f_i la fonction régulière sur X associée à la restriction de la coordonnée t_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Considérons les diviseurs premiers

$$D_+ = \mathcal{V}_X(f_1 - 1, f_2) = \{1\} \times \{0\} \times k$$

$$D_- = \mathcal{V}_X(f_1 + 1, f_2) = \{-1\} \times \{0\} \times k$$

Dans chaque anneau local $\mathcal{O}_{X, D_\pm}$, on voit facilement que f_2 est une uniformisante, et on obtient $\mathrm{div}(f_2) = D_+ + D_-$. De plus, $X \setminus \mathrm{Supp}\, \mathrm{div}(f_2) = X_{f_2} \simeq \mathbb{A}_k^{1*} \times \mathbb{A}^1$ car $\mathcal{O}(X_{f_2}) \simeq k[f_1, f_2^{\pm 1}]$. Cela montre que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et que $\mathrm{Cl}(X)$ est engendré par $[D+]$, d'après 3.2.1.3, 3.2.1.5, et le fait que D_+ et $-D_-$ soient linéairement équivalents. Supposons qu'il existe $n > 0$ tel que $n[D_+] = 0$, alors $nD_+ = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in \mathcal{O}(X)$ car D_+ est effectif. On a de fait $f_2^n = fh$ avec $h \in \mathcal{O}(X)$ tel que $\mathrm{div}(h) = nD_-$. Si on munit $k[t_1, t_2, t_2]$ de la graduation $\deg(t_1) = 0$, $\deg(t_2) = 1$, $\deg(t_3) = -1$ alors l'équation $t_1^2 - t_2 t_3 - 1$ est homogène, et $\mathcal{O}(X)$ hérite d'une graduation induite avec $\deg(f_i) = \deg(t_i)$. Tout élément de degré positif est multiple de f_2, en particulier on voit dans l'écriture $f_2^n = fh$ que f ou h est nécessairement multiple de f_2, ce qui est impossible vu leur diviseur respectif. On conclut que $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}[D_+]$.

La variété X est naturellement munie d'une action de $G := \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (-t_1, -t_2, -t_3)$. D'après, 2.2.2.9 on a l'existence d'un quotient géométrique $\pi : X \to Y := X//G$, qui est de plus irréductible et lisse. L'algèbre des invariants est facilement identifiable, on obtient $Y = \mathrm{Spec}\, k[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_1 f_2, f_1 f_3, f_2 f_3]$, avec π donné par l'inclusion de cette algèbre. On montre maintenant que $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, engendré par la classe de $D := \pi(D+)$. On a une action naturelle de G sur $\mathrm{WDiv}(X)$ et l'orbite de D_+ est $\{D_-, D_+\}$. Ainsi, G agit sur X_{f_2} et le quotient $\pi(X_{f_2})$ a pour algèbre d'invariants $k[f_1^2, f_2^{\pm 2}]$. Ce dernier anneau est factoriel, on en déduit que $[D]$ engendre $\mathrm{Cl}(Y)$. Par ailleurs, D n'est pas principal sinon $\pi^*(D) = D_+ + D_-$ serait le diviseur d'une fonction G-invariante, ce qui n'est pas le cas. Enfin, comme on a $2D = \mathrm{div}(f_2^2)$, le résultat est démontré.

Déterminons maintenant l'anneau de Cox de Y. Calculons le faisceau d'algèbres divisorielles $\mathcal{S}$ sur Y associé à $K = \mathbb{Z}D$. On a $\mathcal{S}_{-D}(Y) = \mathcal{I}_Y(D) = \pi^\sharp(Y)^{-1}((f_2)) = k[f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_1 f_2, f_1 f_3, f_2 f_3] \cap (f_2) = (f_1 f_2, f_2^2, f_2 f_3)$. On peut vérifier à la main que D est de Cartier car il est principal localement en 0 et aussi sur les ouverts affines principaux associés à $f_1 f_2, f_2 f_3$ et $f_1 f_3$ qui recouvrent $Y \setminus \{0\}$. Par exemple on a

$$(f_1 f_2, f_2^2, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = (f_1^2 f_2 f_3, f_1^2 f_2^2 f_3^2, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = ((f_2 f_3 + 1) f_2 f_3, f_2 f_3)_{f_1 f_3} = (f_2 f_3)_{f_1 f_3}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_{-D}(Y)$ est inversible et on a $\mathcal{S}_D(Y) = \mathcal{S}_{-D}(Y)^{-1} = (\mathcal{O}(Y) : \mathcal{S}_{-D}(Y))$. On trouve facilement des sections

$$a_1 := 1,\;\; a_2 := f_1 f_2^{-1},\;\; a_3 := f_2^{-1} f_3 \in \mathcal{S}_D(Y)$$

Or rappelons que $\mathcal{S}_{-D}(Y)$ est engendré par les sections

$$b_1 := f_1 f_2,\;\; b_2 := f_2^2,\;\; b_3 := f_2 f_3$$

Donc compte tenu de la relation $a_2 b_1 - a_1 b_3 = 1$ on conclut que $\mathcal{S}_D(Y) = (a_1, a_2, a_3)$. Et comme

$$f_1^2 = a_2 b_1,\;\; f_2^2 = a_1 b_2,\;\; f_3^2 = a_3 b_3,\;\; f_1 f_2 = a_1 b_1,\;\; f_1 f_3 = a_3 b_1,\;\; f_2 f_3 = a_1 b_3 \in \mathcal{S}_0(Y)$$

on trouve que $\mathcal{S}(Y)$ est engendrée comme k-algèbre par $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Prenons le caractère $\chi : K^0 \to k(Y)^*, 2nD \mapsto f_2^{2n}$. L'idéal $\mathcal{I}(Y)$ de $\mathcal{O}(Y)$ est engendré par $1 - f_2^2$ avec $1 \in \mathcal{S}_0(Y)$ et $f_2^2 \in \mathcal{S}_{-2D}(Y)$, d'après 4.3.1.3, et $\mathcal{R}(Y)$ est engendré par les classes $\overline{a_i}$ des a_i module $\mathcal{I}(Y)$. Or on remarque que

$$a_1 - b_2 = (1 - f_2^2) a_1,\;\; a_2 - b_1 = (1 - f_2^2) a_2,\;\; a_3 - b_3 = (1 - f_2^2) a_3$$

et on en déduit que $\mathcal{R}(Y)$ est engendré par $z_1 := \overline{a_2} = \overline{b_1}, z_2 := \overline{a_1} = \overline{b_2}, z_3 = \overline{a_3} = \overline{b_3}$. La relation $z_1^2 - z_2 z_3 - 1 = 0$, engendre toute les relations pour des raisons de dimension. Ainsi $\mathcal{R}(Y) \simeq \mathcal{O}(X)$, en particulier l'anneau de Cox n'est pas factoriel car le groupes des classes de X n'est pas trivial.

4.4 Propriétés algébriques de l'anneau de Cox

4.4.1 Intégrité et normalité

Notre objectif est de montrer que les anneaux de Cox sont intégralement clos. Remarquons tout de suite que l'on peut travailler avec une variété lisse pour cela.

Proposition 4.4.1.1. *On considère les données de la construction 4.3.1.1. Alors pour tous ouverts $V \subset U \subset X$ tels que $U \setminus V$ est de codimension $\geqslant 2$ dans U, la restriction $\mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(V)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a déjà vu l'isomorphisme $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{S}(V)$ en 3.2.2.6. De plus, la proposition 4.3.1.2 montre que la restriction $\mathcal{I}(U) \to \mathcal{I}(V)$ est un isomorphisme. On conclut en appliquant la proposition 4.3.2.3. $\square$

Construction 4.4.1.2. On considère les données de la construction 4.3.1.1. On suppose de plus que X est lisse. On considère les spectres relatifs $(\widetilde{X}, p) = \operatorname{Spec}_X \mathcal{S}$ et $(\widehat{X}, p_X) = \operatorname{Spec}_X \mathcal{R}$. De plus, on peut toujours supposer K de type fini et ces spectres sont munis respectivement d'une action du tore $H := \operatorname{Spec} k[K]$ et du groupe diagonalisable $H_X := \operatorname{Spec} k[\operatorname{Cl}(X)]$. On a une immersion fermée $\widehat{X} \overset{i}{\hookrightarrow} \widetilde{X}$ d'image $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "p_X"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

De même, H_X se plonge dans H, et l'immersion fermée i est H_X équivariante pour ce plongement. La paire $(\widetilde{X}, p)$ (resp. $(\widehat{X}, p_X)$) est un H-fibré principal (resp. H_X-fibré principal). En particulier, ce sont des quotients géométriques. Enfin, $\widehat{X}$ est une variété lisse et quasi-affine.

Démonstration. Les actions de H et H_X sont dues aux graduations respectives de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ par K et $\operatorname{Cl}(X)$. Pour tout ouvert affine $U \subset X$, notons $U_1 := p_X^{-1}(U)$ et $U_2 := p^{-1}(U)$. La projection $\mathcal{S}(U) \to \mathcal{R}(U)$ donne localement une immersion fermée $U_1 \hookrightarrow U_2$ d'image $\mathcal{V}_{U_2}(\mathcal{I}(U_2))$. De plus, ces immersions sont graduées par la projection $c : K \to \operatorname{Cl}(X)$, et se recollent en une immersion i d'image $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ qui est H_X-équivariante. Les mêmes arguments qu'en 4.2.1.2 nous donne que p_X et p sont des bons quotients car on a

$$(p_X)_*(\mathcal{O}_{\widehat{X}})_0 \simeq \mathcal{R}_0 \simeq \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{S}_0 \simeq p_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_0$$

On a déjà vu que $(\widetilde{X}, p)$ est un H-fibré principal car c'est localement un H-fibré trivial (4.2.1.1). Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X tel que $\widetilde{U_i}$ soit un H-fibré trivial pour tout $i \in I$. On construit avec cela un morphisme étale et surjectif $X' := \bigsqcup_{i\in I} U_i \to X$. On obtient également un morphisme surjectif étale et H-équivariant $H \times X' \to \widetilde{X}$, où l'action de H se fait sur le facteur de gauche. Puis, on trouve un sous-tore H' de H tel que $H_X H' = H$ et $H_X \cap H'$ est fini (2.1.4.9). Avec cela on construit d'après 2.2.2.9 un revêtement étale $H_X \times H' \times X'$ de $H \times X'$, en faisant le quotient géométrique par l'action du groupe fini $H_X \cap H'$. On en déduit le diagramme commutatif ci-dessous, où le morphisme φ est étale surjectif, et H-équivariant

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X} \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[dr, "p_X"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] & H_X \times H' \times X' \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "p_{X'}"] \\
& X & X' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\varphi^{-1}(\widehat{X})$ est une sous-variété H_X-stable de $H_X \times H' \times X'$ où l'on rappelle que l'action de H_X se fait sur le facteur de gauche. On en déduit facilement qu'elle est de la forme $H_X \times S$ pour une sous-variété S de $H' \times X'$. Ainsi, $(\varphi^{-1}(\widehat{X}), p_{X'})$ est un H_X-fibré principal, et on peut montrer qu'il en est nécessairement de même pour $\widehat{X}$.

Montrons maintenant que $\widehat{X} \simeq \mathcal{V}_{\widetilde{X}}(\mathcal{I})$ est une variété. C'est un schéma de type fini sur k. De plus, il est séparé sur k car 1.2.3.14 est vérifié par construction, et comme X est séparé sur k, on peut appliquer 1.2.3.15. Il reste à montrer que ce schéma est réduit. On peut travailler localement sur un ouvert affine de la forme $\widetilde{U} = p^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(\mathcal{S}(U))$ pour un ouvert affine U de X. Soit $f \in \sqrt{\mathcal{I}(U)}$, comme c'est un idéal $\mathrm{Cl}(X)$-homogène, il contient les composantes $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes de f. Soit $f_{[D]}$ l'une d'entre elles, elle s'écrit $f_{[D]} = f_D + g$ avec $f_D \in \mathcal{S}_D(U)$ et $g \in \mathcal{I}(U)$ d'après 4.3.2.2. On obtient facilement $f_D^n \in \mathcal{I}(U)$ pour un $n > 0$. Cela impose $f_D^n = 0$ compte tenu de 4.3.1.2 et donc $f_D = 0$. Finalement, $f \in \mathcal{I}(U)$ ce qui montre que $\mathcal{I}(U)$ est radical.

La variété $\widehat{X}$ est quasi-affine car $\widetilde{X}$ l'est d'après 4.2.1.12. Montrons pour finir qu'elle est lisse. L'immersion i est H_X équivariante si bien que l'on peut supposer que $\widehat{X}$ est une sous-variété H_X-stable de $\widetilde{X}$ pour l'action induite de $H_X \subset H$. De plus, on peut travailler localement et donc supposer que $\widetilde{X} \simeq H \times X$ avec l'action de H sur le facteur de gauche, d'après 4.2.1.1 car X est lisse. Supposons que H_X soit un tore, alors c'est un facteur direct de H d'après 2.1.4.9, c'est-à-dire qu'il existe un sous-tore $H' \subset H$ tel que $H_X \times H' \simeq H$ via le morphisme naturel $(h, h') \mapsto hh'$. Alors $\widehat{X}$ est égal à $H_X \times S$ pour une certaine sous-variété S de $H' \times X$ qui est isomorphe à X via la projection p. On obtient le diagramme ci-dessous, et donc le résultat.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X} = H_X \times S \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[d, "p_S"] & \widetilde{X} = H_X \times H' \times X \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "\simeq"] & X
\end{tikzcd}$$

Dans le cas général, on utilise à nouveau le sous-tore H' de H tel que $H_X H' = H$ et $H_X \cap H'$ est fini. Grâce à cela on va pouvoir construire un revêtement étale S de X tel que $\widehat{X}$ soit le quotient de $H_X \times S$ par le groupe fini $H_X \cap H'$. Comme S sera lisse en tant que revêtement étale d'une variété lisse d'après 1.3.2.6, le résulta suivra d'après 2.2.2.9. On considère le carré cartésien ci-dessous, où $(\widetilde{X}, \pi)$ est le quotient par $H_X \cap H'$

$$\begin{tikzcd}
Y = \pi^{-1}(\widehat{X}) \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[d, "\pi_Y"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H_X \times H' \times X \arrow[d, "\pi"] \\
\widehat{X} \arrow[r, "\subset"] & \widetilde{X} = H \times X
\end{tikzcd}$$

Comme dans le cas facile où H_X était facteur direct, on a $Y = H_X \times S$, où S est une sous-variété de $H' \times X$ telle que X est le quotient de S par $H_X \cap H'$. On a également que $(\widehat{X}, \pi_Y)$ est le quotient de Y par $H_X \cap H'$ d'après 2.2.2.2. Ainsi π_Y est étale d'après 2.2.2.9. Finalement on obtient le diagramme commutatif ci-dessous, où π_S est également étale pour la même raison que π_Y, ce qui finit la preuve.

$$\begin{tikzcd}
 & Y = H_X \times S \arrow[r, hook, "\subset"] \arrow[d, "\pi_Y = /H_X \cap H'"] \arrow[ddl, "p_S"'] & H_X \times H' \times X \arrow[d, "\pi = /H_X \cap H"] \\
 & \widehat{X} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "p_X = /H_X"] & \widetilde{X} = H \times X \arrow[dl, "p = /H"] \\
S \arrow[r, "\pi_S = /H_X \cap H'"] & X &
\end{tikzcd}$$

□

Théorème 4.4.1.3 (Car. zéro)**.** *On considère les données de la construction 4.3.1.1. On suppose de plus que $\mathcal{R}$ est localement de type fini. Alors pour tout ouvert $U \in X$, l'anneau $\mathcal{R}(U)$ est intégralement clos.*

Démonstration. On peut supposer X lisse donc être dans le contexte de 4.4.1.2. Alors $\widehat{X}$ est lisse donc normale. Il reste donc à prouver que les anneaux $\mathcal{R}(U)$ sont intègres pour tout ouvert U de X. Si on prouve l'irréductibilité de $\widehat{X}$, ce sera donc un schéma intègre est on aura le résultat d'après 1.2.2.9. Comme p_X est surjectif, une de ses composantes irréductibles $\widehat{X}_1$ domine X car une variété irréductible ne peut être réunion de fermés irréductibles de codimensions non-nulles. Soit U un ouvert de X, si $p_X^{-1}(U)$ est irréductible alors il est inclus dans $\widehat{X}_1$. Par ailleurs, comme $p_X^{-1}(U)$ est isomorphe à la sous variété de $p^{-1}(U)$ définie par $\mathcal{I}(U)$, il suffit de montrer que l'on peut recouvrir X par des ouverts U tels que $\mathcal{V}_{p^{-1}(U)}(\mathcal{I}(U))$ est irréductible, on aura alors $\widehat{X}_1 = \widehat{X}$.

On peut supposer K de type fini d'après 4.3.2.4. Soit $(D_1, ..., D_s)$ une base de K telle que $(n_1 D_1, ..., n_l D_l)$ soit une base de K^0 avec $1 \leqslant l \leqslant s$. Une telle base existe d'après la théorie des $\mathbb{Z}$-modules. On peut également supposer que les diviseurs D_i ne sont pas des multiples dans K, quitte à remplacer K si nécessaire. On choisit un ouvert affine $U \subset X$ tel que chaque diviseur D_i est principal, disons égal à $\operatorname{div}(f_i)$ avec $f_i \in k(X)$. D'après le corollaire 4.3.1.3, l'idéal $\mathcal{I}(U)$ est engendré par les générateurs $1 - \chi(n_i D_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$. L'isomorphisme ci-dessous identifie $p^{-1}(U)$ à $U \times \mathbb{G}_m^s$.

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_k k[t_1^{\pm}, ..., t_s^{\pm}] \to \mathcal{R}(U),\ g \otimes t_1^{\nu_1} ... t_s^{\nu_s} \mapsto g f_1^{-\nu_1} ... f_s^{-\nu_s}$$

Par cet identification, $p_X^{-1}(U)$ est donné par les équations $1 - \chi(n_i D_i) f_i^{n_i} t_i^{n_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$, et on va montrer que cet ouvert affine est irréductible. On doit pour cela vérifier que l'algèbre ci-dessous est intègre

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}}(p_X^{-1}(U)) \simeq \frac{\mathcal{O}_X(U)[t_1^{\pm 1}, ..., t_s^{\pm 1}]}{(1 - \chi(n_i D_i) f_i^{n_i} t_i^{n_i})_{1 \leqslant i \leqslant l}}$$

On peut le faire par quotients successifs, où à chaque étape $i < l$ on effectue un quotient

$$\frac{A_{i-1}[t_i^{\pm 1}]}{(1 - \chi(n_i D_i) f_i^{n_i} t_i^{n_i})}[t_{i+1}^{\pm 1}, ..., t_s^{\pm 1}],$$

où A_{i-1} est l'algèbre des coordonnées d'une sous-variété irréductible de $U \times \mathbb{G}_m^{i-1}$, avec $A_0 = \mathcal{O}_X(U)$, et l'équation $1 - \chi(n_i D_i) f_i^{n_i} t_i^{n_i}$ est vue dans l'algèbre $A_{i-1}[t_i^{\pm 1}]$. On peut travailler dans le corps des fractions K_{i-1} de A_{i-1}, et supposer f_i inversible. En faisant le changement de variable $u_i = f_i t_i$, on est donc ramené à montrer que $1 - \chi(n_i D_i) u_i^{n_i}$ est irréductible dans $K_{i-1}[u_i^{\pm 1}]$. En utilisant le lemme suivant, on doit donc montrer que $\chi(n_i D_i)$ n'est pas une puissance dans K_{i-1}. Il est suffisant de le faire dans $k(X)$ car $\chi(n_i D_i)$ est indépendant des coordonnées t_j pour $j \neq i$. Donc si $\chi(n_i D_i)$ était une puissance dans K_{i-1}, il le serait nécessairement dans $k(X)$, en attribuant des valeurs arbitraires aux coordonnées t_j. Supposons par l'absurde que $\chi(n_i D_i)$ soit une puissance dans $k(X)$. On obtient alors $n_i D_i = k_i \operatorname{div}(h_i)$ pour un élément $h_i \in k(X)$. Or les diviseurs D_i ne sont pas multiples dans $\operatorname{WDiv}(X)$ donc k_i divise n_i, ce qui entraine que $n_i / k_i D_i$ est principal, c'est une contradiction avec le fait que $(n_1 D_1, ..., n_l D_l)$ soit une base de K^0. Finalement, comme X est lisse, on peut la recouvrir par de tels ouverts, ce qui conclut la preuve. □

Lemme 4.4.1.4 (Car. zéro)**.** *Soit K un corps de caractéristique zéro contenant toutes les racines de l'unité. Soit $a \in K$ qui ne soit pas une puissance non-triviale. Alors pour tout entier $n > 0$, le polynôme $1 - at^n$ est irréductible dans $K[t^{\pm 1}]$.*

Démonstration. Dans une clôture algébrique de K, notons $b = \sqrt[n]{a}$ une racine n-ième de a. On a donc $1 - at^n = \prod_{i=0}^{n-1}(1 - \xi^i bt)$. Si on pouvait écrire une factorisation non-triviale $1 - at^n = h_1(t)h_2(t)$ dans $K[t^{\pm 1}]$, alors $b^k \in K$ pour un entier $1 < k < n$ car K contient toutes les racines de l'unité. En notant $d = k \wedge n$ on obtient $b^d \in K$, ce qui montre que a est une puissance non-triviale. C'est une contradiction. □

4.4.2 Localisation et groupe des unités

Construction 4.4.2.1. Dans la situation de la construction 4.3.1.1, considérons un diviseur $D \in K$ et une section globale homogène $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$. D'après la proposition 4.3.2.2, il existe un unique élément $\tilde{f} \in \mathcal{S}_D(X)$ tel que $\pi(X)(\tilde{f}) = f$. On définit le $[D]$-diviseur de f comme le diviseur de Weil effectif

$$\operatorname{div}_{[D]}(f) := \operatorname{div}_D(\tilde{f}) = \operatorname{div}(\tilde{f}) + D$$

Ce diviseur ne dépend ni du choix de $D \in c^{-1}([D])$, ni des choix faits en 4.3.1.1.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$, et deux isomorphismes $\varphi_i : \mathcal{O}_X(D_i) \to \mathcal{R}_{[D]}$. On note $\tilde{f}_i$ les deux sections telles que $\varphi(\tilde{f}_i) = f$. En raisonnant sur l'ouvert régulier de X, on voit que l'isomorphisme $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est donné par la multiplication par un élément $h \in k(X)^*$ satisfaisant $\operatorname{div}(h) = D_1 - D_2$. On a ainsi $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 h$ et on obtient facilement les égalités

$$D_2 + \operatorname{div}(\tilde{f}_2) = D_1 + \operatorname{div}(\tilde{f}_1)$$

□

Proposition 4.4.2.2. *Avec les notations de la proposition précédente, on a :*

1. *Pour tout diviseur effectif $E \in \mathrm{WDiv}(X)$, il existe $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$ et $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ tels que $E = \operatorname{div}_{[D]}(f)$.*
2. *Soit $[D] \in \mathrm{Cl}(X)$ et $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ non-nulle. Alors $\operatorname{div}_{[D]}(f) = 0 \implies [D] = 0$ dans $\mathrm{Cl}(X)$.*
3. *Pour tous $f \in \mathcal{R}_{[D_1]}(X)$ et $g \in \mathcal{R}_{[D_2]}(X)$, on a $\operatorname{div}_{[D_1]+[D_2]}(fg) = \operatorname{div}_{[D_1]}(f) + \operatorname{div}_{[D_2]}(g)$.*

Démonstration. La première assertion est claire d'après 3.2.3. Pour la deuxième, si $\operatorname{div}_{[D]}(f) = 0$, alors $\operatorname{div}_{[D]}(\tilde{f}) = 0$ pour un certain représentant $\tilde{f} \in \mathcal{S}_D(X)$ de f. Cela montre que D est principal. La troisième assertion est claire par définition. □

On remarque que le système linéaire complet associé à un diviseur D d'une variété projective irréductible et normale s'écrit

$$|D| = \{\operatorname{div}_{[D]}(f) \mid f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)\} = \mathbb{P}(\mathcal{R}_{[D]}(X))$$

Définition 4.4.2.3. Dans la situation de la construction 4.3.1.1. Pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$, on définit la $[D]$-localisation de X par f comme l'ouvert de X

$$X_{[D],f} := X \setminus \operatorname{Supp}(\operatorname{div}_{[D]}(f))$$

Proposition 4.4.2.4. *Dans la situation de la construction 4.3.1.1. Pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\Gamma(X_{[D],f}, \mathcal{R}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{R})_f$$

Démonstration. C'est une conséquence de 4.2.1.7, 4.3.2.3 et du fait que la localisation est compatible avec le passage au quotient. □

On s'intéresse maintenant aux unités de l'anneau de Cox. Le résultat suivant montre en particulier que les unités de l'anneau de Cox d'une variété projective irréductible et normale sont les fonctions constantes.

Proposition 4.4.2.5. *Dans la situation de la construction 4.3.1.1,*

1. *Tout élément homogène inversible de $\mathcal{R}(X)$ est constant.*
2. *Si $\Gamma(X, \mathcal{O}) = k$, tout élément inversible de $\mathcal{R}(X)$ est constant.*

Démonstration. Considérons $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ inversible. Pour la première assertion, l'inverse g de f appartient à $\mathcal{R}_{-[D]}(X)$ et on a $fg = 1$ dans $\mathcal{R}_0(X)^* = \mathcal{O}(X)^* = k^*$. D'après 4.4.2.2 on a $0 = \mathrm{div}_0(fg) = \mathrm{div}_{[D]}(f) + \mathrm{div}_{[-D]}(g)$. Comme les deux derniers diviseurs sont effectifs, ils sont nécessairement nuls. Toujours d'après 4.4.2.2 on obtient $[D] = 0$, et donc $f \in k^*$. Pour la seconde assertion, on doit montrer que tout $f \in \mathcal{R}(X)^*$ est de degré 0. On considère la décomposition $K_0 \oplus K_t$ où K_t est le sous $\mathbb{Z}$-module de torsion de K. On considère la graduation "épaissie"

$$\mathcal{R}(X) = \bigoplus_{w \in K_0} R_w, \quad R_w := \bigoplus_{u \in K_t} \mathcal{R}(X)_{w+u}$$

Avec cette graduation, on peut appliquer 1.1.5.9 et en déduire que f et f^{-1} sont homogènes de degré respectifs $w \in K_0$ et $-w$. On écrit les décompositions de f et f^{-1} en composantes $\mathrm{Cl}(X)$-homogènes

$$f = \sum_{u \in K_t} f_{w+u}, \quad f^{-1} = \sum_{u \in K_t} f^{-1}_{-w-u}$$

Comme $fg = 1$ on a $f_{w+u_0} f^{-1}_{-w-u_0} \neq 0$ pour au moins un degré $u_0 \in K_t$. En tant que fonction régulière sur X, le produit $f_{w+u_0} f^{-1}_{-w-u_0}$ est une constante non-nulle par hypothèse. On en déduit $w + u_0 = 0$ comme plus haut et donc $w = 0$. Ainsi, tous les degrés $w + u$ sont de torsion dans $\mathrm{Cl}(X)$. Pour $u \neq 0$, on a donc $n(w + u) = 0$ pour un certain entier $n > 0$, puis en utilisant que $\mathcal{O}(X) = k$, on a $0 = \mathrm{div}_0(f^n_{w+u}) = \mathrm{div}_{n(w+u)}(f^n_{w+u}) = n\,\mathrm{div}_{w+u}(f_{w+u})$. On en déduit $f_{w+u} = 0$ d'après 4.4.2.2, puis que f est homogène de degré 0 donc constante. □

4.4.3 Propriétés de divisibilité

Dans le cas d'un groupe des classes de type fini sans torsion on a vu que l'anneau de Cox etait factoriel. Ce n'est pas le cas en général en présence de torsion comme le montre l'exemple 4.3.3.2. Toutefois, si l'on se restreint aux éléments homogènes on peut obtenir des critères intéressants de divisibilité.

Définition 4.4.3.1. Soit K un groupe abélien et R une k-algèbre K-graduée intègre.

1. Soit $f \in R$ un élément non-nul et non-inversible. On dit que f est K-premier si il est homogène et si $f \mid gh$ avec g et h homogènes implique que $f \mid g$ ou $f \mid h$.
2. On dit que R est K-factoriel si tout élément f homogène non-nul et non-inversible est produit d'éléments K-premiers.
3. On dit d'un idéal $\mathfrak{a}$ qu'il est K-principal si il est engendré par un élément homogène.
4. On dit d'un idéal $\mathfrak{a}$ qu'il est K-premier si il est homogène et pour tous éléments $f, g \in R$ homogènes tels que $fg \in \mathfrak{a}$, on ait $f \in \mathfrak{a}$ ou $g \in \mathfrak{a}$.
5. On dit qu'un idéal K-premier $\mathfrak{a}$ est de K-hauteur d si cet entier est la longueur maximale des chaines $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$ d'idéaux K-premiers.

On peut considérer ces notions d'un point de vue géométrique. Soit $H = \mathrm{Spec}\, k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété affine irréductible et normale. Alors $\mathrm{WDiv}(X)$ est naturellement muni d'une action de H par

$$h.\sum_i a_i D_i = \sum_i a_i (h.D_i)$$

Considérons le support Y d'un diviseur, c'est-à-dire la réunion des supports d'un nombre fini de diviseurs premiers. Ce support est H-stable si et seulement si l'idéal $\mathfrak{a} := \mathcal{I}_X(Y)$ qu'il définit est K-homogène. De plus, si $\mathfrak{a}$ est K-premier, alors il est irréductible en tant qu'idéal K-homogène, c'est-à-dire que l'on ne peut pas l'écrire comme intersection d'idéaux K-homogènes qui le contiennent strictement. On voit que cela entraine que l'action de H est transitive sur les diviseurs premiers envisagés. Réciproquement, supposons que l'action est transitive et montrons que $\mathfrak{a}$ et K-premier. Cela revient à montrer que $\mathcal{O}(Y)$ est "K-intègre". Soient $f, g \in \mathcal{O}(Y)$ des éléments K-homogènes non-nuls, et supposons par l'absurde que $fg = 0$. Alors $Y = \mathcal{V}_Y(f) \cup \mathcal{V}_Y(g)$, et chacun de ces deux fermés est H-stable. Par hypothèse on a nécessairement $Y = \mathcal{V}_Y(f)$, quitte à renommer f en g, et donc $f = 0$, c'est une contradiction. On introduit donc la version géométrique de ces concepts :

Définition 4.4.3.2. Soit $H = \operatorname{Spec} k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété irréductible et normale.

1. Un diviseur H-premier est un diviseur de Weil non-nul $\sum_i D_i$ tel que H permute transitivement les diviseurs premiers D_i.
2. Un fonction rationnelle $f \in k(X)$ est H-homogène si elle est régulière sur un ouvert affine H-invariant $U \subset X$, et homogène sur cet ouvert pour la $X^*(H)$-graduation de $\mathcal{O}(U)$.
3. On dit que X est H-factoriel si tout diviseur de Weil H-invariant est le diviseur d'une fonction rationnelle H-homogène.

Proposition 4.4.3.3. *Soit $H = \operatorname{Spec} k[K]$ un groupe diagonalisable et X une H-variété irréductible quasi-affine et normale. Considérons l'algèbre K-graduée $R := \mathcal{O}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout idéal K-premier de K-hauteur 1 de R est K-principal.*
2. *La variété X est H-factorielle.*
3. *L'algèbre R est K-factorielle.*

De plus si une de ces assertions est vérifiée, alors un élément homogène non-nul et non-inversible $f \in R$ est K-premier si et seulement si le diviseur $\operatorname{div}(f)$ est H-premier, et tout diviseur H-premier est de la forme $\operatorname{div}(f)$ pour un élément K-premier $f \in R$.

Démonstration. Supposons 1 et montrons 2. Soit D un diviseur de Weil H-invariant. On vérifie immédiatement que l'on peut l'écrire de manière unique $D = a_1 D_1 + ... + a_r D_r$ où les D_i sont des diviseurs H-premiers. Si $\mathfrak{a}_i := \mathcal{I}_X(\operatorname{Supp}(D_i))$ est de K-hauteur 1, alors par hypothèse $D_i = \operatorname{div}(f_i)$ avec $f_i \in R$ homogène, puis on obtient $D = \operatorname{div}(f_1^{a_1} ... f_r^{a_r})$. On voit donc qu'il suffit de montrer que $\mathfrak{a}_i$ est de K-hauteur 1. Supposons que X soit affine, on montrera ensuite que l'on peut faire cette simplification. Par l'absurde, supposons qu'il existe un idéal K-premier non-nul $\mathfrak{a}$ strictement contenu dans $\mathfrak{a}_i$. On peut donc trouver $f \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}$ que l'on peut de plus choisir homogène. Remarquons que $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ est de codimension 1 car il contient $\mathcal{V}(\mathfrak{a}_i)$ et que $\mathfrak{a}$ est non-nul. Sa décomposition en composantes irréductibles s'écrit donc $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = D'_1 \cup ... \cup D'_s \cup Z_1 \cup ... \cup Z_t$, où les D'_i sont les diviseurs premiers intervenant dans l'écriture de D_i. Notons $Z = Z_1 \cup ... \cup Z_t$, alors f s'annule sur $\operatorname{Supp}(D_i)$ mais pas sur Z car sinon une puissance de f appartiendrait à $\mathfrak{a}$, et donc f aussi car cet idéal est K-premier. Par ailleurs, $W := \overline{Z \setminus \operatorname{Supp}(D_i)}$ est un fermé propre non-vide de X (et de $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$), qui est de plus H-invariant. On peut donc trouver une fonction g homogène non-nulle s'annulant sur Z mais pas sur $\operatorname{Supp}(D_i)$. On obtient ainsi $(fg)^n \in \mathfrak{a}$ pour un $n > 0$ alors que $f \notin \mathfrak{a}$ et $g \notin \mathfrak{a}$, contradiction. Enfin, revenons au cas où X est quasi-affine. En utilisant 1.2.3.4, on plonge X dans une H-variété affine Y normale et irréductible, par une immersion ouverte H-équivariante telle qu'il existe des fonctions régulières homogènes $f \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}$, et $h \in \mathfrak{a}$ qui s'étendent en des fonctions régulières sur Y. Alors l'idéal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}(Y)$ est K-premier, non-nul, et strictement contenu dans l'idéal K-premier $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_i \cap \mathcal{O}(Y)$. On a de plus $\mathcal{V}_Y(\mathfrak{b}_i) = \overline{D_i}$ qui est un diviseur de Weil H-premier de Y. On s'est donc ramené au cas affine.

Supposons 2 et montrons 3. Soit $f \in R \setminus R^*$ non-nul. Écrivons $\operatorname{div}(f) = D_1 + ... + D_r$ où les D_i sont H-premiers. Par hypothèse, $D_i = \operatorname{div}(f_i)$ pour un élément $f_i \in R$ homogène, qui est de plus K-premier. On en déduit $f = u f_1 ... f_r$ où u est une unité homogène de R. C'est ce qu'on voulait montrer.

Enfin, supposons 3 et considérons un idéal $\mathfrak{a}$ K-premier de hauteur 1. Soit $f \in \mathfrak{a}$ non-nul et non-inversible. Par hypothèse on peut trouver un facteur K-premier f_1 de f qui de plus appartient à $\mathfrak{a}$. On obtient ainsi une chaine d'idéaux K-premiers $\{0\} \subsetneq (f_1) \subset \mathfrak{a}$, ce qui force $(f_1) = \mathfrak{a}$. $\square$

Corollaire 4.4.3.4. *Avec les notations et hypothèses de la proposition précédente. Supposons de plus que $R^* = k^*$, et R factoriel. Alors R est K-factoriel.*

Démonstration. Considérons un diviseur H-invariant D de X. Comme X est quasi-affine, on peut la voire comme une sous-variété ouverte de $\operatorname{Spec} R$ d'après 1.2.3.4. Par hypothèse, on a alors $D = \operatorname{div}(f)$ avec $f \in \operatorname{Frac}(R)$. Soit $h \in H$, comme D est H-invariant, on a $\operatorname{div}(h.f) = \operatorname{div}(f)$ ce qui entraine $h.f = \chi(h)f$ pour un certain $\chi \in X^*(H)$, car $R^* = k^*$. Ainsi f est H-homogène ce qui conclut la preuve d'après la proposition précédente car X est H-factoriel. □

Muni de ces définitions on va pouvoir généraliser les résultats de divisibilité dans l'anneau de Cox obtenus en 4.2.3.3 dans le cas sans torsion.

Lemme 4.4.3.5. *Avec les données de 4.4.1.2, on a pour tout élément non-nul $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$*

$$\operatorname{div}(f) = p_X^*(\operatorname{div}_{[D]}(f))$$

Démonstration. Avec les notations de 4.4.1.2, soit $D \in c^{-1}([D])$ et $\tilde{f} \in \mathcal{S}_D(X)$ se projetant sur f. Le diagramme commutatif de 4.4.1.2 donne

$$\operatorname{div}(f) = i^*(\operatorname{div}(\tilde{f})) = i^*(p^*(\operatorname{div}_D(\tilde{f}))) = p_X^*(\operatorname{div}_{[D]}(f))$$

□

Proposition 4.4.3.6. *Soit X une variété normale irréductible telle que $\mathcal{O}(X)^* = k^*$ et $\operatorname{Cl}(X)$ est de type fini.*

1. *Soient $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ et $g \in \mathcal{R}_{[E]}(X)$ non-nuls. Alors $f \mid g \iff \operatorname{div}_{[D]}(f) \leqslant \operatorname{div}_{[E]}(g)$.*
2. *Soient $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ et $g \in \mathcal{R}_{[E]}(X)$ non-nuls. Alors ces éléments sont associés si et seulement si $\operatorname{div}_{[D]}(f) = \operatorname{div}_{[E]}(g)$. Dans ce cas, on a $[D] = [E]$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{R}_D(X)$ non-nuls. Alors f est $\operatorname{Cl}(X)$-premier si et seulement si $\operatorname{div}_D(f)$ est $\operatorname{Cl}(X)$-premier.*

Démonstration. En utilisant 4.4.1.1 on peut supposer X lisse et donc se placer dans la situation de la construction 4.4.1.2. Alors la variété quasi-affine $\widehat{X}$ est lisse et son algèbre de fonction régulières est $\mathcal{R}(X)$. Ainsi on a $f \mid g$ dans $\mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\operatorname{div}(f) \leqslant \operatorname{div}(g)$ dans $\operatorname{WDiv}(\widehat{X})$. D'après le lemme précédent, c'est équivalent à $\operatorname{div}_{[D]}(f) \leqslant \operatorname{div}_{[E]}(g)$. Avec cela on obtient directement 2.

Pour le point 3, supposons $\operatorname{div}_{[D]}(f)$ premier. Comme ce diviseur est non-trivial, $\operatorname{div}(f)$ l'est aussi d'après le lemme précédent. Ainsi f est non-nul et non-inversible. Si f divise un produit $f_1 f_2$ d'éléments homogènes non-nuls de $\mathcal{R}(X)$ alors d'après 1, il divise l'un des deux car $\operatorname{div}_{[D]}(f)$ étant premier, il est nécessairement inférieur ou égal à l'un des deux diviseurs effectifs $\operatorname{div}_{[D]}(f_i)$. Ainsi f est $\operatorname{Cl}(X)$-premier. Réciproquement, supposons par l'absurde que f est $\operatorname{Cl}(X)$-premier et $\operatorname{div}_{[D]}(f)$ non-premier. Alors $\operatorname{div}_{[D]}(f) = D_1 + D_2$ avec chaque D_i non-nul et effectif. D'après 4.4.2.2 1, on obtient des $f_i \mathcal{R}_{[D_i]}(X)$ tels que $\operatorname{div}_{[D_i]}(f_i) = D_i$. D'après 1, f divise $f_1 f_2$ mais ne divise aucun des facteurs, contradiction. □

En particulier, la seconde assertion nous indique que l'élément $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ avec $E = \operatorname{div}_{[D]}(f)$ obtenu en 4.4.2.2 1) pour un diviseur effectif E donné est unique à association près. On l'appel la section canonique de E. On termine par une généralisation du théorème 4.2.3.1.

Théorème 4.4.3.7. *Avec les données de 4.3.1.1, L'anneau de Cox $\mathcal{R}(X)$ est $\operatorname{Cl}(X)$-factoriel.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}_{[D]}(X)$ non-nul et non-inversible. On écrit $\operatorname{div}_{[D]}(f) = D_1 + ... + D_r$ où les diviseurs D_i sont premiers et effectifs. D'après 4.4.2.2 on obtient des éléments $f_i \in \mathcal{R}_{[D_i]}(X)$ tels que $\operatorname{div}_{[D_i]}(f_i) = D_i$. Or d'après la proposition précédente, chaque f_i est $\operatorname{Cl}(X)$-premier et on a $f = uf_1 ... f_r$ où $u \in \mathcal{R}(X)^*$. □

Remarque 4.4.3.8. Avec les données de 4.3.1.1, l'application $f \mapsto \operatorname{div}_{[D]}(f)$ induit un isomorphisme entre le monoïde des éléments homogènes de $\mathcal{R}(X)$ modulo les inversibles et le monoïde $\operatorname{WDiv}^+(X)$ des diviseurs de Weil effectifs. Le fait que $\mathcal{R}(X)$ soit factoriel reflète le fait tout diviseur de Weil effectif s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de diviseur premiers.

Exemple 4.4.3.9. Dans l'exemple 4.3.3.2, l'anneau de Cox est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-factoriel mais pas factoriel.

Bibliographie

[1] D.Eisenbud. *Commutative algebra, with a view towards algebraic geometry.* Springer, 2004.

[2] D.Mumford. *Abelian Varieties.* Oxford University Press, 1974.

[3] D.Mumford. *The red book of varieties and schemes.* Springer, 1999.

[4] I.Arzhantsev et al. *Cox Rings.* Cambridge University Press, 2014.

[5] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, 1977.

[6] H.Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge University Press, 1986.

[7] I.Arzhantsev. Introduction to algebraic groups and invariant theory. http://halgebra.math.msu.su/staff/arzhan/driver.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[8] I.MacDonald M.Atiyah. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[9] M.Brion. Introduction to actions of algebraic groups. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_luminy.pdf. Accessed : 2018-23-01.

[10] M.Brion. Linearization of algebraic group actions. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/lin_rev.pdf. Accessed : 2018-18-03.

[11] Q.Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford GTM, 2006.

[12] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.* http://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[13] T.A.Springer. *Linear Algebraic Groups.* Birkhauser, 1998.

[14] T.Wedhorn U.Görtz. *Algebraic Geometry I.* Vieweg +Teubner, 2010.

[15] A.Rittatore W.Ferrer Santos. *Actions and invariants of algebraic groups.* Chapman and Hall, 2005.