Exercises Qing Liu

Séverin Philip

12 juillet 2018

1 General properties of Schemes

1.1 Reduced schemes and integral schemes

Exercise . *(4.2)*

Démonstration. Le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est donné par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ pour un ouvert affine U de X contenant x. On note $\mathcal{O}_X(U) = A$ et l' morphisme est celui de localisation en $\mathfrak{p}$ idéal premier associé à x. Si y est un point de U qui se spécialise en x, $x \in \overline{\{y\}}$, par définition si $\mathfrak{q}$ est l'idéal premier associé à y, on a $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier du localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Par suite y est dans l'image de $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec} A$. Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$ et donc par localisation d'un idéal premier de A inclus dans $\mathfrak{p}$ ce qui correspond à un point qui se spécialise en x. Comme le morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est indépendant du choix de U (Pourquoi ?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert V, tu peux trouver un affine W dans $U \cap V$. Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(V)$, $\mathcal{O}_X(W)$, les flèches de restrictions et les flèches vers $\mathcal{O}_{X,x}$. Ensuite tu appliques Spec et tu vois que tous les morphismes coïncident.

□

Exercise . *(4.3)*

Démonstration. On a une inclusion $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$ qui induit un morphisme $j\colon \operatorname{Spec} K[T] \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T]$. On montre que c'est une immersion ouverte. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} K[T]$, $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$. L'image de j est $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$ qui est ouverte. En effet, si $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ alors $t \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} = K[T]$ ce qui est impossible. Inversement, si $t \notin \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_K[T]$ alors par localisation en $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$ ($\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$?) on a $\mathfrak{p}K[T]$ idéal premier qui vérifie $\mathfrak{p}K[T]\cap\mathcal{O}_K[T]=\mathfrak{p}$. Il reste à voir que $j_x^\sharp$ est un isomorphisme en tout point $x\in\operatorname{Spec}K[T]$ ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec $S=\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$. Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal (T) est le seul point de $\operatorname{Spec}K[T]$ qui se spécialise en (T,t). (Je crois ?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles P de $K[T]$ tels que $(P)\cap\mathcal{O}_K[T]\subset(T,t)$. En localisant tu as nécessairement $T|P$ et donc $P=T$. Enfin je crois que c'est bon. □

Exercise . *(4.8)*

Démonstration. Soit x un point de X et (U_i) les ouverts affines qui recouvrent X (en nombre fini). On suppose que $x\in U_1$ quitte à renuméroté les ouverts. Le point x correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_X(U_1)$ qui lui même correspond à un point fermé de U_1. On a donc l'existence de $x_1\in U_1$ fermé dans U_1 et $x_1\in\overline{\{x\}}$ la fermeture étant prise dans X. Si x_1 est fermé dans tous les autres U_i qui le contiennent il est fermé dans X. Sinon il existe un $i\in\{2,\dots,n\}$ tel que $x_1\in U_i$ et x_1 n'est pas fermé dans U_i. On peut à nouveau supposer que $i=2$ et par le même argument qu'avant obtenir $x_2\in U_2$ fermé dans U_2 et $x_2\notin U_1$. En répétant le procédé au plus n fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines U_j qui le contiennent. □

Exercise . *(4.11)*

Démonstration. $(i)\Rightarrow(ii)$ On montre que $f^\sharp(U)$ est injectif pour tout ouvert affine U de Y. Soit $g\in\mathcal{O}_Y(U)$ tel que $f^\sharp(U)(g)=0$. Pour tout $y=f(x)\in U\cap f(X)$ on a

$$f_x^\sharp\colon\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et $f_x^\sharp(g)=0\in\mathfrak{m}_x$. D'où $g\in\mathfrak{m}_{f(x)}$. Or l'ensemble $\{y\in U,\ g\in\mathfrak{m}_y\}$ est un fermé de U, celui-ci contient $f(X)$ c'est donc U tout entier. Il suit que $g\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}_X(U)}\mathfrak{p}$ est nilpotent. Comme Y est réduit $g=0$. Le résultat est vrai sans l'hypothèse U affine en prenant un recouvrement par des ouverts affine.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Par la proposition 4.18 le morphisme $\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_{X,x}$ est injectif pour tout $x\in U$ donc en particulier si $V\subset U$ est un ouvert,

$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ est injectif. En effet le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ par (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit V un ouvert de Y contenant $f(\xi_X)$. Le diagramme suivant commute et par (iii) les flèches sont injectives.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,f(\xi_X)} \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,\xi_X} \end{tikzcd}$$

Comme ξ_X est le point générique de X qui est un schéma entier (integral ?) son idéal maximal associé est (0). Par injectivité et le fait que $f^\sharp_{\xi_X}$ est local l'idéal maximal de $f(\xi_X)$ est donc lui même (0). Il suit que $f(\xi_X) = \xi_Y$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Trivial.

$(v) \Rightarrow (i)$ Comme Y est un schéma entier $\overline{\{\xi_Y\}} = Y$.

$\square$

2 Morphisms and base change

2.1 The technique of base change

Proposition 2.1. *1.4 Démonstration du point d.*

Démonstration. On considère U, V des sous-schémas ouvert de X et Y. Il faut vérifier que $i \times j$ induit un isomorphisme de $U \times_S V$ dans $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Soit Z un schéma et f, g des morphismes $Z \to U$, $Z \to V$. En composant avec les injections de U, V dans X et Y on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr] \arrow[drr, "j \circ g"] \arrow[ddr, "i \circ f"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Il suit que la flèche du milieu se factorise par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Comme le morphisme $i \times j$ est l'unique morphisme de $U \times_S V$ dans $X \times_S Y$ faisant commuter les diagrammes et se factorisant par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ c'est un isomorphisme $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. $\square$

Exercise . *(1.7)*

Démonstration. On suppose X, Y et S affines, c'est-à-dire $X = \operatorname{Spec} M$, $Y = \operatorname{Spec} N$ et $S = \operatorname{Spec} R$. Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note $f \colon R \to M$, $g \colon R \to N$. Soit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in X \times Y$ tels que $\mathfrak{p} \in X_s$, $\mathfrak{q} \in Y_s$ pour un point $s \in S$. On a donc $f^{-1}(\mathfrak{p}) = s$ d'où les morphismes

$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \to \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour $\mathfrak{q}$ et N. On a donc des morphismes $M \to k(\mathfrak{p})$ et $N \to k(\mathfrak{q})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}) & & \\
& M \otimes_R N \arrow[ul, dotted] & N \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& M \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & R \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

$$\operatorname{Spec}\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \to X \times_S Y.$$

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y,\ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si I est un idéal premier de $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ alors $\varphi^{-1}(I)$ est l'idéal $\mathfrak{p}$ de M où φ est l'application $M \to k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Comme $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$

on a une inclusion. Maintenant, si $m \in M \setminus \mathfrak{p}$ est tel que $\varphi(m) \in I$ alors comme $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$ qui est inversible dans $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ ce qui est impossible car alors $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Donc $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et ce raisonnement appliqué à N et $\mathfrak{q}$ assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal I de $M \otimes_R N$ tel que $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$ où i, j sont les applications $M \to M \otimes_R N$, $N \to M \otimes_R N$ est tel que $M \otimes_R N \to k(I)$ se factorise par $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. En effet, $\mathfrak{p} \otimes 1$ est donc dans I et est envoyé sur 0 dans $k(I)$ donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \to M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \to k(I).$$

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Il suit donc une factorisation de $k(I) \to X \times_S Y$ en

$$k(I) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \longrightarrow X \times_S Y.$$

□

Exercise . *(1.8)*

Démonstration. C'est une conséquence de l'exercice précédent. Soit $y \in Y$, il existe un $s \in S$ tel que $y \in Y_s$. Par surjectivité de $X \to S$ la fibre X_s au dessus de s est non vide donc contient un point $x \in X$. Par l'exercice 1.7 l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y,\ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}$$

est homéomorphe à $\operatorname{Spec}\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big)$ qui est non vide donc contient au moins un point. Le morphisme $q\colon X \times_S Y$ est donc surjectif. □

Exercise . *(1.10)*

Démonstration. Par la propriété universelle du produit fibré en tant qu'ensembles les applications $p\colon X \times_S Y \to X$ et $q\colon X \times_S Y \to Y$ donnent l'existence d'une unique application continue $f\colon |X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$. Cette application est surjective par l'exercice 1.7.

On considère le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}(X)/(X+i)(X-i)$$

et ce dernier anneau est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (Spécifier l'isomorphisme). Comme il n'y a qu'un point dans $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ le produit fibré des deux ensembles $|\operatorname{Spec}\mathbb{C}|$ sur $|\operatorname{Spec}\mathbb{R}|$ ne contient qu'un seul point. Par contre $\operatorname{Spec}\big(\mathbb{C} \times \mathbb{C}\big)$ contient deux idéaux premiers $(1,0)$ et $(0,1)$. L'application f est donc surjective mais pas injective ces deux points du produit fibré de schémas ayant même image dans le produit fibré d'ensembles. □

2.2 Applications to algebraic varieties

Exercise . *(2.4)*

Démonstration. On va considérer le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ pour un corps k. Comme Y est de type finie sur k, pour U un ouvert affine de Y, $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k-algèbre de type finie.

Pour un ouvert affine V de X contenant x on a un morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to V$ provenant d'un morphisme $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X,x}$. On a $f_x^\sharp(U) \colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$. Or $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$ correspond à une localisation de $\mathcal{O}_{X,x}$ et comme $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k-algèbre de type finie, l'image de f_x qui est un k-morphisme est déterminé par l'image des générateurs de $\mathcal{O}_Y(U)$ sur k. Soient $y_1, \ldots, y_n$ ces générateurs et $\frac{f_i}{g_i}$ leurs images. Soit g le produit des g_i, $D(g)$ est un ouvert affine principal W contenant x de V et l'on a $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X(W)$. On peut donc définir le morphisme f_U de U dans V tel que $f_U \circ i_x = f_x$. On peut définir des morphismes f_U de cette façon pour tout ouvert affine U de Y qui se recolle par construction et obtenir le morphisme f souhaité. □

2.3 Some global properties of morphisms

Exercise . *(3.1)*

Démonstration. Par hypothèse les morphismes $f_i \colon f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ sont des immersions fermés et se recollent. Comme $f(X)$ est fermé il suit que f est une immersion fermée topologique. Il reste à voir que les applications locales sur les faisceaux sont surjectives. Or c'est un problème local et on peut donc se restreindre à Y_i où le résultat vient à nouveau de l'hypothèse sur les f_i. □

Exercise . *(3.2)*

Démonstration.

- *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* Tout morphisme de X dans un schéma Y est séparé, c'est en particulier le cas du morphisme vers $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ qui est un schéma affine.
- *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* La composition de morphismes séparés est séparé et tout morphisme entre schéma affines est séparé. Par hypothèse il existe $f \colon X \to \operatorname{Spec} A$ séparé et on a $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ séparé, donc $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est séparé.
- *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)* Je n'ai pas réussi mais je pense qu'il faut voir qu'il y a un lien entre le produit fibré sur $\mathbb{Z}$ et sur un schéma Y et obtenir la diagonale de l'un comme image réciproque de la diagonale de l'autre.

□

Exercise . *(3.10)*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "{(Id_X,f)}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "Id_X"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Le triangle de gauche est commutatif donc $p \circ (Id_X, f) = Id_X$.

On a un autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "f \circ p"'] & & \\
& Y \times_S Y \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, "p_Y"] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

On vérifie que Γ_f l'image de (Id_X, f) est $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$. Si $x \in X$, l'élément $(Id_X, f)(x)$ est déterminé uniquement (Est-ce vrai ? ? ?) par ces deux égalités

$$p((Id_X, f)(x)) = x;$$

$$q((Id_X, f)(x)) = f(x).$$

Oui, soit $z \in X \times_S Y$, on a l'équivalence

$$z \in \Gamma_f \iff \exists x \in X \text{ tel que } p(z) = x \text{ et } q(z) = f(x)$$

L'implication directe, c'est juste le premier diagramme que t'as écrit. Pour la réciproque

Or si $x \in \varphi^{-1}(\Delta_Y)$, on a $p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x))$ car $\varphi(x) \in \Delta_Y$. D'où

$$f \circ p(x) = p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x)) = q(x).$$

Donc $x = (Id_X, f)(p(x))$ par la caractérisation précédente. La réciproque est claire en remontant les égalités. $\square$

3 Some local properties

3.1 Normal schemes

Exercise . *(1.4)*

Démonstration. Si X est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit $x \in X$ un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé y dans $\overline{\{x\}}$. Soit V un ouvert affine contenant y, alors si $x \notin V$ on aurait $x \in X \setminus V$ qui est fermé donc en particulier $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$ et donc $y \in X \setminus V$ ce qui est une contradiction. Il suit que $x \in V$ et que l'on obtient $\mathcal{O}_{X,x}$ par localisation de $\mathcal{O}_{X,y}$. Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si $\mathcal{O}_{X,y}$ l'est ce qui prouve l'implication. $\square$

Exercise . *(1.9)*

Démonstration. On considère A un anneau de Dedekind et $X = \operatorname{Spec} A$. Soit $x_0 \in \operatorname{Spec} A$ un point fermé et $U = X \setminus \{x_0\}$ un ouvert. On note $\mathfrak{m}_0$ l'idéal associé à x_0 et t un générateur de $\mathfrak{m}_o$ dans $A_{\mathfrak{m}_0}$. L'idéal (t) se décompose en produit d'idéaux premiers car A est un anneau de Dedekind donc

$$(t) = \mathfrak{m}_0 \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{a_i}$$

et $V(t) = \{x_0, \dots x_n\}$ les points x_i étant ceux des idéaux $\mathfrak{m}_i$. On note t_i un générateur de $\mathfrak{m}_i$ dans $A_{\mathfrak{m}_i}$. On peut choisir t_i tel que $t_i \notin \mathfrak{m}_0$. En effet, si $\mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2 \subset \mathfrak{m}_0$ on aurait $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_0$ et donc égalité par maximalité. On a $t = u t_i^{a_i}$ dans $A_{\mathfrak{m}_i}$ où u est inversible donc $t \cdot t_i^{-a_i} = u$ et par suite $f = t^{-1} t_i^{a_i} \prod_{i \neq j} t_j^{a_j} = u' \in A_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$. Il existe donc des ouverts U_i contenant x_i tels que $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et U_i ne contient pas x_0. Il est de plus clair que $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus V(t))$. Il suit que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ car les U_i et $X \setminus V(t)$ forment un recouvrement ouvert de U. $\square$