# Exercises Qing Liu

Séverin Philip

12 juillet 2018

# 1 General properties of Schemes

## 1.1 Reduced schemes and integral schemes

Exercise . (4.2)

Démonstration. Le morphisme canonique  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$  est donné par le morphisme  $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$  pour un ouvert affine U de X contenant x. On note  $\mathcal{O}_X(U) = A$  et l'imprisme est celui de localisation en  $\mathfrak{p}$  idéal premier associé à x. Si y est un point de U qui se spécialise en x,  $x \in \{y\}$ , par définition si  $\mathfrak{q}$  est l'idéal premier associé à y, on a  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$  d'où  $\mathfrak{q}$  est un idéal premier du localisé  $A_{\mathfrak{p}}$ . Par suite y est dans l'image de  $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec} A$ . Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de  $A_{\mathfrak{p}}$  et donc par localisation d'un idéal premier de A inclus dans  $\mathfrak{p}$  ce qui correspond à un point qui se spécialise en x. Comme le morphisme  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$  est indépendant du choix de U (Pourquoi?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert V, tu peux trouver un affine W dans  $U \cap V$ . Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les  $\mathcal{O}_X(X)$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$ ,  $\mathcal{O}_X(V)$ ,  $\mathcal{O}_X(W)$ , les flèches de restrictions et les flèches vers  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Ensuite tu appliques Spec et tu vois que tous les morphismes coïncident.

#### Exercise . (4.3)

 $D\acute{e}monstration$ . On a une inclusion  $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$  qui induit un morphisme  $j \colon \operatorname{Spec} K[T] \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T]$ . On montre que c'est une immersion ouverte. Si  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} K[T]$ ,  $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ . L'image de j est  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$  qui est ouverte. En effet, si  $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$  alors  $t \in \mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p} = K[T]$  ce qui est impossible. Inversement, si  $t \notin \mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p}$  idéal premier de  $\mathcal{O}_K[T]$  alors par localisation en  $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$  ( $\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ ?) on a  $\mathfrak{p}K[T]$  idéal premier qui

vérifie  $\mathfrak{p}K[T] \cap \mathcal{O}_K[T] = \mathfrak{p}$ . Il reste à voir que  $j_x^{\sharp}$  est un isomorphisme en tout point  $x \in \operatorname{Spec} K[T]$  ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec  $S = \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ . Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal (T) est le seul point de Spec K[T] qui se spécialise en (T,t). (Je crois?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles P de K[T] tels que  $(P) \cap \mathcal{O}_K[T] \subset (T,t)$ . En localisant tu as nécessairement T|P et donc P = T. Enfin je crois que c'est bon.

### Exercise . (4.8)

Démonstration. Soit x un point de X et  $(U_i)$  les ouverts affines qui recouvrent X (en nombre fini). On suppose que  $x \in U_1$  quitte à renuméroté les ouverts. Le point x correspond à un idéal premier  $\mathfrak{p}$  contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}_X(U_1)$  qui lui même correspond à un point fermé de  $U_1$ . On a donc l'existence de  $x_1 \in U_1$  fermé dans  $U_1$  et  $x_1 \in \{x\}$  la fermeture étant prise dans X. Si  $x_1$  est fermé dans tous les autres  $U_i$  qui le contiennent il est fermé dans X. Sinon il existe un  $i \in \{2, \ldots, n\}$  tel que  $x_1 \in U_i$  et  $x_1$  n'est pas fermé dans  $U_i$ . On peut à nouveau supposer que i = 2 et par le même argument qu'avant obtenir  $x_2 \in U_2$  fermé dans  $U_2$  et  $x_2 \notin U_1$ . En répétant le procédé au plus n fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines  $U_i$  qui le contiennent.

#### **Exercise** . (4.11)

Démonstration. (i)  $\Rightarrow$  (ii) On montre que  $f^{\sharp}(U)$  est injectif pour tout ouvert affine U de Y. Soit  $g \in \mathcal{O}_Y(U)$  tel que  $f^{\sharp}(U)(g) = 0$ . Pour tout  $y = f(x) \in U \cap f(X)$  on a

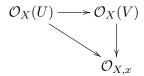
$$f_x^{\sharp} \colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et  $f_x^{\sharp}(g) = 0 \in \mathfrak{m}_x$ . D'où  $g \in \mathfrak{m}_{f(x)}$ . Or l'ensemble  $\{y \in U, g \in \mathfrak{m}_y\}$  est un fermé de U, celui-ci contient f(X) c'est donc U tout entier. Il suit que  $g \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{p}$  est nilpotent.

Comme Y est réduit g = 0. Le résultat est vrai sans l'hypothèse U affine en prenant un recouvrement par des ouverts affine.

 $(ii) \Rightarrow (iii)$  Par la proposition 4.18 le morphisme  $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$  est injectif pour tout  $x \in U$  donc en particulier si  $V \subset U$  est un ouvert,

 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$  est injectif. En effet le diagramme suivant commute



Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de  $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  par (ii).

 $(iii) \Rightarrow (iv)$  Soit V un ouvert de Y contenant  $f(\xi_X)$ . Le diagramme suivant commute et par (iii) les flèches sont injectives.

$$\mathcal{O}_{Y}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{X}(f^{-1}(V))$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\mathcal{O}_{Y,f(\xi_{X})} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi_{X}}$$

Comme  $\xi_X$  est le point générique de X qui est un schéma entier (integral?) son idéal maximal associé est (0). Par injectivité et le fait que  $f_{\xi_X}^{\sharp}$  est local l'idéal maximal de  $f(\xi_X)$  est donc lui même (0). Il suit que  $f(\xi_X) = \xi_Y$ .

 $(iv) \Rightarrow (v)$  Trivial.

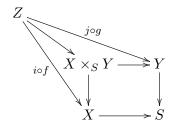
 $(v)\Rightarrow (i)$  Comme Y est un schéma entier  $\overline{\{\xi_Y\}}=Y.$ 

# 2 Morphisms and base change

# 2.1 The technique of base change

Proposition 2.1. 1.4 Démonstration du point d.

Démonstration. On considère U, V des sous-schémas ouvert de X et Y. Il faut vérifier que  $i \times j$  induit un isomorphisme de  $U \times_S V$  dans  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ . Soit Z un schéma et f, g des morphismes  $Z \to U, Z \to V$ . En composant avec les injections de U, V dans X et Y on obtient un diagramme commutatif



Il suit que la flèche du milieu se factorise par  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ . Comme le morphisme  $i \times j$  est l'unique morphisme de  $U \times_S V$  dans  $X \times_S Y$  faisant commuter les diagrammes et se factorisant par  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$  c'est un isomorphisme  $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ .

## Exercise . (1.7)

Démonstration. On suppose X,Y et S affines, c'est-à-dire  $X=\operatorname{Spec} M,$   $Y=\operatorname{Spec} N$  et  $S=\operatorname{Spec} R.$  Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note  $f\colon R\to M,\ g\colon R\to N.$  Soit  $(\mathfrak{p},\mathfrak{q})\in X\times Y$  tels que  $\mathfrak{p}\in X_s,\ \mathfrak{q}\in Y_s$  pour un point  $s\in S.$  On a donc  $f^{-1}(\mathfrak{p})=s$  d'où les morphismes

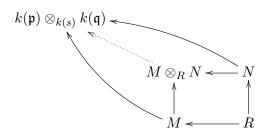
$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \to \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour  $\mathfrak{q}$  et N. On a donc des morphismes  $M \to k(\mathfrak{p})$  et  $N \to k(\mathfrak{q})$  tel que le diagramme suivant commute



et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

Spec 
$$(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \to X \times_S Y$$
.

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, \ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si I est un idéal premier de  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$  alors  $\varphi^{-1}(I)$  est l'idéal  $\mathfrak{p}$  de M où  $\varphi$  est l'application  $M \to k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Comme  $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$ 

on a une inclusion. Maintenant, si  $m \in M \setminus \mathfrak{p}$  est tel que  $\varphi(m) \in I$  alors comme  $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$  qui est inversible dans  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$  ce qui est impossible car alors  $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Donc  $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$  et ce raisonnement appliqué à N et  $\mathfrak{q}$  assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal I de  $M \otimes_R N$  tel que  $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$  et  $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$  où i, j sont les applications  $M \to M \otimes_R N$ ,  $N \to M \otimes_R N$  est tel que  $M \otimes_R N \to k(I)$  se factorise par  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . En effet,  $\mathfrak{p} \otimes 1$  est donc dans I et est envoyé sur 0 dans k(I) donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \to M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \to k(I)$$
.

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Il suit donc une factorisation de  $k(I) \to X \times_S Y$  en

$$k(I) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \longrightarrow X \times_S Y.$$

Exercise . (1.8)

Démonstration. C'est une conséquence de l'exercice précédent. Soit  $y \in Y$ , il existe un  $s \in S$  tel que  $y \in Y_s$ . Par surjectivité de  $X \to S$  la fibre  $X_s$  au dessus de s est non vide donc contient un point  $x \in X$ . Par l'exercice 1.7 l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, \ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}$$

est homéomorphe à Spec  $(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}))$  qui est non vide donc contient au moins un point. Le morphisme  $q: X \times_S Y$  est donc surjectif.

#### Exercise . (1.10)

Démonstration. Par la propriété universelle du produit fibré en tant qu'ensembles les applications  $p\colon X\times_S Y\to X$  et  $q\colon X\times_S Y\to Y$  donnent l'existence d'une unique application continue  $f\colon |X\times_S Y|\to |X|\times_{|S|}|Y|$ . Cette application est surjective par l'exercice 1.7.

On considère le produit tensoriel  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}(X)/(X + i)(X - i)$$

et ce dernier anneau est isomorphe à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  (Spécifier l'isomorphisme). Comme il n'y a qu'un point dans Spec  $\mathbb{C}$  le produit fibré des deux ensembles  $|\operatorname{Spec} \mathbb{C}|$  sur  $|\operatorname{Spec} \mathbb{R}|$  ne contient qu'un seul point. Par contre Spec  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$  contient deux idéaux premiers (1,0) et (0,1). L'application f est donc surjective mais pas injective ces deux points du produit fibré de schémas ayant même image dans le produit fibré d'ensembles.

## 2.2 Applications to algebraic varieties

## Exercise . (2.4)

Démonstration. On va considérer le cas où  $S = \operatorname{Spec} k$  pour un corps k. Comme Y est de type finie sur k, pour U un ouvert affine de Y,  $\mathcal{O}_Y(U)$  est une k-algèbre de type finie.

Pour un ouvert affine V de X contenant x on a un morphisme canonique  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to V$  provenant d'un morphisme  $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X,x}$ . On a  $f_x^\sharp(U) \colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$ . Or  $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$  correspond à une localisation de  $\mathcal{O}_{X,x}$  et comme  $\mathcal{O}_Y(U)$  est une k-algèbre de type finie, l'image de  $f_x$  qui est un k-morphisme est déterminé par l'image des générateurs de  $\mathcal{O}_Y(U)$  sur k. Soient  $y_1, \ldots, y_n$  ces générateurs et  $\frac{f_i}{g_i}$  leurs images. Soit g le produit des  $g_i$ , D(g) est un ouvert affine principal W contenant x de V et l'on a  $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X(W)$ . On peut donc définir le morphisme  $f_U$  de  $f_U$  dans  $f_U$  tel que  $f_U \circ i_x = f_x$ . On peut définir des morphismes  $f_U$  de cette façon pour tout ouvert affine  $f_U$  de  $f_U$  qui se recolle par construction et obtenir le morphisme  $f_U$  souhaité.

## 2.3 Some global properties of morphisms

#### Exercise . (3.1)

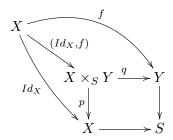
Démonstration. Par hypothèse les morphismes  $f_i \colon f^{-1}(Y_i) \to Y_i$  sont des immersions fermés et se recollent. Comme f(X) est fermé il suit que f est une immersion fermée topologique. Il reste à voir que les applications locales sur les faisceaux sont surjectives. Or c'est un problème local et on peut donc se restreindre à  $Y_i$  où le résultat vient à nouveau de l'hypothèse sur les  $f_i$ .  $\square$ 

#### Exercise . (3.2)

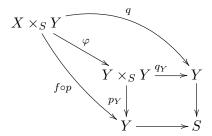
- Démonstration.  $(iii) \Rightarrow (ii)$  Tout morphisme de X dans un schéma Y est séparé, c'est en particulier le cas du morphisme vers Spec  $\mathbb{Z}$  qui est un schéma affine.
  - $(ii) \Rightarrow (i)$  La composition de morphismes séparés est séparé et tout morphisme entre schéma affines est séparé. Par hypothèse il existe  $f: X \to \operatorname{Spec} A$  séparé et on a  $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  séparé, donc  $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  est séparé.
  - $(i) \Rightarrow (iii)$  Je n'ai pas réussi mais je pense qu'il faut voir qu'il y a un lien entre le produit fibré sur  $\mathbb{Z}$  et sur un schéma Y et obtenir la diagonale de l'un comme image réciproque de la diagonale de l'autre.

## **Exercise** . (3.10)

Démonstration. On a un diagramme commutatif



Le triangle de gauche est commutatif donc  $p \circ (Id_X, f) = Id_X$ . On a un autre diagramme commutatif



On vérifie que  $\Gamma_f$  l'image de  $(Id_X, f)$  est  $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$ . Si  $x \in X$ , l'élément  $(Id_X, f)(x)$  est déterminé uniquement (Est-ce vrai???) par ces deux égalités

$$p((Id_X, f)(x)) = x;$$

$$q((Id_X, f)(x)) = f(x).$$

Oui, soit  $z \in X \times_S Y$ , on a l'équivalence

$$z \in \Gamma_f \iff \exists x \in X \text{ tel que } p(z) = x \text{ et } q(z) = f(x)$$

L'implication directe, c'est juste le premier diagramme que t'as écrit. Pour la réciproque

Or si 
$$x \in \varphi^{-1}(\Delta_Y)$$
, on a  $p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x))$  car  $\varphi(x) \in \Delta_Y$ . D'où

$$f \circ p(x) = p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x)) = q(x).$$

Donc  $x=(Id_X,f)(p(x))$  par la caractérisation précédente. La réciproque est claire en remontant les égalités.

# 3 Some local properties

#### 3.1 Normal schemes

Exercise . (1.4)

 $D\acute{e}monstration$ . Si X est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit  $x \in X$  un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé y dans  $\overline{\{x\}}$ . Soit V un ouvert affine contenant y, alors si  $x \notin V$  on aurait  $x \in X \setminus V$  qui est fermé donc en particulier  $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$  et donc  $y \in X \setminus V$  ce qui est une contradiction. Il suit que  $x \in V$  et que l'on obtient  $\mathcal{O}_{X,x}$  par localisation de  $\mathcal{O}_{X,y}$ . Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si  $\mathcal{O}_{X,y}$  l'est ce qui prouve l'implication.

### Exercise . (1.9)

 $D\acute{e}monstration$ . On considère A un anneau de Dedekind et  $X = \operatorname{Spec} A$ . Soit  $x_0 \in \operatorname{Spec} A$  un point fermé et  $U = X \setminus \{x_0\}$  un ouvert. On note  $\mathfrak{m}_0$  l'idéal associé à  $x_0$  et t un générateur de  $\mathfrak{m}_0$  dans  $A_{\mathfrak{m}_0}$ . L'idéal (t) se décompose en produit d'idéaux premiers car A est un anneau de Dedekind donc

$$(t) = \mathfrak{m}_0 \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^{a_i}$$

et  $V(t) = \{x_0, \dots x_n\}$  les points  $x_i$  étant ceux des idéaux  $\mathfrak{m}_i$ . On note  $t_i$  un générateur de  $\mathfrak{m}_i$  dans  $A_{\mathfrak{m}_i}$ . On peut choisir  $t_i$  tel que  $t_i \notin \mathfrak{m}_0$ . En effet, si  $\mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2 \subset \mathfrak{m}_0$  on aurait  $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_0$  et donc égalité par maximalité. On a  $t = ut_i^{a_i}$  dans  $A_{\mathfrak{m}_i}$  où u est inversible donc  $t \cdot t_i^{-a_i} = u$  et par suite  $f = t^{-1}t_i^{a_i} \prod_{i \neq j} t_j^{a_j} = u' \in A_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$ . Il existe donc des ouverts  $U_i$  contenant  $x_i$  tels que  $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$  et  $U_i$  ne contient pas  $x_0$ . Il est de plus clair que  $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus V(t))$ . Il suit que  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  car les  $U_i$  et  $X \setminus V(t)$  forment un recouvrement ouvert de U.