Exercises Qing Liu

Séverin Philip

15 août 2018

1 Some topics in commutative algebra

1.1 Tensor products

Exercise . *(1.3)*

Démonstration. On a des applications canoniques

$$M \otimes N \to M \otimes N/N' \to M/M' \otimes N/N'.$$

On note ϕ la composée qui est surjective. Par le corollaire 1.13 on sait que le noyau de la première flèche est $id \otimes j = j_M$ où j est l'inclusion de N' dans N et le noyau de la deuxième $i \otimes id = i_{N/N'}$ avec i l'inclusion de M' dans M. On a donc $\operatorname{Im} i_N + \operatorname{Im} j_M \subset \operatorname{Ker} \phi$. Maintenant si $z \in \operatorname{Ker} \phi$, la deuxième flèche est nulle donc l'image de z par la première est dans $\operatorname{Im} i_{N/N'}$, c'est-à-dire une somme finie d'éléments de la forme $x \otimes \bar{y}$ avec $x \in M'$. Il peut s'ajouter à cela une somme finie d'éléments du noyau de la première flèche. Dans tous les cas on a $z \in \operatorname{Im} i_N + \operatorname{Im} j_M$.

La deuxième partie découle directement, on a

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})/(\operatorname{Im} i + \operatorname{Im} j).$$

De plus, $\operatorname{Im} i \simeq n\mathbb{Z}$ et $\operatorname{Im} j \simeq m\mathbb{Z}$ en tant que Z-modules donc leur somme est $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$. □

1.2 Flatness

Exercise . *(2.4)*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On suppose que $I \neq I^2$. Alors on a une application injective (l'inclusion) $I \to A$. On tensorise avec A/I et on obtient

$$I \otimes A/I \to A \otimes A/I \simeq A/I.$$

Si $x \in I \setminus I^2$, on a $x \otimes \bar{1}$ non nul dans $I \otimes A/I$ mais son image dans A/I est nulle, l'application obtenu en tensorisant n'est pas injective, A/I n'est pas plat sur A.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Par le lemme de Nakayama il existe $z \in I$ tel que $I = zI$. Par suite, $(z) = I$. On a en particulier $(z) = (z^2)$ d'où $z = \lambda z^2$ avec $\lambda \in A$. On pose $e = \lambda z$ et on a $e^2 = e$. Il reste à voir que $(z) = (e)$. Une inclusion est triviale, pour l'autre, on a $z = \lambda z^2 = ez \in (e)$. On a donc montrer que $I = eA$ avec e idempotent.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $f \colon N \to N'$ une application injective entre deux A-modules. On considère $f \otimes id \colon N \otimes A/I \to N' \otimes A/I$. Soit $x \otimes \bar{y}$ un élément du noyau de cette application. Alors $f(x) \otimes \bar{y} = 0$ donne que $f(x) = \lambda \cdot d$ avec $d \in N'$ et $\lambda \in I$. On a $\lambda = ae$ avec $a \in A$ par (iii). Alors, $f(ex) = ae^2 \cdot d = f(x)$, donc $x = ex$ et $x \otimes \bar{y} = 0$.
(Ici je ne suis pas sur que considérer un élément de la forme $x \otimes y$ suffise... Il faudrait prendre un élément général qui est une somme de ces trucs et alors je crois pas que l'argument marche ?)

□

Exercise . *(2.5)*

Démonstration. Si A est un corps tout A-module est libre donc plat sur A.

Sinon, il existe un idéal non nul propre $I \subset A$ et par l'exercice précédent, A/I est plat sur A si et seulement si $I = (e)$ pour un idempotent e de A. Comme A est supposé intègre il n'a pas d'idempotent et donc A/I n'est pas plat sur A. □

2 General properties of Schemes

2.1 Reduced schemes and integral schemes

Exercise . *(4.2)*

Démonstration. Le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est donné par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ pour un ouvert affine U de X contenant x. On note $\mathcal{O}_X(U) = A$ et l' morphisme est celui de localisation en $\mathfrak{p}$ idéal premier associé à x. Si y est un point de U qui se spécialise en x, $x \in \overline{\{y\}}$, par définition si $\mathfrak{q}$ est l'idéal premier associé à y, on a $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier du localisé $A_\mathfrak{p}$. Par suite y est dans l'image de $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \to \operatorname{Spec} A$. Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de $A_\mathfrak{p}$ et donc par localisation d'un idéal premier de A inclus dans

$\mathfrak{p}$ ce qui correspond à un point qui se spécialise en x. Comme le morphisme $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x} \to X$ est indépendant du choix de U (Pourquoi ?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert V, tu peux trouver un affine W dans $U \cap V$. Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(V)$, $\mathcal{O}_X(W)$, les flèches de restrictions et les flèches vers $\mathcal{O}_{X,x}$. Ensuite tu appliques Spec et tu vois que tous les morphismes coïncident.

□

Exercise . *(4.3)*

Démonstration. On a une inclusion $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$ qui induit un morphisme $j\colon \operatorname{Spec} K[T] \to \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K[T]$. On montre que c'est une immersion ouverte. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} K[T]$, $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$. L'image de j est $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$ qui est ouverte. En effet, si $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ alors $t \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} = K[T]$ ce qui est impossible. Inversement, si $t \notin \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_K[T]$ alors par localisation en $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$ ($\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$?) on a $\mathfrak{p}K[T]$ idéal premier qui vérifie $\mathfrak{p}K[T] \cap \mathcal{O}_K[T] = \mathfrak{p}$. Il reste à voir que $j_x^\sharp$ est un isomorphisme en tout point $x \in \operatorname{Spec} K[T]$ ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec $S = \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$. Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal (T) est le seul point de $\operatorname{Spec} K[T]$ qui se spécialise en (T, t). (Je crois ?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles P de $K[T]$ tels que $(P) \cap \mathcal{O}_K[T] \subset (T, t)$. En localisant tu as nécessairement $T | P$ et donc $P = T$. Enfin je crois que c'est bon. □

Exercise . *(4.8)*

Démonstration. Soit x un point de X et (U_i) les ouverts affines qui recouvrent X (en nombre fini). On suppose que $x \in U_1$ quitte à renuméroté les ouverts. Le point x correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_X(U_1)$ qui lui même correspond à un point fermé de U_1. On a donc l'existence de $x_1 \in U_1$ fermé dans U_1 et $x_1 \in \overline{\{x\}}$ la fermeture étant prise dans X. Si x_1 est fermé dans tous les autres U_i qui le contiennent il est fermé dans X. Sinon il existe un $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $x_1 \in U_i$ et x_1 n'est pas fermé dans U_i. On peut à nouveau supposer que $i = 2$ et par le même argument qu'avant obtenir $x_2 \in U_2$ fermé dans U_2 et $x_2 \notin U_1$. En répétant le procédé au plus n fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines U_j qui le contiennent. □

Exercise . *(4.11)*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On montre que $f^\sharp(U)$ est injectif pour tout ouvert affine U de Y. Soit $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ tel que $f^\sharp(U)(g) = 0$. Pour tout $y = f(x) \in U \cap f(X)$ on a

$$f_x^\sharp \colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et $f_x^\sharp(g) = 0 \in \mathfrak{m}_x$. D'où $g \in \mathfrak{m}_{f(x)}$. Or l'ensemble $\{y \in U,\ g \in \mathfrak{m}_y\}$ est un fermé de U, celui-ci contient $f(X)$ c'est donc U tout entier. Il suit que $g \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{p}$ est nilpotent. Comme Y est réduit $g = 0$. Le résultat est vrai sans l'hypothèse U affine en prenant un recouvrement par des ouverts affine.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Par la proposition 4.18 le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif pour tout $x \in U$ donc en particulier si $V \subset U$ est un ouvert, $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ est injectif. En effet le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ par (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit V un ouvert de Y contenant $f(\xi_X)$. Le diagramme suivant commute et par (iii) les flèches sont injectives.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,f(\xi_X)} \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,\xi_X} \end{tikzcd}$$

Comme ξ_X est le point générique de X qui est un schéma entier (integral ?) son idéal maximal associé est (0). Par injectivité et le fait que $f_{\xi_X}^\sharp$ est local l'idéal maximal de $f(\xi_X)$ est donc lui même (0). Il suit que $f(\xi_X) = \xi_Y$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Trivial.

$(v) \Rightarrow (i)$ Comme Y est un schéma entier $\overline{\{\xi_Y\}} = Y$.

□

3 Morphisms and base change

3.1 The technique of base change

Proposition 3.1. *1.4 Démonstration du point d.*

Démonstration. On considère U, V des sous-schémas ouvert de X et Y. Il faut vérifier que $i \times j$ induit un isomorphisme de $U \times_S V$ dans $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Soit Z un schéma et f, g des morphismes $Z \to U$, $Z \to V$. En composant avec les injections de U, V dans X et Y on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr] \arrow[drr, "j\circ g"] \arrow[ddr, "i\circ f"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Il suit que la flèche du milieu se factorise par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Comme le morphisme $i \times j$ est l'unique morphisme de $U \times_S V$ dans $X \times_S Y$ faisant commuter les diagrammes et se factorisant par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ c'est un isomorphisme $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. □

Exercise . *(1.7)*

Démonstration. On suppose X, Y et S affines, c'est-à-dire $X = \operatorname{Spec} M$, $Y = \operatorname{Spec} N$ et $S = \operatorname{Spec} R$. Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note $f \colon R \to M$, $g \colon R \to N$. Soit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in X \times Y$ tels que $\mathfrak{p} \in X_s$, $\mathfrak{q} \in Y_s$ pour un point $s \in S$. On a donc $f^{-1}(\mathfrak{p}) = s$ d'où les morphismes

$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \to \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour $\mathfrak{q}$ et N. On a donc des morphismes $M \to k(\mathfrak{p})$ et

$N \to k(\mathfrak{q})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}) & & \\
& M \otimes_R N \arrow[ul, dotted] & N \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& M \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & R \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

$$\mathrm{Spec}\,\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \to X \times_S Y.$$

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y,\ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si I est un idéal premier de $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ alors $\varphi^{-1}(I)$ est l'idéal $\mathfrak{p}$ de M où φ est l'application $M \to k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Comme $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$ on a une inclusion. Maintenant, si $m \in M \setminus \mathfrak{p}$ est tel que $\varphi(m) \in I$ alors comme $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$ qui est inversible dans $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ ce qui est impossible car alors $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Donc $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et ce raisonnement appliqué à N et $\mathfrak{q}$ assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal I de $M \otimes_R N$ tel que $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$ où i, j sont les applications $M \to M \otimes_R N$, $N \to M \otimes_R N$ est tel que $M \otimes_R N \to k(I)$ se factorise par $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. En effet, $\mathfrak{p} \otimes 1$ est donc dans I et est envoyé sur 0 dans $k(I)$ donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \to M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \to k(I).$$

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Il suit donc une factorisation de $k(I) \to X \times_S Y$ en

$$k(I) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \longrightarrow X \times_S Y.$$

$\square$

Exercise . *(1.8)*

Démonstration. C'est une conséquence de l'exercice précédent. Soit $y \in Y$, il existe un $s \in S$ tel que $y \in Y_s$. Par surjectivité de $X \to S$ la fibre X_s au dessus de s est non vide donc contient un point $x \in X$. Par l'exercice 1.7 l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y,\ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}$$

est homéomorphe à Spec $\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big)$ qui est non vide donc contient au moins un point. Le morphisme $q\colon X \times_S Y$ est donc surjectif. □

Exercise . *(1.10)*

Démonstration. Par la propriété universelle du produit fibré en tant qu'ensembles les applications $p\colon X \times_S Y \to X$ et $q\colon X \times_S Y \to Y$ donnent l'existence d'une unique application continue $f\colon |X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$. Cette application est surjective par l'exercice 1.7.

On considère le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}(X)/(X+i)(X-i)$$

et ce dernier anneau est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (Spécifier l'isomorphisme). Comme il n'y a qu'un point dans $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ le produit fibré des deux ensembles $|\operatorname{Spec}\mathbb{C}|$ sur $|\operatorname{Spec}\mathbb{R}|$ ne contient qu'un seul point. Par contre Spec $\big(\mathbb{C} \times \mathbb{C}\big)$ contient deux idéaux premiers $(1, 0)$ et $(0, 1)$. L'application f est donc surjective mais pas injective ces deux points du produit fibré de schémas ayant même image dans le produit fibré d'ensembles. □

3.2 Applications to algebraic varieties

Exercise . *(2.4)*

Démonstration. On va considérer le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ pour un corps k. Comme Y est de type finie sur k, pour U un ouvert affine de Y, $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k-algèbre de type finie.

Pour un ouvert affine V de X contenant x on a un morphisme canonique $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x} \to V$ provenant d'un morphisme $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X,x}$. On a $f_x^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$. Or $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$ correspond à une localisation de $\mathcal{O}_{X,x}$ et comme $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k-algèbre de type finie, l'image de f_x qui est un k-morphisme est déterminé par l'image des générateurs de $\mathcal{O}_Y(U)$ sur k. Soient $y_1, \ldots, y_n$ ces générateurs et $\frac{f_i}{g_i}$ leurs images. Soit g le produit des g_i, $D(g)$ est un ouvert affine principal W contenant x de V et l'on a $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X(W)$. On peut donc définir le morphisme f_U de U dans V tel que $f_U \circ i_x = f_x$. On peut définir des morphismes f_U de cette façon pour tout ouvert affine U de Y qui se recolle par construction et obtenir le morphisme f souhaité. □

3.3 Some global properties of morphisms

Exercise . *(3.1)*

Démonstration. Par hypothèse les morphismes $f_i\colon f^{-1}(Y_i) \to Y_i$ sont des immersions fermés et se recollent. Comme $f(X)$ est fermé il suit que f est une immersion fermée topologique. Il reste à voir que les applications locales sur les faisceaux sont surjectives. Or c'est un problème local et on peut donc se restreindre à Y_i où le résultat vient à nouveau de l'hypothèse sur les f_i. □

Exercise . *(3.2)*

Démonstration.

- $(iii) \Rightarrow (ii)$ Tout morphisme de X dans un schéma Y est séparé, c'est en particulier le cas du morphisme vers $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ qui est un schéma affine.
- $(ii) \Rightarrow (i)$ La composition de morphismes séparés est séparé et tout morphisme entre schéma affines est séparé. Par hypothèse il existe $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ séparé et on a $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ séparé, donc $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est séparé.
- $(i) \Rightarrow (iii)$ Je n'ai pas réussi mais je pense qu'il faut voir qu'il y a un lien entre le produit fibré sur $\mathbb{Z}$ et sur un schéma Y et obtenir la diagonale de l'un comme image réciproque de la diagonale de l'autre.

□

Exercise . *(3.10)*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "(Id_X{,}f)"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "Id_X"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Le triangle de gauche est commutatif donc $p \circ (Id_X, f) = Id_X$.

On a un autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ p"'] & & \\
& Y \times_S Y \arrow[r, "q_Y"] \arrow[d, "p_Y"] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

On vérifie que Γ_f l'image de (Id_X, f) est $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$. Si $x \in X$, l'élément $(Id_X, f)(x)$ est déterminé uniquement (Est-ce vrai ? ? ?) par ces deux égalités

$$p((Id_X, f)(x)) = x;$$

$$q((Id_X, f)(x)) = f(x).$$

Or si $x \in \varphi^{-1}(\Delta_Y)$, on a $p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x))$ car $\varphi(x) \in \Delta_Y$. D'où

$$f \circ p(x) = p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x)) = q(x).$$

Donc $x = (Id_X, f)(p(x))$ par la caractérisation précédente. La réciproque est claire en remontant les égalités. □

4 Some local properties

4.1 Normal schemes

Exercise . *(1.4)*

Démonstration. Si X est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit $x \in X$ un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé y dans $\overline{\{x\}}$. Soit V un ouvert affine contenant y, alors si $x \notin V$ on aurait $x \in X \setminus V$ qui est fermé donc en particulier $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$ et donc $y \in X \setminus V$ ce qui est une contradiction. Il suit que $x \in V$ et que l'on obtient $\mathcal{O}_{X,x}$ par localisation de $\mathcal{O}_{X,y}$. Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si $\mathcal{O}_{X,y}$ l'est ce qui prouve l'implication. □

Exercise . *(1.9)*

Démonstration. On considère A un anneau de Dedekind et $X = \operatorname{Spec} A$. Soit $x_0 \in \operatorname{Spec} A$ un point fermé et $U = X \setminus \{x_0\}$ un ouvert. On note $\mathfrak{m}_0$ l'idéal associé à x_0 et t un générateur de $\mathfrak{m}_\mathfrak{o}$ dans $A_{\mathfrak{m}_0}$. L'idéal (t) se décompose en produit d'idéaux premiers car A est un anneau de Dedekind donc

$$(t) = \mathfrak{m}_0 \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{a_i}$$

et $V(t) = \{x_0, \dots x_n\}$ les points x_i étant ceux des idéaux $\mathfrak{m}_i$. On note t_i un générateur de $\mathfrak{m}_i$ dans $A_{\mathfrak{m}_\mathfrak{i}}$. On peut choisir t_i tel que $t_i \notin \mathfrak{m}_0$. En effet, si $\mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2 \subset \mathfrak{m}_0$ on aurait $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_0$ et donc égalité par maximalité. On a $t = ut_i^{a_i}$ dans $A_{\mathfrak{m}_\mathfrak{i}}$ où u est inversible donc $t \cdot t_i^{-a_i} = u$ et par suite $f = t^{-1}t_i^{a_i} \prod_{i \neq j} t_j^{a_j} = u' \in A_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$. Il existe donc des ouverts U_i contenant x_i tels que $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et U_i ne contient pas x_0. Il est de plus clair que $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus V(t))$. Il suit que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ car les U_i et $X \setminus V(t)$ forment un recouvrement ouvert de U. □

4.2 Regular schemes

Définition 4.1. *(2.1)*

Démonstration. On montre que $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est le produit tensoriel de $\mathcal{O}_{X,x}$ modules $\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$. Soit $\phi\colon \mathfrak{m}_x \times k(x) \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ donné par $\phi(\overline{a}, b) = \overline{ab}$ pour $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$. L'application ϕ est $\mathcal{O}_{X,x}$ bilinéaire. On considère $f\colon \mathfrak{m}_x \times k(x) \to Z$ une application bilinéaire. Soient $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$. Comme f est $\mathcal{O}_{X,x}$ bilinéaire on a

$$f(\overline{a}, b) = f(a \cdot \overline{1}, b) = af(\overline{1}, b) = f(\overline{1}, ab).$$

Il reste à voir que l'application $\mathcal{O}_{X,x}$ linéaire $\tilde{f}\colon b \mapsto f(\overline{1}, b)$ se factorise par le quotient $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Si $b \in \mathfrak{m}_x^2$ par linéarité on peut supposer $b = cd$ avec $c, d \in \mathfrak{m}_x$ et on a $\tilde{f}(b) = f(\overline{1}, cd) = f(\overline{c}, d) = f(\overline{0}, d) = 0$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k(x) \times \mathfrak{m}_x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \\ \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ce qui donne le résultat.

L'application $f_x^\sharp$ est locale donc $f_x^{\sharp -1}(\mathfrak{m}_x^2) = \mathfrak{m}_y^2$ d'où $f^\sharp_{x|\mathfrak{m}_y}$ induit

$$\tilde{f^\sharp}_x\colon \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Soit $g \in T_{X,x}$ on a $g \circ \tilde{f_x^\sharp} \colon \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to k(x)$. Si $k(y) = k(x)$ on a donc une application canonique

$$\begin{array}{ccc} T_{X,x} & \longrightarrow & T_{Y,y} \\ g & \longmapsto & g \circ \tilde{f_x^\sharp}. \end{array}$$

Dans le cas général $k(y) \subset k(x)$ et on effectue une extension des scalaires à droite. □

Exercise . *(2.1)*

Démonstration. On $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_x)$ engendre $\mathfrak{m}_x$ si et seulement s'il existe des éléments $a_1, \dots, a_n$ de $\mathfrak{m}_y$ tels que $f_x^\sharp(a_i)$ engendre $\mathfrak{m}_x$. Il suit que les $f_x^\sharp(a_i)$ forment une partie génératrice de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et donc une forme linéaire $g \in T_{X,x}$ est entièrement déterminé par ses valeurs en ces points d'où l'injectivité de $T_{f,x}$. Réciproquement, si $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$ n'engendre pas $\mathfrak{m}_x$ alors si $b_1, \dots b_n$ engendre $\mathfrak{m}_x$ et est minimale alors c'est une base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ en tant que $k(x)$-espace vectoriel. Supposons que b_n ne soit pas dans l'image $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$ alors deux formes linéaires qui coïncident sur $b_1, \dots, b_{n-1}$ et diffèrent sur b_n auront même image par $T_{f,x}$.

(Pas réussi à démontrer la deuxième assertion dans le cas de type finie) □

Exercise . *(2.2)*

Démonstration. La variété algébrique affine $\operatorname{Spec} k[x,y,z]/(x^2 - yz)$ est de dimension 2 car il y a une relation algébrique liant x, y, z et donc le degré de transcendance de l'anneau sur k est 2. L'anneau local en $o = (0,0,0)$ est aussi de dimension 2 l'idéal associé étant maximal. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,o}$ est engendré par x, y, z et la dimension sur $k(o) = k$ de $(x,y,z)/(x,y,z)^2$ est 3 donc la variété n'est pas régulière en o. En effet, la relation $x^2 = yz$ ne donne pas d'information modulo $(x,y,z)^2$ et donc $(x,y,z)/(x,y,z)^2$ est engendré par x, y, z.

Le critère Jacobien donne que l'anneau est régulier en tout point de $X(k)$ sauf $(0,0,0)$, la matrice étant

$$\begin{bmatrix} 2x & -z & -y \end{bmatrix}$$

donc de rang 1 partout sauf au point 0.

(Pour la normalité il n'y a pas de critère ?)

L'anneau $A = k[x,y,z]/(x^2 - yz)$ est normal. Soit $\varphi \colon k[x,y,z] \to k[S,T]$ l'application défini par $\varphi(x) = ST$, $\varphi(y) = S^2$ et $\varphi(z) = T^2$. Alors le noyau de φ est $(x^2 - yz)$. L'inclusion $(x^2 - yz) \subset \operatorname{Ker} \varphi$ est par définition. Pour l'inclusion réciproque soit f dans le noyau, on effectue la divison de f par (x^2-yz) dans l'anneau $k[y,z][x]$. On obtient $f = g(x^2-yz)+r$ où $\deg_x r \leq 1$. On a $r = a(y,z)x + b(y,z)$ et de plus, $\varphi(r) = 0$. Il suit $a(S^2,T^2)ST + b(S^2,T^2) = 0$ ce qui est possible seulement si $a = b = 0$ par considération des degrés en S ou T. On a obtenu que $A \simeq k[S^2,T^2,ST]$. En particulier c'est un sous-anneau de $k[S,T]$ est l'extension est entière car T est racine de $X^2 - T^2$ et de même pour S. On en déduit à nouveau que A est de dimension 2. Finalement comme $k[S,T]$ est factoriel il est normal. Donc si $f \in \mathrm{Frac}(k[S^2,T^2,ST)$ est entier sur celui-ci on a $f \in k[S,T]$ donc pour $f = \frac{P}{Q}$ on obtient

$$P = R(S,T)Q.$$

Il reste à remarque qu'un élément $h = \sum a_{ij}S^iT^j \in k[S,T]$ appartient à $k[S^2,T^2,ST]$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour $i-j$ impair. On en déduit une contradiction si R n'appartient pas à $k[S^2,T^2,ST]$. $\square$

Exercise . *(2.3)*

Démonstration. a) En utilisant le critère Jacobien on obtient que tous les points sont lisses (donc réguliers) sauf peut être $(0,0)$ mais celui-ci n'est pas sur la variété.

b) La fibre spéciale est donné par le produit tensoriel

$$\mathcal{O}_K[x,y]/(x^2+y^3+t^n) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K = k[x,y]/(x^2+y^3).$$

Le schéma affine associé est réduit si et seulement si (x^2+y^3) est radical. Comme $k[x,y]$ est factoriel il suffit de montrer que x^2+y^3 est premier. Dans $k[y][x]$ si on a

$$(a(y)x+b(y))(c(y)x+d(y)) = x^2+y^3$$

alors $a(y)c(y) = 1$, $a(y)d(y)+b(y)c(y) = 0$ et $b(y)d(y) = y^3$. La première égalité donne $a(y) = \lambda \in k^*$ et $c(y) = \lambda^{-1}$. Il suit par la deuxième que les degrés en y de b et d sont égaux et donc la troisième égalité ne peut avoir lieu. L'anneau est réduit et le lemme 1.18 permet de conclure à la normalité.

(Il faut encore montrer la platitude des $\mathcal{O}_X(U)$ et normalité de X_K)

c) L'anneau $A_\mathfrak{m}$ est de dimension 2 où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal engendré par (x,y,t). On a $\mathfrak{m}^2 = (t^2,tx,ty,x^2,xy,y^2)$ et donc

$$x^2+y^3+t^n = 0 \Rightarrow t^n = 0 \mod \mathfrak{m}^2.$$

Il suit que si $n = 1$ on a $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ engendré par (x,y) donc le point est régulier. Si $n > 1$, il n'y a pas de nouvelles relations et le point est singulier.

(J'aimerai bien une interprétation de ce qu'il se passe quand $n > 1$ c'est vraiment bizarre ce truc) $\square$

4.3 Flat morphisms and smooth morphisms

Lemme 4.2. *(3.20)*

Démonstration. (Je pense avoir compris de loin, mais j'aimerai bien une démonstration claire du fait que $\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes k(y)$, c'est-à-dire que l'anneau local de la fibre est simplement pris en tensorisant avec $k(y)$.)

On se place dans le cas où $Y = \operatorname{Spec} B$ est affine.

Tout d'abord on a, comme dans la démonstration du lemme 3.7 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes B/\mathfrak{m}_y = \mathcal{O}_{X_y,x}$. Il faut donc voir que ce dernier anneau est $k(x)$. Comme on a supposé X_y fini, c'est un schéma affine de dimension 0 noethérien. L'anneau local $\mathcal{O}_{X_y,x}$ est donc de dimension 0 et réduit ce qui assure que l'unique idéal maximal est (0) donc que c'est un corps, le corps résiduel étant $k(x)$ c'est $k(x)$. La condition est donc bien suffisante.

Maintenant si f est non ramifié on a $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X_y,x}$ pour tout $x \in X_y$. La dimension de la fibre est donc 0 et elle est réduite. □

Exercise . *(3.1)*

Démonstration. C'est une application directe du corollaire 2.12. En effet, on a

$$\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}/t\mathcal{O}_{X,x}$$

par hypothèse et l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. □

Exercise . *(3.2)*

Démonstration. Le fait que le morphisme est quasi-fini assure que pour tout $x \in X$ qui n'est pas fermé il existe un point fermé dans $\overline{\{x\}}$ et donc comme la question est locale on peut se restreindre à $X = \operatorname{Spec} A$ et $Y = \operatorname{Spec} B$ affines.

Le résultat suit alors du diagramme suivant et du fait que la localisation est plate. Si x_1 n'est pas fermé, il existe x_2 dans sa fermeture, donc si $\mathfrak{p}_1$ est l'idéal associé à x_1 et $\mathfrak{m}_1$ celui associé à x_2 on a $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{m}_1$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_{X,x_2} \arrow[d] \\
 & \mathcal{O}_{X,x_1}
\end{tikzcd}$$

et comme par hypothèse $\mathcal{O}_{X,x_2}$ est plat sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ c'est le cas de ses localisés donc de $\mathcal{O}_{X,x_2}$ qui est obtenu par localisation en $\mathfrak{p}_1$.

□