

Exercices Qing Liu

Séverin Philip

4 septembre 2018

1 Some topics in commutative algebra

1.1 Tensor products

Exercise . (1.3)

Démonstration. On a des applications canoniques

$$M \otimes N \rightarrow M \otimes N/N' \rightarrow M/M' \otimes N/N'.$$

On note ϕ la composée qui est surjective. Par le corollaire 1.13 on sait que le noyau de la première flèche est $id \otimes j = j_M$ où j est l'inclusion de N' dans N et le noyau de la deuxième $i \otimes id = i_{N/N'}$ avec i l'inclusion de M' dans M . On a donc $\text{Im } i_N + \text{Im } j_M \subset \text{Ker } \phi$. Maintenant si $z \in \text{Ker } \phi$, la deuxième flèche est nulle donc l'image de z par la première est dans $\text{Im } i_{N/N'}$, c'est-à-dire une somme finie d'éléments de la forme $x \otimes \bar{y}$ avec $x \in M'$. Il peut s'ajouter à cela une somme finie d'éléments du noyau de la première flèche. Dans tous les cas on a $z \in \text{Im } i_N + \text{Im } j_M$.

La deuxième partie découle directement, on a

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})/(\text{Im } i + \text{Im } j).$$

De plus, $\text{Im } i \simeq n\mathbb{Z}$ et $\text{Im } j \simeq m\mathbb{Z}$ en tant que \mathbb{Z} -modules donc leur somme est $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$. \square

1.2 Flatness

Exercise . (2.4)

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) On suppose que $I \neq I^2$. Alors on a une application injective (l'inclusion) $I \rightarrow A$. On tensorise avec A/I et on obtient

$$I \otimes A/I \rightarrow A \otimes A/I \simeq A/I.$$

Si $x \in I \setminus I^2$, on a $x \otimes \bar{1}$ non nul dans $I \otimes A/I$ mais son image dans A/I est nulle, l'application obtenue en tensorisant n'est pas injective, A/I n'est pas plat sur A .

(ii) \Rightarrow (iii) Par le lemme de Nakayama il existe $z \in I$ tel que $I = zI$. Par suite, $(z) = I$. On a en particulier $(z) = (z^2)$ d'où $z = \lambda z^2$ avec $\lambda \in A$. On pose $e = \lambda z$ et on a $e^2 = e$. Il reste à voir que $(z) = (e)$. Une inclusion est triviale, pour l'autre, on a $z = \lambda z^2 = ez \in (e)$. On a donc montré que $I = eA$ avec e idempotent.

(iii) \Rightarrow (i) Soit $f: N \rightarrow N'$ une application injective entre deux A -modules. On considère $f \otimes id: N \otimes A/I \rightarrow N' \otimes A/I$. Soit $x \otimes \bar{y}$ un élément du noyau de cette application. Alors $f(x) \otimes \bar{y} = 0$ donne que $f(x) = \lambda \cdot d$ avec $d \in N'$ et $\lambda \in I$. On a $\lambda = ae$ avec $a \in A$ par (iii). Alors, $f(ex) = ae^2 \cdot d = f(x)$, donc $x = ex$ et $x \otimes \bar{y} = 0$.

(Ici je ne suis pas sûr que considérer un élément de la forme $x \otimes y$ suffisse... Il faudrait prendre un élément général qui est une somme de ces trucs et alors je crois pas que l'argument marche?)

□

Exercice . (2.5)

Démonstration. Si A est un corps tout A -module est libre donc plat sur A .

Sinon, il existe un idéal non nul propre $I \subset A$ et par l'exercice précédent, A/I est plat sur A si et seulement si $I = (e)$ pour un idempotent e de A . Comme A est supposé intègre il n'a pas d'idempotent et donc A/I n'est pas plat sur A .

□

2 General properties of Schemes

2.1 Schemes

Exercice . (3.14)

Démonstration. De tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini par quasi-compacité. Par définition d'un schéma X admet un recouvrement ouvert par des ouverts affines, il suit qu'on peut extraire un recouvrement fini par des ouverts affines.

□

2.2 Reduced schemes and integral schemes

D'abord un exercice qui n'est pas dans le Qing Liu mais qui vaut le coup.

Exercice . Soit X un schéma. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ et qu'il y a équivalence dans le cas où l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini (par exemple si X est localement noethérien),

- (i) Les composantes connexes de X sont irréductibles.
- (ii) Le schéma X est union disjointe de ses composantes irréductibles.
- (iii) Pour tout $x \in X$ l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ a un unique idéal premier, son nilradical.

Démonstration. On suppose (i). Comme irréductible implique connexe on a avec (i) l'équivalence et X est toujours union disjointe de ses composantes connexes.

On suppose (ii). Soit $x \in X$. Il y a une bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles qui passent par x et celles de $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$. Cela vient de l'immersion ouverte canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$ (Si je ne me trompe pas?). Par (ii) les composantes irréductibles de X sont disjointes donc une seule passe par x . Il suit que $\mathcal{O}_{X,x}$ a un unique idéal premier ce qui est équivalent au fait que son nilradical est premier. Ceci ce montre en utilisant le fait tout idéal premier contient un idéal premier minimal qui est conséquence du lemme de Zorn. On remarque par ailleurs qu'en remontant les arguments on a prouvé que (iii) implique (ii).

Maintenant, en supposant de plus que l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini on montre d'abord que les composantes irréductibles de X sont ouvertes ce qui permettra de conclure. Soit $x \in X$ et $Z_1 \subset X$ la composante irréductible qui contient x . Soit U un voisinage ouvert de x qui intersecte un nombre fini de composantes irréductibles Z_2, \dots, Z_n de X . Les composantes irréductibles de U sont les $U_i = Z_i \cap U$. Avec la condition (ii) elles sont disjointes dans U . On a donc

$$U_i = U \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j$$

et une union finie de fermés étant fermé, U_i est ouvert dans U . Comme U est ouvert dans X cela donne que U_1 est un voisinage ouvert de x contenant x inclus dans Z_1 . Il suit que Z_1 est ouvert dans X .

Finalement, les composantes irréductibles étant ouvertes et fermés dans X elles en sont les composantes connexes ce qui donne $(ii) \Rightarrow (i)$. \square

Exercice . (4.2)

Démonstration. Le morphisme canonique $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$ est donné par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ pour un ouvert affine U de X contenant x . On

note $\mathcal{O}_X(U) = A$ et l' morphisme est celui de localisation en \mathfrak{p} idéal premier associé à x . Si y est un point de U qui se spécialise en x , $x \in \overline{\{y\}}$, par définition si \mathfrak{q} est l'idéal premier associé à y , on a $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ d'où \mathfrak{q} est un idéal premier du localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Par suite y est dans l'image de $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } A$. Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$ et donc par localisation d'un idéal premier de A inclus dans \mathfrak{p} ce qui correspond à un point qui se spécialise en x . Comme le morphisme $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$ est indépendant du choix de U (Pourquoi?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert V , tu peux trouver un affine W dans $U \cap V$. Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(V)$, $\mathcal{O}_X(W)$, les flèches de restrictions et les flèches vers $\mathcal{O}_{X,x}$. Ensuite tu appliques Spec et tu vois que tous les morphismes coïncident.

□

Exercice . (4.3)

Démonstration. On a une inclusion $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$ qui induit un morphisme $j: \text{Spec } K[T] \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K[T]$. On montre que c'est une immersion ouverte. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec } K[T]$, $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$. L'image de j est $\text{Spec } \mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$ qui est ouverte. En effet, si $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ alors $t \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} = K[T]$ ce qui est impossible. Inversement, si $t \notin \mathfrak{p}$ avec \mathfrak{p} idéal premier de $\mathcal{O}_K[T]$ alors par localisation en $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$ ($\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$?) on a $\mathfrak{p}K[T]$ idéal premier qui vérifie $\mathfrak{p}K[T] \cap \mathcal{O}_K[T] = \mathfrak{p}$. Il reste à voir que j_x^\sharp est un isomorphisme en tout point $x \in \text{Spec } K[T]$ ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec $S = \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$. Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal (T) est le seul point de $\text{Spec } K[T]$ qui se spécialise en (T, t) . (Je crois?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles P de $K[T]$ tels que $(P) \cap \mathcal{O}_K[T] \subset (T, t)$. En localisant tu as nécessairement $T|P$ et donc $P = T$. Enfin je crois que c'est bon.

□

Exercice . (4.6)

Démonstration. a) On montre d'abord $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si e est un idempotent différent de 0 ou 1 de $\mathcal{O}_X(X)$ l'ensemble $V(e)$ de $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ est fermé et ouvert dans celui-ci. Il est fermé par définition et l'égalité $e(1-e) = 0$ assure que si \mathfrak{p} est premier, e ou $1-e$ est dans \mathfrak{p} mais pas les deux. Il suit que $V(e)$ et

$V(1-e)$ forment une partition de $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$ par des fermés. En regardant les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ la même idée permet de démontrer $(i) \Rightarrow (ii)$.

Pour $(ii) \Rightarrow (i)$ si X n'est pas connexe il existe deux ouverts U_1, U_2 qui forment une partition de l'espace. On peut donc par définition d'un faisceau relevé $1 \in \mathcal{O}_X(U_1)$ en un élément idempotent différent de 0, 1 en recollant avec $0 \in \mathcal{O}_X(U_1)$. La même idée permet de démontrer $(ii) \Rightarrow (iii)$.

b) L'argument est celui pour montrer $(iii) \Rightarrow (i)$. Un idempotent e distinct de 0, 1 n'est pas inversible donc dans l'idéal maximal de l'anneau. De même $1-e$ est un tel idempotent donc doit aussi être dans l'idéal maximal ce qui est impossible car alors on aurait 1 dans cet idéal.

c) C'est l'argument utilisé pour montrer $(ii) \Rightarrow (i)$. Il suffit de vérifier que les idempotents obtenus ainsi en partant des composantes connexes sont indécomposables, ce qui est clair.

□

Exercice . (4.8)

Démonstration. Soit x un point de X et (U_i) les ouverts affines qui recouvrent X (en nombre fini). On suppose que $x \in U_1$ quitte à renuméroté les ouverts. Le point x correspond à un idéal premier \mathfrak{p} contenu dans un idéal maximal \mathfrak{m} de $\mathcal{O}_X(U_1)$ qui lui même correspond à un point fermé de U_1 . On a donc l'existence de $x_1 \in U_1$ fermé dans U_1 et $x_1 \in \overline{\{x\}}$ la fermeture étant prise dans X . Si x_1 est fermé dans tous les autres U_i qui le contiennent il est fermé dans X . Sinon il existe un $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $x_1 \in U_i$ et x_1 n'est pas fermé dans U_i . On peut à nouveau supposer que $i = 2$ et par le même argument qu'avant obtenir $x_2 \in U_2$ fermé dans U_2 et $x_2 \notin U_1$. En répétant le procédé au plus n fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines U_j qui le contiennent.

□

Exercice . (4.10)

Démonstration. Comme f est quasi-compact et $\text{Spec } A$ est un schéma affine on a que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ où les U_i sont des ouverts affines, on note $U_i = \text{Spec } B_i$. On a des morphismes $f|_{U_i}: \text{Spec } B_i \rightarrow \text{Spec } A$ induit par des morphismes d'anneaux $f_i: A \rightarrow B_i$ tels que pour tout i le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_X(X) \\ & \searrow f_i & \downarrow \\ & & B_i \end{array}$$

la flèche verticale étant l'opération de restriction du faisceau \mathcal{O}_X . Il suit par les propriétés de faisceaux (comme les U_i forment un recouvrement) que si pour $x \in I$ il existe des entiers positifs n_i tels que $f_i(x)^{n_i} = 0$ alors $f(x)^N = 0$ où N est le maximum des n_i (qui existe car ils sont en nombres finis). On est donc restreint à démontrer le résultat dans le cas affine. Dans ce cas, f est induit par $f^*: A \rightarrow B$ où $X = \text{Spec } B$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f(\text{Spec } B) \subset V(I) &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, f(\mathfrak{p}) \in V(I) \\ &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, I \subset f^{*-1}(\mathfrak{p}) \\ &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, f^*(I) \subset \mathfrak{p} \\ &\iff f^*(I) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

□

Exercice . (4.11)

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) On montre que $f^\sharp(U)$ est injectif pour tout ouvert affine U de Y . Soit $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ tel que $f^\sharp(U)(g) = 0$. Pour tout $y = f(x) \in U \cap f(X)$ on a

$$f_x^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et $f_x^\sharp(g) = 0 \in \mathfrak{m}_x$. D'où $g \in \mathfrak{m}_{f(x)}$. Or l'ensemble $\{y \in U, g \in \mathfrak{m}_y\}$ est un fermé de U , celui-ci contient $f(X)$ c'est donc U tout entier. Il suit que $g \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{p}$ est nilpotent.

Comme Y est réduit $g = 0$. Le résultat est vrai sans l'hypothèse U affine en prenant un recouvrement par des ouverts affines.

(ii) \Rightarrow (iii) Par la proposition 4.18 le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif pour tout $x \in U$ donc en particulier si $V \subset U$ est un ouvert, $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ est injectif. En effet le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ par (ii).

(iii) \Rightarrow (iv) Soit V un ouvert de Y contenant $f(\xi_X)$. Le diagramme suivant commute et par (iii) les flèches sont injectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(\xi_X)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,\xi_X} \end{array}$$

Comme ξ_X est le point générique de X qui est un schéma entier (integral ?) son idéal maximal associé est (0) . Par injectivité et le fait que $f_{\xi_X}^\#$ est local l'idéal maximal de $f(\xi_X)$ est donc lui même (0) . Il suit que $f(\xi_X) = \xi_Y$.

(iv) \Rightarrow (v) Trivial.

(v) \Rightarrow (i) Comme Y est un schéma entier $\overline{\{\xi_Y\}} = Y$.

□

3 Morphisms and base change

3.1 The technique of base change

Proposition 3.1. 1.4 *Démonstration du point d.*

Démonstration. On considère U, V des sous-schémas ouverts de X et Y . Il faut vérifier que $i \times j$ induit un isomorphisme de $U \times_S V$ dans $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Soit Z un schéma et f, g des morphismes $Z \rightarrow U, Z \rightarrow V$. En composant avec les injections de U, V dans X et Y on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow^{j \circ g} & & & \\ & & X \times_S Y & \longrightarrow & Y \\ & \searrow_{i \circ f} & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & S \end{array}$$

Il suit que la flèche du milieu se factorise par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Comme le morphisme $i \times j$ est l'unique morphisme de $U \times_S V$ dans $X \times_S Y$ faisant commuter les diagrammes et se factorisant par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ c'est un isomorphisme $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. □

Exercice . (1.7)

Démonstration. On suppose X, Y et S affines, c'est-à-dire $X = \text{Spec } M$, $Y = \text{Spec } N$ et $S = \text{Spec } R$. Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note $f: R \rightarrow M$, $g: R \rightarrow N$. Soit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in X \times Y$ tels que $\mathfrak{p} \in X_s$, $\mathfrak{q} \in Y_s$ pour un point $s \in S$. On a donc $f^{-1}(\mathfrak{p}) = s$ d'où les morphismes

$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \rightarrow \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour \mathfrak{q} et N . On a donc des morphismes $M \rightarrow k(\mathfrak{p})$ et $N \rightarrow k(\mathfrak{q})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}) & \xleftarrow{\quad} & N \\ & \nwarrow \text{ (pointillée) } & \uparrow \\ M \otimes_R N & \xleftarrow{\quad} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \xleftarrow{\quad} & R \end{array}$$

et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

$$\text{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \rightarrow X \times_S Y.$$

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si I est un idéal premier de $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ alors $\varphi^{-1}(I)$ est l'idéal \mathfrak{p} de M où φ est l'application $M \rightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Comme $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$ on a une inclusion. Maintenant, si $m \in M \setminus \mathfrak{p}$ est tel que $\varphi(m) \in I$ alors comme $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$ qui est inversible dans $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ ce qui est impossible car alors $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Donc $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et ce raisonnement appliqué à N et \mathfrak{q} assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal I de $M \otimes_R N$ tel que $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$ où i, j sont les applications $M \rightarrow M \otimes_R N$, $N \rightarrow M \otimes_R N$ est

tel que $M \otimes_R N \rightarrow k(I)$ se factorise par $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. En effet, $\mathfrak{p} \otimes 1$ est donc dans I et est envoyé sur 0 dans $k(I)$ donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \rightarrow M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \rightarrow k(I).$$

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Il suit donc une factorisation de $k(I) \rightarrow X \times_S Y$ en

$$k(I) \longrightarrow \operatorname{Spec} (k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \longrightarrow X \times_S Y.$$

□

Exercice . (1.8)

Démonstration. C'est une conséquence de l'exercice précédent. Soit $y \in Y$, il existe un $s \in S$ tel que $y \in Y_s$. Par surjectivité de $X \rightarrow S$ la fibre X_s au dessus de s est non vide donc contient un point $x \in X$. Par l'exercice 1.7 l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}$$

est homéomorphe à $\operatorname{Spec} (k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}))$ qui est non vide donc contient au moins un point. Le morphisme $q: X \times_S Y$ est donc surjectif. □

Exercice . (1.10)

Démonstration. Par la propriété universelle du produit fibré en tant qu'ensembles les applications $p: X \times_S Y \rightarrow X$ et $q: X \times_S Y \rightarrow Y$ donnent l'existence d'une unique application continue $f: |X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$. Cette application est surjective par l'exercice 1.7.

On considère le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}(X)/(X + i)(X - i)$$

et ce dernier anneau est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (Spécifier l'isomorphisme). Comme il n'y a qu'un point dans $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ le produit fibré des deux ensembles $|\operatorname{Spec} \mathbb{C}|$ sur $|\operatorname{Spec} \mathbb{R}|$ ne contient qu'un seul point. Par contre $\operatorname{Spec} (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ contient deux idéaux premiers $(1, 0)$ et $(0, 1)$. L'application f est donc surjective mais pas injective ces deux points du produit fibré de schémas ayant même image dans le produit fibré d'ensembles. □

3.2 Applications to algebraic varieties

Exercice . (2.4)

Démonstration. On va considérer le cas où $S = \operatorname{Spec} k$ pour un corps k . Comme Y est de type finie sur k , pour U un ouvert affine de Y , $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k -algèbre de type finie.

Pour un ouvert affine V de X contenant x on a un morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow V$ provenant d'un morphisme $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. On a $f_x^\#(U): \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$. Or $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$ correspond à une localisation de $\mathcal{O}_{X,x}$ et comme $\mathcal{O}_Y(U)$ est une k -algèbre de type finie, l'image de f_x qui est un k -morphisme est déterminé par l'image des générateurs de $\mathcal{O}_Y(U)$ sur k . Soient y_1, \dots, y_n ces générateurs et $\frac{f_i}{g_i}$ leurs images. Soit g le produit des g_i , $D(g)$ est un ouvert affine principal W contenant x de V et l'on a $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X(W)$. On peut donc définir le morphisme f_U de U dans V tel que $f_U \circ i_x = f_x$. On peut définir des morphismes f_U de cette façon pour tout ouvert affine U de Y qui se recolle par construction et obtenir le morphisme f souhaité. \square

3.3 Some global properties of morphisms

Exercice . (3.1)

Démonstration. Par hypothèse les morphismes $f_i: f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ sont des immersions fermés et se recollent. Comme $f(X)$ est fermé il suit que f est une immersion fermée topologique. Il reste à voir que les applications locales sur les faisceaux sont surjectives. Or c'est un problème local et on peut donc se restreindre à Y_i où le résultat vient à nouveau de l'hypothèse sur les f_i . \square

Exercice . (3.2)

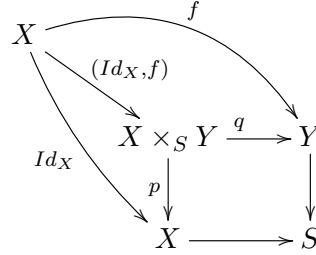
Démonstration. (iii) \Rightarrow (ii) Tout morphisme de X dans un schéma Y est séparé, c'est en particulier le cas du morphisme vers $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ qui est un schéma affine.

(ii) \Rightarrow (i) La composition de morphismes séparés est séparé et tout morphisme entre schéma affines est séparé. Par hypothèse il existe $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ séparé et on a $\operatorname{Spec} A \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ séparé, donc $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est séparé.

(i) \Rightarrow (iii) Je n'ai pas réussi mais je pense qu'il faut voir qu'il y a un lien entre le produit fibré sur \mathbb{Z} et sur un schéma Y et obtenir la diagonale de l'un comme image réciproque de la diagonale de l'autre. \square

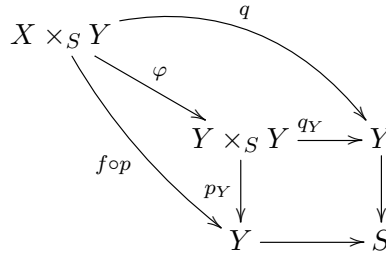
Exercise . (3.10)

Démonstration. On a un diagramme commutatif



Le triangle de gauche est commutatif donc $p \circ (Id_X, f) = Id_X$.

On a un autre diagramme commutatif



On vérifie que Γ_f l'image de (Id_X, f) est $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$. Si $x \in X$, l'élément $(Id_X, f)(x)$ est déterminé uniquement (Est-ce vrai ??) par ces deux égalités

$$p((Id_X, f)(x)) = x;$$

$$q((Id_X, f)(x)) = f(x).$$

Or si $x \in \varphi^{-1}(\Delta_Y)$, on a $p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x))$ car $\varphi(x) \in \Delta_Y$. D'où

$$f \circ p(x) = p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x)) = q(x).$$

Donc $x = (Id_X, f)(p(x))$ par la caractérisation précédente. La réciproque est claire en remontant les égalités. \square

4 Some local properties

4.1 Normal schemes

Exercise . (1.4)

Démonstration. Si X est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit $x \in X$ un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé y dans $\overline{\{x\}}$. Soit V un ouvert affine contenant y , alors si $x \notin V$ on aurait $x \in X \setminus V$ qui est fermé donc en particulier $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$ et donc $y \in X \setminus V$ ce qui est une contradiction. Il suit que $x \in V$ et que l'on obtient $\mathcal{O}_{X,x}$ par localisation de $\mathcal{O}_{X,y}$. Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si $\mathcal{O}_{X,y}$ l'est ce qui prouve l'implication. \square

Exercice . (1.9)

Démonstration. On considère A un anneau de Dedekind et $X = \text{Spec } A$. Soit $x_0 \in \text{Spec } A$ un point fermé et $U = X \setminus \{x_0\}$ un ouvert. On note \mathfrak{m}_0 l'idéal associé à x_0 et t un générateur de \mathfrak{m}_0 dans $A_{\mathfrak{m}_0}$. L'idéal (t) se décompose en produit d'idéaux premiers car A est un anneau de Dedekind donc

$$(t) = \mathfrak{m}_0 \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^{a_i}$$

et $V(t) = \{x_0, \dots, x_n\}$ les points x_i étant ceux des idéaux \mathfrak{m}_i . On note t_i un générateur de \mathfrak{m}_i dans $A_{\mathfrak{m}_i}$. On peut choisir t_i tel que $t_i \notin \mathfrak{m}_0$. En effet, si $\mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2 \subset \mathfrak{m}_0$ on aurait $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_0$ et donc égalité par maximalité. On a $t = ut_i^{a_i}$ dans $A_{\mathfrak{m}_i}$ où u est inversible donc $t \cdot t_i^{-a_i} = u$ et par suite $f = t^{-1}t_i^{a_i} \prod_{i \neq j} t_j^{a_j} = u' \in A_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$. Il existe donc des ouverts U_i contenant x_i tels que $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$ et U_i ne contient pas x_0 . Il est de plus clair que $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus V(t))$. Il suit que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ car les U_i et $X \setminus V(t)$ forment un recouvrement ouvert de U . \square

4.2 Regular schemes

Définition 4.1. (2.1)

Démonstration. On montre que $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est le produit tensoriel de $\mathcal{O}_{X,x}$ modules $\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$. Soit $\phi: \mathfrak{m}_x \times k(x) \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ donné par $\phi(\bar{a}, b) = \overline{ab}$ pour $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$. L'application ϕ est $\mathcal{O}_{X,x}$ bilinéaire. On considère $f: \mathfrak{m}_x \times k(x) \rightarrow Z$ une application bilinéaire. Soient $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$. Comme f est $\mathcal{O}_{X,x}$ bilinéaire on a

$$f(\bar{a}, b) = f(a \cdot \bar{1}, b) = af(\bar{1}, b) = f(\bar{1}, ab).$$

Il reste à voir que l'application $\mathcal{O}_{X,x}$ linéaire $\tilde{f}: b \mapsto f(\bar{1}, b)$ se factorise par le quotient $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Si $b \in \mathfrak{m}_x^2$ par linéarité on peut supposer $b = cd$ avec

$c, d \in \mathfrak{m}_x$ et on a $\tilde{f}(b) = f(\bar{1}, cd) = f(\bar{c}, d) = f(\bar{0}, d) = 0$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} k(x) \times \mathfrak{m}_x & \xrightarrow{f} & Z \\ \phi \downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 & & \end{array}$$

ce qui donne le résultat.

L'application f_x^\sharp est locale donc $f_x^{\sharp-1}(\mathfrak{m}_x^2) = \mathfrak{m}_y^2$ d'où $f_{x|\mathfrak{m}_y}^\sharp$ induit

$$\tilde{f}_x^\sharp : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Soit $g \in T_{X,x}$ on a $g \circ \tilde{f}_x^\sharp : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow k(x)$. Si $k(y) = k(x)$ on a donc une application canonique

$$\begin{array}{ccc} T_{X,x} & \longrightarrow & T_{Y,y} \\ g & \longmapsto & g \circ \tilde{f}_x^\sharp. \end{array}$$

Dans le cas général $k(y) \subset k(x)$ et on effectue une extension des scalaires à droite. \square

Exercise . (2.1)

Démonstration. On $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_x)$ engendre \mathfrak{m}_x si et seulement s'il existe des éléments a_1, \dots, a_n de \mathfrak{m}_y tels que $f_x^\sharp(a_i)$ engendre \mathfrak{m}_x . Il suit que les $f_x^\sharp(a_i)$ forment une partie génératrice de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et donc une forme linéaire $g \in T_{X,x}$ est entièrement déterminé par ses valeurs en ces points d'où l'injectivité de $T_{f,x}$. Réciproquement, si $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$ n'engendre pas \mathfrak{m}_x alors si b_1, \dots, b_n engendre \mathfrak{m}_x et est minimale alors c'est une base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ en tant que $k(x)$ -espace vectoriel. Supposons que b_n ne soit pas dans l'image $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$ alors deux formes linéaires qui coïncident sur b_1, \dots, b_{n-1} et diffèrent sur b_n auront même image par $T_{f,x}$.

(Pas réussi à démontrer la deuxième assertion dans le cas de type finie) \square

Exercise . (2.2)

Démonstration. La variété algébrique affine $\text{Spec } k[x, y, z]/(x^2 - yz)$ est de dimension 2 car il y a une relation algébrique liant x, y, z et donc le degré de transcendance de l'anneau sur k est 2. L'anneau local en $o = (0, 0, 0)$ est aussi de dimension 2 l'idéal associé étant maximal. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,o}$ est engendré par x, y, z et la dimension sur $k(o) = k$ de $(x, y, z)/(x, y, z)^2$

est 3 donc la variété n'est pas régulière en o . En effet, la relation $x^2 = yz$ ne donne pas d'information modulo $(x, y, z)^2$ et donc $(x, y, z)/(x, y, z)^2$ est engendré par x, y, z .

Le critère Jacobien donne que l'anneau est régulier en tout point de $X(k)$ sauf $(0, 0, 0)$, la matrice étant

$$\begin{bmatrix} 2x & -z & -y \end{bmatrix}$$

donc de rang 1 partout sauf au point 0.

(Pour la normalité il n'y a pas de critère ?)

L'anneau $A = k[x, y, z]/(x^2 - yz)$ est normal. Soit $\varphi: k[x, y, z] \rightarrow k[S, T]$ l'application défini par $\varphi(x) = ST$, $\varphi(y) = S^2$ et $\varphi(z) = T^2$. Alors le noyau de φ est $(x^2 - yz)$. L'inclusion $(x^2 - yz) \subset \text{Ker } \varphi$ est par définition. Pour l'inclusion réciproque soit f dans le noyau, on effectue la division de f par $(x^2 - yz)$ dans l'anneau $k[y, z][x]$. On obtient $f = g(x^2 - yz) + r$ où $\deg_x r \leq 1$. On a $r = a(y, z)x + b(y, z)$ et de plus, $\varphi(r) = 0$. Il suit $a(S^2, T^2)ST + b(S^2, T^2) = 0$ ce qui est possible seulement si $a = b = 0$ par considération des degrés en S ou T . On a obtenu que $A \simeq k[S^2, T^2, ST]$. En particulier c'est un sous-anneau de $k[S, T]$ est l'extension est entière car T est racine de $X^2 - T^2$ et de même pour S . On en déduit à nouveau que A est de dimension 2. Finalement comme $k[S, T]$ est factoriel il est normal. Donc si $f \in \text{Frac}(k[S^2, T^2, ST])$ est entier sur celui-ci on a $f \in k[S, T]$ donc pour $f = \frac{P}{Q}$ on obtient

$$P = R(S, T)Q.$$

Il reste à remarquer qu'un élément $h = \sum a_{ij}S^i T^j \in k[S, T]$ appartient à $k[S^2, T^2, ST]$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour $i - j$ impair. On en déduit une contradiction si R n'appartient pas à $k[S^2, T^2, ST]$. \square

Exercice . (2.3)

Démonstration. a) En utilisant le critère Jacobien on obtient que tous les points sont lisses (donc réguliers) sauf peut être $(0, 0)$ mais celui-ci n'est pas sur la variété.

b) La fibre spéciale est donné par le produit tensoriel

$$\mathcal{O}_K[x, y]/(x^2 + y^3 + t^n) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K = k[x, y]/(x^2 + y^3).$$

Le schéma affine associé est réduit si et seulement si $(x^2 + y^3)$ est radical. Comme $k[x, y]$ est factoriel il suffit de montrer que $x^2 + y^3$ est premier. Dans $k[y][x]$ si on a

$$(a(y)x + b(y))(c(y)x + d(y)) = x^2 + y^3$$

alors $a(y)c(y) = 1$, $a(y)d(y) + b(y)c(y) = 0$ et $b(y)d(y) = y^3$. La première égalité donne $a(y) = \lambda \in k^*$ et $c(y) = \lambda^{-1}$. Il suit par la deuxième que les degrés en y de b et d sont égaux et donc la troisième égalité ne peut avoir lieu. L'anneau est réduit et le lemme 1.18 permet de conclure à la normalité.

(Il faut encore montrer la platitude des $\mathcal{O}_X(U)$ et normalité de X_K)

c) L'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est de dimension 2 où \mathfrak{m} est l'idéal maximal engendré par (x, y, t) . On a $\mathfrak{m}^2 = (t^2, tx, ty, x^2, xy, y^2)$ et donc

$$x^2 + y^3 + t^n = 0 \Rightarrow t^n = 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

Il suit que si $n = 1$ on a $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ engendré par (x, y) donc le point est régulier. Si $n > 1$, il n'y a pas de nouvelles relations et le point est singulier.

(J'aimerais bien une interprétation de ce qu'il se passe quand $n > 1$ c'est vraiment bizarre ce truc) \square

4.3 Flat morphisms and smooth morphisms

Lemme 4.2. (3.20)

Démonstration. (Je pense avoir compris de loin, mais j'aimerais bien une démonstration claire du fait que $\mathcal{O}_{X_y, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes k(y)$, c'est-à-dire que l'anneau local de la fibre est simplement pris en tensorisant avec $k(y)$.)

On se place dans le cas où $Y = \text{Spec } B$ est affine.

Tout d'abord on a, comme dans la démonstration du lemme 3.7 $\mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes B/\mathfrak{m}_y = \mathcal{O}_{X_y, x}$. Il faut donc voir que ce dernier anneau est $k(x)$. Comme on a supposé X_y fini, c'est un schéma affine de dimension 0 noethérien. L'anneau local $\mathcal{O}_{X_y, x}$ est donc de dimension 0 et réduit ce qui assure que l'unique idéal maximal est (0) donc que c'est un corps, le corps résiduel étant $k(x)$ c'est $k(x)$. La condition est donc bien suffisante.

Maintenant si f est non ramifié on a $k(x) = \mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X_y, x}$ pour tout $x \in X_y$. La dimension de la fibre est donc 0 et elle est réduite. \square

Exercice . (3.1)

Démonstration. C'est une application directe du corollaire 2.12. En effet, on a

$$\mathcal{O}_{X_s, x} = \mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X, x}/t \mathcal{O}_{X, x}$$

par hypothèse et l'anneau $\mathcal{O}_{X, x}$ est régulier. \square

Exercice . (3.2)

Démonstration. Le fait que le morphisme est quasi-fini assure que pour tout $x \in X$ qui n'est pas fermé il existe un point fermé dans $\overline{\{x\}}$ et donc comme la question est locale on peut se restreindre à $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$ affines.

Le résultat suit alors du diagramme suivant et du fait que la localisation est plate. Si x_1 n'est pas fermé, il existe x_2 dans sa fermeture, donc si \mathfrak{p}_1 est l'idéal associé à x_1 et \mathfrak{m}_1 celui associé à x_2 on a $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{m}_1$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,y} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x_2} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{X,x_1} \end{array}$$

et comme par hypothèse \mathcal{O}_{X,x_2} est plat sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ c'est le cas de ses localisés donc de \mathcal{O}_{X,x_2} qui est obtenu par localisation en \mathfrak{p}_1 . □

5 Coherent sheaves and Čech cohomology

5.1 Coherent sheaves on a scheme

Exercice . (1.1)

Démonstration. Soient $f: X \rightarrow Y$ une application entre deux schémas, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module et \mathcal{G} un \mathcal{O}_Y -module. On a, pour U ouvert de X ,

$$f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(U) \subset V}} f_*\mathcal{F}(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(U) \subset V}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

Comme $f(U) \subset V$ on a $U \subset f^{-1}(V)$ d'où l'application de restriction par définition d'un faisceau $\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. De plus à nouveau par définition d'un faisceau ses applications sont compatibles à la limite directe et donc induise une application canonique $\alpha: f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

D'autre part, pour V ouvert de Y ,

$$f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(f^{-1}(V)) \subset U}} \mathcal{G}(U).$$

Or $f(f^{-1}(V)) \subset V$ donc $\mathcal{G}(V)$ est un élément de la limite directe. Il suit qu'on a une application canonique $\mathcal{G}(V) \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}(V)$ qui consiste simplement à prendre la classe d'un élément dans la limite. On en déduit une application $\beta: \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$.

On peut étendre ces applications au cas de l'image inverse de \mathcal{O}_X -modules. On a $f^*f_*\mathcal{F} = f^{-1}f_*\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. D'où $\tilde{\alpha}: h \otimes t \mapsto t \cdot \beta(h) \in \mathcal{F}$. De la même manière on définit $\tilde{\alpha}: h \mapsto 1 \otimes \alpha(h)$.

Il reste à voir que ces applications induisent un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Soit $\varphi: f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$. Alors on obtient une application induite $\tilde{\varphi}: f_*f^*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$ et en composant à droite par $\tilde{\beta}$ on obtient une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$. Le diagramme est le suivant

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\beta}} f_*f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} f_*\mathcal{F}.$$

On obtient de la même manière une application inverse. On vérifie avec les formules qu'elles sont inverses l'une de l'autre. \square