

# Exercises Qing Liu

Séverin Philip

8 septembre 2018

## 1 Some topics in commutative algebra

### 1.1 Tensor products

**Exercise . (1.3)**

*Démonstration.* On a des applications canoniques

$$M \otimes N \rightarrow M \otimes N/N' \rightarrow M/M' \otimes N/N'.$$

On note  $\phi$  la composée qui est surjective. Par le corollaire 1.13 on sait que le noyau de la première flèche est  $id \otimes j = j_M$  où  $j$  est l'inclusion de  $N'$  dans  $N$  et le noyau de la deuxième  $i \otimes id = i_{N/N'}$  avec  $i$  l'inclusion de  $M'$  dans  $M$ . On a donc  $\text{Im } i_N + \text{Im } j_M \subset \text{Ker } \phi$ . Maintenant si  $z \in \text{Ker } \phi$ , la deuxième flèche est nulle donc l'image de  $z$  par la première est dans  $\text{Im } i_{N/N'}$ , c'est-à-dire une somme finie d'éléments de la forme  $x \otimes \bar{y}$  avec  $x \in M'$ . Il peut s'ajouter à cela une somme finie d'éléments du noyau de la première flèche. Dans tous les cas on a  $z \in \text{Im } i_N + \text{Im } j_M$ .

La deuxième partie découle directement, on a

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z})/(\text{Im } i + \text{Im } j).$$

De plus,  $\text{Im } i \simeq n\mathbb{Z}$  et  $\text{Im } j \simeq m\mathbb{Z}$  en tant que  $\mathbb{Z}$ -modules donc leur somme est  $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$ .  $\square$

### 1.2 Flatness

**Exercise . (2.4)**

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) On suppose que  $I \neq I^2$ . Alors on a une application injective (l'inclusion)  $I \rightarrow A$ . On tensorise avec  $A/I$  et on obtient

$$I \otimes A/I \rightarrow A \otimes A/I \simeq A/I.$$

Si  $x \in I \setminus I^2$ , on a  $x \otimes \bar{1}$  non nul dans  $I \otimes A/I$  mais son image dans  $A/I$  est nulle, l'application obtenue en tensorisant n'est pas injective,  $A/I$  n'est pas plat sur  $A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Par le lemme de Nakayama il existe  $z \in I$  tel que  $I = zI$ . Par suite,  $(z) = I$ . On a en particulier  $(z) = (z^2)$  d'où  $z = \lambda z^2$  avec  $\lambda \in A$ . On pose  $e = \lambda z$  et on a  $e^2 = e$ . Il reste à voir que  $(z) = (e)$ . Une inclusion est triviale, pour l'autre, on a  $z = \lambda z^2 = ez \in (e)$ . On a donc montré que  $I = eA$  avec  $e$  idempotent.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $f: N \rightarrow N'$  une application injective entre deux  $A$ -modules. On considère  $f \otimes id: N \otimes A/I \rightarrow N' \otimes A/I$ . Soit  $x \otimes \bar{y}$  un élément du noyau de cette application. Alors  $f(x) \otimes \bar{y} = 0$  donne que  $f(x) = \lambda \cdot d$  avec  $d \in N'$  et  $\lambda \in I$ . On a  $\lambda = ae$  avec  $a \in A$  par (iii). Alors,  $f(ex) = ae^2 \cdot d = f(x)$ , donc  $x = ex$  et  $x \otimes \bar{y} = 0$ .

(Ici je ne suis pas sûr que considérer un élément de la forme  $x \otimes y$  suffisse... Il faudrait prendre un élément général qui est une somme de ces trucs et alors je crois pas que l'argument marche?)

□

### Exercice . (2.5)

*Démonstration.* Si  $A$  est un corps tout  $A$ -module est libre donc plat sur  $A$ .

Sinon, il existe un idéal non nul propre  $I \subset A$  et par l'exercice précédent,  $A/I$  est plat sur  $A$  si et seulement si  $I = (e)$  pour un idempotent  $e$  de  $A$ . Comme  $A$  est supposé intègre il n'a pas d'idempotent et donc  $A/I$  n'est pas plat sur  $A$ .

□

## 2 General properties of Schemes

### 2.1 Ringed topological spaces

#### Exercice . (2.2)

*Démonstration.* Par définition la condition si  $s_x = t_x$  il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $s|_U = t|_U$  donc la condition est ouverte.

□

#### Exercice . (2.4)

*Démonstration.* Il faut montrer que la suite est exacte en  $\mathcal{F}(X)$ . L'injectivité de  $\mathcal{F}'(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  découle directement de la définition du noyau d'un morphisme de faisceaux. En effet, si on note  $f$  le morphisme entre faisceaux, on a  $\text{Ker } f(X) = (\text{Ker } f)(X)$ . Comme  $f$  est injective,  $\text{Ker}(f)$  est le faisceau nul donc  $(\text{Ker } f)(X) = \{0\}$ . On note  $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ . La deuxième

condition à prouver est que  $\text{Ker } g(X) = \text{Im } f(X)$  sachant que  $\text{Ker } g = \text{Im } f$ . On a  $\text{Ker } g(X) = (\text{Ker } g)(X) = (\text{Im } f)(X)$ . On a l'inclusion  $\text{Im } f(X) \subset (\text{Im } f)(X)$  donc  $\text{Im } f(X) \subset \text{Ker } g(X)$ . Il reste à voir l'inclusion inverse. Soit  $t \in \text{Ker } g(X)$ . On a  $t \in (\text{Im } f)(X)$  donc il existe un recouvrement par des ouverts  $U_i$  de  $X$  tels que  $t|_{U_i} = f(s_i)$  pour  $s_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ . Sur  $U_i \cap U_j$  on a alors

$$f(s_i|_{U_i \cap U_j}) = t|_{U_i \cap U_j} = f(s_j|_{U_i \cap U_j})$$

et comme  $f(U_i \cap U_j)$  est injective cela donne la condition de recollement des  $s_i$  en une section  $s \in \mathcal{F}'(X)$ . Comme les morphismes de faisceaux commutent aux opérations de restrictions on a  $f(X)(s)|_{U_i} = f(X)(s_i) = t|_{U_i}$  donc  $f(X)(s) = t$ .  $\square$

### Exercice . (2.9)

On traite le cas du support à un seul point fermé  $x \in X$ . Soit  $U$  un ouvert contenant  $x$ . On montre que l'application naturelle  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$  est un isomorphisme. Une remarque préliminaire est que comme  $\{x\}$  est fermé on a un recouvrement ouvert de  $U$  par tout voisinage ouvert de  $x$  et  $U \setminus \{x\}$ . De plus, l'hypothèse assure que  $\mathcal{F}(U \setminus \{x\}) = \{0\}$ .

Pour l'injectivité, soient  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  tels que  $s_x = t_x$ . Alors par définition il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tels que  $s|_V = t|_V$ . Il suit par la remarque que  $s$  et  $t$  coïncide sur un recouvrement ouvert de  $U$  donc sont égales.

Pour la surjectivité, soit  $s_x \in \mathcal{F}_x$ . Alors par définition  $s_x$  provient d'une section  $s \in \mathcal{F}(V)$  où  $V$  est un voisinage ouvert de  $x$ . Quitte à restreindre en prenant  $V' = U \cap V$  on peut considérer que  $V \subset U$ . Alors à nouveau par la remarque on peut recoller  $s$  et 0 en une section de  $U$  qui a pour germe  $s_x$ .

## 2.2 Schemes

### Exercice . (3.3)

*Démonstration.* a) Par définition de la topologie l'adhérence  $\overline{F}$  de  $F$  est de la forme  $V(I)$  pour un certain idéal  $I$ . Il est de plus clair que si  $\mathfrak{p} \in F$  alors  $\mathfrak{p} \in \overline{F}$  donc  $I \subset \mathfrak{p}$ . Pour  $I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in F} \mathfrak{p}$  on a  $\overline{F} \subset V(I)$  car alors,  $V(I)$  est un fermé contenant  $F$ . Pour l'inclusion réciproque, si  $V(J)$  est un fermé contenant  $F$  alors  $J \subset \mathfrak{p}$  pour tout  $\mathfrak{p} \in F$ . Donc  $J \subset I$  et  $V(J) \supset V(I)$ .

b) A nouveau  $\overline{\text{Im } f}$  est un fermé de la forme  $V(I)$  contenant  $\text{Im } f$ . On a

$$\text{Im } f = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{p}), \mathfrak{p} \in \text{Spec } B\}.$$

Par la première question il suit que  $\overline{\text{Im } f} = V(I)$  où  $I = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Im } f} \mathfrak{q}$ . Or

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\mathfrak{q} \in \text{Im } f} \mathfrak{q} &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B} \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \\
&= \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B} \mathfrak{p}\right) \\
&= \varphi^{-1}(\sqrt{0}) = \sqrt{\varphi^{-1}(0)}
\end{aligned}$$

Avec  $V(\sqrt{I}) = V(I)$  on a le résultat.  $\square$

**Exercice . (3.14)**

*Démonstration.* De tout recouvrement ouvert de  $X$  on peut extraire un sous-recouvrement fini par quasi-compacité. Par définition d'un schéma  $X$  admet un recouvrement ouvert par des ouverts affines, il suit qu'on peut extraire un recouvrement fini par des ouverts affines.  $\square$

**Exercice . (3.15)**

*Démonstration.* Par quasi-compacité de  $X$  on a un recouvrement de celui-ci par des ouverts affines  $U_1, \dots, U_n$ . On note  $U_i = \text{Spec } B_i$ . Le morphisme  $f$  définit des morphismes  $f_i: U_i \rightarrow \text{Spec } A$  qui proviennent de morphismes d'anneaux  $\rho_i: A \rightarrow B_i$  tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
& A = \mathcal{O}_X(X) & \\
\text{\scriptsize $id$} \nearrow & \downarrow & \\
A & \xrightarrow{\rho_i} & B_i.
\end{array}$$

Il suit que les morphismes  $\rho_i$  sont simplement donnés par les opérations de restriction du faisceau  $\mathcal{O}_X$ . De plus, comme les  $U_i$  sont en nombre fini on a

$$\overline{f(X)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{f_i(U_i)}.$$

Par un exercice précédent (3.3) on a  $\overline{f_i(U_i)} = V(\text{Ker } \rho_i)$ . Donc

$$\overline{f(X)} = \bigcup_{i=1}^n V(\text{Ker } \rho_i) = V\left(\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \rho_i\right).$$

Or par définition d'un faisceau l'intersection des noyaux des applications de restriction est nulle. Cela donne finalement  $\overline{f(X)} = V(\sqrt{0}) = \text{Spec } A$ .  $\square$

## 2.3 Reduced schemes and integral schemes

D'abord un exercice qui n'est pas dans le Qing Liu mais qui vaut le coup.

**Exercice .** Soit  $X$  un schéma. Montrer que  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$  et qu'il y a équivalence dans le cas où l'ensemble des composantes irréductibles de  $X$  est localement fini (par exemple si  $X$  est localement noethérien),

(i) Les composantes connexes de  $X$  sont irréductibles.

(ii) Le schéma  $X$  est union disjointe de ses composantes irréductibles.

(iii) Pour tout  $x \in X$  l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  a un unique idéal premier, son nilradical.

*Démonstration.* On suppose (i). Comme irréductible implique connexe on a avec (i) l'équivalence et  $X$  est toujours union disjointe de ses composantes connexes.

On suppose (ii). Soit  $x \in X$ . Il y a une bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles qui passent par  $x$  et celles de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ . Cela vient de l'immersion ouverte canonique  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  (Si je ne me trompe pas?). Par (ii) les composantes irréductibles de  $X$  sont disjointes donc une seule passe par  $x$ . Il suit que  $\mathcal{O}_{X,x}$  a un unique idéal premier ce qui est équivalent au fait que son nilradical est premier. Ceci se montre en utilisant le fait tout idéal premier contient un idéal premier minimal qui est conséquence du lemme de Zorn. On remarque par ailleurs qu'en remontant les arguments on a prouvé que (iii) implique (ii).

Maintenant, en supposant de plus que l'ensemble des composantes irréductibles de  $X$  est localement fini on montre d'abord que les composantes irréductibles de  $X$  sont ouvertes ce qui permettra de conclure. Soit  $x \in X$  et  $Z_1 \subset X$  la composante irréductible qui contient  $x$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  qui intersecte un nombre fini de composantes irréductibles  $Z_2, \dots, Z_n$  de  $X$ . Les composantes irréductibles de  $U$  sont les  $U_i = Z_i \cap U$ . Avec la condition (ii) elles sont disjointes dans  $U$ . On a donc

$$U_i = U \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j$$

et une union finie de fermés étant fermé,  $U_i$  est ouvert dans  $U$ . Comme  $U$  est ouvert dans  $X$  cela donne que  $U_1$  est un voisinage ouvert de  $x$  contenant  $x$  inclus dans  $Z_1$ . Il suit que  $Z_1$  est ouvert dans  $X$ .

Finalement, les composantes irréductibles étant ouvertes et fermés dans  $X$  elles en sont les composantes connexes ce qui donne  $(ii) \Rightarrow (i)$ .  $\square$

**Exercice .** (4.2)

*Démonstration.* Le morphisme canonique  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  est donné par le morphisme  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  pour un ouvert affine  $U$  de  $X$  contenant  $x$ . On note  $\mathcal{O}_X(U) = A$  et l' morphisme est celui de localisation en  $\mathfrak{p}$  idéal premier associé à  $x$ . Si  $y$  est un point de  $U$  qui se spécialise en  $x$ ,  $x \in \overline{\{y\}}$ , par définition si  $\mathfrak{q}$  est l'idéal premier associé à  $y$ , on a  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$  d'où  $\mathfrak{q}$  est un idéal premier du localisé  $A_{\mathfrak{p}}$ . Par suite  $y$  est dans l'image de  $\text{Spec } A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } A$ . Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de  $A_{\mathfrak{p}}$  et donc par localisation d'un idéal premier de  $A$  inclus dans  $\mathfrak{p}$  ce qui correspond à un point qui se spécialise en  $x$ . Comme le morphisme  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  est indépendant du choix de  $U$  (Pourquoi ?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert  $V$ , tu peux trouver un affine  $W$  dans  $U \cap V$ . Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les  $\mathcal{O}_X(X)$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$ ,  $\mathcal{O}_X(V)$ ,  $\mathcal{O}_X(W)$ , les flèches de restrictions et les flèches vers  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Ensuite tu appliques  $\text{Spec}$  et tu vois que tous les morphismes coïncident.

□

#### Exercice . (4.3)

*Démonstration.* On a une inclusion  $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$  qui induit un morphisme  $j: \text{Spec } K[T] \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K[T]$ . On montre que c'est une immersion ouverte. Si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } K[T]$ ,  $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ . L'image de  $j$  est  $\text{Spec } \mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$  qui est ouverte. En effet, si  $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$  alors  $t \in \mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p} = K[T]$  ce qui est impossible. Inversement, si  $t \notin \mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p}$  idéal premier de  $\mathcal{O}_K[T]$  alors par localisation en  $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$  ( $\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$  ?) on a  $\mathfrak{p}K[T]$  idéal premier qui vérifie  $\mathfrak{p}K[T] \cap \mathcal{O}_K[T] = \mathfrak{p}$ . Il reste à voir que  $j_x^\sharp$  est un isomorphisme en tout point  $x \in \text{Spec } K[T]$  ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec  $S = \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ . Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal  $(T)$  est le seul point de  $\text{Spec } K[T]$  qui se spécialise en  $(T, t)$ . (Je crois ?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles  $P$  de  $K[T]$  tels que  $(P) \cap \mathcal{O}_K[T] \subset (T, t)$ . En localisant tu as nécessairement  $T|P$  et donc  $P = T$ . Enfin je crois que c'est bon.

□

#### Exercice . (4.6)

*Démonstration.* a) On montre d'abord  $(iii) \Rightarrow (ii)$ . Si  $e$  est un idempotent différent de 0 ou 1 de  $\mathcal{O}_X(X)$  l'ensemble  $V(e)$  de  $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$  est fermé et ouvert dans celui-ci. Il est fermé par définition et l'égalité  $e(1-e) = 0$  assure

que si  $\mathfrak{p}$  est premier,  $e$  ou  $1-e$  est dans  $\mathfrak{p}$  mais pas les deux. Il suit que  $V(e)$  et  $V(1-e)$  forment une partition de  $\text{Spec } \mathcal{O}_X(X)$  par des fermés. En regardant les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$  la même idée permet de démontrer  $(i) \Rightarrow (ii)$ .

Pour  $(ii) \Rightarrow (i)$  si  $X$  n'est pas connexe il existe deux ouverts  $U_1, U_2$  qui forment une partition de l'espace. On peut donc par définition d'un faisceau relevé  $1 \in \mathcal{O}_X(U_1)$  en un élément idempotent différent de 0, 1 en recollant avec  $0 \in \mathcal{O}_X(U_1)$ . La même idée permet de démontrer  $(ii) \Rightarrow (iii)$ .

b) L'argument est celui pour montrer  $(iii) \Rightarrow (i)$ . Un idempotent  $e$  distinct de 0, 1 n'est pas inversible donc dans l'idéal maximal de l'anneau. De même  $1-e$  est un tel idempotent donc doit aussi être dans l'idéal maximal ce qui est impossible car alors on aurait 1 dans cet idéal.

c) C'est l'argument utilisé pour montrer  $(ii) \Rightarrow (i)$ . Il suffit de vérifier que les idempotents obtenus ainsi en partant des composantes connexes sont indécomposables, ce qui est clair.

□

#### Exercice . (4.8)

*Démonstration.* Soit  $x$  un point de  $X$  et  $(U_i)$  les ouverts affines qui recouvrent  $X$  (en nombre fini). On suppose que  $x \in U_1$  quitte à renuméroté les ouverts. Le point  $x$  correspond à un idéal premier  $\mathfrak{p}$  contenu dans un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}_X(U_1)$  qui lui même correspond à un point fermé de  $U_1$ . On a donc l'existence de  $x_1 \in U_1$  fermé dans  $U_1$  et  $x_1 \in \overline{\{x\}}$  la fermeture étant prise dans  $X$ . Si  $x_1$  est fermé dans tous les autres  $U_i$  qui le contiennent il est fermé dans  $X$ . Sinon il existe un  $i \in \{2, \dots, n\}$  tel que  $x_1 \in U_i$  et  $x_1$  n'est pas fermé dans  $U_i$ . On peut à nouveau supposer que  $i = 2$  et par le même argument qu'avant obtenir  $x_2 \in U_2$  fermé dans  $U_2$  et  $x_2 \notin U_1$ . En répétant le procédé au plus  $n$  fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines  $U_j$  qui le contiennent.

□

#### Exercice . (4.10)

*Démonstration.* Comme  $f$  est quasi-compact et  $\text{Spec } A$  est un schéma affine on a que  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  où les  $U_i$  sont des ouverts affines, on note  $U_i = \text{Spec } B_i$ . On a des morphismes  $f|_{U_i}: \text{Spec } B_i \rightarrow \text{Spec } A$  induit par des morphismes d'anneaux  $f_i: A \rightarrow B_i$  tels que pour tout  $i$  le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_X(X) \\ & \searrow f_i & \downarrow \\ & & B_i \end{array}$$

la flèche verticale étant l'opération de restriction du faisceau  $\mathcal{O}_X$ . Il suit par les propriétés de faisceaux (comme les  $U_i$  forment un recouvrement) que si pour  $x \in I$  il existe des entiers positifs  $n_i$  tels que  $f_i(x)^{n_i} = 0$  alors  $f(x)^N = 0$  où  $N$  est le maximum des  $n_i$  (qui existe car ils sont en nombres finis). On est donc restreint à démontrer le résultat dans le cas affine. Dans ce cas,  $f$  est induit par  $f^*: A \rightarrow B$  où  $X = \text{Spec } B$ . On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f(\text{Spec } B) \subset V(I) &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, f(\mathfrak{p}) \in V(I) \\ &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, I \subset f^{*-1}(\mathfrak{p}) \\ &\iff \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } B, f^*(I) \subset \mathfrak{p} \\ &\iff f^*(I) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

□

**Exercice . (4.11)**

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) On montre que  $f^\#(U)$  est injectif pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ . Soit  $g \in \mathcal{O}_Y(U)$  tel que  $f^\#(U)(g) = 0$ . Pour tout  $y = f(x) \in U \cap f(X)$  on a

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et  $f_x^\#(g) = 0 \in \mathfrak{m}_x$ . D'où  $g \in \mathfrak{m}_{f(x)}$ . Or l'ensemble  $\{y \in U, g \in \mathfrak{m}_y\}$  est un fermé de  $U$ , celui-ci contient  $f(X)$  c'est donc  $U$  tout entier. Il suit que  $g \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_X(U)} \mathfrak{p}$  est nilpotent.

Comme  $Y$  est réduit  $g = 0$ . Le résultat est vrai sans l'hypothèse  $U$  affine en prenant un recouvrement par des ouverts affine.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Par la proposition 4.18 le morphisme  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  est injectif pour tout  $x \in U$  donc en particulier si  $V \subset U$  est un ouvert,  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  est injectif. En effet le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de  $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  par (ii).



(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Soit  $V$  un ouvert de  $Y$  contenant  $f(\xi_X)$ . Le diagramme suivant commute et par (iii) les flèches sont injectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,f(\xi_X)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,\xi_X} \end{array}$$

Comme  $\xi_X$  est le point générique de  $X$  qui est un schéma entier (integral ?) son idéal maximal associé est  $(0)$ . Par injectivité et le fait que  $f_{\xi_X}^\#$  est local l'idéal maximal de  $f(\xi_X)$  est donc lui même  $(0)$ . Il suit que  $f(\xi_X) = \xi_Y$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (v) Trivial.

(v)  $\Rightarrow$  (i) Comme  $Y$  est un schéma entier  $\overline{\{\xi_Y\}} = Y$ .

□

### 3 Morphisms and base change

#### 3.1 The technique of base change

**Proposition 3.1.** 1.4 *Démonstration du point d.*

*Démonstration.* On considère  $U, V$  des sous-schémas ouverts de  $X$  et  $Y$ . Il faut vérifier que  $i \times j$  induit un isomorphisme de  $U \times_S V$  dans  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ . Soit  $Z$  un schéma et  $f, g$  des morphismes  $Z \rightarrow U, Z \rightarrow V$ . En composant avec les injections de  $U, V$  dans  $X$  et  $Y$  on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow^{j \circ g} & & & \\ & & X \times_S Y & \longrightarrow & Y \\ & \searrow_{i \circ f} & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longrightarrow & S \end{array}$$

Il suit que la flèche du milieu se factorise par  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ . Comme le morphisme  $i \times j$  est l'unique morphisme de  $U \times_S V$  dans  $X \times_S Y$  faisant commuter les diagrammes et se factorisant par  $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$  c'est un isomorphisme  $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ . □

**Exercice .** (1.7)

*Démonstration.* On suppose  $X, Y$  et  $S$  affines, c'est-à-dire  $X = \text{Spec } M$ ,  $Y = \text{Spec } N$  et  $S = \text{Spec } R$ . Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note  $f: R \rightarrow M$ ,  $g: R \rightarrow N$ . Soit  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in X \times Y$  tels que  $\mathfrak{p} \in X_s$ ,  $\mathfrak{q} \in Y_s$  pour un point  $s \in S$ . On a donc  $f^{-1}(\mathfrak{p}) = s$  d'où les morphismes

$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour  $\mathfrak{q}$  et  $N$ . On a donc des morphismes  $M \rightarrow k(\mathfrak{p})$  et  $N \rightarrow k(\mathfrak{q})$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}) & \longleftarrow & N \\ & \nwarrow \text{dotted} & \uparrow \\ M \otimes_R N & \longleftarrow & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ M & \longleftarrow & R \end{array}$$

et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

$$\text{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \rightarrow X \times_S Y.$$

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si  $I$  est un idéal premier de  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$  alors  $\varphi^{-1}(I)$  est l'idéal  $\mathfrak{p}$  de  $M$  où  $\varphi$  est l'application  $M \rightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Comme  $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$  on a une inclusion. Maintenant, si  $m \in M \setminus \mathfrak{p}$  est tel que  $\varphi(m) \in I$  alors comme  $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$  qui est inversible dans  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$  ce qui est impossible car alors  $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Donc  $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$  et ce raisonnement appliqué à  $N$  et  $\mathfrak{q}$  assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal  $I$  de  $M \otimes_R N$  tel que  $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$  et  $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$  où  $i, j$  sont les applications  $M \rightarrow M \otimes_R N$ ,  $N \rightarrow M \otimes_R N$  est

tel que  $M \otimes_R N \rightarrow k(I)$  se factorise par  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . En effet,  $\mathfrak{p} \otimes 1$  est donc dans  $I$  et est envoyé sur 0 dans  $k(I)$  donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \rightarrow M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \rightarrow k(I).$$

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à  $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ . Il suit donc une factorisation de  $k(I) \rightarrow X \times_S Y$  en

$$k(I) \longrightarrow \mathrm{Spec} (k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})) \longrightarrow X \times_S Y.$$

□

**Exercice . (1.8)**

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'exercice précédent. Soit  $y \in Y$ , il existe un  $s \in S$  tel que  $y \in Y_s$ . Par surjectivité de  $X \rightarrow S$  la fibre  $X_s$  au dessus de  $s$  est non vide donc contient un point  $x \in X$ . Par l'exercice 1.7 l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y, p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}$$

est homéomorphe à  $\mathrm{Spec} (k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}))$  qui est non vide donc contient au moins un point. Le morphisme  $q: X \times_S Y$  est donc surjectif. □

**Exercice . (1.10)**

*Démonstration.* Par la propriété universelle du produit fibré en tant qu'ensembles les applications  $p: X \times_S Y \rightarrow X$  et  $q: X \times_S Y \rightarrow Y$  donnent l'existence d'une unique application continue  $f: |X \times_S Y| \rightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$ . Cette application est surjective par l'exercice 1.7.

On considère le produit tensoriel  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . On a

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{C}(X)/(X + i)(X - i)$$

et ce dernier anneau est isomorphe à  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  (Spécifier l'isomorphisme). Comme il n'y a qu'un point dans  $\mathrm{Spec} \mathbb{C}$  le produit fibré des deux ensembles  $|\mathrm{Spec} \mathbb{C}|$  sur  $|\mathrm{Spec} \mathbb{R}|$  ne contient qu'un seul point. Par contre  $\mathrm{Spec} (\mathbb{C} \times \mathbb{C})$  contient deux idéaux premiers  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . L'application  $f$  est donc surjective mais pas injective ces deux points du produit fibré de schémas ayant même image dans le produit fibré d'ensembles. □

### 3.2 Applications to algebraic varieties

#### Exercice . (2.4)

*Démonstration.* On va considérer le cas où  $S = \text{Spec } k$  pour un corps  $k$ . Comme  $Y$  est de type finie sur  $k$ , pour  $U$  un ouvert affine de  $Y$ ,  $\mathcal{O}_Y(U)$  est une  $k$ -algèbre de type finie.

Pour un ouvert affine  $V$  de  $X$  contenant  $x$  on a un morphisme canonique  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow V$  provenant d'un morphisme  $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ . On a  $f_x^\#(U): \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$ . Or  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}}(f_x^{-1}(U))$  correspond à une localisation de  $\mathcal{O}_{X,x}$  et comme  $\mathcal{O}_Y(U)$  est une  $k$ -algèbre de type finie, l'image de  $f_x$  qui est un  $k$ -morphisme est déterminé par l'image des générateurs de  $\mathcal{O}_Y(U)$  sur  $k$ . Soient  $y_1, \dots, y_n$  ces générateurs et  $\frac{f_i}{g_i}$  leurs images. Soit  $g$  le produit des  $g_i$ ,  $D(g)$  est un ouvert affine principal  $W$  contenant  $x$  de  $V$  et l'on a  $\frac{f_i}{g_i} \in \mathcal{O}_X(W)$ . On peut donc définir le morphisme  $f_U$  de  $U$  dans  $V$  tel que  $f_U \circ i_x = f_x$ . On peut définir des morphismes  $f_U$  de cette façon pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$  qui se recolle par construction et obtenir le morphisme  $f$  souhaité.  $\square$

### 3.3 Some global properties of morphisms

Une preuve plus détaillée du fait que les morphismes de type finis se voient sur un recouvrement par des ouverts affines.

**Lemme 3.2.** *Soient  $X$  un schéma et  $U, V$  deux ouverts affines de  $X$  tels que  $U \cap V$  est non vide. Alors,  $U \cap V = \bigcup U_a$  où les  $U_a$  sont des ouverts affines principaux de  $U$  et  $V$ .*

*Démonstration.* Pour  $f \in \mathcal{O}_X(X)$  on note  $X_f = \{x \in X, f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ . Il est clair que pour  $U$  ouvert de  $X$ ,  $U \cap X_f = U_{f|_U}$ . En particulier si  $U = \text{Spec } A$  est affine on a

$$x = \mathfrak{p} \in D(f|_U) \iff f|_U \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \iff x \in U, f_x \notin \mathfrak{m}_x \iff x \in X_f \cap U.$$

Par définition  $U \cap V$  est un ouvert de  $U$  donc est union des  $D(f_i)$ , ouverts affines principaux de  $U$ . Les  $D(f_i)$  sont donc des ouverts de  $V$  et on a  $D(f_i) = \bigcup D(g_{ij})$  ouverts affines principaux de  $V$ . Par ce qui précède,  $D(f_i) \cap D(g_{ij})$  est un ouvert affine principal de  $D(f_i)$  donc s'écrit  $D(\frac{s_{ij}}{f_i^k})$ ,  $\frac{s_{ij}}{f_i^k} \in \mathcal{O}_X(U)_{f_i}$ . Il reste à voir que c'est bien un ouvert affine principal de  $U$ , donné par  $D(s_{ij}f_i)$ . En effet,  $D(s_{ij}f_i)$  est inclus dans  $D(f_i)$  par définition et si  $\frac{s_{ij}}{f_i^k} \in \mathfrak{p}$  pour un idéal premier du localisé alors  $s_{ij} \in \mathfrak{p}$  dans  $\mathcal{O}_X(U)$ .  $\square$

**Proposition 3.3.** Soient  $X, Y$  deux schémas et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. On suppose qu'il existe un recouvrement de  $Y$  par des ouverts affines  $V_i = \text{Spec } B_i$  tels que  $f^{-1}(V_i) = \bigcup_j U_{ij}$  ouverts affines  $U_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$  et  $A_{ij}$  est une  $B_i$  algèbre de type fini. Alors  $f$  est localement de type fini. C'est-à-dire pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ ,  $\mathcal{O}_X(U)$  est une  $\mathcal{O}_Y(V)$  algèbre de type fini.

*Démonstration.* Soit  $V$  un ouvert affine de  $Y$ . On a  $V \cap V_i = \bigcup V_{ik}$  ouverts affines principaux de  $V$ . De la même façon on a les égalités

$$f^{-1}(V_{ik}) = \bigcup U_{ij} \cap f^{-1}(V_{ik}) = \bigcup U_{ijk}$$

où les  $U_{ijk}$  sont des ouverts affines principaux de  $U_{ij}$ . Il suit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\text{loc.}} & \mathcal{O}_Y(V_{ik}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(\bigcup U_{ijk}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U_{ijk}). \\ & & \uparrow & & & \nearrow \text{loc.} & \\ & & \mathcal{O}_Y(V_i) & \xrightarrow{\text{type fini}} & \mathcal{O}_X(U_{ij}) & & \end{array}$$

L'anneau  $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$  est donc une  $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$  algèbre de type fini et enfin une  $B$ -algèbre de type fini.

Soit maintenant  $U \subset f^{-1}(V)$  un ouvert affine,  $U = \text{Spec } A$ . On a, par le lemme,  $U = \bigcup U_\alpha$ ,  $U_\alpha$  ouvert affine principal de  $U$  et  $U_{ijk}$ . Les  $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$  sont par localisations en un élément des  $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$  algèbre de type fini, donc des  $B$ -algèbres de type fini. Cela veut dire que  $A_{a_\alpha}$  est une  $B$ -algèbre de type fini où  $U_\alpha = D(a_\alpha)$ ,  $a_\alpha \in A$ . Comme la réunion des  $U_\alpha$  recouvre  $A$ , on a une relation  $\sum a_\alpha c_\alpha = 1$  dans  $A$ . En particulier on sait que les  $a_\alpha$  sont en nombre fini, on note  $a_1, \dots, a_r$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé soit  $M = Nr$  alors on a l'égalité

$$\left( \sum_{i=1}^r a_i c_i \right)^M = 1$$

et les termes du membres de gauches sont des monômes homogènes de degré  $M$  en les  $a_i$ . Comme  $M = Nr$  l'un au moins des  $a_i$  est à une puissance supérieur à  $N$  dans chacun de ces termes. Il suit que l'on peut factoriser et l'on obtient

$$\sum_{i=1}^r a_i^N c_{i,N} = 1$$

où les  $c_{i,N}$  sont des polynômes en les  $a_i$  et les  $c_i$ .

Enfin, comme les  $A_{a_i}$  sont engendrés par un nombre fini d'éléments sur  $B$  on peut choisir des éléments de  $A$ , on les note  $x_{i,k}$ , tel que  $A_{a_i} = B[x_{i,k}, 1/a_i]$ . Soit  $C$  la sous- $B$ -algèbre de  $A$  engendré par les  $x_{i,k}$ . Pour tout élément  $a$  de  $A$  il existe un entier  $N$  tel que  $aa_i^N$  soit dans  $C$ . On a de plus

$$a = \sum_{i=1}^r aa_i^N c_{i,N}$$

donc  $a \in C[a_i, c_i]$  qui est une  $B$ -algèbre de type fini.  $\square$

On considère ici un schéma  $X$  de type fini sur un corps  $k$  c'est-à-dire un schéma  $X$  avec un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } k$  appelé morphisme structural qui est de type fini.

**Lemme 3.4.** *Un point  $x \in X$  est fermé si et seulement si le degré de l'extension de  $\kappa(x)$  sur  $k$  du corps résiduel de  $x$  est fini.*

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \kappa(x) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X & \xrightarrow{\text{type fini}} & \text{Spec } k \end{array}$$

Si  $x$  est un point fermé la flèche  $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$  est une immersion fermée donc un morphisme fini. La composé est donc de type fini ce qui donne  $\kappa(x)$  comme  $k$ -algèbre de type fini donc une extension finie de  $k$  par le nullstellensatz.

Inversement, si  $\kappa(x)$  est une extension finie de  $k$  le morphisme  $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$  est fini et son image est donc fermée dans  $X$ . En effet, par hypothèse si un ouvert affine  $V$  de  $X$  contient  $x$ ,  $\kappa(x)$  est finie sur  $k$  donc sur  $\mathcal{O}_X(V)$ .

$\square$

**Lemme 3.5.** *Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de  $k$ -schémas de type fini. Si  $x \in X$  est un point fermé alors  $f(x) \in Y$  est fermé. De plus,  $\kappa(f(x))$  est une sous-extension de  $\kappa(x)$  sur  $k$  pour tout  $x \in X$ .*

*Démonstration.* On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \kappa(x) & & \text{Spec } \kappa(y) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

Les corps  $\kappa(x)$  et  $\kappa(y)$  sont des extensions de  $k$  en composant les morphismes canoniques avec le morphisme structurel.

Le morphisme composé des morphismes  $f$  et  $\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$  d'un point  $x$  de  $X$  donne au niveau des faisceaux un morphisme

$$g^\sharp: \mathcal{O}_Y \longrightarrow g_* \mathcal{O}_{\kappa(x)}$$

qui induit un morphisme d'anneaux locaux

$$g_{f(x)}^\sharp: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \kappa(x).$$

Comme  $\kappa(x)$  est un corps son idéal maximal est l'idéal  $(0)$  et l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_{f(x)}$  de  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$  est dans le noyau de  $g_{f(x)}^\sharp$  donc celui-ci induit un morphisme de corps

$$\kappa(y) \simeq \mathcal{O}_{Y,(f(x))} / \mathfrak{m}_{f(x)} \longrightarrow \kappa(x).$$

□

### Exercice . (3.1)

*Démonstration.* Par hypothèse les morphismes  $f_i: f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$  sont des immersions fermés et se recollent. Comme  $f(X)$  est fermé il suit que  $f$  est une immersion fermée topologique. Il reste à voir que les applications locales sur les faisceaux sont surjectives. Or c'est un problème local et on peut donc se restreindre à  $Y_i$  où le résultat vient à nouveau de l'hypothèse sur les  $f_i$ . □

### Exercice . (3.2)

*Démonstration.* (iii)  $\Rightarrow$  (ii) Tout morphisme de  $X$  dans un schéma  $Y$  est séparé, c'est en particulier le cas du morphisme vers  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  qui est un schéma affine.

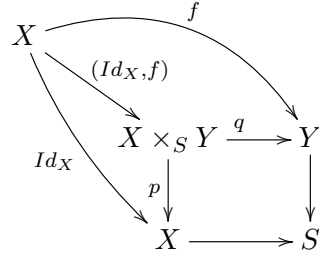
(ii)  $\Rightarrow$  (i) La composition de morphismes séparés est séparé et tout morphisme entre schéma affines est séparé. Par hypothèse il existe  $f: X \rightarrow \text{Spec } A$  séparé et on a  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  séparé, donc  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  est séparé.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Je n'ai pas réussi mais je pense qu'il faut voir qu'il y a un lien entre le produit fibré sur  $\mathbb{Z}$  et sur un schéma  $Y$  et obtenir la diagonale de l'un comme image réciproque de la diagonale de l'autre.

□

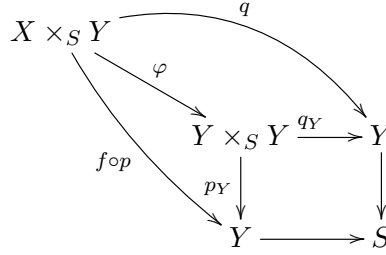
### Exercice . (3.10)

*Démonstration.* On a un diagramme commutatif



Le triangle de gauche est commutatif donc  $p \circ (Id_X, f) = Id_X$ .

On a un autre diagramme commutatif



On vérifie que  $\Gamma_f$  l'image de  $(Id_X, f)$  est  $\varphi^{-1}(\Delta_Y)$ . Si  $x \in X$ , l'élément  $(Id_X, f)(x)$  est déterminé uniquement (Est-ce vrai ??) par ces deux égalités

$$p((Id_X, f)(x)) = x;$$

$$q((Id_X, f)(x)) = f(x).$$

Or si  $x \in \varphi^{-1}(\Delta_Y)$ , on a  $p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x))$  car  $\varphi(x) \in \Delta_Y$ . D'où

$$f \circ p(x) = p_Y(\varphi(x)) = q_Y(\varphi(x)) = q(x).$$

Donc  $x = (Id_X, f)(p(x))$  par la caractérisation précédente. La réciproque est claire en remontant les égalités.  $\square$

## 4 Some local properties

### 4.1 Normal schemes

**Exercise .** (1.4)



*Démonstration.* Si  $X$  est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit  $x \in X$  un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé  $y$  dans  $\overline{\{x\}}$ . Soit  $V$  un ouvert affine contenant  $y$ , alors si  $x \notin V$  on aurait  $x \in X \setminus V$  qui est fermé donc en particulier  $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$  et donc  $y \in X \setminus V$  ce qui est une contradiction. Il suit que  $x \in V$  et que l'on obtient  $\mathcal{O}_{X,x}$  par localisation de  $\mathcal{O}_{X,y}$ . Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si  $\mathcal{O}_{X,y}$  l'est ce qui prouve l'implication.  $\square$

### Exercice . (1.9)

*Démonstration.* On considère  $A$  un anneau de Dedekind et  $X = \text{Spec } A$ . Soit  $x_0 \in \text{Spec } A$  un point fermé et  $U = X \setminus \{x_0\}$  un ouvert. On note  $\mathfrak{m}_0$  l'idéal associé à  $x_0$  et  $t$  un générateur de  $\mathfrak{m}_0$  dans  $A_{\mathfrak{m}_0}$ . L'idéal  $(t)$  se décompose en produit d'idéaux premiers car  $A$  est un anneau de Dedekind donc

$$(t) = \mathfrak{m}_0 \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^{a_i}$$

et  $V(t) = \{x_0, \dots, x_n\}$  les points  $x_i$  étant ceux des idéaux  $\mathfrak{m}_i$ . On note  $t_i$  un générateur de  $\mathfrak{m}_i$  dans  $A_{\mathfrak{m}_i}$ . On peut choisir  $t_i$  tel que  $t_i \notin \mathfrak{m}_0$ . En effet, si  $\mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{m}_i^2 \subset \mathfrak{m}_0$  on aurait  $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_0$  et donc égalité par maximalité. On a  $t = ut_i^{a_i}$  dans  $A_{\mathfrak{m}_i}$  où  $u$  est inversible donc  $t \cdot t_i^{-a_i} = u$  et par suite  $f = t^{-1}t_i^{a_i} \prod_{i \neq j} t_j^{a_j} = u' \in A_{\mathfrak{m}_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}$ . Il existe donc des ouverts  $U_i$  contenant  $x_i$  tels que  $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$  et  $U_i$  ne contient pas  $x_0$ . Il est de plus clair que  $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus V(t))$ . Il suit que  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  car les  $U_i$  et  $X \setminus V(t)$  forment un recouvrement ouvert de  $U$ .  $\square$

## 4.2 Regular schemes

### Définition 4.1. (2.1)

*Démonstration.* On montre que  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  est le produit tensoriel de  $\mathcal{O}_{X,x}$  modules  $\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ . Soit  $\phi: \mathfrak{m}_x \times k(x) \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  donné par  $\phi(\bar{a}, b) = \overline{ab}$  pour  $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$ . L'application  $\phi$  est  $\mathcal{O}_{X,x}$  bilinéaire. On considère  $f: \mathfrak{m}_x \times k(x) \rightarrow Z$  une application bilinéaire. Soient  $a, b \in \mathcal{O}_{X,x} \times \mathfrak{m}_x$ . Comme  $f$  est  $\mathcal{O}_{X,x}$  bilinéaire on a

$$f(\bar{a}, b) = f(a \cdot \bar{1}, b) = af(\bar{1}, b) = f(\bar{1}, ab).$$

Il reste à voir que l'application  $\mathcal{O}_{X,x}$  linéaire  $\tilde{f}: b \mapsto f(\bar{1}, b)$  se factorise par le quotient  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Si  $b \in \mathfrak{m}_x^2$  par linéarité on peut supposer  $b = cd$  avec

$c, d \in \mathfrak{m}_x$  et on a  $\tilde{f}(b) = f(\bar{1}, cd) = f(\bar{c}, d) = f(\bar{0}, d) = 0$ . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} k(x) \times \mathfrak{m}_x & \xrightarrow{f} & Z \\ \phi \downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 & & \end{array}$$

ce qui donne le résultat.

L'application  $f_x^\sharp$  est locale donc  $f_x^{\sharp-1}(\mathfrak{m}_x^2) = \mathfrak{m}_y^2$  d'où  $f_{x|\mathfrak{m}_y}^\sharp$  induit

$$\tilde{f}_x^\sharp : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Soit  $g \in T_{X,x}$  on a  $g \circ \tilde{f}_x^\sharp : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow k(x)$ . Si  $k(y) = k(x)$  on a donc une application canonique

$$\begin{array}{ccc} T_{X,x} & \longrightarrow & T_{Y,y} \\ g & \longmapsto & g \circ \tilde{f}_x^\sharp. \end{array}$$

Dans le cas général  $k(y) \subset k(x)$  et on effectue une extension des scalaires à droite.  $\square$

### Exercise . (2.1)

*Démonstration.* On  $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_x)$  engendre  $\mathfrak{m}_x$  si et seulement s'il existe des éléments  $a_1, \dots, a_n$  de  $\mathfrak{m}_y$  tels que  $f_x^\sharp(a_i)$  engendre  $\mathfrak{m}_x$ . Il suit que les  $f_x^\sharp(a_i)$  forment une partie génératrice de  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  et donc une forme linéaire  $g \in T_{X,x}$  est entièrement déterminé par ses valeurs en ces points d'où l'injectivité de  $T_{f,x}$ . Réciproquement, si  $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$  n'engendre pas  $\mathfrak{m}_x$  alors si  $b_1, \dots, b_n$  engendre  $\mathfrak{m}_x$  et est minimale alors c'est une base de  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  en tant que  $k(x)$ -espace vectoriel. Supposons que  $b_n$  ne soit pas dans l'image  $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_y)$  alors deux formes linéaires qui coïncident sur  $b_1, \dots, b_{n-1}$  et diffèrent sur  $b_n$  auront même image par  $T_{f,x}$ .

(Pas réussi à démontrer la deuxième assertion dans le cas de type finie)  $\square$

### Exercise . (2.2)

*Démonstration.* La variété algébrique affine  $\text{Spec } k[x, y, z]/(x^2 - yz)$  est de dimension 2 car il y a une relation algébrique liant  $x, y, z$  et donc le degré de transcendance de l'anneau sur  $k$  est 2. L'anneau local en  $o = (0, 0, 0)$  est aussi de dimension 2 l'idéal associé étant maximal. L'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,o}$  est engendré par  $x, y, z$  et la dimension sur  $k(o) = k$  de  $(x, y, z)/(x, y, z)^2$

est 3 donc la variété n'est pas régulière en  $o$ . En effet, la relation  $x^2 = yz$  ne donne pas d'information modulo  $(x, y, z)^2$  et donc  $(x, y, z)/(x, y, z)^2$  est engendré par  $x, y, z$ .

Le critère Jacobien donne que l'anneau est régulier en tout point de  $X(k)$  sauf  $(0, 0, 0)$ , la matrice étant

$$\begin{bmatrix} 2x & -z & -y \end{bmatrix}$$

donc de rang 1 partout sauf au point 0.

(Pour la normalité il n'y a pas de critère ? )

L'anneau  $A = k[x, y, z]/(x^2 - yz)$  est normal. Soit  $\varphi: k[x, y, z] \rightarrow k[S, T]$  l'application défini par  $\varphi(x) = ST$ ,  $\varphi(y) = S^2$  et  $\varphi(z) = T^2$ . Alors le noyau de  $\varphi$  est  $(x^2 - yz)$ . L'inclusion  $(x^2 - yz) \subset \text{Ker } \varphi$  est par définition. Pour l'inclusion réciproque soit  $f$  dans le noyau, on effectue la division de  $f$  par  $(x^2 - yz)$  dans l'anneau  $k[y, z][x]$ . On obtient  $f = g(x^2 - yz) + r$  où  $\deg_x r \leq 1$ . On a  $r = a(y, z)x + b(y, z)$  et de plus,  $\varphi(r) = 0$ . Il suit  $a(S^2, T^2)ST + b(S^2, T^2) = 0$  ce qui est possible seulement si  $a = b = 0$  par considération des degrés en  $S$  ou  $T$ . On a obtenu que  $A \simeq k[S^2, T^2, ST]$ . En particulier c'est un sous-anneau de  $k[S, T]$  est l'extension est entière car  $T$  est racine de  $X^2 - T^2$  et de même pour  $S$ . On en déduit à nouveau que  $A$  est de dimension 2. Finalement comme  $k[S, T]$  est factoriel il est normal. Donc si  $f \in \text{Frac}(k[S^2, T^2, ST])$  est entier sur celui-ci on a  $f \in k[S, T]$  donc pour  $f = \frac{P}{Q}$  on obtient

$$P = R(S, T)Q.$$

Il reste à remarquer qu'un élément  $h = \sum a_{ij}S^iT^j \in k[S, T]$  appartient à  $k[S^2, T^2, ST]$  si et seulement si  $a_{ij} = 0$  pour  $i - j$  impair. On en déduit une contradiction si  $R$  n'appartient pas à  $k[S^2, T^2, ST]$ .  $\square$

### Exercice . (2.3)

*Démonstration.* a) En utilisant le critère Jacobien on obtient que tous les points sont lisses (donc réguliers) sauf peut être  $(0, 0)$  mais celui-ci n'est pas sur la variété.

b) La fibre spéciale est donné par le produit tensoriel

$$\mathcal{O}_K[x, y]/(x^2 + y^3 + t^n) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K = k[x, y]/(x^2 + y^3).$$

Le schéma affine associé est réduit si et seulement si  $(x^2 + y^3)$  est radical. Comme  $k[x, y]$  est factoriel il suffit de montrer que  $x^2 + y^3$  est premier. Dans  $k[y][x]$  si on a

$$(a(y)x + b(y))(c(y)x + d(y)) = x^2 + y^3$$

alors  $a(y)c(y) = 1$ ,  $a(y)d(y) + b(y)c(y) = 0$  et  $b(y)d(y) = y^3$ . La première égalité donne  $a(y) = \lambda \in k^*$  et  $c(y) = \lambda^{-1}$ . Il suit par la deuxième que les degrés en  $y$  de  $b$  et  $d$  sont égaux et donc la troisième égalité ne peut avoir lieu. L'anneau est réduit et le lemme 1.18 permet de conclure à la normalité.

(Il faut encore montrer la platitude des  $\mathcal{O}_X(U)$  et normalité de  $X_K$ )

c) L'anneau  $A_{\mathfrak{m}}$  est de dimension 2 où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal engendré par  $(x, y, t)$ . On a  $\mathfrak{m}^2 = (t^2, tx, ty, x^2, xy, y^2)$  et donc

$$x^2 + y^3 + t^n = 0 \Rightarrow t^n = 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

Il suit que si  $n = 1$  on a  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  engendré par  $(x, y)$  donc le point est régulier. Si  $n > 1$ , il n'y a pas de nouvelles relations et le point est singulier.

(J'aimerais bien une interprétation de ce qu'il se passe quand  $n > 1$  c'est vraiment bizarre ce truc)  $\square$

### 4.3 Flat morphisms and smooth morphisms

**Lemme 4.2.** (3.20)

*Démonstration.* (Je pense avoir compris de loin, mais j'aimerais bien une démonstration claire du fait que  $\mathcal{O}_{X_y, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes k(y)$ , c'est-à-dire que l'anneau local de la fibre est simplement pris en tensorisant avec  $k(y)$ .)

On se place dans le cas où  $Y = \text{Spec } B$  est affine.

Tout d'abord on a, comme dans la démonstration du lemme 3.7  $\mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes B/\mathfrak{m}_y = \mathcal{O}_{X_y, x}$ . Il faut donc voir que ce dernier anneau est  $k(x)$ . Comme on a supposé  $X_y$  fini, c'est un schéma affine de dimension 0 noethérien. L'anneau local  $\mathcal{O}_{X_y, x}$  est donc de dimension 0 et réduit ce qui assure que l'unique idéal maximal est  $(0)$  donc que c'est un corps, le corps résiduel étant  $k(x)$  c'est  $k(x)$ . La condition est donc bien suffisante.

Maintenant si  $f$  est non ramifié on a  $k(x) = \mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X_y, x}$  pour tout  $x \in X_y$ . La dimension de la fibre est donc 0 et elle est réduite.  $\square$

**Exercice .** (3.1)

*Démonstration.* C'est une application directe du corollaire 2.12. En effet, on a

$$\mathcal{O}_{X_s, x} = \mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{X, x}/t \mathcal{O}_{X, x}$$

par hypothèse et l'anneau  $\mathcal{O}_{X, x}$  est régulier.  $\square$

**Exercice .** (3.2)

*Démonstration.* Le fait que le morphisme est quasi-fini assure que pour tout  $x \in X$  qui n'est pas fermé il existe un point fermé dans  $\overline{\{x\}}$  et donc comme la question est locale on peut se restreindre à  $X = \text{Spec } A$  et  $Y = \text{Spec } B$  affines.

Le résultat suit alors du diagramme suivant et du fait que la localisation est plate. Si  $x_1$  n'est pas fermé, il existe  $x_2$  dans sa fermeture, donc si  $\mathfrak{p}_1$  est l'idéal associé à  $x_1$  et  $\mathfrak{m}_1$  celui associé à  $x_2$  on a  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{m}_1$  et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,y} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x_2} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{X,x_1} \end{array}$$

et comme par hypothèse  $\mathcal{O}_{X,x_2}$  est plat sur  $\mathcal{O}_{Y,y}$  c'est le cas de ses localisés donc de  $\mathcal{O}_{X,x_2}$  qui est obtenu par localisation en  $\mathfrak{p}_1$ . □

## 5 Coherent sheaves and Čech cohomology

### 5.1 Coherent sheaves on a scheme

Une utilisation du lemme de Nakayama pour montrer qu'un morphisme de faisceaux qui se restreint à un isomorphisme sur les points est surjectif dans les bonnes conditions.

**Proposition 5.1.** *Soit  $X$  un schéma noethérien (ou localement noethérien) et soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des  $\mathcal{O}_X$  modules cohérents. Soit  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme. On suppose que pour tout  $x \in X$  la restriction de  $\alpha$  à  $\{x\}$  est un isomorphisme, c'est-à-dire que en notant  $i: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$  le morphisme d'image  $\{x\}$  on a  $i^*\alpha: i^*\mathcal{F} \rightarrow i^*\mathcal{G}$  un isomorphisme de faisceaux. Alors  $\alpha$  est surjectif.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les applications locales  $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  sont surjectives pour tout  $x \in X$ . Soit  $x \in X$ , on peut se restreindre à un ouvert affine  $U$  voisinage de  $x$  tel que  $\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$  et  $\mathcal{G}|_U = \tilde{N}$ . Soit  $\mathfrak{p}$  l'idéal associé à  $x$  dans  $U$ . L'hypothèse donne un isomorphisme

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \simeq N_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x).$$

Or l'application locale induite par  $\alpha$  est ici  $\alpha_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ . On note  $P$  le conoyau de cette application. On a des suites exactes, par exactitude à droite

du produit tensoriel,

$$M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \longrightarrow N_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \longrightarrow P \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \longrightarrow 0$$

Par hypothèse  $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \rightarrow N_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$  est un isomorphisme donc  $P \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = 0$ . Or

$$P \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = P \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m} = P/\mathfrak{m}P$$

où  $\mathfrak{m}$  est l'unique idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Par le lemme de Nakayama il suit que  $P = 0$  donc que  $\alpha_{\mathfrak{p}}$  est surjective.  $\square$

**Exercice . (1.1)**

*Démonstration.* Soient  $f: X \rightarrow Y$  une application entre deux schémas,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module et  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module. On a, pour  $U$  ouvert de  $X$ ,

$$f^{-1}f_*\mathcal{F}(U) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(U) \subset V}} f_*\mathcal{F}(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(U) \subset V}} \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

Comme  $f(U) \subset V$  on a  $U \subset f^{-1}(V)$  d'où l'application de restriction par définition d'un faisceau  $\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ . De plus à nouveau par définition d'un faisceau ses applications sont compatibles à la limite directe et donc induise une application canonique  $\alpha: f^{-1}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ .

D'autre part, pour  $V$  ouvert de  $Y$ ,

$$f_*f^{-1}\mathcal{G}(V) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ f(f^{-1}(V)) \subset U}} \mathcal{G}(U).$$

Or  $f(f^{-1}(V)) \subset V$  donc  $\mathcal{G}(V)$  est un élément de la limite directe. Il suit qu'on a une application canonique  $\mathcal{G}(V) \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}(V)$  qui consiste simplement à prendre la classe d'un élément dans la limite. On en déduit une application  $\beta: \mathcal{G} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{G}$ .

On peut étendre ces applications au cas de l'image inverse de  $\mathcal{O}_X$ -modules. On a  $f^*f_*\mathcal{F} = f^{-1}f_*\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ . D'où  $\tilde{\alpha}: h \otimes t \mapsto t \cdot \beta(h) \in \mathcal{F}$ . De la même manière on définit  $\tilde{\alpha}: h \mapsto 1 \otimes \alpha(h)$ .

Il reste à voir que ces applications induisent un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Soit  $\varphi: f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ . Alors on obtient une application induite  $\tilde{\varphi}: f_*f^*\mathcal{G} \rightarrow f_*\mathcal{F}$  et en composant à droite par  $\tilde{\beta}$  on obtient une application de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ . Le diagramme est le suivant

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\beta}} f_*f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} f_*\mathcal{F} .$$

On obtient de la même manière une application inverse. On vérifie avec les formules qu'elles sont inverses l'une de l'autre.  $\square$