# Exercises Qing Liu

Séverin Philip

5 juillet 2018

## 1 General properties of Schemes

### 1.1 Reduced schemes and integral schemes

**Exercise .** *(4.2)*

*Démonstration.* Le morphisme canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est donné par le morphisme $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ pour un ouvert affine $U$ de $X$ contenant $x$. On note $\mathcal{O}_X(U) = A$ et l' morphisme est celui de localisation en $\mathfrak{p}$ idéal premier associé à $x$. Si $y$ est un point de $U$ qui se spécialise en $x$, $x \in \overline{\{y\}}$, par définition si $\mathfrak{q}$ est l'idéal premier associé à $y$, on a $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier du localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Par suite $y$ est dans l'image de $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec} A$. Il est clair que réciproquement un élément de cette image provient d'un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$ et donc par localisation d'un idéal premier de $A$ inclus dans $\mathfrak{p}$ ce qui correspond à un point qui se spécialise en $x$. Comme le morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est indépendant du choix de $U$ (Pourquoi ?) cela suffit.

A mon avis ça dépend pas du choix de l'ouvert car si tu prends un autre ouvert $V$, tu peux trouver un affine $W$ dans $U \cap V$. Alors tu écris un diagramme commutatif avec tous les $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(V)$, $\mathcal{O}_X(W)$, les flèches de restrictions et les flèches vers $\mathcal{O}_{X,x}$. Ensuite tu appliques Spec et tu vois que tous les morphismes coïncident.

□

**Exercise .** *(4.3)*

*Démonstration.* On a une inclusion $\mathcal{O}_K[T] \hookrightarrow K[T]$ qui induit un morphisme $j\colon \operatorname{Spec} K[T] \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T]$. On montre que c'est une immersion ouverte. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} K[T]$, $j(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$. L'image de $j$ est $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[T] \setminus V(t)$ qui est ouverte. En effet, si $t \in \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_K[T]$ alors $t \in \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} = K[T]$ ce qui est impossible. Inversement, si $t \notin \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_K[T]$ alors par localisation en $S = \mathcal{O}_K[T] \setminus \{0\}$ ($\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ ?) on a $\mathfrak{p}K[T]$ idéal premier qui vérifie $\mathfrak{p}K[T]\cap\mathcal{O}_K[T]=\mathfrak{p}$. Il reste à voir que $j_x^\sharp$ est un isomorphisme en tout point $x\in\operatorname{Spec}K[T]$ ce qui est trivialement le cas (même une égalité).

Yes je suis d'accord, en fait pour l'homéomorphisme on peut direct appliquer 2.1.7.c) avec $S=\mathcal{O}_K\setminus\{0\}$. Les morphismes entre les fibres sont bien des égalités je suis d'accord.

L'idéal $(T)$ est le seul point de $\operatorname{Spec}K[T]$ qui se spécialise en $(T,t)$. (Je crois ?)

Je suis d'accord car cela revient à chercher les polynômes irréductibles $P$ de $K[T]$ tels que $(P)\cap\mathcal{O}_K[T]\subset(T,t)$. En localisant tu as nécessairement $T|P$ et donc $P=T$. Enfin je crois que c'est bon. □

**Exercise .** *(4.8)*

*Démonstration.* Soit $x$ un point de $X$ et $(U_i)$ les ouverts affines qui recouvrent $X$ (en nombre fini). On suppose que $x\in U_1$ quitte à renuméroté les ouverts. Le point $x$ correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_X(U_1)$ qui lui même correspond à un point fermé de $U_1$. On a donc l'existence de $x_1\in U_1$ fermé dans $U_1$ et $x_1\in\overline{\{x\}}$ la fermeture étant prise dans $X$. Si $x_1$ est fermé dans tous les autres $U_i$ qui le contiennent il est fermé dans $X$. Sinon il existe un $i\in\{2,\dots,n\}$ tel que $x_1\in U_i$ et $x_1$ n'est pas fermé dans $U_i$. On peut à nouveau supposer que $i=2$ et par le même argument qu'avant obtenir $x_2\in U_2$ fermé dans $U_2$ et $x_2\notin U_1$. En répétant le procédé au plus $n$ fois on obtient un point fermé dans tous les ouverts affines $U_j$ qui le contiennent. □

**Exercise .** *(4.11)*

*Démonstration.* $(i)\Rightarrow(ii)$ On montre que $f^\sharp(U)$ est injectif pour tout ouvert affine $U$ de $Y$. Soit $g\in\mathcal{O}_Y(U)$ tel que $f^\sharp(U)(g)=0$. Pour tout $y=f(x)\in U\cap f(X)$ on a

$$f_x^\sharp\colon\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$$

qui est un morphisme local et $f_x^\sharp(g)=0\in\mathfrak{m}_x$. D'où $g\in\mathfrak{m}_{f(x)}$. Or l'ensemble $\{y\in U,\ g\in\mathfrak{m}_y\}$ est un fermé de $U$, celui-ci contient $f(X)$ c'est donc $U$ tout entier. Il suit que $g\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}_X(U)}\mathfrak{p}$ est nilpotent. Comme $Y$ est réduit $g=0$. Le résultat est vrai sans l'hypothèse $U$ affine en prenant un recouvrement par des ouverts affine.

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Par la proposition 4.18 le morphisme $\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_{X,x}$ est injectif pour tout $x\in U$ donc en particulier si $V\subset U$ est un ouvert,

$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ est injectif. En effet le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

Le résultat suit trivialement de cette remarque et de l'injectivité de $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ par $(ii)$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit $V$ un ouvert de $Y$ contenant $f(\xi_X)$. Le diagramme suivant commute et par $(iii)$ les flèches sont injectives.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Y,f(\xi_X)} \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,\xi_X} \end{tikzcd}$$

Comme $\xi_X$ est le point générique de $X$ qui est un schéma entier (integral ?) son idéal maximal associé est $(0)$. Par injectivité et le fait que $f^\sharp_{\xi_X}$ est local l'idéal maximal de $f(\xi_X)$ est donc lui même $(0)$. Il suit que $f(\xi_X) = \xi_Y$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Trivial.

$(v) \Rightarrow (i)$ Comme $Y$ est un schéma entier $\overline{\{\xi_Y\}} = Y$.

$\square$

# 2 Morphisms and base change

## 2.1 The technique of base change

**Proposition 2.1.** *1.4 Démonstration du point d.*

*Démonstration.* On considère $U, V$ des sous-schémas ouvert de $X$ et $Y$. Il faut vérifier que $i \times j$ induit un isomorphisme de $U \times_S V$ dans $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Soit $Z$ un schéma et $f, g$ des morphismes $Z \to U$, $Z \to V$. En composant avec les injections de $U, V$ dans $X$ et $Y$ on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr] \arrow[drr, "j\circ g"] \arrow[ddr, "i\circ f"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Il suit que la flèche du milieu se factorise par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Comme le morphisme $i \times j$ est l'unique morphisme de $U \times_S V$ dans $X \times_S Y$ faisant commuter les diagrammes et se factorisant par $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ c'est un isomorphisme $U \times_S V \simeq p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. $\square$

**Exercise .** *(1.7)*

*Démonstration.* On suppose $X, Y$ et $S$ affines, c'est-à-dire $X = \operatorname{Spec} M$, $Y = \operatorname{Spec} N$ et $S = \operatorname{Spec} R$. Le résultat dans le cas général suit du cas affine par recollement (Intuitivement ok, l'idée doit marcher mais un truc détaillé serait bien...). On note $f\colon R \to M$, $g\colon R \to N$. Soit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in X \times Y$ tels que $\mathfrak{p} \in X_s$, $\mathfrak{q} \in Y_s$ pour un point $s \in S$. On a donc $f^{-1}(\mathfrak{p}) = s$ d'où les morphismes

$$R \longrightarrow M \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

induisent

$$R/s \to \longrightarrow M/\mathfrak{p}$$

$$k(s) \longrightarrow k(\mathfrak{p})$$

et il en est de même pour $\mathfrak{q}$ et $N$. On a donc des morphismes $M \to k(\mathfrak{p})$ et $N \to k(\mathfrak{q})$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q}) & & \\
& M \otimes_R N \arrow[ul, dotted] & N \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& M \arrow[u] \arrow[uul, bend left] & R \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et donc par propriété du produit tensoriel on obtient l'existence de la flèche en pointillé d'où un morphisme naturel

$$\operatorname{Spec}\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \to X \times_S Y.$$

On vérifie maintenant que l'image de ce morphisme est contenu dans l'ensemble

$$\{z \in X \times_S Y,\ p(z) = \mathfrak{p}, q(z) = \mathfrak{q}\}.$$

Il faut vérifier que si $I$ est un idéal premier de $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ alors $\varphi^{-1}(I)$ est l'idéal $\mathfrak{p}$ de $M$ où $\varphi$ est l'application $M \to k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Comme $\varphi(\mathfrak{p}) = 0$

on a une inclusion. Maintenant, si $m \in M \setminus \mathfrak{p}$ est tel que $\varphi(m) \in I$ alors comme $\varphi(m) = \overline{m} \otimes 1$ qui est inversible dans $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$ ce qui est impossible car alors $I = k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Donc $\varphi^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et ce raisonnement appliqué à $N$ et $\mathfrak{q}$ assure l'inclusion.

Il faut maintenant voir qu'un idéal $I$ de $M \otimes_R N$ tel que $i^{-1}(I) = \mathfrak{p}$ et $j^{-1}(I) = \mathfrak{q}$ où $i, j$ sont les applications $M \to M \otimes_R N$, $N \to M \otimes_R N$ est tel que $M \otimes_R N \to k(I)$ se factorise par $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. En effet, $\mathfrak{p} \otimes 1$ est donc dans $I$ et est envoyé sur 0 dans $k(I)$ donc on a une factorisation

$$M \otimes_R N \to M/\mathfrak{p} \otimes_R N/\mathfrak{q} \to k(I).$$

Il reste à voir que l'on peut étendre cette dernière flèche à $k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})$. Il suit donc une factorisation de $k(I) \to X \times_S Y$ en

$$k(I) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(s)} k(\mathfrak{q})\big) \longrightarrow X \times_S Y.$$

□

**Exercise .** *(1.10)*

# 3 Some local properties

## 3.1 Normal schemes

**Exercise .** *(1.4)*

*Démonstration.* Si $X$ est normal alors il est normal en tout point donc en particulier pour les points fermés.

Soit $x \in X$ un point qui n'est pas fermé. Alors par l'exercice 2.4.8 il existe un point fermé $y$ dans $\overline{\{x\}}$. Soit $V$ un ouvert affine contenant $y$, alors si $x \notin V$ on aurait $x \in X \setminus V$ qui est fermé donc en particulier $\overline{\{x\}} \subset X \setminus V$ et donc $y \in X \setminus V$ ce qui est une contradiction. Il suit que $x \in V$ et que l'on obtient $\mathcal{O}_{X,x}$ par localisation de $\mathcal{O}_{X,y}$. Ce dernier est donc réduit, intègre ou normal si $\mathcal{O}_{X,y}$ l'est ce qui prouve l'implication. □