Analysis 1 - Cheatsheet

Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen

Der Körper der reellen Zahlen

Satz 1.1: Es gibt keine Gleichung der Form $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$, so dass $x = \pi$ eine Lösung ist.
Satz 1.2: $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist.
Axiome der Addition:
A1: Assoziativität $x + (y + z) = (x + y) + z \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
A2: Neutrales Element $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
A3: Inverses Element $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: \quad x + y = 0$
A4: Kommutativität $x + z = z + x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$
Axiome der Multiplikation:
M1: Assoziativität $\quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in$
M2: Neutrales Element $\quad x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
M3: Inverses Element $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}: \quad x \cdot y = 1$
M4: Kommutativität $\quad x \cdot z = z \cdot x \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$
Distributivität:
D1: $\quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
Ordnungsaxiome:
O1: Reflexivität $\quad x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
O2: Transitivität $\quad x \leq y$ und $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
O3: Antisymmetrie $x \leq y$ und $y \leq x \Longrightarrow x = y$
O4: Total $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$
Kompatibilität:
K1: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + 2$
K2: $\forall x \geq 0, \quad \forall y \geq 0: \quad x \cdot y \geq 0$
Ordnungsvollständigkeit:
Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass

(i) $A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$

(ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A: a \leq c$ und $>: \forall b \in B: c \leq b$.
Korollar 1.6.:
1. Eindeutigkeit der additiven und multiplikativen Inverse.
2. $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, insbesondere $(-1)^2 = 1$
4. $y \geq 0 \Longleftrightarrow (-y) \leq 0$
5. $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, insbesondere $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$
6. $x \leq y$ und $u \leq v \Longrightarrow x + u \leq y + v$
7. $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v \Longrightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$

Korollar 1.7 (Archimedisches Prinzip): Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n \cdot x$.
Satz 1.8.: Für jedes $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.
Bemerkung: Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet.
Definition 1.9.: Seien $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls} \quad y \leq x \\ y & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{falls} \quad y \leq x \\ x & \text{falls} \quad x \leq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}: |x| = \max\{x, -x\}$

Satz 1.10.:

(i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y, \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Satz 1.10.: $\forall \epsilon > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon}y^2$.
Definition 1.12: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $\forall a \in A: a \leq c$. Die Menge A heisst nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke von A gibt.

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ist eine untere Schranke von A falls $\forall a \in A: c \leq a$. Die Menge A heisst nach unten beschränkt, falls es eine untere Schranke von A gibt.

(iii) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum von A falls $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

(iv) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Minimum von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

Satz 1.15: Sei $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

(i) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A: $c := \sup A$ genannt das Supremum von A.

(ii) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A: $d := \inf A$ genannt das Infimum von A.

Korollar 1.16.: Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$.

1. Falls B nach oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$.
2. Falls B nach unten beschränkt ist, folgt $\inf B \leq \inf A$.

Kardinalität

Definition 1.18.:

(i) Zwei Mengen X, Y heissen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f: X \longrightarrow Y$ gibt.

(ii) Eine Menge X ist endlich, falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass X und $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind. Im ersten Fall ist die Kardinalität von X, card $X = 0$ und im zweiten Fall ist card $X = n$.

(iii) Eine Menge X ist abzählbar, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

Satz 1.20 (Cantor): $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Der Euklidische Raum

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \quad \forall j\}$
$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x \qquad (x, y) \longmapsto x + y$
Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad$ (symmetrisch).
2. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n \quad$ (bilinear).
3. $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_j^2 \geq 0 \quad$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$ (positiv definit).

Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
Satz 1.21 (Cauchy-Schwarz): $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
Satz 1.22.:

1. $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Kreuzprodukt:
$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(a, b) \quad \longmapsto a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

1. $(\mu + b) \times c = a \times c + b \times c \quad$ (Distributivität)
2. $a \times b = -b \times a \quad$ (Antisymmetrie)
3. $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$ (Jacobi-Identität)

Komplexe Zahlen

Multiplikation: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Satz 1.23: $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition der Vektoren + und obig definierter Multiplikation ist ein kommutativer Körper mit Einselement $(1, 0)$ und Nullelement $(0, 0)$.
$i = (0, 1) \Longleftrightarrow i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$
Für $z = x + yi$ gilt $\bar{z} = x - yi$.
Satz 1.24.:

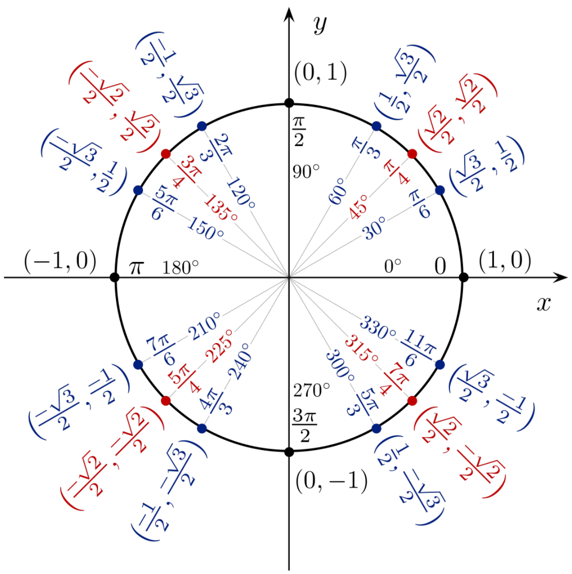
1. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z\bar{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

Für $z \neq 0$ folgt somit $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$.
Sei $r = \|z\|$, dann ist $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi \Longrightarrow z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$. $r = \|z\|$ ist der **Absolutbetrag** und ϕ das **Argument** der Zahl z. Es gilt:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + \sin\left(\phi_1 + \phi_2\right) \cdot i\right)$
2. $z^n = r^n (\cos(n \cdot \phi) + i \sin(n \cdot \phi))$

Korollar 1.25.: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}: z_1, z_2, \ldots, z_n$, wobei
$z_j = \cos \frac{2\pi j}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi j}{n}, \quad 1 \leq j \leq n$
Satz 1.26 (Fundamentalsatz der Algebra): Sei $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ und $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{C}$ Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n$ in $\mathbb{C}$, so dass $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.
Mitternachtsformel: $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pq-Formel: $x^2+px+q=0 \Longleftrightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$



Folgen und Reihen

Grenzwert einer Folge

Definition 2.1.: Eine Folge (reller Zahlen) ist eine Abbildung $a:\mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{R}$. Wir schreiben a_n statt a $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$.

Lemma 2.3.: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens eine reelle Zahl $l\in\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $\forall\epsilon>0$ ist die Menge $\{n\in\mathbb{N}: a_n\notin]l-\epsilon, l+|\epsilon[\}$ endlich.

Definition 2.4.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst konvergent, falls es $l\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall\epsilon>0$ die Menge $\{n\in\mathbb{N}^*: a_n\notin]l-\epsilon,l+\epsilon[\}$ endlich ist. Somit ist nach Lemma 2.3 eine solche Zahle l eindeutig bestimmt und wir mit $\lim_{n\to\infty}a_n$ bezeichnet und nennt sich Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

Bemerkung 2.5.: Jede konvergente Folge ist beschränkt: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert l. Dann ist $\{a_n : n\geq 1\}$ beschränkt: Sei $\epsilon=1$ und $\{n\in\mathbb{N}^*: a_n\notin]l-1,l+[\}1=\{i_1,\ldots,i_M\}$. Dann folgt: $\{a_n: n\geq 1\}\subseteq]l-1,l+1[\cup\{a_{i_1},\ldots,a_{i_M}\}$ und ist daher beschränkt.

Lemma 2.6.: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l=\lim_{n\to\infty}a_n$.
2. $\forall\epsilon>0\quad\exists N\geq 1$, so dass $|a_n-l|<\epsilon\quad\forall n\geq N$

Satz 2.8.: Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit a $=\lim_{n\to\infty}a_n, b=\lim_{n\to\infty}b_n$.

1. Dann ist $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.
2. Dann ist $(a_n\cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$.
3. Nehmen wir audem an, dass $b_n\neq 0\quad\forall n\geq 1$ und $b\neq 0$. Dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$.
4. Folls es ein $K\geq 1$ gibt mit $a_n\leq b_n\quad\forall n\geq K$ dann folgt $a\leq b$.

Der Satz von Weierstrass und Anwendungen

Definition 2.10.:

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend falls: $a_n\leq a_{n+1}\quad\forall n\geq 1$
2. $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend falls: $a_{n+1}\leq a_n\quad\forall n\geq 1$

Satz 2.11 (Weierstrass):

- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n:n\geq 1\}$
- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzuert $\lim_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n:n\geq 1\}$.

Bemerkung 2.13.: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ und $k\in\mathbb{N}$. Dann ist die durch $b_n:=a_{n+k}\quad n\geq 1$ definierte Folge konvergent und $\lim_{n\to\infty}b_n=a$.

Beispiel 2.14.: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Beispiel 2.15.: Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\geq 1$ konvergiert. Der Limes ist $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Lemma 2.16 (Bernoulli Ungleichung): $(1+x)^n\geq 1+n\cdot x\quad\forall n\in\mathbb{N}, x>-1$

Beispiel 2.17.: Sei $c>1$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ durch: $a_1=c,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\quad n\geq 1$ Dann existiert $a:=\lim a_n>0$ und es gilt $a^2=c$.

Limes superior und Limes inferior

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige beschränkte Folge. Wir können zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ definieren, welche dann einen Grenzwert besitzen. Sei für jedes $n\geq 1$: $b_n=\inf\{a_k:k\geq n\}$ und $c_n=\sup\{a_k:k\geq n\}$. Dann folgt aus Korollar 1.16:

- $b_n\leq b_{n+1}\forall n\geq 1$
- $c_{n+1}\leq c_n\forall n\geq 1$

und beide Folgen sind beschränkt. Nach Weierstrass (Satz 2.11) sind beide Folgen konvergent und wir definieren:

- $\liminf_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}b_n$ (Limes inferior)
- $\limsup_{n\to\infty}a_n:=\lim_{n\to\infty}c_n$ (Limes superior)

Aus $b_n\leq c_n$ folgt mit Satz 2.8(4): $\liminf_{n\to\infty}a_n\leq\limsup_{n\to\infty}a_n$

Das Cauchy Kriterium

Lemma 2.19.: $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty}a_n=\limsup_{n\to\infty}a_n$.

Satz 2.20 (Cauchy Kriterium): Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall\epsilon>0\quad\exists N\geq 1\quad$ so dass $|a_n-a_m|<\epsilon\quad\forall n,m\geq N$.

Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition 2.21.: Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge $I\subseteq\mathbb{R}$ der Form

1. $[a,b],\quad a\leq b, a, b,\in\mathbb{R}$
2. $[a,+\infty[,\quad a\in\mathbb{R}$
3. $]-\infty,a],\quad a\in\mathbb{R}$
4. $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

Wir definieren die Länge $\mathcal{L}(I)$ des Intervalls als $\mathcal{L}(I)=b-a$ im ersten Fall $\mathcal{L}(I)=+\infty$ in $(2),(3),(4)$.

Bemerkung 2.22.: Ein Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aus Elementen in I, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}a_n$ auch in I ist.

Bemerkung 2.23.: Seien $I=[a,b], J=[c,d]$ mit $a\leq b$ und $c\leq d, a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Dann gilt $I\subseteq J$ genau dann, wenn $c\leq a$ und $b\leq d$. Es folgt $\mathcal{L}(I)=b-a\leq d-c=\mathcal{L}(J)$. Definition monoton fallende Folge von Teilmengen: Eine monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}, X_n\subseteq\mathbb{R}$ mit $X_1\supseteq X_2\supseteq\cdots\supseteq X_n\supseteq X_{n+1}\supseteq\cdots$.

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor): Sei $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots I_n\supseteq I_{n+1}\supseteq\cdots$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1)<+\infty$. Dann git: $\bigcap_{n\geq 1}I_n\neq\emptyset$ Falls zudem $\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}(I_n)=0$ enthält $\bigcap I_n$ genau einen Punkt.

Satz 2.26.: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Definition 2.27.: Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei $b_n=a_{l(n)}$ und $l:\mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{N}^*$ eine Abbildung bezeichnet mit der Eigenschaft $l(n)<l(n+1)\quad\forall n\geq 1$.

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass): Jede beschränkte Folge besitst eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung 2.30.: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$: $\liminf_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n\leq\limsup_{n\to\infty}a_n$. Zudem gibt es zwei Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$ die $\liminf a_n$ respektive $\limsup a_n$ als Grenzwert annehmen.

Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Definition 2.31.: Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $a:\mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{R}^d$ Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$.

Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Definition 2.32.: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst konvergent, falls es $a\in\mathbb{R}^d$ gibt, so dass: $\forall\epsilon>0\quad\exists N\geq 1\quad$ mit $\|a_n-a\|<\epsilon\quad\forall n\geq N$.

Falls solch ein a existiert, ist es eindeutig bestimmt und nennt sich Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Man schreibt: $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

Sei $a_n=(a_{n,1},\ldots,a_{n,d})$ die Koordinaten von a_n.

Satz 2.33.: Sei $b=(b_1,\ldots,b_d)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=b$
2. $\lim_{n\to\infty}a_{n,j}=b_j\quad\forall 1\leq j\leq d$.

Bemerkung 2.34.: Sei $x=(x_1,\ldots,x_d)$. Dann ist $\forall 1\leq j\leq d$:

$x_j^2\leq\underbrace{\sum_{i=1}^d x_i^2}_{\|x\|^2}\leq d\cdot\max_{1\leq i\leq d}x_i^2$ Woraus

$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{d} \cdot \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ folgt.
Bemerkung 2.35.: Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt. Das heisst:$\exists R \geq 0 \quad \text{mit} \quad \|a_n\| \leq R \quad \forall n \geq 1$.
Satz 2.36.:

1. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konveryiert genau damn, wenn sie eine Cauchy Folge ist:
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \text{mit} \quad \|a_n - a_m\| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$
2. Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Reihen

Definition Partialsumme einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$: Die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen ist als $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ definiert.
Definition 2.37.: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$.
Beispiel 2.38 **(Geometrische Reihe):** Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und dessen Wert ist: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.
Beispiel 2.39 **(Harmonische Reihe):** Die Reihe $sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$divergiert.
Satz 2.40.: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent und
$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$.
2. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ konvergent und
$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 2.41 (Cauchy Kriterium): Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls:
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \text{mit} \quad |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$.
Satz 2.42.: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergier genau dann, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.
Korollar 2.43 (Vergleichssatz): Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$ Dann gelten:

- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Die Implikationen treffen auch 2u, wenn es $K \geq 1$ gibt, so dass $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq K$.
Definition 2.45.: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
Satz 2.46.: Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt: $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
Satz 2.48 (Leibniz 1682): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ und es gilt: $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.
Die Folge $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ ist also monoton fallend und $(S_{2n})_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend. Aus $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$ folgt $S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1$. Beide monotonen Folgen sind beschränkt, also existieren $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$. Aus $(*)$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$.
Definition 2.50.: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bujektive Abbildung $\phi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$.

Bemerkung 2.51.: Aus Riemann folgt, dass es überabzählbar viele Bijektionen von $\mathbb{N}^*$ gibt.
Satz 2.52 (Dirichlet 1837): Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.
Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$. Falls $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ divergiert die Reihe.
Bemerkung 2.55.: Das Quotientenkriterium versagt, wenn zum Beispiel unendlich viele Glieder a_n der Reihe verschwinden.
Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821): Falls lim sup $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ dann divergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Sei $(c_k)_{k\geq 0}$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert, definieren wir

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Korollar 2.57.: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$.

Die Zeta Funktion

Sei $s > 1$ und $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Diese Reihe konvergiert.

Doppelte Summation

Definition 2.58.: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$, falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.
Satz 2.59 (Cauchy 1821): Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$. Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:
$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \quad \text{und} \quad U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$ sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$ und es gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$ Zudem konvergient jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.
Definition 2.60.: Das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots$.
Satz 2.62.: Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$
Satz 2.64.: Sei $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an, dass:

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\quad \forall j \in \mathbb{N}$
2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty[$, so dass
   (a) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \quad \forall n \geq 0$.
   (b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$.
Korollar 2.65.: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ und $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

Stetige Funktionen

Reellwertige Funktionen

Sei D eine beliebige Menge. Die Menge $\mathbb{R}^D$ aller Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, wobei Addition und skalare Multiplikation gegeben sind durch:

- $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

wobei $f_1, f_2, f \in \mathbb{R}^D, x \in D, \alpha \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}^D$ gibt es auch ein Produkt: $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$ Eine konstante Funktion ist eine, die immer denselben Wert annimmt; darunter gibt es die Funktionen $0, 1 \in \mathbb{R}^D$:

- $o(x) = 0 \forall x \in D$
- $1(x) = 1 \forall x \in D$

Offensichtlich gilt $f + 0 = f, g \cdot 1 = g \quad \forall f, g \in \mathbb{R}^D; \mathbb{R}^D$ versehen mit $+, \cdot$ erfüllt die Körperaxiome ausser: Falls card $D \geq 2$ gibt es immer ein $f \neq 0$, das kein multiplikatives Inverses besitzt. Auf $\mathbb{R}^D$ definieren wir eine Ordnung $f \leq g$ falls $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D$ und sagen f ist nicht negativ, falls $0 \leq f$.
Definition 3.1.: Sei $f \in \mathbb{R}^D$

1. f ist nach oben beschränkt, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist
2. f ist nach unten beschränkt, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist
3. f ist beschränkt, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist

Definition 3.2.: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$, ist

1. monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D : \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
2. streng monoton wachsend, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y)$
3. monoton fallend, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
4. streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y)$
5. monoton, falls f monoton wachsend oder monoton fallend
6. streng monoton, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist

Stetigkeit

Definition 3.4.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt.
Definition 3.5.: Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.
Satz 3.7.: Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D folgende Implikation gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$
Korollar 3.8.: Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in x_0.

1. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in x_0.

2. Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D : g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

Definition 3.9.: Eine polynomiale Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ wobei : $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$ ist n der Grad von P.
Korollar 3.10.: Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
Korollar 3.11.: Seien P, Q polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots x_m\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

Der Zwischenwertsatz

Satz 3.12 (Bolzano 1817).: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b, \in I$. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.
Korollar 3.13.: Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
Bemerkung 3.14.: Für $c > 0$ besitzt $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Der Min-Max Satz

Definition 3.16.: Ein Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$, $\quad a \leq b$ ist.
Lemma 3.17.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind $|f|, \max(f, g), \min(f, g)$ stetig in x_0.
Lemma 3.18.: Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subseteq [a, b]$ folgt $\lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$.
Satz 3.19.: Sei $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$. Insbesondere ist f beschränkt.

Der Satz über die Umkehrabbildung

Satz 3.20.: Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f : D_1 \longrightarrow D_2, g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.
Korollar 3.21.: Falls in Satz 3.20f auf D_1 und g auf D_2 stetig sind, so ist $g \circ f$ auf D_1 stetig.
Satz 3.22.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

Die reelle Exponentialfunktion

$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Satz 3.24.: $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.
Korollar 3.25:

- $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Aus der Potenzreihendarstellung von exp folgt ausserdem: $\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$
- Falls jetzt $y < z$, dann folgt (aus 2.63): $\exp(z) = \exp(y + (z - y)) = \exp(y)\exp(z - y)$ und da $\exp(z - y) > 1$, folgt:

Korollar 3.26.: $\exp(z) > \exp(y) \quad \forall z > y$
Korollar 3.27.: $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Korollar 3.28.: Der natürliche Logarithmus $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. Des weiteren gilt $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ und $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$.
Korollar 3.29.:

1. Für $a > 0$ ist $]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\quad x \longmapsto x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion.
2. Für a < 0 ist $]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\quad x \longmapsto x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion.
3. $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x > 0$

Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.30.: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$ $: f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Definition 3.32. (Weierstrass 1841): Die Folge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$konvergiert gleichmässig in D gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ falls gilt: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass:
$\forall n \geq N, \quad \forall x \in D : \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
Bemerkung: Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls gilt: $\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$
Satz 3.33.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f (in D) stetig.
Definition 3.34.: Eine Funktionenfolge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.
Korollar 3.35.: Die Funktionenfolge $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass $\forall n, m \geq N$ und $\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
Korollar 3.36.: Sei $D \subset \mathbb{R}$. Falls $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig.
Sei nun $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen.
Definition 3.37.: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig (in D), falls die durch $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.38.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäsig in D und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine in D stetige Funktion.
Definition 3.39.: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hat positiven Konvergenzradius, falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0. \end{cases}$$

Satz 3.40. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho$. Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :] - \rho, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Trigonometrische Funktionen

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$
$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$
$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$
Satz 3.41.: $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen.
Satz 3.42.:

1. $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \forall z \in \mathbb{C}$
2. $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
3. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
   $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43:

- $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
- $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$

Die Kreiszahl π

Satz 3.44.: Die Sinusfunktion hat auf $]0, +\infty[$ mindestens eine Nullstelle. Sei $\pi := \inf\{t > 0 : \sin t = 0\}$ Dann gilt:

1. $\sin \pi = 0, \quad \pi \in]2, 4[$
2. $\forall x \in]0, \pi[: \sin x > 0$
3. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

Korollar 3.45.: $x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$.
Korollar 3.46.:

1. $e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. Nullstellen von Sinus $= \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
   $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
6. Nullstellen von Cosinus $= \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
   $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
   $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.47.: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0 : (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$.
Definition 3.49.: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = A''$, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : \quad |f(x) - A| < \epsilon$
Bemerkung 3.50:

1. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ genau dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$ folgt $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$
2. Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3. Mittels (1) zeigt man leicht, dass falls $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to x_0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren, so folgt $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$ und $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
4. Sei $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$ falls beide Grenzwerte existieren.
5. Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x)$ dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x)$.

Satz 3.52.: Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}, x_0$ Häufungspunkt von $D, f : D \longrightarrow E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $y_0 \in E$. Falls $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.
Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, x_0 ist Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$; das heisst ein rechtsseitiger Häufungspunkt. Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap [x_0, +\infty)}$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0. Wir erweitern diese Definition auf: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls gilt:
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta\Big[: \quad f(x) > \frac{1}{\epsilon}$ und analog:
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$
falls$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta\Big[: \quad f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$.
Es folgt somit $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Differenzierbare Funktionen

Die Ableitung: Defnition und elementare Folgerungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D.

Definition 4.1.: f ist in x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Bemerkung 4.2.: Es ist oft von Vorteil in der Definition von $f'(x_0), \quad x = x_0 + h$ zu setzen, so dass: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.
Satz 4.3 (Weierstrass 1861): Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit:
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.
Satz 4.4.: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt die stetig in x_0 ist und so, dass $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$. In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.
Korollar 4.5.: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0.
Übung 11: f differenzierbar $\Longrightarrow f$ stetig $\Longrightarrow f$ integrierbar, Wahr: Tatsächlich folgt die erste Implikation aus Korollar 4.5, und die zweite aus Satz 5.16.
f integrierbar $\Longrightarrow f$ differenzierbar $\Longrightarrow f$ stetig, Falsch: Treppenfunktionenmit endlich vielen Sprüngen sind integrierbar, aber weder differenzierbar, noch stetig.
f stetig $\Longrightarrow f$ differenzierbar $\Longrightarrow f$ integrierbar, Falsch: Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar bei 0 .
f integrierbar $\Longrightarrow f$ stetig $\Longrightarrow f$ differenzierbar, Falsch: Selbes Argument wie im zweiten Punkt.
Definition 4.7.: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D, f$ in x_0 differenzierbar ist.
Satz 4.9.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann gelten:

1. $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Ableitungen:

1. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp' = \exp$.
2. $\sin' = \cos, \cos' = -\sin, -\sin' = -\cos$ und $-\cos' = \sin$
3. $n \geq 1 : \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
5. $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
6. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
7. $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$ Nun benützen wir: $y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ woraus mit $\cos x > 0$ folgt: $\cos x = \sqrt{1 - y^2}. \Longrightarrow \forall y \in]-1, [1 \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
8. $\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in]-1, [1$
9. $\arctan'(y) = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$ mit $y = \tan(x)$
10. $\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in]-\infty, \infty[$
11. $\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$
12. $\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
13. $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
14. $\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[$
15. $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$
16. $\operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, [1$

Satz 4.11.: Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \longrightarrow E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.
Korollar 4.12.: Sei $f : D \longrightarrow E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ Häufungspunkt; wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$; zudem nehmen wir an f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Zentrale Sätze über die (erste) Ableitung

Definition 4.14.: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

1. f besitst ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit: $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$
2. f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$
3. f besitzt ein lokales Extremum in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist. x_0, x_2 sind lokale Maximalstellen und x_1, x_3 sind lokale Minimalstellen.

Satz 4.15.: Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in]a, b[$. Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar.

1. Falls $f'(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit
   $f(x) > f(x_0) \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   $f(x) < f(x_0) \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$.
2. Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$mit
   $f(x) < f(x_0) \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$.
3. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitst, folgi $f'(x_0) = 0$

Funktionseigenschaften:

1. monoton steigend $\Longleftrightarrow f' > 0$

2. monoton fallend $\iff f' < 0$
3. lokale Maximum $\iff f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
4. lokale Minimum $\iff f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
5. rechtsgekrümmt $\iff f' =$ monoton fallend $\wedge f''(x) < 0$
6. linksgekrümmt $\iff f' =$ monoton steigend $\wedge f''(x) > 0$
7. Wendepunkt $\iff f' =$ lokales Extremum $\wedge f''(x) = 0$
8. Sattelpunkt $\iff f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$

Satz 4.16 (Rolle 1690): Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Erfüllt sie $f(a) = f(b)$ so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$
Satz 4.17 (Lagrange 1797): Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit f in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
Korollar 4.18: Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

1. Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f konstant
2. Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a, b[$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$
3. $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend
4. $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ strikt monoton wachsend
5. $f'(\xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ monoton fallend
6. Falls $f'(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in]a, b[$ ist f auf $[a, b]$ strikt monoton fallend
7. Falls es $M \geq 0$ gibt mit $left.|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in]a, b[$ dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$

Hyperbel und Areafunktionen:
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
Satz 4.22 (Cauchy): Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$ Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt $g(a) \neq g(b)$ und $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
Satz 4.23 (l'Hospital 1696[a], Johann Bernoulli 1691/92): Seien $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$. Falls $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$ und $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, folgt $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Bemerkung 4.24.: Der Satz gilt auch

- falls $b = +\infty$
- falls $\lambda = +\infty$
- $x \to a^+$

Definition 4.26.:

1. f ist konvex (auf I) falls für alle $x \leq y, x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ gilt.
2. f ist streng konvex falls für alle $x < y, x, y \in I$ und $\lambda \in]0, 1[$,, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Bemerkung 4.27.: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex. Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt, dass für alle $n \geq 1, \quad \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Lemma 4.28.: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ gilt.
Satz 4.29.: Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.
Korollar 4.30.: Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a, b[$. Die Funktion f ist (streng) konvex, falls $f'' \geq 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf $]a, b[$.

Höhere Ableitungen

Definition 4.32.:

1. Für $n \geq 2$ ist $f n$ -mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f.
2. Die Funktion f ist n -mal stetig differenzierbar in D, falls sie n -mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.
3. Die Funktion f ist in D glatt, falls sie $\forall n \geq 1, n$ -mal differenzierbar ist.

Bemerkung 4.33.: Es folgt aus Korollar 4.5, dass für $n \geq 1$, eine n -mal differenzierbare Funktion $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist.
Satz 4.34.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}n$ -mal differenzierbar in D.

1. $f + g$ ist n -mal differenzierbar und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $f \cdot g$ ist n -mal differenzierbar und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Beispiel von glatten Funktionen.:

1. Die Funktionen exp, sin, cos, sinh, cosh, tanh sind glatt auf ganz $\mathbb{R}$
2. Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ glatt
3. $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist glatt
4. tan ist auf $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ glatt
5. cot ist auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ glatt
6. $\arcsin :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\arccos :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind alle glatt

Satz 4.36.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ wie in Def. 4.32, $n \geq 1$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}n$ -mal differenzierbar in D. Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, ist $\frac{f}{g}$ in Dn -mal differenzierbar.
Satz 4.37.: Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt Häufungspunkt ist. Seien $f : D \longrightarrow E$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}n$ -mal differenzierbar. Dann ist $g \circ f n - mal$ differenzierbar, und $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x) \left(g^{(k)} \circ f\right)(x)$ wobei $A_{n,k}$ ein Polynom in den Funktionen $f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n+1-k)}$ ist.

Potenzreihen und Taylor Approximation

Satz 4.39.: Seien $f_n :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei f_n einmal in $]a, b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ wie $(f_n')_{n > 1}$ gleichmässig in $]a, b[$ konvergieren (siehe Def. 3.34) mit $\lim_{n \to \infty} f_n =: f$ und $\lim_{n \to \infty} f_n' =: p$ Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.
Satz 4.40.: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ differenzierbar und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$ für alle $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.
Korollar 4.41.: Unter der Voraussetzung von Satz 4.39 ist f auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt und $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$.
Insbesondere ist $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$.
Satz 4.43.: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[(n + 1)-$ mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$.
Korollar 4.44 (Taylor Approximation): Sei $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]c, d[(n + 1)-$ mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. Für alle $x \in [c, d]$ gibt es ξ zwischen x und a so dass
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$.
Korollar 4.45.: Sei $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[(n + 1)-$ mal stetig differenzierbar. Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

1. Falls n gerade ist und x_0 lokale Extremalstelle, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.
2. Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle.
3. Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle.

Korollar 4.46.: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar. *Sei* $a < x_0 < b$. Annahme: $f'(x_0) = 0$.

1. Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.
2. Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ ist x_0 strikte lokale Maximalstelle.

Das Riemann Integral

Defnition und Integrabilitätskriterien

Sei $a < b$ reelle Zahlen und $I = [a, b]$
Definition 5.1.: Eine Partition von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$.
$\delta_i := x_i - x_{i-1}, \quad i \geq 1$, ist die Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$.
Untersumme: $s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$
Obersumme: $S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$
Lemma 5.2.:

1. Sei P' eine Verfeinerung von P, dann gilt: $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$
2. Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

$s(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} s(f,P)$
$S(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} S(f,P)$
Definition 5.3.: Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar (oder kurz: integrierbar), falls $s(f) = S(f)$. In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit $\int_a^b f(x)dx$.
Satz 5.4.: Eine beschränkte Funktion ist genau dann integrierbar, falls $\forall\epsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \quad \text{mit} \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875 , Darboux 1875): Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$. Hier bezeichnet $\mathcal{P}_\delta(I)$ die Menge der Partitionen P für welche $\max_{1\le i\le n} \delta_i \le \delta$.
Korollar 5.9.: Die beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit $A := \int_a^b f(x)dx$ falls: $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ so dass $\forall P \in \mathcal{P}(I)$ Partition mit $\delta(P) < \delta$ und $\xi_1,\dots,\xi_n$ mit $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $\quad P = \{x_0,\dots,x_n\}$, $|A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$.

Integrierbare Funktionen

Satz 5.10.: Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g, \lambda\cdot f, f\cdot g, |f|, \max(f,g), \min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \ge \beta > 0 \quad \forall x \in [a,b]$) integrierbar.
Bemerkung 5.11.: Sei $\phi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist $\sup_{x,y\in[c,d]} |\phi(x) - \phi(y)| = \sup_{x\in[c,d]} \phi(x) - \inf_{x\in[c,d]} \phi(x)$.
Korollar 5.12. Seien P,Q Polynome und $[a,b]$ ein Intervall in dem Q keine Nullstelle besitzt. Dann ist

$$\begin{aligned}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}\end{aligned}$$

integrierbar.
Definition 5.13.: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ist in D gleichmässig stetig, falls $\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x,y \in D :$ $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Satz 5.15 (Heine 1872): Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.
Satz 5.16.: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.
Satz 5.17.: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.
Bemerkung 5.18.: Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar. Dann ist f integrierbar und $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. In der Tat ergibt die Summe einer Obersumme (respektive Untersumme) für $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ eine Obersumme (respektive Untersumme) für f. Wir erweitern jetzt die Definition von $\int_a^b f(x)dx$ auf:
$\int_a^a f(x)dx = 0$ und falls $a < b$,
$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$
Satz 5.19.: Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a,b sowie $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$.

Ungleichungen und der Mittelwertsatz

Satz 5.20.: Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Dann folgt: $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
Korollar 5.21.: Falls $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, folgt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859: Die Cauchy-Schwarz Ungleichung): Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt
$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$.
Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821): Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.
Satz 5.25 (Cauchy 1821): Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wobei f stetig, g beschränkt integrierbar mit $g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Satz 5.26.: Seien $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b$ ist in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.
Definition 5.27.: Sei $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.
Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differentialrechnung): Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Satz 5.30 (Partielle Integration): Seien $a < b$ relle Zahlen und $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.
Satz 5.31 (Substitution): Sei $a < b, \phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:
$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$.
Korollar 5.33.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $a+c, b+c$ in I enthalten ist. Dann gilt: $\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$.
2. Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $c \ne 0$ so dass das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten ac, bc in I enthalten ist. Dann gilt: $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$.

Integration konvergenter Reihen

Satz 5.34.: Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
Korollar 5.35.: Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge beschränkter integrierbarer so dass $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert. Dann gilt: $\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\right)dx$.
Korollar 5.36.: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für jedes $0 \le r < \rho, f$ auf $[-r,r]$ integrierbar und es gilt $\forall x \in]-\rho,\rho[$: $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$.

Euler-McLaurin Summationsformel

1. $P_k' = P_{k-1}, \quad k \ge 1$
2. $\int_0^1 P_k(x)dx = 0 \quad \forall k \ge 1$

$P_k(x) = \int_0^x P_{k-1}(t)dt + C$
Definition 5.40.: $\forall k \ge 0$ ist das k'te Bernoulli Polynom $B_k(x) = k!P_k(x)$.
Bernoulli Polynome:
$B_0(x) = 1$
$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$
Definition 5.41.: Sei $B_0 = 1$. Für alle $k \ge 2$ definieren wir B_{k-1} rekursiv: $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i = 0$.
$B_0 = 1$
$B_1 = -\frac{1}{2}$
$B_2 = \frac{1}{6}$
$B_4 = -\frac{1}{30}$
$B_6 = \frac{1}{42}$
$\forall k \in \mathbb{N} : \quad B_{2k+1} = 0$
Satz 5.42: $B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}B_i x^{k-i}$
Bemerkung 5.43.: Für $k \ge 2$:
$B_k(1) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}B_i = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}B_i + B_k = B_k = B_k(0)$
$\widetilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ B_k(x-n) & \text{für} \quad n \le x < n+1 \quad \text{wobei } n \ge 1\end{cases}$
Satz 5.44.: Sei $f : [0,n] \longrightarrow \mathbb{R}k$ -mal stetig differenzierbar, $k \ge 1$. Dann gilt:

1. Für $k = 1$:
$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \widetilde{B}_1(x)f'(x)dx$
2. Für $k \ge 2$: $\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!}\left(f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)\right) + \widetilde{R}_k$ wobei
$\widetilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^n \widetilde{B}_k(x)f^{(k)}(x)dx$

Bemerkung 5.45.: $f(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} + \cdots$ hat einen positiven Konvergenzradius.
Anwendung 5.46.:
$1^l + 2^l + \cdots + n^l = \frac{1}{l+1}\sum_{j=0}^l (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$

Stirling'sche Formel

Satz 5.47.: $n! = \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}\cdot\exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$ wobei $|R_3(n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \forall n \ge 1$.
Lemma 5.48.: $\forall m \ge n+1 \ge 1 : |R_3(m,n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$.
Wallis' Produkt:
$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n2n}{(2n-1)(2n+1)}\cdots = \prod_{i=1}^\infty \frac{(2i)(2i)}{(2i-1)(2i+1)}$

Uneigentliche Integrale

Definition 5.49.: Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_a^\infty f(x)dx$ und sagen, dass f auf $[a, +\infty[$ integrierbar ist.
Beispiel 5.50.:

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$
2. $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \ln b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{sonst.} \end{cases}$ Somit:
   $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \text{divergiert,} & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1. \end{cases}$

Lemma 5.51.: Sei $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b > a$.

1. Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.
2. Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$.

Satz 5.53 (McLaurin 1742): Sei $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.
Definition 5.56.: In dieser Situation ist $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, falls $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existiert; in diesem Fall wird der Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Die Gamma Funktion

Definition 5.59.: Für $s > 0$ definieren wir
$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx. = (s-1)!$
Satz 5.60 (Bohr-Mollerup):

1. Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen
   (a) $\Gamma(1) = 1$
   (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
   (c) Γ ist logarithmisch konvex, das heisst $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.
2. Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ die $(a), (b)$ und (c) erfuillt. Darüber hinaus gilt: $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \forall x > 0.$

Lemma 5.61.: Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Dann gilt $\forall a, b \geq 0 : a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
Satz 5.62. (Hoelder Ungleichung): Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt:
$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Das unbestimmte Integral

$\int f(x)dx = F(x) + C$
Integrale

- $\int x^s dx = \begin{cases} \frac{x^{s+1}}{s+1} + C & s \neq -1 \\ \ln x + C & (x > 0) \end{cases}$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arsinh} x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh} x + C.$
- $\int \sin(x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} + C$
- $\int \cos(x)^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} + C$
- $\int \sin(x) \cdot \cos(x)dx = -\frac{\cos(x)^2}{2} + C$

Formeln für Integrale

- $\int_a^b f(qx + c) = \frac{1}{q}(F(qb + c) - F(qa + c))$
- $\int_a^b f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{f(b)} - e^{f(a)}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = ln(f(x))$

Partielle Integration: $\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$
Substitution: $F \circ \phi(u) = \int f(\phi(u))\phi'(u)du$

Stammfunktionen von rationalen Funktionen

$Q(x) = \prod_{j=1}^l \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^k (x-\gamma_i)^{n_i}$
Satz 5.65.: (Partialbruchzerlegung) Seien P, Q Polynome mit $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$ und Q mit Produktzerlegung. Dann gibt es A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} reelle Zahlen mit
$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij}+B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}.$
Beispiel einer Partialbruchzerlegung:
Gegeben sei $\frac{x^2-2}{x^3+x^2+x+1}$. Falls der Bruch im Zähler einen grösseren Grad hat, so führe eine Polynomdivision durch, wir erhalten dann direkt zwei Polynome, die sich einfach integrieren lassen. Im unseren Fall müssen wir aber folgendermassen vorgehen: Wir müssen von $x^3 + x^2 + x + 1$ die Nullstellen finden. Wir erhalten $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1) \cdot (x^2+1)$ (hier ist (x^2+1) eine komplexe Nullstelle). Es folgt $\frac{x^2-2}{(x+1)\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$. Für komplexe Nullstellen brauchen wir einen Ausdruck $Bx + C$ im Zähler. Löse das Gleichungssystem und wir erhalten die Partialbruchzerlegung, die wir einfach integrieren können. In diesem Beispiel erhalten wir am Schluss $x^2 + 1 = x^2 \cdot (A + B) + x \cdot (B + C) + (A + C)$. Daraus können wir die Werte für A, B und C ablesen.

Der Binomialsatz

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$
Binomische Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Satz A.1 (Binomialsatz): $\forall x, y \in \mathbb{C}, n \geq 1$ gilt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Schnell Notizen

Konvergenz von Bijektionen
Wenn eine Funktion konvergiert, dann konvergieren auch alle Bijektionen.
Konvergenz zeigen
Cauchykriterium + absolute Konvergenz
Konvexität
Falls $\forall n \geq 1 : f_n$ konvex ist und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, dann ist f auch konvex.
Sinus
Der sinus ist auf dem Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend.
Teleskopsumme
$\sum_{n=1}^n a_{n-1} - a_n = a_1 - a_n$
nicht gleichmäsig stetig
$\exists \epsilon > 0 \forall > 0 \exists x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$
Unnötige Fehler:

1. Rücksubstitution bei Integral nicht vergessen.

Integrale:
$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ falls $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$.
Integral einer Nullmenge:
Das Integral einer Nullmenge ist 0.
negativ definit:
Wenn Determinante alterniert, d.h. $- + - + \ldots$.

Analysis 2 - Cheatsheet

Ordinary differential equations

Linear differential equations

Theorem 2.1.6.: Suppose $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is a differentiable function of two variables. Let $x_0\in\mathbb{R}$ and $y_0\in\mathbb{R}^2$. Then the ordinary differential equation $y'=F(x,y)$ has a unique solution f defined on a largest open interval I containing x_0 such that $f(x_0)=y_0$. In other words, there exists I and a function $f:I\to\mathbb{R}$ such that for all $x\in I$, we have $f'(x)=F(x,f(x))$, and one cannot find a larger interval containing I with such a solution.

DEFINITION 2.2.1.: Let $I\subset\mathbb{R}$ be an open interval and $k\geqslant 1$ an integer. An homogeneous linear ordinary differential equation of order k on I is an equation of the form $y^{(k)}+a_{k-1}y^{(k-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ where the coefficients $a_0,\ldots,a_{k-1}$ are complex-valued functions on I, and the unknown is a complex-valued function from I to C that is k-times differentiable on I. An equation of the form $y^{(k)}+a_{k-1}y^{(k-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b$, where $b:I\to\mathbb{C}$ is another function, is called an inhomogeneous linear ordinary differential equation, with associated homogeneous equation the one with $b=0$.

THEOREM 2.2.3.: Let $I\subset\mathbb{R}$ be an open interval and $k\geqslant 1$ an integer, and let $y^{(k)}+a_{k-1}y^{(k-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ be a linear differential equation over I with continuous coefficients.

1. (a) The set $\mathcal{S}$ of k-times differentiable solutions $f:I\to\mathbb{C}$ of the equation is a complex vector space which is a subspace of the space of complex-valued functions on I.

   (b) If the functions a_i are real-valued, the set $\mathcal{S}$ of real-valued solutions is a real vector space which is a subspace of the space of real-valued functions on I.

2. (a) The dimension of $\mathcal{S}$ is k, and for any choice of $x_0\in I$ and any $(y_0,\ldots,y_{k-1})\in\mathbb{C}^k$, there exists a unique $f\in\mathcal{S}$ such that $f(x_0)=y_0,\quad f'(x_0)=y_1,\quad\ldots,\quad f^{(k-1)}(x_0)=y_{k-1}$.

   (b) If the functions a_i are real-valued, the dimension of the space of real-valued solutions, as a real vector space, is k, and for any choice of $x_0\in I$ and any $(y_0,\ldots,y_{k-1})\in\mathbb{R}^k$, there exists a unique real-valued solution f such that $f(x_0)=y_0,\quad f'(x_0)=y_1,\quad\ldots,\quad f^{(k-1)}(x_0)=y_{k-1}$. If b and the coefficients a_i are real-valued, there exists a real-valued solution.

3. Let b be a continuous function on I. There exists a solution fo to the inhomogeneous equation $y^{(k)}+a_{k-1}y^{(k-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b$, and the set $\mathcal{S}_b$ is the set of functions $f+f_0$ where $f\in\mathcal{S}$.

4. For any $x_0\in I$ and any $(y_0,\ldots,y_{k-1})\in\mathbb{C}^k$, there exists a unique $f\in\mathcal{S}_b$ such that $f(x_0)=y_0,\quad f'(x_0)=y_1,\quad\ldots,\quad f^{(k-1)}(x_0)=y_{k-1}$.

Linear differential equations of order 1

PROPOSITION 2.3.1.: Any solution of $y'+ay=0$ is of the form $f(x)=z\exp(-A(x))$ where A is a primitive of a. The unique solution with $f(x_0)=y_0$ is $f(x)=y_0\exp(A(x_0)-A(x))$.

PROPOSITION for inhomogeneous System:

1. solve $y'+a\cdot y=0$
2. let be f a specific solution of $y'+a\cdot y=b$
3. The set of solutions of $y'+a\cdot y=b$ is $L_b=f+L$, where L is the set of soltutions of $y'+a\cdot y=0$ i.e. $L=\{f(x)=z\exp(-A(x))|z\in\mathbb{C}\}$
4. now we solve $z'(x)=b(x)\exp(A(x))$ with $f_0(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right)\int_{x_0}^x b(t)\exp\left(\int_{x_0}^t a(u)du\right)dt$

Bsp. 1.9: Sei $a\in\mathbb{C}$ und b ein Polynom, dann gibt es ein Polynom f mit $f'+af=b$.

Well-founded guessing

If $b(x)$ is of a certain form, we try the following f_p:

$b(x)$	guess
$a\cdot e^{\alpha x}$	$b\cdot e^{\alpha x}$
$a\sin(\beta x)$	$c\sin(\beta x)+d\cos(\beta x)$
$b\cos(\beta x)$	$c\sin(\beta x)+d\cos(\beta x)$
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(c\sin(\beta x)+d\cos(\beta x)\right)$
$be^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(c\sin(\beta x)+d\cos(\beta x)\right)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$R_n(x)\cdot e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(R_n(x)\sin(\beta x)+S_n(x)\cos(\beta x)\right)$
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(R_n(x)\sin(\beta x)+S_n(x)\cos(\beta x)\right)$

Linear differential equations with constant coefficients

Definition: For a linear ODE with const. coeff.$P(\lambda)=\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_0=0$ is called the characteristic polynomial of the hom. ODE. The zeroes of $P(\lambda)$ are the eigenvalues.

1. **No multiple roots:** Solve $P(\lambda)\overset{!}{=}0$ and get a solution for the homogeneous equation:$f_h(x)=\sum_{j=1}^k C_je^{\lambda_jx},\quad C_j\in\mathbb{C}$. Note, that for all pairs of complex conjugate roots $\lambda_{j,j+1}=\beta_j\pm i\gamma_j$, we can find real solutions by replacing $C_je^{\lambda_jx}+C_{j+1}e^{\lambda_{j+1}x}$ with $Z_1e^{\beta x}\cos(\gamma_jx)+Z_2e^{\beta x}\sin(\gamma_jx)$
2. **Multiple roots:** We can find a basis for the space of solutions $\mathcal{S}_h$: $\mathcal{S}_h=\bigcup_{i=0}^k\left(\bigcup_{j=0}^{m(\lambda_i)-1}x^je^{\lambda_ix}\right)$ where $m(\lambda_i)$ is the multiplicity of λ_i.

We conclude that f is a solution of the homogeneous equation if and only if $P(\alpha)=0$

Kol. 1.12: If α l is times zero in P, the function $e^{\alpha x},xe^{\alpha x},\ldots x^{l-1}e^{\alpha x}$ l are linearly independent solutions.

Method of variations of constants (k = 2) : We assume that a basis f_1,f_2 of the space $\mathcal{S}_h$ of solutions of y_h has been found. We search for the particular solution of the form $y_p=z_1(x)f_1(x)+z_2(x)f_2(x)$:

$$z_1'f_1+z_2'f_2=0$$
$$z_1'f_1'+z_2'f_2'=b$$

Note, that the determinant, i.e. $f_1f_2'-f_1'f_2$, of this system will not vanish, since (f_1,f_2) is a basis of $\mathcal{S}$. We define $W(x)=f_1\cdot f_2'-f_2\cdot f_1'$ and get as solution

$$z_1'=-\frac{f_2b}{W}$$
$$z_2'=\frac{f_1b}{W}$$

If we integrate we will finaly get $f(x)=-f_1(x)\int_{x_0}^x\frac{f_2(t)b(t)}{W(t)}dt+f_2(x)\int_{x_0}^x\frac{f_1(t)b(t)}{W(t)}dt$.

Differential calculus in $\mathbb{R}^n$

Continuity in $\mathbb{R}^n$

Euclidean norm of a function in $\mathbb{R}^n$ $\|x\|:=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. It satisfies the following properties:

1. $\|x\|\geq 0$, and $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$
2. $\|tx\|=|t|\|x\|$ for all $t\in\mathbb{R}$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (triangle inequality).

Def. 3.2.1.: Let $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ where $x_k\in\mathbb{R}^n$. Write $x_k=(x_{k,1},\ldots,x_{k,n})$. Let $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. We say that the sequence (x_k) converges to y as $k\to+\infty$ if for all $\varepsilon>0$, there exists $N\geqslant 1$ such that for all $n\geqslant N$, we have $\|x_k-y\|<\varepsilon$.

Lemma 3.2.2.: The sequence (x_k) converges to y as $k\to+\infty$ if and only if one of the following equivalent conditions holds:

1. For each $i,1\leqslant i\leqslant n$, the sequence $(x_{k,i})$ of real numbers converges to y_i.
2. The sequence of real numbers $\|x_k-y\|$ converges to 0 as $k\to+\infty$.

Def. 3.2.3.: Let $X\subset\mathbb{R}^n$ and $f:X\to\mathbb{R}^m$.

1. Let $x_0\in X$. We say that f is continuous at x_0 if for all $\varepsilon>0$, there exists $\delta>0$ such that, if $x\in X$ satisfies $\|x-x_0\|<\delta$, then
$$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon.$$
2. We say that f is continuous on X if it is continuous at x_0 for all $x_0\in X$.

Pro. 3.2.4.: Let $X\subset\mathbb{R}^n$ and $f:X\to\mathbb{R}^m$. Let $x_0\in X$. The function f i continuous at x_0 if and only if, for every sequence $(x_k)_{k\geqslant 1}$ in X such that $x_k\to x_0$ a. $k\to+\infty$, the sequence $(f(x_k))_{k\geqslant 1}$ in $\mathbb{R}^m$ converges to $f(x)$.

Def. 3.2.5.: Let $X\subset\mathbb{R}^n$ and $f:X\to\mathbb{R}^m$. Let $x_0\in X$ and $y\in\mathbb{R}^m$. We say that f has the limit y as $x\to x_0$ with $x\neq x_0$ if for every $\varepsilon>0$, there exists $\delta>0$, such that for all $x\in X,x\neq x_0$, such that $\|x-x_0\|<\delta$, we have $\|f(x)-y\|<\varepsilon$. We then write

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}}f(x)=y$$

Prob. 3.2.7.: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ and $f : X \to \mathbb{R}^m$. Let $x_0 \in X$ and $y \in \mathbb{R}^m$. We have

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y$$

if and only if, for every sequence (x_k) in X such that $x_k \to x$ as $k \to +\infty$, and $x_k \neq x_0$ the sequence $(f(x_k))$ in $\mathbb{R}^m$ converges to y.
Prob. 3.2.9.: Let $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ and $p \geqslant 1$ an integer. Let $f : X \to Y$ and $g : Y \to \mathbb{R}^p$ be continuous functions. Then the composite $g \circ f$ is continuous. Note, that also $f + g, f \cdot g$ and, if $g(x) \neq 0, \forall x \in X f/g$ are continuous. The Cartesian products of continuous functions, any linear map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and functions of separated variables are continuous.
Definition 3.2.11.:

1. A subset $X \subset \mathbb{R}^n$ is bounded if the set of $\|x\|$ for $x \in X$ is bounded in $\mathbb{R}$.
2. A subset $X \subset \mathbb{R}^n$ is closed if for every sequence (x_k) in X that converges in $\mathbb{R}^n$ to some vector $y \in \mathbb{R}^n$, we have $y \in X$.
3. A subset $X \subset \mathbb{R}^n$ is compact if it is bounded and closed.

Prob. 3.2.13.: Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a continuous map. For any closed set $Y \subset \mathbb{R}^m$, the set $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$. This holds in both sides.
Theorem 3.2.15: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be a non-empty compact set and $f : X \to \mathbb{R}$ a continuous function. Then f is bounded and achieves its maximum and minimum, or in other words, there exist $x_+$and x_-in X such that
$f(x_+) = \sup_{x \in X} f(x), \quad f(x_-) = \inf_{x \in X} f(x)$.

Partial derivatives

Def 3.3.1: A subset $X \subset \mathbb{R}^n$ is open if, for any $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, there exists $\delta > 0$ such that the set $\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \delta \text{ for all } i\}$ is contained in X. In other words: any point of $\mathbb{R}^n$ obtained by changing any coordinate of x by at most δ is still in X.
Prob. 3.3.2: A set $X \subset \mathbb{R}^n$ is open if and only if the complement $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin X\}$.
Corollary 3.3.3: If $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is continuous and $Y \subset \mathbb{R}^m$ is open, then $f^{-1}(Y)$ is open in $\mathbb{R}^n$.
Def. 3.3.5: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. Let $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a function. Let $1 \leqslant i \leqslant n$. We say that f has a partial derivative on X with respect to the i-th variable, or coordinate, if for all $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \in X$, the function defined by $g(t) = f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \ldots, x_{0,n})$ on the set $I = \{t \in \mathbb{R} : (x_{0,1}, \ldots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \ldots, x_{0,n}) \in X\}$ is differentiable at $t = x_{0,i}$. Its derivative $g'(x_{0,i})$ at $x_{0,i}$ is denoted $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \partial_{x_i} f(x_0), \partial_i f(x_0)$.
Prob. 3.3.7: Consider $X \subset \mathbb{R}^n$ open and f, g functions from X to $\mathbb{R}^m$. Let $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. If f and g have partial derivatives with respect to the i-th coordinate on X, then $f + g$ also does, and $\partial_{x_i}(f+g) = \partial_{x_i}(f) + \partial_{x_i}(g)$.
2. If $m = 1$, and if f and g have partial derivatives with respect to the i-th coordinate on X, then fg also does and $\partial_{x_i}(fg) = \partial_{x_i}(f)g + f\partial_{x_i}(g)$.
3. Furthermore, if $g(x) \neq 0$ for all $x \in X$, then f/g has a partial derivative with respect to the i-th coordinate on X, with $\partial_{x_i}(f/g) = \left(\partial_{x_i}(f)g - f\partial_{x_i}(g)\right)/g^2$.

Def. 3.3.9: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ open and $f : X \to \mathbb{R}^m$ a function with partial derivatives on X. Write $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. For any $x \in X$, the matrix $J_f(x) = \left(\partial_{x_j} f_i(x)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ with m rows and n columns is called the Jacobi matrix of f at x.
Def. 3.3.11: (Gradient, Divergence). Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open.

1. Let $f : X \to \mathbb{R}$ be a function. If all partial derivatives of f exist at $x_0 \in X$, then the column vector

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \cdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

is called the gradient of f at x_0, and is denoted $\nabla f(x_0)$.

2. Let $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ be a function with values in $\mathbb{R}^n$ such that all partial derivatives of all coordinates f_i of f exist at $x_0 \in X$. Then the real number

$$\operatorname{Tr}\left(J_f(x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i(x_0)$$

the trace of the Jacobi matrix, is called the divergence of f at x_0, and is denoted $\operatorname{div}(f)(x_0)$.

The differential

Def. 3.4.2.: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a function. Let u be a linear map $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and $x_0 \in X$. We say that f is differentiable at x_0 with differential u if $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|}\left(f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\right) = 0$ where the limit is in $\mathbb{R}^m$. We then denote $df(x_0) = u$. If f is differentiable at every $x_0 \in X$, then we say that f is differentiable on X.
Prob. 3.4.4: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a function that is differentiable on X.

1. The function f is continuous on X.
2. The function f admits partial derivatives on X with respect to each variable.
3. Assume that $m = 1$. Let $x_0 \in X$, and let

$$u(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

be the differential of f at x_0. We then have

$$\partial_{x_i} f(x_0) = a_i$$

for $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prob. 3.4.6: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open, $f : X \to \mathbb{R}^m$ and $g : X \to \mathbb{R}^m$ differentiable functions on X.

1. The function $f + g$ is differentiable with differential $d(f+g) = df + dg$, and if $m = 1$, then fg is differentiable.
2. If $m = 1$ and if $g(x) \neq 0$ for all $x \in X$, then f/g is differentiable.

Prob. 3.4.7: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open, $f : X \to \mathbb{R}^m$ a function on X. If f has all partial derivatives on X, and if the partial derivatives of f are continuous on X, then f is differentiable on X, with differential determined by its partial derivatives, in the sense that the matrix of the differential $df(x_0)$, with respect to the canonical basis of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$, is the Jacobi matrix of f at x_0.
Prob. 3.4.9(Chain rule): Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open, $Y \subset \mathbb{R}^m$ be open, and let $f : X \to Y$ and $g : Y \to \mathbb{R}^p$ be differentiable functions. Then $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ is differentiable on X, and for any $x \in X$, its differential is given by the composition

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0).$$

In particular, the Jacobi matrix satisfies

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) J_f(x_0)$$

where the right-hand side is a matrix product.
Def. 3.4.1.: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}^m$ a function that is differentiable. Let $x_0 \in X$ and $u = df(x_0)$ be the differential of f at x_0. The graph of the affine linear approximation

$$g(x) = f(x_0) + u(x - x_0)$$

from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$, or in other words the set

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x_0) + u(x - x_0)\}$$

is called the tangent space at x_0 to the graph of f.
Def. 3.4.13: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be an open set and let $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a function. Let $v \in \mathbb{R}^n$ be a non-zero vector and $x_0 \in X$. We say that f has directional derivative $w \in \mathbb{R}^m$ in the direction v, if the function g defined on the set

$$I = \{t \in \mathbb{R} : x_0 + tv \in X\}$$

by

$$g(t) = f(x_0 + tv)$$

has a derivative at $t = 0$, and this is equal to w. In other words, this means that the limit $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ exists and is equal to w.
Prob. 3.4.15: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be an open set and let $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a differentiable function. Then for any $x \in X$ and non-zero $v \in \mathbb{R}^n$, the function f has a directional derivative at x_0 in the direction v, equal to $df(x_0)(v)$.

Higher derivatives

Def. 3.5.1: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}^m$. We say that f is of class C^1 if f is differentiable on X and all its partial derivatives are continuous. The set of functions of class C^1 from X to $\mathbb{R}^m$ is denoted $C^1(X; \mathbb{R}^m)$. Let $k \geqslant 2$. We say, by induction, that f is of class C^k if it is differentiable and each partial derivative $\partial_{x_i} f : X \to \mathbb{R}^m$ is of class C^{k-1}. The set of functions of class C^k from X to $\mathbb{R}^m$ is denoted $C^k(X; \mathbb{R}^m)$. If $f \in C^k(X; \mathbb{R}^m)$ for all $k \geqslant 1$, then we say that f is of class C^∞. The set of such functions is denoted $C^\infty(X; \mathbb{R}^m)$.
Prob. 3.5.4 (Mixed derivatives commute): Let $k \geqslant 2$. Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and let $f : X \to \mathbb{R}^m$ be a function of class C^k. Then the partial derivatives of order k are independent of the order in which the partial derivatives are taken: for any variables x and y,

we have $\partial_{x,y} f = \partial_{y,x} f$ and for any variables x, y, z, we have $\partial_{x,y,z} f = \partial_{x,z,y} f = \partial_{y,z,x} f = \partial_{z,x,y} f = \cdots$.

Def. 3.5.9 (Hessian): Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ a C^2 function. For $x \in X$, the Hessian matrix of f at x is the symmetric square matrix $\text{Hess}_f(x) = \left(\partial_{x_i,x_j} f\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. We also sometimes write simply $H_f(x)$.

Taylor polynomials

Def. 3.7.1 (Taylor polynomials): Let $k \geqslant 1$ be an integer. Let $f : X \to \mathbb{R}$ be a function of class C^k on X, and fix $x_0 \in X$. The k-th Taylor polynomial of f at the point x_0 is the polynomial in n variables of degree $\leqslant k$ given by $T_k f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, y_i + \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}(x_0)\, y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$ where the last sum ranges over the tuples of n non-negative integers such that the sum is k.

Taylor polynomials for $k = 1$**:** $T_2 f((x,y);(x_0,y_0)) = f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \text{Hess}_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Prob 3.7.3 (Taylor approximation) Let $k \geqslant 1$ be an integer. Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ be a function of class C^k. For x_0 in X, if we define $E_k f(x; x_0)$ by

$$f(x) = T_k f(x - x_0; x_0) + E_k f(x; x_0)$$

then we have

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{E_k f(x; x_0)}{\|x - x_0\|^k} = 0$$

Critical points

Prob. 3.8.1: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ a differentiable function. If $x_0 \in X$ is such that $f(y) \leqslant f(x_0)$ for all y close enough to x_0 (local maximum at x_0) or $f(y) \geqslant f(x_0)$ for all y close enough to x_0 (local minimum at x_0). Then we have $df(x_0) = 0$, or in other words $\nabla f(x_0) = 0$, or equivalently

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

for $1 \leqslant i \leqslant n$.

Def. 3.8.2 (Critical point): Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ a differentiable function. A point $x_0 \in X$ such that $\nabla f(x_0) = 0$ is called a critical point of the function f.

Def. 3.8.6 (Non-degenerate critical point): Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ a function of class C^2. A critical point $x_0 \in X$ of f is called non-degenerate if the Hessian matrix has non-zero determinant.

Corollary 3.8.7: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and $f : X \to \mathbb{R}$ a function of class C^2. Let x_0 be a non-degenerate critical point of f. Let p and q be the number of positive and negative eigenvalues of $\text{Hess}_f(x_0)$.

1. If $p = n$, equivalently if $q = 0$, the function f has a local minimum at x_0.
2. If $q = n$, equivalently if $p = 0$, the function f has a local maximum at x_0.
3. Otherwise, equivalently if $pq \neq 0$, the function f does not have a local extremum at x_0. One then says that f has a saddle point at x_0.

In general: If $K \subset \mathbb{R}^n$ is a compact subset and $f : K \to \mathbb{R}$ continuous, disassemble $K = X \cup B$, where X is open, the „inside" of K and B is the „edge" of K. Now if moreover f is differentiable on X so:

1. determine the critical points of f on X
2. determine maxima and minima $f|_B$

Lagrange multipliers

Prob. 3.9.2: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be open and let $f : X \to \mathbb{R}$ and $g : X \to \mathbb{R}$ be functions of class C^1. If $x_0 \in X$ is a local extremum of the function f restricted to the set

$$Y = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

then either $\nabla g(x_0) = 0$, or there exists $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0) \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

or in other words, there exists λ such that (x_0, λ) is a critical point of the differentiable function $h : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$h(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x).$$

Such a value λ is called a Lagrange multiplier at x_0. To determine the maximas and minimas, we need to solve the system of equations shown above.

Integration in $\mathbb{R}^n$

Line integrals

Def. 4.1.1:

1. Let $I = [a, b]$ be a closed and bounded interval in $\mathbb{R}$. Let $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ be a continuous function from I to $\mathbb{R}^n$, i.e., f_i is continuous for $1 \leqslant i \leqslant n$. Then we define
$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t), \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right) \in \mathbb{R}^n.$$
2. A parameterized curve in $\mathbb{R}^n$ is a continuous map $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ that is piecewise C^1, i.e., there exists $k \geqslant 1$ and a partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ such that the restriction of f to $]t_{j-1}, t_j[$ is C^1 for $1 \leqslant j \leqslant k$. We say that γ is a parameterized curve, or a pathx, between $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$.
3. Let $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ be a parameterized curve. Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be a subset containing the image of γ, and let $f : X \to \mathbb{R}^n$ be a continuous function. The integral
$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \in \mathbb{R}$$
is called the line integral of f along γ. It is denoted
$$\int_\gamma f(s) \cdot ds, \quad \text{or} \quad \int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s}.$$

Def. 4.1.4: Let $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ be a parameterized curve. An oriented reparameterization of γ is a parameterized curve $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ such that $\sigma = \gamma \circ \varphi$, where $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ is a continuous map, differentiable on $]a, b[$, that is strictly increasing and satisfies $\varphi(a) = c$ and $\varphi(b) = d$.

Prob. 4.1.5: Let γ be a parameterized curve in $\mathbb{R}^n$ and σ an oriented reparameterization of γ. Let X be a set containing the image of γ, or equivalently the image of σ, and $f : X \to \mathbb{R}^n$ a continuous function. Then we have $\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = \int_\sigma f(s) \cdot d\vec{s}$.

Remark: If a function is piecewise continuous, then it is also Riemann integrable.

Def. 4.1.8: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ and $f : X \to \mathbb{R}^n$ a continuous vector field. If, for any x_1, x_2 in X, the line integral $\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s}$ is independent of the choice of a parameterized curve γ in X from x_1 to x_2, then we say that the vector field is conservative.

Remark 4.1.9: Equivalently, f is conservative if and only if $\int_\gamma f(s) \cdot d\vec{s} = 0$ for any closed parameterized curve in X (where a curve is said to be closed if $\gamma(a) = \gamma(b)$).

Theorem 4.1.10: Let X be an open set and f a conservative vector field. Then there exists a C^1 function g on X such that $f = \nabla g$. If any two points of X can be joined by a parameterized curve, then g is unique up to addition of a constant: if $\nabla g_1 = f$, then $g - g_1$ is constant on X.

Def. path-connected: To say that any two points of X can be joined by a parameterized curve means that, for all x and y in X, there exists a parameterized curve $\gamma : [a, b] \to X$ such that $\gamma(a) = x$ and $\gamma(b) = y$. When this is true, we say that X is path-connected. This is the case for instance when X is a disc in the plane, or a product of intervals. More generally, it is true whenever X is convex, which means that for any x and y in X, the line segment joining x to y is contained in X (this is because such a line segment is the image of a parameterized curve, as we saw in Example 4.1.2 (1)).

Def. potential: If f is a conservative vector field on X, then a function g such that $\nabla g = f$ is called a potential for f. Note that it is not unique, since at least it is possible to add a constant to g without changing the gradient.

Prob. 4.1.13: Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be an open set and $f : X \to \mathbb{R}^n$ a vector field of class C^1. Write $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ If f is conservative, then we have $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ for any integers with $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Def. 4.1.15: A subset $X \subset \mathbb{R}^n$ is star shaped if there exists $x_0 \in X$ such that, for all $x \in X$, the line segment joining x_0 to x is contained in X. We then also say that X is star-shaped around x_0.

Theorem 4.1.17: Let X be a star-shaped open subset of $\mathbb{R}^n$. Let f be a C^1 vector field such that

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

on X for all $i \neq j$ between 1 and n. Then the vector field f is conservative.

Def. simply continuous: A set X is simply continuous if every parametrized curve contained in X can be continuously contracted to a point. Thus $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ is not simply continuous but $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ is.

Remark: The requirement that X is star-shaped is not necessary. Intuitively, the correct hypothesis on X should be that there is no „hole" in the middle around which a circle can go without it being possible to contract it within X, in other words, if X is open and simply continuous.

The Riemann integral in $\mathbb{R}^n$

Def. Riemann integral in $\mathbb{R}^n$: Let $f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ be bounded. Then f is called integrable on R if

$$\sup_{(P_x,P_y)} s(P_x,P_y) = \inf_{(P_x,P_y)} S(P_x,P_y)$$

where $s(P_x,P_y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \inf_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(y_i - y_{i-1})$,
$S(P_x,P_y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup_{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} f(x,y)\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(y_i - y_{i-1})$ and P_x is a partition of $[a,b]$ and P_y of $[c,d]$. The common value is defined as $\int_R f(x,y)d(x,y)$ or $\int\int_R f(x,y)d(x,y)$.

Def. characteristic function: $\mathcal{X}_A(x) = 1$ if $x \in A$ and $\mathcal{X}_A(x) = 0$ if $x \notin A$.

Def. integrable with characteristic function: F is integrable on A if $f\cdot\mathcal{X}_A$, where $\mathcal{X}_A$ denotes the characteristic function of A, is integrable on R. Then $\int_R f(x,y)\cdot\mathcal{X}_A(x,y)d(x,y)$ is denoted by $\int_A f(x,y)d(x,y)$.

The integral satisfies the following properties:

1. (Compatibility) If $n = 1$ and $X = [a,b]$ is an interval (with $a \leqslant b$), then the integral of f over X is the Riemann integral of f :
$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
2. (Linearity) If f and g are continuous on X and a,b are real numbers, then
$$\int_X (af_1(x) + bf_2(x))\,dx = a\int_X f_1(x)dx + b\int_X f_2(x)dx.$$
3. (Positivity) If $f \leqslant g$, then
$$\int_X f(x)dx \leqslant \int_X g(x)dx$$
and especially, if $f \geqslant 0$, then
$$\int_X f(x)dx \geqslant 0$$
Moreover, if $Y \subset X$ is compact and $f \geqslant 0$, then
$$\int_Y f(x)dx \leqslant \int_X f(x)dx.$$
4. (Upper bound and triangle inequality) In particular, since $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, we have
$$\left|\int_X f(x)dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|dx,$$
and since $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, we have
$$\left|\int_X (f(x)+g(x))dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|dx + \int_X |g(x)|dx.$$
5. (Volume) If $f = 1$, then the integral of f is the "volumeïn $\mathbb{R}^n$ of the set X, and if $f \geqslant 0$ in general, the integral of f is the volume of the set
$$\{(x,y) \in X\times\mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$
In particular, if X is a bounded rectangle", say
$$X = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$$
and $f = 1$, then
$$\int_X dx = (b_n - a_n)\cdots(b_1 - a_1).$$
We write $\mathrm{Vol}(X)$ or $\mathrm{Vol}_n(X)$ for the volume of X.

All following propositions and lemmas are from the handnotes of Prof. Burger

Prob. 3.30: Let $R = [a,b]\times[c,d]$ be a compactx rectangle and $f : R \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f is integrable on R.

Prob. 3.31: Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a compact subset and $f : K \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f is uniformly continuous.

Def. 3.32 Let $X \subset R \subset \mathbb{R}^2$ be. Then X is a null set (in $\mathbb{R}^2$) if there are $\forall\epsilon > 0$ finitely many rectangles $R_k = [a_k,b_k]\times[c_k,d_k]$ with $1 \le k \le n$ such that $X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k$, $\sum_{k=1}^n \mathrm{Vol}(R_k) < \epsilon$.

Lemma 3.33: Let $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ be a Lipschitz curve, i.e. $\|\rho(s) - \rho(t)\| \le M\cdot|s-t|\forall s,t \in [0,1]$. Then the image $\rho([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ is a null set.

Prob. 3.35: Let $f : R \to \mathbb{R}$ be bounded. Let be $X = \{(x,y) \in R | f \text{ is not continuous in } (x,y)\}$. If X is a null set, then f is integrable on R.

Prob. 3.36: Let be $A = \{(x,y) | a \le x \le b, \rho_1(x) \le y \le \rho_2(x)\}$. Let $f : A \to \mathbb{R}$ be continuous. Then f is integrable on A and the following is true

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b dx \int_{\rho_1(x)}^{\rho_2(x)} f(x,y)dy.$$

Lemma 3.37: Let $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ be continuous. Then the set $\{(x,\rho(x) | x \in [a,b])\} \subset \mathbb{R}^2$ is a null set.

Remark: Let $f : R \to \mathbb{R}$ be integrable and $R = [a,b]\times[c,d]$. Let us assume that $\forall y \in [c,d]\ [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x,y)$ is integrable. Then it follows that $y \mapsto \int_a^b f(x,y)d(x,y)$ is integrable on $[c,d]$ and $\int_R f(x,y)d(x,y) = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$.

Prob. 3.38: Let $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$ and $\bar{Y} \subset \mathbb{R}^n$ be compact subsets. Let $\varphi : \bar{X} \to \bar{Y}$ be a continuous map. We assume that we can write

$$\bar{X} = X \cup B, \quad \bar{Y} = Y \cup C$$

where

1. the sets X and Y are open
2. the sets B and C are negligible
3. the restriction of φ to the open set X is a C^1 bijective map from X to Y

In the situation described above, for any continuous function f on $\bar{Y}$, we have

$$\int_{\bar{X}} f(\varphi(x))\left|\det\left(J_\varphi(x)\right)\right|dx = \int_{\bar{Y}} f(y)dy.$$

Applications:

1. With Prob 3.38 we get $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. $B(\alpha,\epsilon) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\alpha+\epsilon)}$ where $B(\alpha,\epsilon) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\cdot t^{\epsilon-1}dt$.

The Green formula

Def. 3.39: A simple closed parameterized curve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ is a closed parameterized curve such that $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ unless $t = s$ or $\{s,t\} = \{a,b\}$, and such that $\gamma'(t) \neq 0$ for $a < t < b$. (If γ is only piecewise C^1 inside $]a,b[$, this condition only applies where $\gamma'(t)$ exists).

Positive oriented basis: A basis (b_1,b_2) of $\mathbb{R}^2$ is positively oriented if the uniquely defined matrix $g \in G \subset (2,\mathbb{R})$ with $g(e_1) = b_1$, $g(e_2) = b_2$ has a positive determinant, i.e. $\det(g) > 0$ holds. If $\det(g) < 0$, g is negative oriented.

Def. 3.40: A regular domain is an open bounded subset $A \subset \mathbb{R}^2$ whose boundary ∂A is finite unions of disjoint Jords curves. Each of these curves is called a boundary component of A. Modulo oriented reparametrization can parametrize a Jordan curve in two ways: there are two circulant senses.

Def. positive orientation on ∂A: Let $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ be a parameterized Jordan curve such that $\gamma([a,b])$ forms a boundary component of A. Then γ has positive orbit with respect to A (or is positively oriented with respect to A) if $(n(t),\gamma'(t))$ form a positive oriented basis of $\mathbb{R}^2$, where $n(t)$ is the unit vector orthogonal to $\gamma'(t)$ and points outward with respect to A. I.e. the outer boundary must run counterclockwise and the inner boundary (if any) clockwise.

Theorem 3.41: Let $X \subset \mathbb{R}^2$ be a compact set with a boundary ∂X that is the union of finitely many simple closed parameterized curves $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$. Assume that

$$\gamma_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^2$$

has the property that X lies always „to the left" of the tangent vector $\gamma_i'(t)$ based at $\gamma_i(t)$. Let $f = (f_1,f_2)$ be a vector field of class C^1 defined on some open set containing X. Then we have

$$\int_{\partial X} f(s)ds = \int_X \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f\cdot d\vec{s}.$$

Applications:

1. Area: Let be $F(x,y) = (\frac{-1}{2}y, \frac{1}{2}x)$, then $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ and therefore $\mathrm{FL}(A) = \int_A 1dxdy = \int_{\partial A} F(s)ds$. If, for example, A is calculated from a Jordan curve γ, then we can calculate the area using $\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f\cdot d\vec{s}$.
2. Let $X \subset \mathbb{R}^2$ be open star-shaped with respect to $w_0 \in X$ and $F : X \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$ a C^1 vector field with $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$ in X. Then there is a C^2-function $g : X \to \mathbb{R}$ with $\nabla g = F$.
3. Let $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ be a parametrized Jordan curve. Then $\mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b]) = B \cup U$, where B, U are open, path coherent and B is bounded in addition. Let be $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b])$ and $F : \mathbb{R}^2\backslash\gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ a smooth vector field. Let be $W(\gamma,(x_0,y_0)) := \frac{1}{2\cdot\pi}\int_\gamma F(s)ds$. Then
$$W(\gamma,(x_0,y_0)) = \begin{cases} +1 \text{ if } (x_0,y_0) \in B \text{ and } \gamma \text{ ref. } B \text{ positively oriented} \\ -1 \text{ if } (x_0,y_0) \in B \text{ and } \gamma \text{ ref. } B \text{ negative oriented} \\ 0 \text{ if } (x_0,y_0) \in U \end{cases}$$