WuS - Cheatsheet

Wahrscheinlichkeitsräume

Grundraum

Terminologie: Die Menge Ω nennen wir Grundraum.

Ereignisse

Ein Element $\omega \in \Omega$ nennen wir Elementarereignis (oder Ausgang des Experiments).

Definition 1.1: Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heisst Sigma-Algebra (σ-Algebra), falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Dabei nennen wir die Elemente der σ-Algebra Ereignisse.

Wahrscheinlichkeitsmass

Definition 1.2: Sei Ω ein Grundraum und sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{F} &\to [0,1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}[A] \end{aligned}$$

heisst Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, falls folgende Eigenschaften gelten

1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
2. (σ-Additivität) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i] \quad$ if $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (disjunkte Vereinigung).

Der Wahrscheinlichkeitsraum

Definition 1.3: Sei Ω ein Grundraum, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung 1.4: Das Ereignis $A = \varnothing$ tritt niemals ein. Das Ereignis $A = \Omega$ tritt stets ein.

Definition 1.5: Sei Ω eine endlicher Grundraum. Das Laplace Modell auf Ω ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass

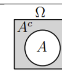
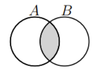
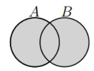
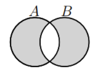
1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,
2. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

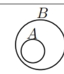
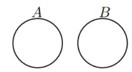
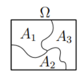
Eigenschaften von Ereignissen

Satz 1.6 (Abgeschlossenheit der σ-Algebra bzgl. Operationen): Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Es gilt

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$,
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$,
4. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ereignis	Grafische Darstellung	Probab. Interpretation
A^c		A tritt **nicht** ein
$A \cap B$		A **und** B treten ein
$A \cup B$		A **oder** B treten ein
$A \Delta B$		**Entweder** A oder B tritt ein

Beziehung/Interpretationen zwischen Ereignissen

Relation	Grafische Darstellung	Probab. Interpretation
$A \subset B$		B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \varnothing$		A und B können nicht gleichzeitig eintreten
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ wobei A_1, A_2, A_3 paarweise disjunkt		für jedes Elementarereignis ω, höchstens eins der Ereignisse A_1, A_2, A_3 kann eintreten.

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmassen

Satz 1.7: Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Es gilt:

1. $\mathbb{P}[\varnothing] = 0$
2. (Additivität) Sei $k \geq 1$, seien $A_1, \ldots, A_k$-viele paarweise disjunkte Ereignisse, dann gilt
$$\mathbb{P}[A_1 \cup \cdots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \cdots + \mathbb{P}[A_k]$$
3. Sei A ein Ereignis, dann gilt $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4. Falls A und B zwei (nicht notwendigerweise disjunkte) Ereignisse, dann gilt
$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

Nützliche Ungleichungen

Satz 1.8 (Monotonie): Seien $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.

Satz 1.9 (Union Bound): Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Ereignissen, dann gilt die folgende Ungleichung $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$.

Bemerkung 1.10: Die obrige Ungleichung gilt ebenfalls für eine Folge von endlich vielen nicht-leeren Ereignissen.

Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen

Satz 1.11: Sei (A_n) eine monoton wachsende Folge von Ereignissen $(\forall n : A_n \subset A_{n+1})$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} P[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]. \quad \text{monoton wachsender Grenzwert}$$

Sei (B_n) eine monoton fallende Folge von Ereignissen $\forall n : (B_n \supset B_{n+1})$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} P[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]. \quad \text{monoton fallender Grenzwert}$$

.

Bemerkung 1.12: Durch Monotonie erhalten wir $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$ für jedes n. Daher sind die Grenzwerte in den obrigen Gleichungen wohldefiniert.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 1.13 (Bedingte Wahrscheinlichkeit): Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien A, B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[B] > 0$. Wir definieren die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wie folgt

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Bemerkung 1.14: $\mathbb{P}[B \mid B] = 1$.

Satz 1.15: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei B ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Dann ist $\mathbb{P}[. \mid B]$ ein W-Mass auf Ω.

Satz 1.16 (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit): Sei $B_1, \cdots, B_n$ eine Partition[a] des Grundraums Ω, so dass $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_i]\, \mathbb{P}[B_i]$$

[a] i.e. $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ mit paarweise disjunkten Ereignissen.

Satz 1.17 (Satz von Bayes): Sei $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ eine Partition von Ω sodass, $\mathbb{P}[B_i] > 0$ für jedes i gilt. Für jedes Ereignis A mit $\mathbb{P}[A] > 0$ gilt

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \mathbb{P}[B_i \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid B_i]\, \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_j]\, \mathbb{P}[B_j]}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition 1.18 (Unabhängigkeit): Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse A und B heissen unabhängig falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$.

Bemerkung 1.19. Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$, dann ist A unabhängig von jedem Ereignis sodass,

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Falls ein Ereignis A unabhängig von sich selbst ist, also $\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$) gilt, dann muss $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ gelten. A ist unabhängig von B genau dann wenn A unabhängig von B^c ist.

Satz 1.20: Seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$, A und B sind unabhängig
2. $\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A]$, Eintreten von B hat keinen Einfluss auf A
3. $\mathbb{P}[B \mid A] = \mathbb{P}[B]$. Eintreten von A hat keinen Einfluss auf B

Definition 1.21: Sei I eine beliebe Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i\in I}$ heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{ endlich } \mathbb{P}\left[\bigcap_{j\in J} A_j\right] = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left[A_j\right].$$

Bemerkung: Drei Ereignisse A, B und C sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind (nicht nur die Letzte!):

$$\mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B],$$
$$\mathbb{P}[A\cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C],$$
$$\mathbb{P}[B\cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C],$$
$$\mathbb{P}[A\cap B\cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$$

Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Abstrakte Definition

Definition 2.1: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable (Z.V.) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sodass, für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

Indikatorfunktion: Sei $A \in \mathcal{F}$. Wir definieren die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ auf A, durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

.

Notation: Für Ereignisse im Bezug auf Z.V. werden wir auf darauf verzichten sie mittels Beziehung zu ω darzustellen. Stattdessen schreiben wir für $a \leq b$

$$\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$
$$\{a < X \leq b\} = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\},$$
$$\{X \in \mathbb{Z}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{Z}\}$$

Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit nach obigen Beispiel. Dann lassen wir gerade die Klammern weg und schreiben einfach

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}].$$

Verteilungsfunktion

Definition 2.2: Sei X eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion von X ist eine Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a].$$

Example 2: Indikatorfunktion eines Ereignisses Sei A ein Ereignis. Sei $X = \mathbb{1}_A$ eine Indikatorfunktion auf einem Ereignis A. Dann gilt

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0, \\ 1 - \mathbb{P}[A] & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{falls } a \geq 1 \end{cases}$$

Satz 2.3 (Einfache Identität): Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$.

Theorem 2.4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion): Sei X eine Z.V. auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion $F = F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X erfüllt folgende Eigenschaften:

1. F ist monoton wachsend
2. F ist rechtsstetig [a]
3. $\lim_{a\to-\infty} F(a) = 0$ und $\lim_{a\to\infty} F(a) = 1$.

[a] Formal: $F(a) = \lim_{h\downarrow 0} F(a+h)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 2.5: Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann heissen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig falls $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}\left[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right] = \mathbb{P}\left[X_1 \leq x_1\right] \ldots \mathbb{P}\left[X_n \leq x_n\right]$

Bemerkung 2.6: Man kann zeigen, dass $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn folgende Bedingung gilt $\forall I_1 \subset \mathbb{R}, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ Intervalle $\{X_1 \in I_1\}, \ldots, \{X_n \in I_n\}$ sind unabhängig .

Gruppierung von Zufallsvariablen

Satz 2.7 (Gruppieren von Zufallsvariablen): Seien $X_1, \ldots, X_n n$ unabhängige Zufallsvariablen. Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ Indexes und $\phi_1, \ldots, \phi_k$ Abbildungen. Dann sind $Y_1 = \phi_1\left(X_1, \ldots, X_{i_1}\right), Y_2 = \phi_2\left(X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_2}\right) \ldots, Y_k = \phi_k\left(X_{i_{k-1}+1}, \ldots, X_{i_k}\right)$ unabhängig.

Folgen von u.i.v. Zufallsvariablen

Definition 2.8: Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ heißt

1. unabhängig falls $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. unabhängig und identisch verteilt (uiv) falls sie unabhängig ist und die Zufallsvariablen dieselbe Verteilungsfunktion haben d.h. $\forall i, j \quad F_{X_i} = F_{X_j}$.

Transformation von Zufallsvariablen

Falls X eine Zufallsvariable ist, und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so schreiben wir $\phi(X) := \phi \circ X$. Somit ist $\phi(X)$ eine neue Abbildung von $\Omega \to \mathbb{R}$, welche in dem nachfolgenden Diagram dargestellt ist:

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \quad \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) \longmapsto \phi(X(\omega)).$$

Konstruktion von Zufallsvariablen

Definition 2.9: Sei $p \in [0,1]$. Eine Zufallsvariable X heißt Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p falls

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

Dabei schreiben wir stets $X \sim \text{Ber}(p)$.

Theorem 2.10 (Existenzsatz von Kolmogorov). Es existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine nicht endliche u.i.v. Folge von Bernoulli Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Parameter $\frac{1}{2}$.

Definition 2.11: Eine Zufallsvariable U heißt gleichverteilt auf $[0,1]$ falls ihre Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Wir schreiben gerade $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Satz 2.12 Seien $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen mit Parameter $1/2$. Für jedes festes ω haben wir $X_1(\omega), X_2(\omega) \cdots \in \{0,1\}$. Daraus folgt, dass die unendliche Reihe

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n(\omega)$$

absolut konvergiert, wobei $Y(\omega) \in [0,1]$ ist. Die Abbildung $Y : \Omega \to [0,1]$ ist eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $[0,1]$.

Definition 2.13 (Pseudoinverse): Die Pseudoinverse von F ist eine Abbildung $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall \alpha \in (0,1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

Theorem 2.14 (Inversionsmethode): Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Abbildung, welche Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt. Sei U eine Gleichverteilte Zufallsvariable. Dann besitzt die Zufallsvariable

$$X = F^{-1}(U)$$

gerade die Verteilungsfunktion $F_X = F$.

Bemerkung 2.15: Wir wollen nochmals kurz erläutern, warum die Definition von X nach 2.14 wohldefiniert ist. Sei $U : \Omega \to [0,1]$ und $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ analog zum obigen Theorem definiert. Dann gilt stets $P[U \in (0,1) = 1]$. Strenggenommen ist X bis jetzt nur auf einer Menge mit Wahrscheinlichkeit 1 aber nicht auf ganz Ω definiert. Wir beheben das Problem mittels folgender Definition

$$X(\omega) = \begin{cases} F^{-1}(U(\omega)) & \text{falls } U(\omega) \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Theorem 2.16: Seien $F_1, F_2 \ldots$ eine Folge von Funktionen $\mathbb{R}$ auf $[0,1]$, die die Eigenschaften $(i) - (\text{ iii })$ am Anfang des Abschnitts erfüllen. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, sodass

1. für jedes i gilt: X_i hat Verteilungsfunktion F_i (d.h. $\forall x \mathbb{P}\left[X_i \leq x\right] = F_i(x)$), und
2. $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig.

Diskrete und stetige Zufallsvariablen

Unstetigkeit/Stetigkeit der Verteilungsfunktion F

Satz 3.1 (Wahrscheinlichkeit eines Punktes): Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Für jedes a in $\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[X = a] = F(a) - F(a-)$. Sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert.

1. Wenn F in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ nicht stetig ist, dann ist die "Sprunghöhe" $F(a) - F(a-)$ gleich der Wahrscheinlichkeit, dass $X = a$.
2. Falls F stetig in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist, dann gilt $\mathbb{P}[X = a] = 0$.

Fast sichere Ereignisse

Definition 3.2: Sei $A \in \mathcal{F}$ ein Ereignis. Wir sagen A tritt fast sicher (f.s.) ein, falls $\mathbb{P}[A] = 1$.
Bemerkung 3.3: Wir erweitern gerade diese Notation auf allgemeinere Mengen $A \subset \Omega$ (nicht zwangsweise ein Ereignis): Wir sagen dann, dass A fast sicher eintritt, falls ein Ereignis $A' \in \mathcal{F}$ existiert, sodass $A' \subset A$ und $\mathbb{P}[A'] = 1$.

Diskrete Zufallsvariablen

Definition 3.4 (Diskrete Zufallsvariable): Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst diskret falls eine endliche oder abzählbare Menge $W \subset \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathbb{P}[X \in W] = 1$. "Die Werte von X liegen in W fast sicher."
Bemerkung 3.5: Wenn der Grundraum Ω endlich oder abzählbar ist, dann ist jede *Zu* fallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskret. In der Tat ist das Bild $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega X(\omega) = x\}$ endlich oder abzählbar und wir haben $\mathbb{P}[X \in W] = 1$, mit $W = X(\Omega)$.
Definition 3.6: Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer endlichen oder abzählbaren Menge $W \subset \mathbb{R}$. Die Zahlenfolge $(p(x))_{x \in W}$ definiert durch

$$\forall x \in W \quad p(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

heisst Verteilung von X.
Satz 3.7: Die Verteilung $(p(x))_{x \in W}$ einer diskreten Zufallsvariablen erfüllt $\sum_{x \in W} p(x) = 1$.
Bemerkung 3.8: Umgekehrt, wenn wir eine Folge von Zahlen $(p(x))_{x \in W}$ mit Werten in $[0, 1]$ gegeben haben, sodass $\sum_{x \in W} p(x) = 1$, dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Zufallsvariable X mit zugehöriger Verteilung $(p(x))_{x \in W}$. Dies gilt nach dem Existenzsatz 2.16 in Kapitel 2. Diese Beobachtung ist in der Praxis wichtig, denn sie erlaubt uns zu schreiben: "Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilung $(p(x))_{x \in W}$."

Verteilung p vs. Verteilungsfunktion F_X

Satz 3.9: Sei X eine diskrete Zufallsvariable, dessen Werte in einer endlichen oder abzählbaren Menge W liegen, und deren Verteilung p ist. Dann ist die Verteilungsfunktion von X gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in W}} p(y)$$

Beispiele diskreter Zufallsvariablen

Bernoulli Verteilung

Definition 3.10 (Bernoulli Verteilung): Es sei $0 \leq p \leq 1$. Eine Zufallsvariable X heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p, wenn sie Werte in $W = \{0, 1\}$ annimmt und folgendes gilt

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

In diesem Fall schreiben wir $X \sim \text{Ber}(p)$.

Binomialverteilung

Definition 3.11 (Binomialverteilung): Sei $0 \leq p \leq 1$, sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Zufallsvariable X heisst binomiale Zufallsvariable mit Parametern n und p, wenn sie Werte in $W = \{0, \ldots, n\}$ annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wir schreiben dann $X \sim \text{Bin}(n, p)$.
Bemerkung 3.12: Wenn wir $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ definieren, haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

Symmetrie der Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Satz 3.13 (Summe von unabhängigen Bernoulli und Binomial Z.V.): Sei $0 \leq p \leq 1$, sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli Z.V. mit Parameter p. Dann ist

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$

eine binomialverteilte Z.V. mit Parametern n und p.
Bemerkung 3.14: Insbesondere ist die Verteilung $\text{Bin}(1, p)$ gerade $\text{Ber}(p)$ verteilt. Es sei noch folgendes anzumerken: Falls $X \sim \text{Bin}(m, p), Y \sim \text{Bin}(n, p)$ und X, Y unabhängig sind, dann ist $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$ verteilt.

Geometrische Verteilung

Definition 3.15 (Geometrische Verteilung): Es sei $0 < p \leq 1$. Eine Zufallsvariable X heisst geometrische Zufallsvariable mit Parameter p, falls sie Werte in $W = \mathbb{N} \backslash \{0\}$ annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \quad \mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

Wir schreiben dann $X \sim \text{Geom}(p)$.
Bemerkung 3.16: Für $p = 1$ und $k = 1$ erscheint in der obigen Gleichung ein Term 0^0, wir verwenden die Konvention $0^0 = 1$ und damit gilt $\mathbb{P}[X = 1] = p$.
Bemerkung 3.17: Falls wir $p(k) = (1-p)^{k-1} p$ definieren, haben wir $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$.
Satz 3.18: Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unendlich vielen unabhängigen BernoulliZ.V. mit Parameter p. Dann ist $T := \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter p.
Bemerkung 3.19: Falls wir sagen, dass T eine geometrische Zufallsvariable ist, müssen wir folgendes präzisieren: Tatsächlich kann die Zufallsvariable T den Wert $+\infty$ annehmen, wenn alle Zufallsvariablen X_i gleich 0 sind. Dies ist jedoch kein Problem für den Bewei des Satzes. Man kann leicht überprüfen, dass $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$ gilt.
Satz 3.20 (Gedächnislosigkeit der Geometrischen Verteilung): Sei $T \sim \text{Geom}(p)$ für $0 < p < 1$. Dann gilt
$\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}[T \geq n + k \mid T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$.

Poisson Verteilung

Definition 3.21: Sei $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl. Eine Zufallsvariable X heisst Poisson-Zufallsvariable mit Parameter λ, wenn sie Werte in $W = \mathbb{N}$ annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Wir schreiben dann $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
Bemerkung 3.22: Alternativ definieren wir $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, haben wir $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$,
Satz 3.23 (Poisson-Approximation der Binomialverteilung): Sei $\lambda > 0$. Für jedes $n \geq 1$ seien $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k],$$

wobei N eine Poisson Zufallsvariable mit Parameter λ.

Stetige Verteilungen

Definition 3.25 (Stetig verteilte Zufallsvariablen): Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion F_X wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx \text{ für alle a in } \mathbb{R}.$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$eine nicht-negative Funktion ist. Wir nennen dann f Dichte von X.
Intuition: $f(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in $[x, x + dx]$ annimmt.
Theorem 3.26: Sei X eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion F_X sei stetig und stückweise $\mathcal{C}^1$, d.h. es gibt $x_0 = -\infty < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = +\infty$, sodass F_X auf jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) Element von $\mathcal{C}^1$ ist. Dann ist X eine stetige Zufallsvariable und die Dichte f kann konstruiert werden, indem man folgendes festlegt $\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \quad f(x) = F'_X(x)$ mit beliebigen Werten in $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Beispiele stetiger Zufallsvariablen

Gleichverteilung

Definition 3.27 (Gleichverteilung auf $[a, b], a < b$.): Eine stetige Zufallsvariable X heisst gleichverteilt auf $[a, b]$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b], \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Wir schreiben dann stets $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.
Eigenschaften einer gleichverteilten Zufallsvariable X auf $[a, b]$:

1. Die Wahrscheinlichkeit in ein Intervall $[c, c + \ell] \subset [a, b]$ zu fallen ist lediglich abhängig von dessen Länge ℓ : $\mathbb{P}[X \in [c, c + \ell]] = \frac{\ell}{b-a}$.
2. Die Verteilungsfunktion X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

Exponentialverteilung

Definition 3.28 (Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$): Eine stetige Zufallsvariable T heisst exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wir schreiben dann stets $T \sim \exp(\lambda)$.
Eigenschaften einer exponentialverteilten Zufallsvariable T mit Parameter λ:

1. Die Wahrscheinlichkeit des Wartens ist exponentiell klein: $\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}$.
2. T besitzt die Eigenschaft der Gedächnislosigkeit $\forall t, s \geq 0 \quad \mathbb{P}[T > t + s \mid T > t] = [T > s]$.

Normalverteilung

Definition 3.29: Eine stetige Zufallsvariable X heisst normal verteilt mit Parametern m und $\sigma^2 > 0$ falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Wir schreiben dann stets $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
Eigenschaften der Normalverteilung:

1. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $(m_1, \sigma_1^2), \ldots, (m_n, \sigma_n^2)$, dann ist $Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n$ und $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$
2. Wir sprechen im Fall von $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, gerade von einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Man merke sich dann folgende Beziehung $Z = m + \sigma \cdot X$ wobei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern m und σ^2 ist.
3. Falls X normalverteilt mit Parameter m und σ^2 ist, dann liegt die "meiste" Wahrscheinlichkeitsmasse der Z.V. im Intervall $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$. Präzise gilt gerade $\mathbb{P}[|X - m| \geq 3\sigma] \leq 0.0027$

Der Erwartungswert

Der allgemeine Erwartungswert

Definition 4.1: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$eine Zufallsvariable mit nicht-negativen Werten. Dann heisst

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx$$

der Erwartungswert von X.
Bemerkung 4.2: Der Erwartungswert kann sowohl endliche also auch nicht endliche Werte annehmen.
Satz 4.3: Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \geq 0$. Gleichheit gilt genau dann wenn $X = 0$ fast sicher hält.

Definition 4.4: Sei X eine Zufallsvariable. Falls $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, dann heisst

$$X_+(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \geq 0, \\ 0 & \text{falls } X(\omega) < 0, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$X_-(\omega) = \begin{cases} -X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \leq 0, \\ 0 & \text{falls } X(\omega) > 0. \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-]$. Erwartungswert von X.

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

Satz 4.6: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable dessen Werte in W (endlich oder abzählbar) fast sicher liegen. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{x \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x],$$

solange der Erwartungswert wohldefiniert ist.

Bernoulli Zufallsvariable

Sei X eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = p$.

Binomial Zufallsvariable

Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$, dann gilt $\mathbb{E}[X] = np$

Poisson Zufallsvariable

Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, dann gilt $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

Indikator Zufallsvariable

Sei $A \in \mathcal{F}$ ein Ereignis. Sei $\mathbb{1}_A$ die Indikator Funktion auf A, dann gilt $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A]$.

geometrische Zufallsvariable

Sei $X \sim \text{Geom}(p)$, dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$

Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

Satz 4.8: Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

solange das Integral wohldefiniert ist.
Theorem 4.9: Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass $\phi(X)$ eine Zufallsvariable ist. Dann gilt

$$E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

solange das Integral wohldefiniert ist.

Exponential Zufallsvariable

Sei $X \sim \exp(\lambda)$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.

gleichverteilte Zufallsvariable

Sei $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.

gleichverteilte Zufallsvariable

Sei $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.

Normalverteilung

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \mu$.

Rechnen mit Zufallsvariable

Theorem 4.10 (Linearität des Erwartungswert): Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls die Erwartungswerte wohldefiniert sind gilt

1. $\mathbb{E}[\lambda \cdot X] = \lambda \cdot \mathbb{E}[X]$
2. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Bemerkung 4.11: Die Zufallsvariablen X und Y müssen dabei nicht unabhängig sein.
Bemerkung 4.12: Unter Anwendung der Induktion für $n \geq 1$ ergibt sich direkt $\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n] = \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \lambda_2 \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \lambda_n \mathbb{E}[X_n]$ für jede $Z.V. X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to E$, und für jedes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, unter der Annahme, dass die Erwartungswerte wohldefiniert sind.
Theorem 4.13: Seien X, Y zwei Zufallsvariablen. Falls X und Y unabhängig sind, dann ist $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Extremwert Formel

Satz 4.14 (Tailsum-Formel für nichtnegative Zufallsvariablen): Sei X eine Zufallsvariable, sodass $X \geq 0$ fast sicher gilt. Dann folgt $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > x] dx$.
Satz 4.15 (Extremwert Formel): Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dann gilt folgende Identität $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n]$.

Charakterisierung der Eigenschaften von Z.V.

Satz 4.16. Sei X eine Zufallsvariable: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$eine Abbildung, sodass $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. X ist stetig mit Dichte f,
2. Für jede Abbildung stückweise stetige, beschränkte Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$.

Theorem 4.17: Seien X, Y zwei diskrete Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1. X, Y sind unabhängig,
2. Für jedes $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (messbar) beschränkt und stückweise stetig gilt $\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)]$.

Theorem 4.18: Seien $X_1, \ldots, X_n n$ Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1. $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,
2. Für jedes $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ldots, \phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (messbar) beschränkt gilt $\mathbb{E}[\phi_1(X_1) \cdots \phi_n(X_n)] = \mathbb{E}[\phi_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[\phi_n(X_n)]$

Ungleichungen

Satz 4.19: Seien X, Y zwei Zufallsvariablen, sodass $X \leq Y$ f.s. gilt. Falls beide Erwartungswerte wohldefiniert sind, folgt dann $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ fast sicher.

Markow Ungleichung