

# WuS - Cheatsheet

## Wahrscheinlichkeitsräume

### Grundraum

**Terminologie:** Die Menge  $\Omega$  nennen wir Grundraum.

### Ereignisse

Ein Element  $\omega \in \Omega$  nennen wir Elementarereignis (oder Ausgang des Experiments).

**Definition 1.1:** Ein Mengensystem  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heisst Sigma-Algebra ( $\sigma$ -Algebra), falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Dabei nennen wir die Elemente der  $\sigma$ -Algebra Ereignisse.

### Wahrscheinlichkeitsmass

**Definition 1.2:** Sei  $\Omega$  ein Grundraum und sei  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Eine Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto \mathbb{P}[A]$$

heisst Wahrscheinlichkeitsmass auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , falls folgende Eigenschaften gelten

1.  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ .
2. ( $\sigma$ -Additivität)  $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$  if  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  (disjunkte Vereinigung).

### Der Wahrscheinlichkeitsraum

**Definition 1.3:** Sei  $\Omega$  ein Grundraum,  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra, und  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmass. Wir nennen das Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  Wahrscheinlichkeitsraum.

**Bemerkung 1.4:** Das Ereignis  $A = \emptyset$  tritt niemals ein. Das Ereignis  $A = \Omega$  tritt stets ein.

**Definition 1.5:** Sei  $\Omega$  eine endlicher Grundraum. Das Laplace Modell auf  $\Omega$  ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sodass

1.  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,
2.  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  ist definiert durch

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

### Eigenschaften von Ereignissen

**Satz 1.6 (Abgeschlossenheit der  $\sigma$ -Algebra bzgl. Operationen):** Sei  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Es gilt

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ,
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ,
3.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ ,
4.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ .

Ereignis	Grafische Darstellung	Probab. Interpretation
$A^c$		A tritt nicht ein
$A \cap B$		A und B treten ein
$A \cup B$		A oder B treten ein
$A \Delta B$		Entweder A oder B tritt ein

### Beziehung/Interpretationen zwischen Ereignissen

Relation	Grafische Darstellung	Probab. Interpretation
$A \subset B$		B tritt ein, falls A eintritt
$A \cap B = \emptyset$		A und B können nicht gleichzeitig eintreten
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ wobei $A_1, A_2, A_3$ paarweise disjunkt		für jedes Elementarereignis $\omega$ , höchstens eins der Ereignisse $A_1, A_2, A_3$ kann eintreten.

### Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmassen

**Satz 1.7:** Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmass auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Es gilt:

1.  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
2. (Additivität) Sei  $k \geq 1$ , seien  $A_1, \dots, A_k$ -viele paarweise disjunkte Ereignisse, dann gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$$

3. Sei  $A$  ein Ereignis, dann gilt  $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4. Falls  $A$  und  $B$  zwei (nicht notwendigerweise disjunkte) Ereignisse, dann gilt

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

### Nützliche Ungleichungen

**Satz 1.8 (Monotonie):** Seien  $A, B \in \mathcal{F}$ , dann gilt

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B].$$

**Satz 1.9 (Union Bound):** Sei  $A_1, A_2, \dots$  eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Ereignissen, dann gilt die folgende Ungleichung  $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ .

**Bemerkung 1.10:** Die obige Ungleichung gilt ebenfalls für eine Folge von endlich vielen nicht-leeren Ereignissen.

### Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen

**Satz 1.11:** Sei  $(A_n)$  eine monoton wachsende Folge von Ereignissen  $(\forall n : A_n \subset A_{n+1})$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]. \quad \text{monoton wachsender Grenzwert}$$

Sei  $(B_n)$  eine monoton fallende Folge von Ereignissen

$\forall n : (B_n \supset B_{n+1})$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right]. \quad \text{monoton fallender Grenzwert}$$

**Bemerkung 1.12:** Durch Monotonie erhalten wir

$\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$  und  $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$  für jedes  $n$ . Daher sind die Grenzwerte in den obigen Gleichungen wohldefiniert.

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Definition 1.13 (Bedingte Wahrscheinlichkeit):** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien  $A, B$  zwei Ereignisse mit  $\mathbb{P}[B] > 0$ . Wir definieren die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$  wie folgt

$$\mathbb{P}[A | B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

**Bemerkung 1.14:**  $\mathbb{P}[B | B] = 1$ .

**Satz 1.15:** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $B$  ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Dann ist  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  ein  $W$ -Mass auf  $\Omega$ .

**Satz 1.16 (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit):** Sei  $B_1, \dots, B_n$  eine Partition<sup>d</sup> des Grundraums  $\Omega$ , so dass  $\mathbb{P}[B_i] > 0$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  gilt. Dann gilt

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]$$

<sup>a</sup>i.e.  $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$  mit paarweise disjunkten Ereignissen.

**Satz 1.17 (Satz von Bayes):** Sei  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$  eine Partition von  $\Omega$  sodass,  $\mathbb{P}[B_i] > 0$  für jedes  $i$  gilt. Für jedes Ereignis  $A$  mit  $\mathbb{P}[A] > 0$  gilt

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i | A] = \frac{\mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A | B_j] \mathbb{P}[B_j]}$$

### Unabhängigkeit von Ereignissen

**Definition 1.18 (Unabhängigkeit):** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heissen unabhängig falls  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ .

**Bemerkung 1.19:** Falls  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ , dann ist  $A$  unabhängig von jedem Ereignis sodass,

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Falls ein Ereignis  $A$  unabhängig von sich selbst ist, also  $\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$  gilt, dann muss  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$  gelten.  $A$  ist unabhängig von  $B$  genau dann wenn  $A$  unabhängig von  $B^c$  ist.

**Satz 1.20:** Seien  $A, B \in \mathcal{F}$  zwei Ereignisse mit  $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$ .

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ ,  $A$  und  $B$  sind unabhängig
2.  $\mathbb{P}[A | B] = \mathbb{P}[A]$ , Eintreten von  $B$  hat keinen Einfluss auf  $A$
3.  $\mathbb{P}[B | A] = \mathbb{P}[B]$ , Eintreten von  $A$  hat keinen Einfluss auf  $B$

**Definition 1.21:** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen  $(A_i)_{i \in I}$  heisst unabhängig falls

$$\forall J \subset I \text{ endlich } \mathbb{P} \left[ \bigcap_{j \in J} A_j \right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j].$$

**Bemerkung:** Drei Ereignisse  $A, B$  und  $C$  sind unabhängig falls alle 4 folgenden Gleichungen erfüllt sind (nicht nur die Letzte!):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B], \\ \mathbb{P}[A \cap C] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C], \\ \mathbb{P}[B \cap C] &= \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C], \\ \mathbb{P}[A \cap B \cap C] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C] \end{aligned}$$

## Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

### Abstrakte Definition

**Definition 2.1:** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable (Z.V.) ist eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sodass, für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

**Indikatorfunktion:** Sei  $A \in \mathcal{F}$ . Wir definieren die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_A$  auf  $A$ , durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

**Notation:** Für Ereignisse im Bezug auf Z.V. werden wir auf darauf verzichten sie mittels Beziehung zu  $\omega$  darzustellen. Stattdessen schreiben wir für  $a \leq b$

$$\begin{aligned} \{X \leq a\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \\ \{a < X \leq b\} &= \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}, \\ \{X \in \mathbb{Z}\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit nach obigen Beispiel. Dann lassen wir gerade die Klammern weg und schreiben einfach

$$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[\{X \leq a\}] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}].$$

### Verteilungsfunktion

**Definition 2.2:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist eine Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a].$$

**Example 2:** Indikatorfunktion eines Ereignisses Sei  $A$  ein Ereignis. Sei  $X = \mathbb{1}_A$  eine Indikatorfunktion auf einem Ereignis  $A$ . Dann gilt

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0, \\ 1 - \mathbb{P}[A] & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{falls } a \geq 1 \end{cases}$$

**Satz 2.3 (Einfache Identität):** Seien  $a < b$  zwei reelle Zahlen. Dann gilt  $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$ .

**Theorem 2.4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion):** Sei  $X$  eine Z.V. auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Die Verteilungsfunktion  $F = F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  von  $X$  erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $F$  ist monoton wachsend
2.  $F$  ist rechtsstetig <sup>a</sup>
3.  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$  und  $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = 1$ .

<sup>a</sup> Formal:  $F(a) = \lim_{h \downarrow 0} F(a + h)$  für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .

### Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

**Definition 2.5:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen auf einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann heissen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig falls  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \dots \mathbb{P}[X_n \leq x_n]$

**Bemerkung 2.6:** Man kann zeigen, dass  $X_1, \dots, X_n$  genau dann unabhängig sind, wenn folgende Bedingung gilt

$\forall I_1 \subset \mathbb{R}, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$  Intervalle  $\{X_1 \in I_1\}, \dots, \{X_n \in I_n\}$  sind unabhängig.

### Gruppierung von Zufallsvariablen

**Satz 2.7 (Gruppieren von Zufallsvariablen):** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen. Seien  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  Indexes und  $\phi_1, \dots, \phi_k$  Abbildungen. Dann sind  $Y_1 = \phi_1(X_{i_1}, \dots, X_{i_1}), Y_2 = \phi_2(X_{i_2}, \dots, X_{i_2}), \dots, Y_k = \phi_k(X_{i_k}, \dots, X_{i_k})$  unabhängig.

### Folgen von u.i.v. Zufallsvariablen

**Definition 2.8:** Eine Folge von Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  heisst

1. unabhängig falls  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
2. unabhängig und identisch verteilt (uiv) falls sie unabhängig ist und die Zufallsvariablen dieselbe Verteilungsfunktion haben d.h.  $\forall i, j \quad F_{X_i} = F_{X_j}$ .

### Transformation von Zufallsvariablen

Falls  $X$  eine Zufallsvariable ist, und  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so schreiben wir  $\phi(X) := \phi \circ X$ . Somit ist  $\phi(X)$  eine neue Abbildung von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , welche in dem nachfolgenden Diagramm dargestellt ist:

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto X(\omega) \mapsto \phi(X(\omega)).$$

### Konstruktion von Zufallsvariablen

**Definition 2.9:** Sei  $p \in [0, 1]$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter  $p$  falls

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

Dabei schreiben wir stets  $X \sim \text{Ber}(p)$ .

**Theorem 2.10 (Existenzsatz von Kolmogorov):** Es existiert ein  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine nicht endliche u.i.v. Folge von Bernoulli Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Parameter  $\frac{1}{2}$ .

**Definition 2.11:** Eine Zufallsvariable  $U$  heisst gleichverteilt auf  $[0, 1]$  falls ihre Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Wir schreiben gerade  $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ .

**Satz 2.12** Seien  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen mit Parameter  $1/2$ . Für jedes festes  $\omega$  haben wir  $X_1(\omega), X_2(\omega) \dots \in \{0, 1\}$ . Daraus folgt, dass die unendliche Reihe

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n(\omega)$$

absolut konvergiert, wobei  $Y(\omega) \in [0, 1]$  ist. Die Abbildung  $Y : \Omega \rightarrow [0, 1]$  ist eine gleichverteilte Zufallsvariable auf  $[0, 1]$ .

**Definition 2.13 (Pseudoinverse):** Die Pseudoinverse von  $F$  ist eine Abbildung  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\forall \alpha \in (0, 1) \quad F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

**Theorem 2.14 (Inversionsmethode):** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine Abbildung, welche Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt. Sei  $U$  eine Gleichverteilte Zufallsvariable. Dann besitzt die Zufallsvariable

$$X = F^{-1}(U)$$

gerade die Verteilungsfunktion  $F_X = F$ .

**Bemerkung 2.15:** Wir wollen nochmals kurz erläutern, warum die Definition von  $X$  nach 2.14 wohldefiniert ist. Sei  $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$  und  $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  analog zum obigen Theorem definiert. Dann gilt stets  $\mathbb{P}[U \in (0, 1) = 1]$ . Strenggenommen ist  $X$  bis jetzt nur auf einer Menge mit Wahrscheinlichkeit 1 aber nicht auf ganz  $\Omega$  definiert. Wir beheben das Problem mittels folgender Definition

$$X(\omega) = \begin{cases} F^{-1}(U(\omega)) & \text{falls } U(\omega) \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Theorem 2.16** Seien  $F_1, F_2, \dots$  eine Folge von Funktionen  $\mathbb{R}$  auf  $[0, 1]$ , die die Eigenschaften (i) – (iii) am Anfang des Abschnitts erfüllen. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, sodass

1. für jedes  $i$  gilt:  $X_i$  hat Verteilungsfunktion  $F_i$  (d.h.  $\forall x \mathbb{P}[X_i \leq x] = F_i(x)$ ), und
2.  $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängig.

## Diskrete und stetige Zufallsvariablen

### Unstetigkeit/Stetigkeit der Verteilungsfunktion $F$

**Satz 3.1 (Wahrscheinlichkeit eines Punktes):** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F$ . Für jedes  $a$  in  $\mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{P}[X = a] = F(a) - F(a-)$ . Sei  $a \in \mathbb{R}$  fixiert.

1. Wenn  $F$  in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  nicht stetig ist, dann ist die "Sprunghöhe"  $F(a) - F(a-)$  gleich der Wahrscheinlichkeit, dass  $X = a$ .
2. Falls  $F$  stetig in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  ist, dann gilt  $\mathbb{P}[X = a] = 0$ .

## Fast sichere Ereignisse

**Definition 3.2:** Sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis. Wir sagen  $A$  tritt fast sicher (f.s.) ein, falls  $\mathbb{P}[A] = 1$ .

**Bemerkung 3.3:** Wir erweitern gerade diese Notation auf allgemeinere Mengen  $A \subset \Omega$  (nicht zwangsweise ein Ereignis): Wir sagen dann, dass  $A$  fast sicher eintritt, falls ein Ereignis  $A' \in \mathcal{F}$  existiert, sodass  $A' \subset A$  und  $\mathbb{P}[A'] = 1$ .

## Diskrete Zufallsvariablen

**Definition 3.4 (Diskrete Zufallsvariable):** Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst diskret falls eine endliche oder abzählbare Menge  $W \subset \mathbb{R}$  existiert, sodass  $\mathbb{P}[X \in W] = 1$ . "Die Werte von  $X$  liegen in  $W$  fast sicher."

**Bemerkung 3.5:** Wenn der Grundraum  $\Omega$  endlich oder abzählbar ist, dann ist jede Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diskret. In der Tat ist das Bild  $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega X(\omega) = x\}$  endlich oder abzählbar und wir haben  $\mathbb{P}[X \in W] = 1$ , mit  $W = X(\Omega)$ .

**Definition 3.6:** Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer endlichen oder abzählbaren Menge  $W \subset \mathbb{R}$ . Die Zahlenfolge  $(p(x))_{x \in W}$  definiert durch

$$\forall x \in W \quad p(x) := \mathbb{P}[X = x]$$

heisst Verteilung von  $X$ .

**Satz 3.7:** Die Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$  einer diskreten Zufallsvariablen erfüllt  $\sum_{x \in W} p(x) = 1$ .

**Bemerkung 3.8:** Umgekehrt, wenn wir eine Folge von Zahlen  $(p(x))_{x \in W}$  mit Werten in  $[0, 1]$  gegeben haben, sodass  $\sum_{x \in W} p(x) = 1$ , dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine Zufallsvariable  $X$  mit zugehöriger Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$ . Dies gilt nach dem Existenzsatz 2.16 in Kapitel 2. Diese Beobachtung ist in der Praxis wichtig, denn sie erlaubt uns zu schreiben: "Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilung  $(p(x))_{x \in W}$ ."

## Verteilung $p$ vs. Verteilungsfunktion $F_X$

**Satz 3.9:** Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable, dessen Werte in einer endlichen oder abzählbaren Menge  $W$  liegen, und deren Verteilung  $p$  ist. Dann ist die Verteilungsfunktion von  $X$  gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in W}} p(y)$$

## Beispiele diskreter Zufallsvariablen

### Bernoulli Verteilung

**Definition 3.10 (Bernoulli Verteilung):** Es sei  $0 \leq p \leq 1$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , wenn sie Werte in  $W = \{0, 1\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

In diesem Fall schreiben wir  $X \sim \text{Ber}(p)$ .

## Binomialverteilung

**Definition 3.11 (Binomialverteilung):** Sei  $0 \leq p \leq 1$ , sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst binomiale Zufallsvariable mit Parametern  $n$  und  $p$ , wenn sie Werte in  $W = \{0, \dots, n\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Wir schreiben dann  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

**Bemerkung 3.12:** Wenn wir  $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  definieren, haben wir

$$\sum_{k=0}^n p(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$$

**Symmetrie der Binomialkoeffizienten:**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**Satz 3.13 (Summe von unabhängigen Bernoulli und Binomial Z.V.):** Sei  $0 \leq p \leq 1$ , sei  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli Z.V. mit Parameter  $p$ . Dann ist

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

eine binomialverteilte Z.V. mit Parametern  $n$  und  $p$ .

**Bemerkung 3.14:** Insbesondere ist die Verteilung  $\text{Bin}(1, p)$  gerade  $\text{Ber}(p)$  verteilt. Es sei noch folgendes anzumerken: Falls  $X \sim \text{Bin}(m, p)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(n, p)$  und  $X, Y$  unabhängig sind, dann ist  $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$  verteilt.

## Geometrische Verteilung

**Definition 3.15 (Geometrische Verteilung):** Es sei  $0 < p \leq 1$ . Eine Zufallsvariable  $X$  heisst geometrische Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , falls sie Werte in  $W = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} \cdot p.$$

Wir schreiben dann  $X \sim \text{Geom}(p)$ .

**Bemerkung 3.16:** Für  $p = 1$  und  $k = 1$  erscheint in der obigen Gleichung ein Term  $0^0$ , wir verwenden die Konvention  $0^0 = 1$  und damit gilt  $\mathbb{P}[X = 1] = p$ .

**Bemerkung 3.17:** Falls wir  $p(k) = (1 - p)^{k-1} p$  definieren, haben wir  $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$ .

**Satz 3.18:** Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unendlich vielen unabhängigen Bernoulli Z.V. mit Parameter  $p$ . Dann ist  $T := \min \{n \geq 1 : X_n = 1\}$  eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p$ .

**Bemerkung 3.19:** Falls wir sagen, dass  $T$  eine geometrische Zufallsvariable ist, müssen wir folgendes präzisieren: Tatsächlich kann die Zufallsvariable  $T$  den Wert  $+\infty$  annehmen, wenn alle Zufallsvariablen  $X_i$  gleich 0 sind. Dies ist jedoch kein Problem für den Beweis des Satzes. Man kann leicht überprüfen, dass  $\mathbb{P}[T = \infty] = 0$  gilt.

**Satz 3.20 (Gedächtnislosigkeit der Geometrischen Verteilung):** Sei  $T \sim \text{Geom}(p)$  für  $0 < p < 1$ . Dann gilt  $\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}[T \geq n + k \mid T > n] = \mathbb{P}[T \geq k]$ .

## Poisson Verteilung

**Definition 3.21:** Sei  $\lambda > 0$  eine positive reelle Zahl. Eine Zufallsvariable  $X$  heisst Poisson-Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$ , wenn sie Werte in  $W = \mathbb{N}$  annimmt und folgendes gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Wir schreiben dann  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

**Bemerkung 3.22:** Alternativ definieren wir  $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ , haben wir  $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$ ,

**Satz 3.23 (Poisson-Approximation der Binomialverteilung):** Sei  $\lambda > 0$ . Für jedes  $n \geq 1$  seien  $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$  Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[N = k],$$

wobei  $N$  eine Poisson Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$ .

**Reproduktivität:** Die Poisson-Verteilung ist reproduktiv, d. h., die Summe  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  stochastisch unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit den Parametern  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ist wieder Poisson-verteilt mit dem Parameter  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

## Stetige Verteilungen

**Definition 3.25 (Stetig verteilte Zufallsvariablen):** Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion  $F_X$  wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{für alle } a \text{ in } \mathbb{R}.$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine nicht-negative Funktion ist. Wir nennen dann  $f$  Dichte von  $X$ .

**Intuition:**  $f(x) dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  Werte in  $[x, x + dx]$  annimmt.

**Theorem 3.26:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion  $F_X$  sei stetig und stückweise  $\mathcal{C}^1$ , d.h. es gibt  $x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = +\infty$ , sodass  $F_X$  auf jedem Intervall  $(x_i, x_{i+1})$  Element von  $\mathcal{C}^1$  ist. Dann ist  $X$  eine stetige Zufallsvariable und die Dichte  $f$  kann konstruiert werden, indem man folgendes festlegt  $\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \quad f(x) = F'_X(x)$  mit beliebigen Werten in  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

## Beispiele stetiger Zufallsvariablen

### Gleichverteilung

**Definition 3.27 (Gleichverteilung auf  $[a, b]$ ,  $a < b$ ):** Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heisst gleichverteilt auf  $[a, b]$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b], \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Wir schreiben dann stets  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ .

**Eigenschaften einer gleichverteilten Zufallsvariable  $X$  auf  $[a, b]$ :**

1. Die Wahrscheinlichkeit in ein Intervall  $[c, c + \ell] \subset [a, b]$  zu fallen ist lediglich abhängig von dessen Länge  $\ell$ :  $\mathbb{P}[X \in [c, c + \ell]] = \frac{\ell}{b-a}$ .

2. Die Verteilungsfunktion  $X$  ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

## Exponentialverteilung

**Definition 3.28 (Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda > 0$ ):**

Eine stetige Zufallsvariable  $T$  heisst exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wir schreiben dann stets  $T \sim \exp(\lambda)$ .

**Eigenschaften einer exponentialverteilten Zufallsvariable  $T$  mit Parameter  $\lambda$ :**

1. Die Wahrscheinlichkeit des Wartens ist exponentiell klein:  
 $\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}.$
2.  $T$  besitzt die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit  
 $\forall t, s \geq 0 \quad \mathbb{P}[T > t+s \mid T > t] = \mathbb{P}[T > s].$

## Normalverteilung

**Definition 3.29:** Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heisst normal verteilt mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2 > 0$  falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Wir schreiben dann stets  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

**Eigenschaften der Normalverteilung:**

1. Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $(m_1, \sigma_1^2), \dots, (m_n, \sigma_n^2)$ , dann ist  $Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n$  und  $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$
2. Wir sprechen im Fall von  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , gerade von einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Man merke sich dann folgende Beziehung  $Z = m + \sigma \cdot X$  wobei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2$  ist.
3. Falls  $X$  normalverteilt mit Parametern  $m$  und  $\sigma^2$  ist, dann liegt die "meiste" Wahrscheinlichkeitsmasse der Z.V. im Intervall  $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ . Präzise gilt gerade  $\mathbb{P}[|X - m| \geq 3\sigma] \leq 0.0027$

# Der Erwartungswert

## Der allgemeine Erwartungswert

**Definition 4.1:** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Zufallsvariable mit nicht-negativen Werten. Dann heisst

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx$$

der Erwartungswert von  $X$ .

**Bemerkung 4.2:** Der Erwartungswert kann sowohl endliche also auch nicht endliche Werte annehmen.

**Satz 4.3:** Sei  $X$  eine nicht-negative Zufallsvariable. Dann gilt  $\mathbb{E}[X] \geq 0$ . Gleichheit gilt genau dann wenn  $X = 0$  fast sicher hält.

**Definition 4.4:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Falls  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , dann heisst

$$X_+(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \geq 0, \\ 0 & \text{falls } X(\omega) < 0, \end{cases} \quad \text{und} \\ X_-(\omega) = \begin{cases} -X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \leq 0, \\ 0 & \text{falls } X(\omega) > 0. \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-]$ . Erwartungswert von  $X$ .

## Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

**Satz 4.6:** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine diskrete Zufallsvariable dessen Werte in  $W$  (endlich oder abzählbar) fast sicher liegen. Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \sum_{x \in W} \phi(x) \cdot \mathbb{P}[X = x],$$

solange der Erwartungswert wohldefiniert ist.

## Bernoulli Zufallsvariable

Sei  $X$  eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter  $p$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] = p$ .

## Binomial Zufallsvariable

Sei  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , dann gilt  $\mathbb{E}[X] = np$

## Poisson Zufallsvariable

Sei  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , dann gilt  $\mathbb{E}[X] = \lambda$ .

## Indikator Zufallsvariable

Sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis. Sei  $\mathbb{1}_A$  die Indikator Funktion auf  $A$ , dann gilt  $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A]$ .

## geometrische Zufallsvariable

Sei  $X \sim \text{Geom}(p)$ , dann gilt  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$

## Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

**Satz 4.8:** Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty x \cdot f(x) dx,$$

solange das Integral wohldefiniert ist.

**Theorem 4.9:** Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, sodass  $\phi(X)$  eine Zufallsvariable ist. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^\infty \phi(x) f(x) dx$$

solange das Integral wohldefiniert ist.

## Exponential Zufallsvariable

Sei  $X \sim \exp(\lambda)$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ .

## gleichverteilte Zufallsvariable

Sei  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ .

## Normalverteilung

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] = \mu$ .

## Rechnen mit Zufallsvariable

**Theorem 4.10 (Linearität des Erwartungswerts):** Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen, sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Falls die Erwartungswerte wohldefiniert sind gilt

1.  $\mathbb{E}[\lambda \cdot X] = \lambda \cdot \mathbb{E}[X]$
2.  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ .

**Bemerkung 4.11:** Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  müssen dabei nicht unabhängig sein.

**Bemerkung 4.12:** Unter Anwendung der Induktion für  $n \geq 1$  ergibt sich direkt  $\mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n] = \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \lambda_2 \mathbb{E}[X_2] + \dots + \lambda_n \mathbb{E}[X_n]$  für jede Z.V.  $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \rightarrow E$ , und für jedes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , unter der Annahme, dass die Erwartungswerte wohldefiniert sind.

**Theorem 4.13:** Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen. Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann ist  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .

## Extremwert Formel

**Satz 4.14 (Tailsum-Formel für nichtnegative Zufallsvariablen):** Sei  $X$  eine Zufallsvariable, sodass  $X \geq 0$  fast sicher gilt. Dann folgt  $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > x] dx$ .

**Satz 4.15 (Extremwert Formel):** Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Dann gilt folgende Identität  $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[X \geq n]$ .

## Charakterisierung der Eigenschaften von Z.V.

**Satz 4.16. Sei  $X$  eine Zufallsvariable:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Abbildung, sodass  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $X$  ist stetig mit Dichte  $f$ ,
2. Für jede Abbildung stückweise stetige, beschränkte Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^\infty \phi(x) f(x) dx$ .

**Theorem 4.17:** Seien  $X, Y$  zwei diskrete Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1.  $X, Y$  sind unabhängig,
2. Für jedes  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (messbar) beschränkt und stückweise stetig gilt  $\mathbb{E}[\phi(X)\psi(Y)] = \mathbb{E}[\phi(X)]\mathbb{E}[\psi(Y)]$ .

**Theorem 4.18:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1.  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,
2. Für jedes  $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (messbar) beschränkt gilt  $\mathbb{E}[\phi_1(X_1) \cdots \phi_n(X_n)] = \mathbb{E}[\phi_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[\phi_n(X_n)]$

## Ungleichungen

**Satz 4.19:** Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen, sodass  $X \leq Y$  f.s. gilt. Falls beide Erwartungswerte wohldefiniert sind, folgt dann  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$  fast sicher.



## Markow Ungleichung

**Theorem 4.20 (Markow-Ungleichung):** Sei  $X$  eine nicht-negative Zufallsvariable. Für jedes  $a > 0$  gilt dann  $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$ .

## Jensen Ungleichung

**Theorem 4.21 (Jensen Ungleichung):** Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Sei  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion. Falls  $\mathbb{E}[\phi(X)]$  und  $\mathbb{E}[X]$  wohldefiniert sind, gilt  $\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$ .

## Cauchy-Schwarz Ungleichungen

**Theorem 4.22:** Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$ .

## Varianz

**Definition 4.22:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable, sodass  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Wir definieren die Varianz von  $X$  durch  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - m)^2]$ , wobei  $m = \mathbb{E}[X]$ . Die Wurzel aus  $\sigma_X^2$  nennen wir gerade die Standardabweichung von  $X$ .

**Bemerkung 4.23:** Falls  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , dann gilt gerade  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  durch Gleichung (4.7) und somit ist  $m = \mathbb{E}[X]$  wohldefiniert.

**Satz 4.24 (Grundlegende Eigenschaften der Varianz):**

1. Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Dann gilt  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
2. Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  und sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\sigma_{\lambda X}^2 = \lambda^2 \cdot \sigma_X^2$ .
3. Seien  $X_1, \dots, X_n$  viele paarweise unabhängigen Zufallsvariablen und  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Dann gilt  $\sigma_S^2 = \sigma_{X_1}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2$ .

**Theorem 4.24:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Dann gilt für alle  $a \geq 0$   $\mathbb{P}[|X - m| \geq a] \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}$ , where  $m = \mathbb{E}[X]$ .

## Beispiele Varianz von Zufallsvariablen

### Bernoulli Zufallsvariable

Sei  $X$  eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter  $p$ . Dann gilt  $\text{Var}[X] = p \cdot (1 - p)$ .

### Binomial Zufallsvariable

Sei  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , dann gilt  $\text{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$ .

### Poisson Zufallsvariable

Sei  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , dann gilt  $\text{Var}[X] = \lambda$ .

### Indikator Zufallsvariable

Sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis. Sei  $\mathbb{1}_A$  die Indikator Funktion auf  $A$ , dann gilt  $\text{Var}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A] - (\mathbb{P}[A])^2$ .

### geometrische Zufallsvariable

Sei  $X \sim \text{Geom}(p)$ , dann gilt  $\text{Var}[X] = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$

### Exponential Zufallsvariable

Sei  $X \sim \exp(\lambda)$ . Dann gilt  $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ .

## gleichverteilte Zufallsvariable

Sei  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ . Dann gilt  $\text{Var}[X] = \frac{1}{12} \cdot (b - a)^2$ .

## Normalverteilung

Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ .

## Kovarianz

**Definition 4.25:** Seien  $X, Y$  zwei Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$  und  $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ . Wir definieren die Kovarianz zwischen  $X$  und  $Y$  durch  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ .

**Bemerkung:** Die endlichen zweiten Momente von  $X$  und  $Y$  ermöglichen die Wohldefiniertheit der Kovarianz von  $X$  und  $Y$ . Hierfür wende man die elementare Ungleichung  $|XY| \leq \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2$  in Kombination mit Monotonie und Linearität des Erwartungswerts an, um folgende Ungleichung zu erhalten

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y^2] < \infty.$$

Analog zum Abschnitt 4, verschwindet die Kovarianz von unabhängigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , somit gilt

$$X, Y \text{ unabhängig} \implies \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Die Umgekehrte Implikation ist falsch (Siehe Serie 6.6). Nichtsdestotrotz sehen wir in Abschnitt 6, dass wir eine Charakterisierung mittels beschränkten und stetigen Testfunktionen erhalten. Mittels Theorem 4.17, erhalten wir folgende Charakterisierung  $X, Y$  Unabhängig  $\iff \forall \phi, \psi$  stückweise stetig, beschränkt  $\text{Cov}(\phi(X), \psi(Y)) = 0$ .

## Gemeinsame Verteilung

### Gemeinsame diskrete Verteilung

**Definition 5.1:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen, sei  $W_i \subset \mathbb{R}$  endlich oder abzählbar, wobei  $X_i \in W_i$  fast sicher gilt. Die gemeinsame Verteilung von  $(X_1, \dots, X_n)$  ist eine Familie  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ , wobei jedes Mitglied definiert ist durch  $p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$ .

**Satz 5.2:** Eine gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  erfüllt  $\sum_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$ .

**Satz 5.3:** Sei  $n \geq 1$  und seien  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Abbildungen. Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen in  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , welche fast sicher Werten in endlichen oder abzählbaren Mengen  $W_1, \dots, W_n$  annehmen. Dann ist  $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$  eine diskrete Zufallsvariable, welche fast sicher Werte in  $W = \phi(W_1 \times \dots \times W_n)$  annimmt. Zudem ist die Verteilung von  $Z$  gegeben durch

$$\forall z \in W \quad \mathbb{P}[Z = z] = \sum_{\substack{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = z}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

**Satz 5.4 (Randverteilung):** Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Für jedes  $i$  gilt

$$\forall z \in W_i \quad \mathbb{P}[X_i = z] = \sum_{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n} p(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

**Satz 5.5 (Erwartungswert des Bildes):** Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Sei  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\mathbb{E}[\phi(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{x_1, \dots, x_n} \phi(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n),$$

solange die Summe wohldefiniert ist.

**Satz 5.6:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung  $p = (p(x_1, \dots, x_n))_{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent

1.  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,
2.  $p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_1 = x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = x_n]$  für jedes  $x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$ .

## Stetige Gemeinsame Verteilung

**Definition 5.7:** Sei  $n \geq 1$ . Wir sagen, dass die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige gemeinsame Verteilung besitzen, falls eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}[X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq b] = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

für jedes  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt. Obige Abbildung  $f$  nennen wir gerade gemeinsame Dichte von  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**Satz 5.9:** Sei  $f$  die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $(X_1, \dots, X_n)$ . Dann gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 = 1$ .

**Satz 5.10 (Erwartungswert):** Sei  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Falls  $X_1, \dots, X_n$  eine gemeinsame Dichte  $f$  besitzen, dann lässt sich der Erwartungswert der Zufallsvariablen  $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$  mittels  $\mathbb{E}[\phi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, \dots, x_n) \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ , berechnen (solange das Integral wohldefiniert ist).

**Randverteilung:** Falls  $X, Y$  eine gemeinsame Dichte  $f_{X,Y}$  besitzt, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq a] &= \mathbb{P}[X \in [-\infty, a], Y \in [-\infty, \infty]] \\ &= \int_{-\infty}^a \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Somit ist  $X$  stetig mit folgender Dichte

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Analog ist  $Y$  stetig mit folgender Dichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

**Theorem 5.11:** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ . Dann ist folgende Aussagen äquivalent

1.  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,
2.  $X_1, \dots, X_n$  sind insgesamt stetig mit gemeinsamer Dichte  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ .

# Grenzwertsätze

**Vorbemerkung:** In diesem Kapitel fixieren wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und eine Folge von u.i.v.-Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ . Mit anderen Worten, wir erhalten Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\forall i_1 < \dots < i_k \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}[X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_k} \leq x_k] = F(x_1) \cdot \dots \cdot F(x_k)$$

. Zudem ist  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

## Gesetz der grossen Zahlen (GGZ)

**Theorem 6.1:** Sei  $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ . Setze  $m = \mathbb{E}[X_1]$  dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = m \text{ fast sicher.}$$

## Konvergenz in Verteilung

**Definition 6.3:** Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $X$  Zufallsvariablen. Wir schreiben  $X_n \xrightarrow{\approx} X$  als  $n \rightarrow \infty$  falls für jedes  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x]$$

## Zentraler Grenzwertsatz

**Theorem 6.4 (Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)):** Nehme an, dass der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X_1^2]$  wohldefiniert und endlich ist. Setze  $m = \mathbb{E}[X_1]$  und  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ , dann gilt folgender Grenzwert

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq a\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$$

für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung:** Beachte gerade, dass  $\Phi$  gerade die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ist. Der Satz besagt somit, dass für grosse  $n \in \mathbb{N}$  die Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{\sigma^2 n}}$$

in Verteilung  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ähnelt.

# Schätzer

## Grundbegriffe

**Definition 1.1:** Ein Schätzer ist eine Zufallsvariable  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$T = t(X_1, \dots, X_n),$$

wobei  $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Bias

**Definition 1.2:** Ein Schätzer  $T$  heisst erwartungstreu für  $\theta$ , falls für alle  $\theta \in \Theta$  gilt  $\mathbb{E}_\theta[T] = \theta$ .

**Definition 1.3:** Sei  $\theta \in \Theta$ , und  $T$  ein Schätzer. Der Bias (oder erwartete Schätzfehler) von  $T$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als

$$\mathbb{E}_\theta[T] - \theta$$

Der mittlere quadratische Schätzfehler ("mean squared error", MSE) von  $T$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als

$$\text{MSE}_\theta[T] := \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2]$$

**Bemerkung:** Man kann den MSE zerlegen als

$$\text{MSE}_\theta[T] = \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2] = \text{Var}_\theta[T] + (\mathbb{E}_\theta[T] - \theta)^2,$$

also in die Summe aus der Varianz des Schätzers  $T$  und dem Quadrat des Bias. Für erwartungstreue Schätzer sind Varianz und MSE dasselbe.

## Die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode)

**Definition 1.4:** Die Likelihood-Funktion ist

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) := \begin{cases} p_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{im diskreten Fall,} \\ f_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) & \text{im stetigen Fall.} \end{cases}$$

mit  $p_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p_X(x_i; \theta)$  und  $f_{\bar{X}}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta)$ . Die Funktion  $\log L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  heisst **log-Likelihood-Funktion**.

**Definition 1.5:** Für jedes  $x_1, \dots, x_n$ , sei  $t_{ML}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  der Wert, der  $\theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  als Funktion von  $\theta$  maximiert. D.h.,

$$L(x_1, \dots, x_n; t_{ML}(x_1, \dots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer)  $T_{ML}$  für  $\theta$  wird definiert durch  $T_{ML} = t_{ML}(X_1, \dots, X_n)$ .

**Bemerkung:** In den Rechnungen arbeitet man oft mit  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , insbesondere beim Maximieren über  $\theta$ . Das optimale  $\theta^*$  ist dann eine Funktion  $t_{ML}(x_1, \dots, x_n)$  von  $x_1, \dots, x_n$ . Damit der resultierende Schätzer  $T_{ML}$  von der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  abhängt, muss dann aber  $x_1, \dots, x_n$  durch  $X_1, \dots, X_n$  ersetzt werden, d.h. der Maximum-Likelihood-Schätzer ist  $T_{ML} = t_{ML}(X_1, \dots, X_n)$ .

# Konfidenzintervalle

## Definition

**Definition 2.1:** Sei  $\alpha \in [0, 1]$ . Ein Konfidenzintervall für  $\theta$  mit Niveau  $1 - \alpha$  ist ein Zufallsintervall  $I = [A, B]$ , sodass gilt

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq 1 - \alpha$$

wobei  $A, B$  Zufallsvariablen der Form

$$A = a(X_1, \dots, X_n), B = b(X_1, \dots, X_n) \text{ mittels } a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind.}$$

**Bemerkung 2.2:** In Eq. (2.1), ist der Parameter  $\theta$  deterministisch und nicht zufällig. Die stochastischen Elemente sind gerade die Schranken  $A = a(X_1, \dots, X_n)$  und  $B = b(X_1, \dots, X_n)$ .

## Verteilungsaussagen

**Definition 2.3:** Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heisst  $\chi^2$ -verteilt mit  $m$  Freiheitsgraden falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$f_X(y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \text{ für } y \geq 0.$$

Wir schreiben dann  $X \sim \chi_m^2$ .

**Erwartungswert von  $X \sim \chi_m^2$ :** Sei  $X \sim \chi_m^2$ , dann ist  $\mathbb{E}[X] = m$ .

**Varianz von  $X \sim \chi_m^2$ :** Sei  $X \sim \chi_m^2$ , dann ist  $\text{Var}[X] = 2m$ .

**Satz aus Aufgabe:** Seien die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und je  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt unter  $\mathbb{P}_\theta$ , wobei  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  ein 2-dimensionaler unbekannter Parameter ist. Dann gilt  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \sim \chi_{n-1}^2$ -verteilt ist unter  $\mathbb{P}_\theta$ .