



Unidade 18 – Grafos Hamiltonianos

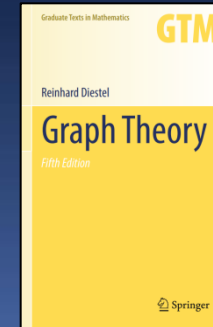
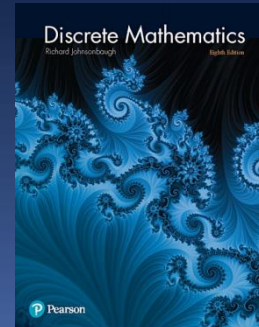
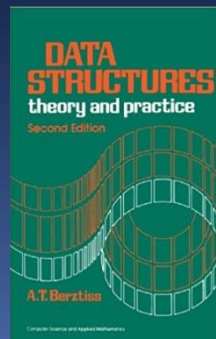
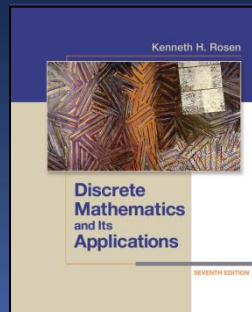
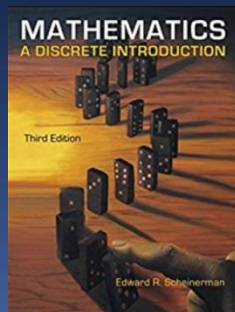
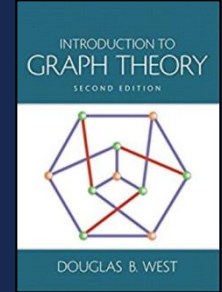
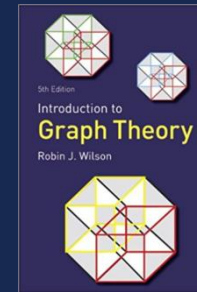
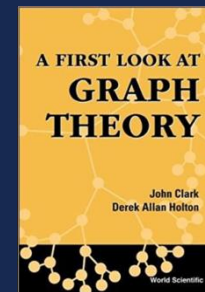
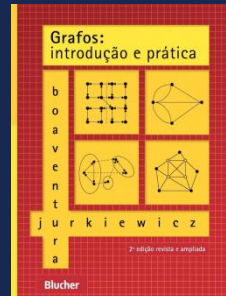
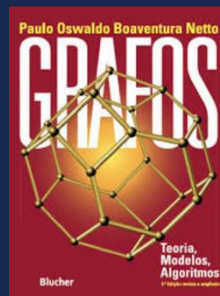


Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUVSP
aparecidovfreitas@gmail.com



Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo Boaventura Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco Goldbarg, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John Clark, Derek Allan Holton – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. Wilson – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas West – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. Scheinerman – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. Rosen – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. Berztiss - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. Johnsonbaugh – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. Diestel – Springer – 5th Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018





Grafos Hamiltonianos

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém **todo** vértice de G ;
- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;
- ✓ Um grafo G é chamado **Grafo Hamiltoniano** se tiver um **ciclo hamiltoniano**;





Lembrando...

Passeio , Trilha e Caminho



Vértice inicial u Vértice final v	$u \neq v$	$u = v$
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	PASSEIO ABERTO	PASSEIO FECHADO
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	TRILHA ABERTA	TRILHA FECHADA ou CIRCUITO
CAMINHO Nenhum vértice pode aparecer mais de uma vez, com a possível exceção de que u e v podem ser o mesmo vértice	CAMINHO ABERTO	CAMINHO FECHADO OU CICLO

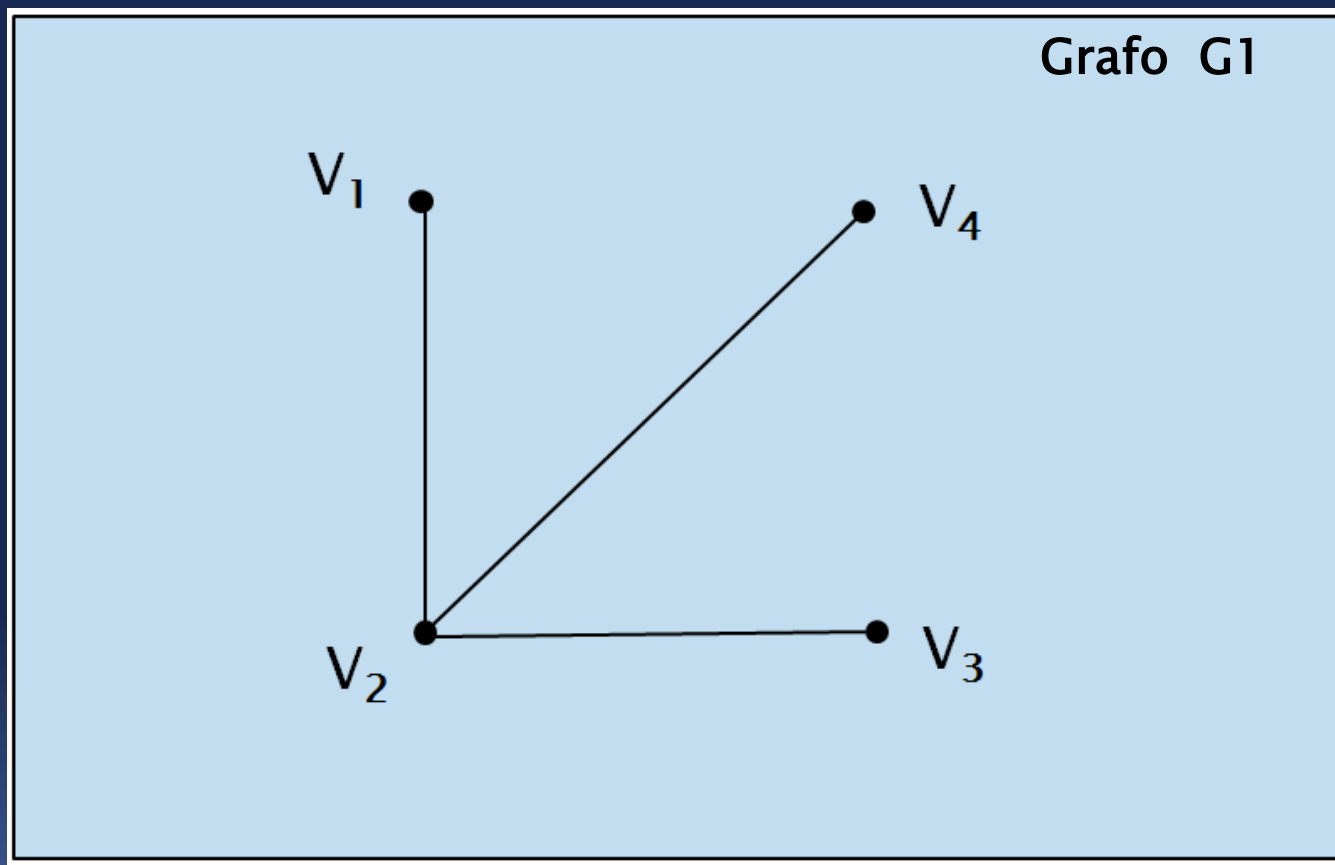




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 1

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_1 Contém um Caminho Hamiltoniano ?

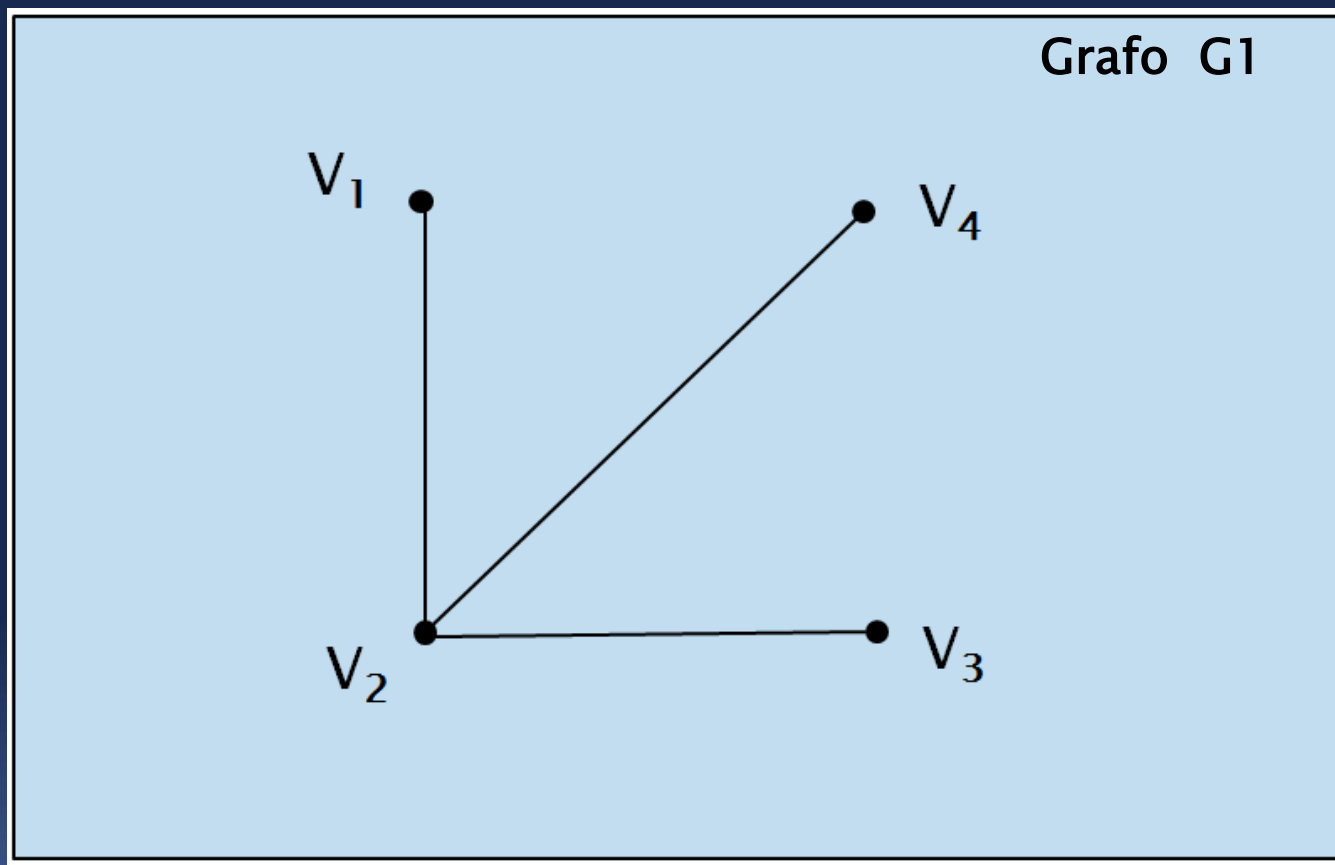




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 1

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



✓ G_1 Contém um Caminho Hamiltoniano ? **NÃO**

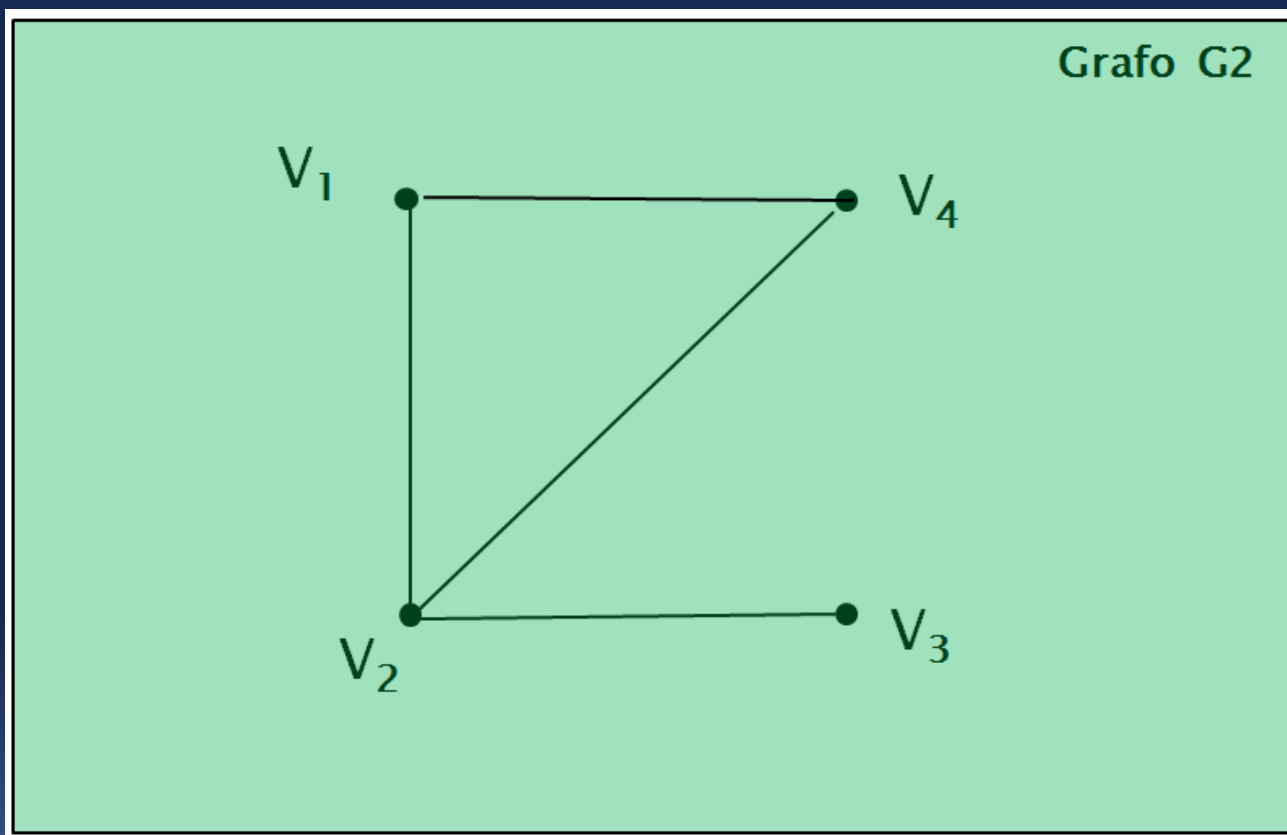




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 2

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



✓ G_2 Contém um Caminho Hamiltoniano ?

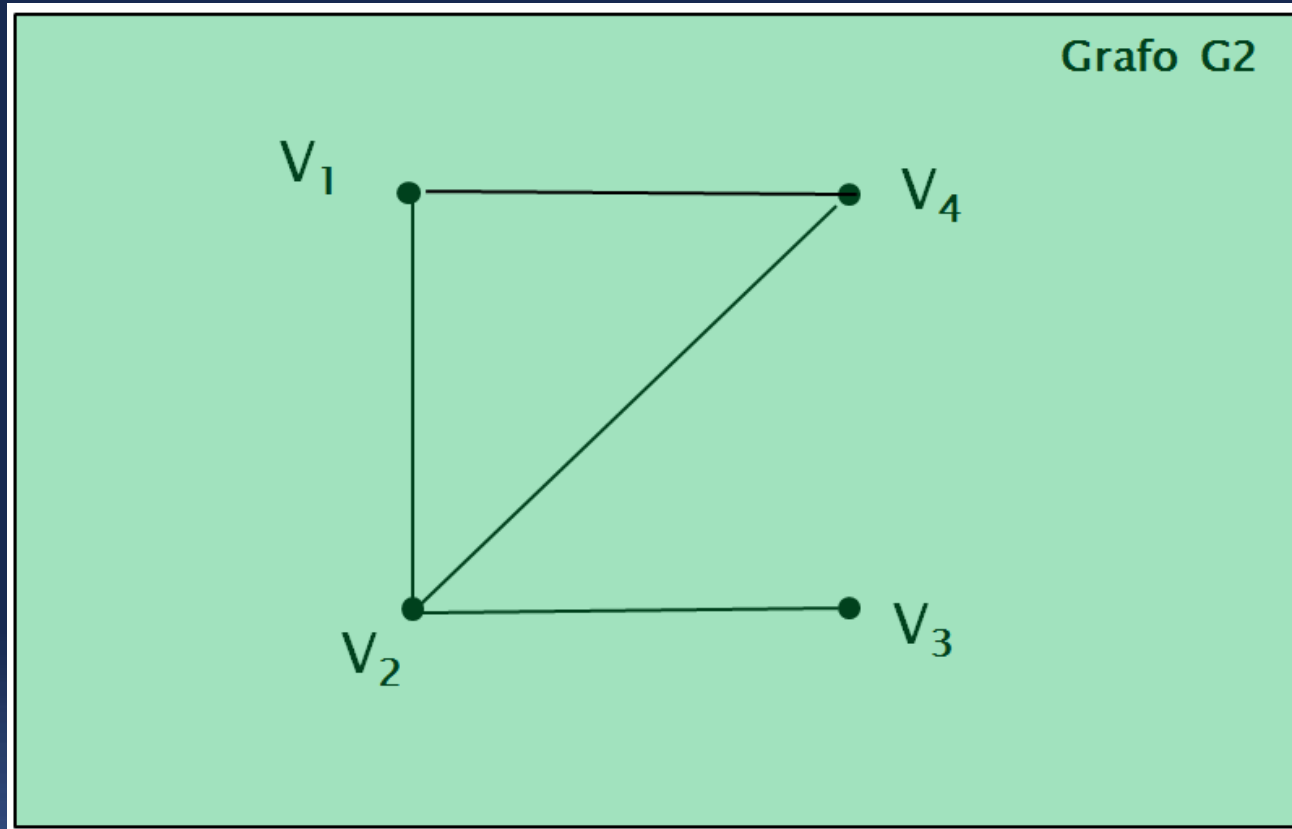




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 2

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_2 Contém um Caminho Hamiltoniano ?
- ✓ G_2 contém o Caminho Hamiltoniano $(V_4 V_1 V_2 V_3)$;

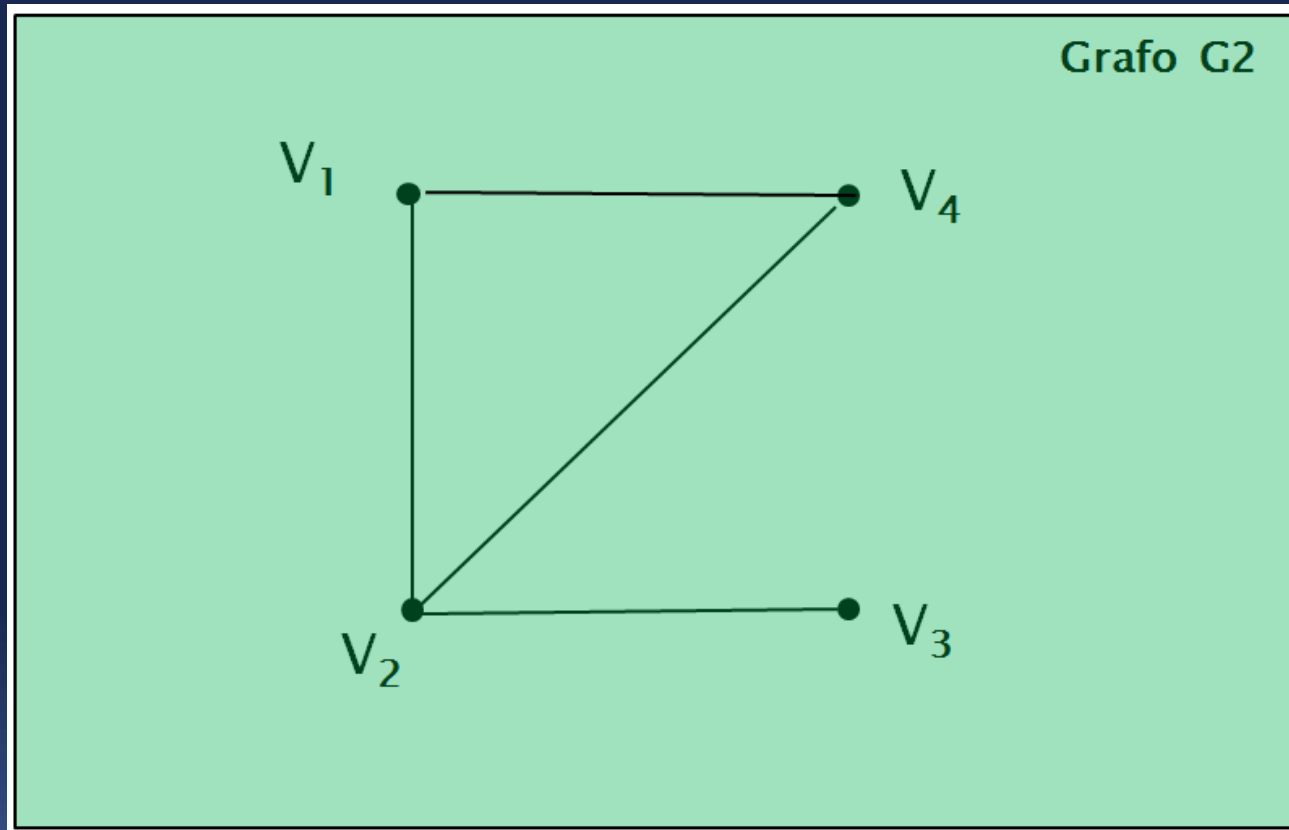




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 2

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



✓ G_2 Contém um Ciclo Hamiltoniano ?

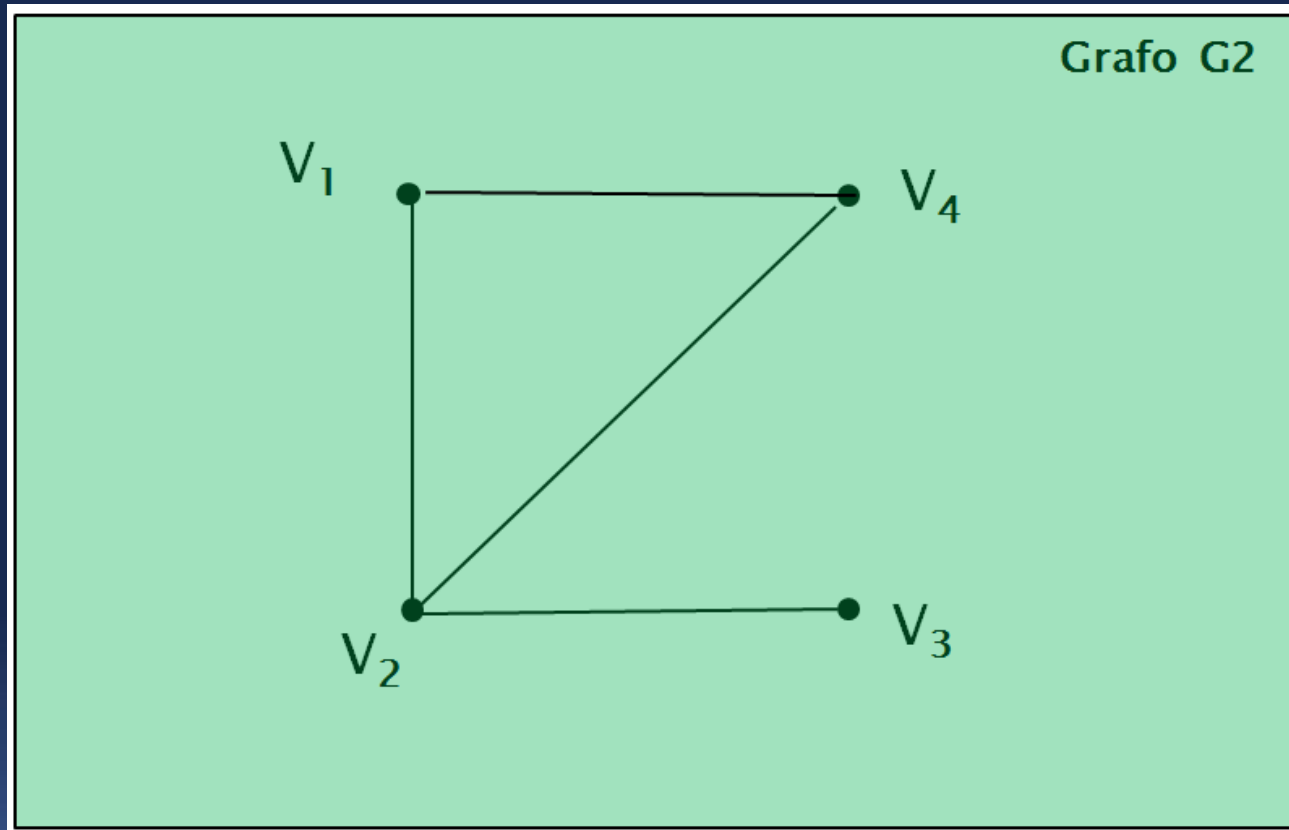




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 2

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



✓ G_2 Contém um Ciclo Hamiltoniano ?

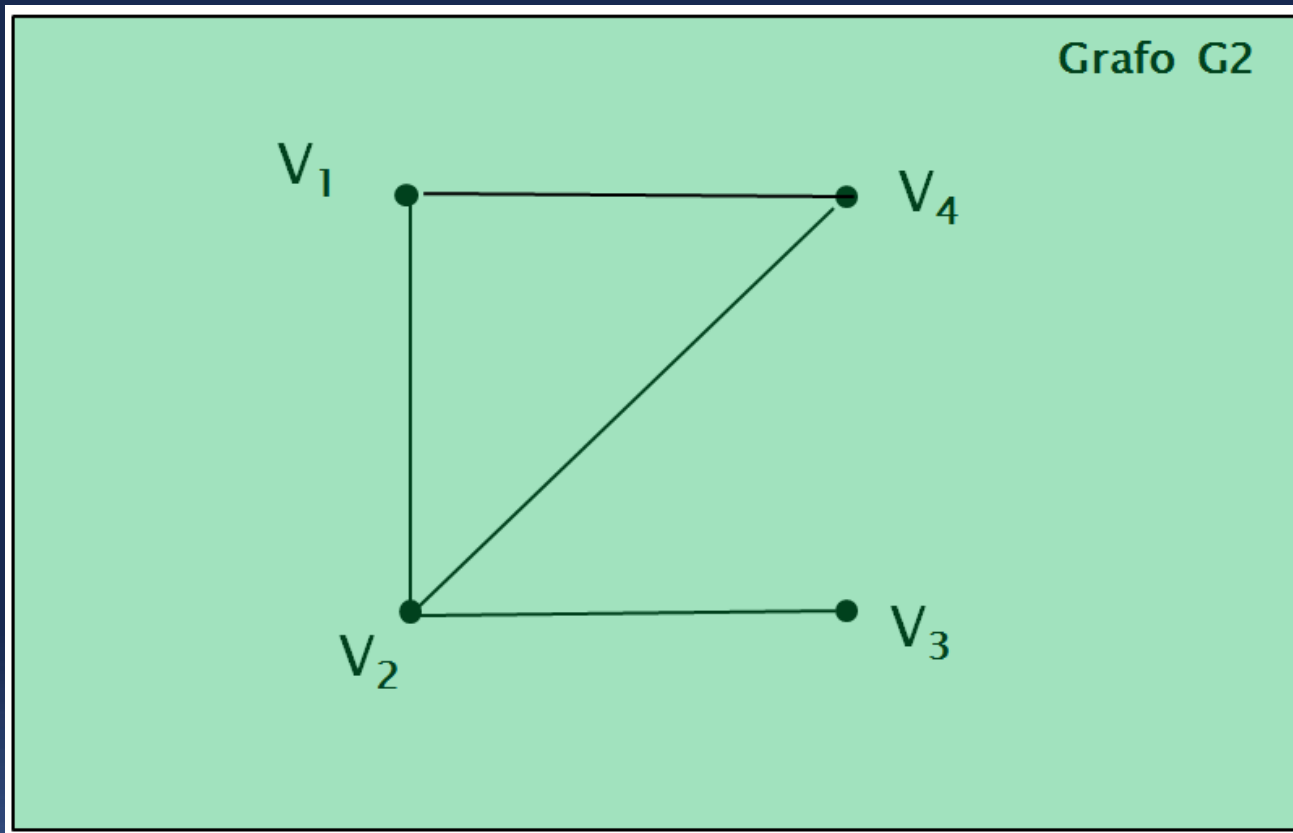




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 2

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_2 Contém um Ciclo Hamiltoniano ?
- ✓ G_2 **NÃO** contém Ciclo Hamiltoniano (ou Circuito Hamiltoniano)

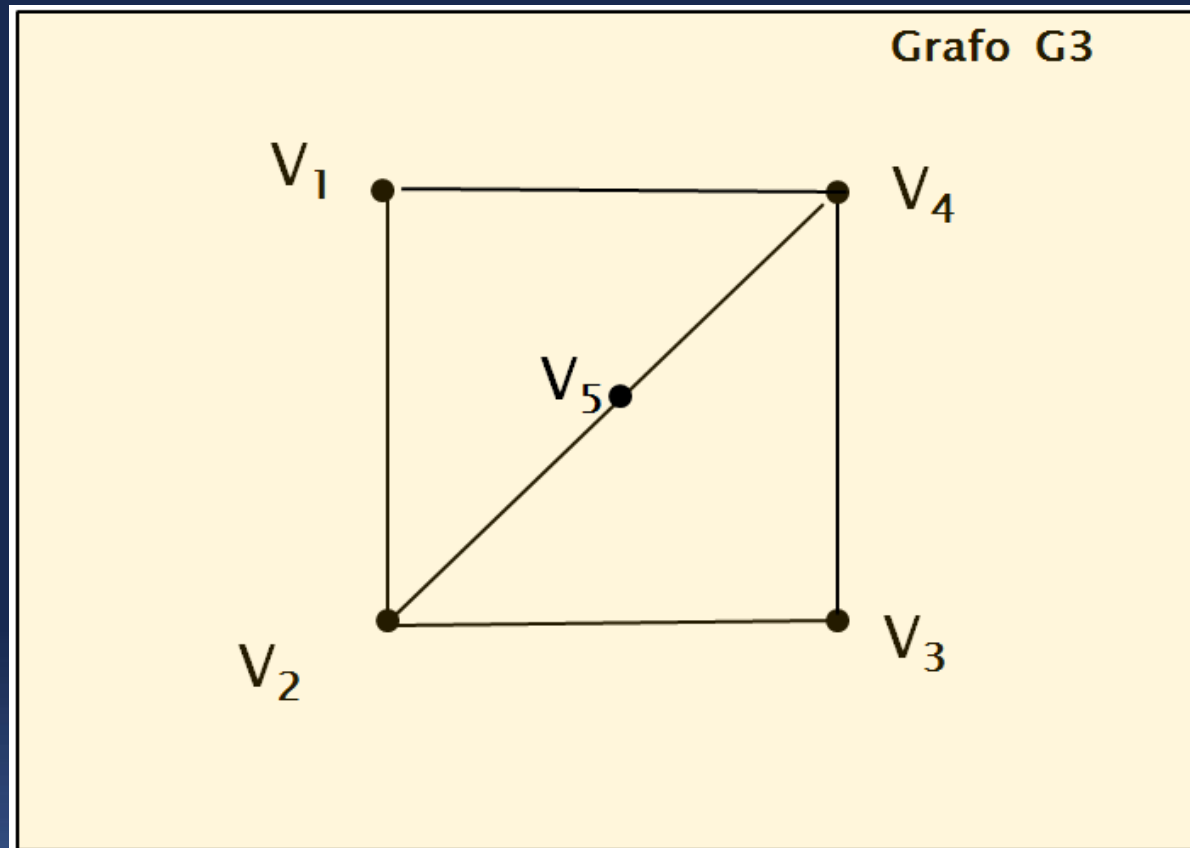




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 3

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



✓ G3 contém um Caminho Hamiltoniano ?

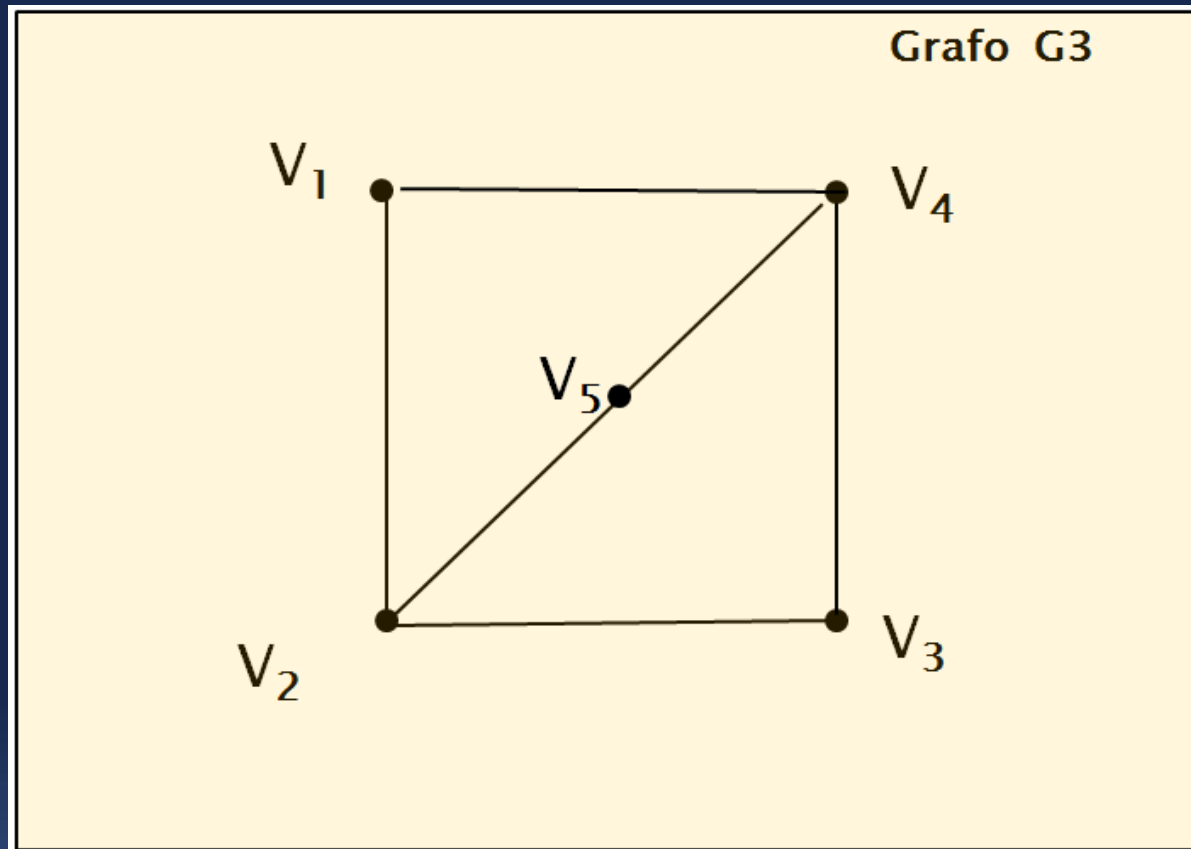




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 3

- ✓ Dado um grafo G , um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_3 contém um Caminho Hamiltoniano ?
- ✓ G_3 contém o Caminho Hamiltoniano ($V_1 V_2 V_5 V_4 V_3$) ;

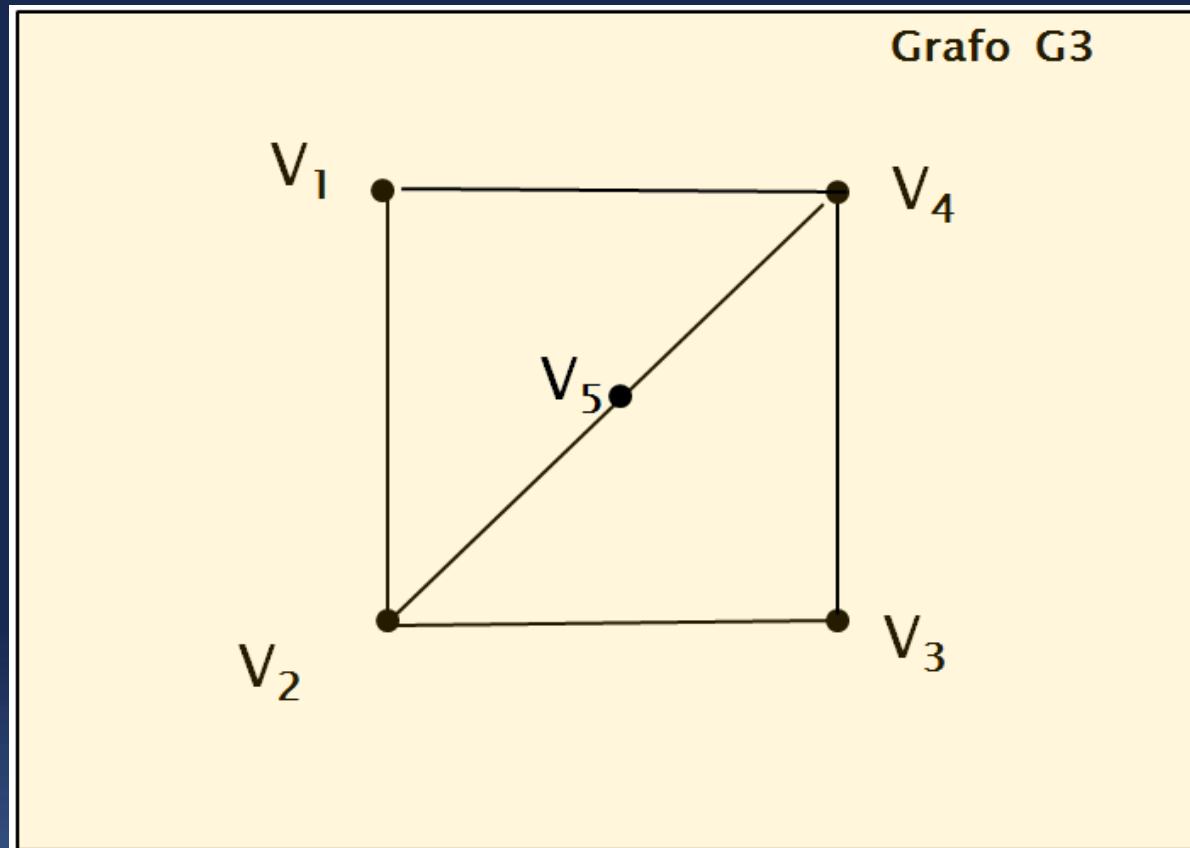




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 3

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



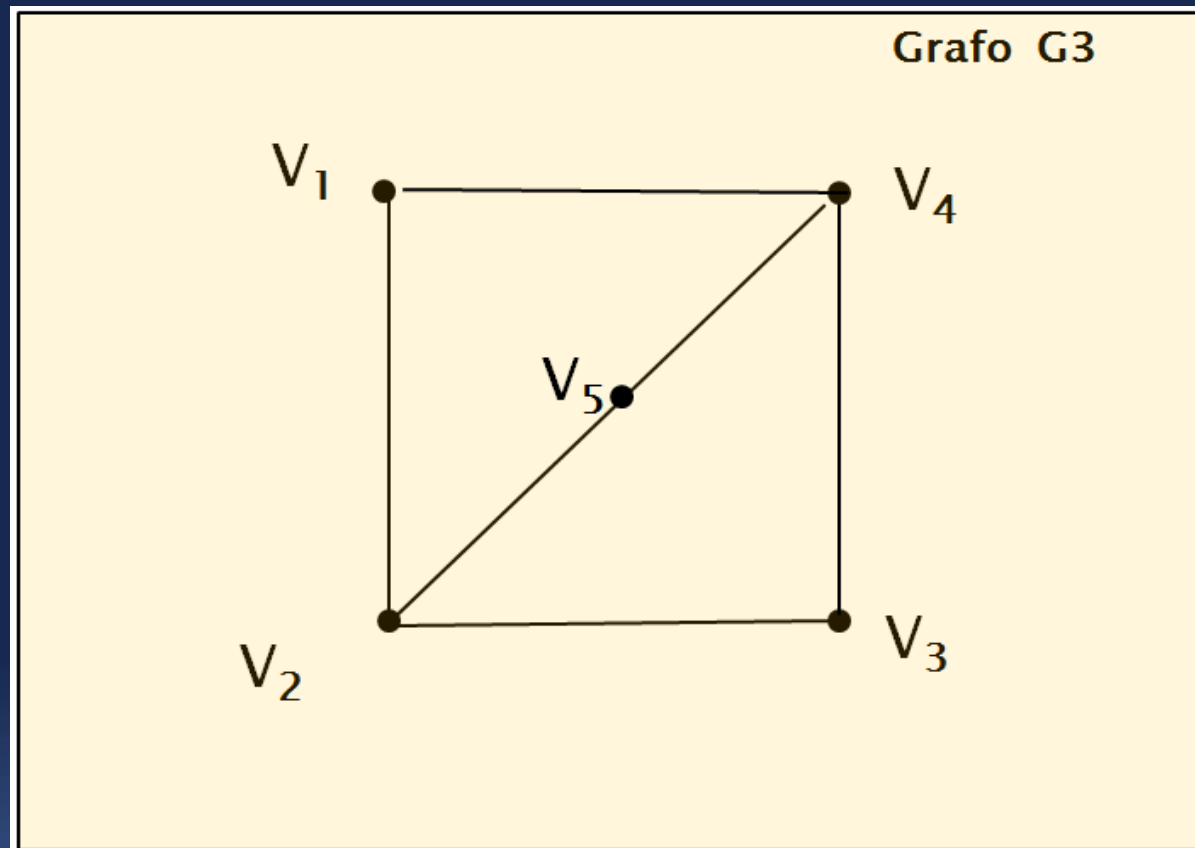
- ✓ $G3$ contém um Ciclo Hamiltoniano ?



Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 3

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



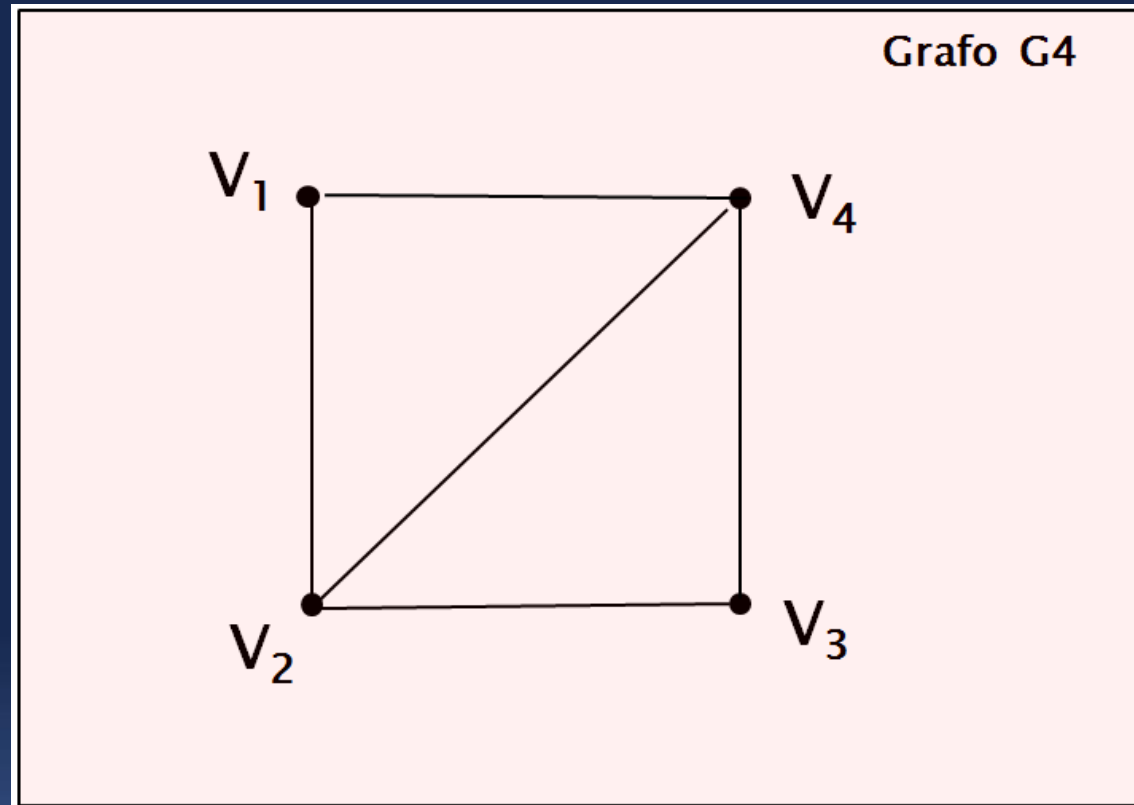
- ✓ $G3$ contém um Ciclo Hamiltoniano ?
- ✓ $G3$ **não** contém Ciclo Hamiltoniano (ou Circuito Hamiltoniano)



Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 4

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_4 contém um Ciclo Hamiltoniano ?

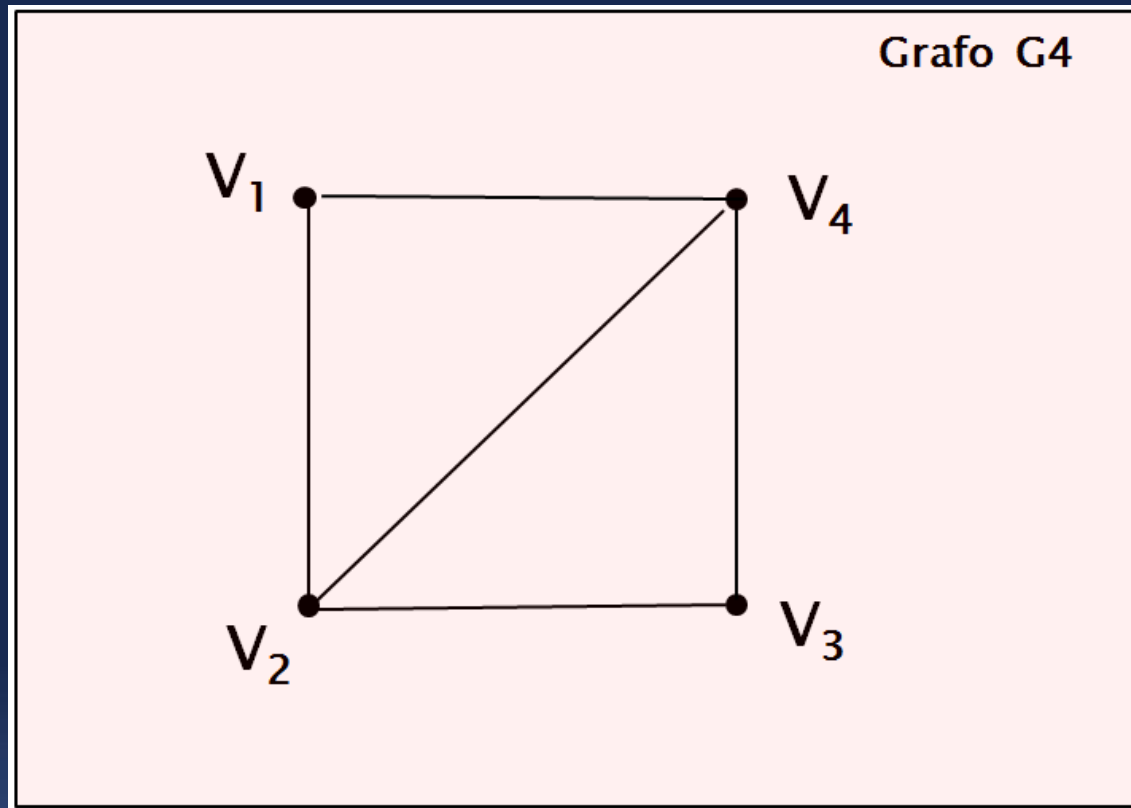




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 4

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_4 contém um Ciclo Hamiltoniano ?
- ✓ G_4 **contém** Ciclo Hamiltoniano (ou Circuito Hamiltoniano) ($V_1 V_2 V_3 V_4 V_1$) ;

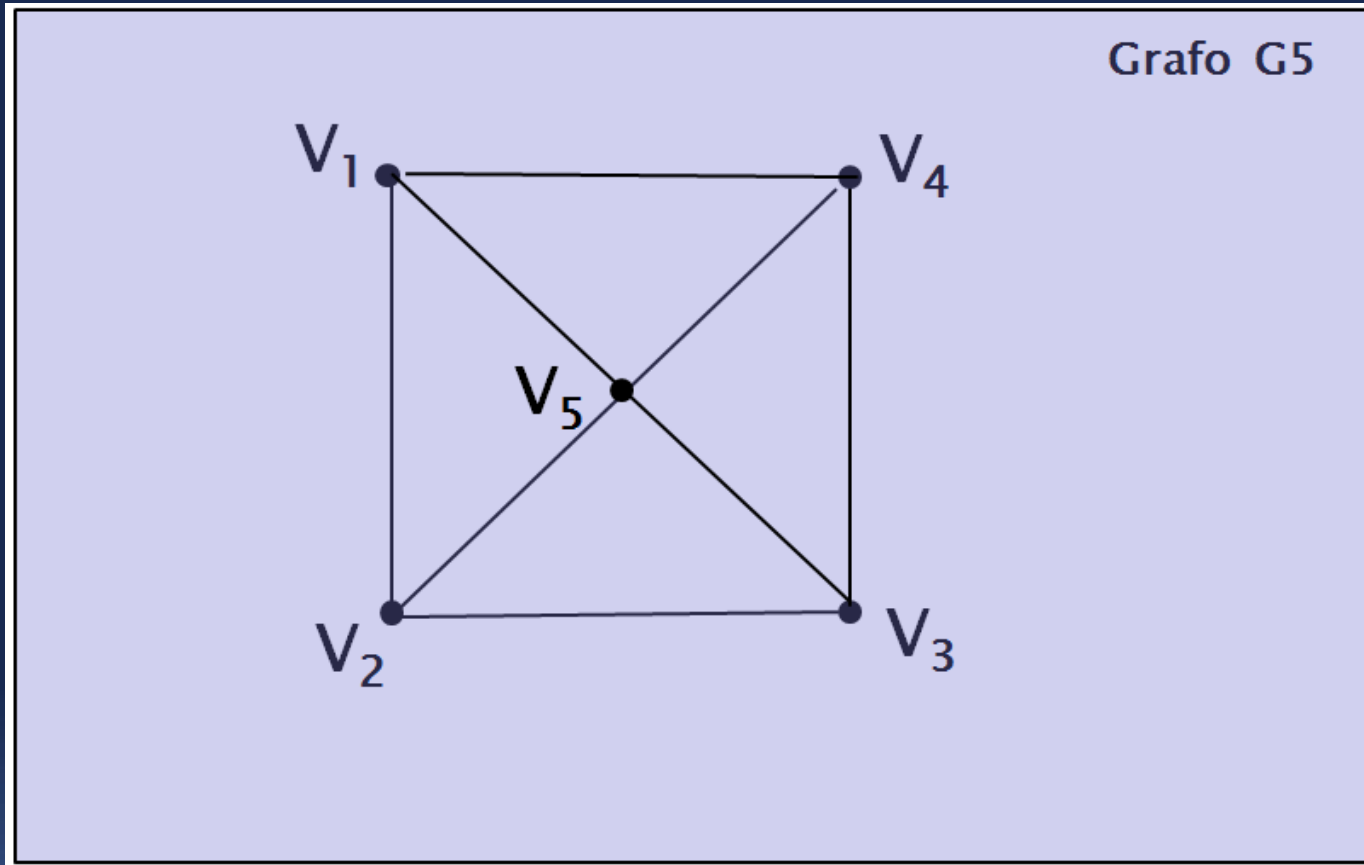




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 5

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_5 contém um Ciclo Hamiltoniano ?

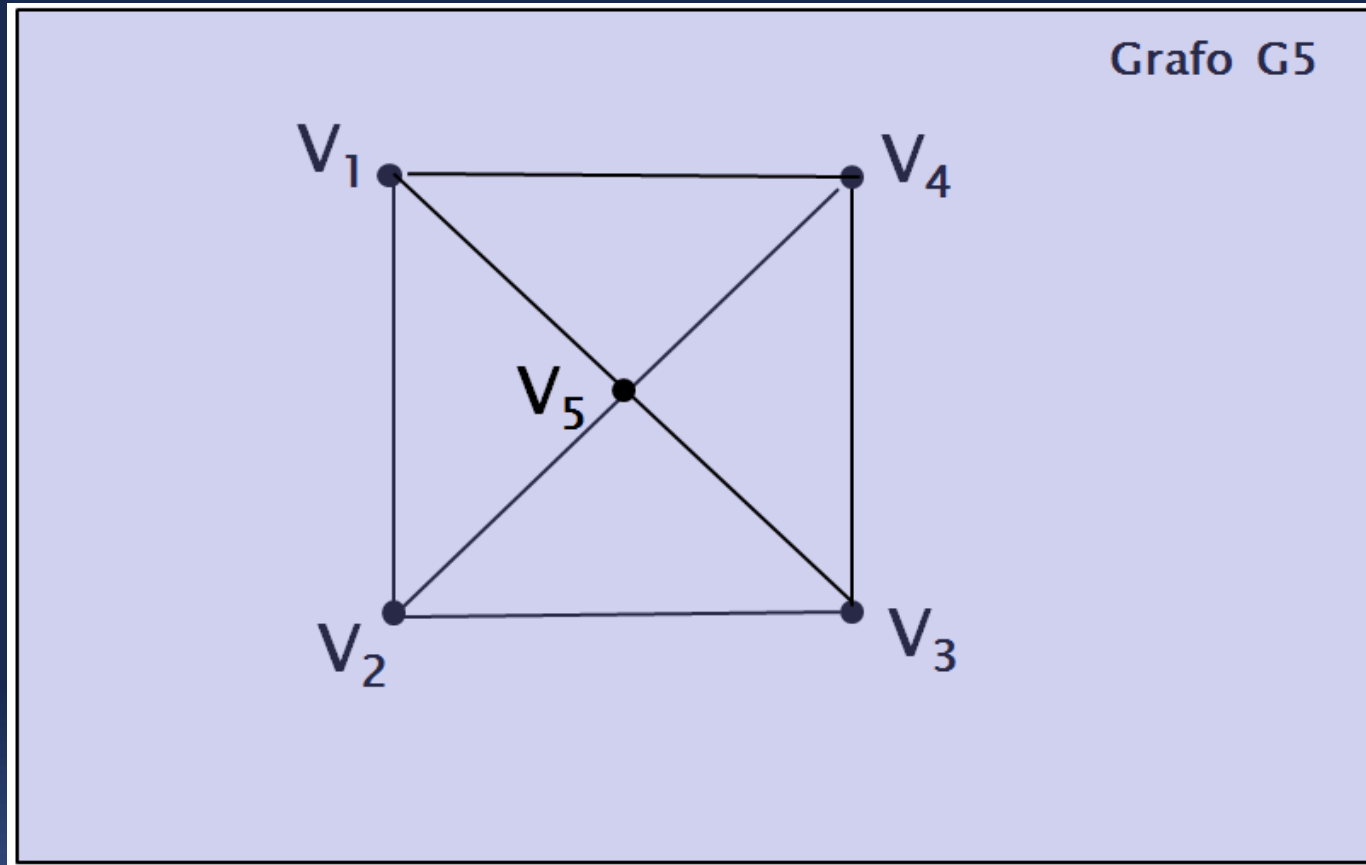




Ciclo e Caminho Hamiltoniano

Exemplo 5

- ✓ Dado um grafo G , um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G ;



- ✓ G_5 contém um Ciclo Hamiltoniano ?
- ✓ G_5 contém Ciclo Hamiltoniano (ou Circuito Hamiltoniano) ($V_1 V_5 V_2 V_3 V_4 V_1$) ;



Grafo Hamiltoniano

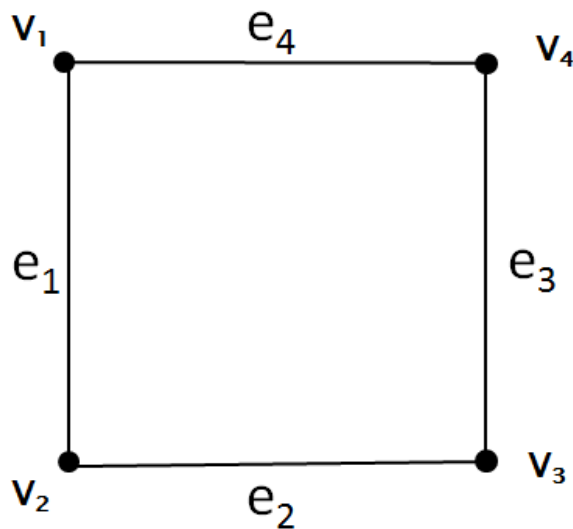
Observação

- ✓ Dado qualquer grafo hamiltoniano G , se G^* é um **supergrafo** de G , obtido por meio da adição de novas arestas entre vértices de G , G^* também será hamiltoniano, uma vez que qualquer ciclo hamiltoniano em G continuará sendo ciclo hamiltoniano em G^* .

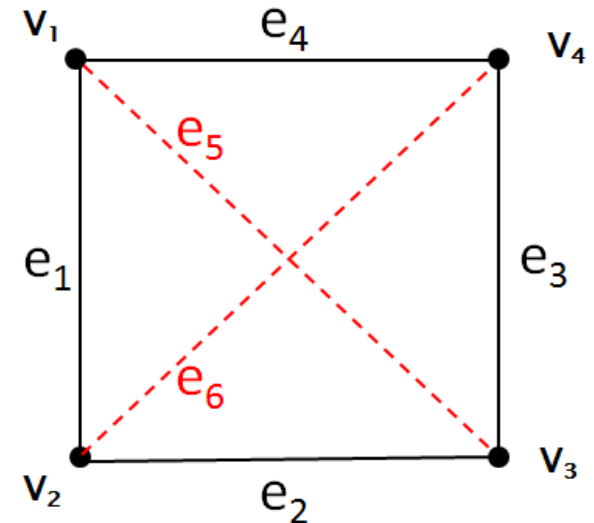
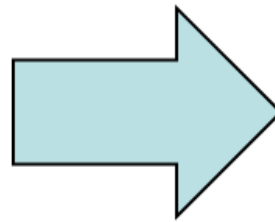
Grafo Hamiltoniano

Observação

- ✓ Exemplo: Considere o grafo G , mostrado na Figura abaixo, e seu supergrafo G^* , obtido por meio da **adição** das arestas e_5 e e_6 .



Grafo G

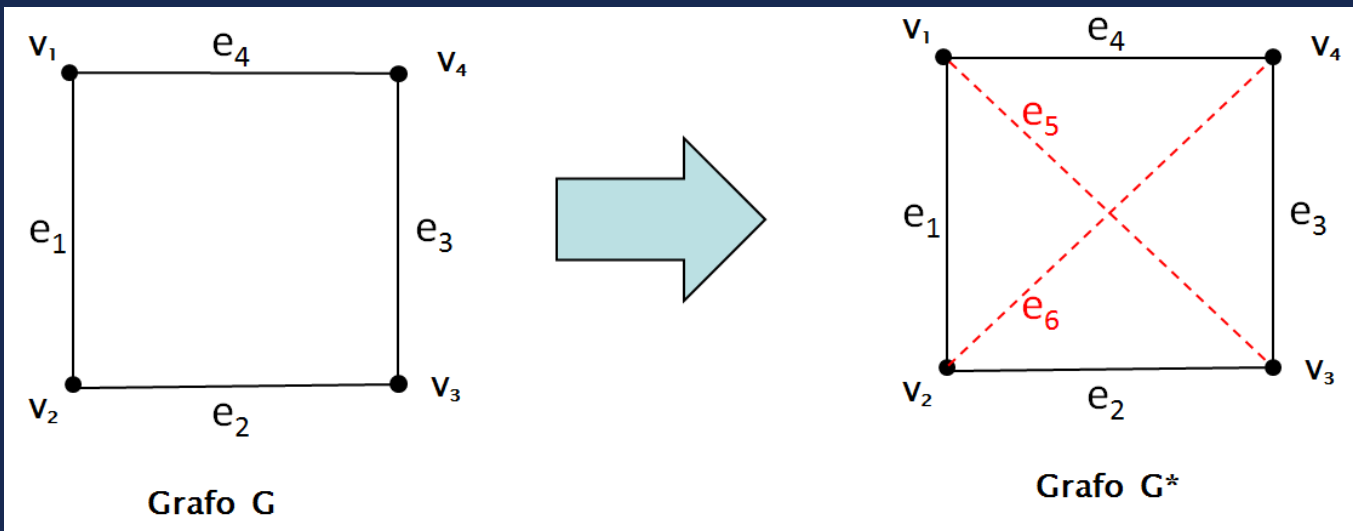


Grafo G^*

Grafo Hamiltoniano

Observação

- ✓ Exemplo: Considere o grafo G , mostrado na Figura abaixo, e seu supergrafo G^* , obtido por meio da **adição** das arestas e_5 e e_6 .



- ✓ O Ciclo Hamiltoniano ($v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$) em G continua sendo um Ciclo Hamiltoniano em G^* .

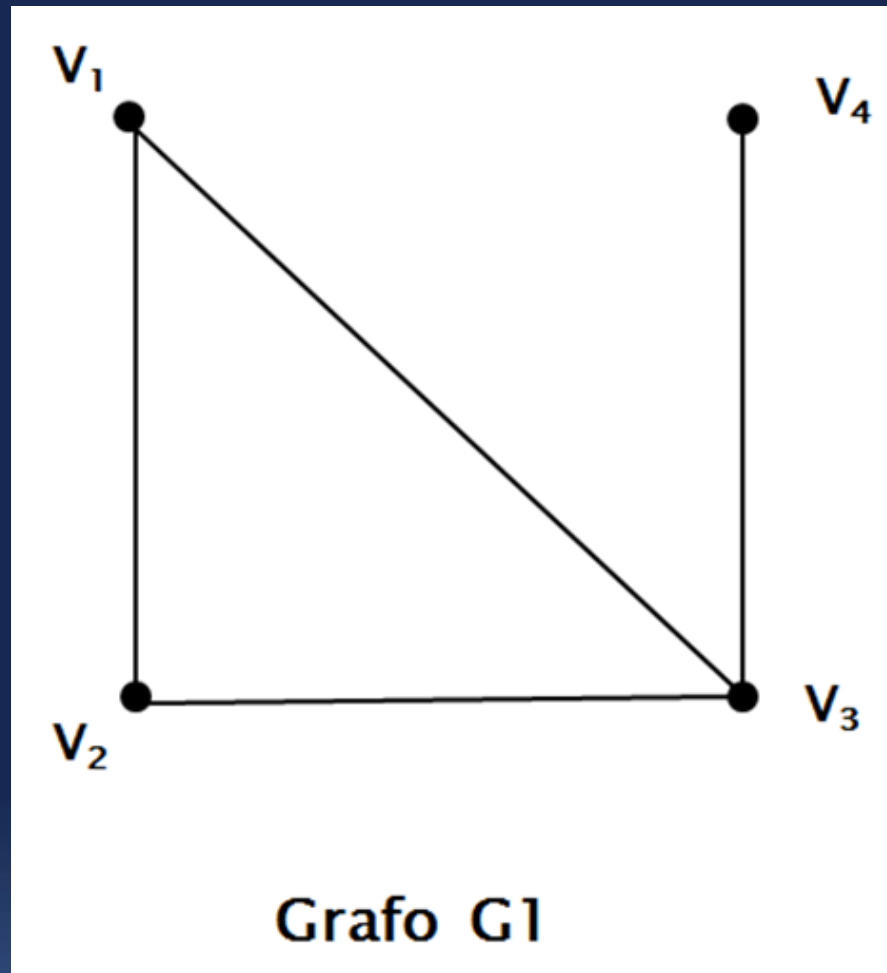


Grafo não hamiltoniano maximal

- ✓ Um grafo simples **G** é chamado **não hamiltoniano maximal** se **não** for **hamiltoniano**, mas a **adição** a ele de qualquer **aresta** conectando **dois vértices não adjacentes** forma um **grafo hamiltoniano**;
- ✓ Lembrando, um grafo é chamado **simples** se **não** tem **loops**, nem **arestas paralelas**;

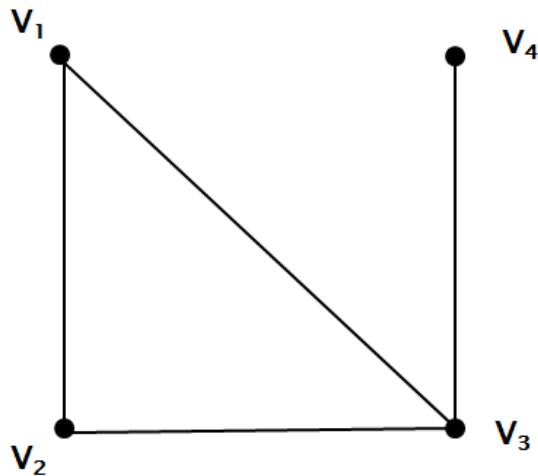


Grafo não hamiltoniano maximal



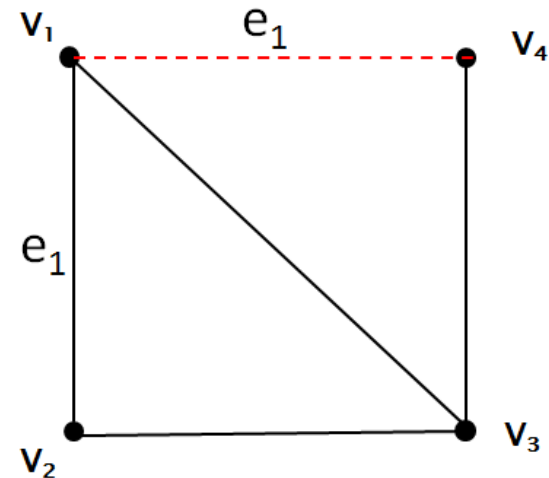
✓ O grafo G1 é não hamiltoniano maximal ?

Grafo não hamiltoniano maximal



Grafo G1

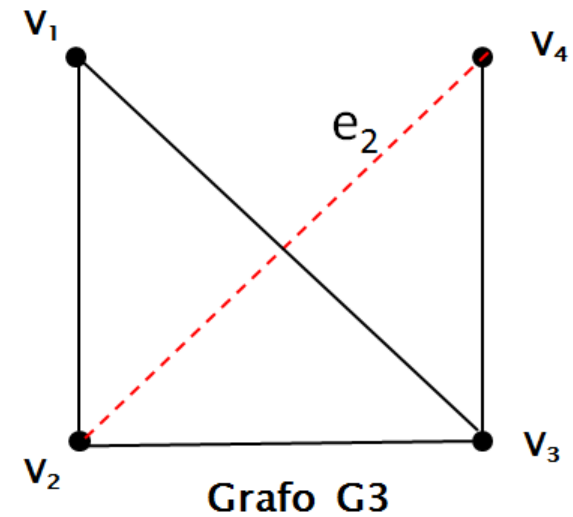
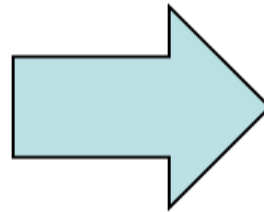
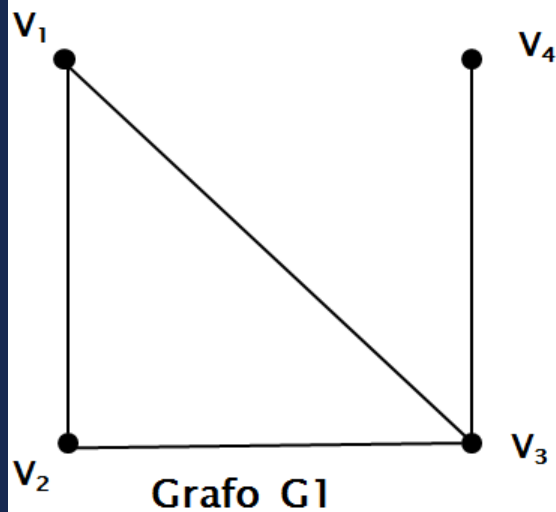
- ✓ O grafo simples G1 não é hamiltoniano;
- ✓ O grafo simples G1 é **não hamiltoniano maximal**, uma vez que a adição de **qualquer** aresta transforma G1 em G2 que é hamiltoniano; $(v_1v_2v_3v_4v_1)$
- ✓ Com a adição de e_1 em G1, obtem-se G2 que é hamiltoniano.



Grafo G2



Grafo não hamiltoniano maximal

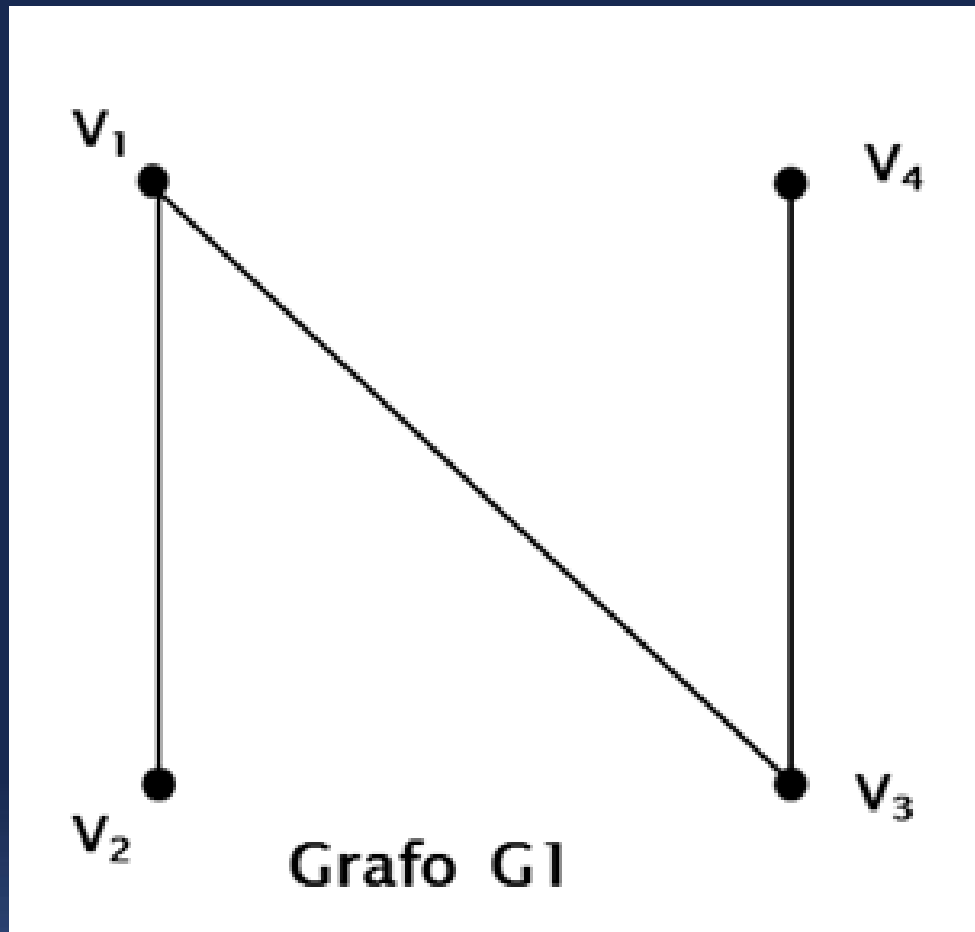


- ✓ O grafo simples **G1** não é hamiltoniano;
- ✓ O grafo simples **G1** é **não hamiltoniano maximal**, uma vez que a adição de **qualquer** aresta transforma **G1** em **G2** que é hamiltoniano; ($V_2V_1V_3V_4V_2$)
- ✓ Com a adição de **e_2** em **G1**, obtem-se **G3** que é hamiltoniano.





Grafo não hamiltoniano maximal



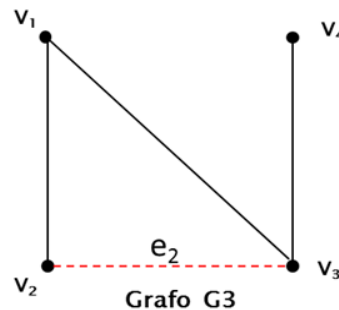
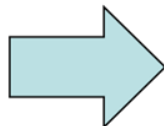
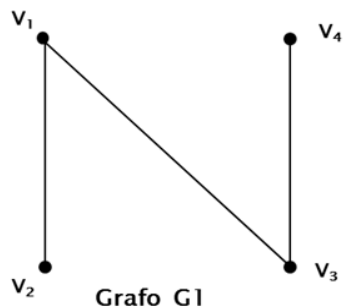
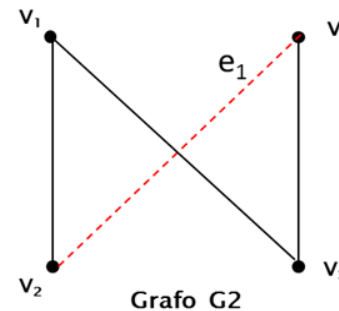
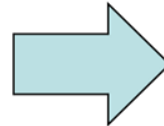
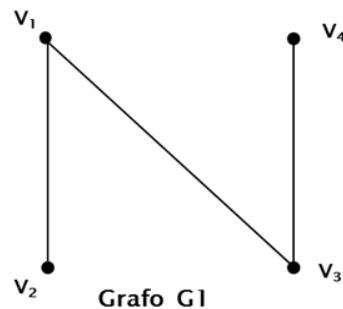
✓ O grafo G1 é não hamiltoniano maximal ?





Grafo não hamiltoniano maximal

Contra-Exemplo



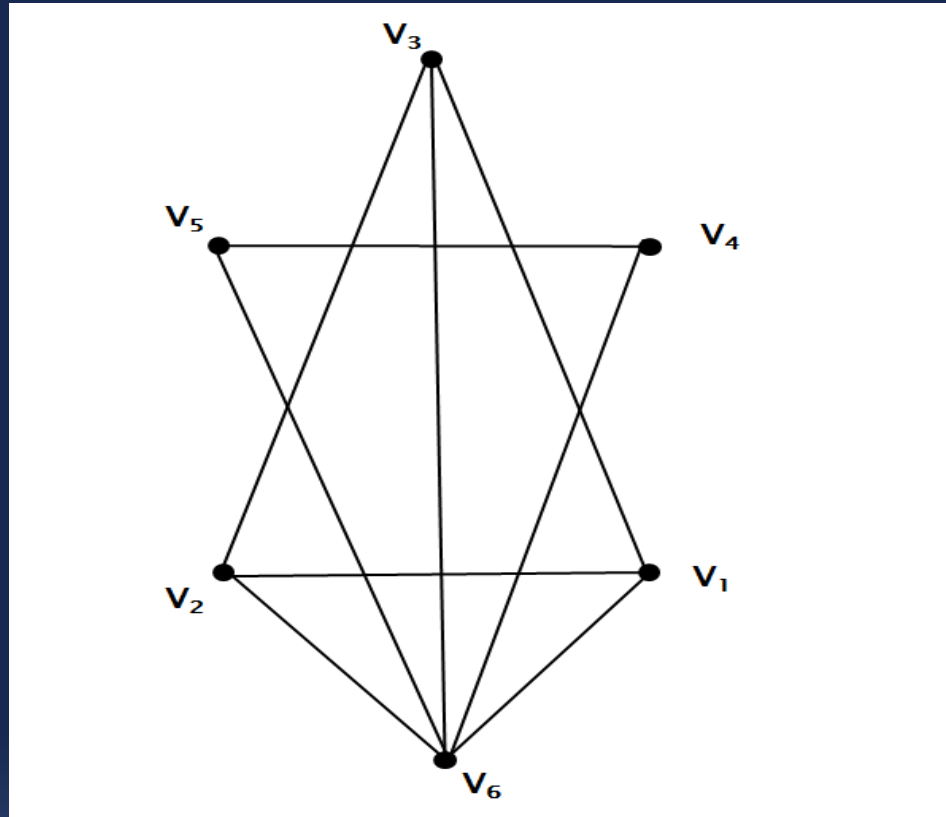
- ✓ O grafo simples **G1** não é hamiltoniano;
- ✓ Com a adição de e_1 em **G1**, obtem-se **G2** que é hamiltoniano. ($V_1V_2V_4V_3V_1$)
- ✓ Por outro lado, se a aresta e_2 for adicionada ao **grafo G1**, o grafo resultante **G3** não é hamiltoniano.
- ✓ Portanto, não é adição de qualquer aresta que torna **G1** hamiltoniano, o que faz com que **G1** **não** possa ser caracterizado como **não hamiltoniano maximal**.





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



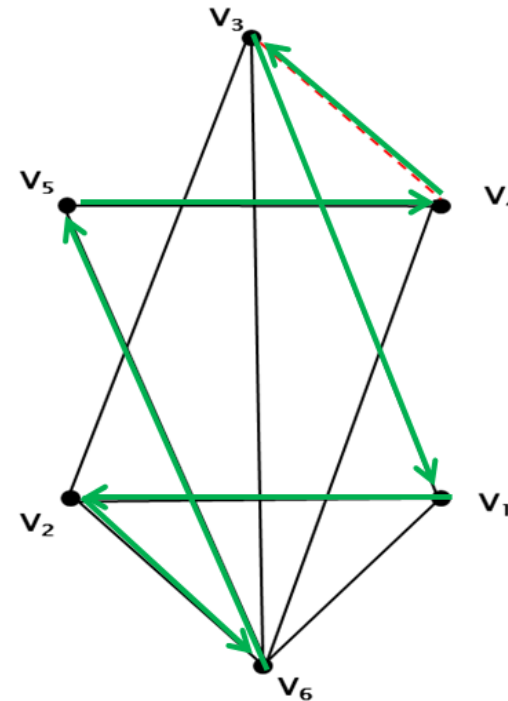
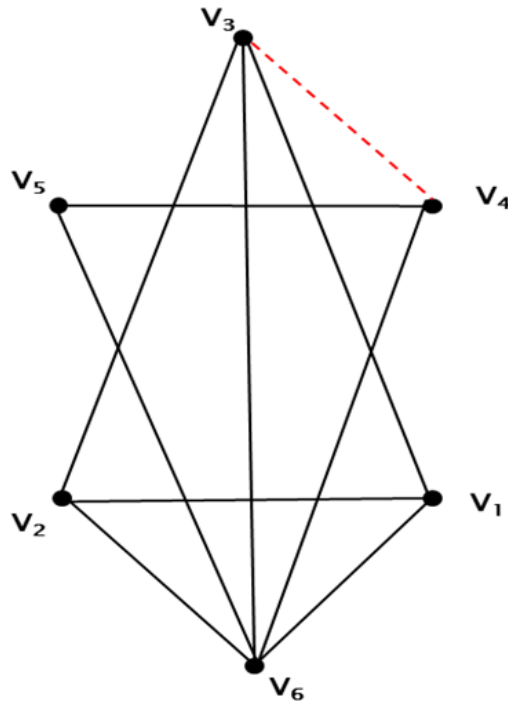
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_3V_4 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_2V_6V_5V_4V_3V_1$



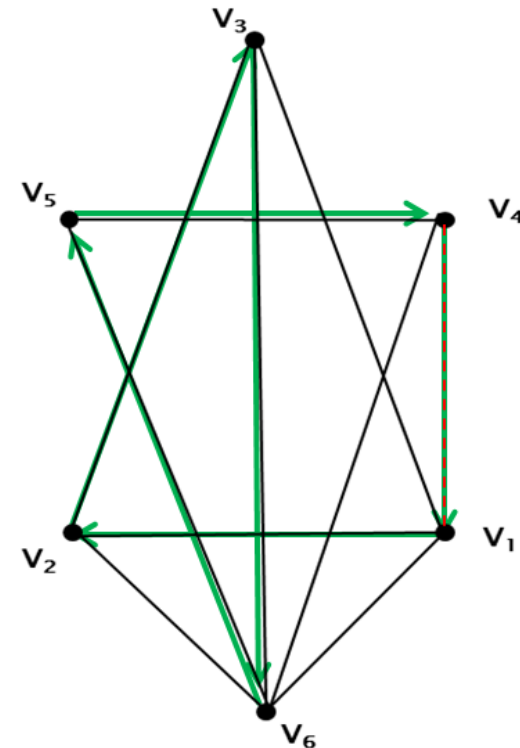
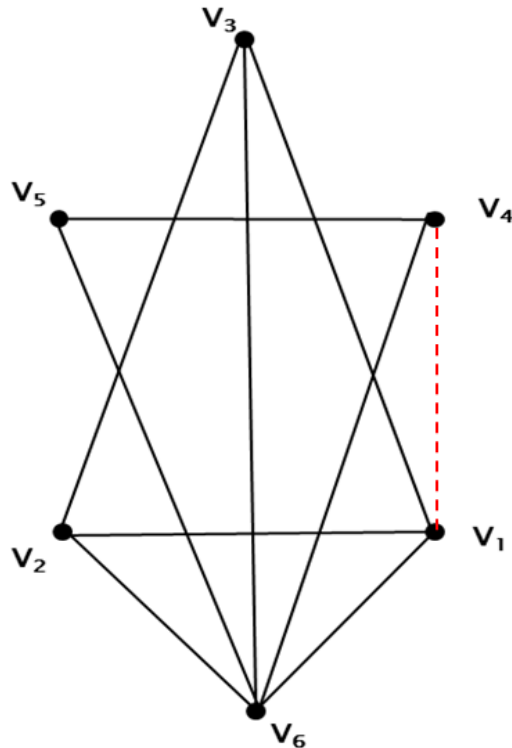
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_4V_1 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_1$



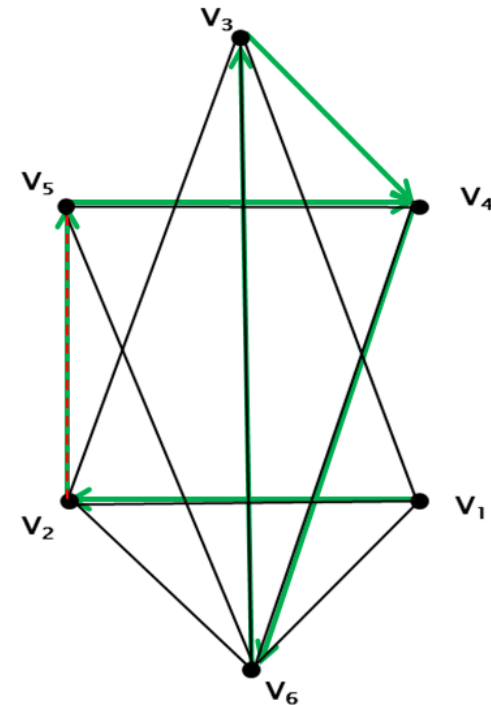
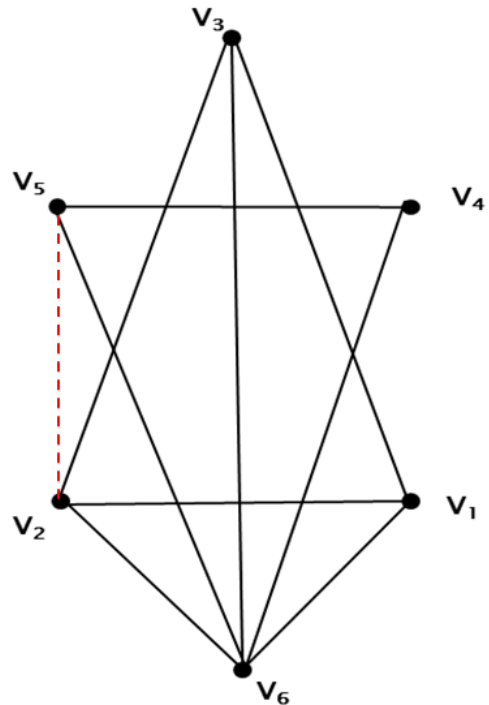
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_5V_2 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_2V_5V_4V_6V_3V_1$



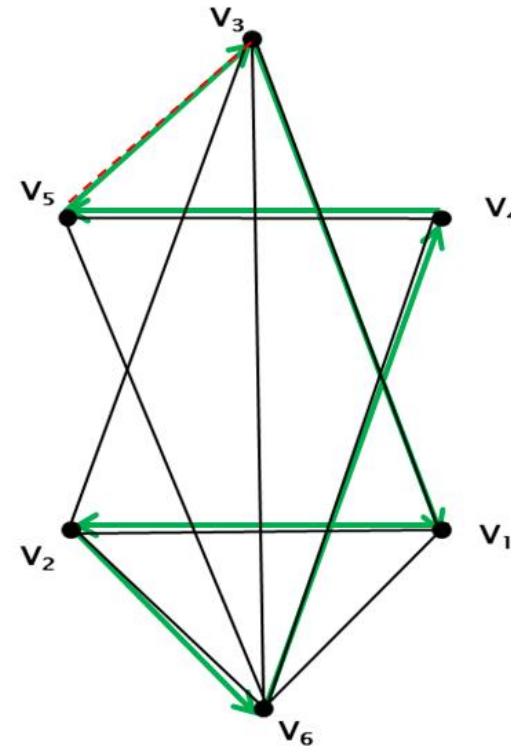
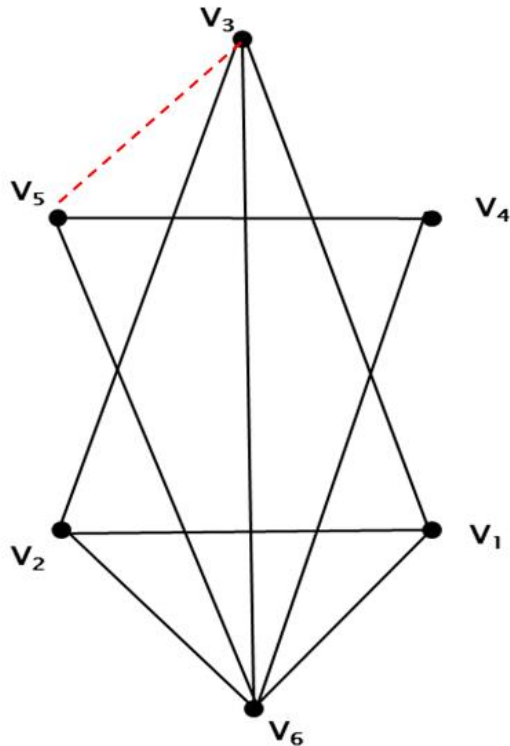
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_5V_3 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_2V_6V_4V_5V_3V_1$



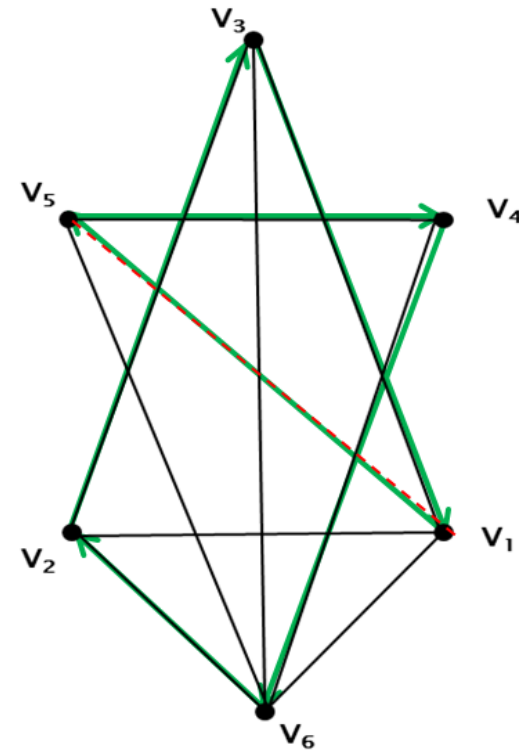
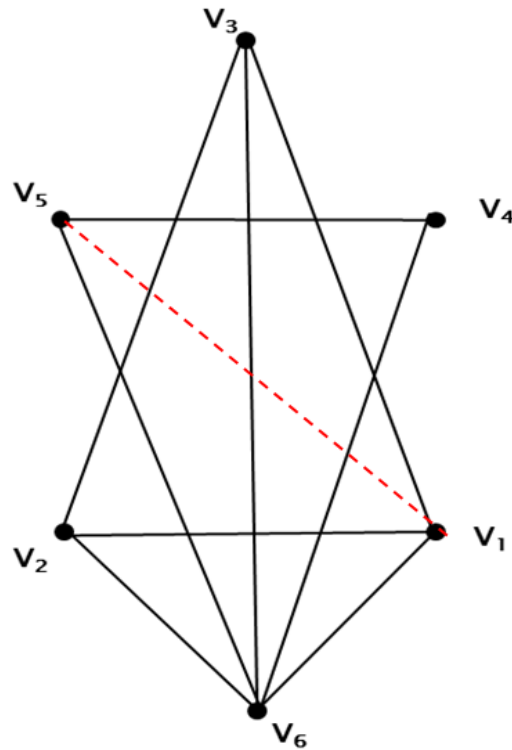
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_5V_3 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_5V_4V_6V_2V_3V_1$



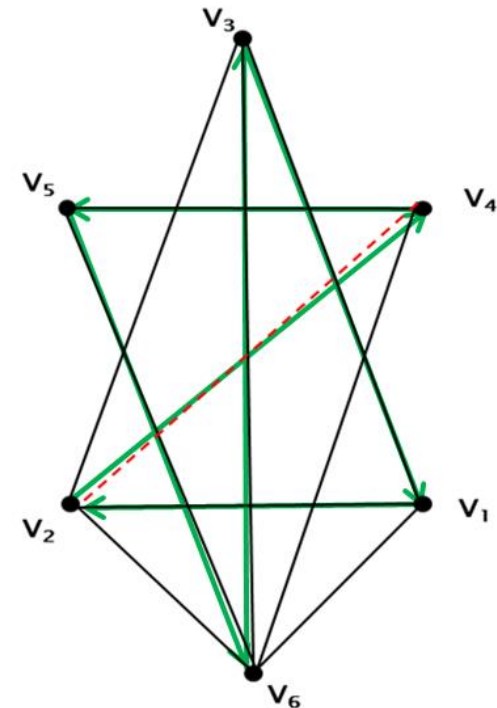
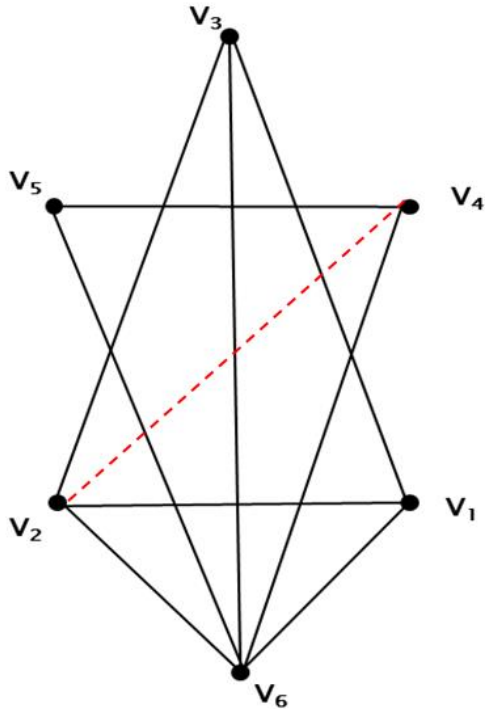
- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?





Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício



✓ Adicionando-se a aresta V_2V_4 , obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $V_1V_2V_4V_5V_6V_3V_1$



- ✓ O grafo da Figura acima é **não** hamiltoniano **maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?

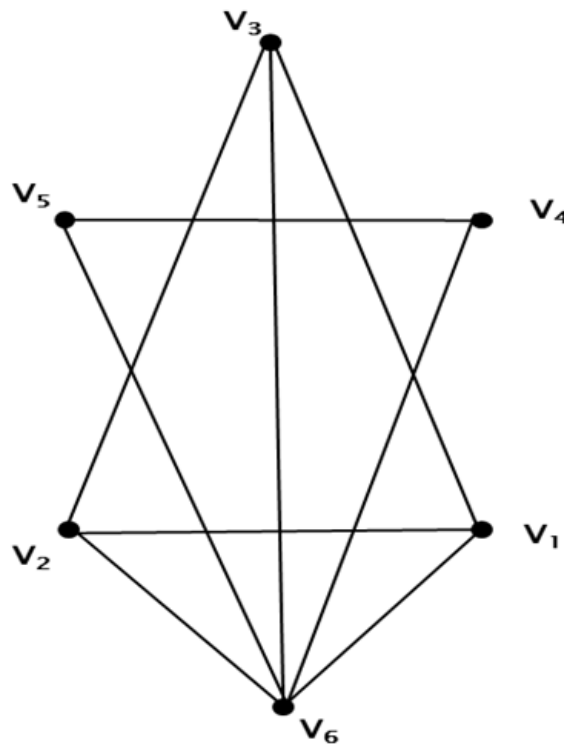




Grafo não hamiltoniano maximal

Conclusão

- ✓ Em razão do Processo de Construção passo a passo descrito nos slides anteriores, observa-se que o grafo G apresentado é Não Hamiltoniano Maximal, uma vez que adicionando-se qualquer aresta entre vértices não adjacentes produz-se um novo Grafo que é Hamiltoniano!



É Não Hamiltoniano Maximal

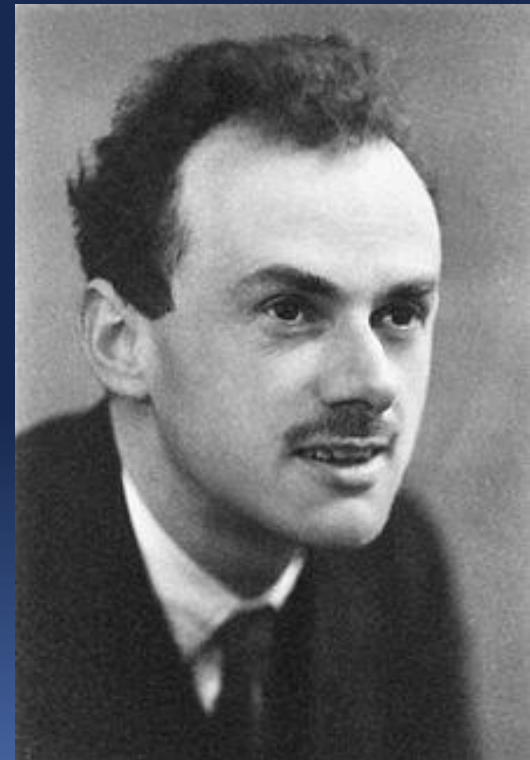




Teorema de Dirac

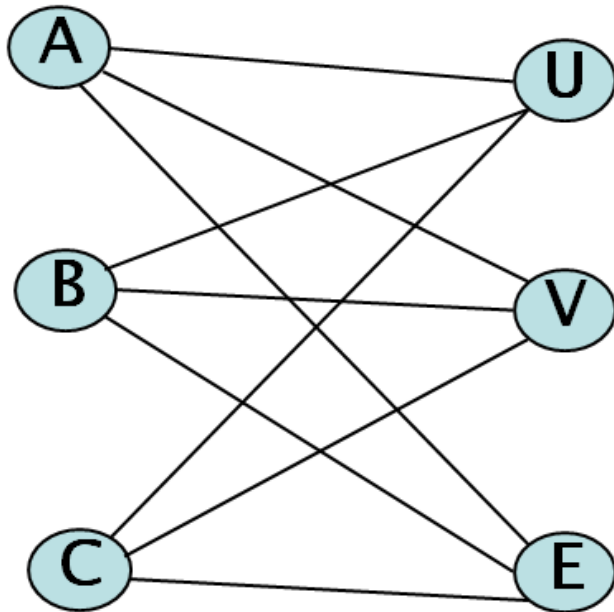
- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é Hamiltoniano.

Grau



Teorema de Dirac – Exemplo

✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é **Hamiltoniano**.



$$d(A) = 3 \geq 6/2$$

$$d(B) = 3 \geq 6/2$$

$$d(C) = 3 \geq 6/2$$

$$d(U) = 3 \geq 6/2$$

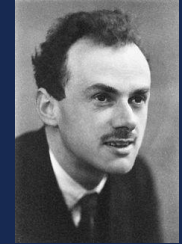
$$d(V) = 3 \geq 6/2$$

$$d(E) = 3 \geq 6/2$$

O Teorema de Dirac é atendido!

Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, o Grafo é **hamiltoniano**.

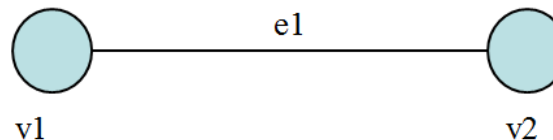




Teorema de Dirac – Observação 1

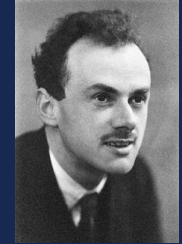
✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é **Hamiltoniano**.

✓ n deve ser **maior ou igual a 3**, pois se tivermos apenas 2 vértices não se consegue definir um ciclo;



$v_1 e_1 v_2 e_1 v_1$ não é ciclo !

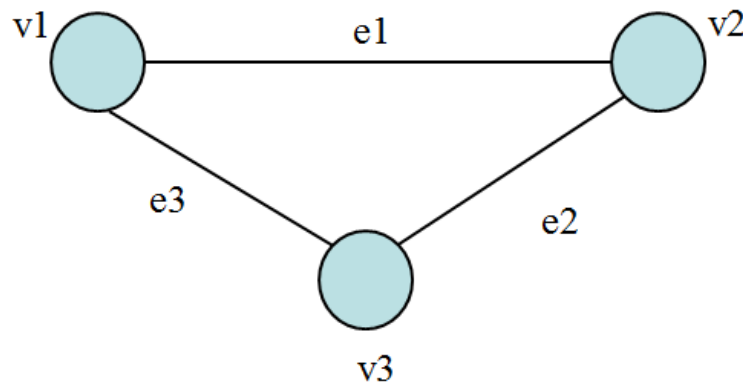




Teorema de Dirac – Observação 1

✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é **Hamiltoniano**.

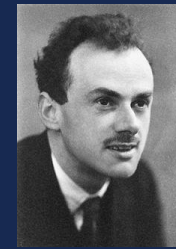
✓ Com $n \geq 3$, é possível construir-se um ciclo hamiltoniano:



$v1e1v2e2v3e3v1$ é ciclo hamiltoniano!



Teorema de Dirac – Observação 2



- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é **Hamiltoniano**.

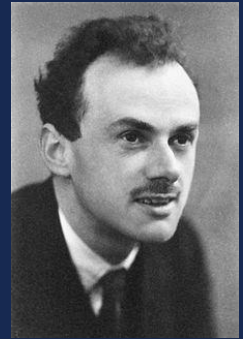
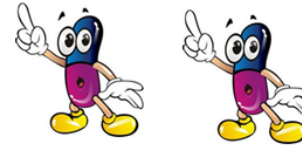
- ✓ A condição imposta pelo **Teorema de Dirac** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!



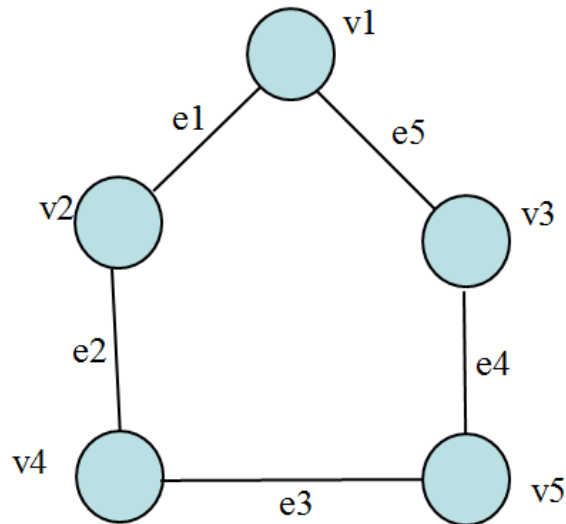
Teorema de Dirac – Observação 2

✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Se para todo vértice $v \in V$, $d(v) \geq n/2$, então G é **Hamiltoniano**.

✓ A condição imposta pelo **Teorema de Dirac** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!



✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição $d(v) \geq n/2$. Exemplo:



$$d(v1) = 2 < 5/2$$

$$d(v2) = 2 < 5/2$$

$$d(v3) = 2 < 5/2$$

$$d(v4) = 2 < 5/2$$

$$d(v5) = 2 < 5/2$$

O Teorema Dirac **NÃO** é atendido!

Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, o **Grafo é hamiltoniano**.

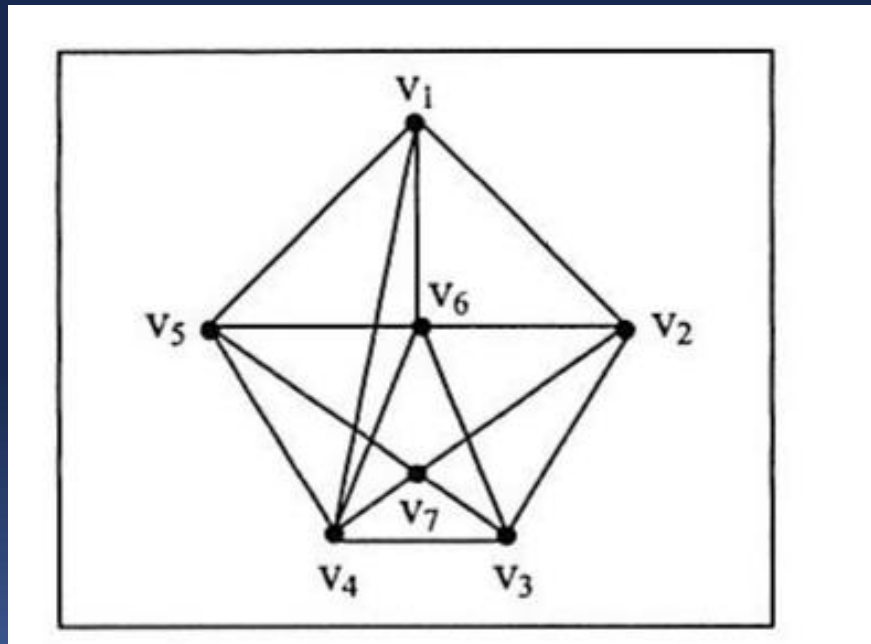
$v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5v1$ é ciclo hamiltoniano !

Logo, o Grafo é hamiltoniano!



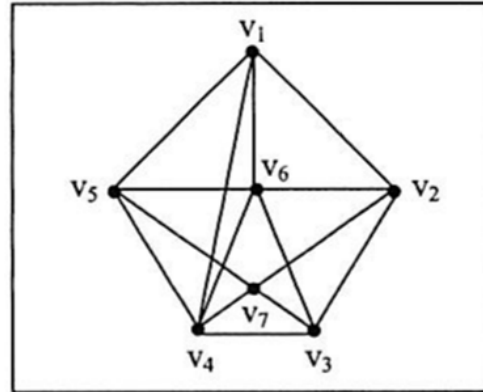
Teorema de Dirac – Exercício

✓ O Grafo **G** abaixo, com 7 vértices, é um **Grafo Hamiltoniano** ?



Teorema de Dirac – Exercício

✓ O Grafo **G** abaixo, com 7 vértices, é um **Grafo Hamiltoniano** ?



Grafo G

✓ Cálculo do Grau dos Vértices do Grafo G:

vértice	grau
v_1	4
v_2	4
v_3	4
v_4	5
v_5	4
v_6	5
v_7	5

- ✓ Como **$n=7$** vértices, observa-se que, a partir da tabela acima, todos os vértices têm grau acima de **$n/2$** ;
- ✓ Portanto, o **Grafo G acima é Hamiltoniano**;
- ✓ Um exemplo de Circuito Hamiltoniano do Grafo é: **$v_2v_6v_5v_1v_4v_7v_3v_2$**



Teorema de Ore

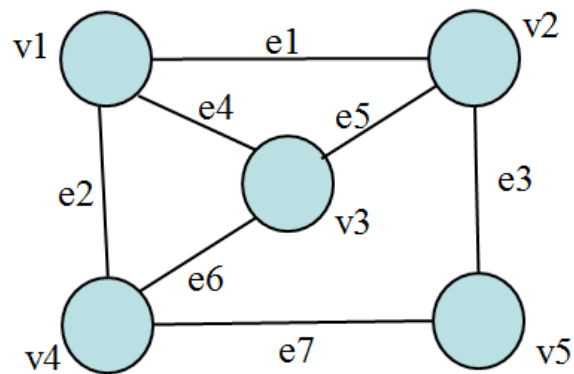
- ✓ Corolário do Teorema de Dirac;
- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $|V| = n \geq 3$. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , $u \in V$ e $v \in V$, $d(u) + d(v) \geq n$, então G é **Hamiltoniano**.



Teorema de Ore

- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $|V| = n \geq 3$. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , $u \in V$ e $v \in V$, $d(u) + d(v) \geq n$, então G é **Hamiltoniano**.

Exemplo:



$$d(v1) + d(v5) = 3 + 2 \geq 5$$

$$d(v2) + d(v4) = 3 + 3 \geq 6$$

$$d(v3) + d(v5) = 3 + 2 \geq 5$$

$$d(v4) + d(v2) = 3 + 3 \geq 5$$

$$d(v5) + d(v3) = 2 + 3 \geq 5$$

$$d(v5) + d(v1) = 2 + 3 \geq 5$$

O Teorema de Ore é atendido!

Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, o Grafo é **hamiltoniano**.

- ✓ O ciclo **v1e4v3e6v4e7v5e3v2e1v1** é **hamiltoniano**. Logo, o grafo é **hamiltoniano**!

Teorema de Ore – Observação

- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices, $|V| = n \geq 3$. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , $u \in V$ e $v \in V$, $d(u) + d(v) \geq n$, então G é **Hamiltoniano**.

- ✓ A condição imposta pelo **Teorema de Ore** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!



- ✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição $d(u) + d(v) \geq n$, sendo u e v vértices quaisquer não adjacentes.

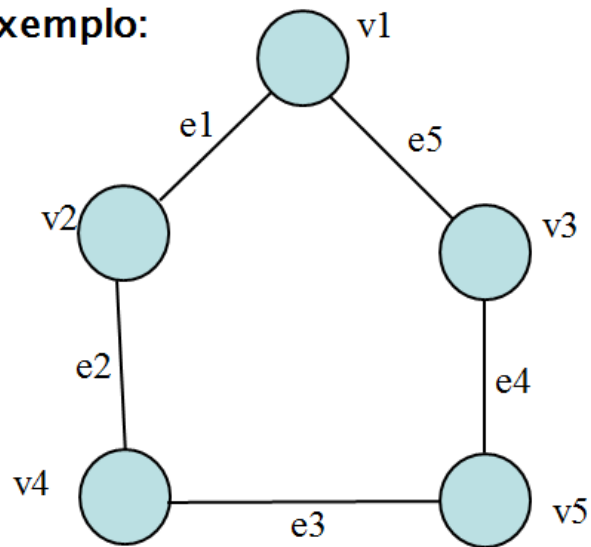
Teorema de Ore – Observação

- ✓ A condição imposta pelo **Teorema de Ore** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!



- ✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição $d(u) + d(v) \geq n$, sendo u e v vértices quaisquer não adjacentes.

Exemplo:



$$d(v1) + d(v4) = 2 + 2 < 5$$

O Teorema Ore **NÃO** é atendido!

Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, o **Grafo é hamiltoniano**.

v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5v1 é ciclo hamiltoniano !
Logo, o Grafo é hamiltoniano!





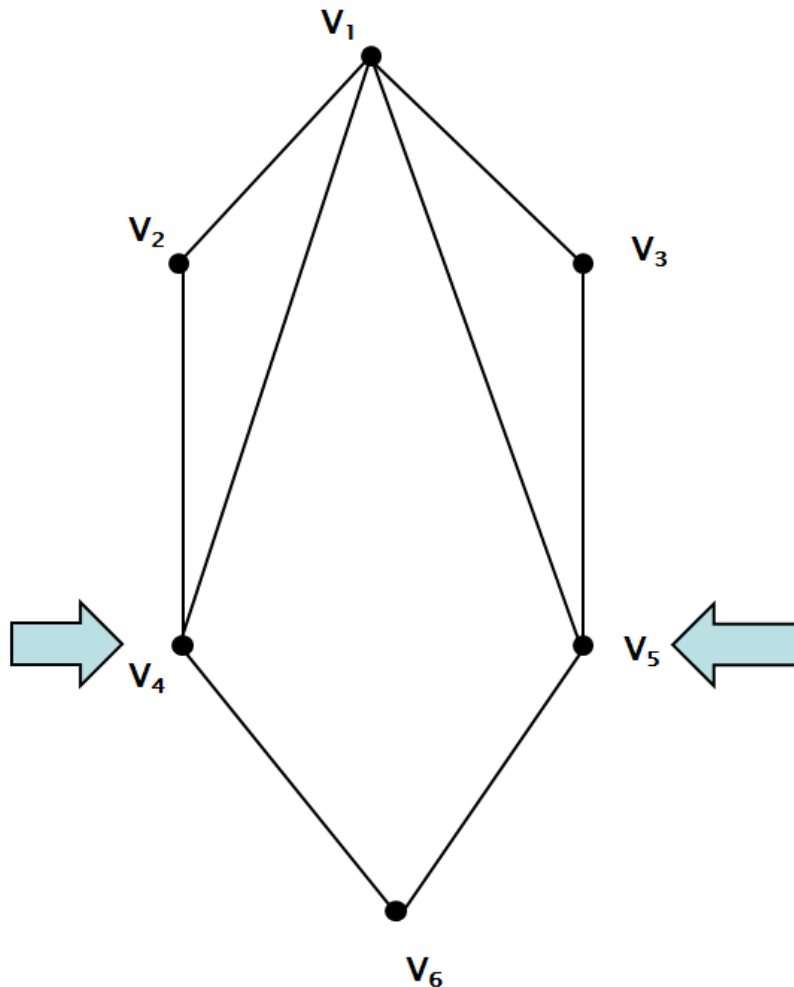
Fechamento de um Grafo G

- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo simples;
- ✓ Se existem dois vértices não adjacentes u_1 e v_1 em V , tal que $d(u_1) + d(v_1) \geq n$ em G ; **una-os** por uma aresta, formando o supergrafo G_1 ;
- ✓ Se existem dois vértices não adjacentes u_2 e v_2 em G_1 , tal que $d(u_2) + d(v_2) \geq n$ em G_1 , **una-os** por uma aresta, formando o supergrafo G_2 ;
- ✓ Continue esse processo, recursivamente, unindo pares de vértices não adjacentes, cuja soma de graus seja no mínimo n , até que não restem mais pares para serem conectados;
- ✓ O supergrafo final obtido é chamado **Fechamento** de G e é denotado por $c(G)$.



Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



Grafo G

$$n=6$$

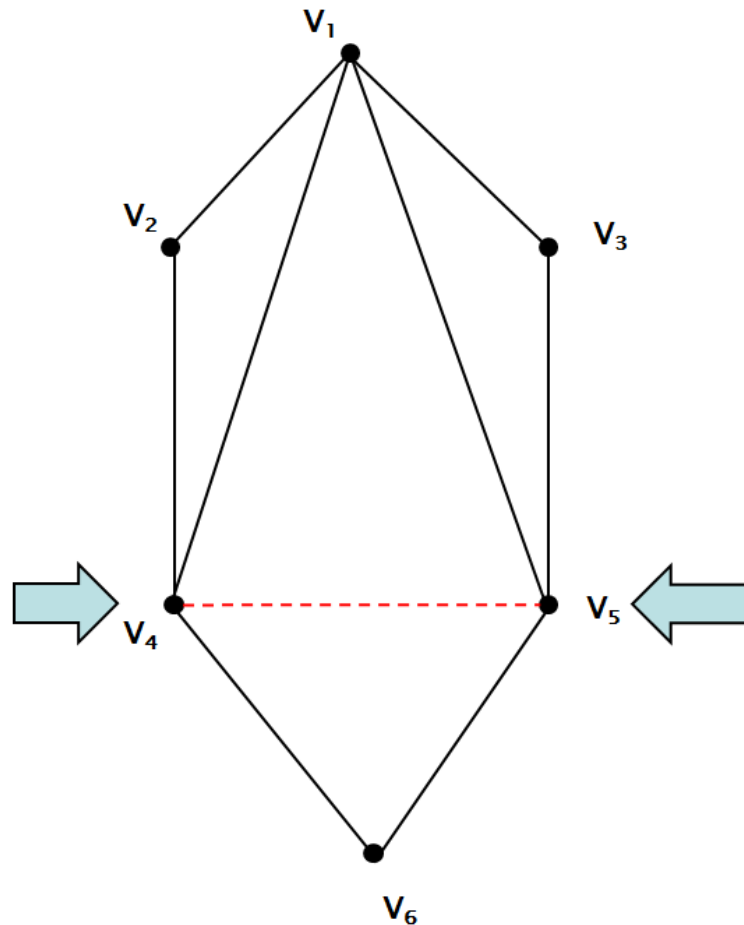
$$d(v_4) = 3$$

$$d(v_5) = 3$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_4) = 3$$

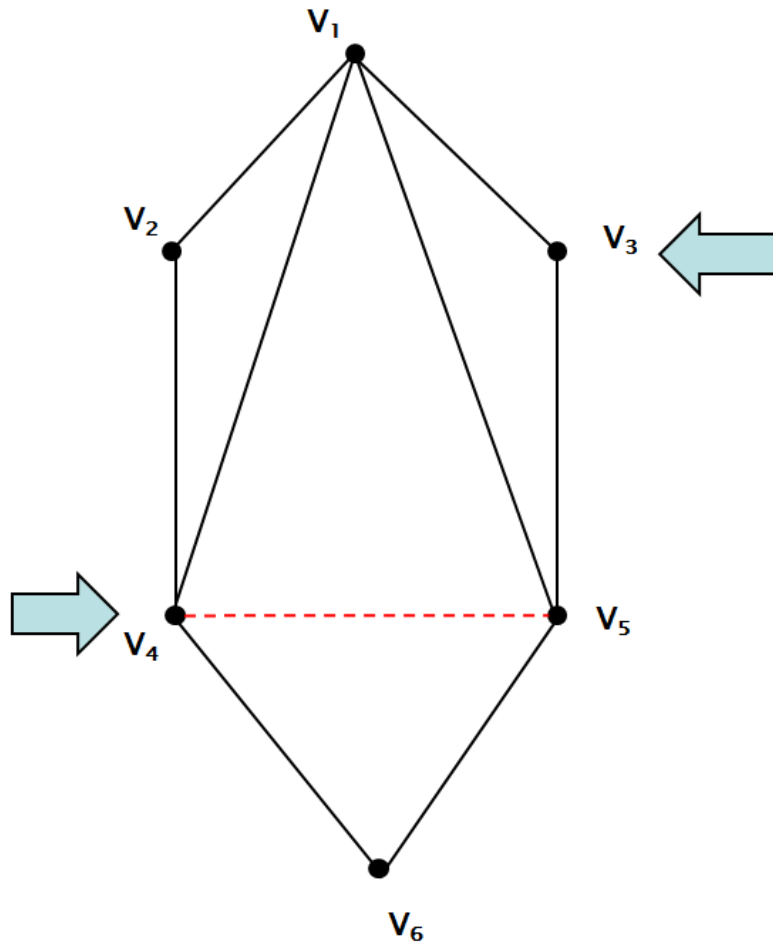
$$d(v_5) = 3$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G_1

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_3) = 2$$

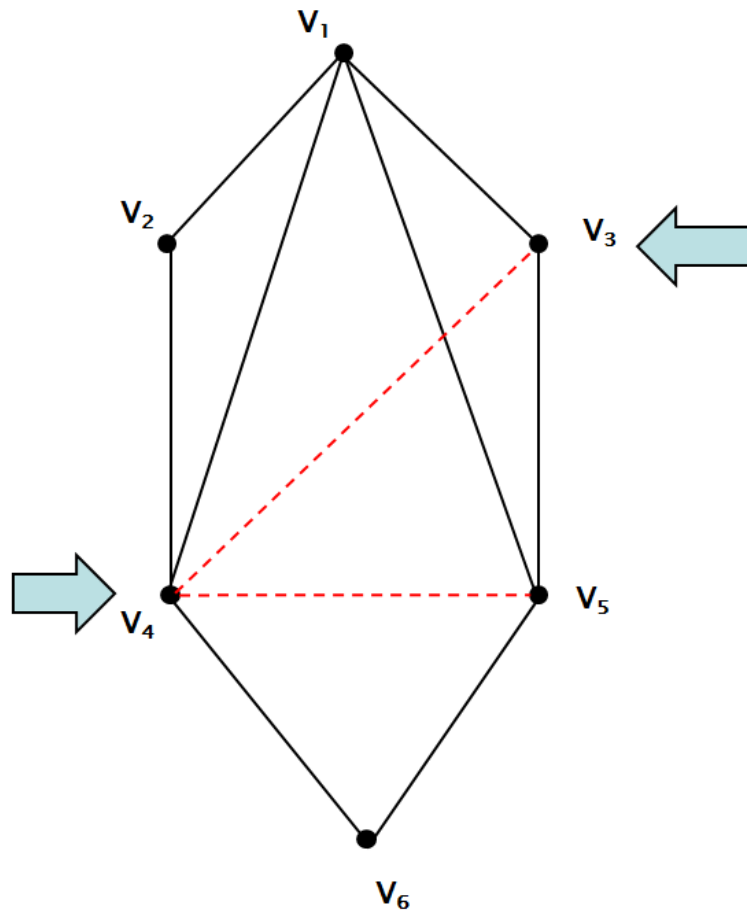
$$d(v_4) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G_1

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_3) = 2$$

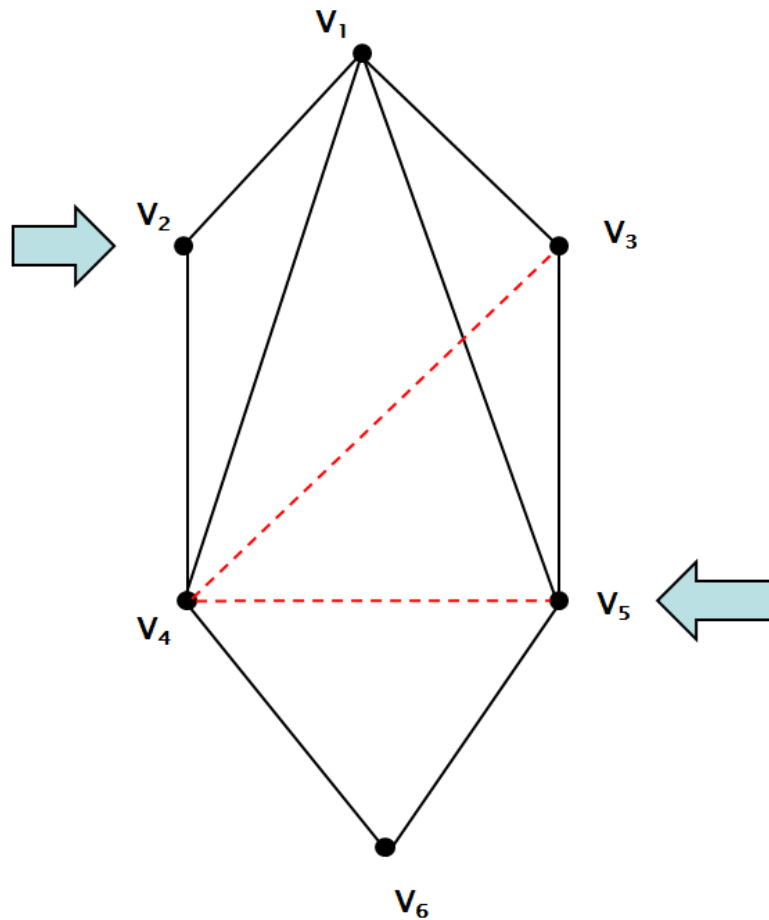
$$d(v_4) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G2

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_2) = 2$$

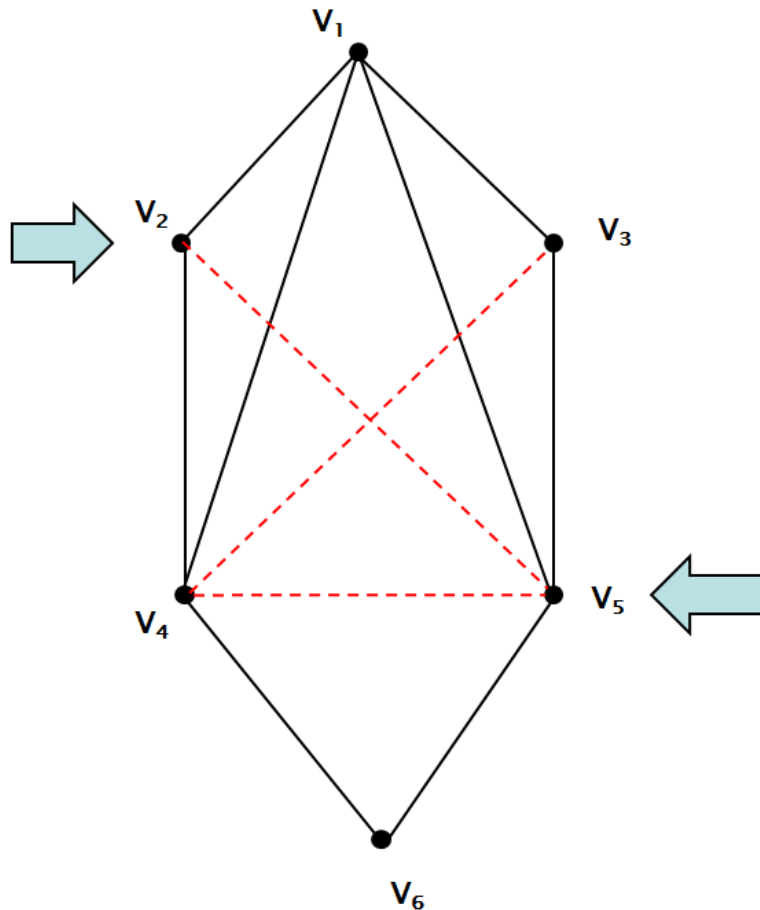
$$d(v_5) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G2

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_2) = 2$$

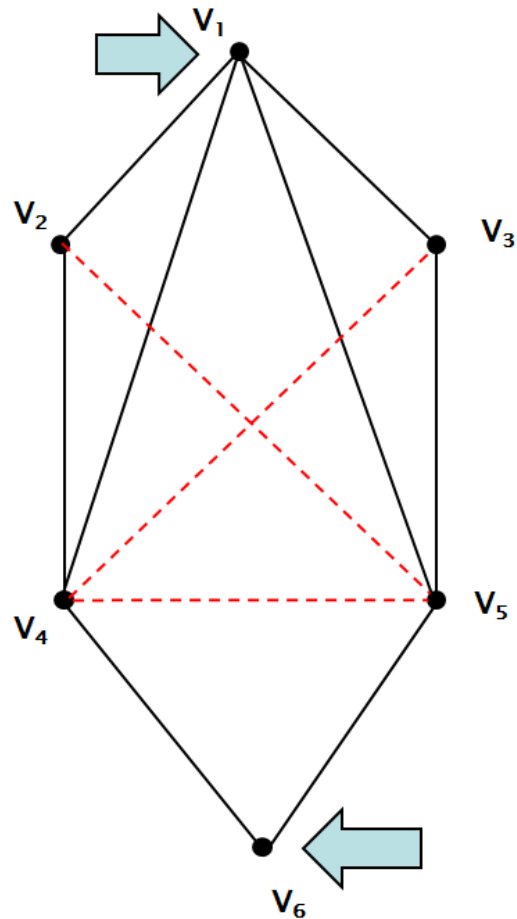
$$d(v_5) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G_3

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_1) = 4$$

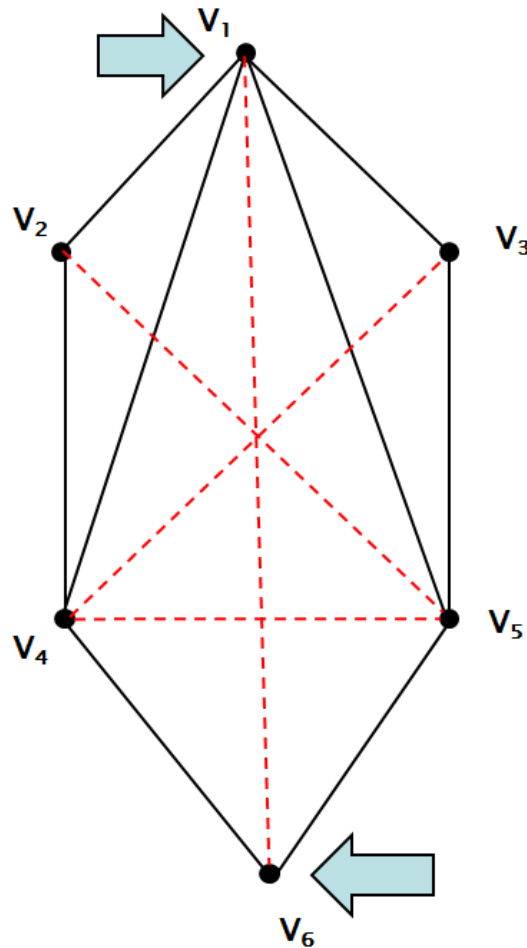
$$d(v_6) = 2$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G3

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_1) = 4$$

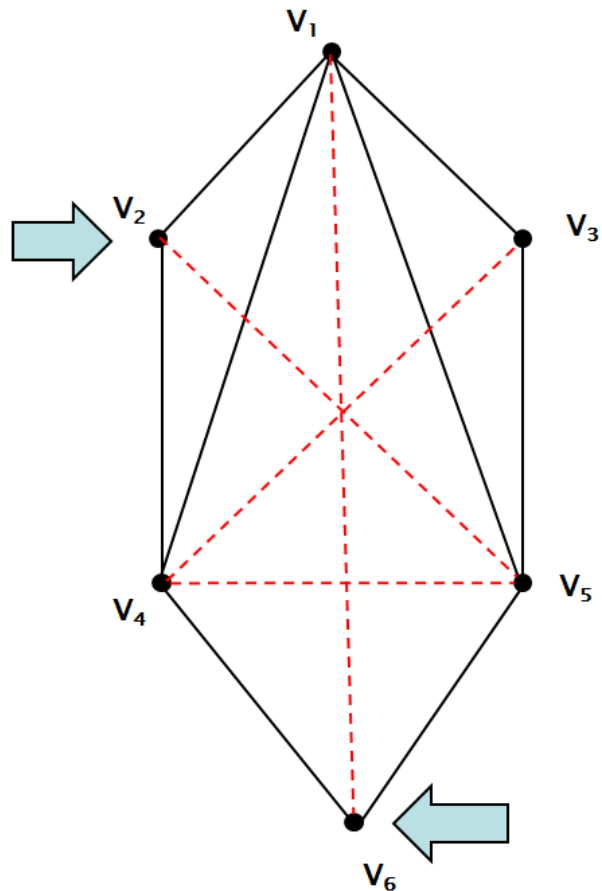
$$d(v_6) = 2$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G4

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_2) = 3$$

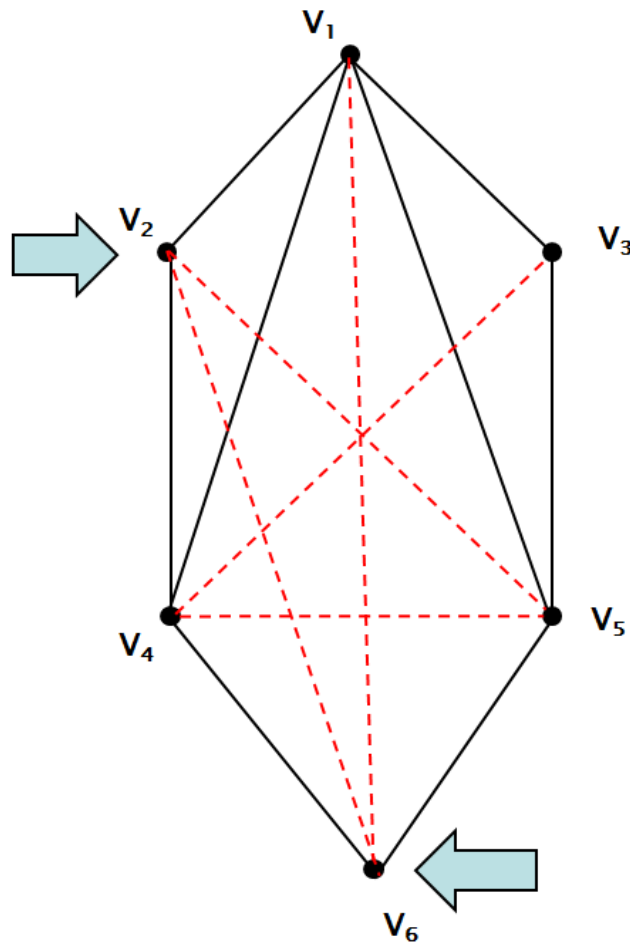
$$d(v_6) = 3$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G4

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_2) = 3$$

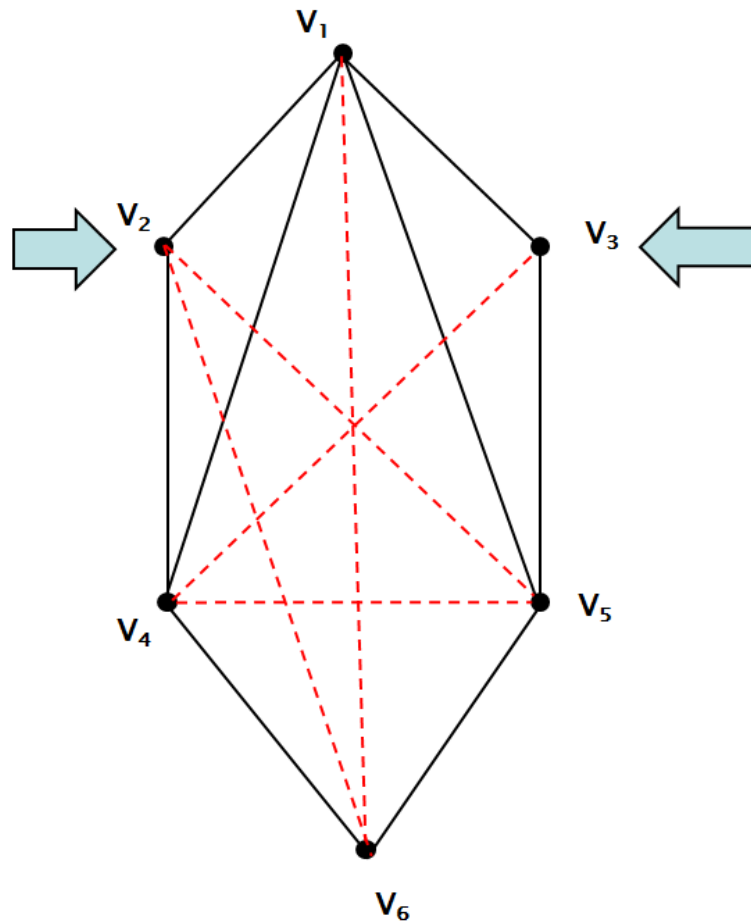
$$d(v_6) = 3$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G5

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_3) = 3$$

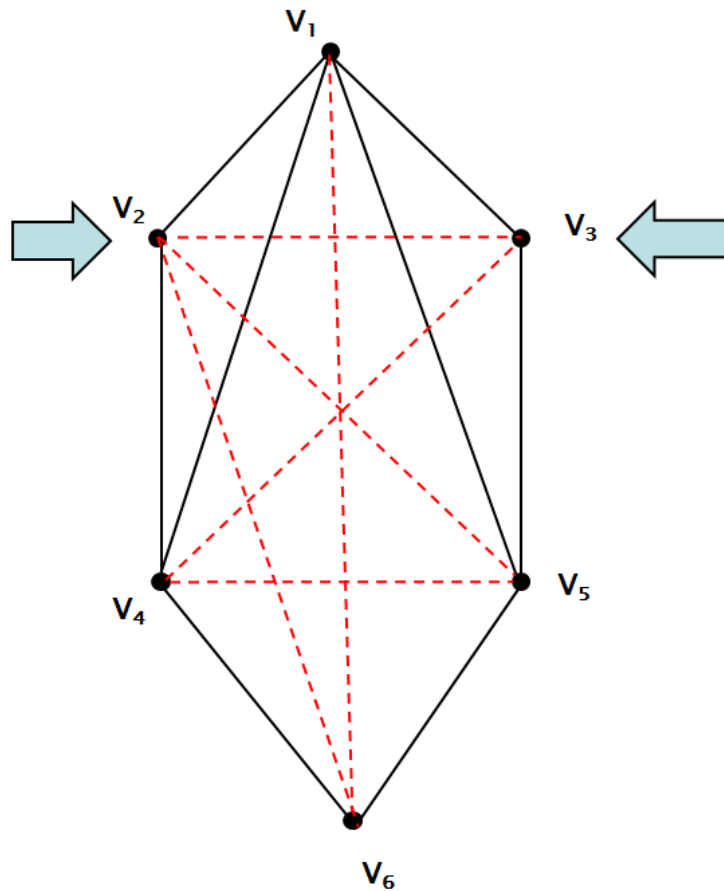
$$d(v_2) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G5

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_3) = 3$$

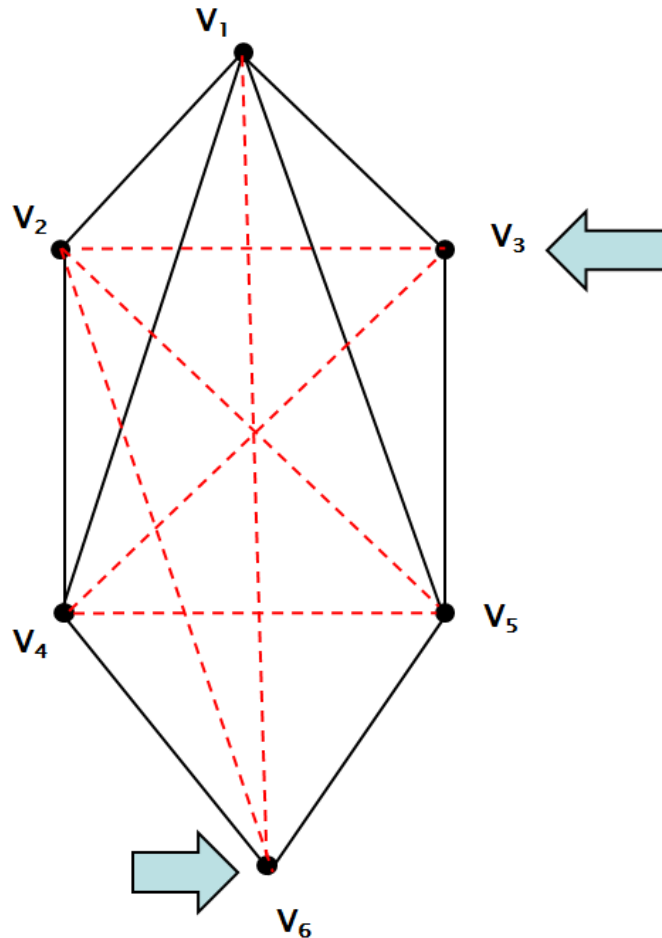
$$d(v_2) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G6

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



$$n=6$$

$$d(v_3) = 4$$

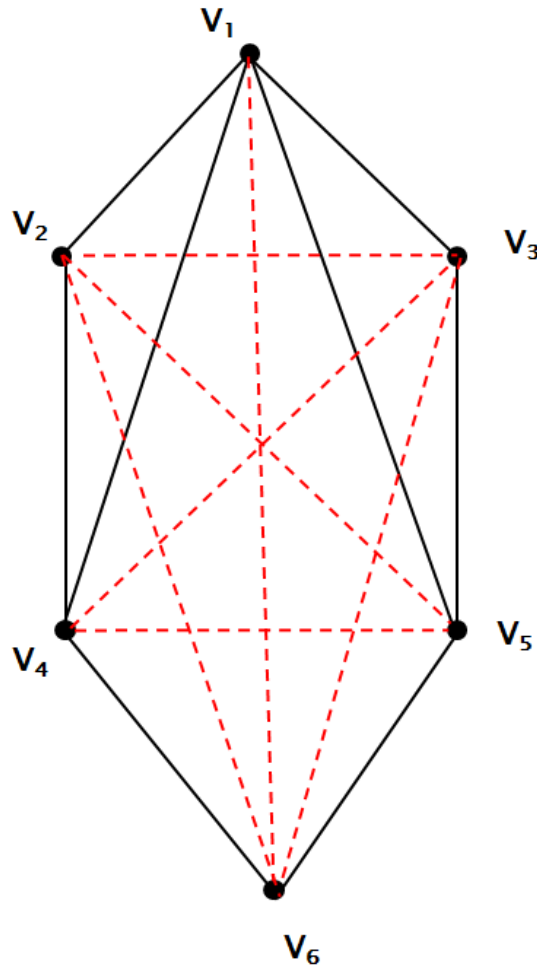
$$d(v_6) = 4$$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Grafo G6

Fechamento de um Grafo G

Exemplo de Construção



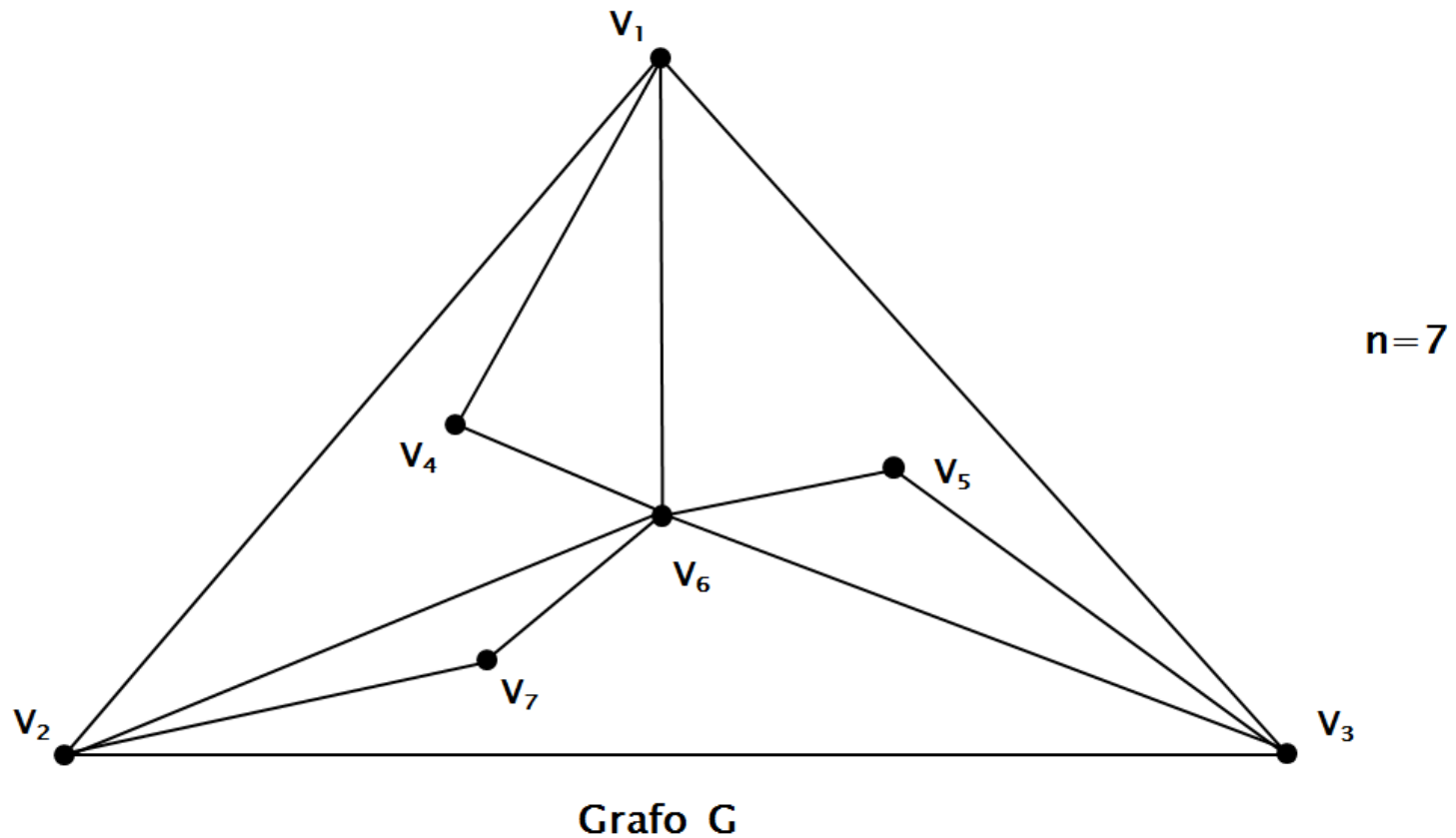
O Fechamento é
obtido após 7 passos!



Grafo $G7 = c(G)$

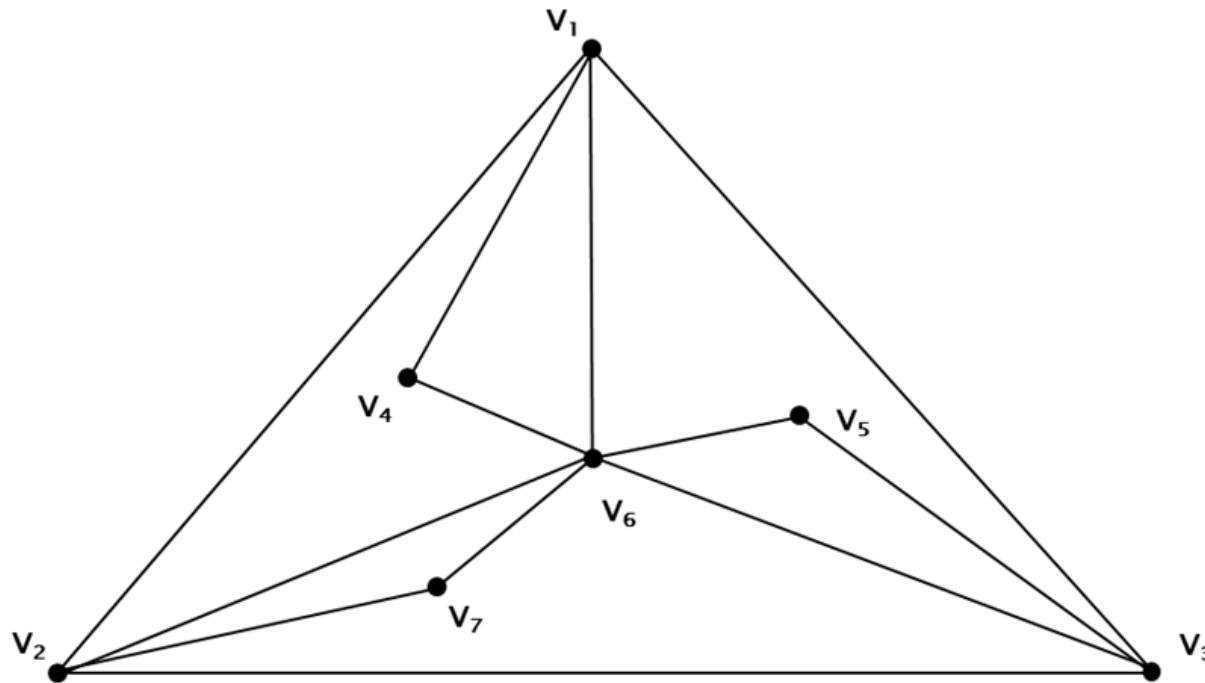
Fechamento de um Grafo G

Outro Exemplo de Construção



Fechamento de um Grafo G

Outro Exemplo de Construção



Grafo G

- ✓ $n=7$
- ✓ Para qualquer par de vértices não adjacentes de G, $d(u) + d(v) < 7$
- ✓ Logo, tem-se $c(G) = G$.



Teorema de Bondy

- ✓ Um grafo simples **G** é **Hamiltoniano** se e somente se seu **Fechamento** **$c(G)$** for **Hamiltoniano**;
- ✓ Corolário: Seja **G** um grafo simples com $n \geq 3$ vértices. Se $c(G)$ é completo, ou seja, **$c(G) = K_n$** , então **G** é **Hamiltoniano**.



O problema do Caixeiro Viajante

- ✓ Suponha um vendedor que atue em várias cidades, sendo que algumas delas são conectadas por estradas;
- ✓ O trabalho do vendedor exige que ele visite cada uma das cidades;
- ✓ É possível para ele planejar uma viagem de carro, partindo e voltando a uma mesma cidade, visitando cada uma delas **exatamente uma vez**?
- ✓ Se tal viagem for possível, será possível planejá-la de modo a se **minimizar** a distância total percorrida?
- ✓ Esse problema é conhecido como o “**Problema do Caixeiro Viajante**”;



O problema do Caixeiro Viajante

- ✓ Esse problema poderia ser modelado por um **Grafo G**, no qual os **vértices** corresponderiam às **cidades** e dois vértices estariam unidos por uma **aresta** ponderada se e somente se as cidades correspondentes forem unidas por uma estrada, a qual não passa por nenhuma das outras cidades;
- ✓ O peso da aresta poderia representar a distância entre as cidades;
- ✓ O problema se resume a: “**O grafo G é hamiltoniano?**” Se **sim**, é possível construir um **ciclo hamiltoniano** de peso (comprimento) **mínimo** ?



WEHAVEKAOSINTHEGARDEN.BLOGSPOT.COM

O problema do Caixeiro Viajante

- ✓ O problema se resume a: “**O grafo G é hamiltoniano?**” Se **sim**, é possível construir um **ciclo hamiltoniano** de peso (comprimento) **mínimo** ?
- ✓ **Infelizmente, não** existe um algoritmo que possa resolver esse problema em **Tempo Polinomial.**





Problema do Caixeiro Viajante

✓ **Não** existe algoritmo **correto** e **eficiente** para este problema;

✓ O problema é atacado com **Heurísticas**;

✓ Na **Engenharia de Computação**, busca-se criar algoritmos com **tempo de execução aceitável** e ser uma solução ótima para o problema em todas as suas instâncias;

✓ Um algoritmo heurístico não cumpre uma dessas propriedades, podendo ser ou um algoritmo que encontra boas soluções a maioria das vezes, **mas não há garantias** de que sempre as encontrará.





Divisor de Águas

- ✓ A complexidade **Polinomial** representa o divisor de águas dentre as classes de Algoritmos;
- ✓ Algoritmos **polinomiais** são considerados **tratáveis**;
- ✓ Algoritmos com complexidades superiores às polinomiais são **intratáveis**;
- ✓ Exemplo: Caixeiro Viajante – **TST** – Travelling Salesman Problem.

