



Unidade 16 – Introdução à Teoria dos Grafos

Conceitos Iniciais

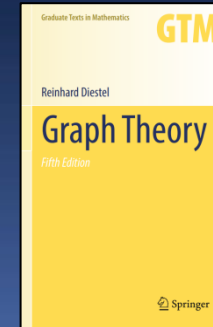
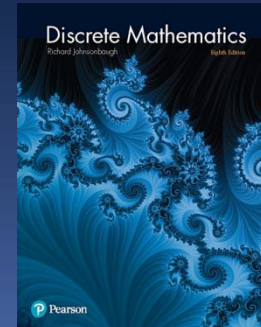
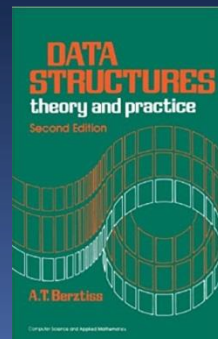
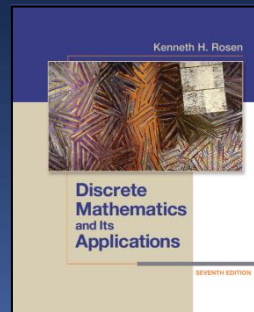
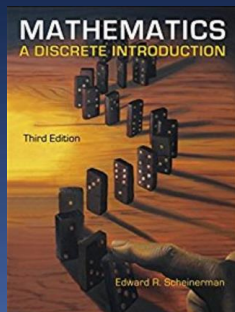
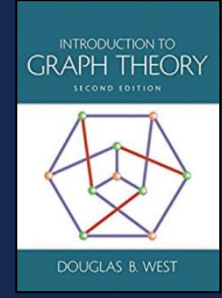
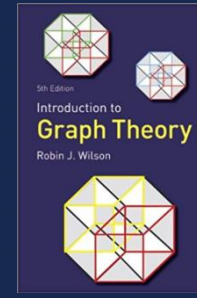
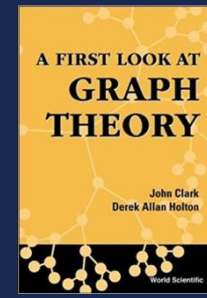
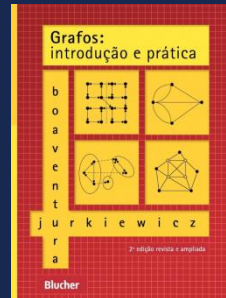
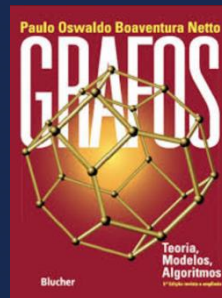
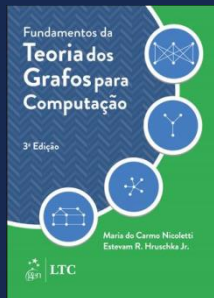


Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUVSP
aparecidovfreitas@gmail.com



Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo Boaventura Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco Goldbarg, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John Clark, Derek Allan Holton – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. Wilson – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas West – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. Scheinerman – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. Rosen – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. Berztiss - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. Johnsonbaugh – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. Diestel – Springer – 5th Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018



Definição

- Um grafo $G = (V(G), E(G))$ ou $G = (V, E)$ consiste de dois conjuntos finitos:
 - ❖ $V(G)$, (ou V), que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices e
 - ❖ $E(G)$, (ou E), que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (que pode ser vazio) de elementos chamados arestas;
- À cada aresta e em E atribui-se um par não ordenado de vértices (u, v) chamados **vértices-extremidade** de e ;
- Vértices também são referenciados como pontos ou nós.



Grafos – Exemplo

Seja o grafo $G = (V, E)$, tal que

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$$\begin{array}{llllll} e_1 \leftrightarrow (a, b) & e_2 \leftrightarrow (b, c) & e_3 \leftrightarrow (c, c) & e_4 \leftrightarrow (c, e) & e_5 \leftrightarrow (d, f) & e_6 \leftrightarrow (d, f) \\ e_7 \leftrightarrow (c, d) & e_8 \leftrightarrow (c, f) & e_9 \leftrightarrow (e, f) & e_{10} \leftrightarrow (g, h) & e_{11} \leftrightarrow (h, h) & e_{12} \leftrightarrow (h, i) \end{array}$$

Grafos – Exemplo

Seja o grafo $G = (V, E)$, tal que

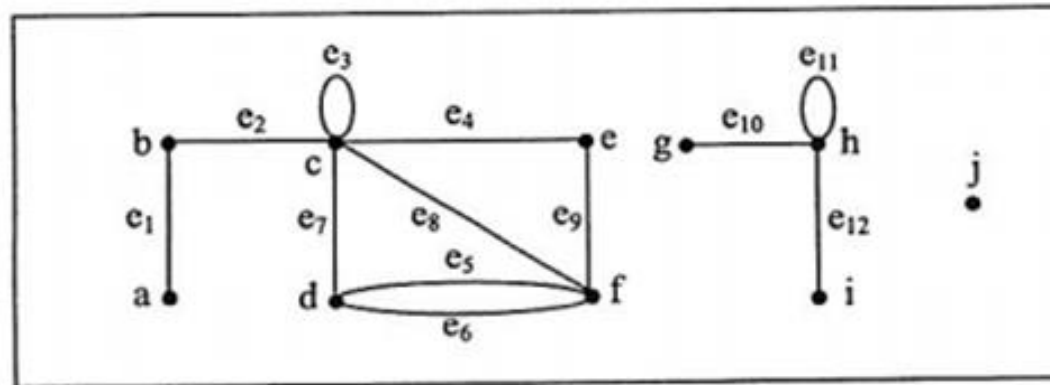
$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$$\begin{array}{llllll} e_1 \leftrightarrow (a, b) & e_2 \leftrightarrow (b, c) & e_3 \leftrightarrow (c, c) & e_4 \leftrightarrow (c, e) & e_5 \leftrightarrow (d, f) & e_6 \leftrightarrow (d, f) \\ e_7 \leftrightarrow (c, d) & e_8 \leftrightarrow (c, f) & e_9 \leftrightarrow (e, f) & e_{10} \leftrightarrow (g, h) & e_{11} \leftrightarrow (h, h) & e_{12} \leftrightarrow (h, i) \end{array}$$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G .



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Grafos – Observação

- De acordo com a definição, que formalmente define o conceito de grafo, **é possível** que o conjunto de arestas E seja **vazio**;
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado **grafo nulo**;
- Por outro lado, a definição exige que o conjunto de vértices seja **não vazio**, do contrário, **não** se tem grafo.





Grafos – Observação

- A Figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com 5 vértices.

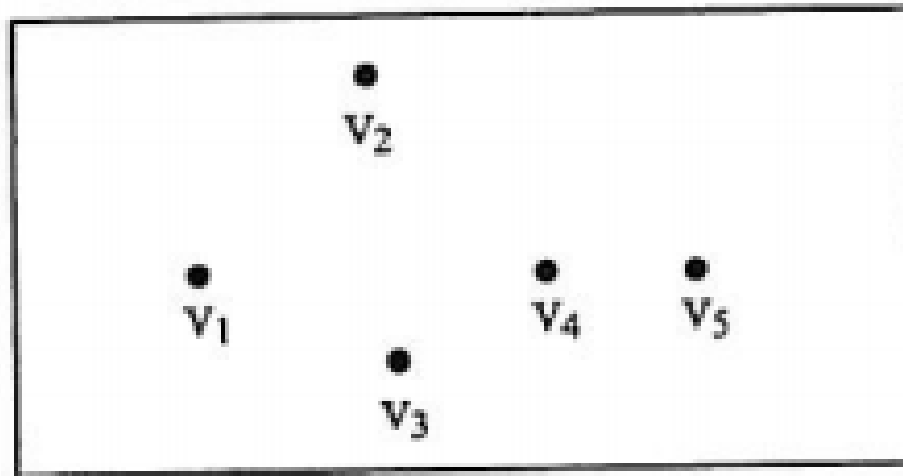


Figura 3.2 Grafo nulo com cinco vértices.



Grafos – Definições

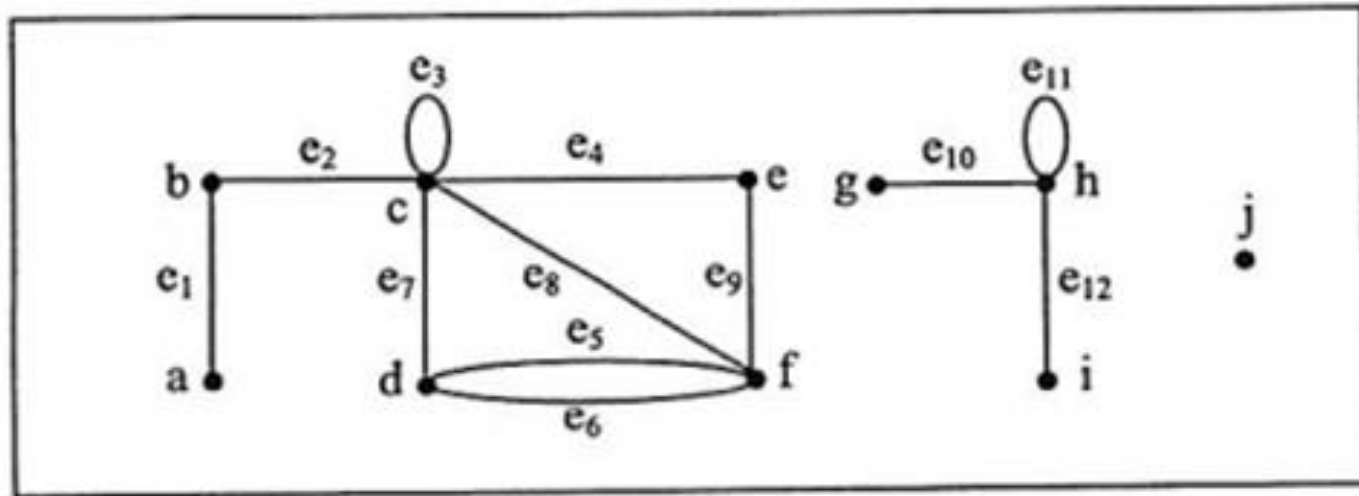
- Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;



Arestas Paralelas

- Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;
- Por exemplo, as arestas e_5 e e_6 do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G .



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Grafos – Definições

- Um vértice de G que não é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.

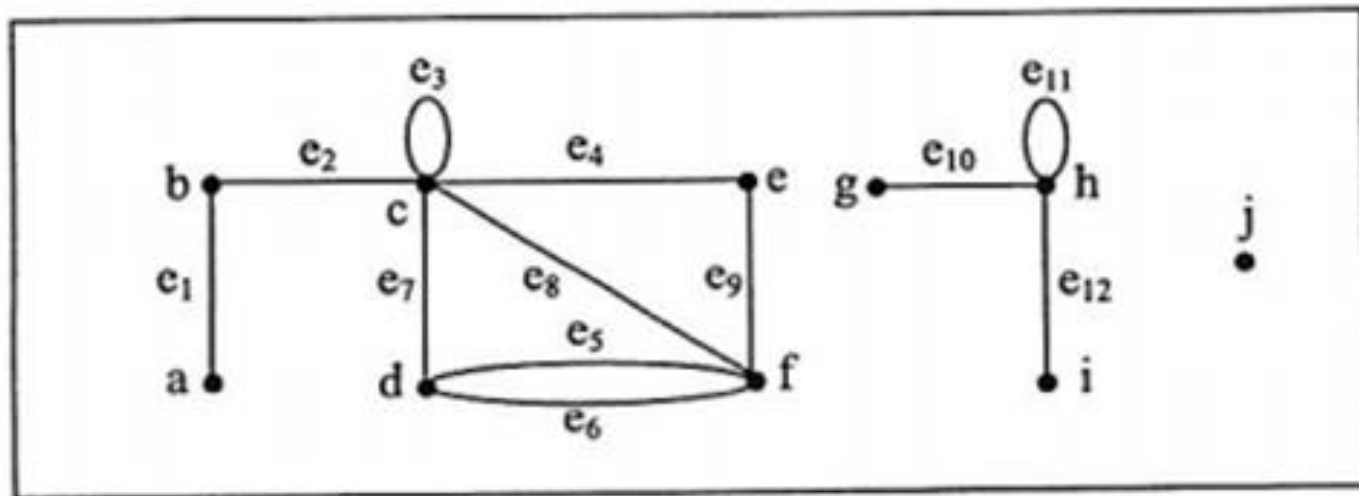




Vértice Isolado

- Um vértice de **G** que **não** é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.
- Por exemplo, o vértice **j** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Grafos – Definições

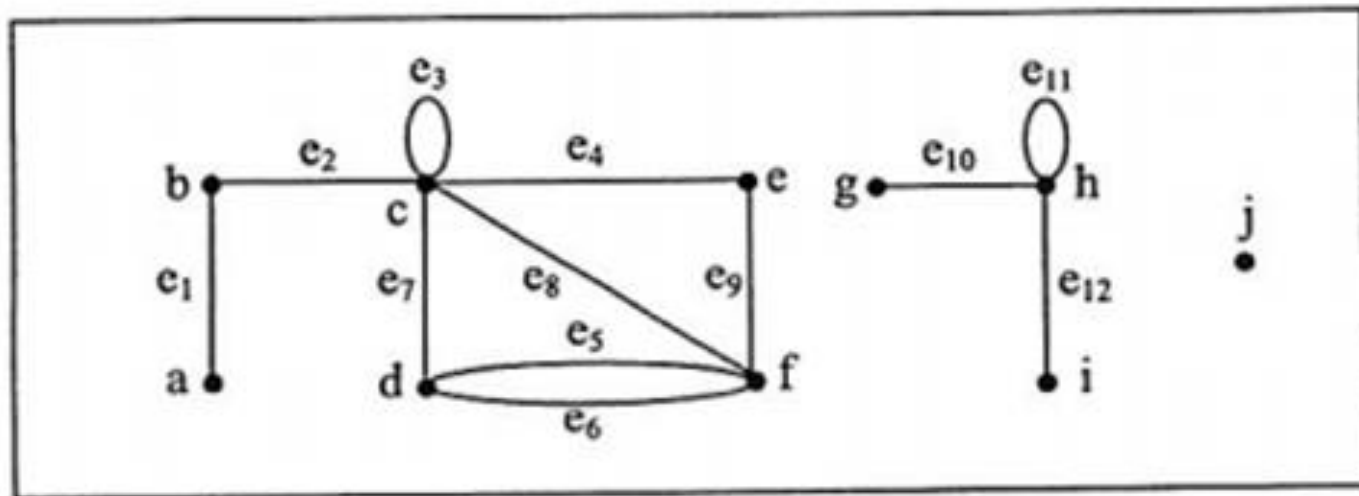
- Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.



Vértices Adjacentes

- Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.
- Por exemplo, os vértices **a** e **b** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Exemplo – Vértices Adjacentes

- No grafo da figura abaixo, v_1 e v_2 são adjacentes:





Grafos – Definições

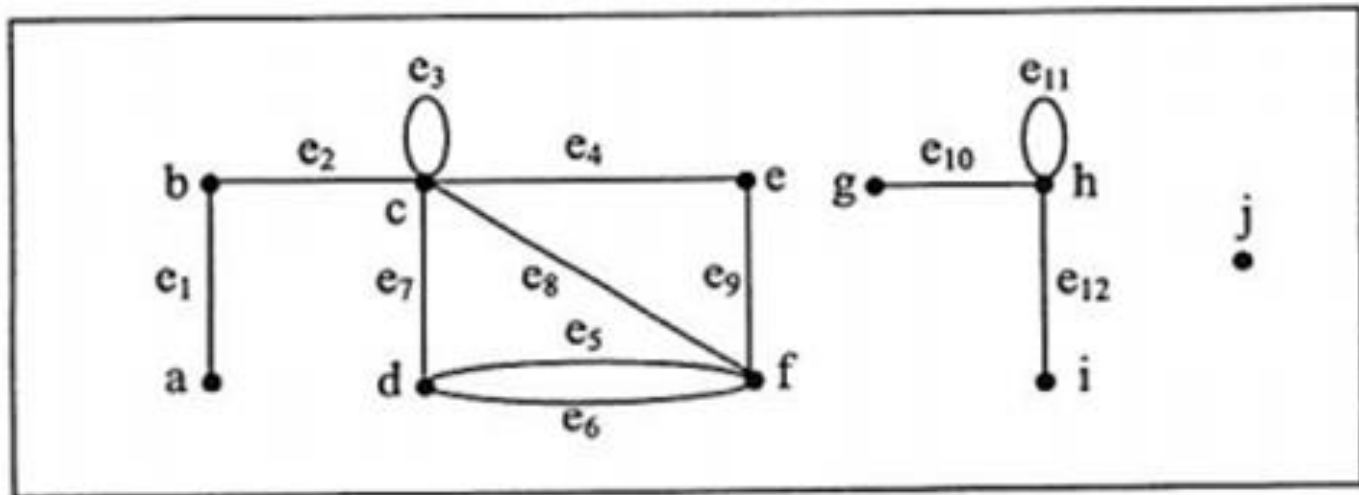
- Duas **arestas** distintas e_i e e_j são **adjacentes** se têm um vértice em comum.



Arestas Adjacentes

- Duas **arestas** distintas e_i e e_j são **adjacentes** se têm um vértice em comum.
- Por exemplo, as arestas e_1 e e_2 do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.

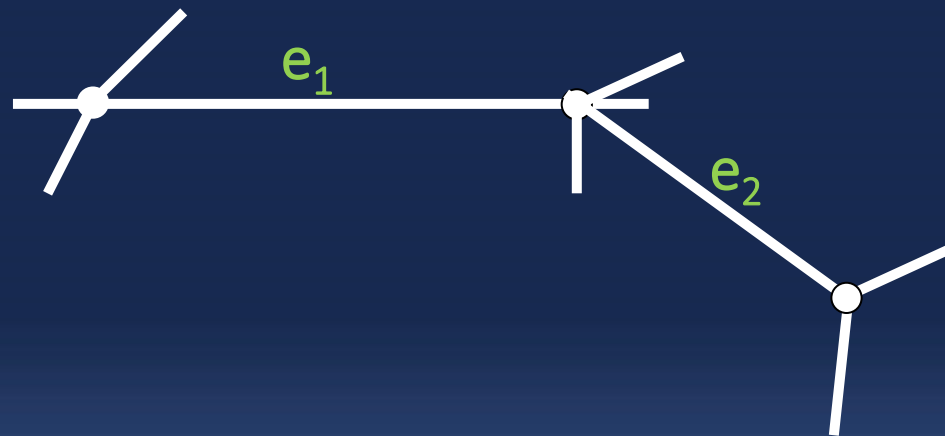


Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Exemplo – Arestas Adjacentes

- No grafo da figura abaixo, e_1 e e_2 são adjacentes:





Grafos – Definições

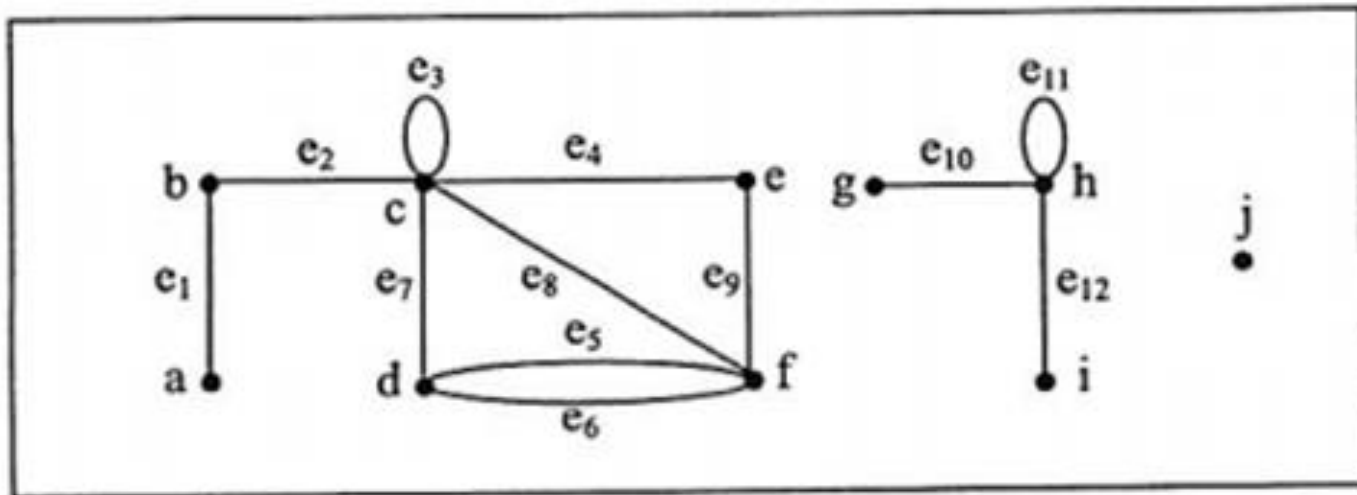
- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado **conjunto vizinhança** de v e é denotado por $N(v)$.



Conjunto Vizinhaça

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado **conjunto vizinhaça** de v e é denotado por $N(v)$.
- Por exemplo, $N(f) = \{c, d, e\}$.

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G .



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Grafos – Definições

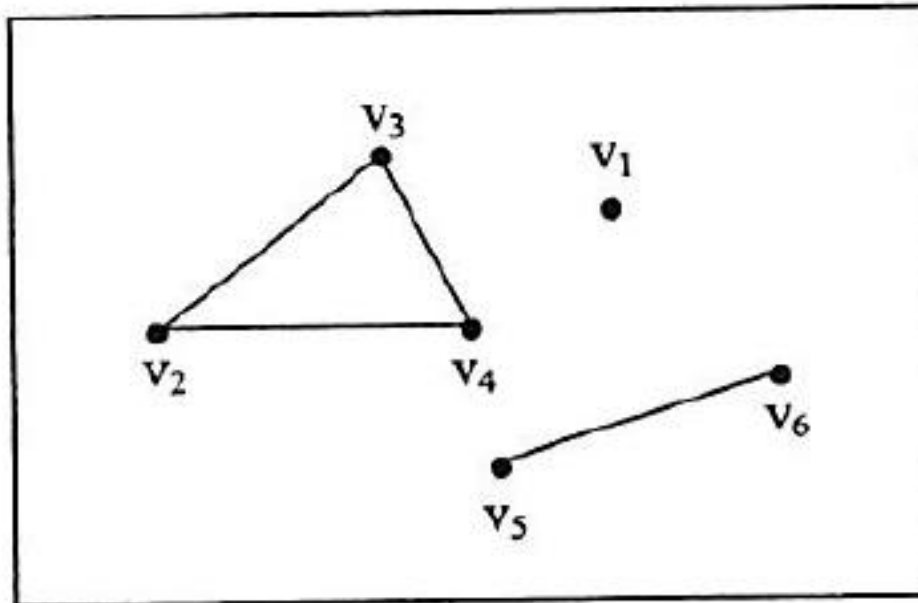
- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas





Grafo Simples

- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas;
- Exemplo, Grafo da figura abaixo:



Grafo simples: não tem *loops* e não tem arestas paralelas.



Grafos – Definições

- Diz-se que uma aresta e é **incidente** com o vértice v se v for um vértice **extremidade** de e .

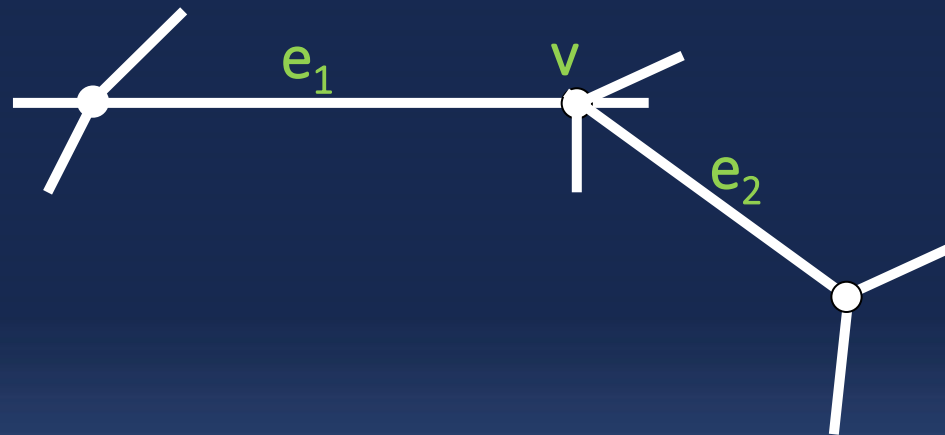


Grafos – Definições

- Duas arestas **incidentes** com um mesmo vértice são **adjacentes**;

Grafos – Definições

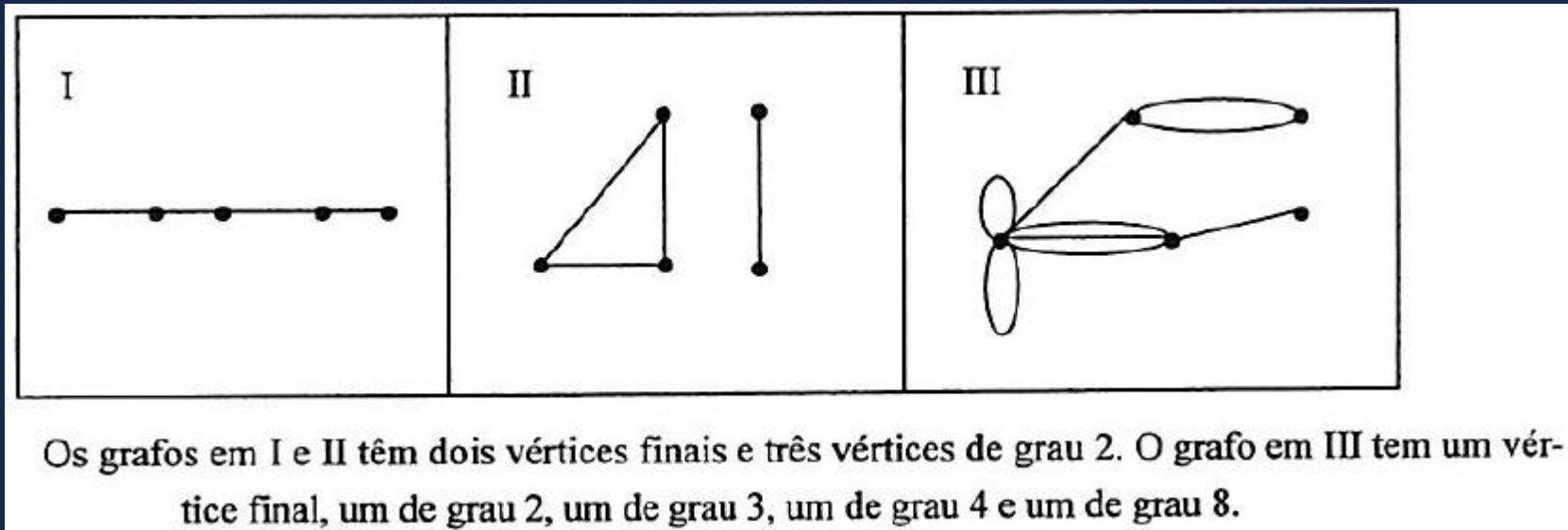
- Duas arestas **incidentes** com um mesmo vértice são **adjacentes**;
- As arestas e_1 e e_2 na figura abaixo são **incidentes** com o mesmo vértice v e, conseqüentemente, são **adjacentes**.



Grau de um vértice

- O grau de um vértice v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas de G que são incidentes com v , contado cada loop duas vezes;
- É pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta;
- Um vértice de grau 0 é um vértice isolado;
- Um vértice de grau 1 é um vértice final.

Grau de um vértice





Vértice par ou ímpar

- Um vértice de um grafo é par se o seu grau for par;
- Um vértice de um grafo é ímpar se o seu grau for ímpar;





Sequência de graus de um grafo

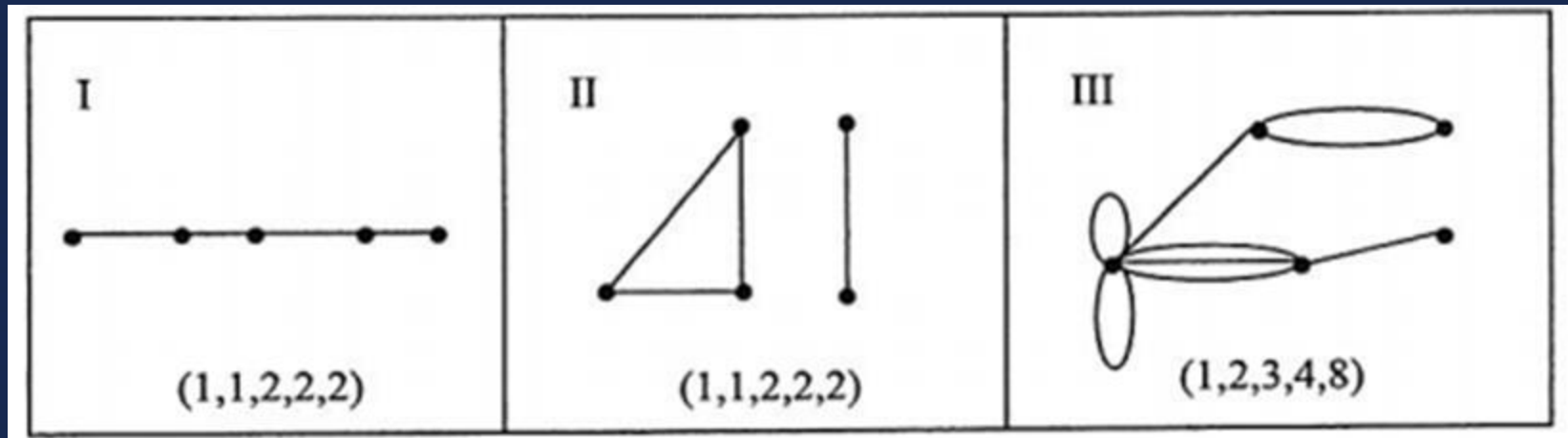
- A sequência de graus de um grafo consiste nos graus de seus vértices escritos em ordem crescente, com repetições, se necessário.





Grafos – Definições

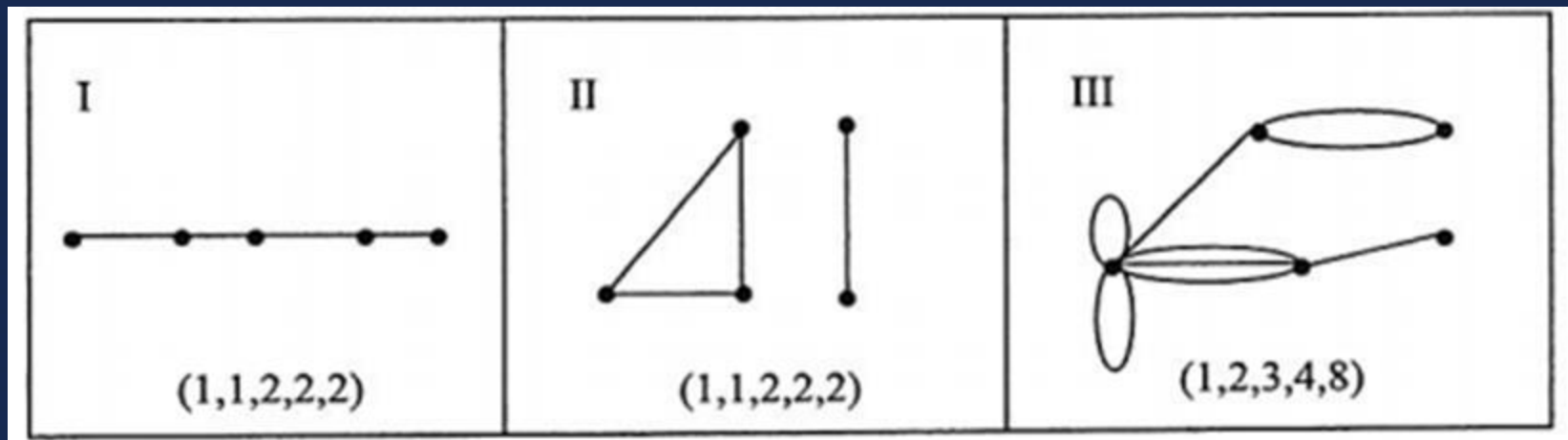
Sequência de graus de um grafo





Grafos – Definições

Sequência de graus de um grafo



Exemplo 3.2 No grafo $G = (V,E)$ mostrado na Figura 3.6,

- vértices v_1 e v_2 são adjacentes;
- vértices v_1 e v_3 são não adjacentes;
- arestas (v_1, v_2) e (v_2, v_3) são adjacentes;
- arestas (v_1, v_2) e (v_3, v_4) não são adjacentes;
- vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) , e nenhum outro vértice é incidente com essa aresta; e
- os graus dos vários vértices são: $d(v_1) = 2$; $d(v_2) = 8$; $d(v_3) = 3$; $d(v_4) = 1$; $d(v_5) = 2$; $d(v_6) = 3$; $d(v_7) = 4$; $d(v_8) = 1$ e $d(v_9) = 0$.

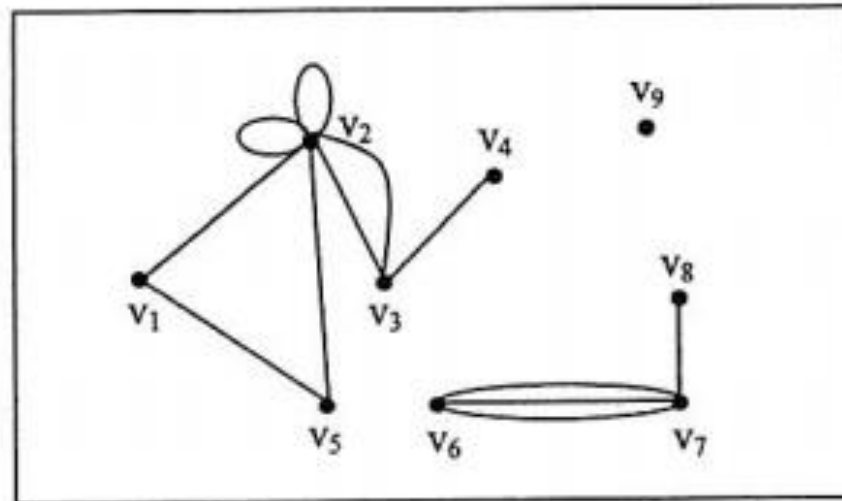


Figura 3.6 Grafo com nove vértices e 12 arestas.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos – Definições



Grafos – Exemplo

Considere o grafo com cinco vértices e oito arestas mostrado na Figura 3.7. Para esse grafo, tem-se $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 4$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$. Note que $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times$ o número de arestas do grafo. Esse resultado não é coincidência e é estabelecido pelo Teorema 3.1.

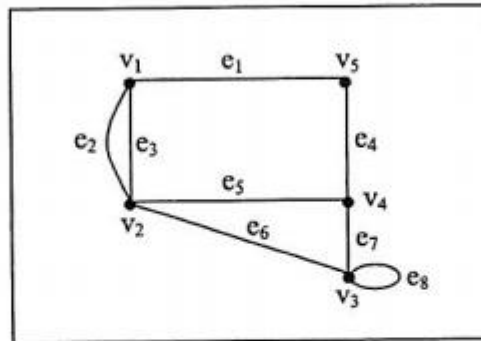


Figura 3.7 Grafo com cinco vértices e oito arestas.

Teorema 3.1 Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

Grafos – Teorema 3.2

Teorema 3.2 Em um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $|E| = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} = m$, o número de vértices ímpares é sempre par.

Prova: O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2m - \sum_{u \in P} d(u)$$

A diferença acima é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma $\sum_{w \in I} d(w)$ é ímpar (uma vez que cada um deles é o grau de um vértice ímpar) e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que a soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar) ♦.

Note que nem sempre é fato que um grafo deve ter um número ímpar de vértices pares. Considere, por exemplo, o grafo da Figura 3.8, que tem um número par (quatro) de vértices pares (vértices de grau 2).

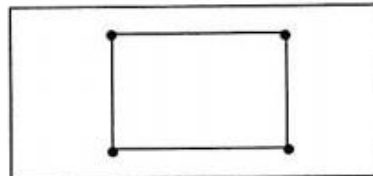


Figura 3.8 Grafo com um número par de vértices pares.

Grafo Regular

Em [Teoria dos grafos](#), um **grafo regular** é um [grafo](#) onde cada vértice tem o mesmo número de adjacências, i.e. cada vértice tem o mesmo [grau](#) ou valência.

Um grafo regular com vértices de grau k é chamado um grafo **k -regular** ou grafo regular de grau k .

Definição 3.4 Seja o grafo $G = (V, E)$, se para algum inteiro positivo k , $d(v) = k$ para todo vértice $v \in V$, então G é chamado k -regular. Um *grafo regular* é um grafo que é k -regular para algum k .

Observação 3.1 Em Teoria dos Grafos, os chamados *grafos cúbicos* (3-regulares) são particularmente importantes. Note que o grafo nulo $G = (V, \emptyset)$ é um grafo regular de grau 0.

Exemplo 3.4 O grafo da Figura 3.8 é 2-regular. A Figura 3.9 mostra o único grafo 1-regular, dois grafos 2-regular e 2 grafos 3-regular.

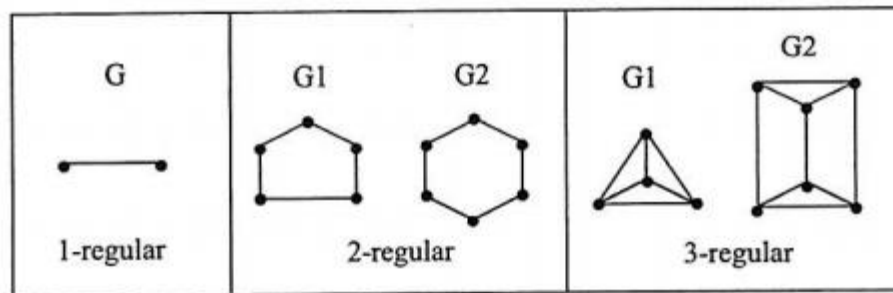


Figura 3.9 Grafos regulares.

Freqüentemente, acontece o caso de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente. Para muitos propósitos, esses dois grafos são essencialmente o mesmo grafo. A Definição 3.5 trata formalmente dessa situação.

Grafos – Isomorfismo

Definição 3.5 Dois grafos $G1 = (V1, E1)$ e $G2 = (V2, E2)$ são *isomorfos* se:

1. existir uma função bijetora f , do conjunto de vértices de $G1$, no conjunto de vértices de $G2$ ($f: V1 \rightarrow V2$) (f é total);
2. existir uma função bijetora g , do conjunto de arestas de $G1$, no conjunto de arestas de $G2$ ($g: E1 \rightarrow E2$) (g é total),

tal que uma aresta e é incidente a v_1 e v_2 em $G1$ se e somente se a aresta $g(e)$ for incidente a $f(v_1)$ e $f(v_2)$ em $G2$. O par de funções f e g é chamado um isomorfismo de $G1$ em $G2$.

Parafraseando a Definição 3.5, diz-se que o grafo $G1 = (V1, E1)$ é *isomorfo* ao grafo $G2 = (V2, E2)$ se existir uma correspondência entre os conjuntos de vértices $V1$ e $V2$ e uma correspondência entre os conjuntos de arestas $E1$ e $E2$, de tal maneira que, se e_1 for uma aresta com vértices-extremidade u_1 e v_1 em $G1$, então a aresta correspondente e_2 em $G2$ (isto é, $g(e_1)$) deve ter como vértices-extremidade os vértices u_2 e v_2 em $G2$ que correspondem a u_1 e v_1 , respectivamente; se os vértices v_1 e v_2 forem adjacentes em $G1$, os vértices $f(v_1)$ e $f(v_2)$ devem ser adjacentes em $G2$.

Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.5 Os grafos G1 e G2 mostrados na Figura 3.10 são isomorfos.

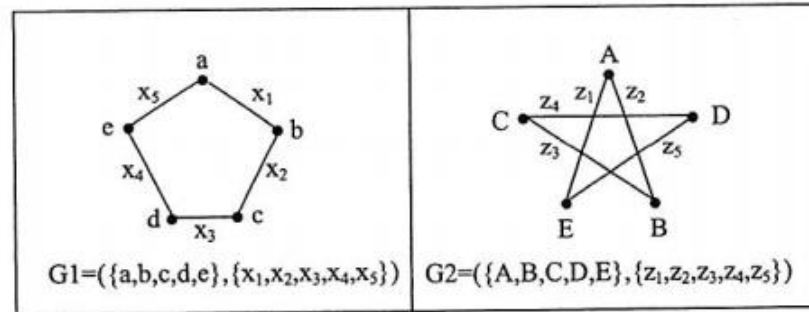


Figura 3.10 Grafos isomorfos G1 e G2.

Para os grafos G1 e G2 da Figura 3.10, um isomorfismo pode ser estabelecido como as funções bijetoras f e g, definidas a seguir, que preservam a relação de adjacência entre os vértices.

(1) $f: \{a,b,c,d,e\} \rightarrow \{A,B,C,D,E\}$, tal que:

| x | a | b | c | d | e |
|------|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | B | C | D | E |

$x_1 \leftrightarrow (a,b)$. $g(x_1)$ deve ter como imagem a aresta que une $f(a)$ a $f(b)$, que é a aresta $(A,B) \leftrightarrow z_2$
 $x_2 \leftrightarrow (b,c)$. $g(x_2)$ deve ter como imagem a aresta que une $f(b)$ a $f(c)$, que é a aresta $(B,C) \leftrightarrow z_3$
 $x_3 \leftrightarrow (c,d)$. $g(x_3)$ deve ter como imagem a aresta que une $f(c)$ a $f(d)$, que é a aresta $(C,D) \leftrightarrow z_4$
 $x_4 \leftrightarrow (d,e)$. $g(x_4)$ deve ter como imagem a aresta que une $f(d)$ a $f(e)$, que é a aresta $(D,E) \leftrightarrow z_5$
 $x_5 \leftrightarrow (e,a)$. $g(x_5)$ deve ter como imagem a aresta que une $f(e)$ a $f(a)$, que é a aresta $(E,A) \leftrightarrow z_1$

A função g, portanto, é definida como:

(2) $g: \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \rightarrow \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$

| x | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| g(x) | z_2 | z_3 | z_4 | z_5 | z_1 |

Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.6 Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura 3.11, são isomorfos.

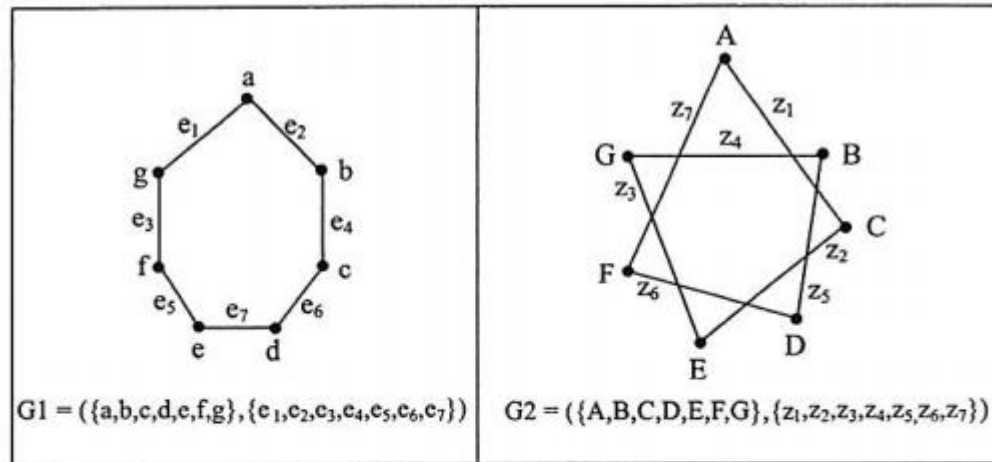


Figura 3.11 Grafos isomorfos G1 e G2.

As funções f e g que definem o isomorfismo são:

(1) $f: \{a, b, c, d, e, f, g\} \rightarrow \{A, B, C, D, E, F, G\}$, tal que:

| x | a | b | c | d | e | f | g |
|------|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | C | E | G | B | D | F |

(2) $g: \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \rightarrow \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$

| x | e ₁ | e ₂ | e ₃ | e ₄ | e ₅ | e ₆ | e ₇ |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| g(x) | z ₇ | z ₁ | z ₆ | z ₂ | z ₅ | z ₃ | z ₄ |

Grafos – Exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.7 A Figura 3.12 mostra cinco exemplos (I, II, III, IV, V) de pares de grafos isomorfos.

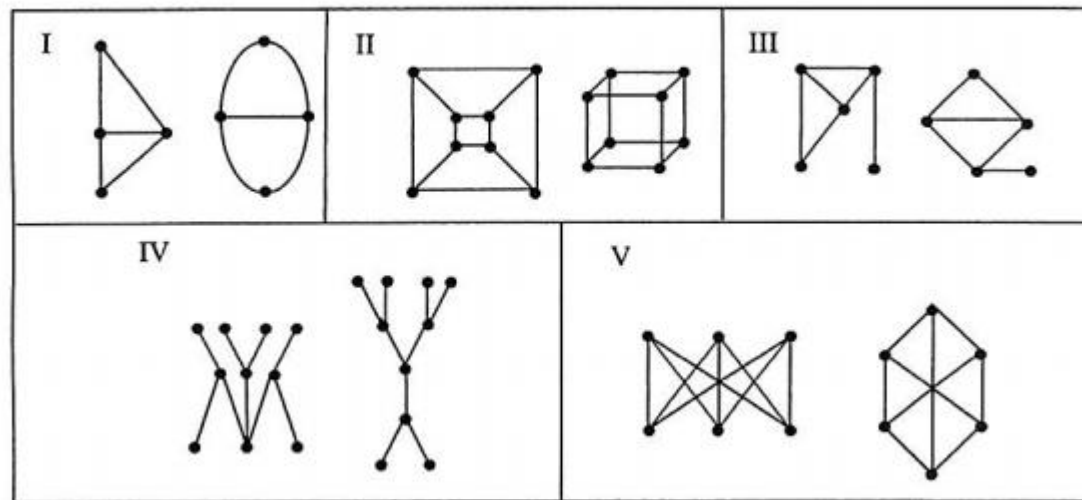


Figura 3.12 Os grafos em I, II, III, IV e V são isomorfos.

Grafos – Contra-exemplo – Isomorfismo

Exemplo 3.8 A Figura 3.13 mostra dois pares de grafos que não são isomorfos. Em (I), no grafo à direita, cada vértice de grau 4 é adjacente a dois outros vértices de grau 4. No grafo à esquerda, cada vértice de grau 4 é adjacente a apenas um outro vértice de grau 4. Assim, os dois grafos em questão não são isomorfos.

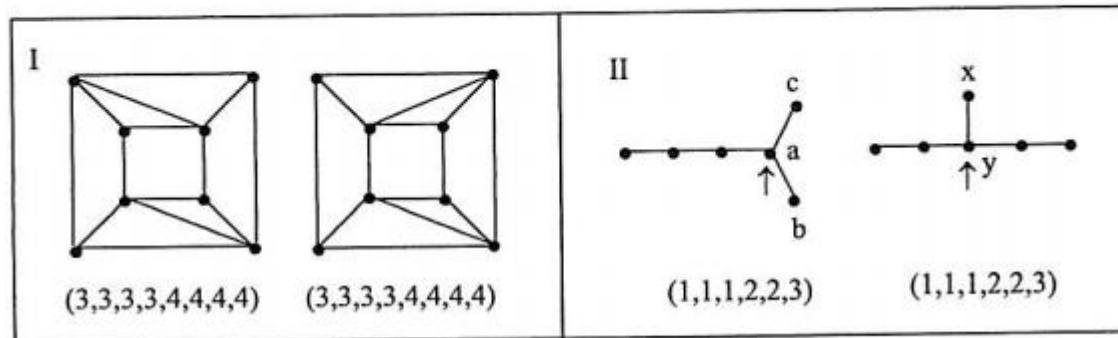


Figura 3.13 Grafos em I e II são não isomorfos.

Grafos – Isomorfismo – Observações

Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que dois grafos sejam isomorfos eles devem ter:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas; e
- um número igual de vértices com determinado grau.

Essas condições, entretanto, não são suficientes. Considere, por exemplo, os dois grafos mostrados na Figura 3.13 (II). Eles satisfazem todas as três condições e, entretanto, não são isomorfos. O fato de não serem isomorfos pode ser evidenciado considerando a seguinte argumentação: se os grafos fossem isomorfos, o vértice a do grafo à esquerda deveria corresponder ao vértice y do grafo à direita, uma vez que são os únicos dois vértices com grau três. No grafo à direita, existe apenas um vértice de grau 1 adjacente a y , que é o vértice x , enquanto no grafo à esquerda existem dois, b e c . A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo é ainda um problema não resolvido em TG. Existem, entretanto, vários algoritmos que se propõem à detecção automática de isomorfismo, como será visto posteriormente.

Observação 3.2 O problema de determinar se dois grafos são isomorfos torna-se mais difícil à medida que o número de vértices e de arestas no grafo aumentam. Por exemplo, enquanto existem apenas quatro grafos simples não isomorfos com três vértices e 11 com quatro vértices, existem 1.044 grafos simples não isomorfos com sete vértices.

Grafos – Isomorfismo – Invariantes

Definição 3.6 Sejam $G1$ e $G2$ grafos isomorfos. Uma propriedade P é um invariante sempre que $G1$ tiver a propriedade P e $G2$ também tiver esta mesma propriedade.

Com base na Definição 3.6, se os grafos $G1$ e $G2$ são isomorfos, então existem funções bijetoras entre os vértices (e entre as arestas) de $G1$ e $G2$. Assim, se $G1$ e $G2$ são isomorfos, eles têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices. Portanto, se n e m são inteiros não negativos, as propriedades “tem n vértices” e “tem m arestas” são invariantes.

Exemplo 3.11 Os grafos $G1$ e $G2$, mostrados na Figura 3.17, são não isomorfos, uma vez que o invariante “têm o mesmo número de arestas” não é verificado.

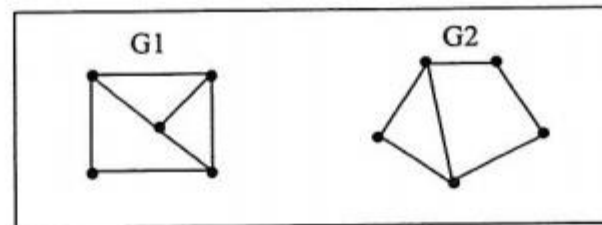


Figura 3.17 $G1$ tem sete arestas, $G2$ tem seis arestas e “tem m arestas” é invariante. Portanto, $G1$ e $G2$ não são isomorfos.

Observação 3.4 Sejam $G1$ e $G2$ dois grafos, a propriedade “os grafos têm o mesmo número de vértices com grau k ($k > 0$, inteiro)” é um invariante.

Grafos – Isomorfismo – Invariantes

Exemplo 3.12 Os grafos G_1 e G_2 da Figura 3.19 são não isomorfos.

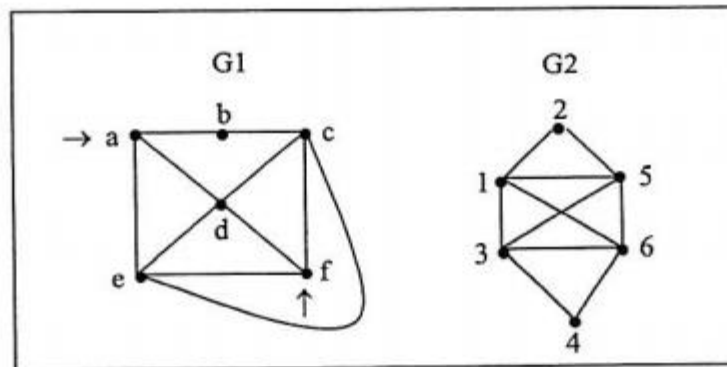


Figura 3.19 Apesar de G_1 e G_2 terem o mesmo número de vértices e arestas, G_1 tem vértices de grau 3, e G_2 não tem vértices de grau 3. G_1 e G_2 não são isomorfos.

Grafo Completo

Definição 3.7 Um grafo *completo* de ordem n , notado por K_n , é um grafo que tem n vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

A Figura 3.20 mostra os grafos completos de K_1 até K_6 .

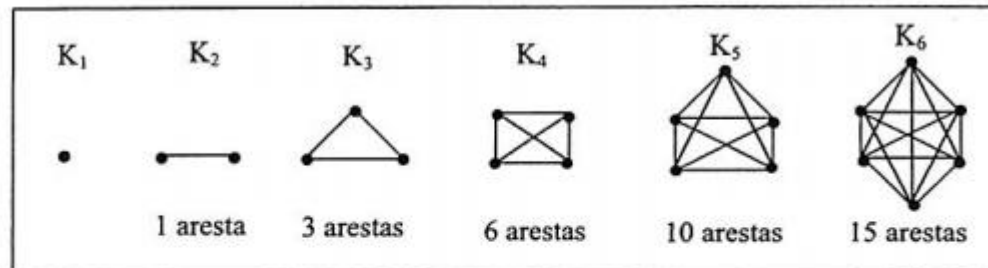


Figura 3.20 Grafos completos K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 e K_6 .

Observação 3.6 Obviamente, grafos completos são grafos simples, ou seja, não têm arestas paralelas ou *loops*. Uma vez que existem $\binom{n}{2}$ possíveis pares em n vértices, o grafo completo K_n tem exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Observação 3.7 Note que todo grafo completo com n vértices é um grafo $(n-1)$ -regular.

Grafo Bipartido

Definição 3.8 Seja $G = (V, E)$ um grafo, se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$), de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y , então G é chamado *bipartido*. A partição $V = X \cup Y$ é chamada *bipartição* de G .

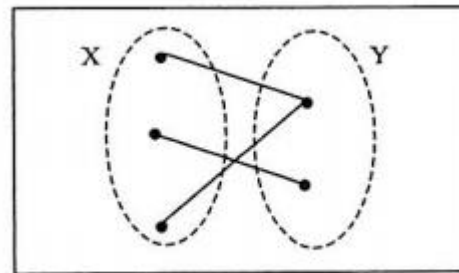


Figura 3.21 Grafo bipartido.

Grafo Bipartido

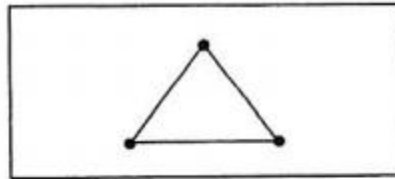


Figura 3.22 Grafo não bipartido.

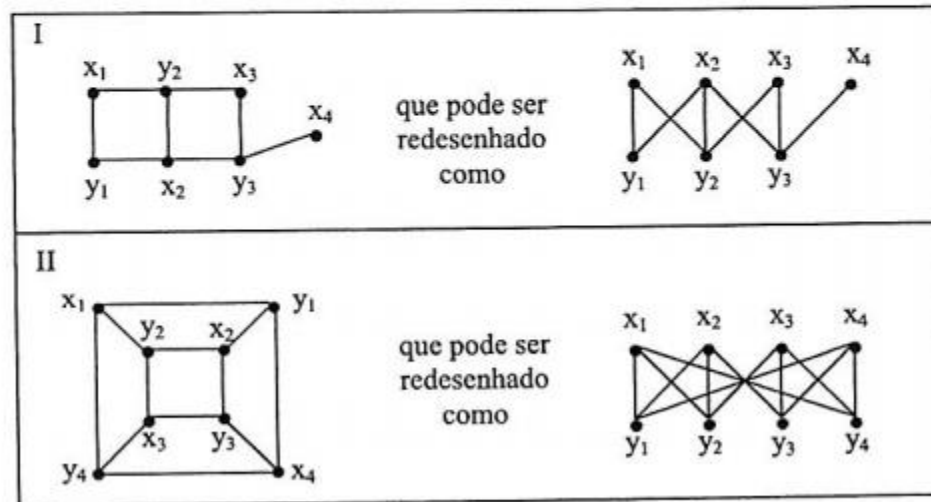


Figura 3.23 Os grafos em I e II são exemplos de grafos bipartidos.

Grafo Bipartido Completo

Definição 3.9 Um *grafo bipartido completo* é um grafo simples bipartido G , com a bipartição $V = X \cup Y$, em que todo vértice em X está unido a todo vértice em Y . Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$. Para padronizar, assume-se que $m \leq n$. Note que $K_{n,n}$ é um grafo regular de grau n .

Exemplo 3.13 A Figura 3.24 mostra os diagramas de $K_{m,n}$, para $m = 1, 2, 3$ e $n = m, m+1, m+2$.

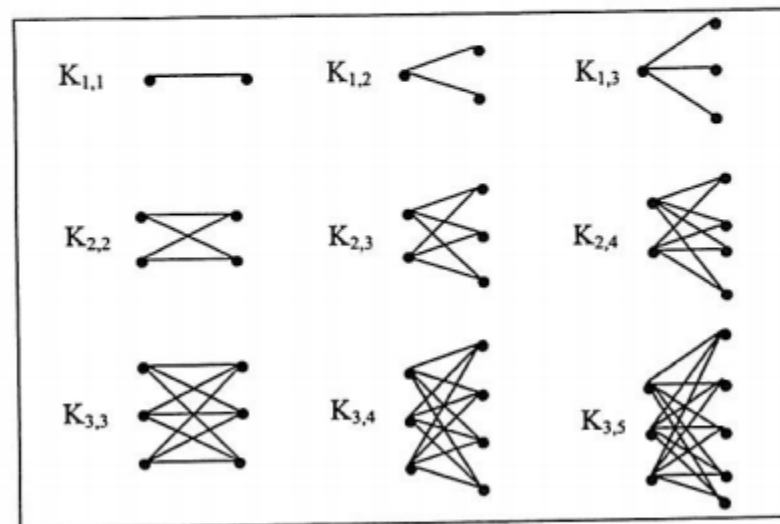


Figura 3.24 $K_{m,n}$, para $m = 1, 2, 3$ e $n = m, m+1, m+2$.

Subgrafo

Definição 3.10 Sejam dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Diz-se que G_2 é *subgrafo de* G_1 se $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$, e para toda aresta $e \in E_2$, se e for incidente a v_1 e v_2 , então $v_1, v_2 \in V_2$. Nesse caso, diz-se também que G_1 é *supergrafo de* G_2 .

Exemplo 3.14 A Figura 3.28 mostra um grafo e alguns de seus possíveis subgrafos.

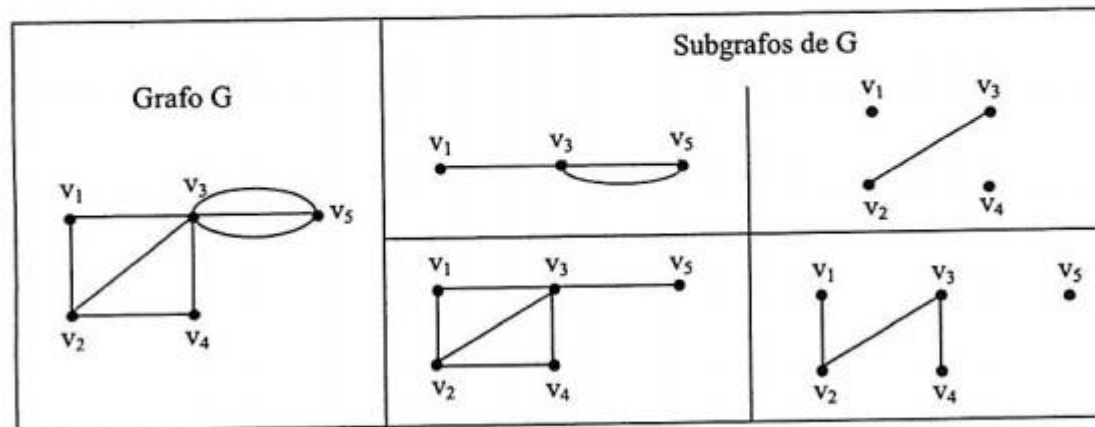


Figura 3.28 Grafo G e quatro possíveis subgrafos.

Subgrafo

Exemplo 3.15 A Figura 3.29 mostra um grafo G e um grafo G_1 , que é subgrafo de G . Mostra também o grafo G_2 , que não é subgrafo de G .

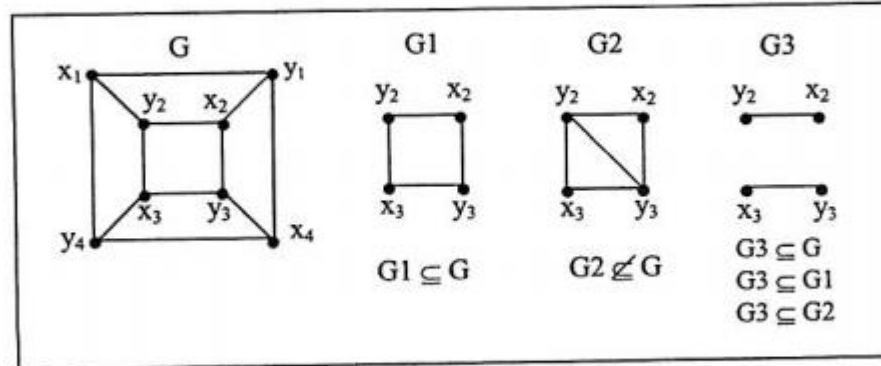


Figura 3.29 Grafo G_1 é subgrafo do grafo G , mas o grafo G_2 não é subgrafo de G . O grafo G_3 é subgrafo de G_1 , o que o torna um subgrafo de G também.

Note que:

- Todo grafo é seu próprio subgrafo.
- Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G .
- Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G .
- Uma única aresta de G , com seus vértices-extremidade, é também um subgrafo de G .