Algoritmos e Estrutura de Dados – IV

Unidade 4 – Árvores

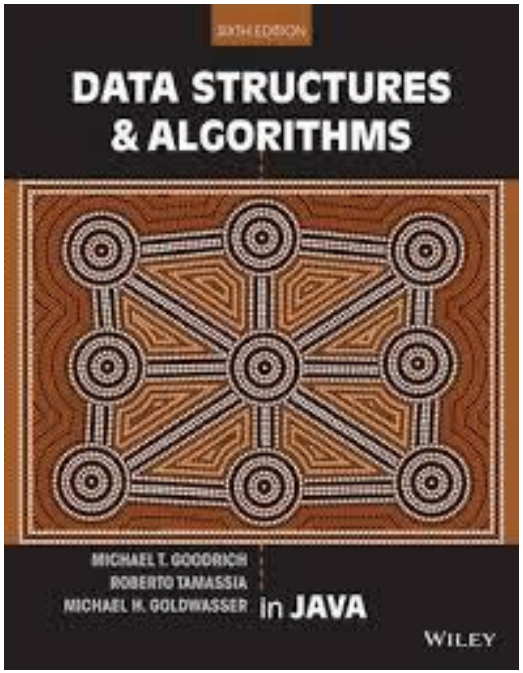
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP

Bibliografia

- Data Structures and Algorithms in Java – Fourth Edition – Roberto Tamassia – Michael T. Goodrich – John Wiley & Sons, Inc
- Head First Java, 2nd Edition by Kathy Sierra and Bert Bates
- Estrutura de Dados e Algoritmos – Bruno R. Preiss, Editora Campus, 2001
- Estrutura de Dados e Algoritmos em Java – Robert Lafore, Editora Ciência Moderna, 2005
- Algoritmos e Estrutura de Dados – Niklaus Wirth – Editora Prentice Hall do Brasil, 1989
- Estrutura de Dados e Algoritmos em C++, Adam Drozdek – Thompson
- Introdução à Estrutura de Dados, Celes, Cerqueira, Rangel - Elsevier

Leitura Recomendada para a Unidade 4

- Data Structures and Algorithms in Java (*), Roberto Tamassia and Michael T. Goodrich, Sixty Edition – **2014** , Seção **8.1**



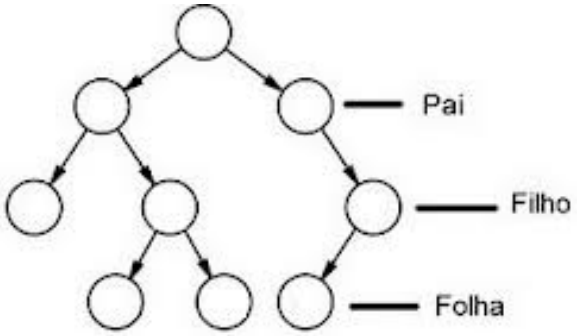
(*) Em português, Estrutura de Dados e Algoritmos em Java

Árvores

- Árvore é uma estrutura de dados não-linear.
- Tem uma importância muito grande na Computação, pois disponibiliza algoritmos muito mais rápidos que os encontrados nas estruturas lineares.
- Têm diversas aplicações: sistemas de arquivos, interfaces gráficas, banco de dados, etc.
- Os relacionamentos encontrados em uma árvore são hierárquicos.
- Exemplo: Árvore Genealógica

Definição

- Árvore é um tipo abstrato de dados onde os dados são estruturados de forma hierárquica.
- Com exceção do topo, cada elemento da árvore tem um elemento pai e zero ou mais elementos filhos.
- Normalmente, o elemento topo é chamado **raiz** da árvore



Definição Formal

- Uma árvore **T** é um conjunto de nós que armazenam elementos em relacionamentos pai-filho com as seguintes propriedades:

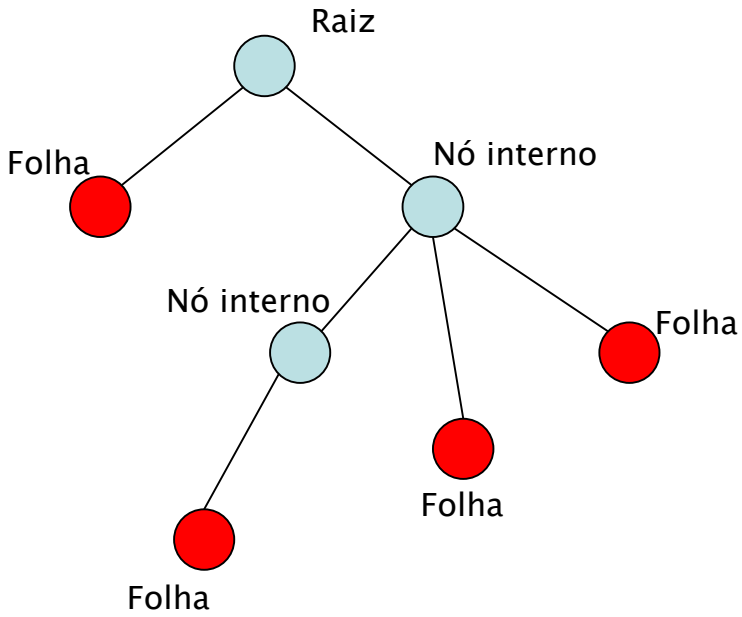
  - Se **T** não é vazia, ela tem um nó especial chamado **raiz** de **T**, que não tem pai.
  - Cada nó v de **T** diferente da raiz tem um único nó pai w;

- Uma árvore pode não ter nós. Quando isso ocorre, dizemos que a árvore **T** é vazia.

- Assim, uma árvore **T** ou é vazia ou consiste de um nó raiz **r** e um conjunto (possivelmente vazio) de árvores cujas raízes são filhas de **r**.

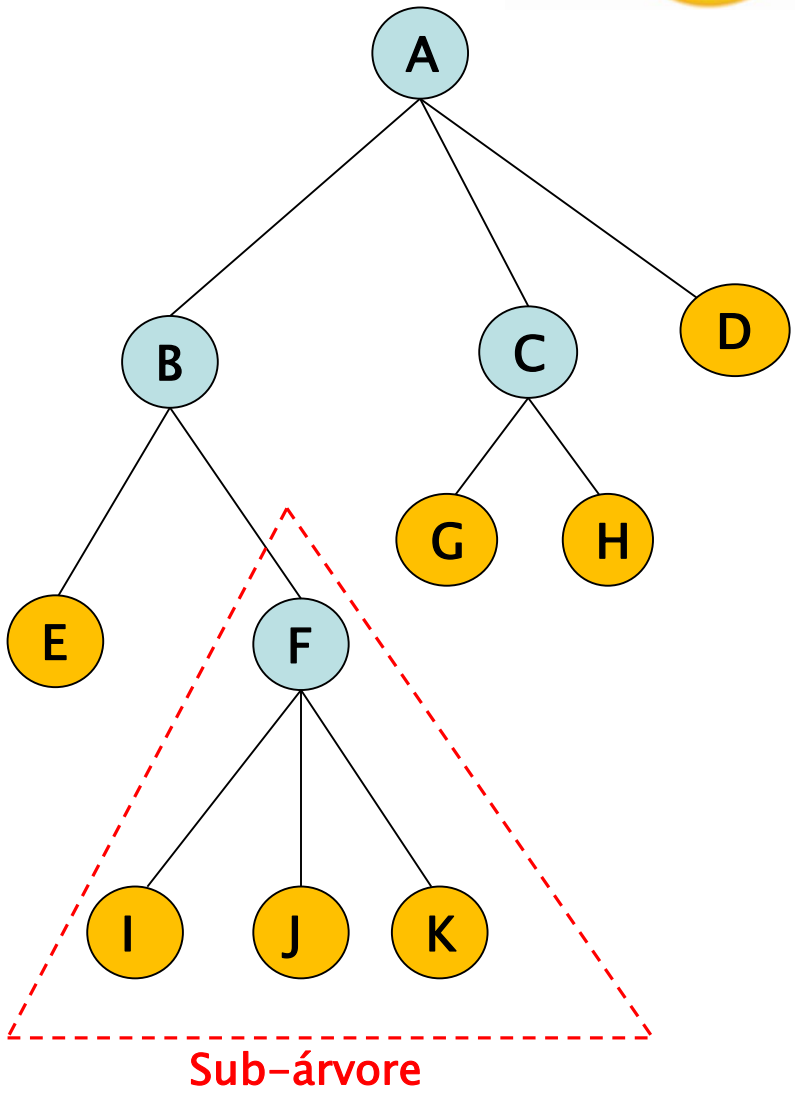
Outros relacionamentos

- Dois nós que são filhos do mesmo pai são **irmãos**.
- Um nó **v** é **externo** se não tem filhos.
- Nós externos também são conhecidos por **folhas**.
- Um nó **v** é **interno** se tem um ou mais filhos.



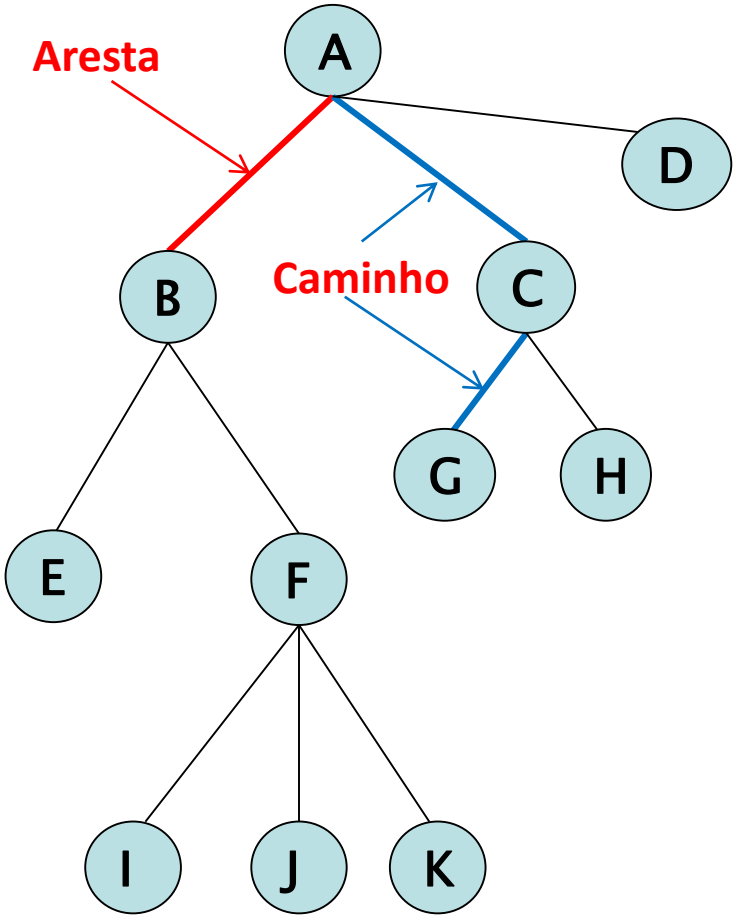
Definições

- **Raiz** (root): Nó sem pai (A)
- **Nó interno**: Nó com pelo menos um filho (A,B,C,F)
- Nó externo ou nó **folha**: nó sem filhos (D,E,G,H,I,J,K)
- **Ancestral** de um nó: pai, avô, bisavô, ...
- **Descendente** de um nó: filho, neto, bisneto, ...
- **Sub-Árvore**: árvore formada por um nó e seus descendentes.



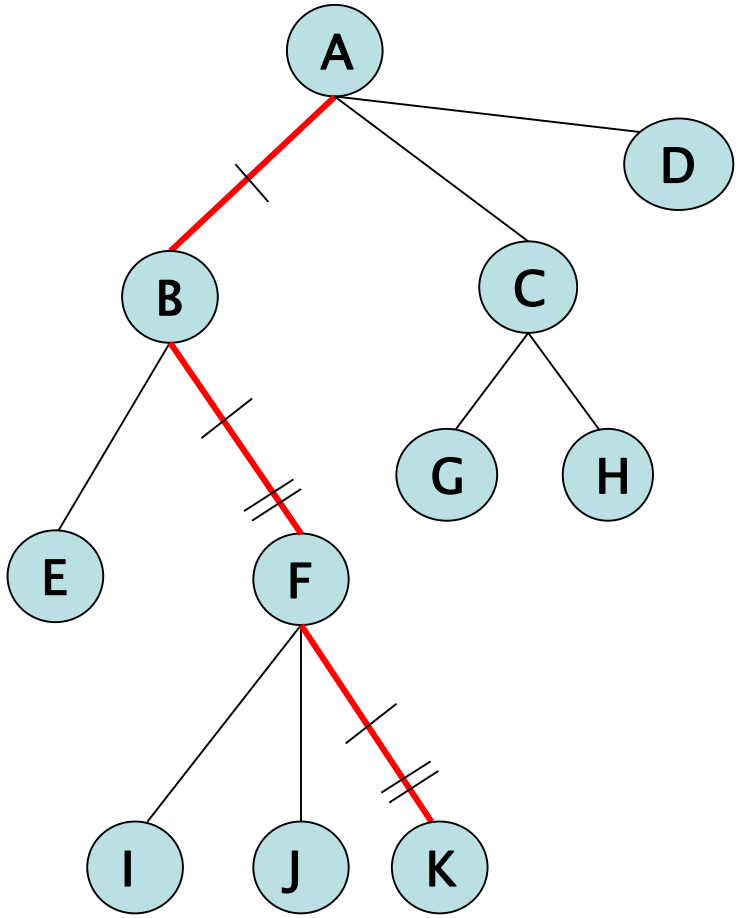
Definições

- **Aresta**: é um par de nós (u,v) tal que u é pai de v. (A,B)
- **Caminho**: é uma sequência de nós tais que quaisquer dois nós consecutivos da sequência sejam arestas. ((A,C),(C,G))
- **Tamanho de um caminho**: # de arestas em um caminho. (Tamanho do caminho ((A,C),(C,G)) = 2).



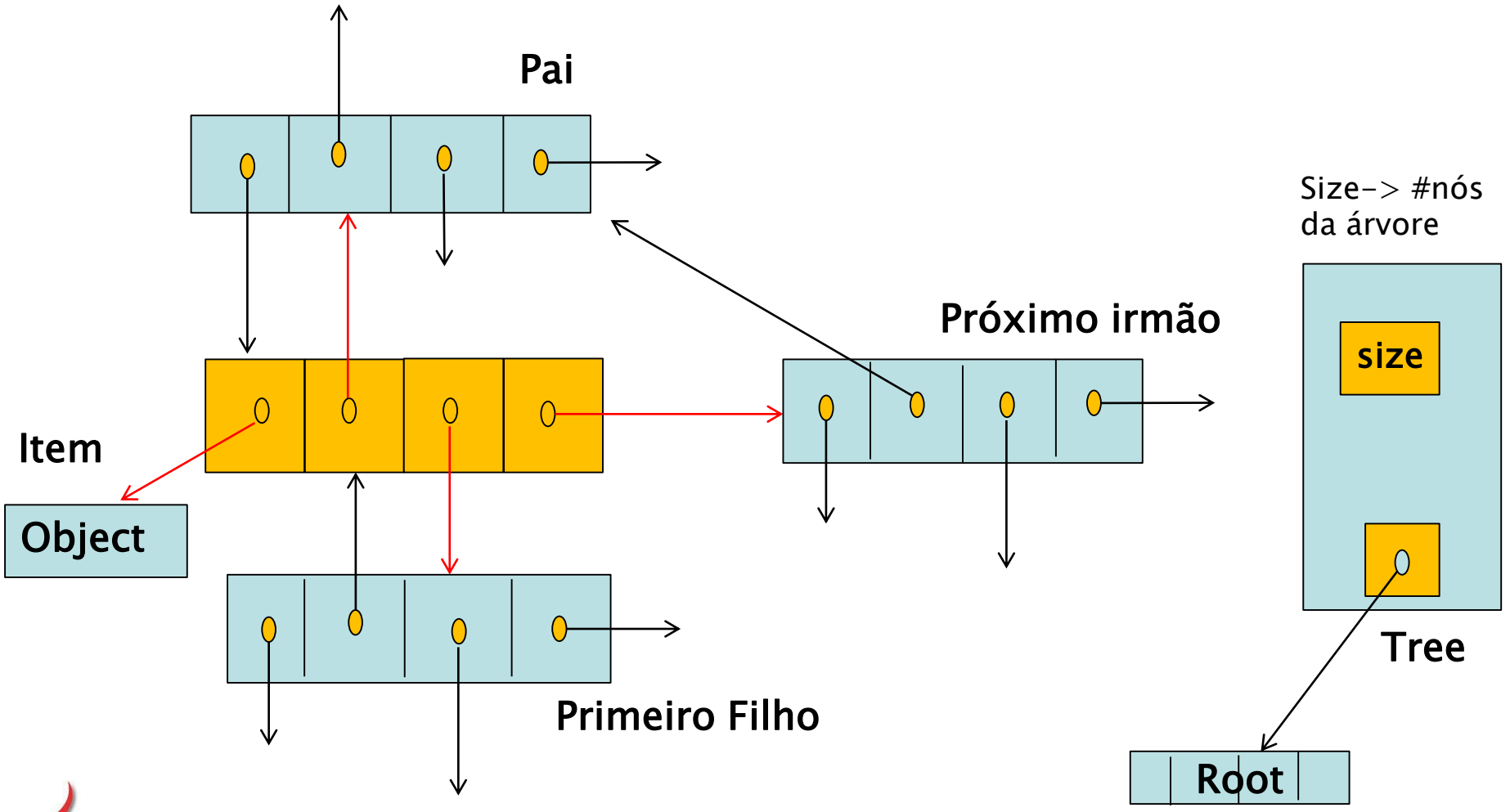
Definições

- **Profundidade de um nó n**: é Tamanho do caminho da raiz até o nó **n**.
  (Dept (K) = 3)
- **Profundidade da raiz: ZERO**
- **Altura de um nó**: Tamanho do caminho de **n** até seu mais profundo descendente.
  (Altura(B) = 2) .
- **Altura de qualquer folha**: ZERO
- **Altura da Árvore** = **Altura da Raiz**



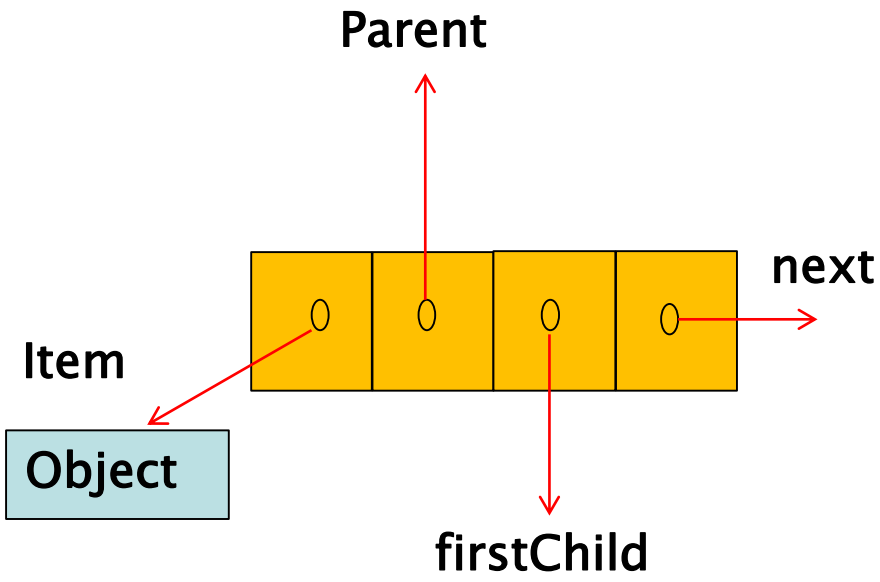
Representando Nó de Árvores

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



Representando Nó de Árvores

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



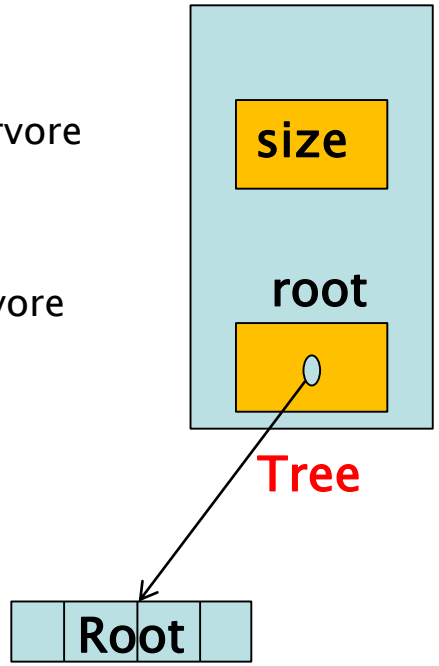

```
Class Node_Tree {

        Object item;
        Node_Tree parent;
        Node_Tree firstChild;
        Node_Tree next;
        .
        .
        .

}
```

Representando Árvores

- O nó de controle possui a referência para o root e o total de nós na árvore.

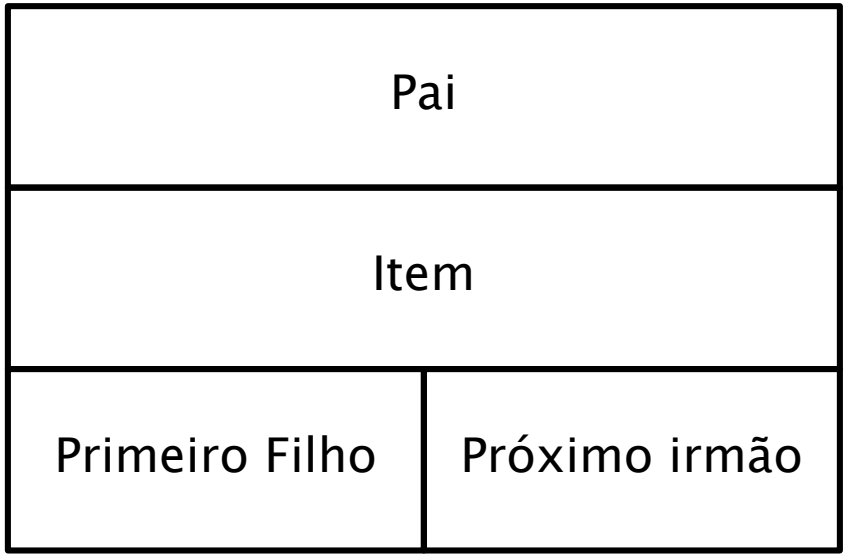
size -> #nós da árvore

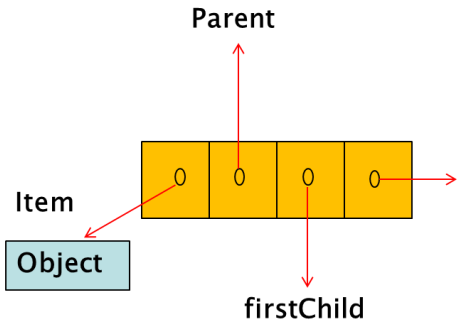
root -> raiz da árvore



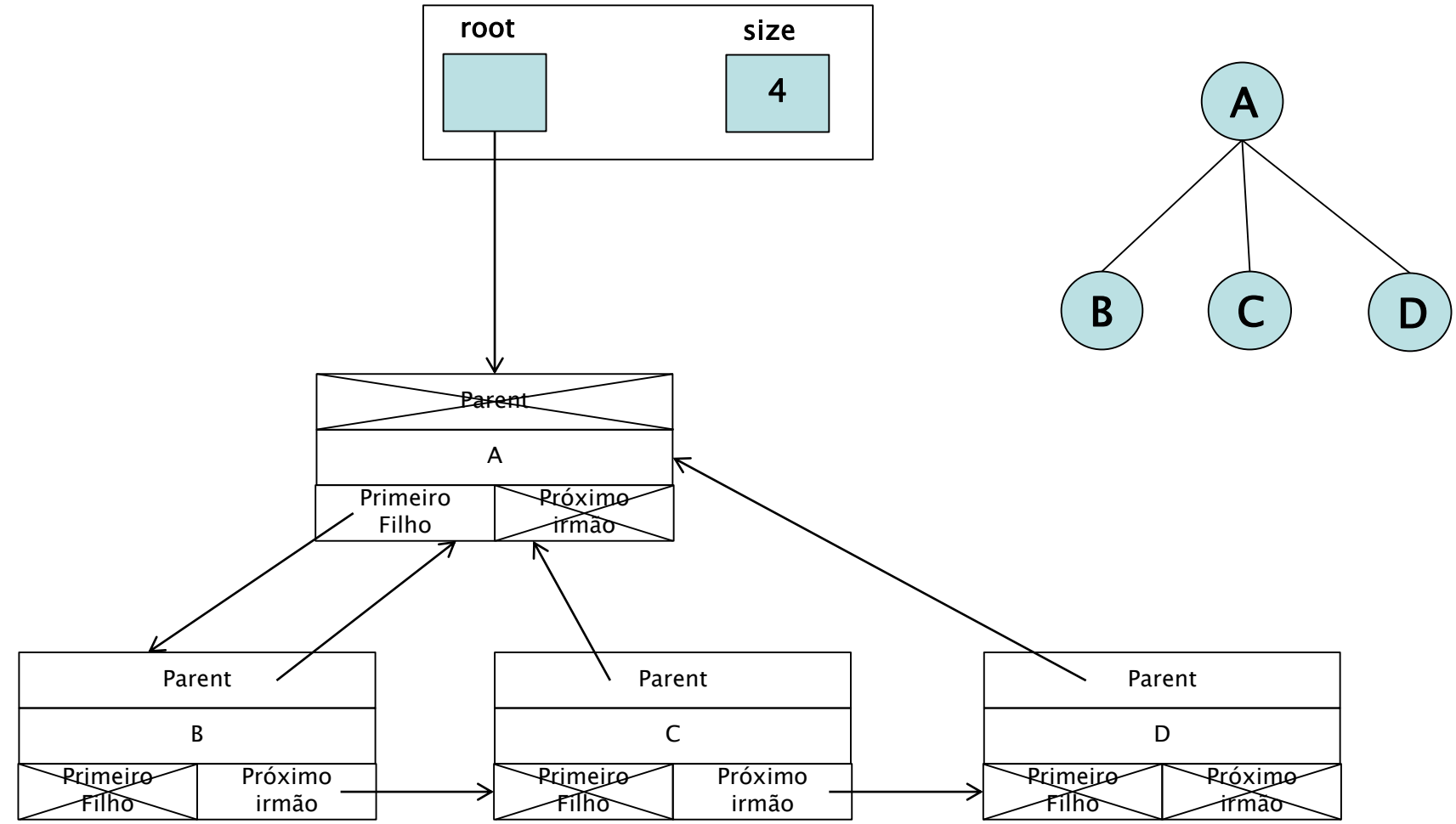

```
Class Tree {

        Node_Tree root;
        int size;
        .
        .
        .

}
```

Representando Nó da árvore

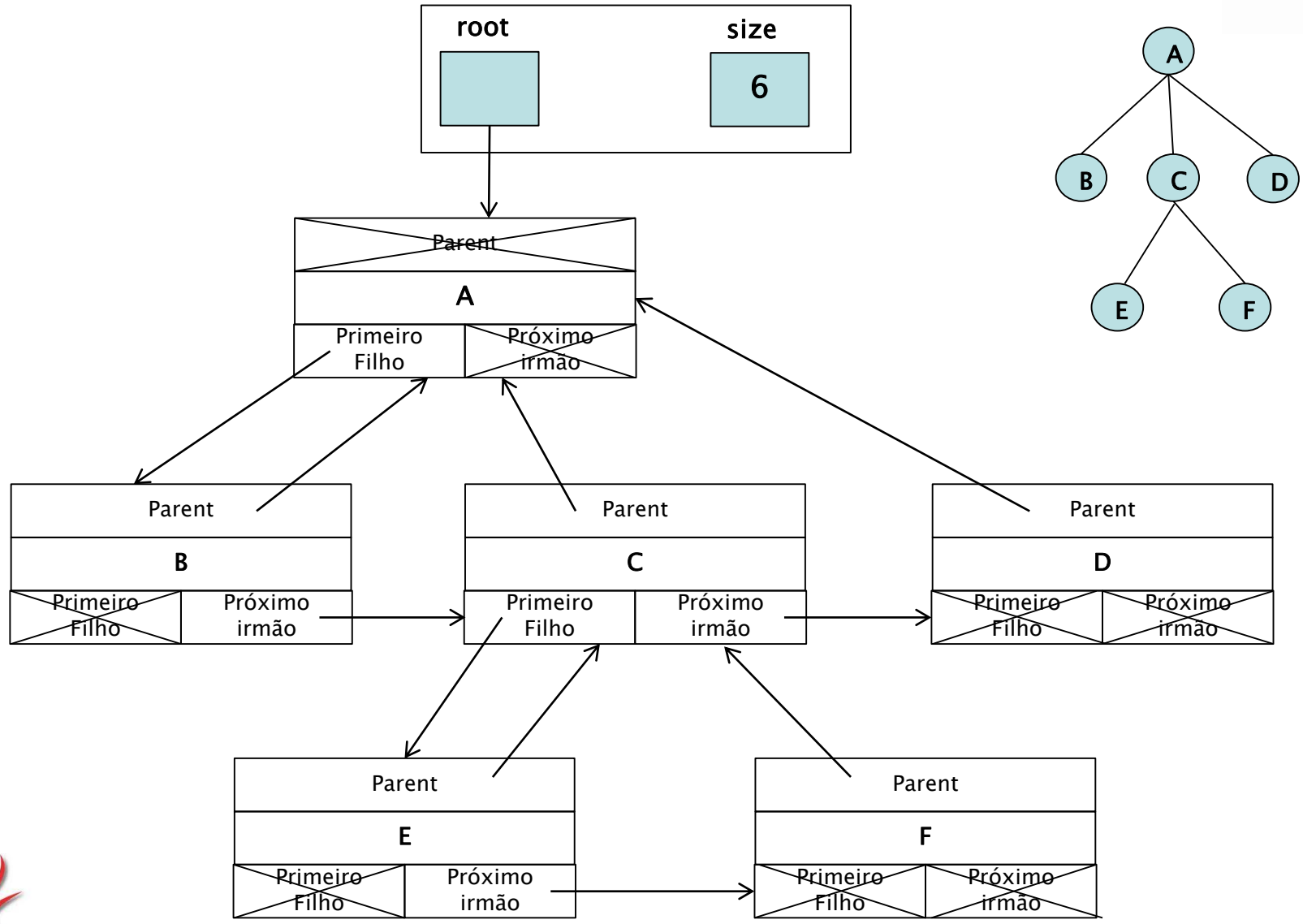




Exemplo


root
size
4
A
B
C
D
Parent
A
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
B
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
C
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
D
Primeiro Filho
Próximo irmão

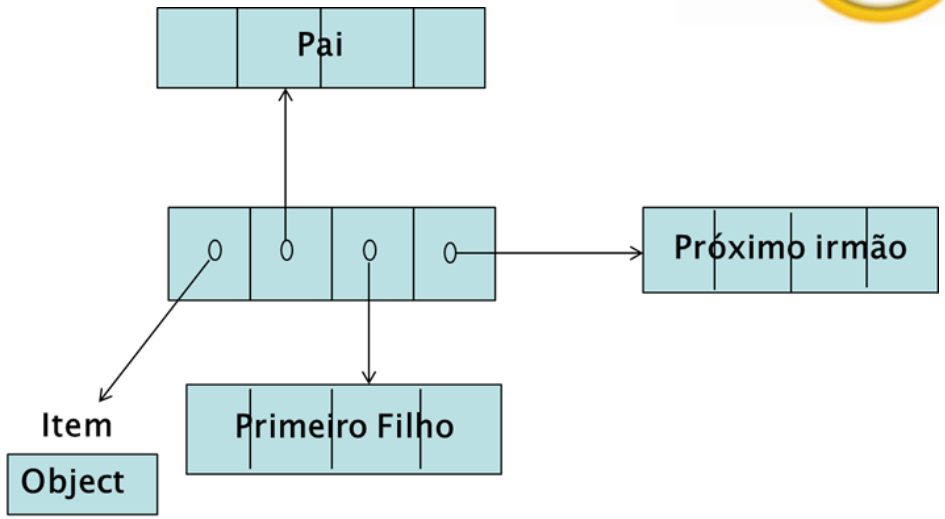
Exemplo


root
size
6
A
B
C
D
E
F
Parent
A
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
B
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
C
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
D
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
E
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
F
Primeiro Filho
Próximo irmão

Os tipos abstratos de dados
Tree e Node_Tree

```
ret_Root(): retorna o node root da árvore
parent(): retorna o pai do nó
imprime_Parent(): imprime o dado armazenado no pai
children(): retorna lista com os filhos do nó
imprime_Filhos(): Imprime dados dos filhos do nó
isInternal(): testa se nó é node interno
isExternal(): testa se nó é node externo
size(): retorna o número de nodes na árvore
isEmpty(): testa se a árvore é vazia
dept(): retorna o número de ancestrais do node
height(): retorna a altura do node
preorder(): retorna nodes em ordem preorder
postorder(): retorna nodes em ordem postorder
listNodes(): retorna uma coleção dos nodes da árvore
replace(v,e): altera o dado em um determinado node
```

Classe Node_Tree




```
package uscs;

public class Node_Tree {

        Integer item;
        Node_Tree parent;
        Node_Tree firstChild;
        Node_Tree next;

        public Node_Tree(Integer item) {
                this.item = item;
                this.parent = null;
                this.firstChild = null;
                this.next = null;
        }
```

parent(v): retorna o pai de v

imprime_Parent(): imprime o dado armazenado no pai

```
public Node_Tree parent() {

        if (this.parent == null)
                return null;

        else return (this.parent );

}

public void imprime_Parent() {
        if (this.parent != null)
                System.out.println("Pai:   " + this.parent.item );

        else
                System.out.println("Este nó é root, não tem pai...");
}
```

imprime_Filhos(): Imprime dados dos filhos do nó

```
public void imprimeFilhos() {

        if (this.firstChild == null)
                System.out.println("Node nao tem filhos....");
        else {

                Node_Tree trab = this.firstChild;

                while (trab != null ) {

                        System.out.println(trab.item);
                        trab = trab.next;
                }
        }
}
```

isInternal(): testa se nó é node interno

```
public boolean isInternal() {
        if (this.firstChild != null)
                return true;
        else return false;
}
```

dept(): retorna o número de ancestrais do nó

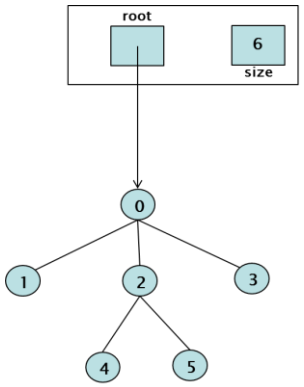
```
public int dept() {
        if (this.parent == null)
                return 0;
        else return ( 1 + this.parent.dept() );
}
```

height(): retorna a altura do nó

```
public int height() {

        if (this.firstChild == null )
                return 0;

        int h=0;

        Node_Tree trab = this.firstChild;

        while (trab.next != null ) {
                h = Math.max(h , trab.next.height());
                trab = trab.next;
        }

        return 1 + h;

}
```

Classe Tree

```
package uscs;

public class Tree {

        Node_Tree root;
        int size;

        public Tree() {

                this.root = null;
                this.size = 0;
        }

        public void insert_root(Integer valor) {

                Node_Tree node = new Node_Tree(valor);
                this.root = node;
                this.size = 1;

        }
```



ret_Root(): retorna o node root da árvore.

```
public Node_Tree ret_Root() {
        return (this.root);
}
```

size(): retorna o número de nós da árvore

```
public int size() {
        return this.size;
}
```

isEmpty(): testa se a árvore é vazia

```
public boolean isEmpty() {

        if (this.size == 0 )
                return true;
        else return false;
}
```

Travessia de Árvores

- Os métodos vistos até agora permitem que se crie a árvores, seus nós e os relacionamentos (pai/filho) entre os nós criados.

- Travessia de uma árvore significa percorrer todos os nós da mesma.

Atravessando Árvores

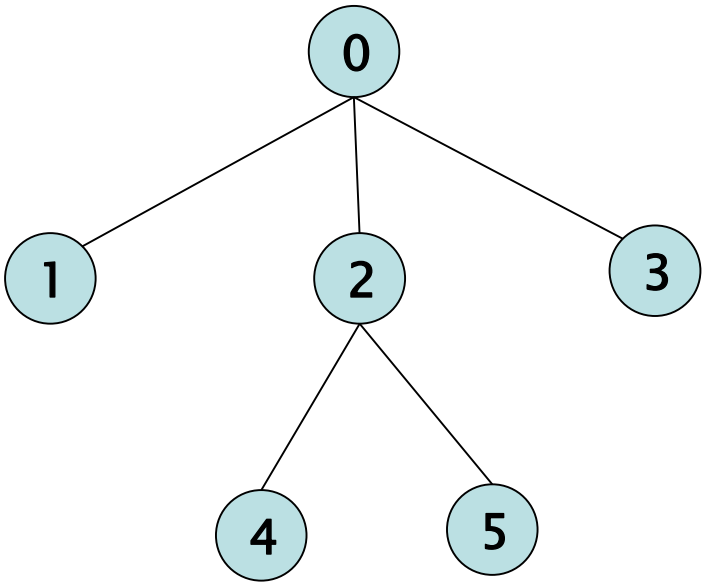
- Atravessar a árvore significa visitar **uma única vez** cada nó da árvore.
- Existem basicamente dois algoritmos de travessia: **preorder** e **postorder**.

Percurso - Preorder

- Na travessia **preorder** de uma árvore T, a raiz de T é visitada em primeiro lugar e em seguida as sub-árvores são visitadas recursivamente.

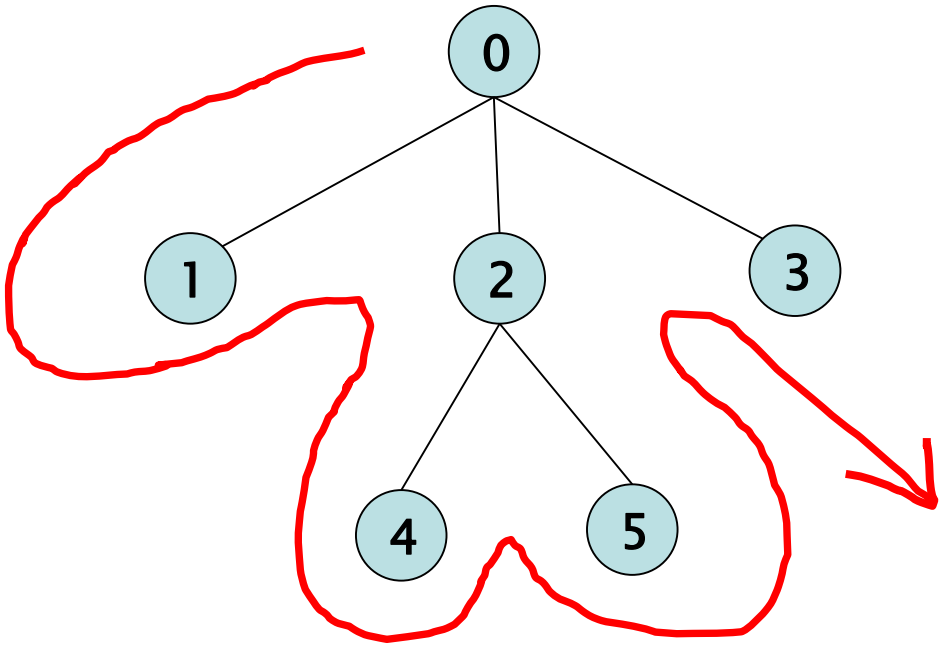
```
public  void preorder() {

        System.out.println(this.item );

        Node_Tree trab = this.firstChild;

        while (trab != null ) {
               trab.preorder();
               trab = trab.next;
        }
}
```

Exercício



- Imprimir os nós da árvore com o uso da travessia preorder.

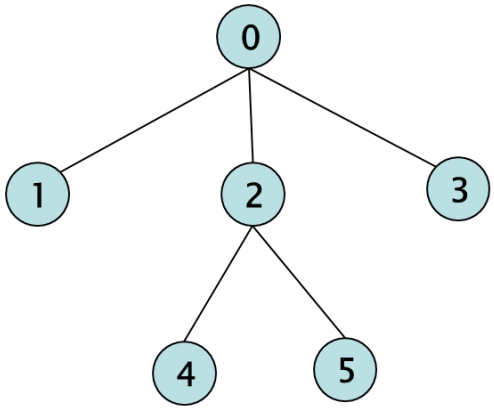
Percurso - Preorder



- Nós são visitados nesta ordem: 0 1 2 4 5 3

- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo **O(n)**, onde n é o total de nós da árvore.

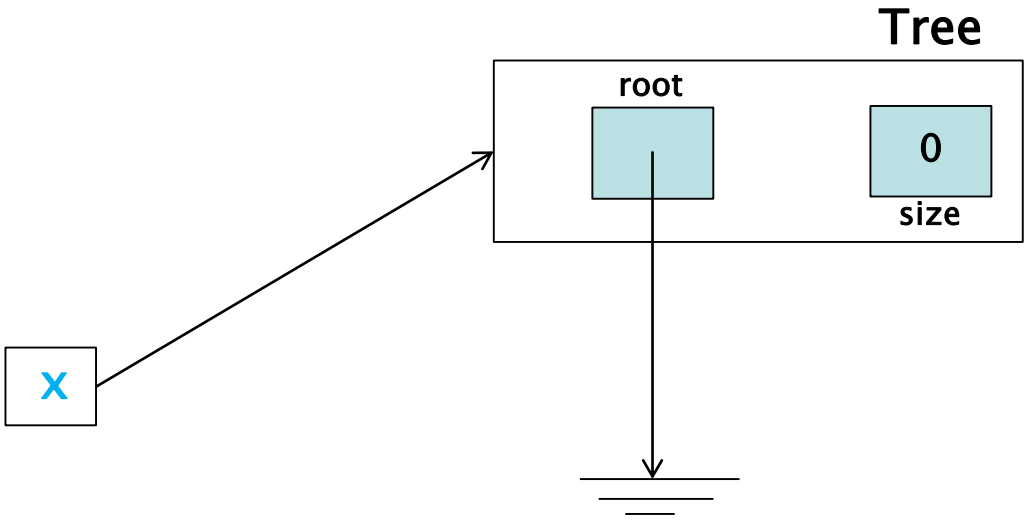
Solução



1. Construir a estrutura de dados que corresponde à árvore (estrutura de controle)
2. Criar o nó root e vinculá-lo à árvore
3. Construir os nós que compõem a árvore
4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós
5. Aplicar o algoritmo de preorder na raiz da árvore.

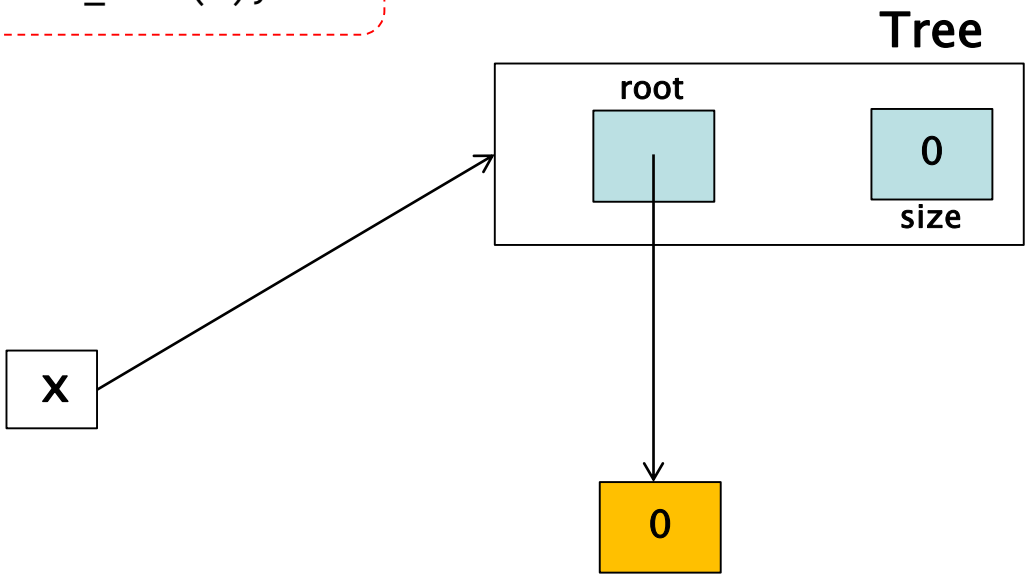
1. Construir a estrutura de dados que corresponde à árvore (estrutura de controle)

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
        public static void main(String[] args ) {
                Tree x = new Tree();
```

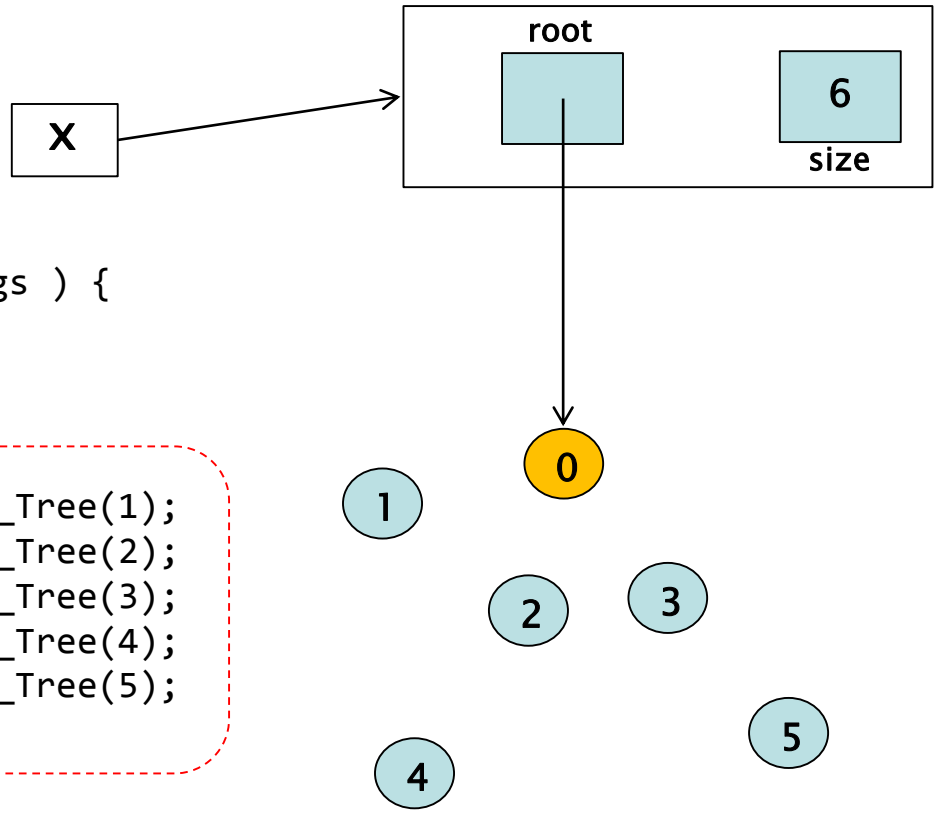


2. Criar o nó root e vinculá-lo à árvore

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
        public static void main(String[] args ) {
                Tree x = new Tree();
                x.insert_root(0);
```



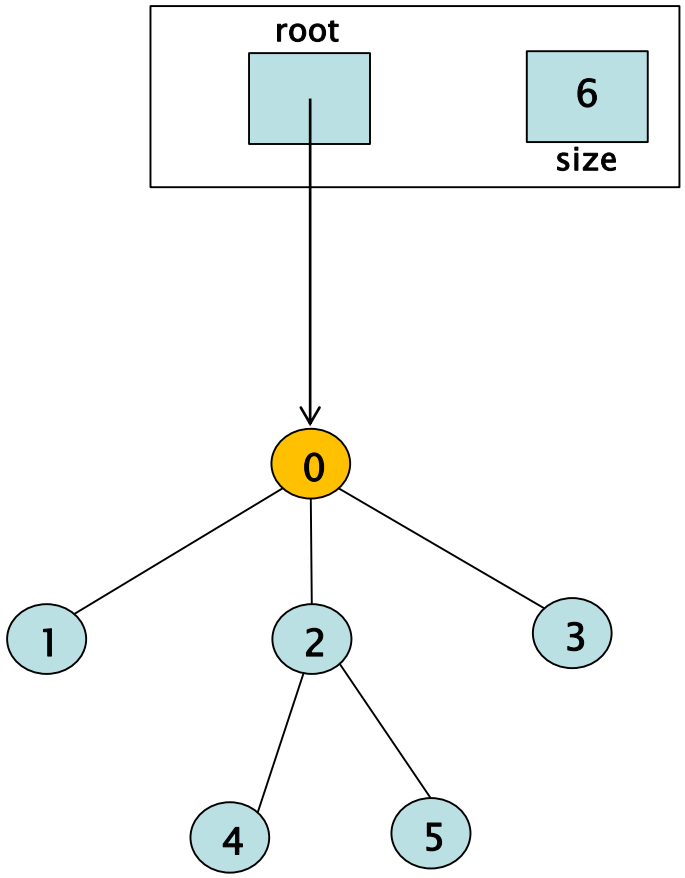
3. Construir os nós que compõem a árvore




```
package uscs;
public class Teste_Tree {
          public static void main(String[] args ) {

                Tree x = new Tree();
                x.insert_root(0);

                Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
                Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
                Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
                Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
                Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);
```

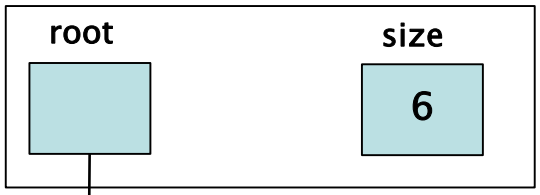
4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós

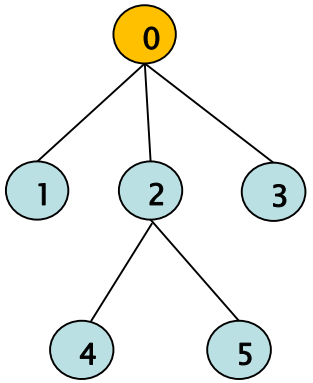
```
package uscs;
public class Teste_Tree {
        public static void main(String[] args ) {

                Tree x = new Tree();
                x.insert_root(0);

                Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
                Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
                Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
                Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
                Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);

                x.root.firstChild = no_1;
                no_1.parent = x.root;
                no_1.next = no_2;

                no_2.parent = x.root;
                no_2.next = no_3;

                no_3.parent = x.root;

                no_2.firstChild = no_4;
                no_4.parent = no_2;

                no_4.next = no_5;
                no_5.parent = no_2;
```

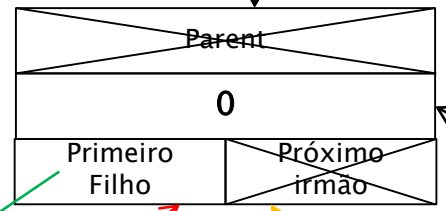


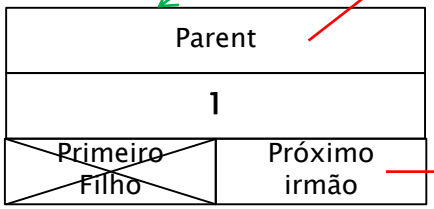
4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós

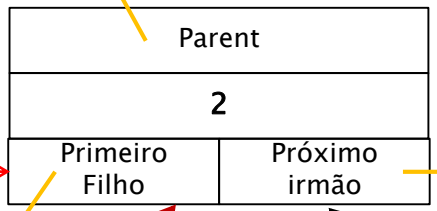
```
x.root.firstChild = no_1;

no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_2;

no_2.parent = x.root;
no_2.next = no_3;
no_2.firstChild = no_4;

no_3.parent = x.root;

no_4.parent = no_2;
no_4.next = no_5;

no_5.parent = no_2;
```

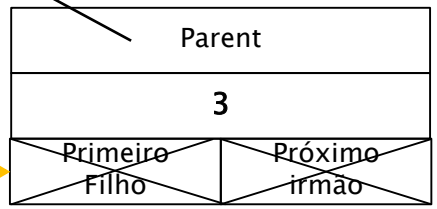


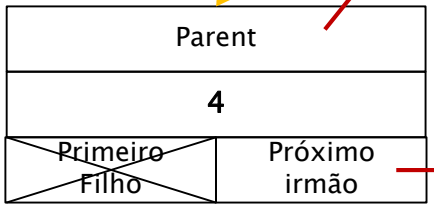


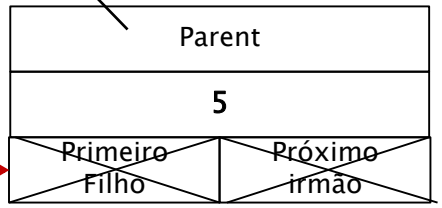






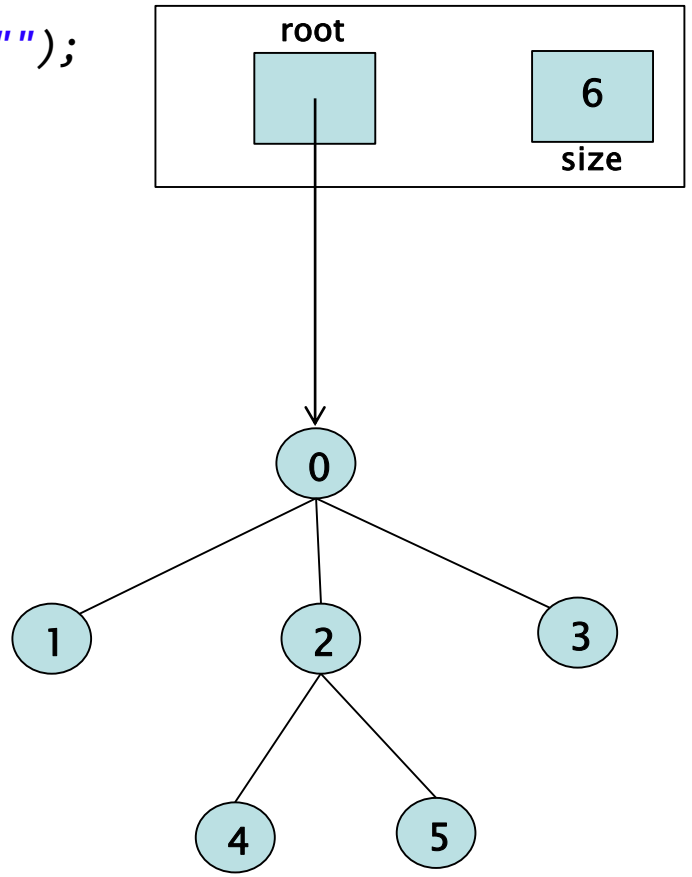






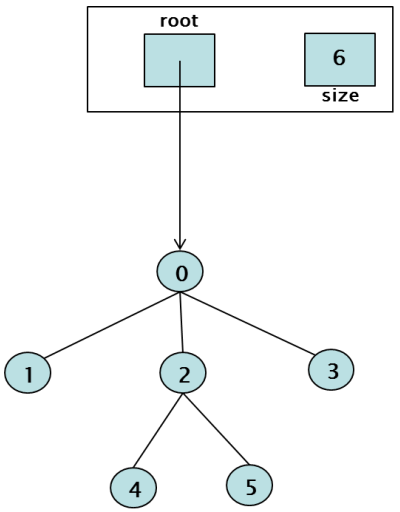
5. Aplicar o algoritmo de preorder na raiz da árvore.

```
            x.root.preorder();
            System.out.println ("");

        }

    }
```



Resposta do programa:

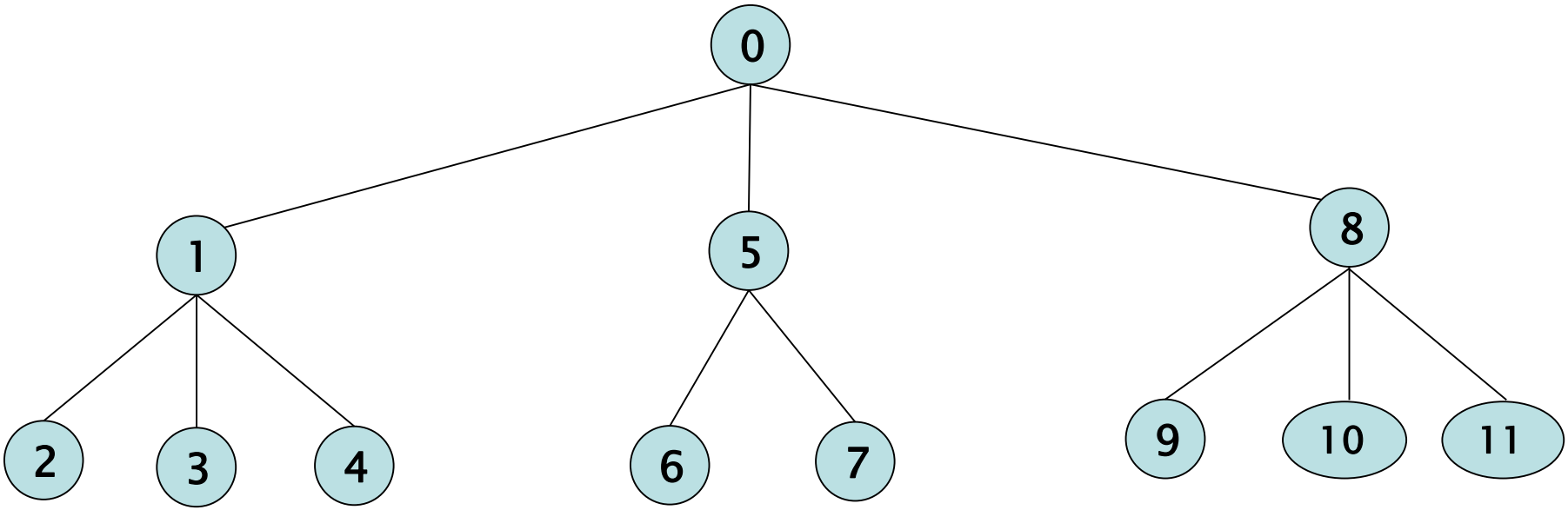
```
package uscs;

public class Teste_Tree {

        public static void main(String[] args ) {

        Tree x = new Tree();

        x.insert_root(0);

        Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
        Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
        Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
        Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
        Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);

        x.root.firstChild = no_1;

        no_1.parent = x.root;
        no_1.next = no_2;

        no_2.parent = x.root;
        no_2.next = no_3;

        no_3.parent = x.root;

        no_2.firstChild = no_4;
        no_4.parent = no_2;

        no_4.next = no_5;
        no_5.parent = no_2;

        x.root.preorder();
        System.out.println ("");
    }
}
```



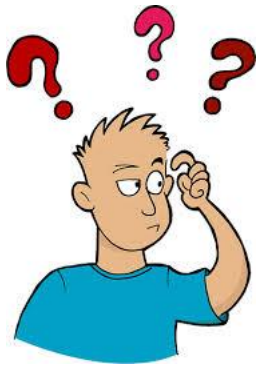
Resposta do programa:

0
1
2
4
5
3

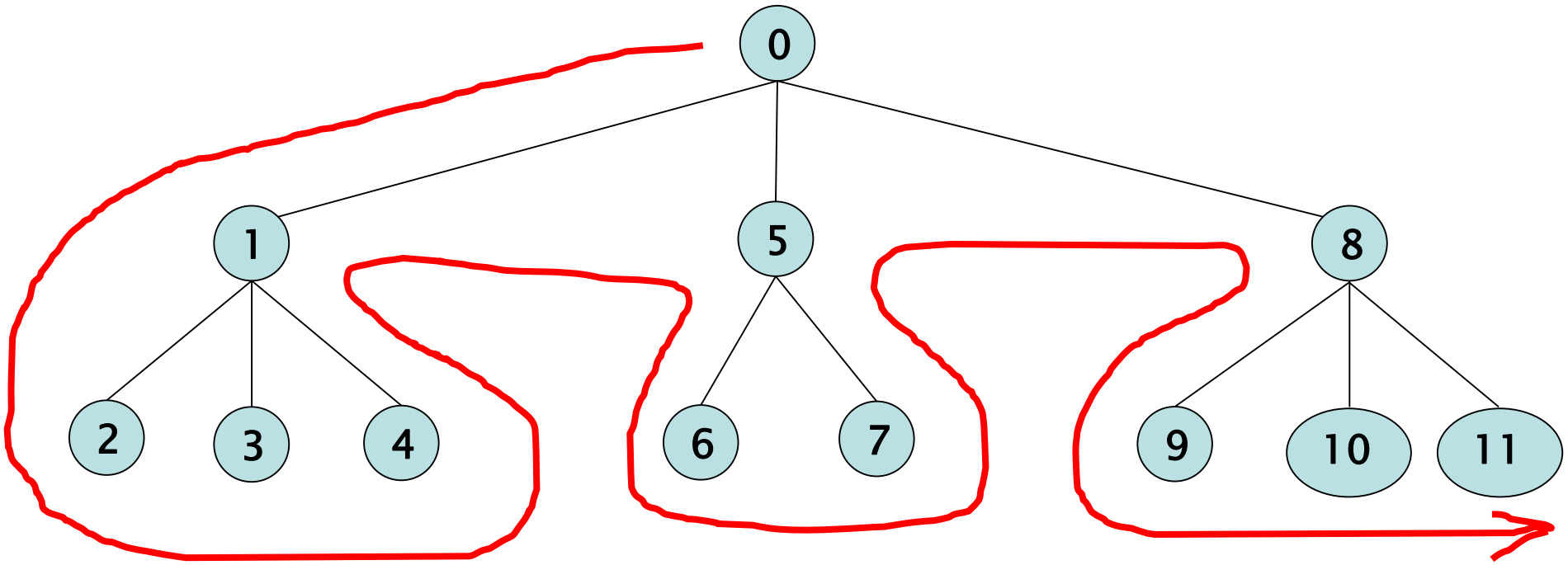
Outro exemplo

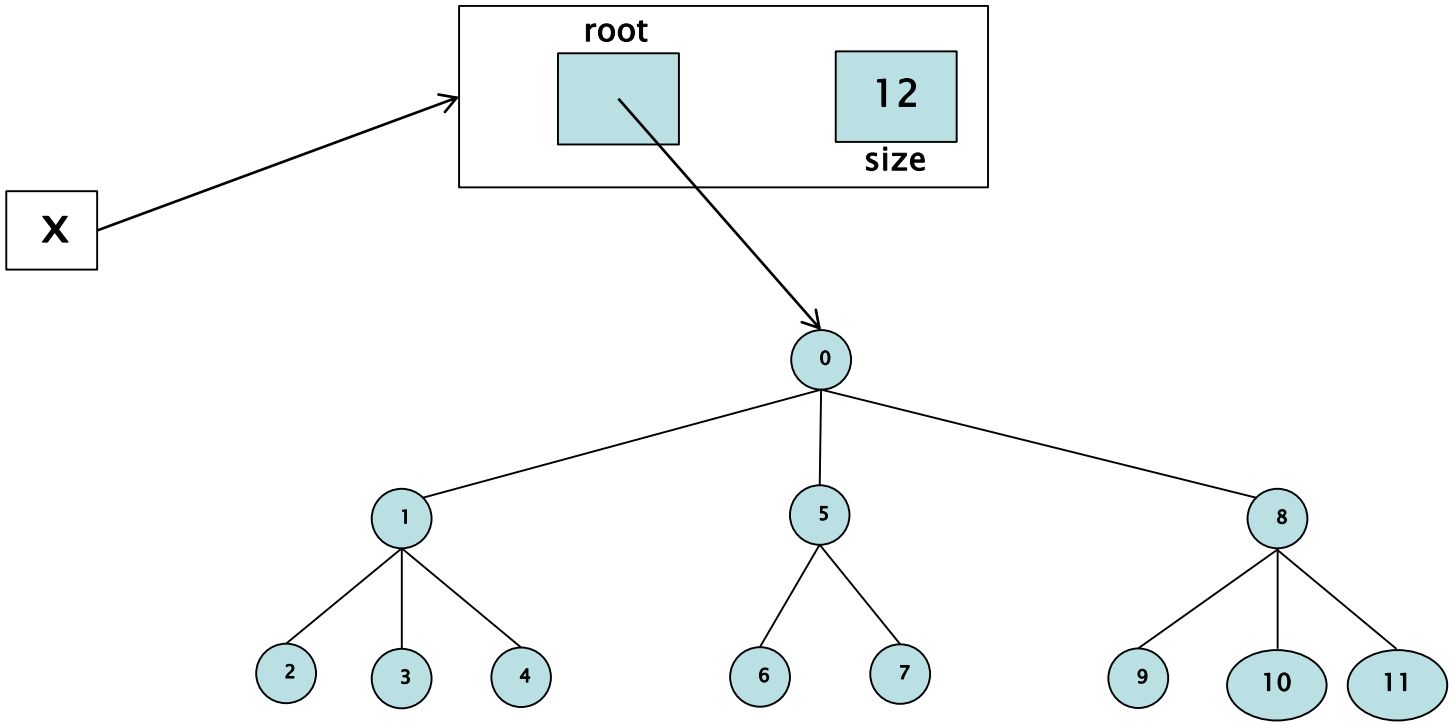


Qual o percurso preordem desta árvore ?



Preorder

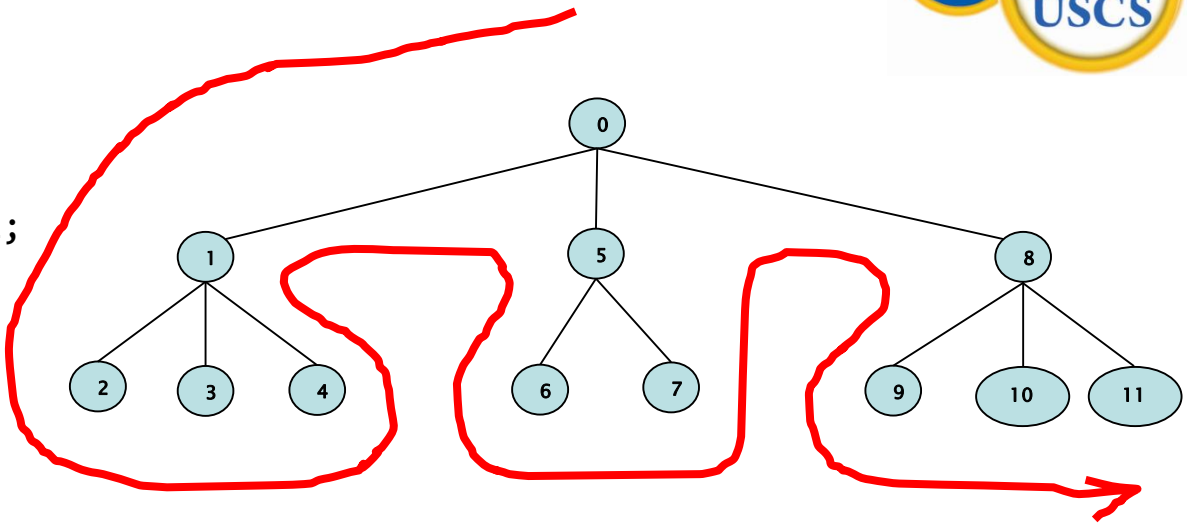




Qual o percurso preordem desta árvore ?

```
package uscs;
        public class Teste_Tree {
                public static void main(String[] args ) {

                Tree x = new Tree();
                x.insert_root(0);

                Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
                Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
                Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
                Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
                Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);
                Node_Tree  no_6 = new Node_Tree(6);
                Node_Tree  no_7 = new Node_Tree(7);
                Node_Tree  no_8 = new Node_Tree(8);
                Node_Tree  no_9 = new Node_Tree(9);
                Node_Tree  no_10 = new Node_Tree(10);
                Node_Tree  no_11 = new Node_Tree(11);

                x.root.firstChild = no_1;
```

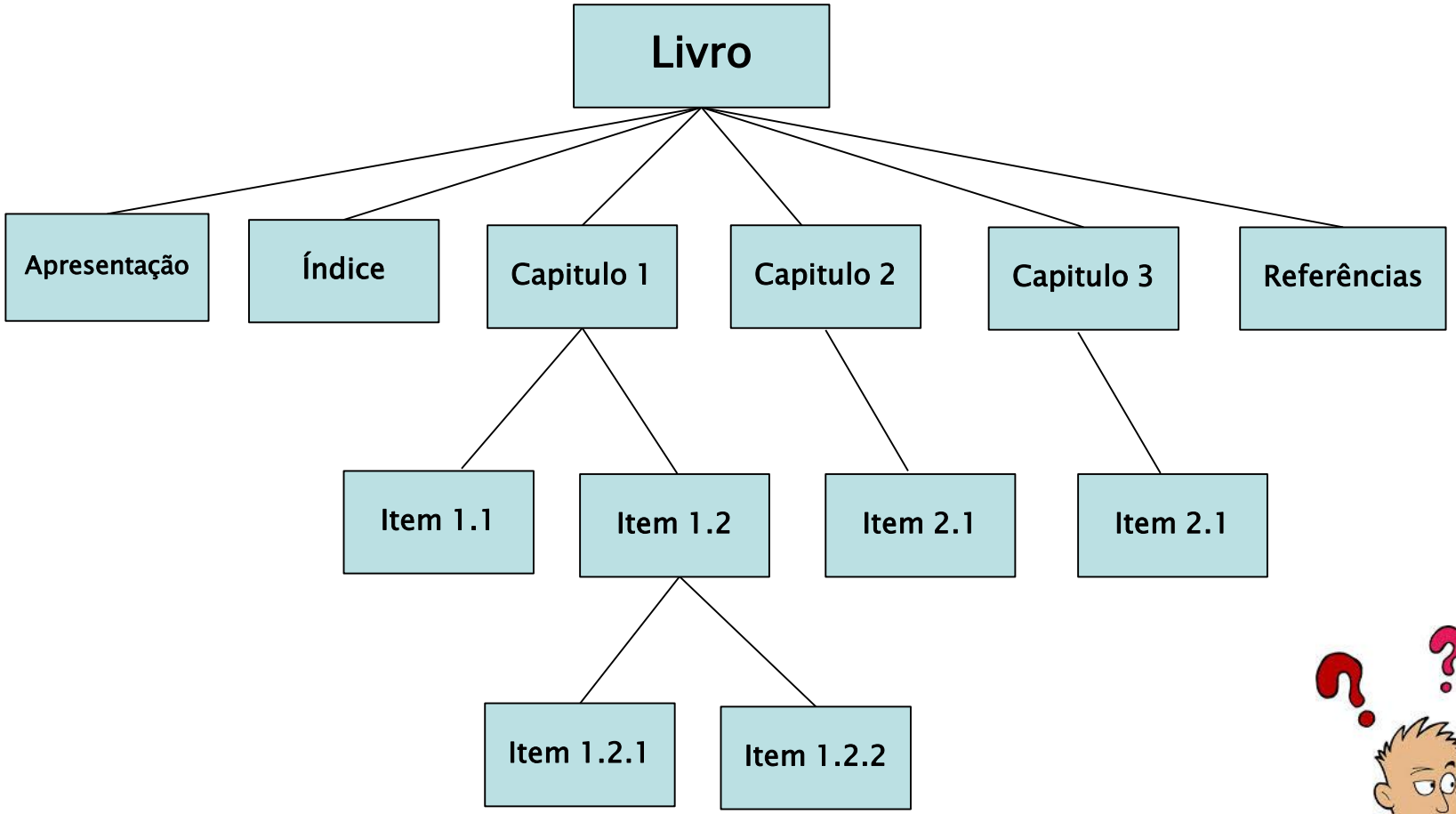
```
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_5;
no_5.next = no_8;
no_5.parent = x.root;
no_8.parent = x.root;

no_1.firstChild = no_2;
no_2.next = no_3;
no_3.next = no_4;
no_2.parent = no_1;
no_3.parent = no_1;
no_4.parent = no_1;

no_5.firstChild=no_6;
no_6.next = no_7;
no_6.parent = no_5;
no_7.parent = no_5;

no_8.firstChild = no_9;
no_9.next = no_10;
no_10.next = no_11;
no_9.parent = no_8;
no_10.parent = no_8;
no_11.parent = no_8;

x.root.preorder();

 }

}
```

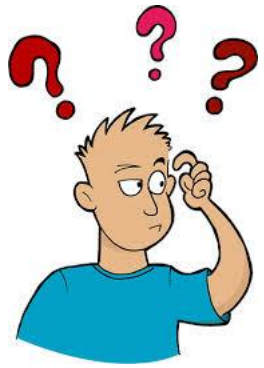


Resposta: Preorder

```
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
```

Exercício





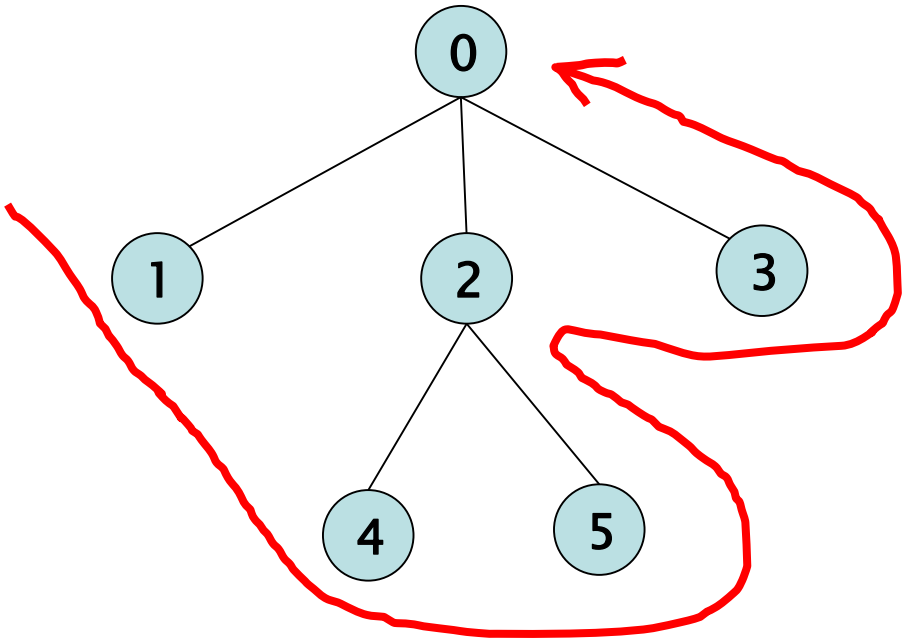
Qual o percurso preordem desta árvore ?

Percurso - Postorder

- Este algoritmo pode ser visto como o **oposto** do percurso **preorder**, pois as sub-árvores dos filhos são recursivamente atravessadas e em seguida o root é visitado.

```
public  void postorder() {

        Node_Tree trab = this.firstChild;

        while (trab != null ) {
               trab.postorder();
               trab = trab.next;
        }

        System.out.println(this.item );

}
```

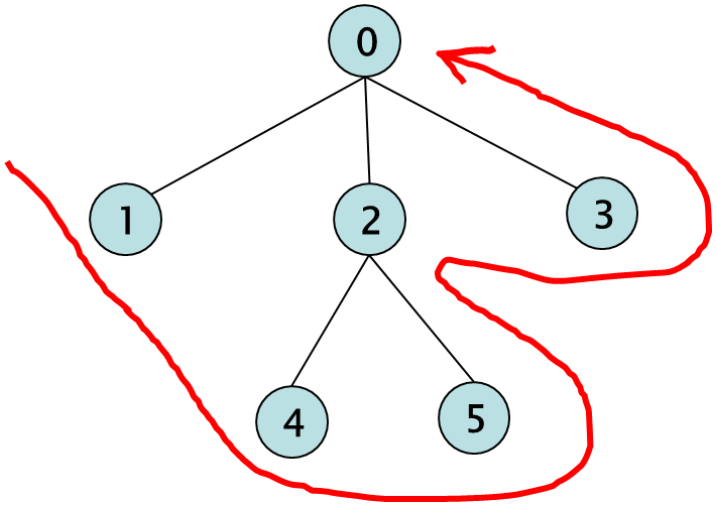
Percurso - Postorder

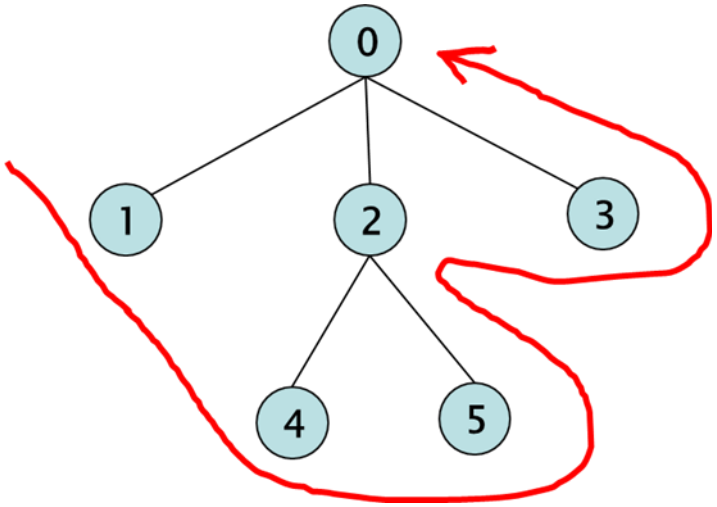


- Nós são visitados nesta ordem: 1 4 5 2 3 0

- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo O(n), onde n é o total de nós da árvore.

```
package uscs;
public class Teste_Tree {
public static void main(String[] args ) {

Tree x = new Tree();
x.insert_root(0);

Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);

x.root.firstChild = no_1;
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_2;

no_2.parent = x.root;
no_2.next = no_3;

no_3.parent = x.root;

no_2.firstChild = no_4;
no_4.parent = no_2;

no_4.next = no_5;
no_5.parent = no_2;
```



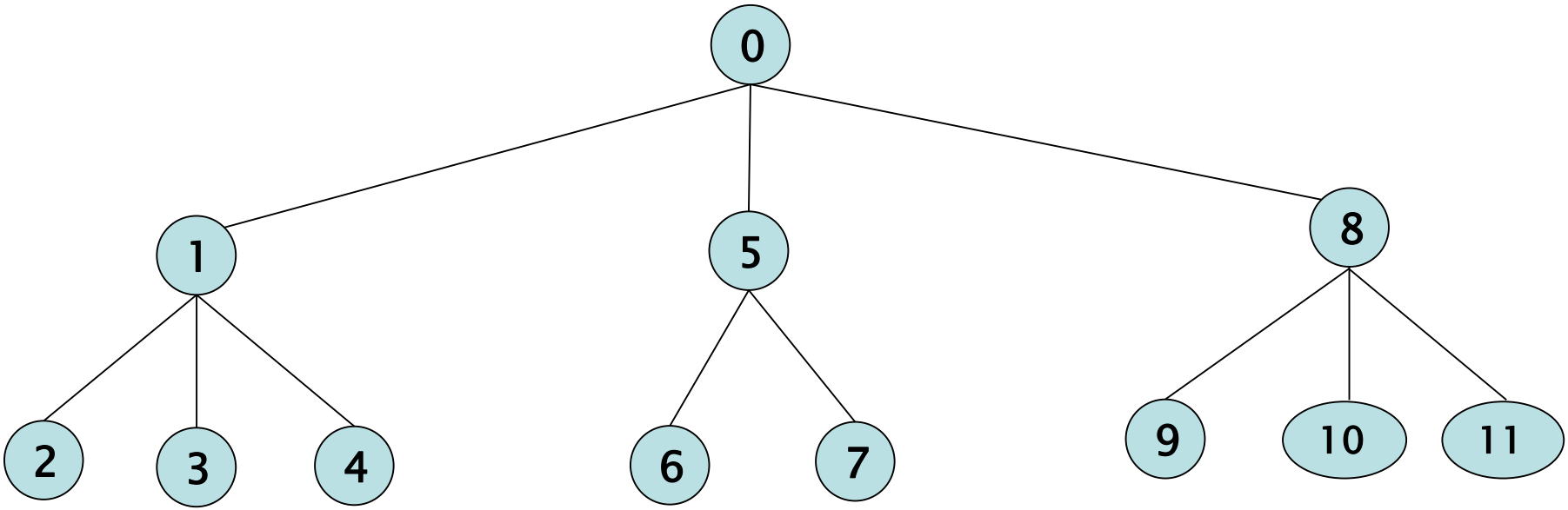



```
            x.root.postorder();
            System.out.println ("");

        }

}
```

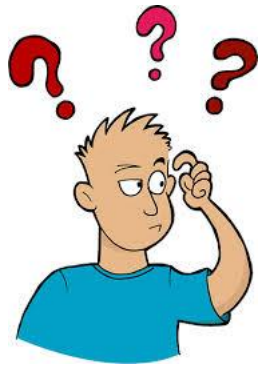
Resposta: Posorder

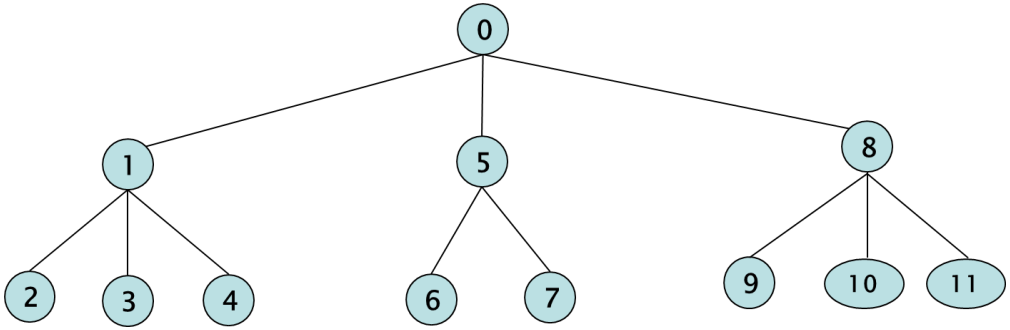
1
4
5
2
3
0

Outro exemplo



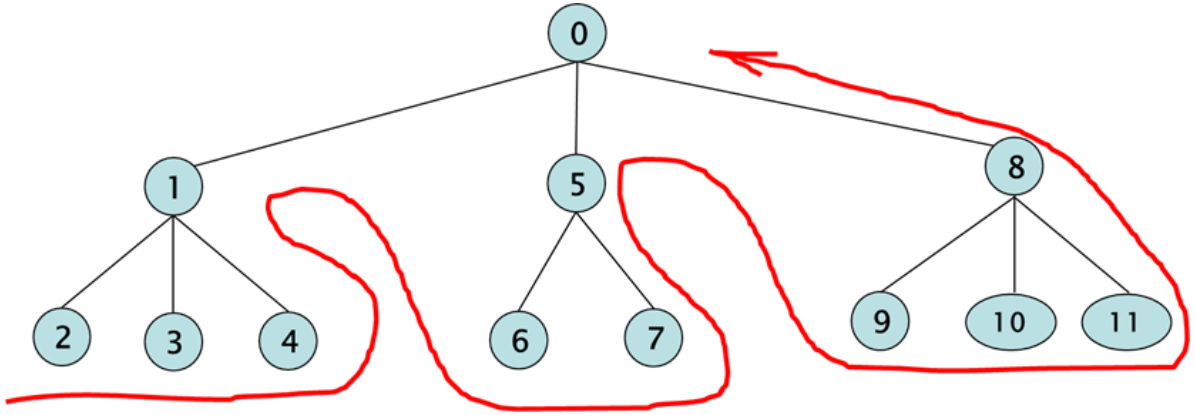
Qual o percurso postordem desta árvore ?



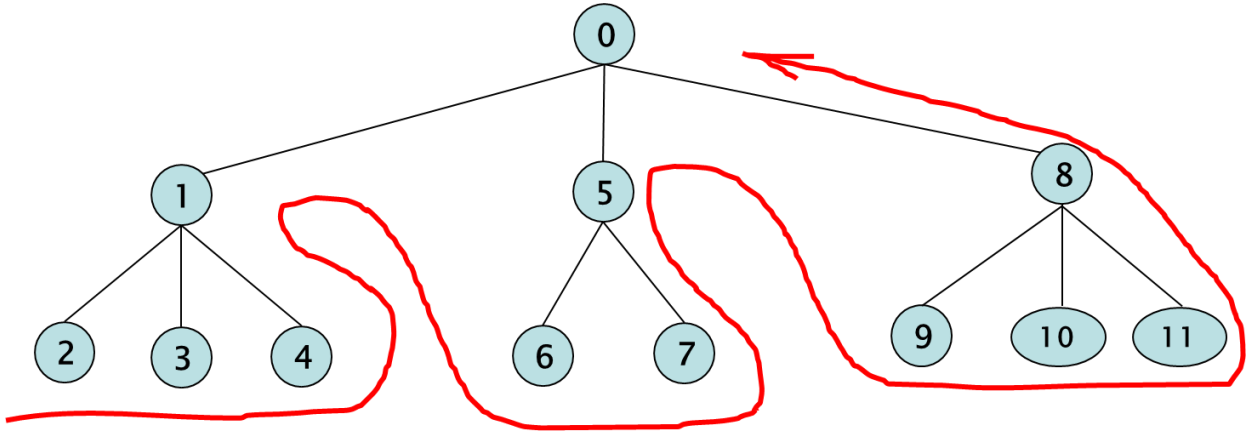



```
package uscs;
public class Teste_Tree {
        public static void main(String[] args ) {

                Tree x = new Tree();
                x.insert_root(0);

                Node_Tree  no_1 = new Node_Tree(1);
                Node_Tree  no_2 = new Node_Tree(2);
                Node_Tree  no_3 = new Node_Tree(3);
                Node_Tree  no_4 = new Node_Tree(4);
                Node_Tree  no_5 = new Node_Tree(5);
                Node_Tree  no_6 = new Node_Tree(6);
                Node_Tree  no_7 = new Node_Tree(7);
                Node_Tree  no_8 = new Node_Tree(8);
                Node_Tree  no_9 = new Node_Tree(9);
                Node_Tree  no_10 = new Node_Tree(10);
                Node_Tree  no_11 = new Node_Tree(11);
```

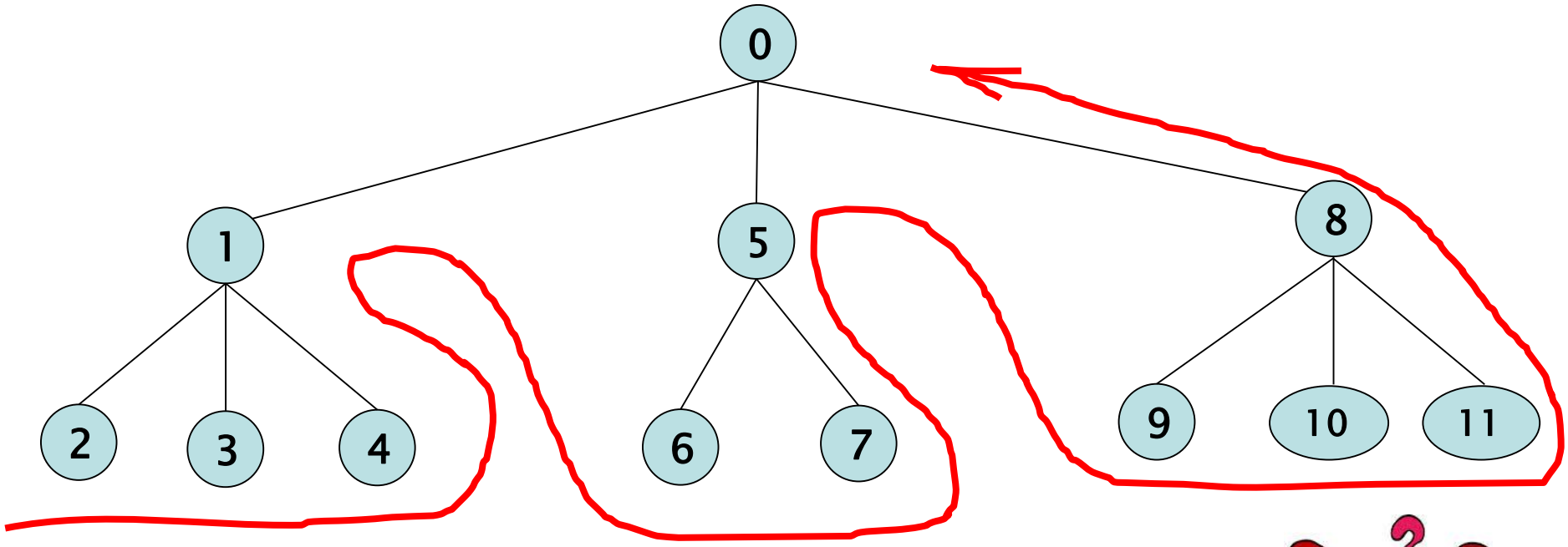
```
x.root.firstChild = no_1;
no_1.parent = x.root;
no_1.next = no_5;
no_5.next = no_8;
no_5.parent = x.root;
no_8.parent = x.root;

no_1.firstChild = no_2;
no_2.next = no_3;
no_3.next = no_4;
no_2.parent = no_1;
no_3.parent = no_1;
no_4.parent = no_1;

no_5.firstChild=no_6;
no_6.next = no_7;
no_6.parent = no_5;
no_7.parent = no_5;
```



```
        no_8.firstChild = no_9;
        no_9.next = no_10;
        no_10.next = no_11;
        no_9.parent = no_8;
        no_10.parent = no_8;
        no_11.parent = no_8;

        x.root.postorder();
        System.out.println ("");

    }

}
```

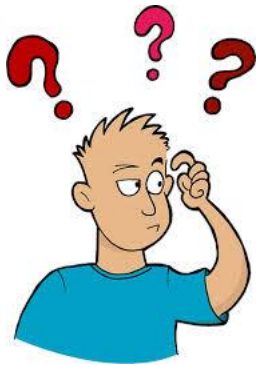


Outro exemplo



Qual o percurso postordem desta árvore ?

2 3 4 1 6 7 5 9 10 11 8 0



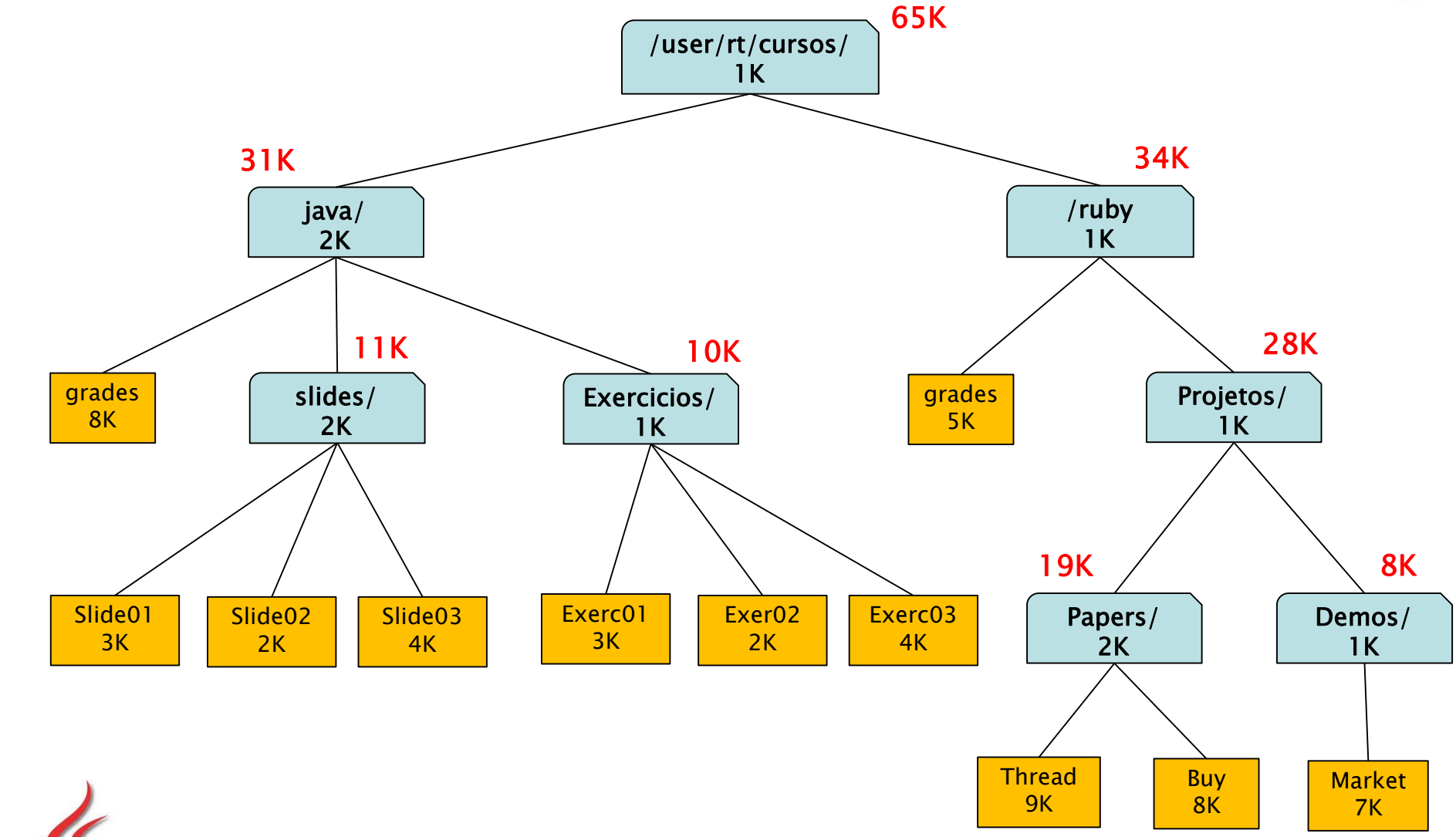
Aplicação travessia postorder

- O método **postorder** é útil para resolver problemas onde desejamos computar alguma propriedade para cada nó **v** da árvore, mas esta computação requer que a mesma computação tenha sido feita previamente para os filhos do nó **v**.

- Para exemplificar o método, considere um sistema de arquivos em árvore, onde nós externos representam arquivos e nós internos diretórios. O problema consiste em computar o espaço em disco usado por um diretório, o qual é recursivamente calculado por:

  - o tamanho do próprio diretório
  - o tamanho dos arquivos no diretório
  - o espaço usado pelos diretórios filhos

Aplicação travessia postorder



Exercício

- Escrever um código Java para retornar o espaço total de bytes armazenados por um sistema de arquivos.