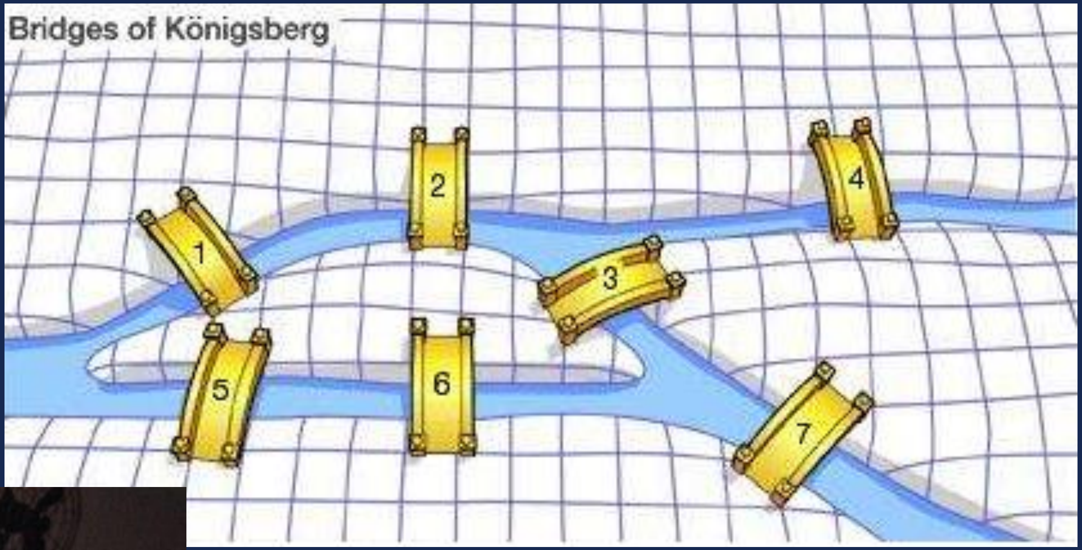
Unidade 17 - Grafos Eulerianos

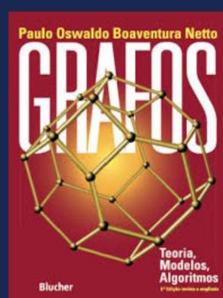


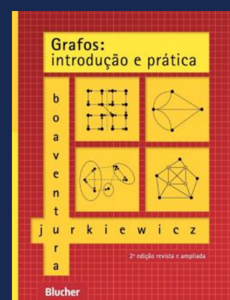
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

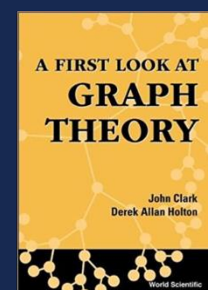
QualitSys

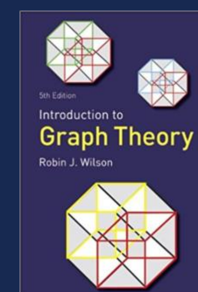
Bibliografia

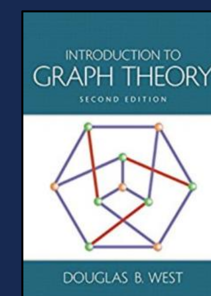
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018

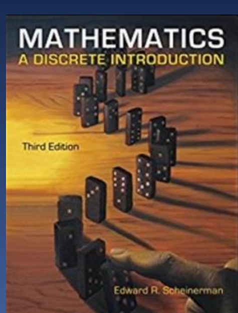


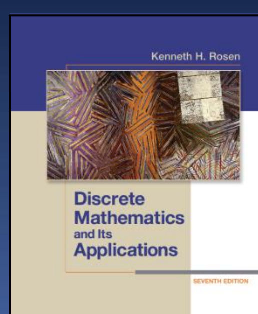


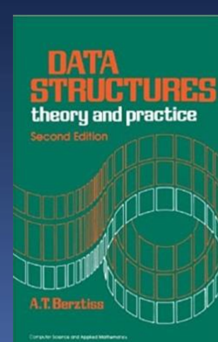


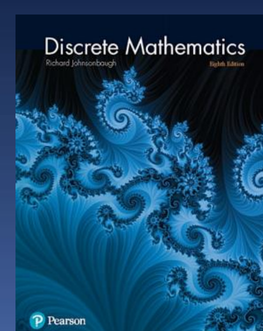


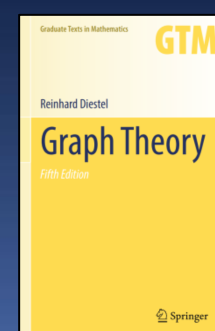












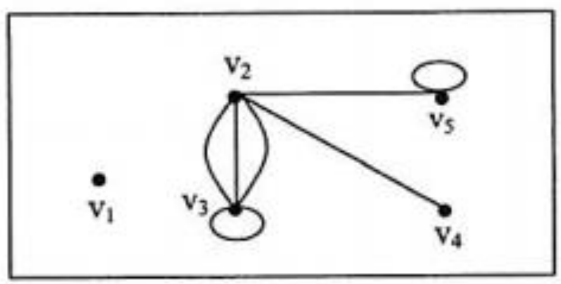
Lembrando...

- ✓ Um grafo G pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados vértices e um conjunto de arestas que unem pares desses objetos;

- ✓ A maneira mais comum de se representar um grafo é por meio de um diagrama;

- ✓ Frequentemente, o próprio diagrama é referenciado como um grafo.

- ✓ Generalizando o conceito, em um grafo é possível que mais de uma aresta conecte o mesmo par de vértices (arestas paralelas), bem como uma aresta pode conectar um vértice a si próprio (aresta chamada loop).



Grafo com vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e sete arestas, sendo três delas paralelas e duas são *loops*.

Formalmente...

- Um grafo G = (**V(G)**, **E(G)**) ou **G = (V,E)** consiste de dois conjuntos finitos:

  - **V(G)**, (ou V), que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um **conjunto** **não** **vazio** de elementos chamados vértices e

  - **E(G)** , (ou E), que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (**que** **pode** **ser vazio**) de elementos chamados **arestas**;

- À cada aresta **e** em **E** atribui-se um par não ordenado de vértices **(u,v)** chamados vértices-extremidade de **e**;

- Vértices também são referenciados como pontos ou nós.

Exemplo

Seja o grafo G = (V,E), tal que

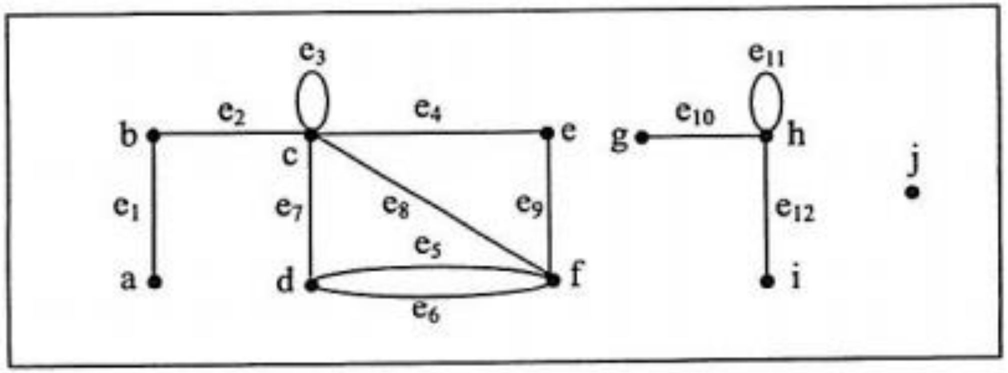
$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$e_1 \leftrightarrow (a,b)$	$e_2 \leftrightarrow (b,c)$	$e_3 \leftrightarrow (c,c)$	$e_4 \leftrightarrow (c,e)$	$e_5 \leftrightarrow (d,f)$	$e_6 \leftrightarrow (d,f)$
$e_7 \leftrightarrow (c,d)$	$e_8 \leftrightarrow (c,f)$	$e_9 \leftrightarrow (e,f)$	$e_{10} \leftrightarrow (g,h)$	$e_{11} \leftrightarrow (h,h)$	$e_{12} \leftrightarrow (h,i)$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

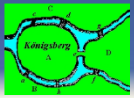
Passeio em um Grafo

- ✓ Muitos problemas em Teoria dos Grafos estão relacionados à possibilidade de se chegar a um **vértice** do grafo a partir de **outro**, seguindo-se uma **sequência** de **arestas**;

- ✓ Um **passeio** em um **grafo** é uma sequência finita

$$\boxed{w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k}$$

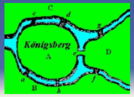
cujos elementos são, alternativamente, **vértices** e **arestas** tal que, para $1 \leq i \leq k$, a aresta $\mathbf{e_i}$ tem vértices-extremidades $\mathbf{v_{i-1}}$ e $\mathbf{v_i}$;



Passeio em um Grafo

$$w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$$

- ✓ Assim, cada aresta e_i é imediatamente precedida e sucedida pelos vértices aos quais é incidente;
- ✓ Diz-se que o passeio W é um passeio V_o–V_k ou um passeio de V_o até V_k
- ✓ O vértice V_o é chamado origem do passeio W e o vértice V_k é chamado término de W;
- ✓ Os vértices V_o e V_k não precisam ser distintos;
- ✓ Os vértices $V_1, \ldots, V_{k-1}$ são chamados vértices internos.



Comprimento de um Passeio em um Grafo

- ✓ Considere o grafo **G** = (**V**,**E**) e uma passeio em **G** dado pela sequência $W = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$.

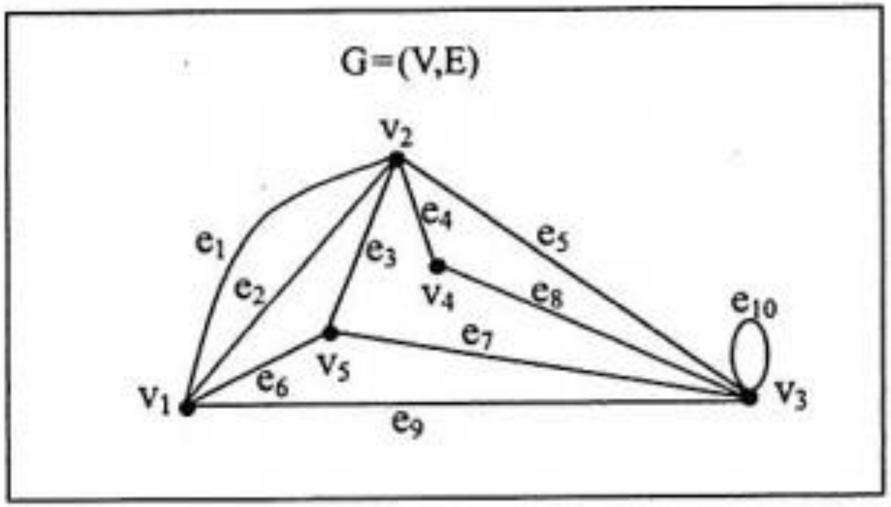
- ✓ O inteiro **k**, que é o número de arestas do passeio, é chamado **Comprimento de W**;

- ✓ Em um passeio **pode** haver **repetições** de **vértices** e **arestas**;

- ✓ No grafo G = (V,E), dados dois vértices **u** ϵ V e **v** ϵ V em G, um passeio **u** – **v** é **fechado** se **u** = **v** e **aberto** se **u** ≠ **v**;

Exemplo

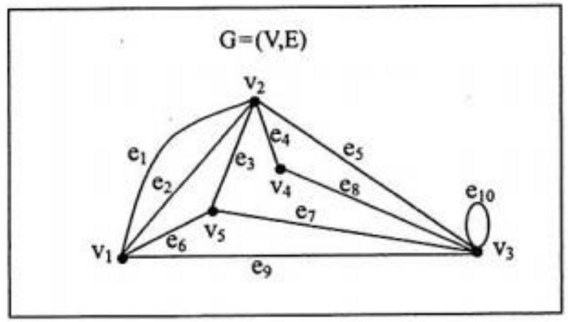
Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e E = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

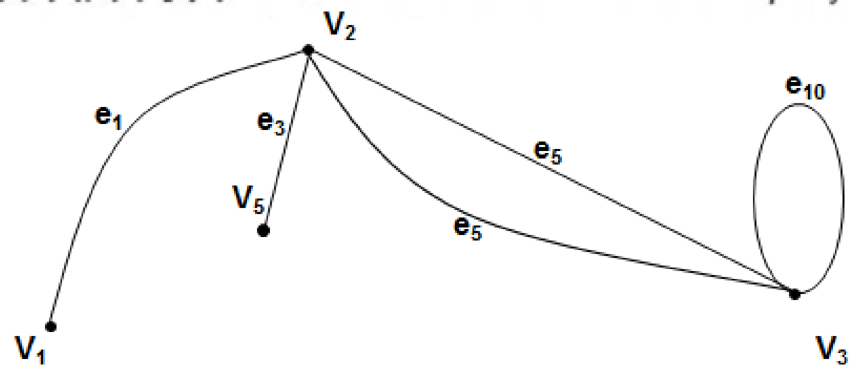
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

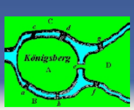


Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W1 = v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5$ é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5.



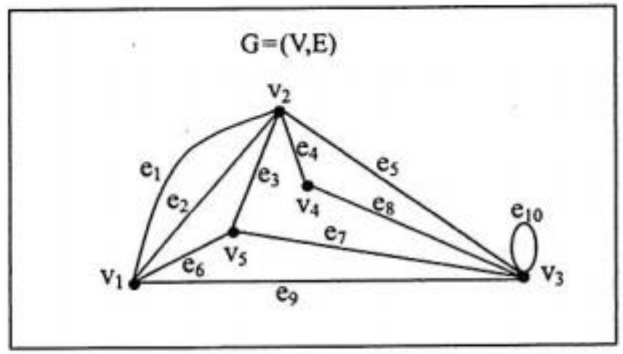
✓ Observação: A aresta $\mathbf{e_5}$ está sendo **repetida** no passeio $\mathbf{W_1}$



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

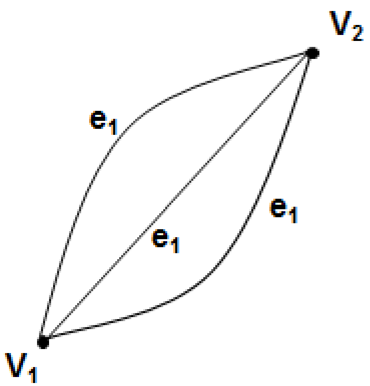
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

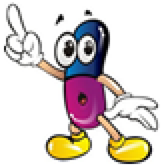


Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W2 = v_1e_1v_2e_1v_1e_1v_2$ é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2.

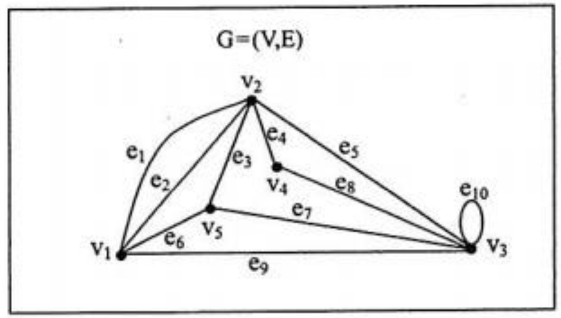


✓ Observação: A aresta $\mathbf{e_1}$ está sendo **repetida** no passeio $\mathbf{W_2}$



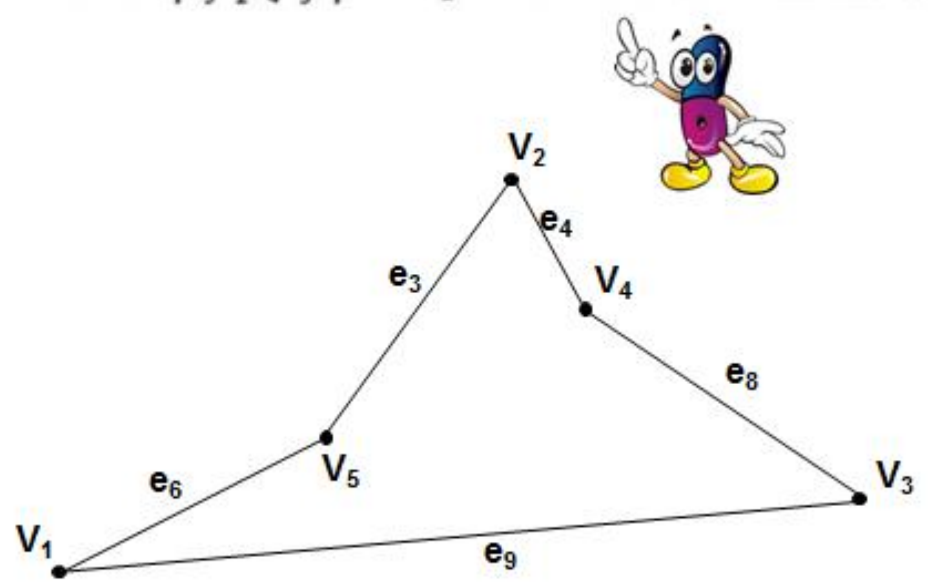
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W3 = v_1v_5v_2v_4v_3v_1$ é um passeio fechado de tamanho 5.



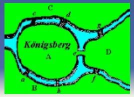
QualitSys

Trilha em um Grafo

- ✓ Seja **G** = (**V**,**E**) um grafo e considere o **passeio**:

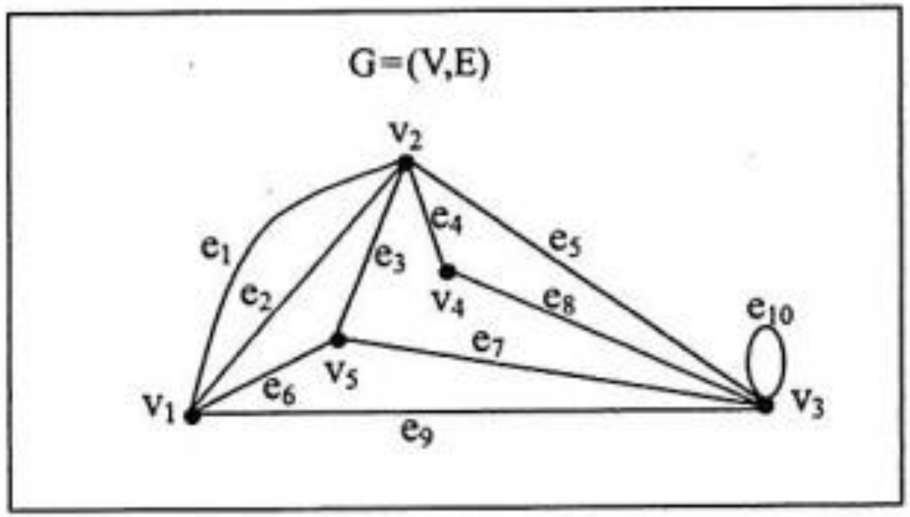
$$w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$$

- ✓ Se as arestas $e_1,e_2\ldots,e_k$ de **W** forem **distintas**, então **W** é chamado **Trilha**;
- ✓ Uma **trilha** que começa e termina no mesmo vértice **v** é chamada **Trilha Fechada** ou **CIRCUITO**;
- ✓ Caso contrário é uma **Trilha aberta**;
- ✓ Pode-se dizer, portanto, que uma **Trilha** é um **passeio** no qual **nenhuma aresta é repetida**.



Exemplo

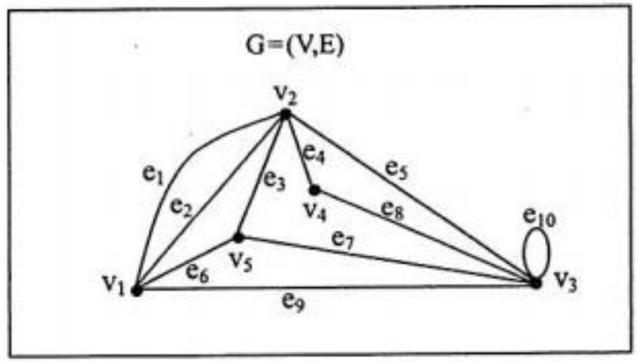
Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



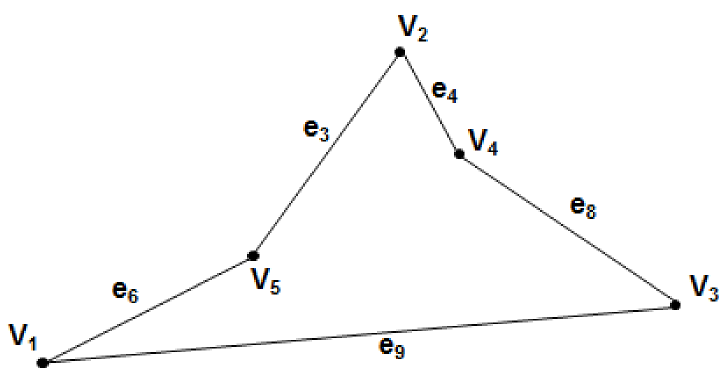
Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

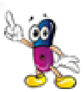


Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

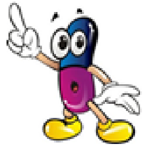


$W_3 = V_1e_6V_5e_3V_2e_4V_4e_8V_3e_9V_1$

W3 é uma trilha fechada.

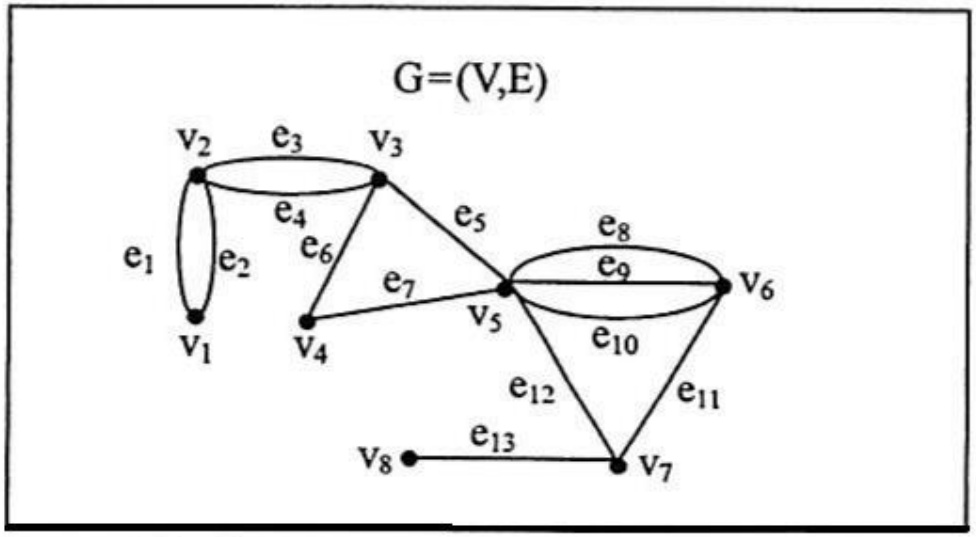


✓ Observação: **W_3** é uma **trilha fechada**, pois inicia e termina no mesmo vértice e todas as **arestas** são **distintas**!

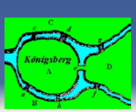


Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



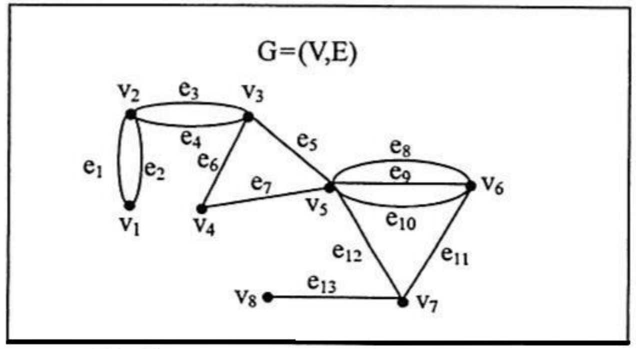
Grafo simples G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ e $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$.



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

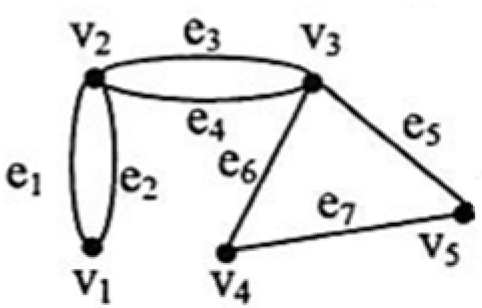
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

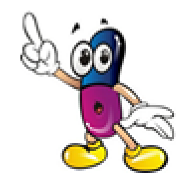


Grafo simples G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ e E=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$.

W2 = $v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_5e_7v_4e_6v_3e_4v_2e_2v_1$ é uma trilha fechada de tamanho 7 de v_1 a v_1.

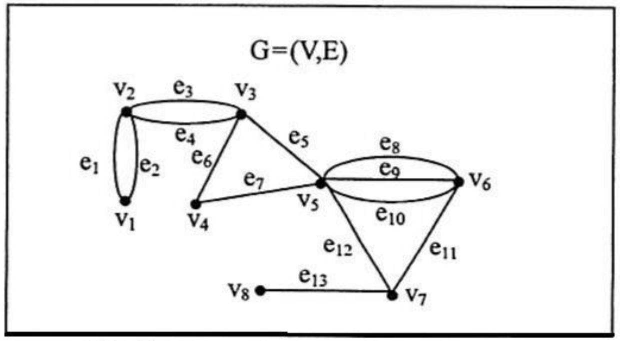


- ✓ Todas as **arestas** de **W_2** são **distintas**!
- ✓ **W_2** inicia em **V_1** e termina em **V_1**;
- ✓ Portanto, **W_2** é uma **trilha fechada** ou um **circuito**;
- ✓ **W_2** tem 7 arestas, portanto o **tamanho** de **W_2** é **7**.



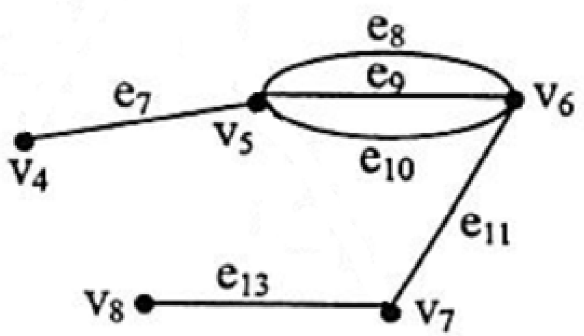
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

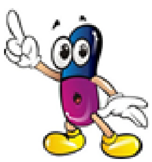


Grafo simples G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ e E=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$.

W3 = $v_4e_7v_5e_8v_6e_9v_5e_{10}v_6e_{11}v_7e_{13}v_8$ é uma trilha aberta de tamanho 6 de v_4 a v_8.



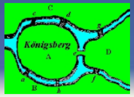
- ✓ Todas as **arestas** de **W_3** são **distintas**!
- ✓ **W_3** inicia em **V_4** e termina em **V_8**;
- ✓ Portanto, **W_2** é uma **trilha aberta**;
- ✓ **W_3** tem 6 arestas, portanto o **tamanho** de **W_3** é **6**.



Passeio e Trilha

- ✓ Vértice inicial **u**
- ✓ Vértice final **v**

Vértice inicial u Vértice final v	u ≠ v	u = v
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	**PASSEIO ABERTO**	**PASSEIO FECHADO**
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	**TRILHA ABERTA**	**TRILHA FECHADA** ou **CIRCUITO**



Caminho

- ✓ Seja **G** = (**V**,**E**) um grafo e considere a **trilha**:

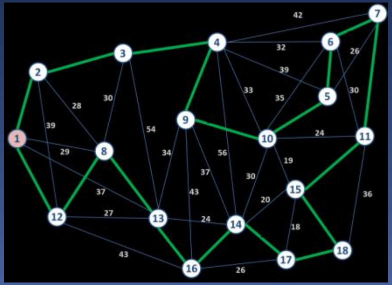
$$w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k\text{-}1} e_k v_k$$

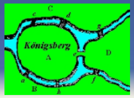
- ✓ Se os vértices $\mathbf{V_0, V_1 \ldots, V_k}$ de **W** forem **distintas**, então **W** é chamado **Caminho**;

- ✓ Em um **caminho,** entretanto, é permitido que seus primeiro e últimos vértices possam ser os mesmos;

- ✓ Um caminho que começa e termina no mesmo vértice **v** é chamada **Caminho Fechado** ou **CICLO**;

- ✓ Todo **caminho** é uma **trilha**, mas nem sempre uma **trilha** é um **caminho**.

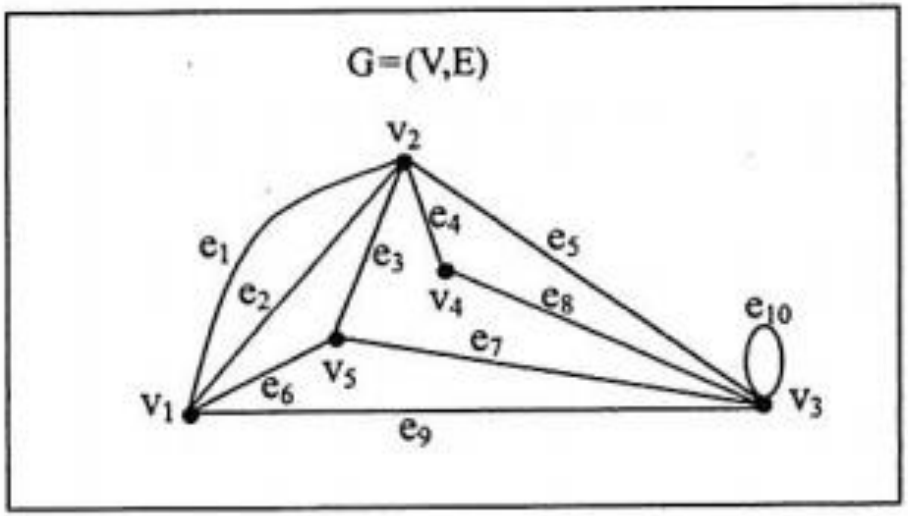




QualitSys

Exemplo

Considere o grafo $G = (V,E)$ mostrado na Figura

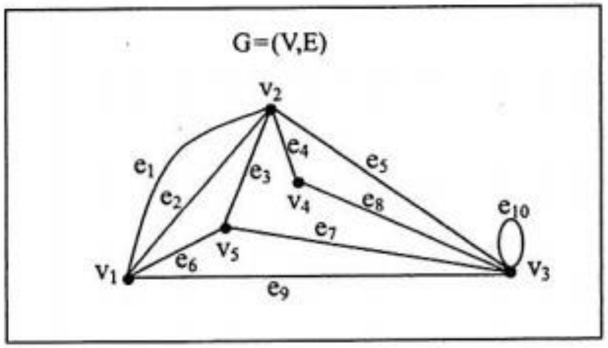


Grafo $G = (V,E)$, em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

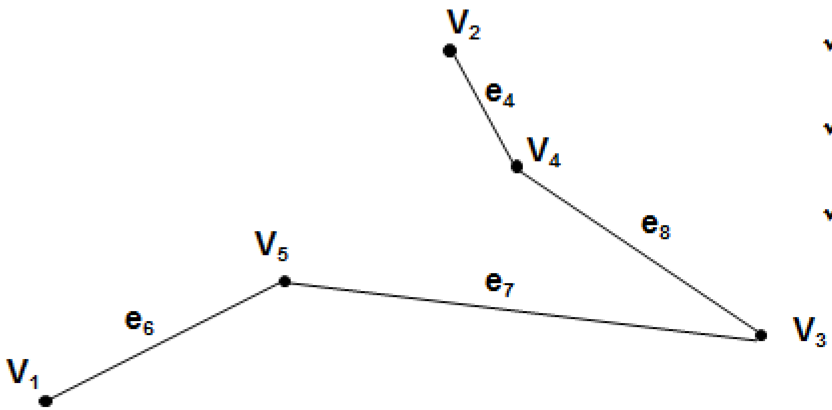
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W4 = v_2v_4v_3v_5v_1$ é um caminho de comprimento 4.

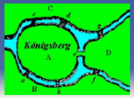


- ✓ Em $\mathbf{W_4}$ não há repetição de vértices;
- ✓ Vértice inicial é diferente do vértice final;
- ✓ Portanto, $\mathbf{W_4}$ é um **caminho** de tamanho 4.

Passeio, Trilha e Caminho

- ✓ Vértice inicial u
- ✓ Vértice final v

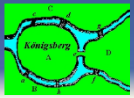
Vértice inicial u Vértice final v	u ≠ v	u = v
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	**PASSEIO ABERTO**	**PASSEIO FECHADO**
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	**TRILHA ABERTA**	**TRILHA FECHADA** ou **CIRCUITO**
CAMINHO Nenhum vértice pode aparecer mais de uma vez, com a possível exceção de que u e v podem ser o mesmo vértice	**CAMINHO ABERTO**	**CAMINHO FECHADO OU CICLO**



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Passeio, Trilha e Caminho

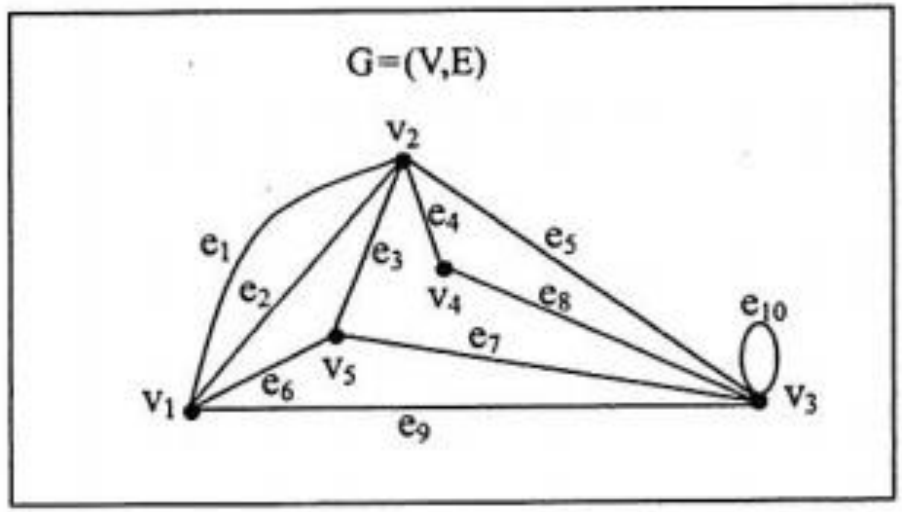
- ✓ Uma trilha é um passeio no qual nenhuma **aresta** é repetida;
- ✓ Um caminho é uma trilha no qual nenhum vértice é repetido;
- ✓ Nem sempre toda trilha é um caminho;
- ✓ Todo caminho é uma trilha;
- ✓ Todo caminho é um passeio;
- ✓ Toda trilha é um passeio;
- ✓ Nem sempre todo passeio é uma trilha;
- ✓ Nem sempre todo passeio é um caminho.



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Exemplo

Considere o grafo $G = (V,E)$ mostrado na Figura

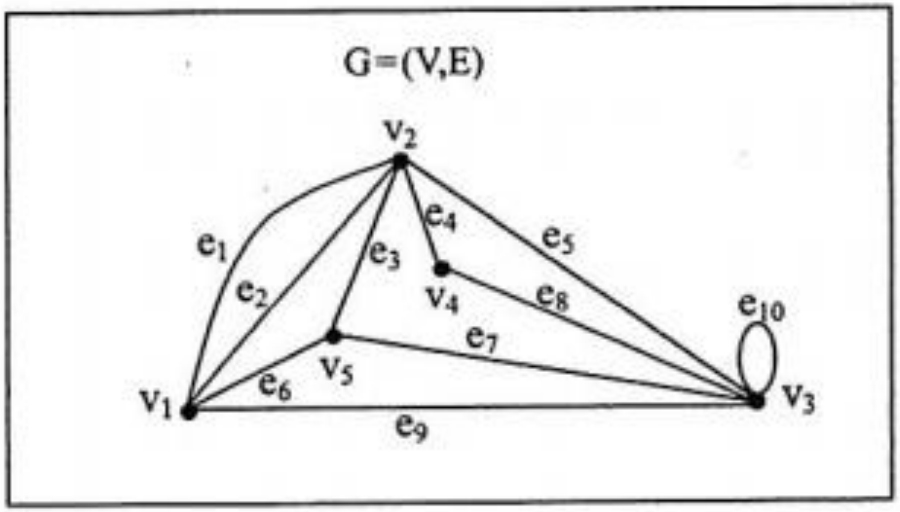


Grafo $G = (V,E)$, em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

- $W1 = v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5$ é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5.

Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

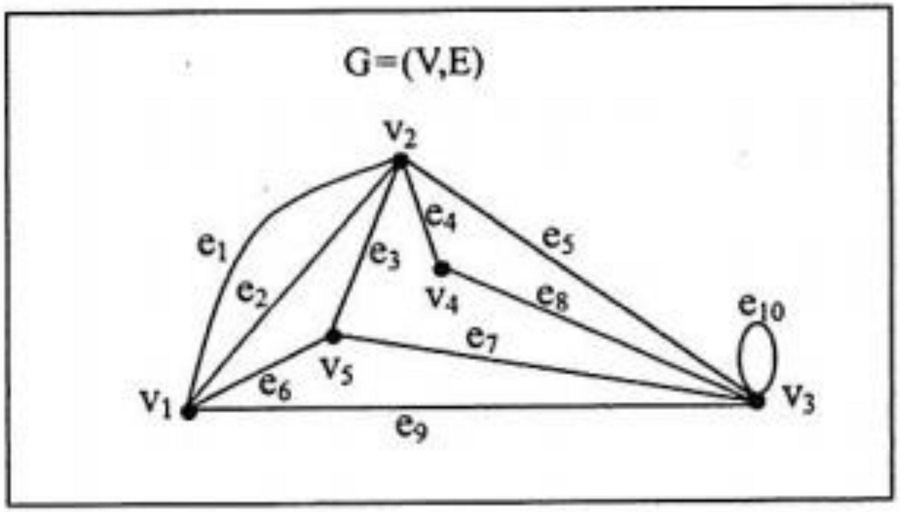


Grafo $G = (V,E)$, em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

- $W2 = v_1e_1v_2e_1v_1e_1v_2$ é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2.

Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

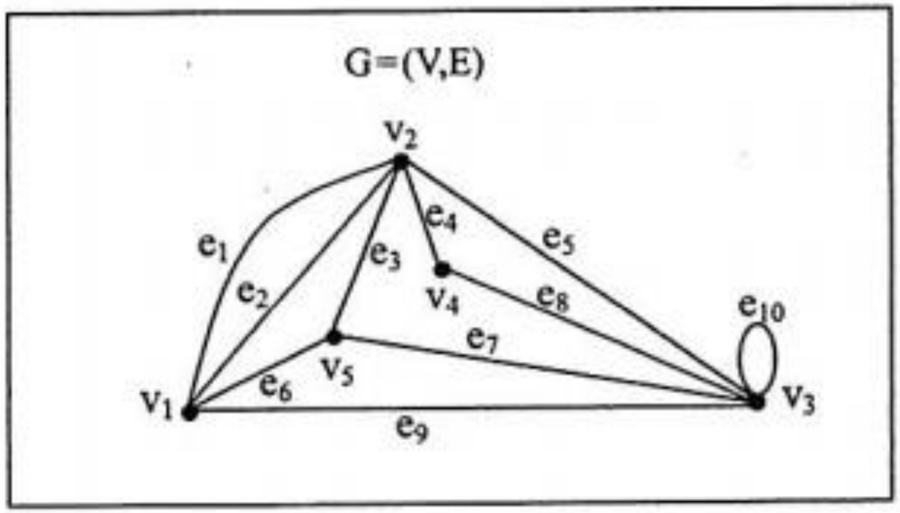


Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

- W3 = $v_1v_5v_2v_4v_3v_1$ é um passeio fechado de tamanho 5.

Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura

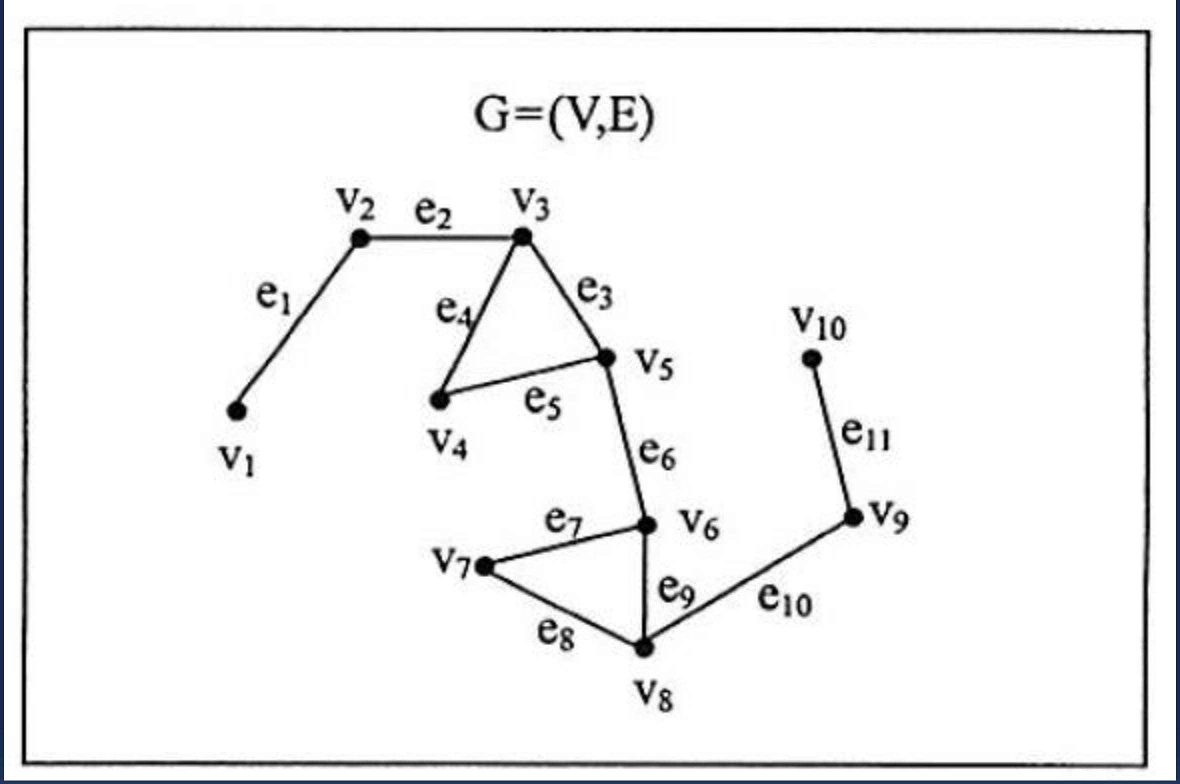


Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

- W4 = $v_2v_4v_3v_5v_1$ é um caminho de comprimento 4.

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

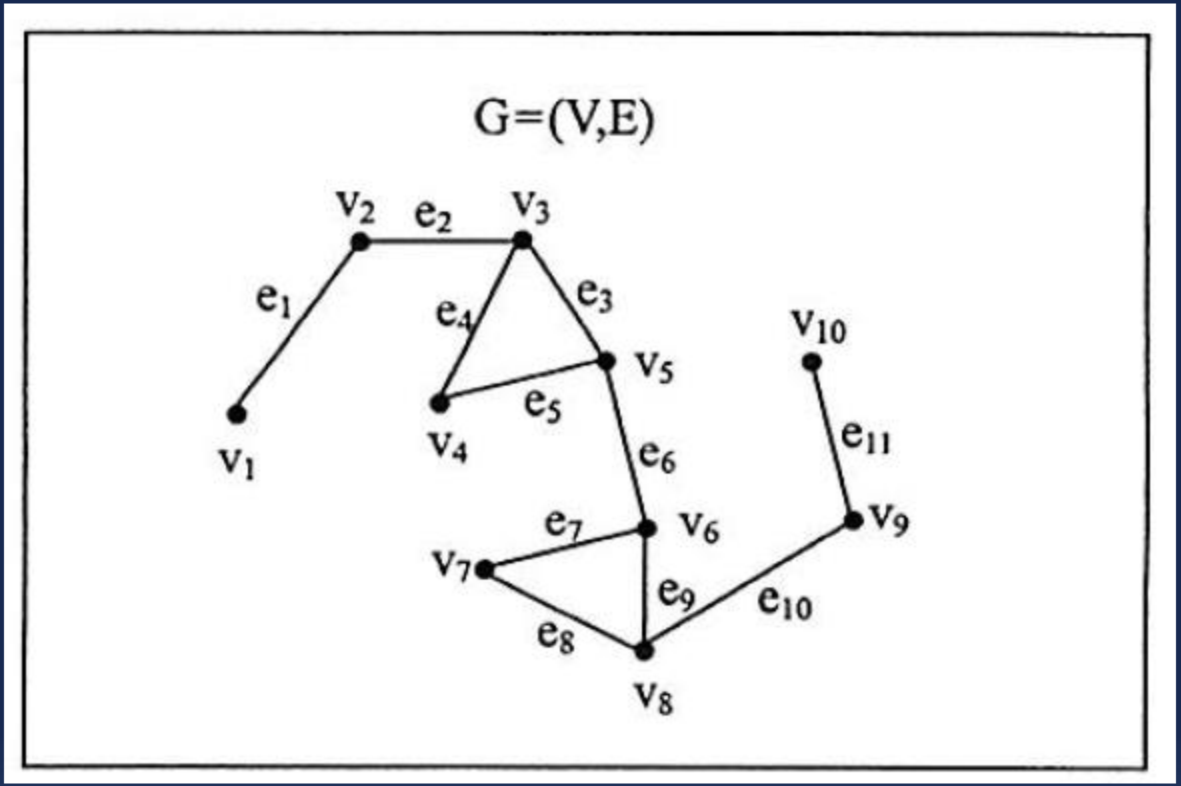


- ✓ $W_1 = V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_5e_5V_4e_4V_3e_3V_5e_6V_6e_7V_7e_8V_8e_{10}V_9V_6e_7V_7e_8V_8e_{10}V_9e_{11}V_{10}$

- ✓ É um passeio aberto de tamanho 14 ?

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

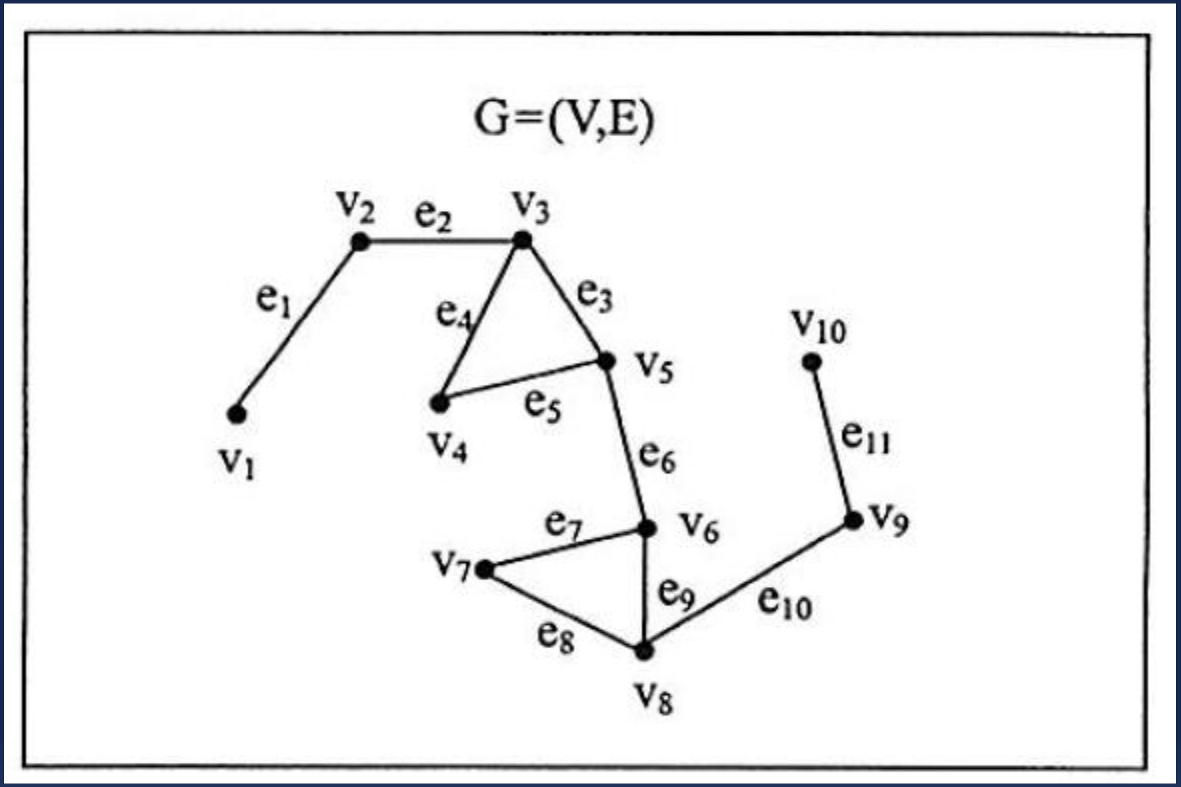


- ✓ $W_1 = V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_5e_5V_4e_4V_3e_3V_5e_6V_6e_7V_7e_8V_8e_{10}V_9e_{11}V_{10}$

- ✓ W_1 é passeio fechado ? W_1 é trilha ? W_1 é caminho?

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

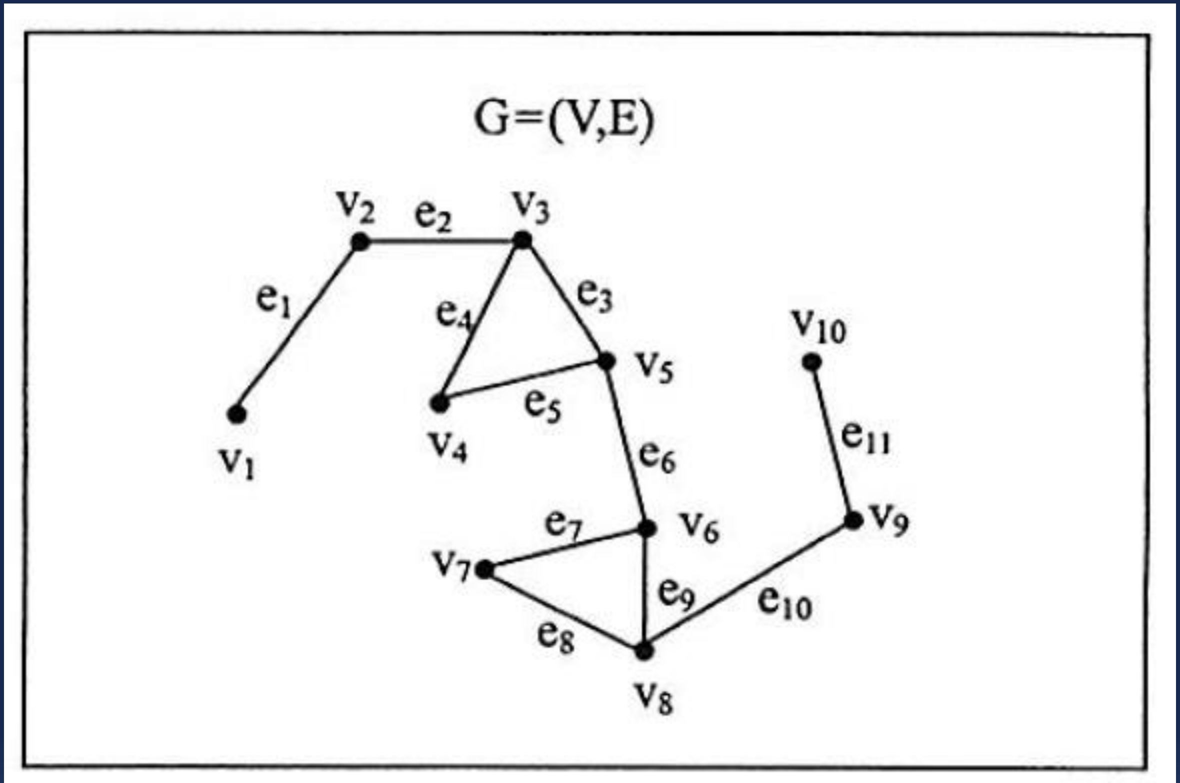


- ✓ $W_2 = V_3e_4V_4e_4V_3e_4V_4e_5V_5e_3V_3.$

- ✓ W_2 é passeio fechado ? W_2 é ciclo? W_2 é caminho fechado?

Exercício

- Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

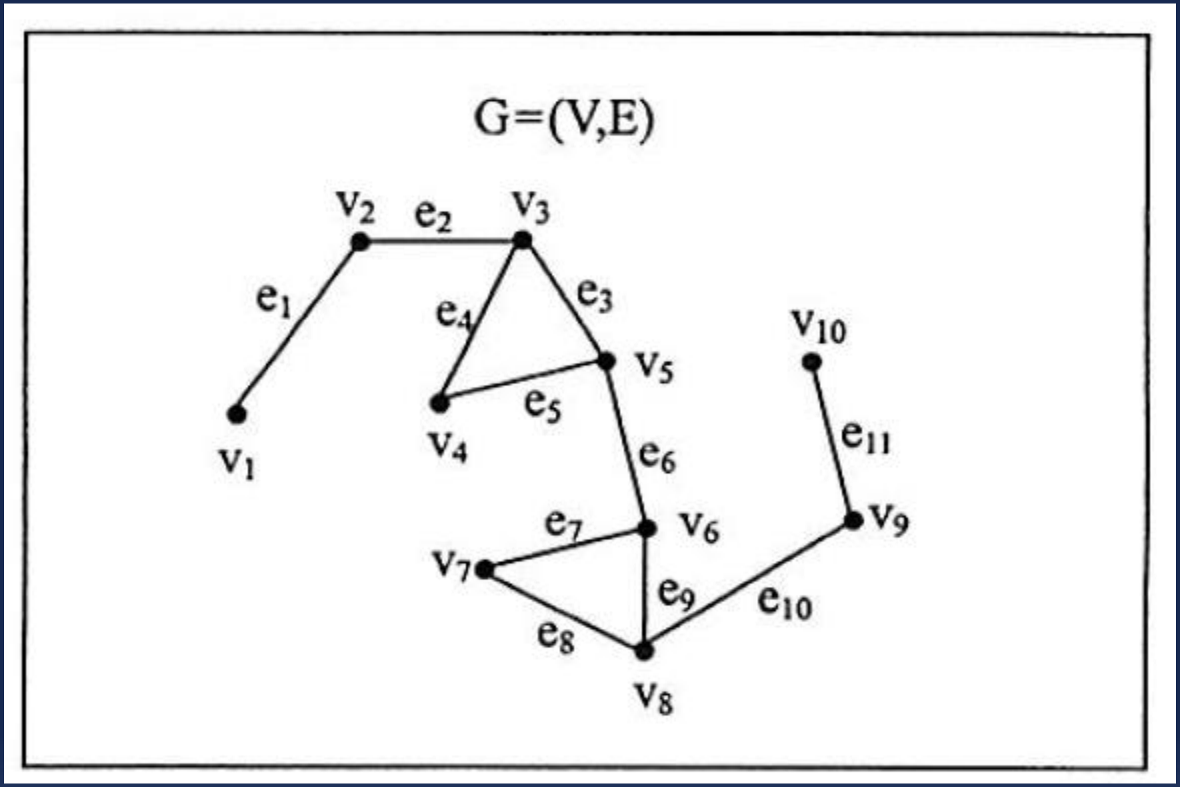


- $W_3 = V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_5e_5V_4e_4V_3$
- W_3 é passeio aberto? W_3 é trilha aberta? W_3 é circuito? W_3 é ciclo ?

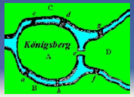
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício

✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

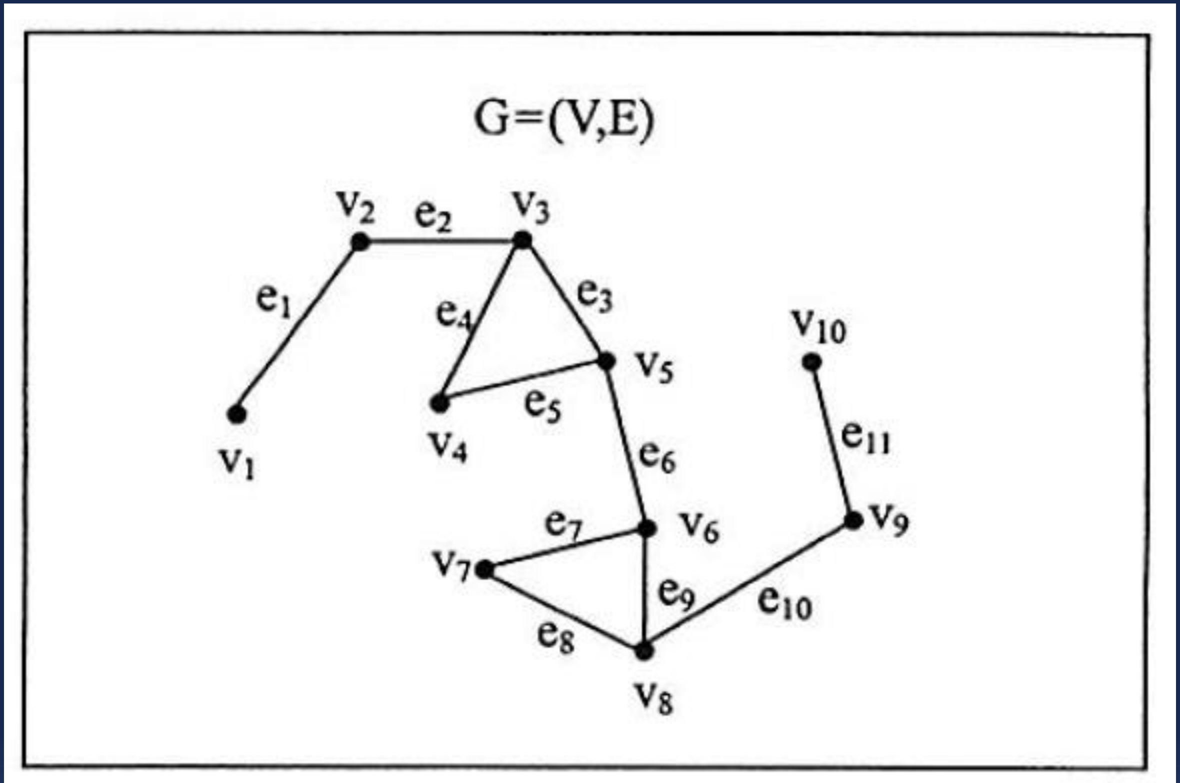


✓ No grafo existe algum ciclo de comprimento 4 ?



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

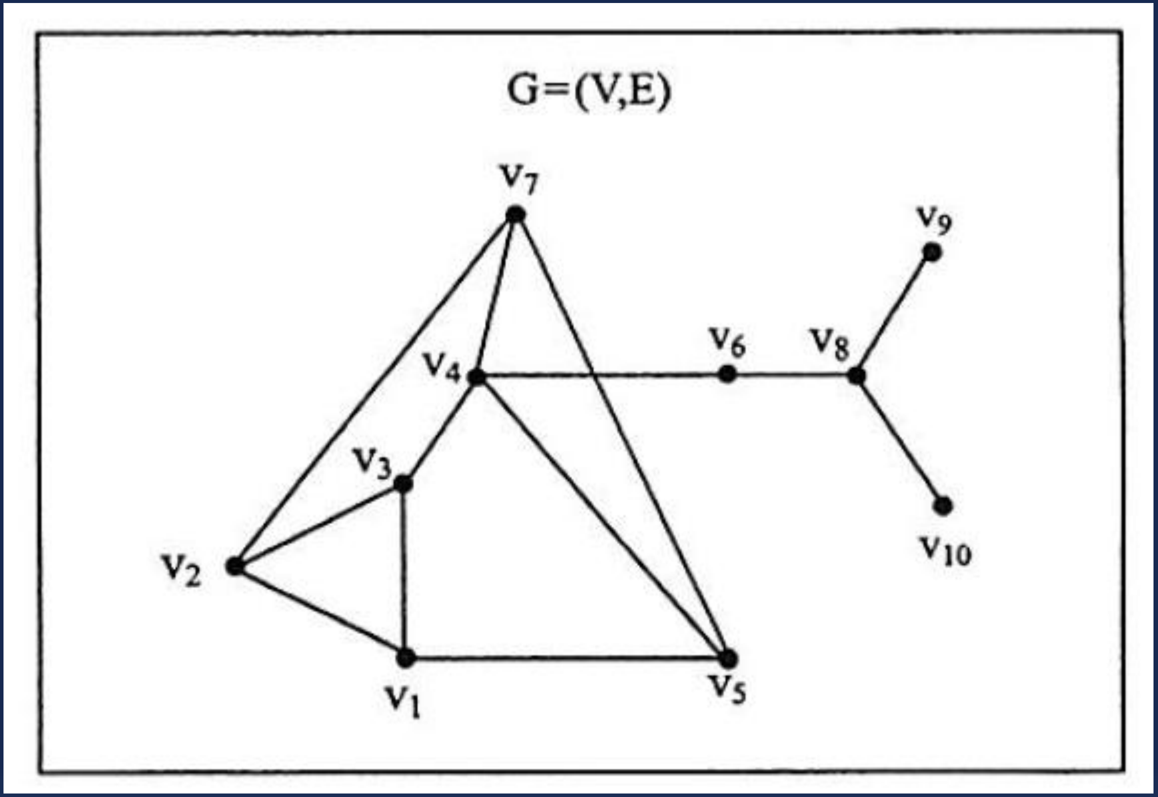


- ✓ No grafo existe algum **ciclo** de comprimento 3 ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Exercício

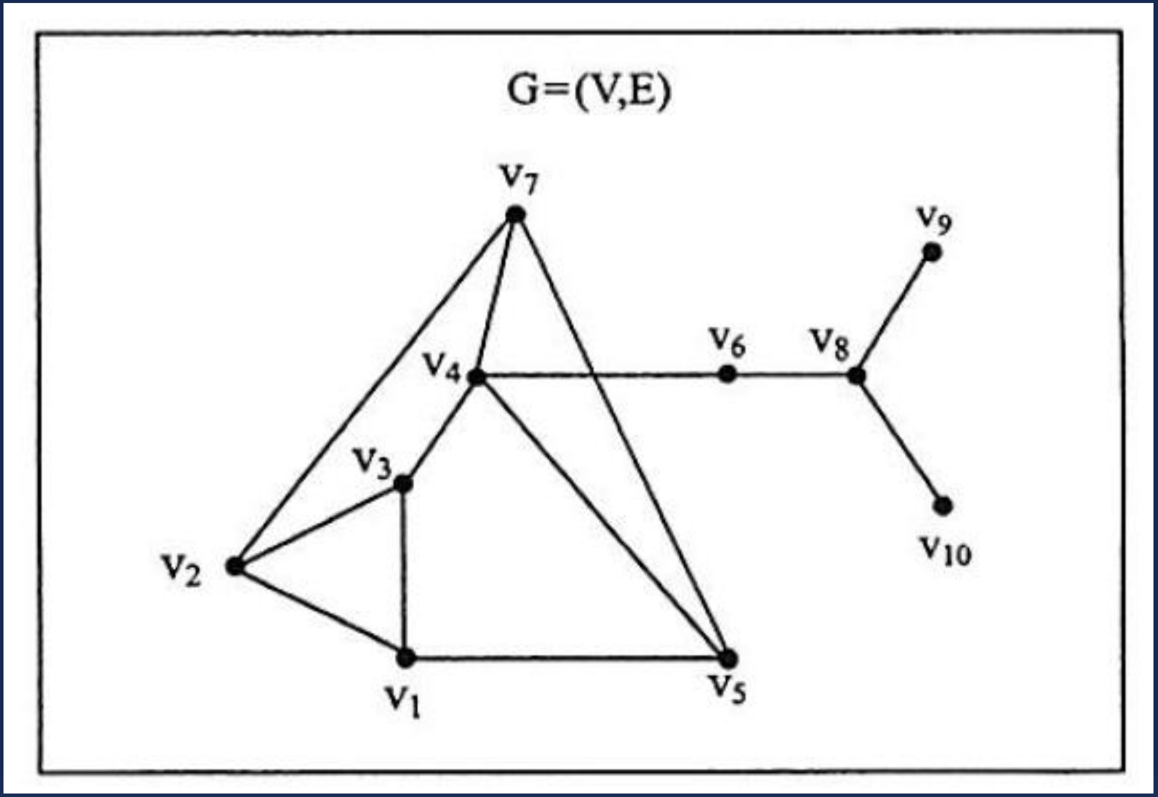
- Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:



- Defina um passeio de tamanho 5

Exercício

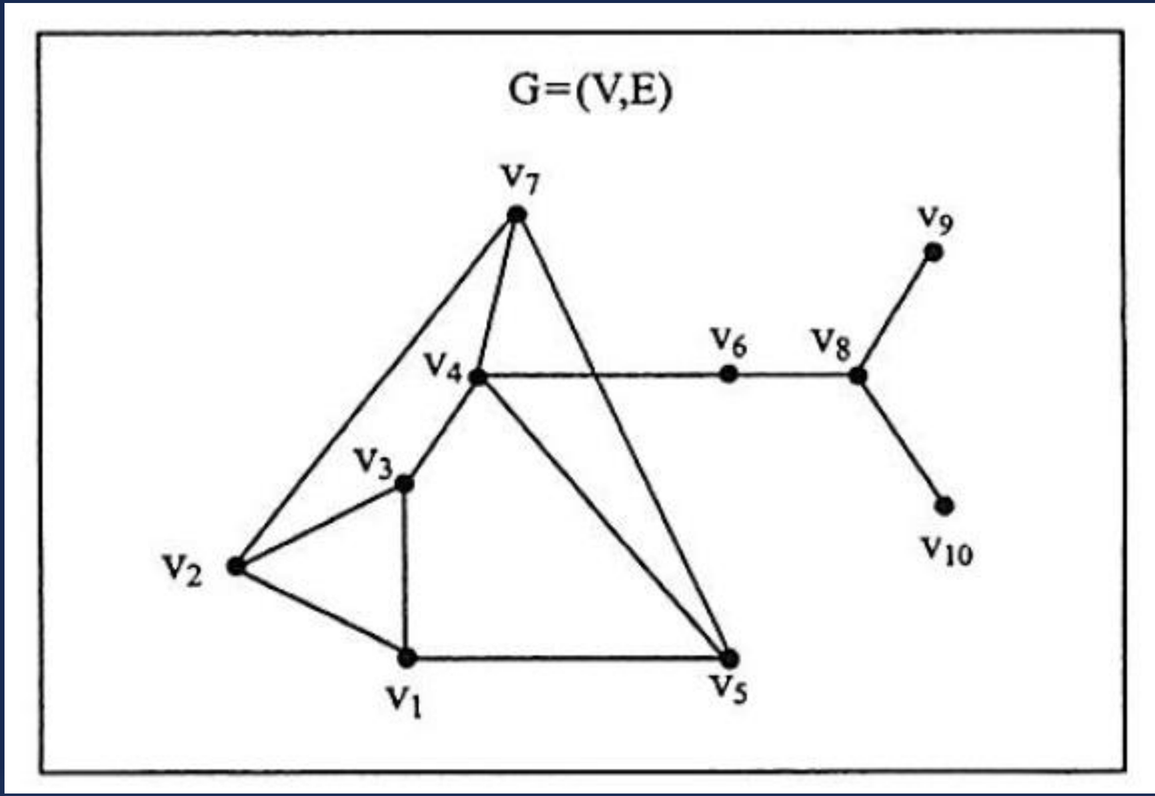
- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:



- ✓ Defina uma trilha de tamanho 6

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:

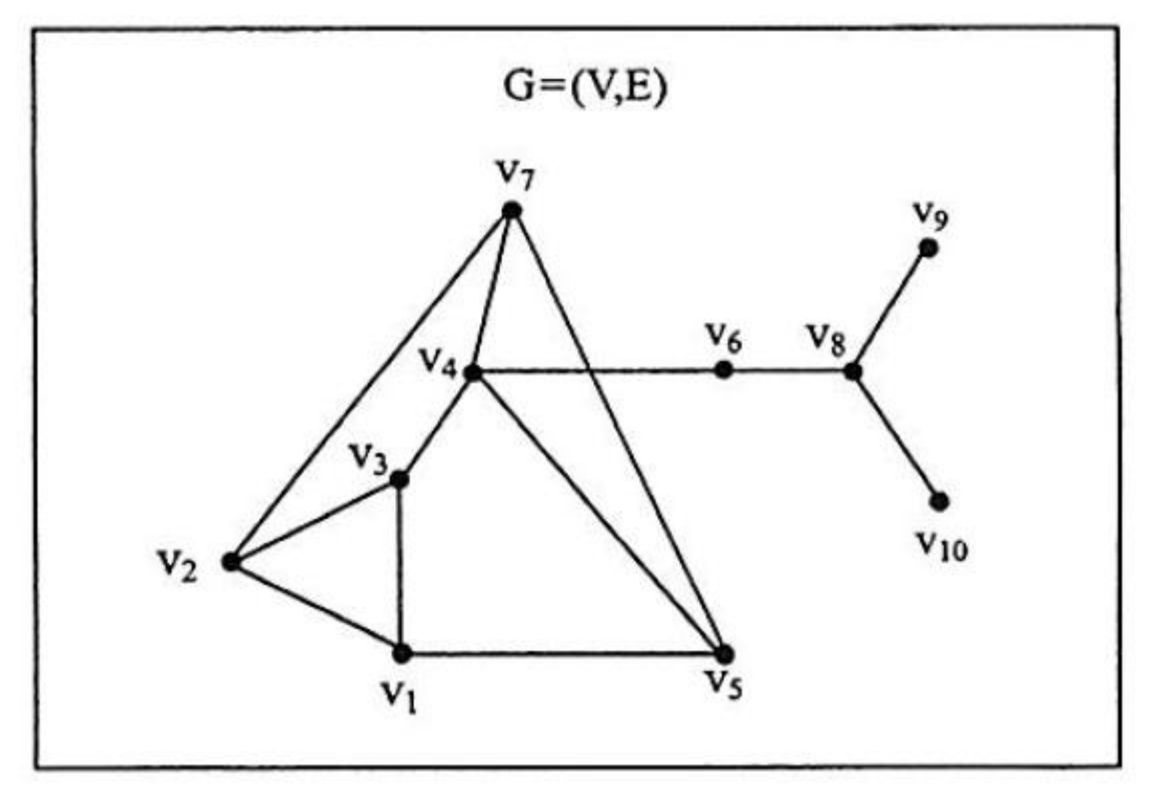


- ✓ Existe algum ciclo no grafo com tamanho 5 ?
- ✓ Se sim, defina-o.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples G = (V,E), mostrado abaixo:



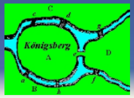
- ✓ Existe algum circuito no grafo com tamanho 6 ?
- ✓ Se sim, defina-o.

Teorema

- ✓ Dados dois vértices u e v de um grafo G, todo passeio u-v contém um caminho u-v, ou seja, dado qualquer passeio

$$W = u\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ .\ .\ .\ v_{k-1}\ e_k\ v$$

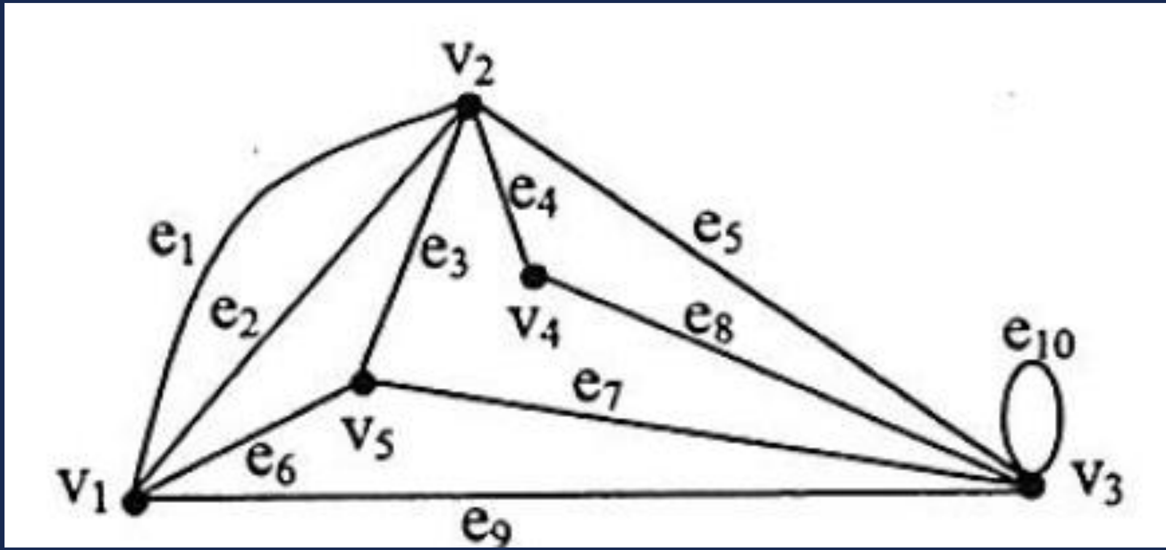
Após algumas eliminações de vértices e arestas, se necessário, pode-se encontrar uma subsequência P de W, a qual é um caminho u-v.



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Teorema

- ✓ Dado o grafo G=(V,E)

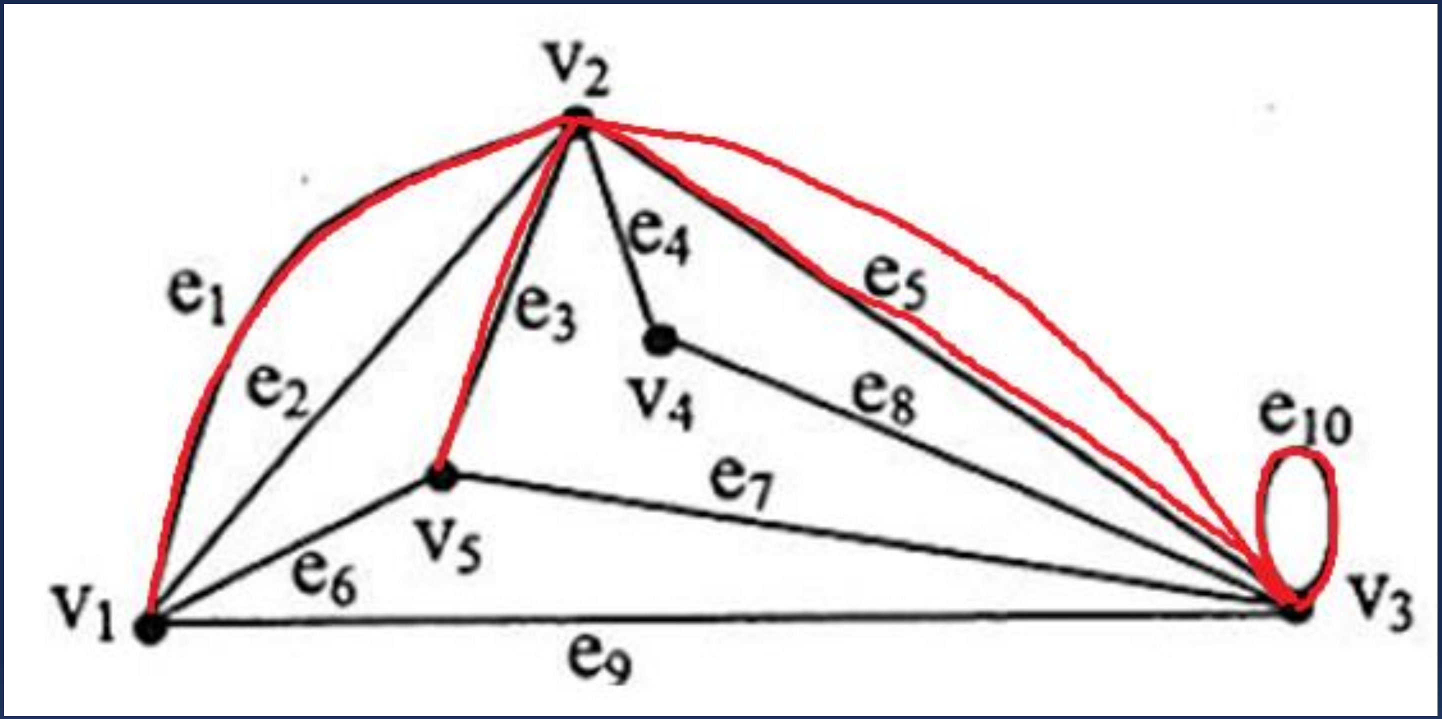


- ✓ Considere o passeio: $W= v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5$

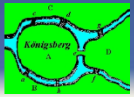
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Teorema

- ✓ Dado o grafo G=(V,E)

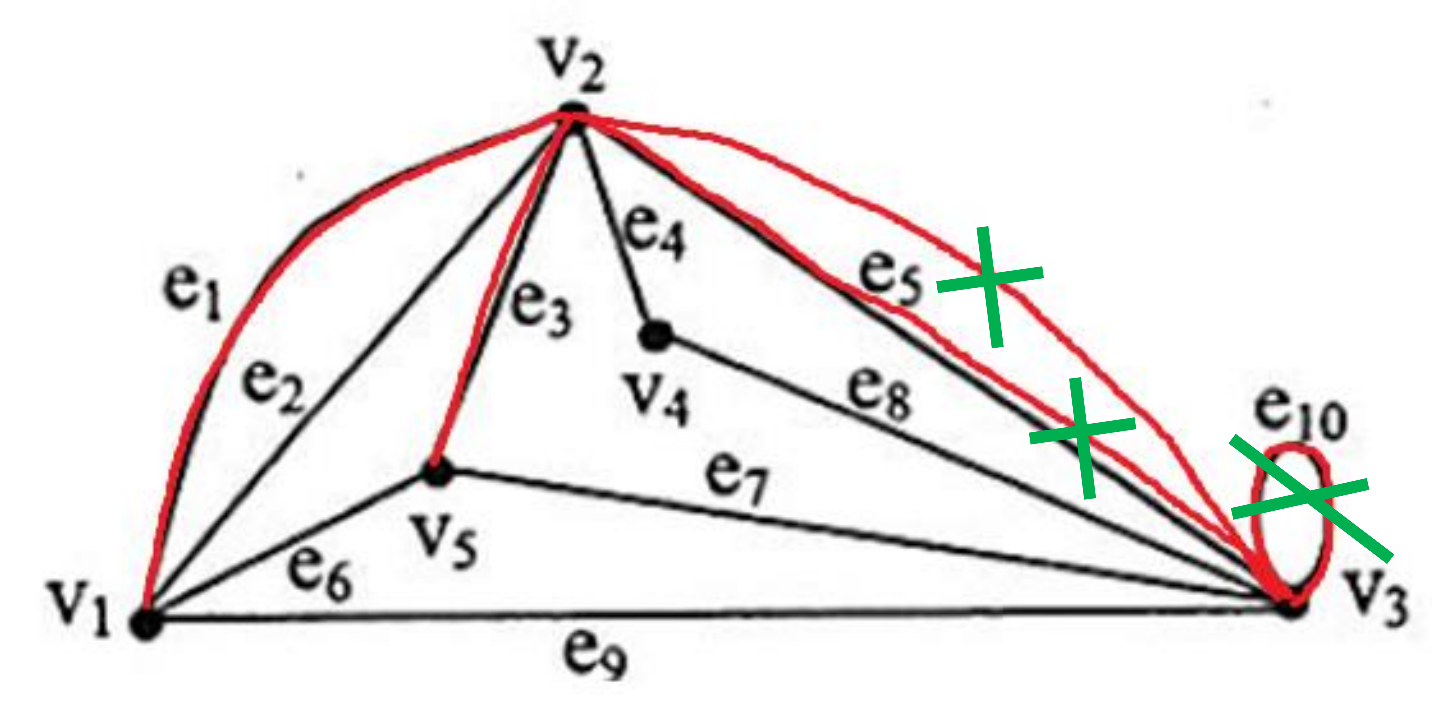


- ✓ Considere o passeio: $W= v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5$



Teorema

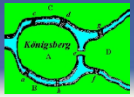
- ✓ Eliminando-se algumas arestas do passeio, pode-se chegar à subsequência: $P = v_1e_1v_2e_3v_5$



- ✓ $P = v_1e_1v_2e_3v_5$ é um caminho obtido a partir de W

Trilha Euleriana

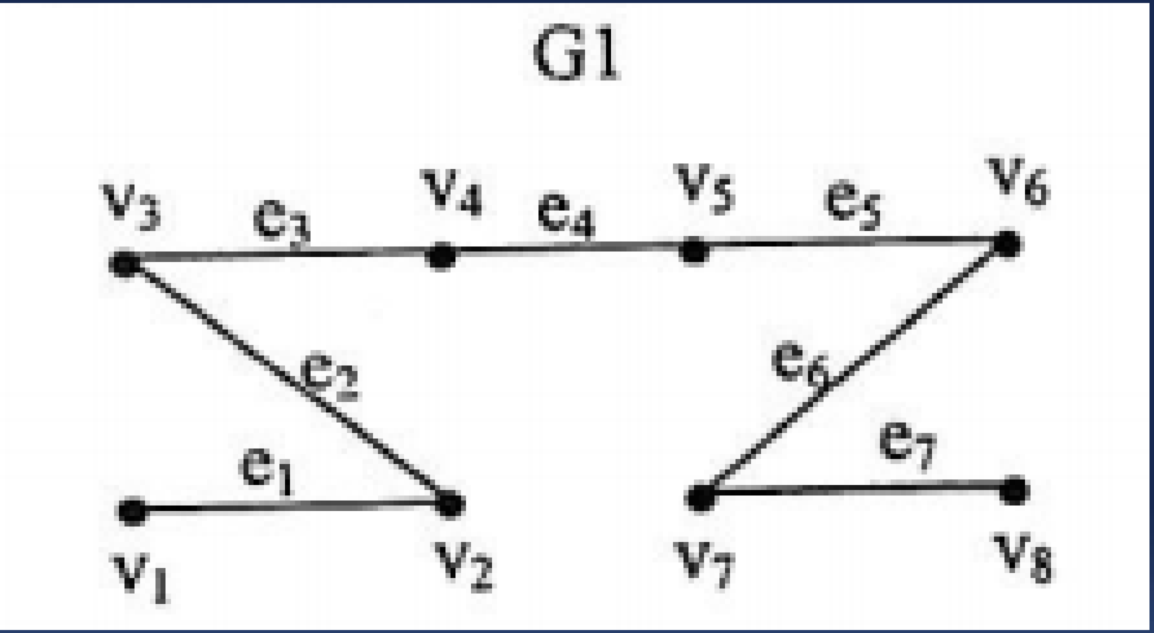
✓ Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir **toda aresta** de **G**.



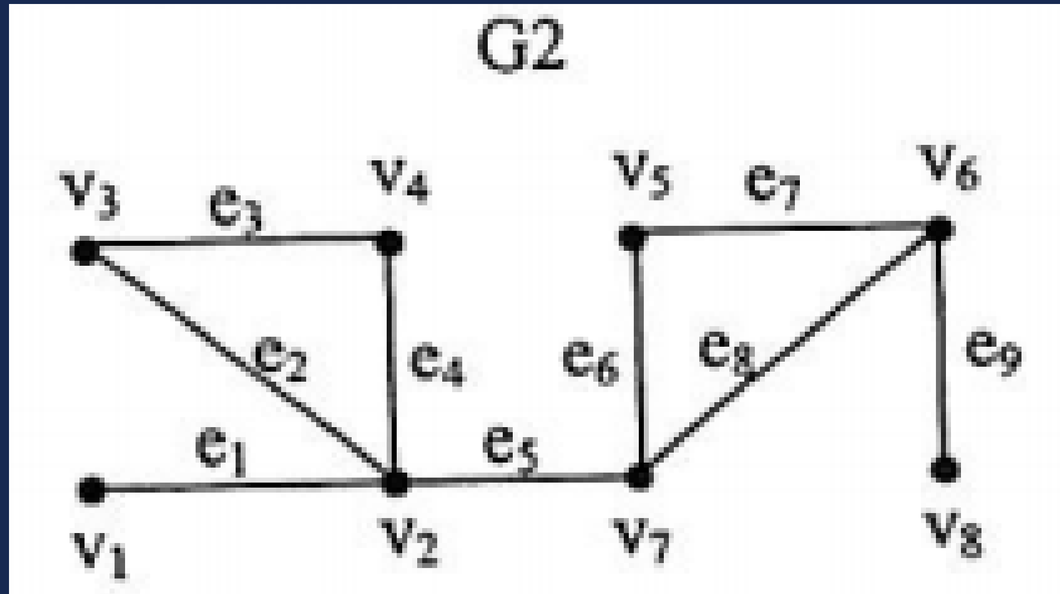
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

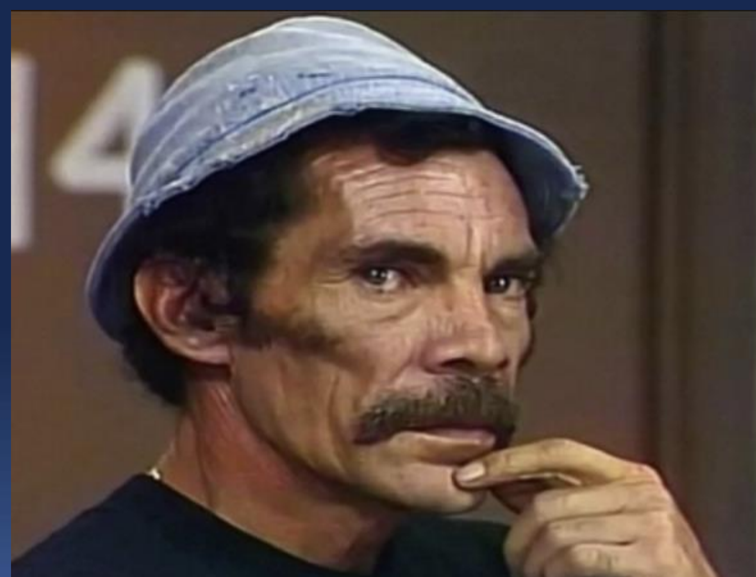
Trilha Euleriana

✓ Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir toda aresta de **G**.



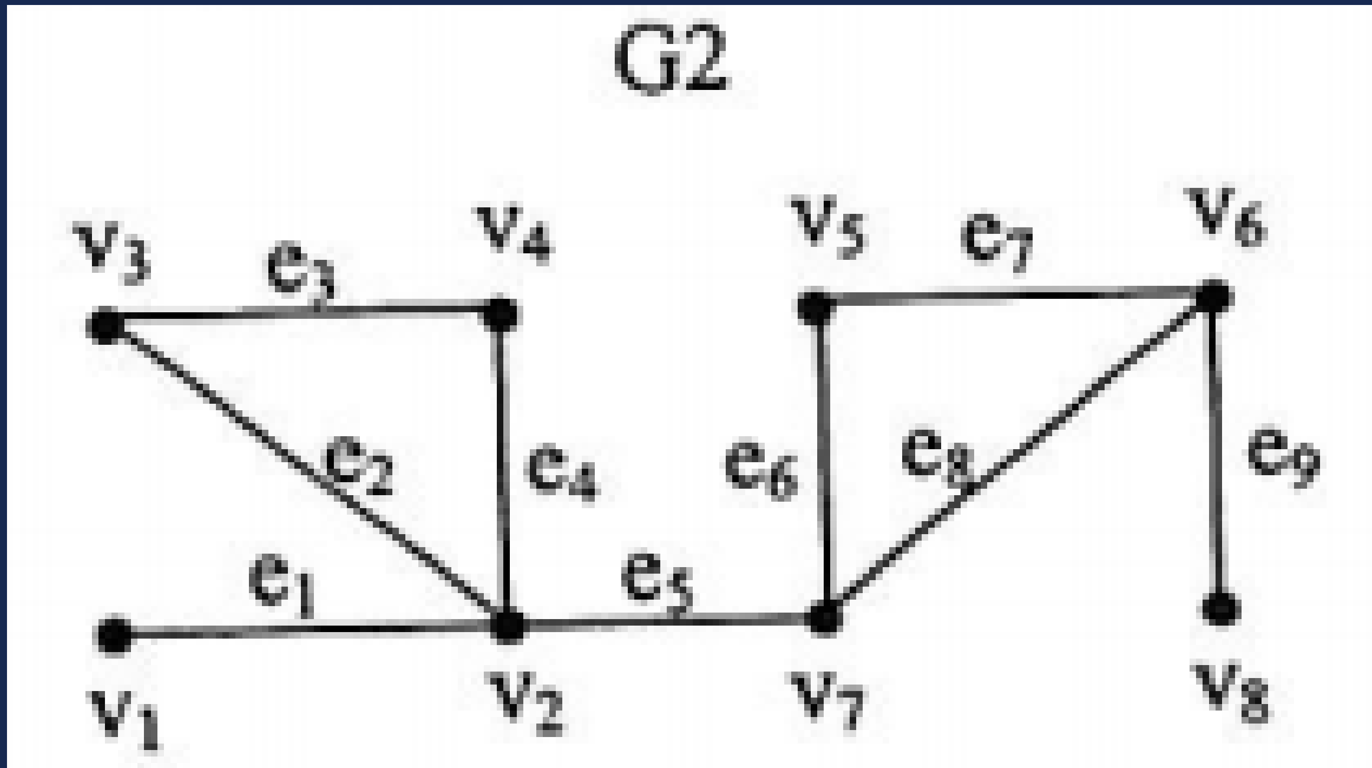
✓ Exemplo: A trilha $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$ do grafo **G1** é uma **trilha** de **Euler**.





O grafo **G2** acima tem uma trilha de Euler ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

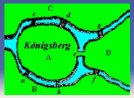


O grafo **G2** acima NÃO tem uma trilha de Euler !

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

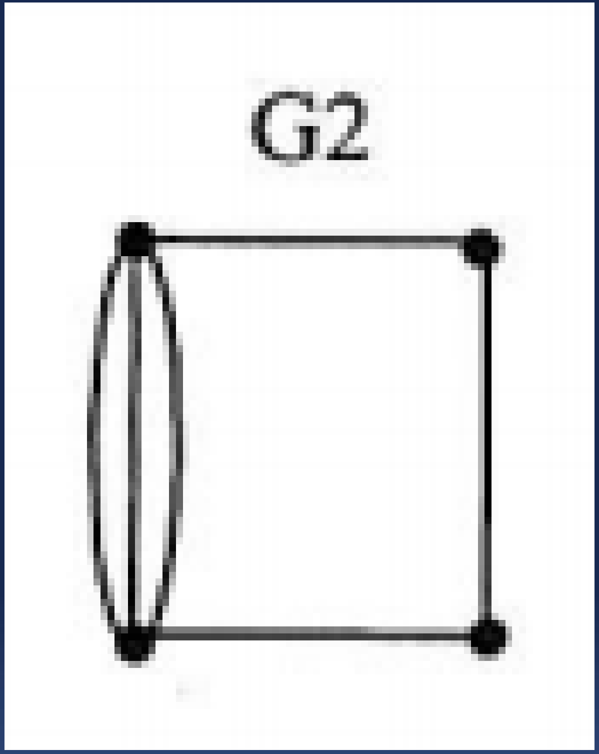
Grafos Eulerianos

✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver uma **trilha fechada** (**circuito**) que inclui **todas** as arestas de **G**;



Grafos Eulerianos

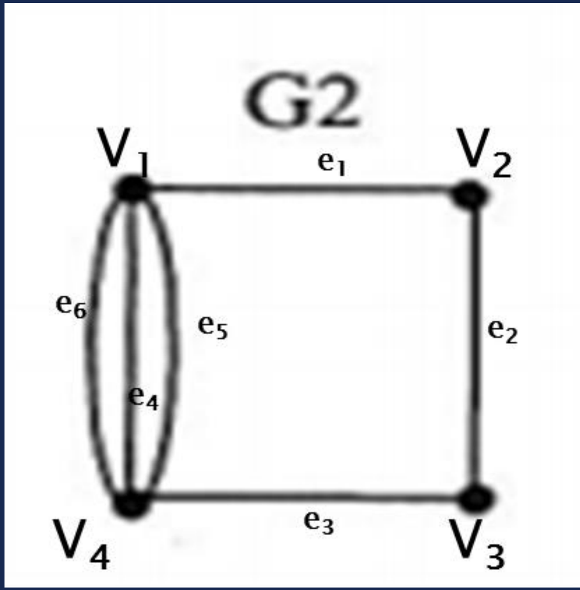
✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



✓O grafo **G2** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- O grafo **G2** é Euleriano?

- Precisa-se descobrir se há uma trilha de **Euler** fechada no grafo **G2**;

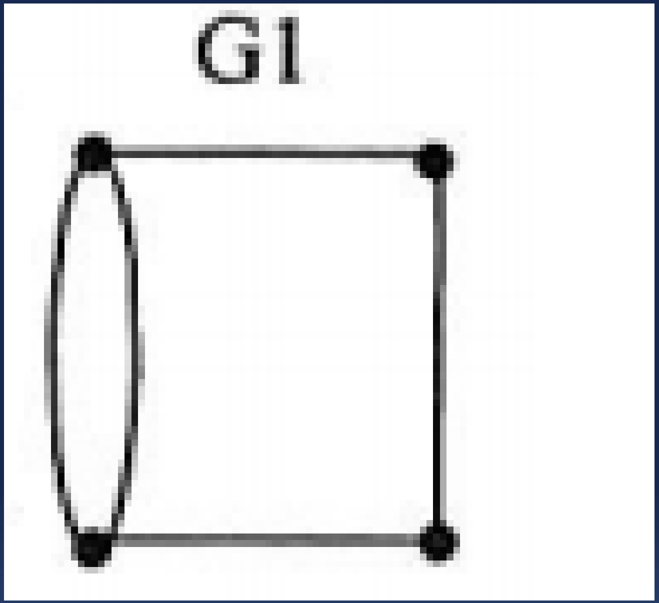
- A trilha $V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_4e_4V_1e_5V_4e_6V_1$ é uma **trilha Euleriana fechada**;

- Logo, **G2** é um **Grafo Euleriano.**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

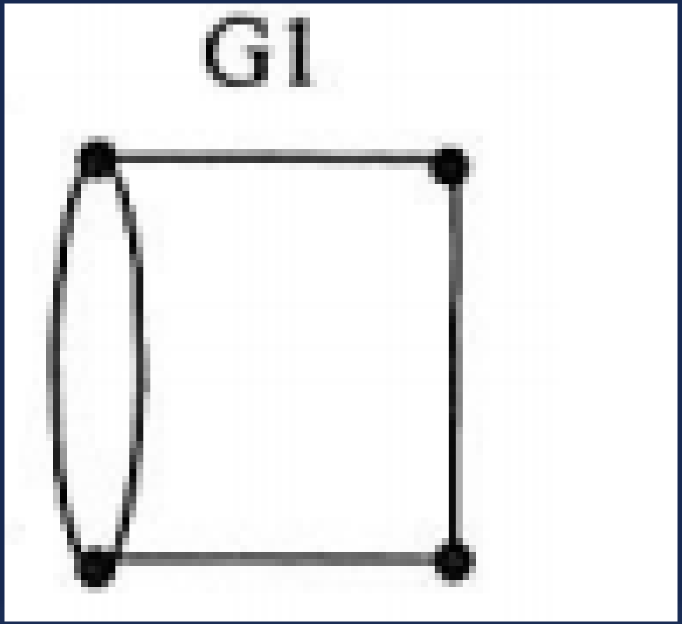


- ✓ O grafo **G1** é Euleriano?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos Eulerianos

✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

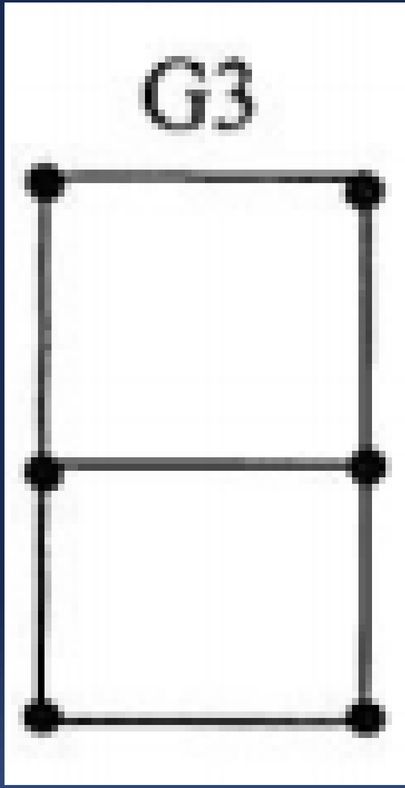


✓ O grafo **G1** é Euleriano?

✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G1** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Grafos Eulerianos

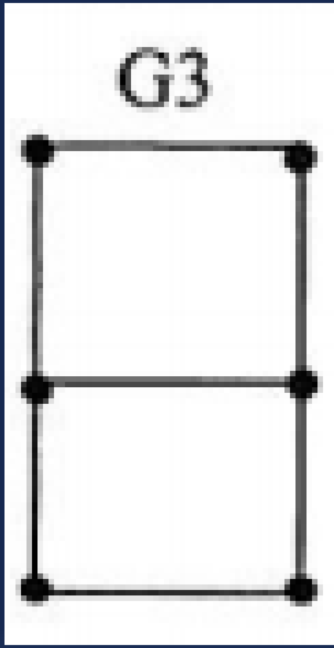
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



✓ O grafo G3 é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



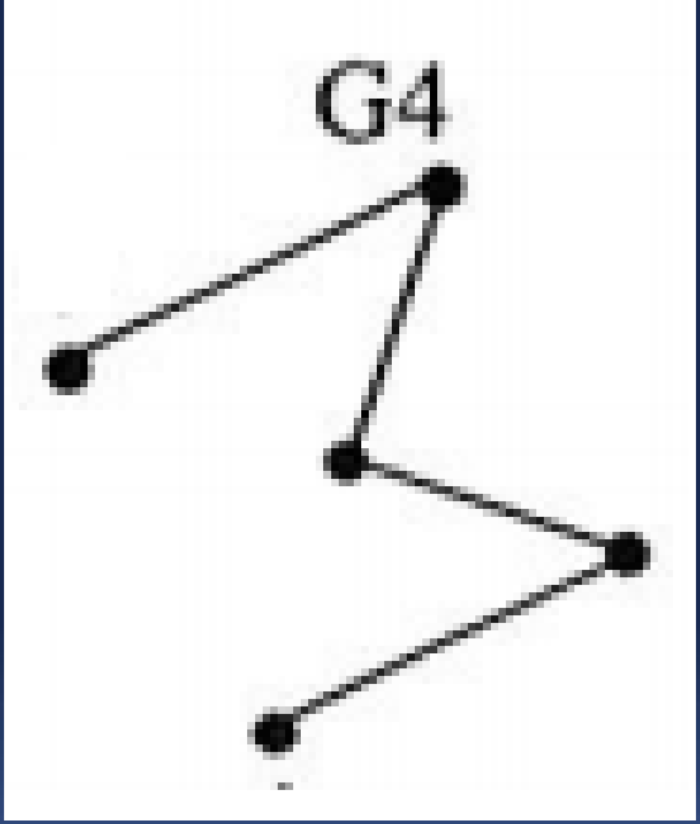
- ✓ O grafo **G3** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G3** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

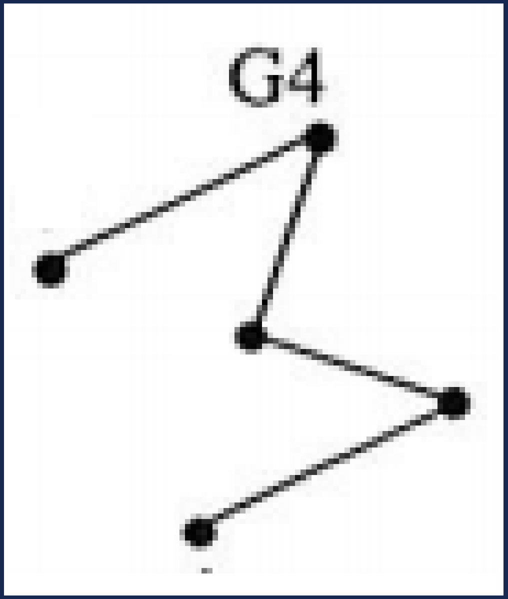


- ✓ **O grafo G4 é Euleriano?**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafos Eulerianos

✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

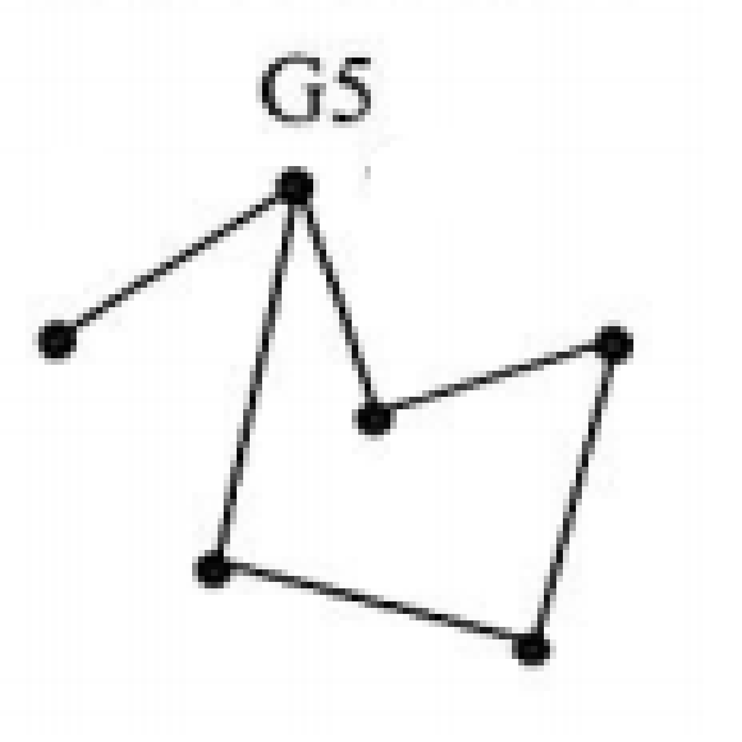


✓ **O grafo G4 é Euleriano?**

✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G4** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Grafos Eulerianos

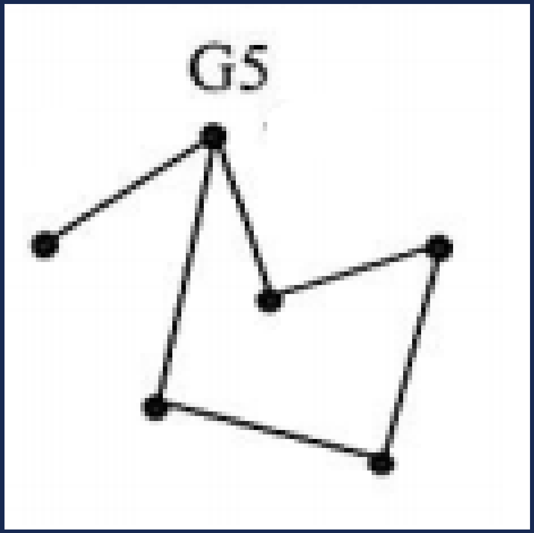
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G5** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

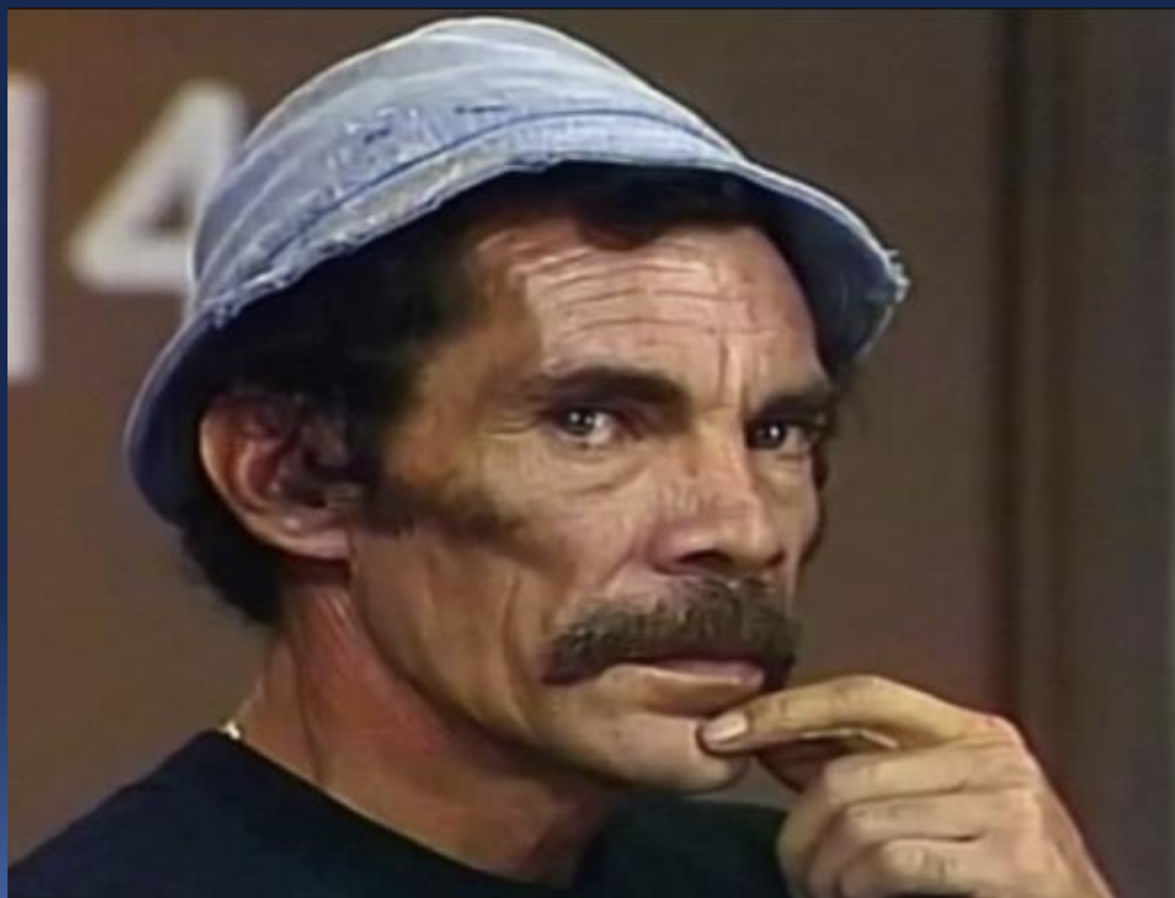
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G5** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G5** uma **trilha Euleriana Fechada.**

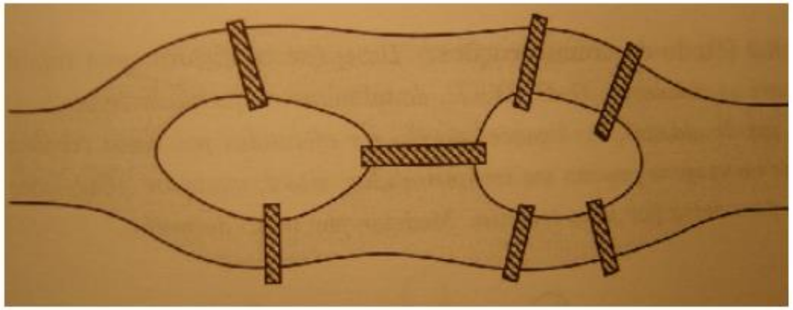
Como determinar se um grafo é Euleriano?



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

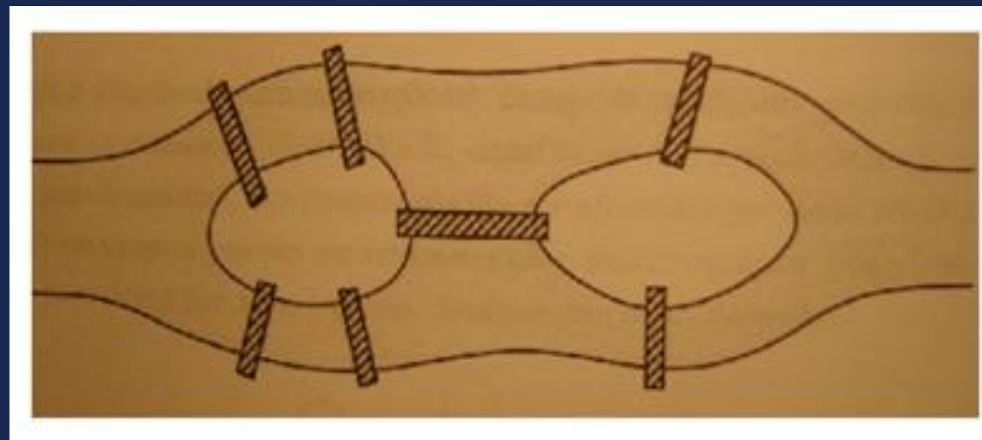
Grafo Euleriano?

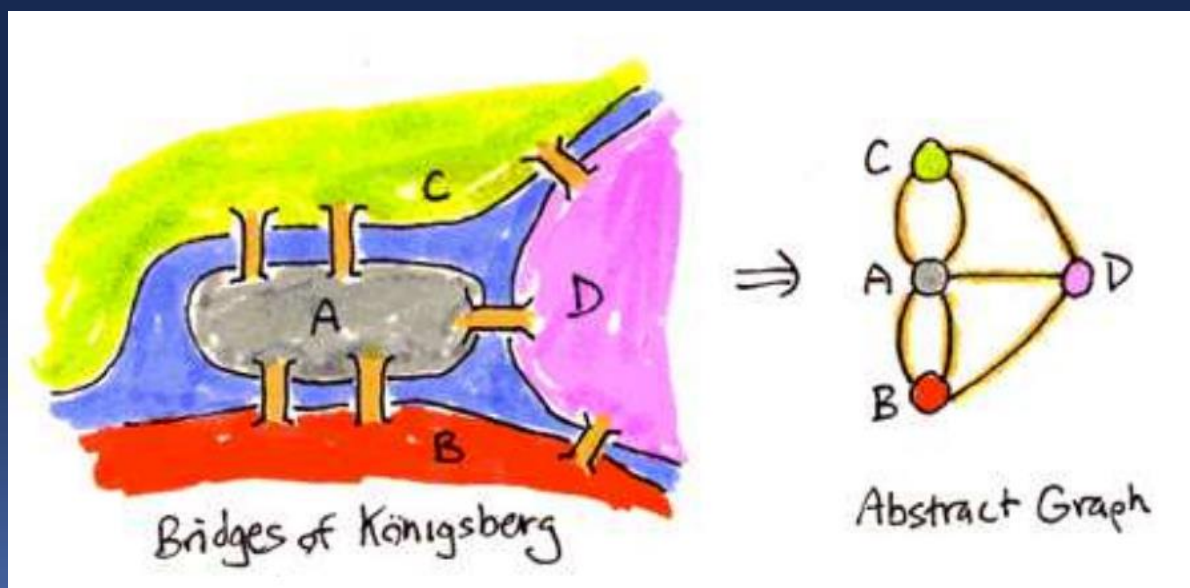
O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.



O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Se isto for possível o grafo é chamado grafo Euleriano.

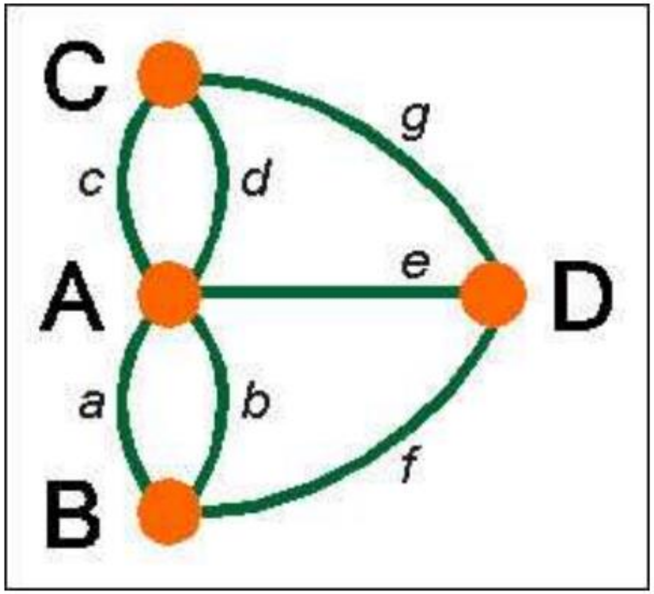
Grafo Euleriano?





Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Grafo Euleriano?

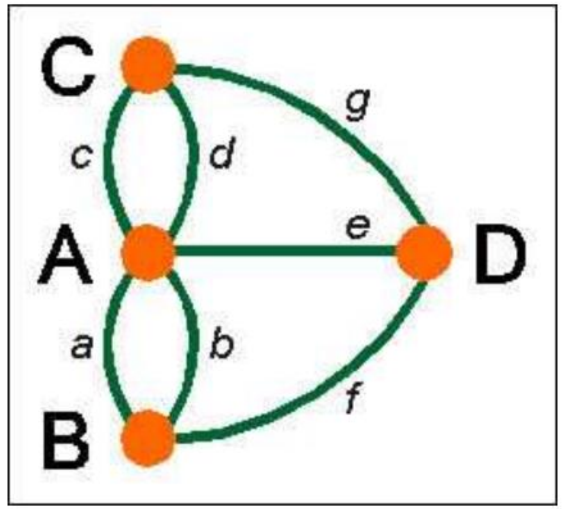


Grafo $G = (V, A)$

V = cjto de vértices $= \{A, B, C, D\}$

A = cjto de arestas $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Grafo Euleriano?



Grafo $G = (V, A)$

V = cjto de vértices $= \{A, B, C, D\}$

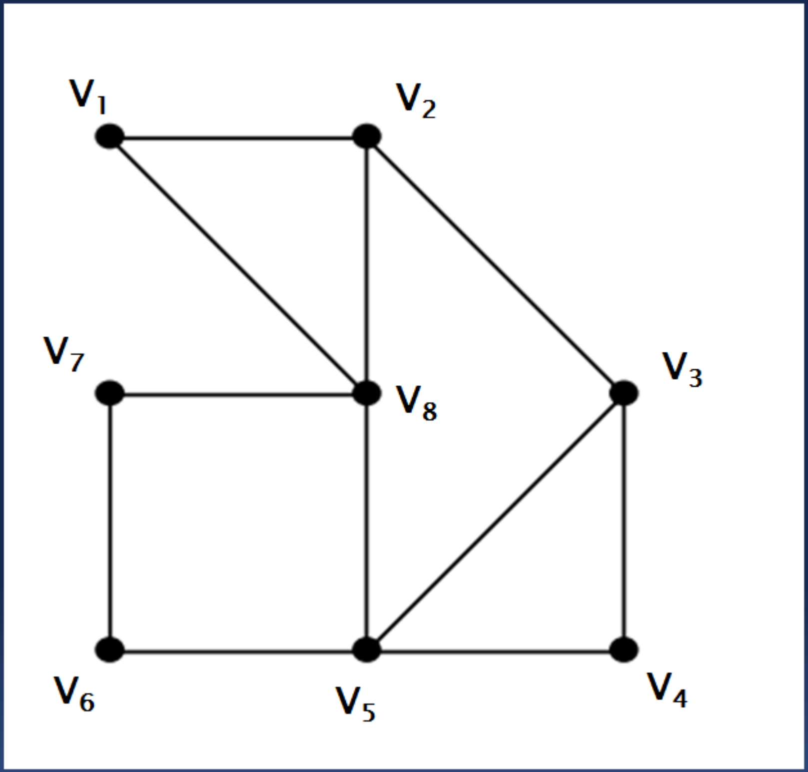
A = cjto de arestas $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

✓**Euler** provou que o problema não tem solução !

Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- ✓ Exemplo: O grafo **G**1 abaixo é **Euleriano**?



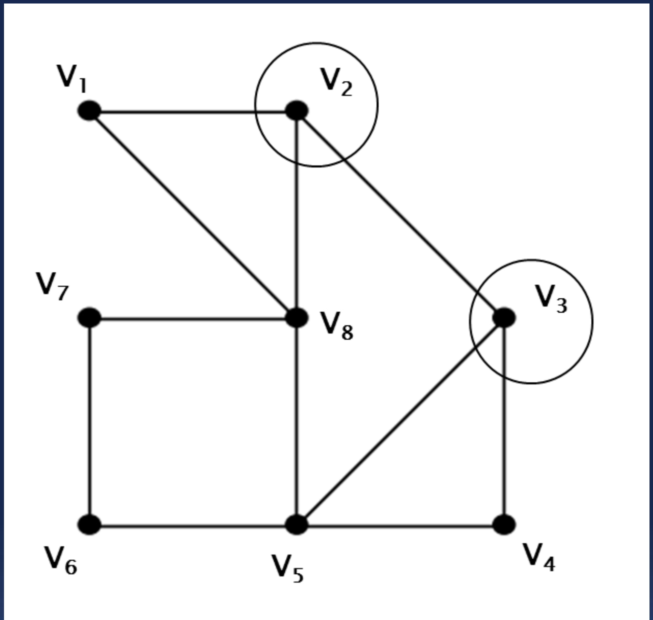
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

QualitSys

Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- ✓ Exemplo: O grafo **G1** abaixo é **Euleriano**?

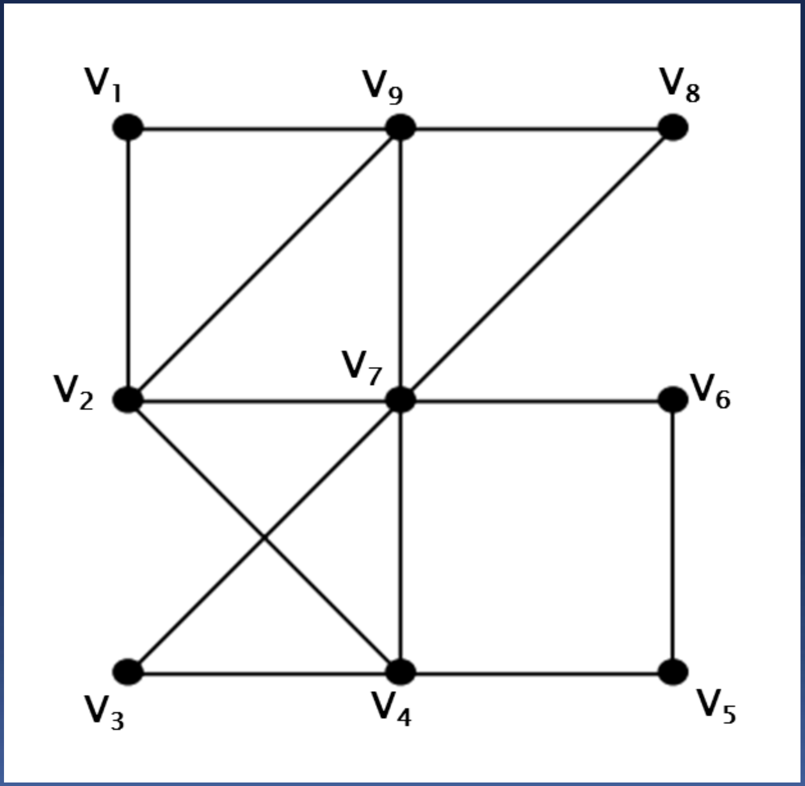


- ✓ O grafo **G1** acima tem vértices V_2 e V_3 com grau ímpar;
- ✓ Portanto, o Grafo **G1 não** é Euleriano!

Teorema de Euler

- Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

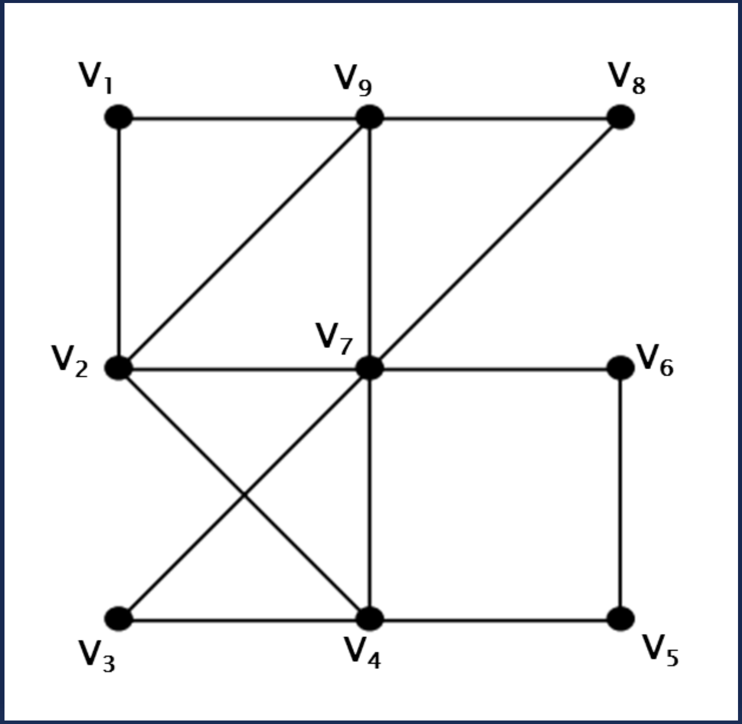
- Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

- Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?

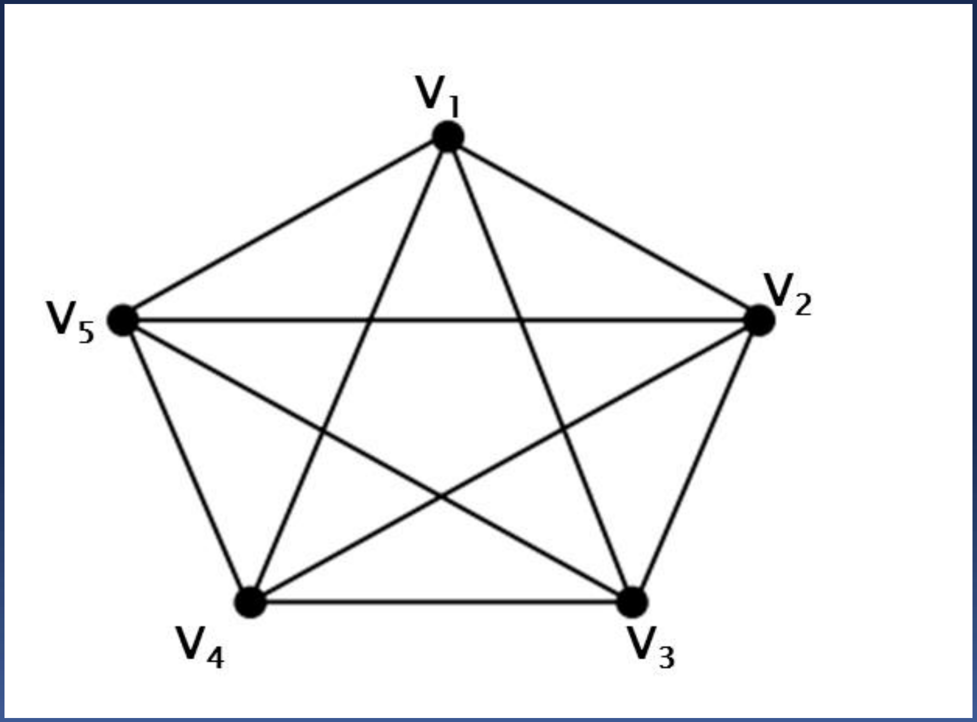


- Todos os vértices do grafo **G2** acima possuem graus pares;
- Portanto, o Grafo **G2 é** Euleriano!
- **Circuito de Euler**: $V_1 - V_9 - V_2 - V_4 - V_3 - V_7 - V_9 - V_8 - V_7 - V_6 - V_5 - V_4 - V_7 - V_2 - V_1$

Teorema de Euler

- Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- Exemplo: O grafo **G3** abaixo é **Euleriano**?

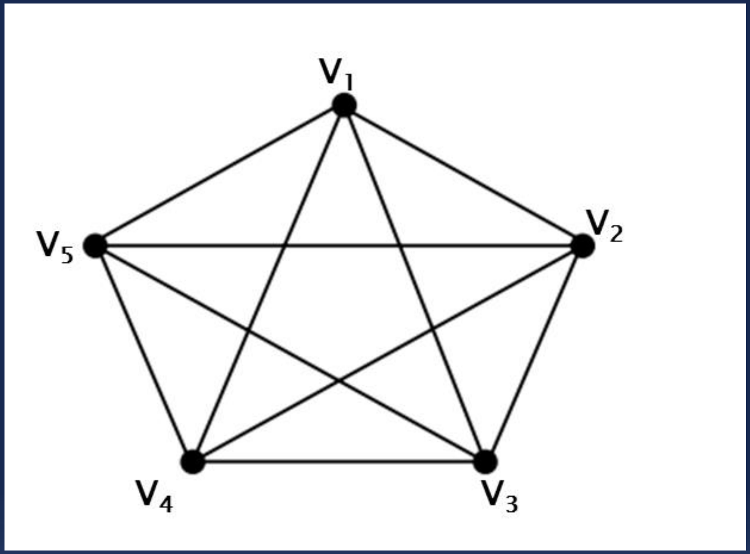


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Euler

- Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- Exemplo: O grafo **G3** abaixo é **Euleriano**?



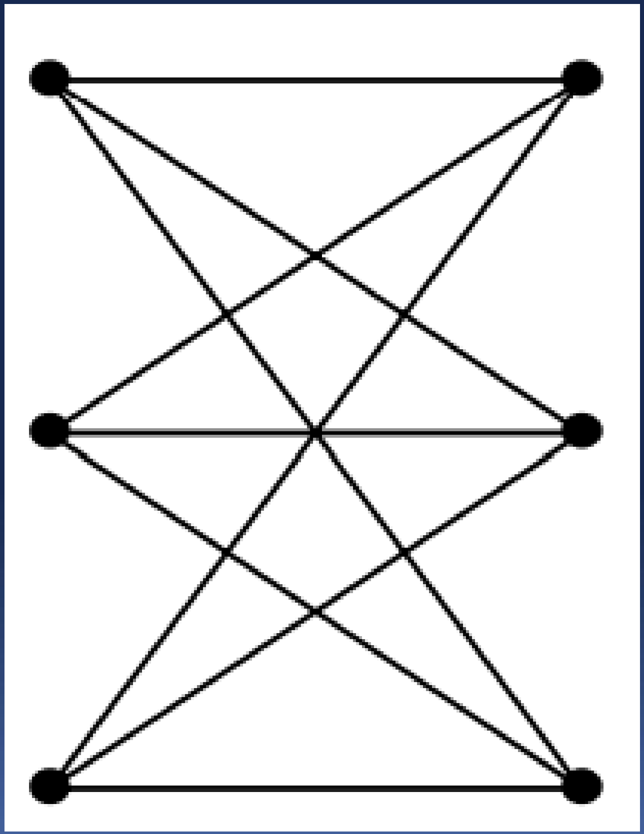
- Todos os vértices do grafo **G3** acima possuem graus **pares**;
- Portanto, o Grafo **G3 é** Euleriano!
- **Circuito de Euler**: $\mathbf{V_1} - V_2 - V_3 - V_1 - V_4 - V_2 - V_5 - V_3 - V_4 - V_5 - \mathbf{V_1}$

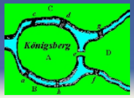
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é **Euleriano**?

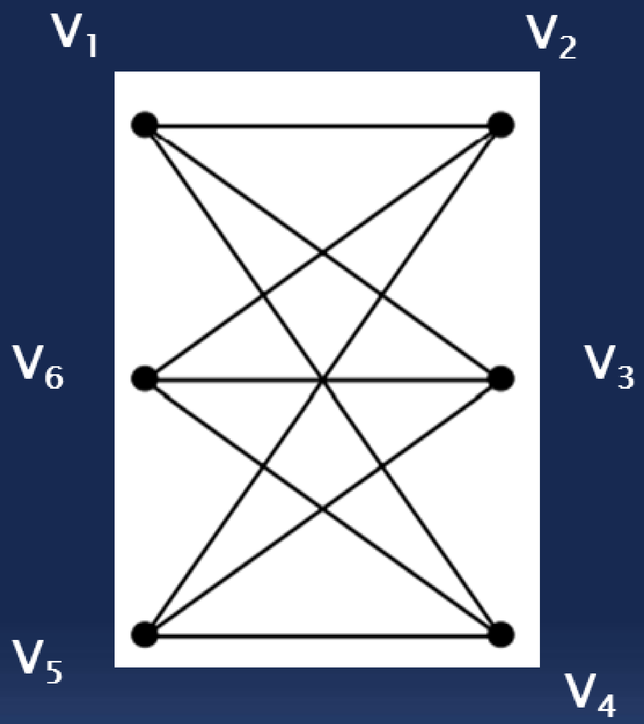




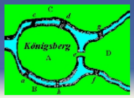
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é **Euleriano**?



- ✓ O grafo **G4** acima tem todos os vértices com grau ímpar;
- ✓ Portanto, o Grafo **G4 não** é Euleriano!



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC