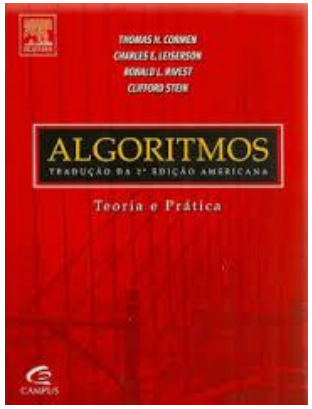
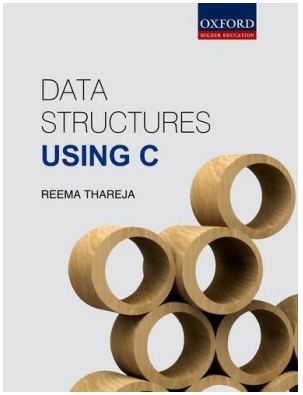
Unidade 5 – Análise de Algoritmos com Estruturas de Dados Hierárquicas – Parte 2
Árvores Binárias

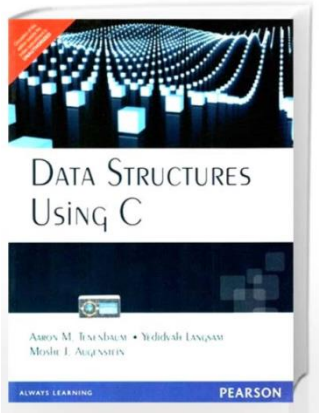
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

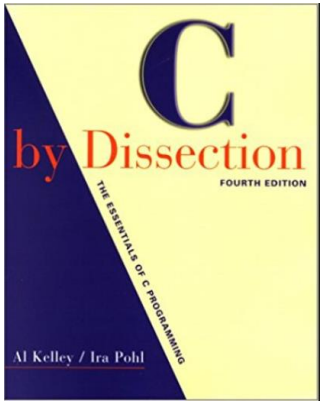
Bibliografia

- Algoritmos – Teoria e Prática – Cormen – Segunda Edição – Editora Campus, 2002
- Data Structures using C – Oxford University Press – 2014
- Data Structures Using C – A. Tenenbaum, M. Augensem, Y. Langsam, Pearson 1995
- C By Dissection – Kelley, Pohh – Third Edition – Addison Wesley



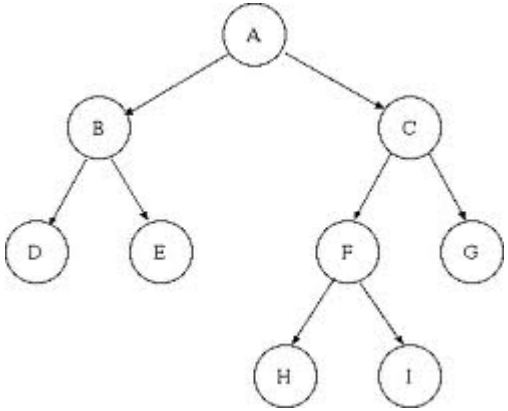


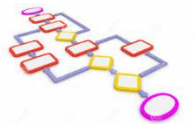




Árvore Binária própria

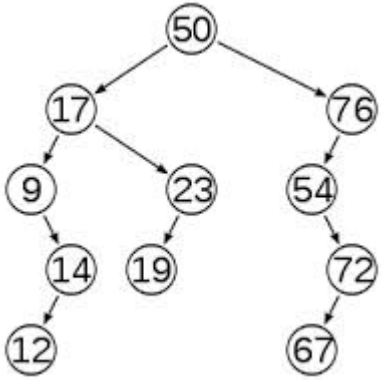
- Uma árvore binária é **própria** se cada nó tem 0 ou 2 filhos.
- Em uma árvore binária **própria** cada nó interno tem exatamente 2 filhos.





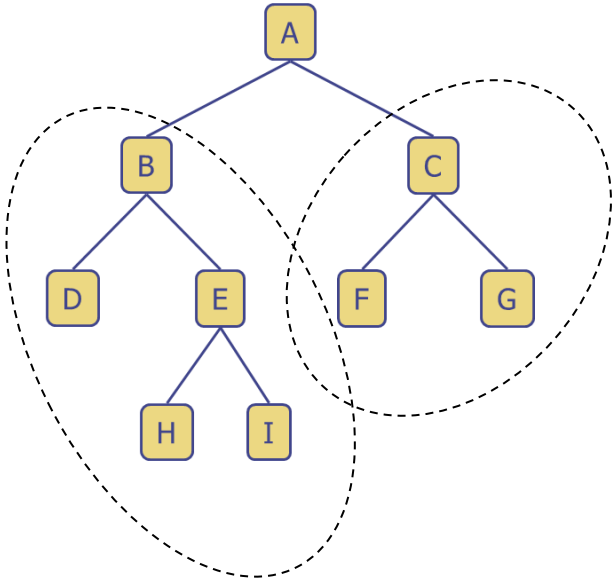
Árvore Binária Imprópria

- Uma árvore é **imprópria** se não for própria, ou seja, a árvore tem pelo menos um nó com apenas um filho.



Definição Recursiva

- Uma **árvore binária** é:
  - Uma árvore que consiste de apenas um nó, ou
  - Uma árvore cuja raiz tem um par ordenado de filhos, onde cada qual é uma árvore binária.



ADT – Árvore Binária

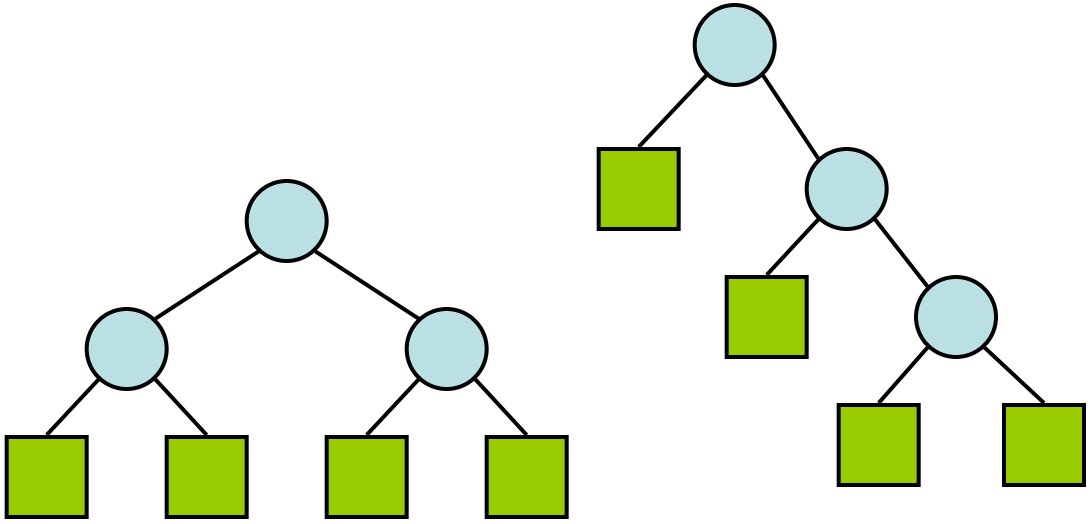
- A árvore binária estende a ADT Árvore, isto é , herda todos os métodos vistos no capítulo anterior (árvores genéricas).

- Adicionalmente, suporta os seguintes métodos:

```
left(): retorna o filho esquerdo de um nó
right(): retorna o filho direito de um nó
hasLeft(): testa se o nó tem filho a esquerda
hasRight(): testa se o nó tem filho a direita
inorder(): percurso inorder
```

Árvore Binária Própria - Propriedades

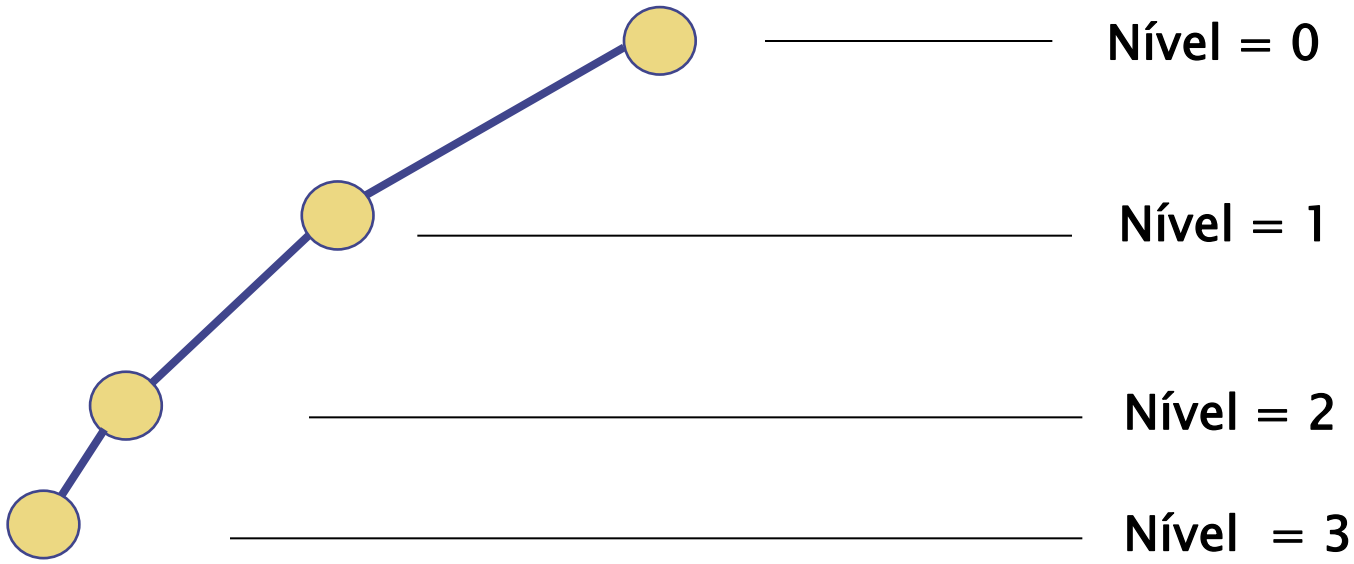
- Notação
  - ***n*** número de nós
  - ***e*** número de nós externos
  - ***i*** número de nós internos
  - ***h*** altura
  - ***b*** número de arestas



- Propriedades
  - $e = i + 1$
  - $n = 2e - 1$
  - $h \leq i$
  - $h \leq (n - 1)/2$
  - $e \leq 2^h$
  - $h \geq \log_2 e$
  - $h \geq \log_2 (n + 1) - 1$

Número mínimo de nós

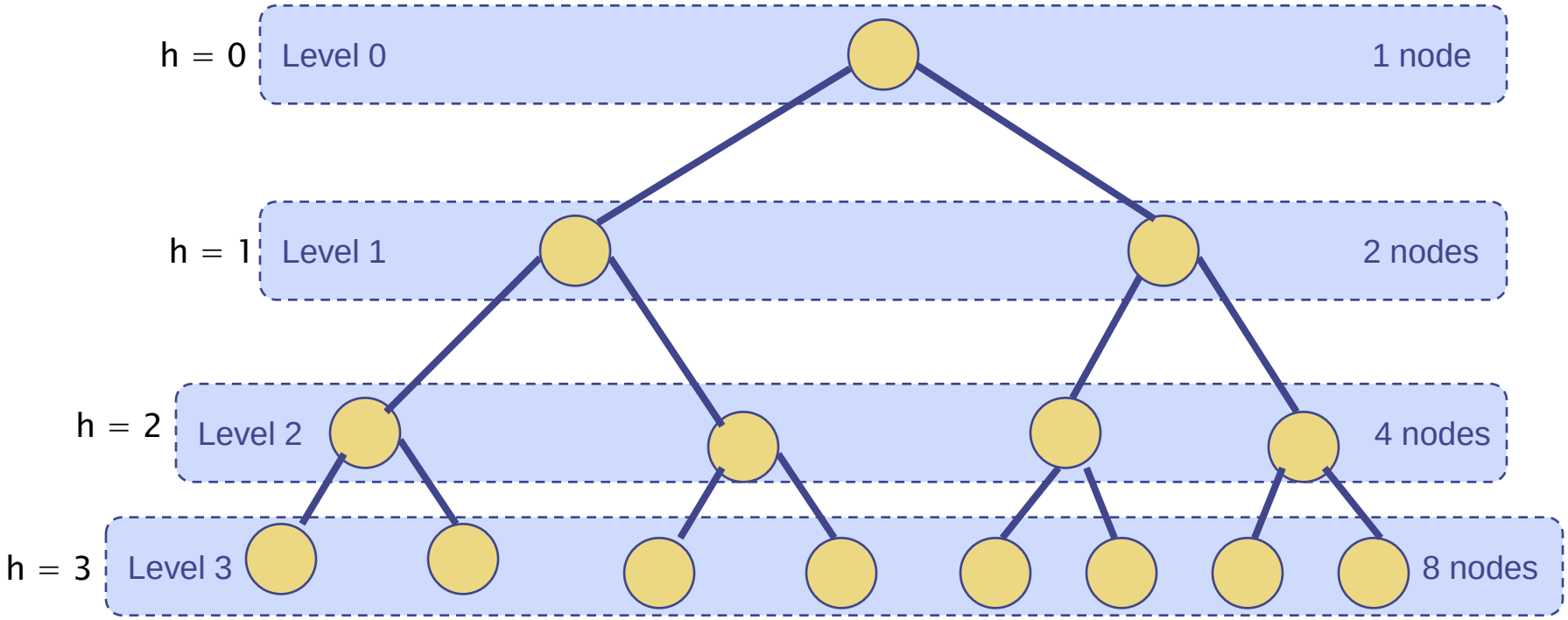
- O número mínimo de nós em uma árvore binária de altura **h**, é **n ≥ h+1**.
- Ao menos um nó em cada um dos níveis d.



Número mínimo de nós é ***h+1***

- **Altura de um nó: Tamanho do caminho de n até seu mais profundo descendente.**

Máximo número de nós

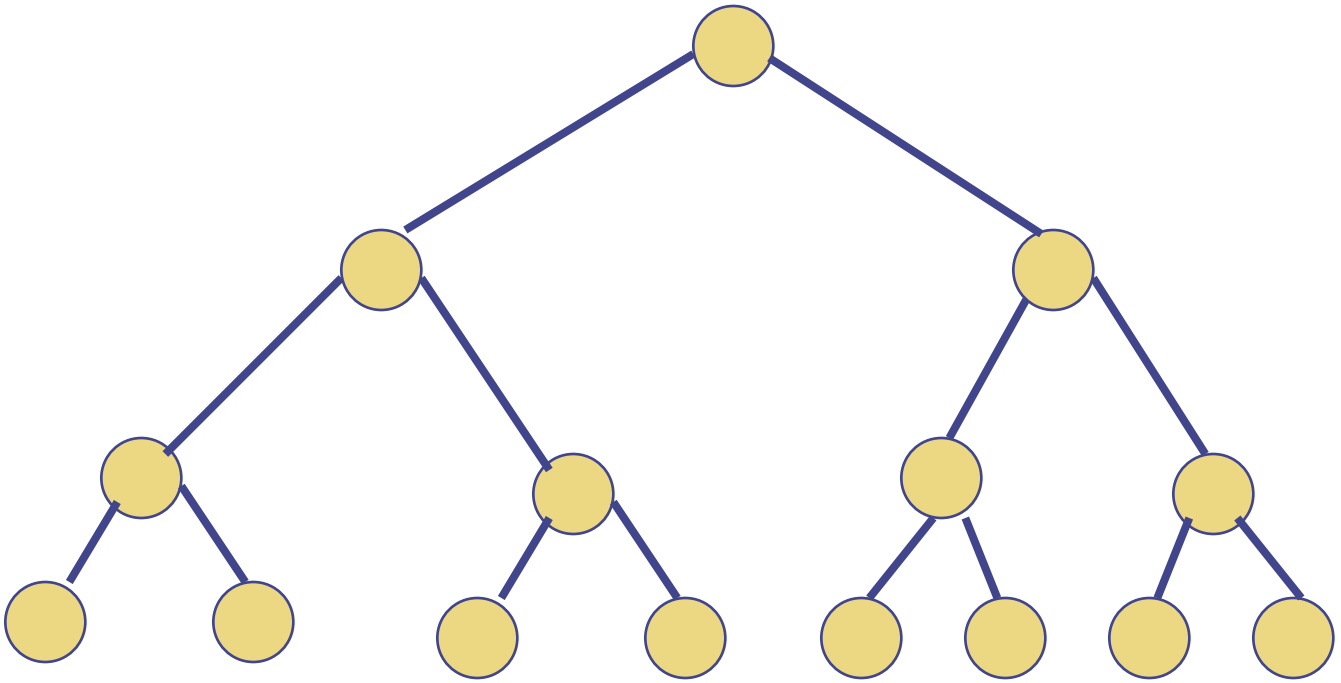


Máximo número de nós $= 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^h$

$$n \leq 2^{h+1} - 1$$

Árvore Binária Completa (Full)

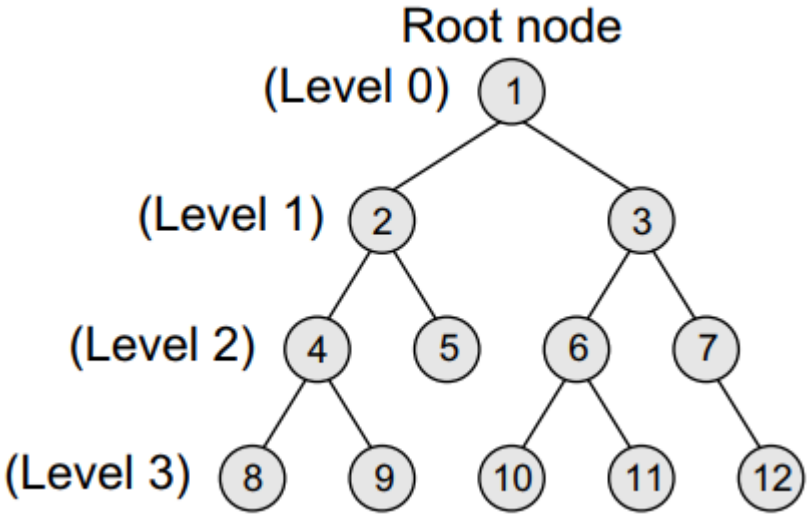
Uma árvore binária completa de altura *h* tem $2^{h+1} - 1$ nós.



Árvore binária completa de altura 3

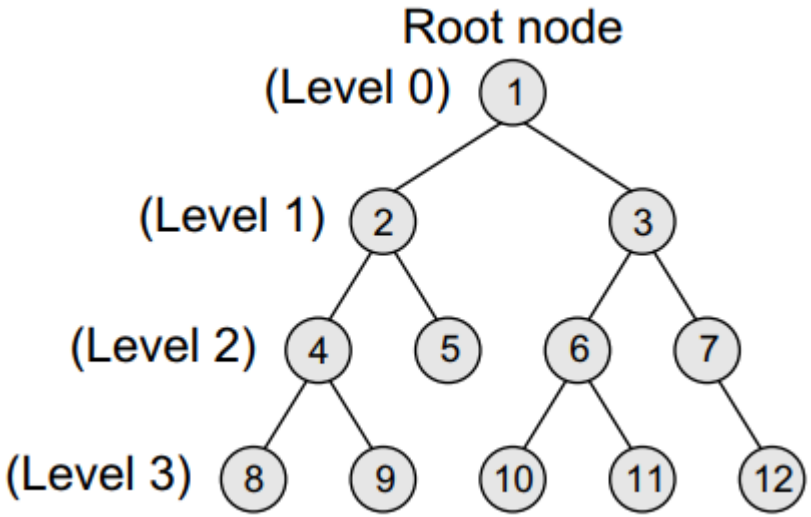
Nível de um nó

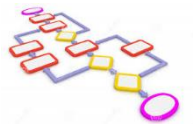
- ✓ Cada nó em uma árvore binária é associado a um número de nível;
- ✓ O nó root tem nível zero.



Grau de um nó

- ✓ Corresponde ao número de filhos que um determinado nó possui.
- ✓ O grau de um nó folha é zero;
- ✓ Por exemplo, o grau do nó 4 é 2, o grau do nó 5 é zero e o grau do nó 7 é 1.



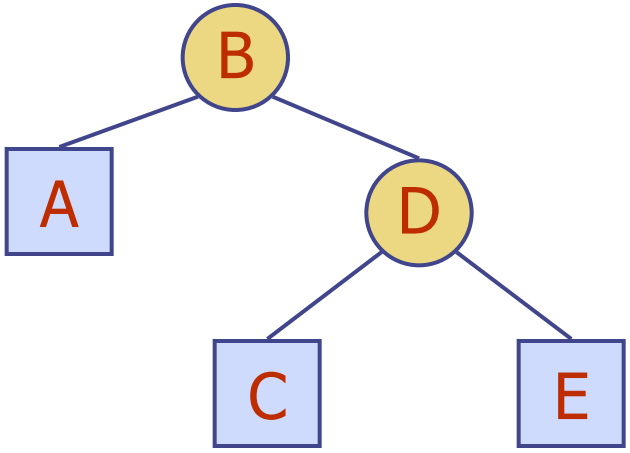


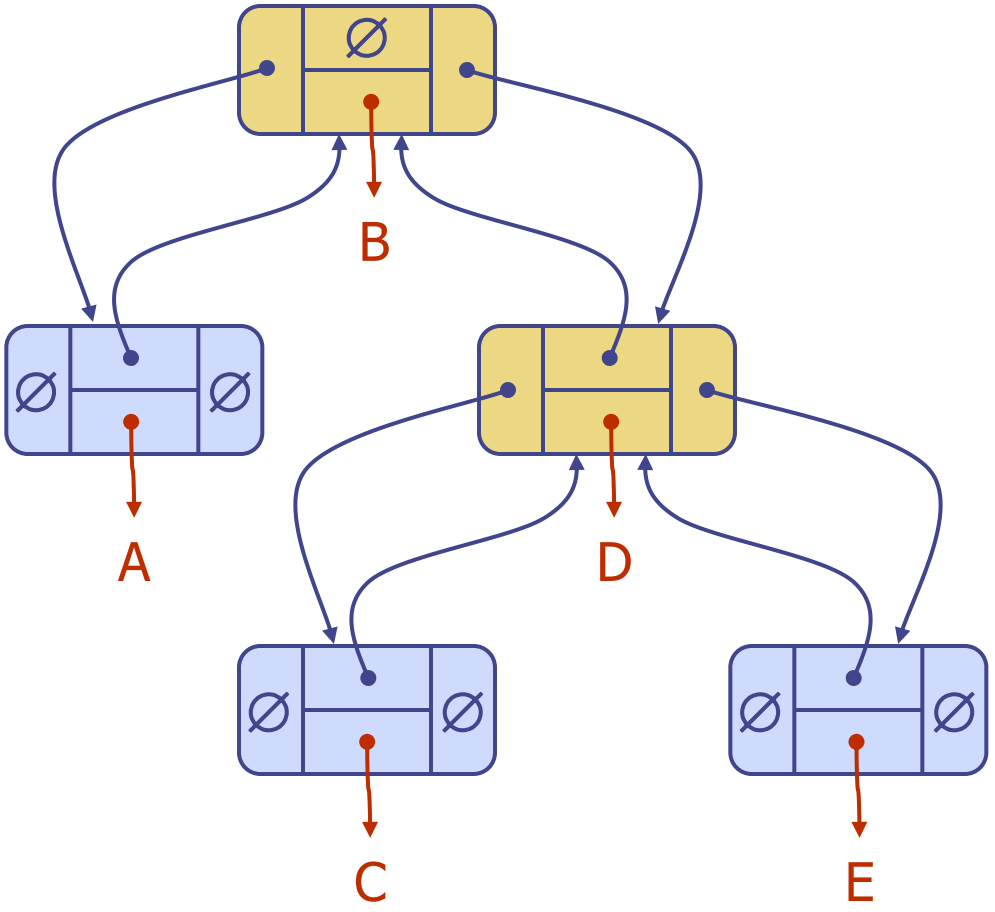
Representação de árvores binárias em Memória

1. **Linked Structure**
2. **Representação sequencial**

Representação por lista ligada

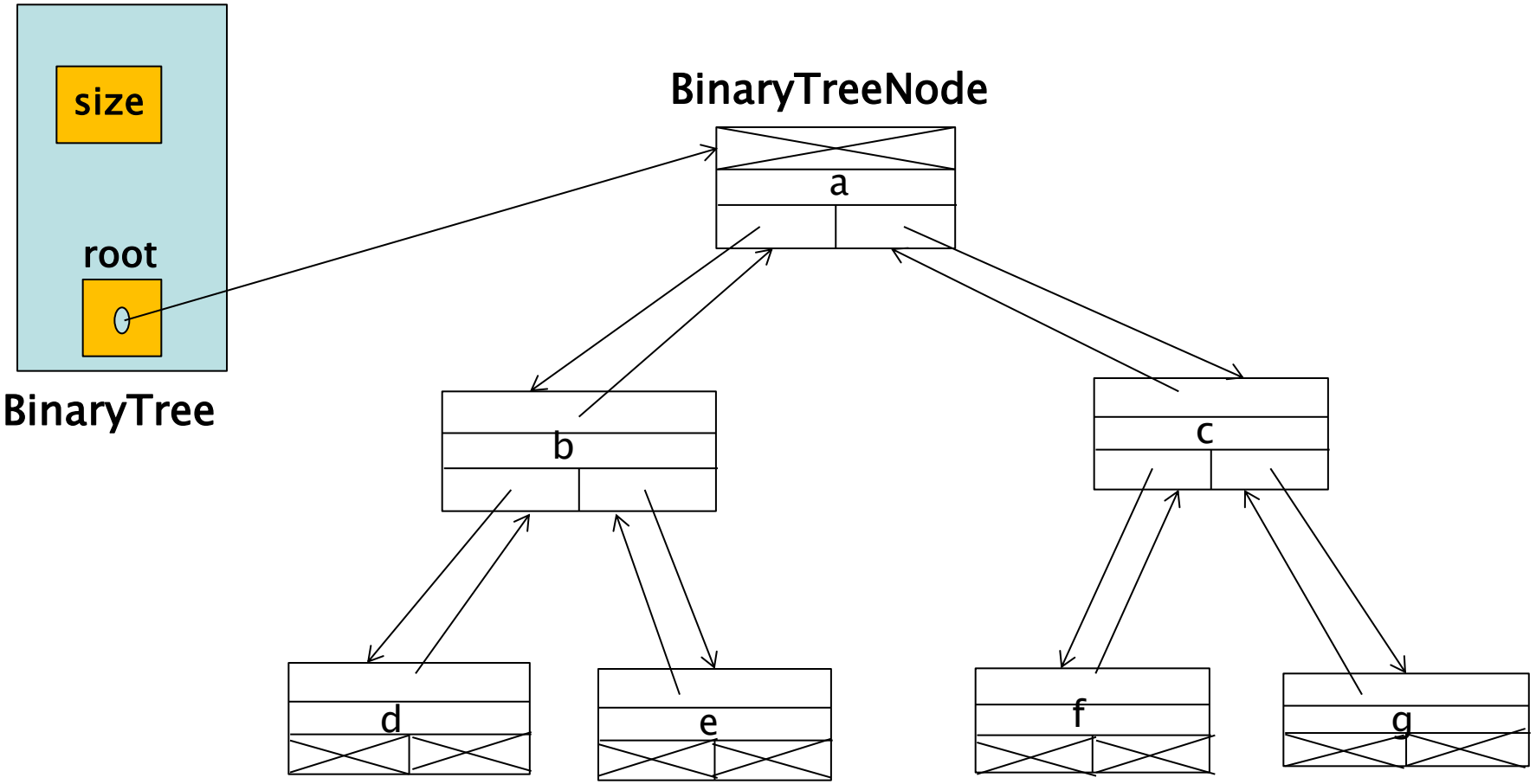
- Um nó é representado por um objeto armazenando:
  - Elemento
  - Nó pai
  - Nó Left child
  - Nó Right child

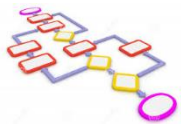




Representação por lista ligada

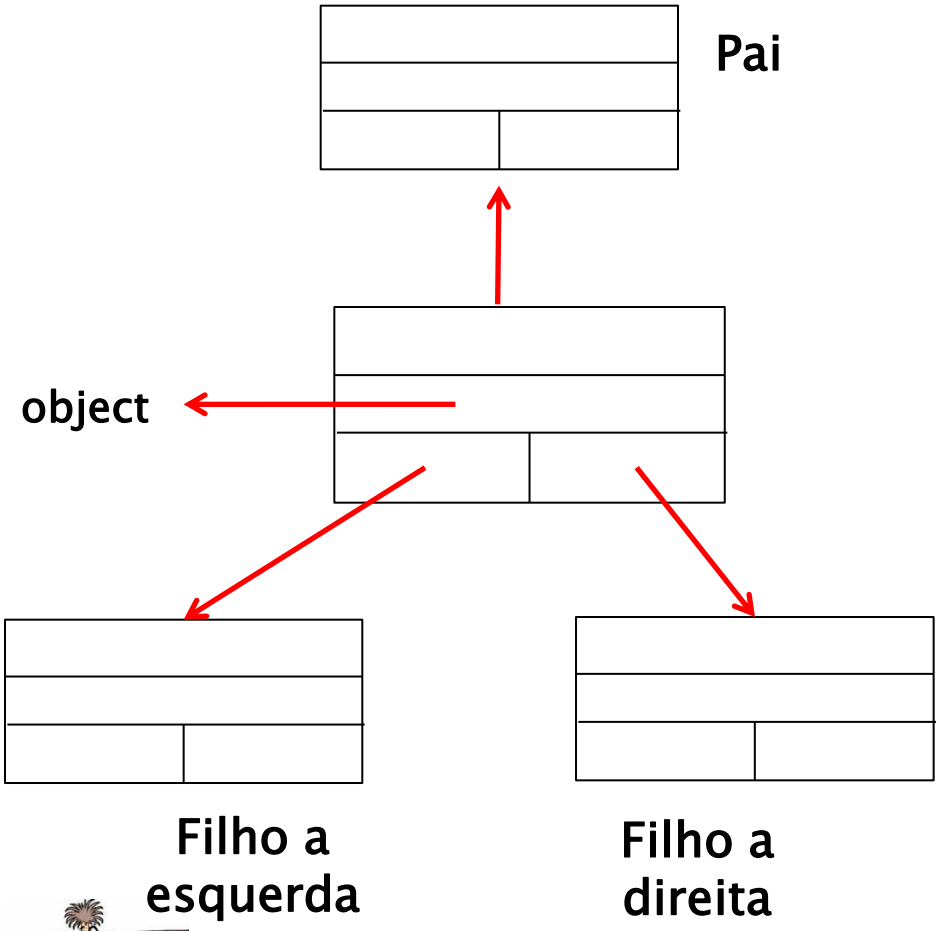
size -> #nós da árvore





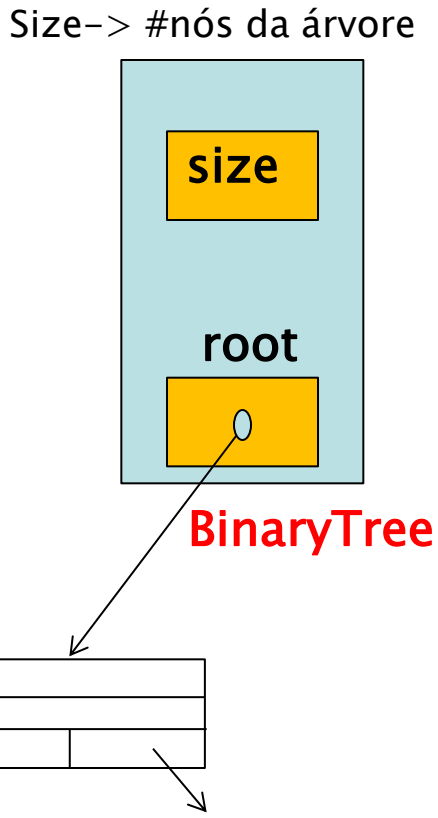
Representando nó da Árvore

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, filho a esquerda e filho a direita.



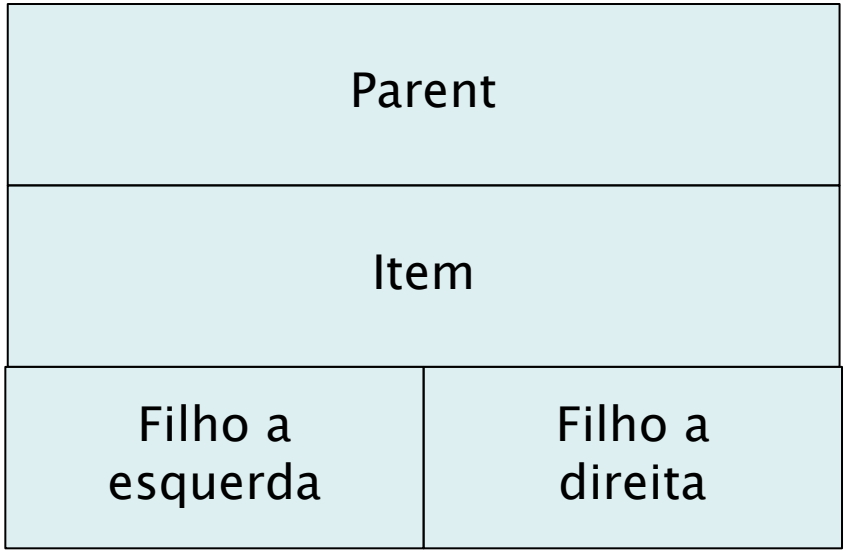

```
struct node {
        int data;
        struct node * parent;
        struct node * left;
        struct node * right;
};
struct tree {
        int size;
        struct node * root;
};
```

Representando a Árvore

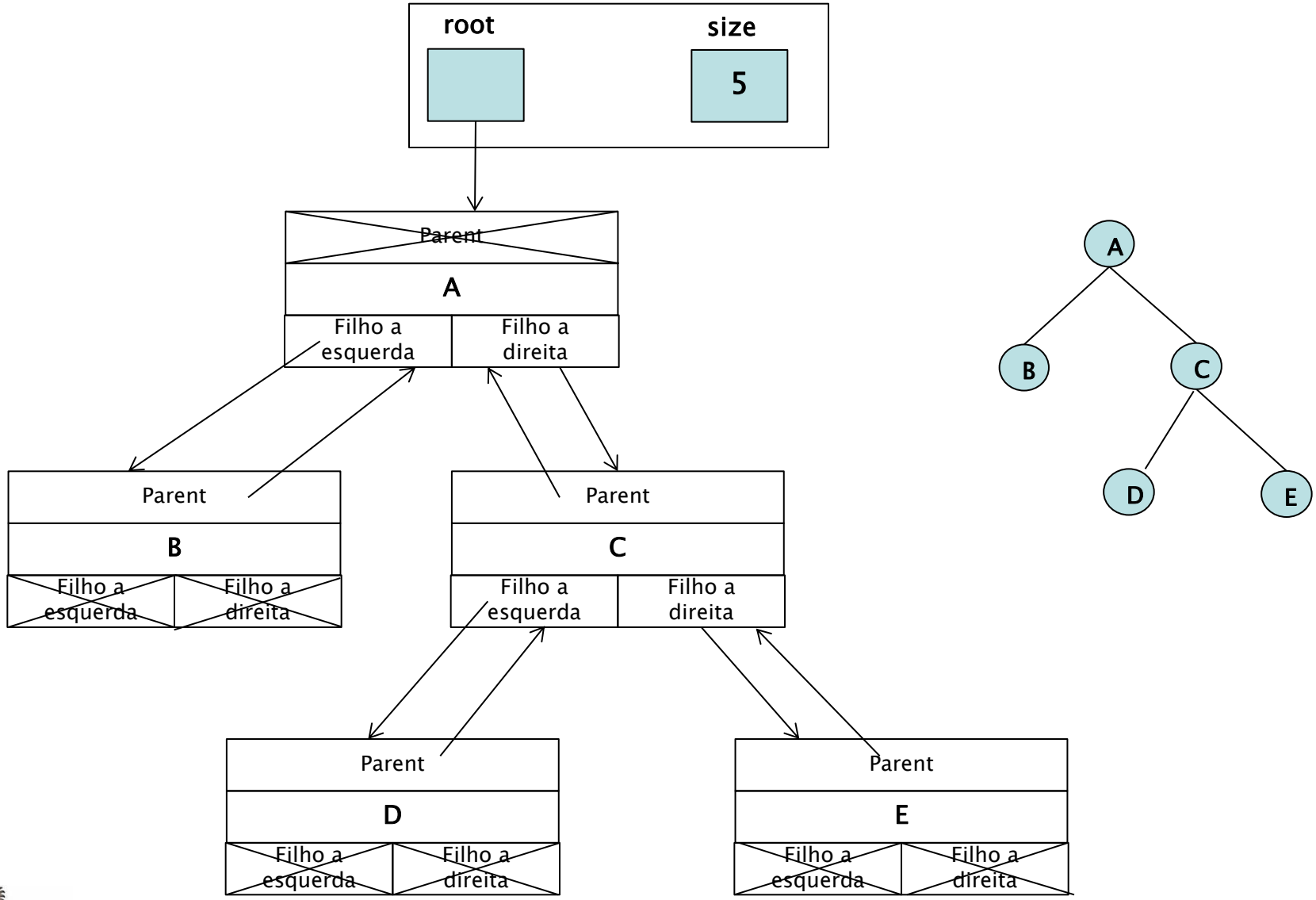


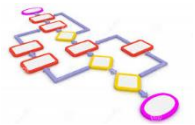

```
struct node {
        int data;
        struct node * parent;
        struct node * left;
        struct node * right;
    };
    struct tree {
        int size;
        struct node * root;
    };
```

Representando Nó da árvore

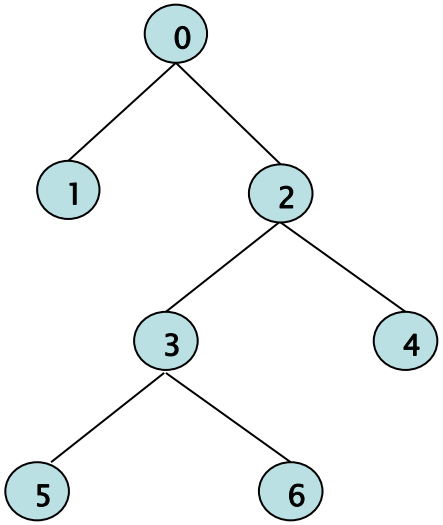


Exemplo


root
size
5
Parent
A
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
B
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
C
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
D
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
E
Filho a esquerda
Filho a direita
A
B
C
D
E

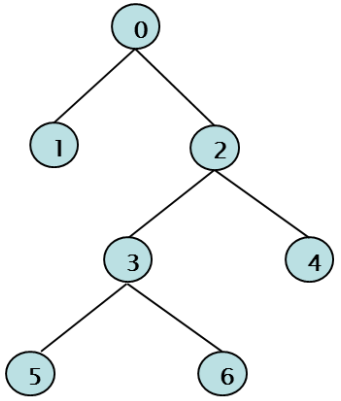


Exemplo

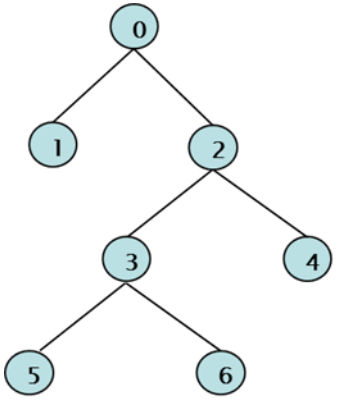


```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct node *  node_parent(struct node * );

struct node {

        int data;

        struct node * parent;

        struct node * left;

        struct node * right;

    };

    struct tree {

        int size;

        struct node * root;
    };

enum boolean {
    true = 1, false = 0
};

typedef  enum boolean  bool;

struct node * root = NULL;

int size = 0;
```

```
void insert_root(int);
struct node * cria_node (int);
struct node * ret_Root();
struct node * left(struct node * );
struct node * right(struct node *);
enum boolean isLeft(struct node *);
enum boolean isRight(struct node *);
int sizeTree();
enum boolean isEmpty();

void preorder(struct node *);
void posorder(struct node *);
void inorder(struct node *);

int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores binarias ....\n");

    insert_root(0);


    struct node * no_1 = cria_node(1);
    struct node * no_2 = cria_node(2);
    struct node * no_3 = cria_node(3);
    struct node * no_4 = cria_node(4);
    struct node * no_5 = cria_node(5);
    struct node * no_6 = cria_node(6);
```



```
    struct node * no_6 = cria_node(6);

    root->left  = no_1;
    root->right = no_2;

    no_2->left = no_3;
    no_2->right = no_4;

    no_3->left = no_5;
    no_3->right = no_6;

    printf ("\n ****** preorder ******\n\n");
    preorder(root);

    printf ("\n\n ****** posorder ******\n\n");
    posorder(root);

    printf ("\n\n ****** inorder ******\n\n");
    inorder(root);

    return 0;

}
```



```
void insert_root( int valor) {

    struct node * novo_node = cria_node(valor);

     root = novo_node;

     size = 1;
}


struct node *  ret_Root () {

         return root;

}

int sizeTree() {

     return size;

}

enum boolean isEmpty() {

     if (size == 0)
         return true;
     return false;
}
```

```
struct node * left(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> left == NULL)
        return NULL;

    return ponteiro -> left;
}

struct node * right (struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> right  == NULL)
        return NULL;

    return ponteiro -> right;
}

enum boolean isLeft(struct node * ponteiro ) {

    if (ponteiro -> left == NULL )
        return false;
    return true;
}


enum boolean isRight (struct node * ponteiro ) {

    if (ponteiro -> right == NULL )
        return false;
    return true;
}
```

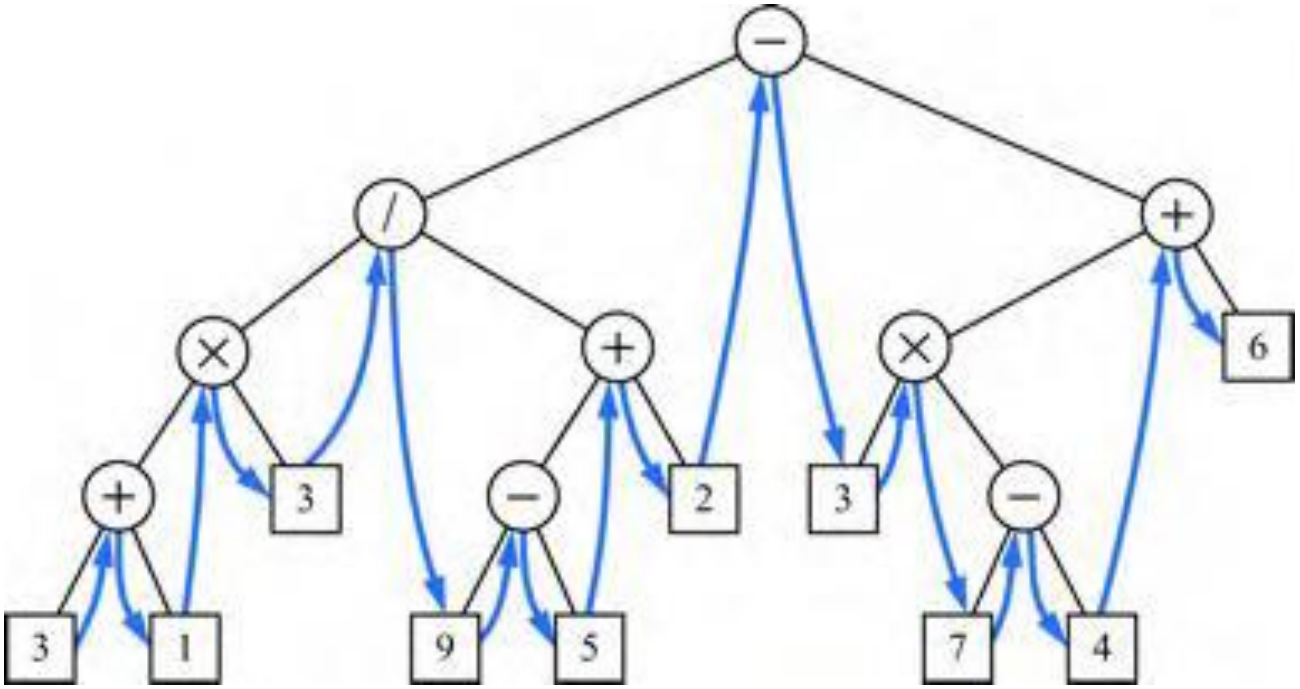
```
struct node * cria_node (int valor) {

    struct node * new_node ;

    new_node = (struct node *) malloc (sizeof (struct node));

    new_node -> left = NULL;
    new_node -> right = NULL;
    new_node -> parent= NULL;
    new_node -> data = valor;

    return new_node;
}
```

```
void preorder(struct node * ponteiro ) {

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

    if (isLeft(ponteiro))
        preorder(ponteiro ->left);

    if (isRight(ponteiro))
        preorder(ponteiro ->right);

}
```

```
void posorder(struct node * ponteiro ) {

    if (isLeft(ponteiro))
        posorder(ponteiro ->left);

    if (isRight(ponteiro))
        posorder(ponteiro ->right);

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );
}
```

Travessia Inorder

- Representa um método de travessia adicional válido para árvores binárias.
- Nesta travessia, visitamos um nó entre as chamadas recursivas das subárvores esquerda e direita.



Travessia Inorder

```
void inorder (struct node * ponteiro ) {

    if (isLeft(ponteiro))
        inorder(ponteiro ->left);

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

    if (isRight(ponteiro))
        inorder(ponteiro ->right);
}
```