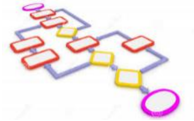
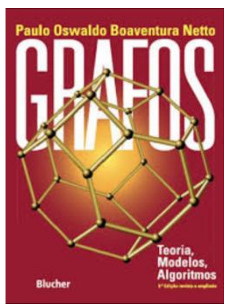
Teoria dos Grafos
Unidade 3 - Grafos Hamiltonianos

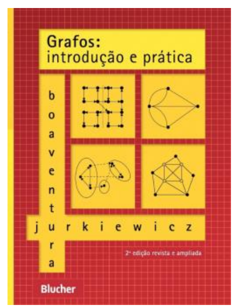
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

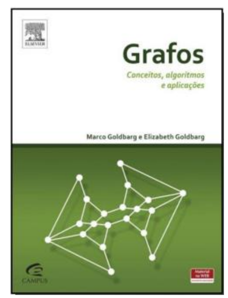


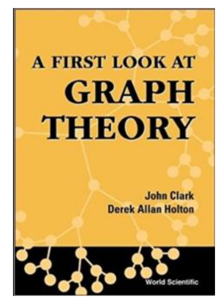
Bibliografia

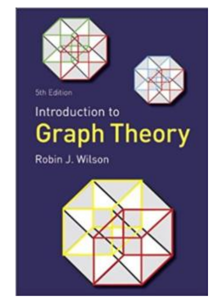
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997

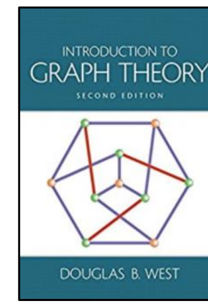


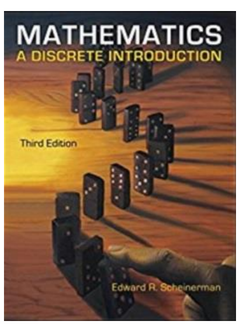


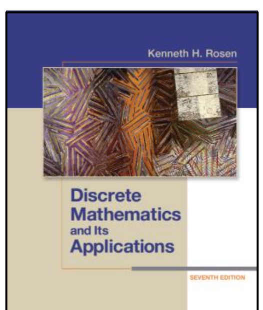


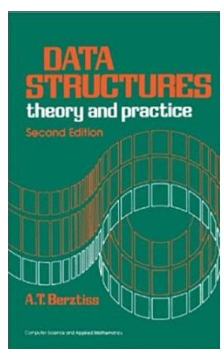


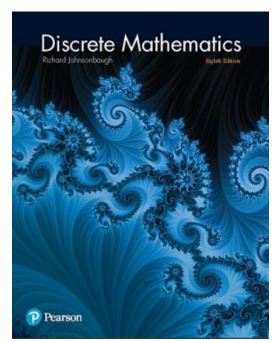


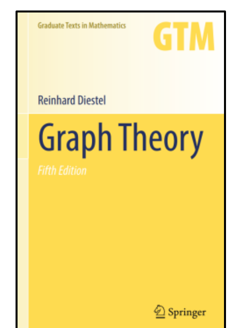


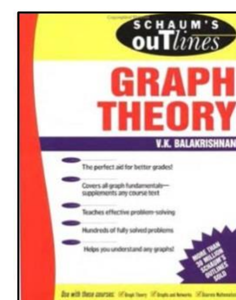












Grafos Hamiltonianos

- ✓ Dado um grafo G, um **Caminho Hamiltoniano** em G é um **caminho** que contém todo vértice de G;
- ✓ Dado um grafo G, um **Ciclo Hamiltoniano** é um ciclo que contém todo vértice de G;
- ✓ Um grafo G é chamado **Grafo Hamiltoniano** se tiver um **ciclo hamiltoniano**;

Lembrando...

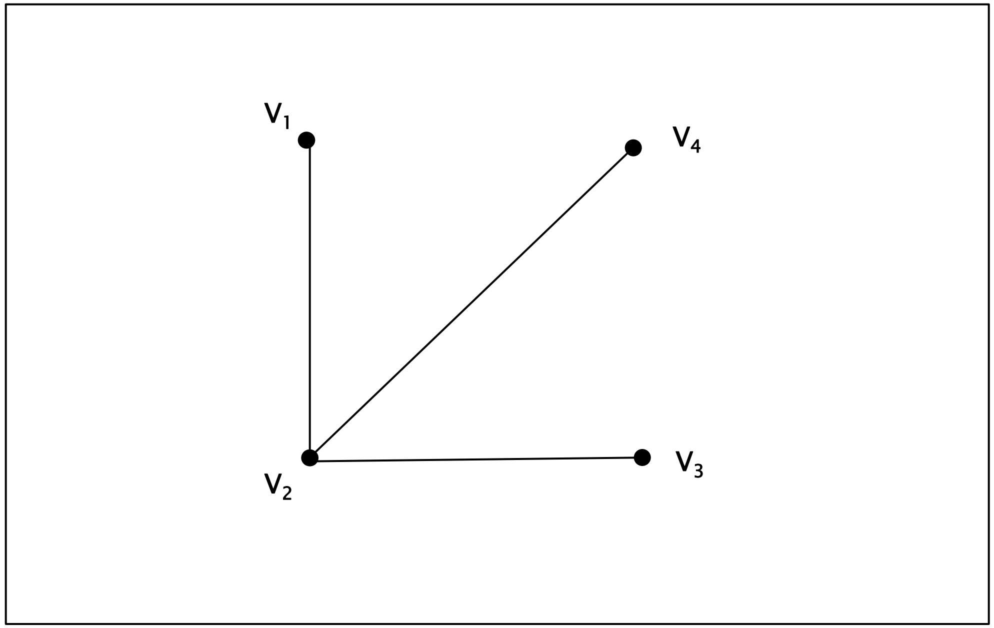
Passeio , Trilha e Caminho

- ✓ Vértice inicial **u**
- ✓ Vértice final **v**

Vértice inicial u Vértice final v	u ≠ v	u = v
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	**PASSEIO ABERTO**	**PASSEIO FECHADO**
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	**TRILHA ABERTA**	**TRILHA FECHADA** ou **CIRCUITO**
CAMINHO Nenhum vértice pode aparecer mais de uma vez, com a possível exceção de que u e v podem ser o mesmo vértice	**CAMINHO ABERTO**	**CAMINHO FECHADO OU CICLO**

Ciclo e Caminho Hamiltoniano
Exemplo 1

✓Dado um grafo **G**, um **Caminho Hamiltoniano** em **G** é um **caminho** que contém todo vértice de G;

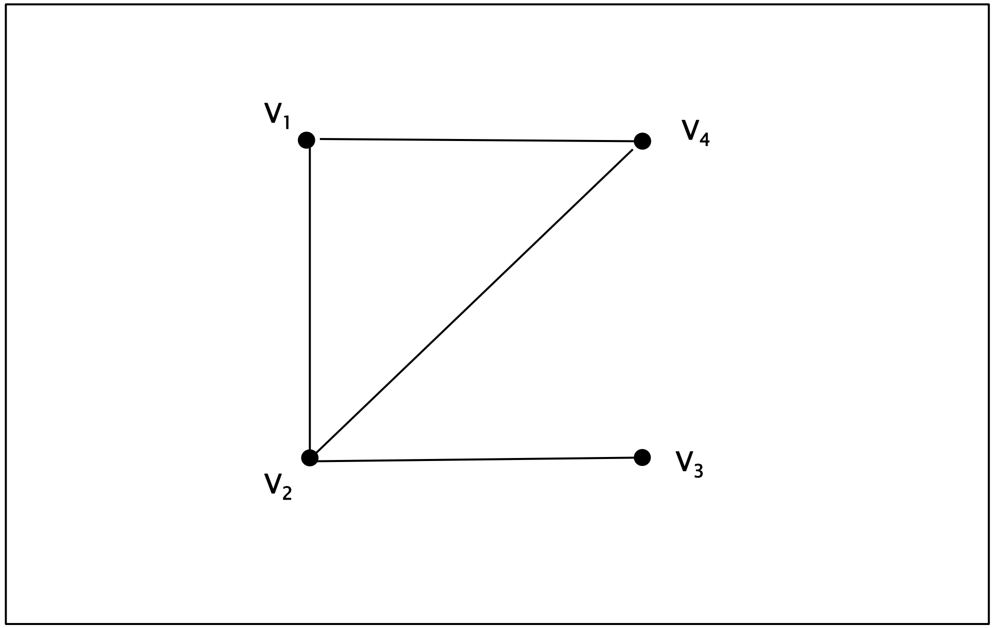


Grafo G1

✓ G1 **NÃO** contém **Caminho Hamiltoniano**;

Ciclo e Caminho Hamiltoniano
Exemplo 2

✓Dado um grafo **G**, um **Caminho Hamiltoniano** em **G** é um **caminho** que contém todo vértice de G;



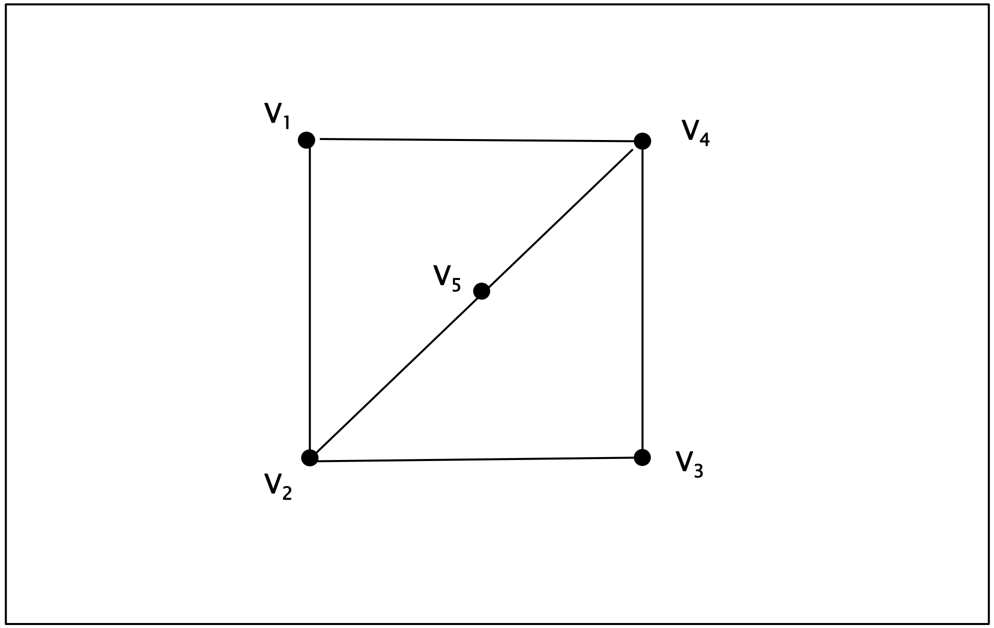
Grafo G2

✓ G2 contém o **Caminho Hamiltoniano ($V_4 V_1 V_2 V_3$)** ;

✓ G2 **NÃO** contém **Ciclo Hamiltoniano** (ou **Circuito Hamiltoniano**);

Ciclo e Caminho Hamiltoniano
Exemplo 3

✓Dado um grafo **G**, um **Caminho Hamiltoniano** em **G** é um **caminho** que contém todo vértice de G;



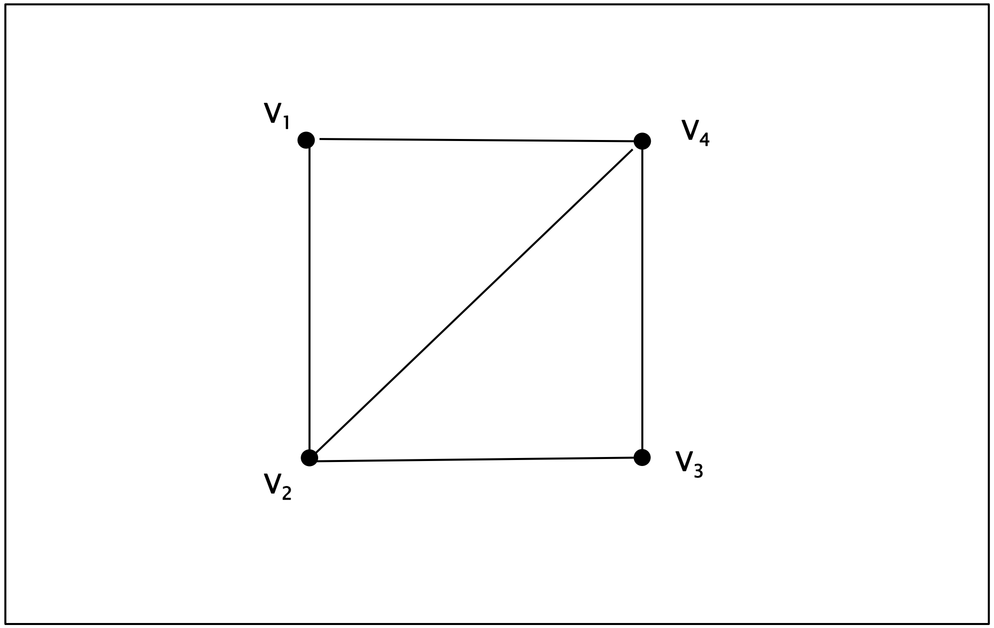
Grafo G3

✓ G3 contém o **Caminho Hamiltoniano ($V_1 V_2 V_5 V_4 V_3$)** ;

✓ G3 **NÃO** contém **Ciclo Hamiltoniano** (ou **Circuito Hamiltoniano**);

Ciclo e Caminho Hamiltoniano
Exemplo 4

✓Dado um grafo **G**, um **Caminho Hamiltoniano** em **G** é um **caminho** que contém todo vértice de G;

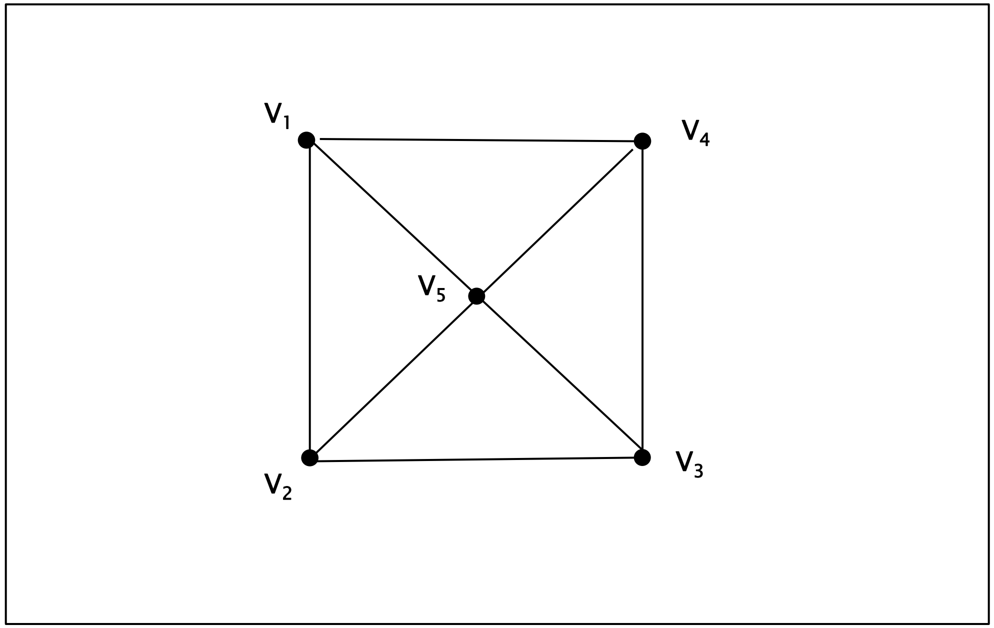


Grafo G4

✓ G4 **contém** **Ciclo Hamiltoniano** (ou **Circuito Hamiltoniano**) **(V_1 V_2 V_3 V_4 V_1)** ;

Ciclo e Caminho Hamiltoniano
Exemplo 5

✓Dado um grafo **G**, um **Caminho Hamiltoniano** em **G** é um **caminho** que contém todo vértice de G;



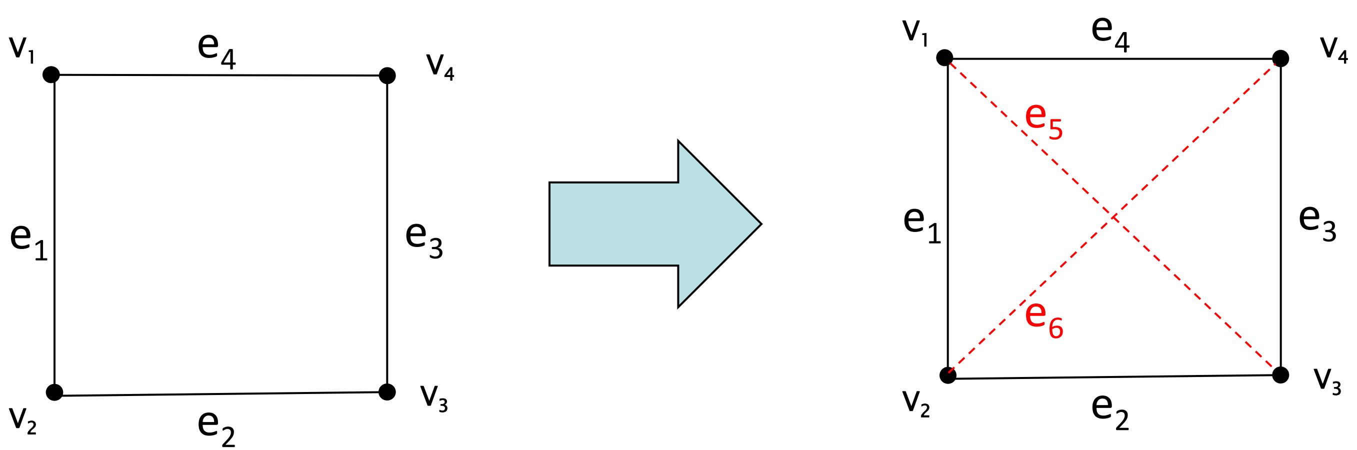
Grafo G5

✓ G5 **contém Ciclo Hamiltoniano** (ou **Circuito Hamiltoniano**) **($V_1 V_5 V_2 V_3 V_4 V_1$)** ;

Grafo Hamiltoniano
Observação

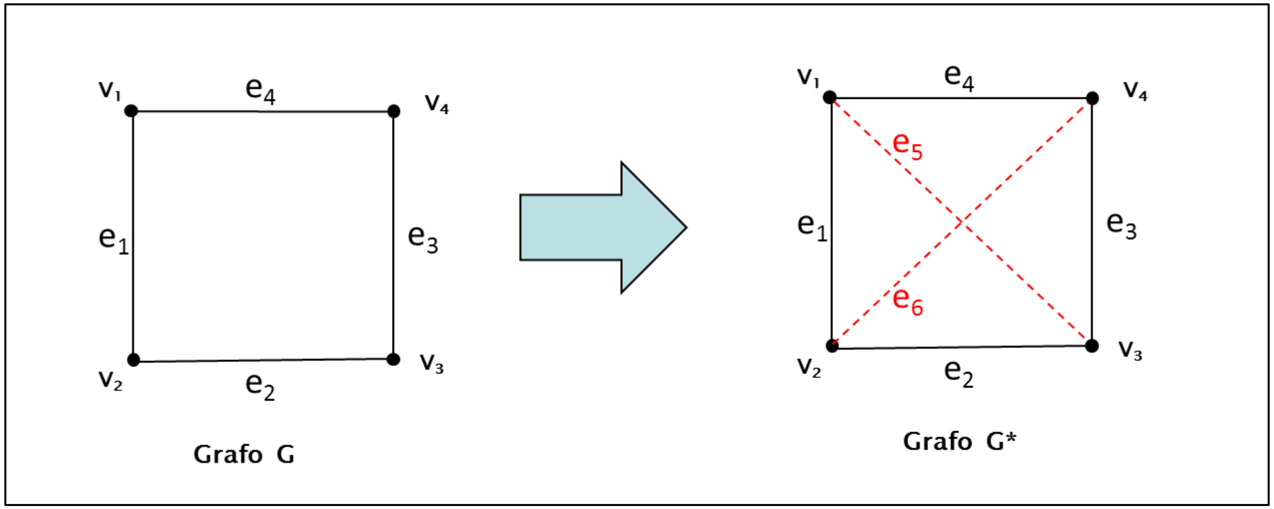
- Dado qualquer grafo hamiltoniano **G**, se **G*** é um supergrafo de **G**, obtido por meio da adição de novas arestas entre vértices de **G**, **G*** também será hamiltoniano, uma vez que qualquer ciclo hamiltoniano em G continuará sendo ciclo hamiltoniano em **G*.**

- Exemplo: Considere o grafo G, mostrado na Figura abaixo, e seu supergrafo G*, obtido por meio da adição das arestas e_5 e e_6.



Grafo G **Grafo G***

Grafo Hamiltoniano
Observação



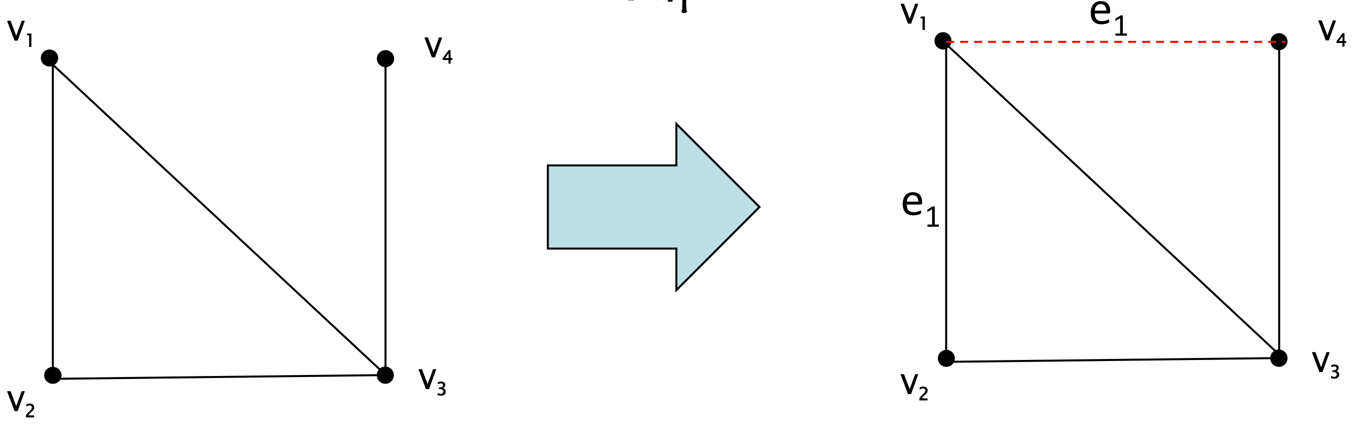
✓ O **Ciclo Hamiltoniano** (V_1 V_2 V_3 V_4 V_1) em **G** **continua** sendo um **Ciclo Hamiltoniano** em **G*.**

Grafo não hamiltoniano maximal

- ✓ Um **grafo simples G** é chamado **não hamiltoniano maximal** se não for hamiltoniano, mas a **adição** a ele de qualquer **aresta** conectando **dois vértices não adjacentes** forma um **grafo hamiltoniano**;

- ✓ Lembrando, um grafo é chamado **simples** se não tem loops, nem arestas paralelas;

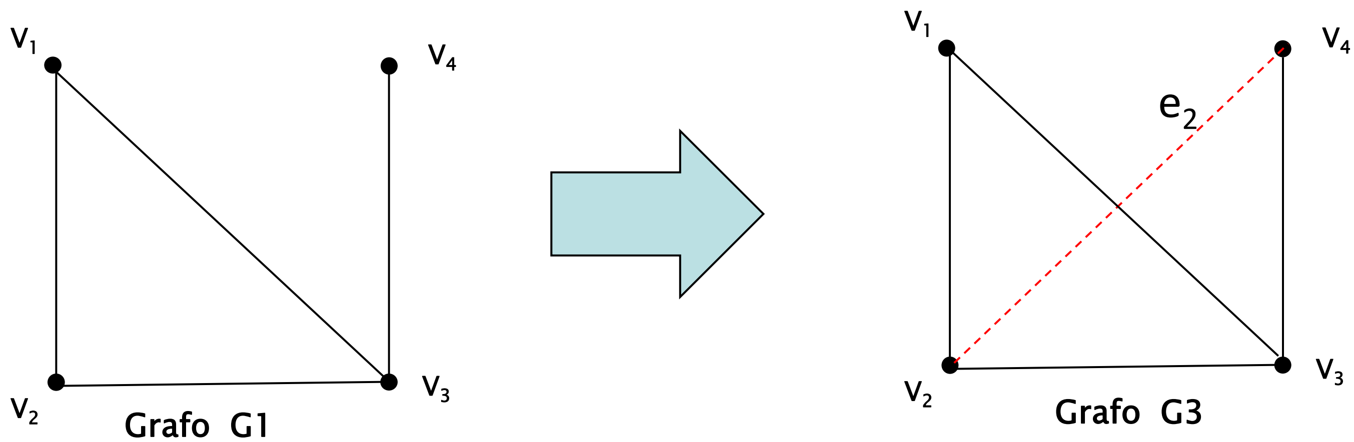
Exemplo



Grafo G1 **Grafo G2**

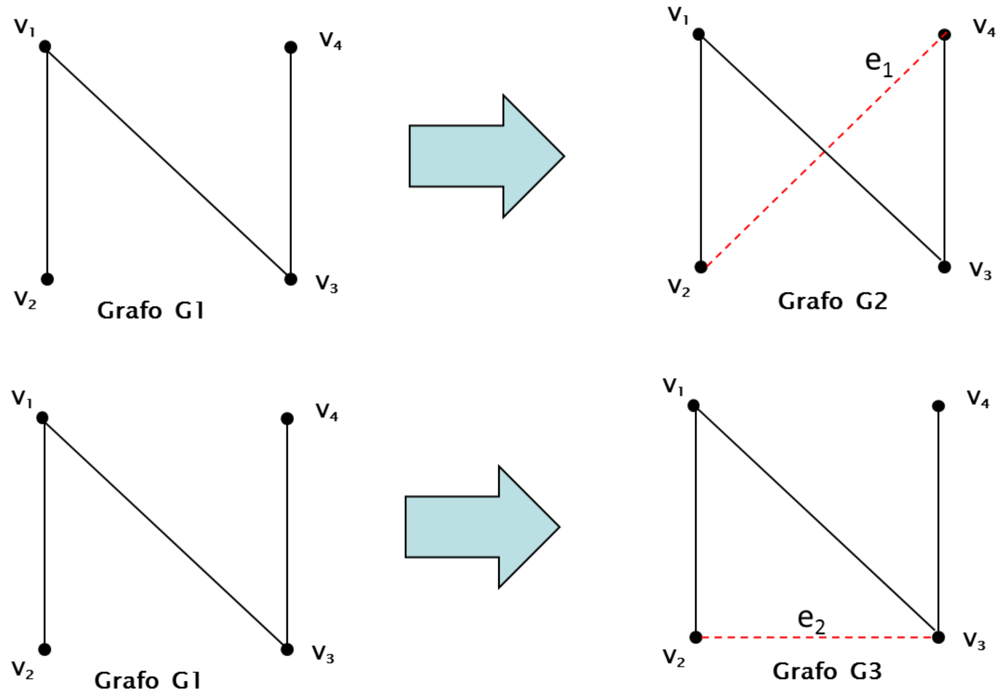
- ✓ O **grafo simples G1 não** é **hamiltoniano;**
- ✓ O **grafo simples G1** é **não hamiltoniano maximal,** uma vez que a adição de **qualquer** aresta transforma **G1** em **G2** que é hamiltoniano; ($\mathbf{V_1}V_2V_3V_4\mathbf{V_1}$)
- ✓ Com a adição de $\mathbf{e_1}$ em **G1**, obtem-se **G2** que é **hamiltoniano**.

Grafo não hamiltoniano maximal
Exemplo



- ✓ O **grafo simples G1 não** é **hamiltoniano;**
- ✓ O **grafo simples G1** é **não hamiltoniano maximal,** uma vez que a adição de **qualquer** aresta transforma **G1** em **G2** que é hamiltoniano; ($\mathbf{V_2}V_1V_3V_4\mathbf{V_2}$)
- ✓ Com a adição de $\mathbf{e_2}$ em **G1**, obtem-se **G3** que é **hamiltoniano**.

Grafo não hamiltoniano maximal Contra-Exemplo

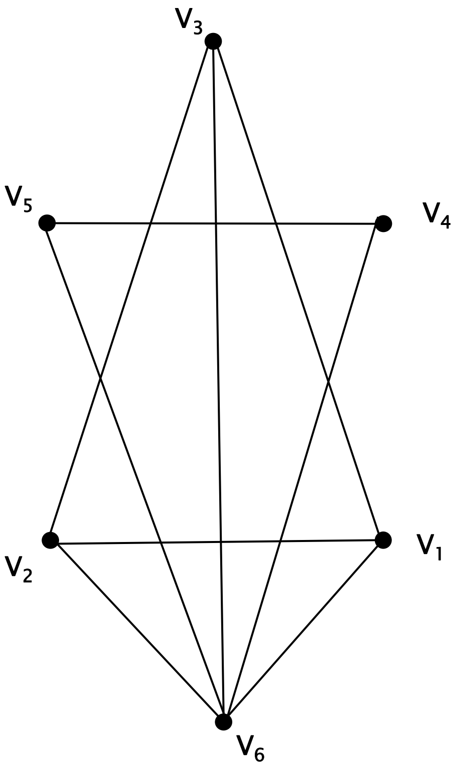


- ✓ O **grafo simples G1 não** é **hamiltoniano;**
- ✓ Com a adição de $\mathbf{e_1}$ em **G1**, obtem-se **G2** que é **hamiltoniano.** ($\mathbf{V_1}V_2V_4V_3\mathbf{V_1}$)
- ✓ Por outro lado, se a aresta $\mathbf{e_2}$ for adicionada ao **grafo G1**, o grafo resultante **G2** não é hamiltoniano.
- ✓ Portanto, não é adição de qualquer aresta que torna **G1** hamiltoniano, o que faz com que **G**1 não possa ser caracterizado como **não hamiltoniano maximal**.

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

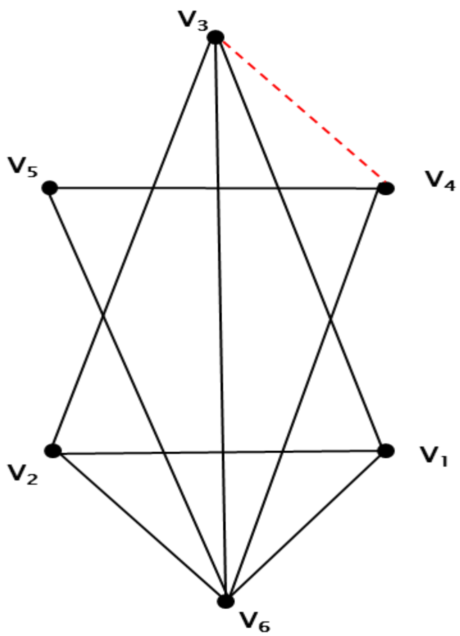
- O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?

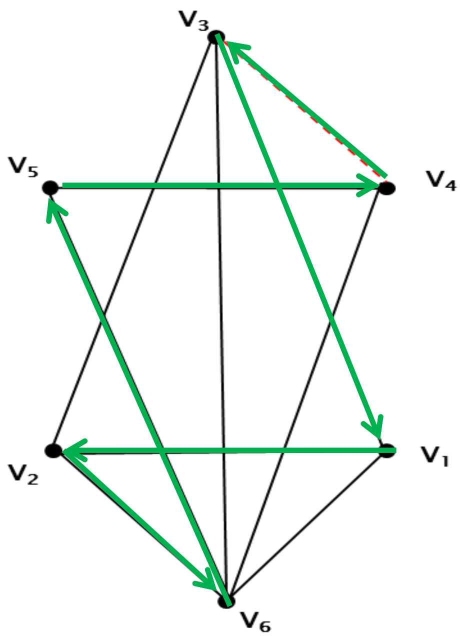


Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?



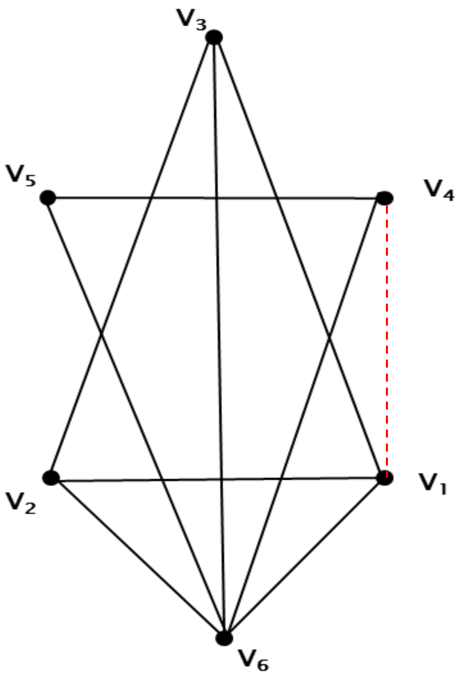


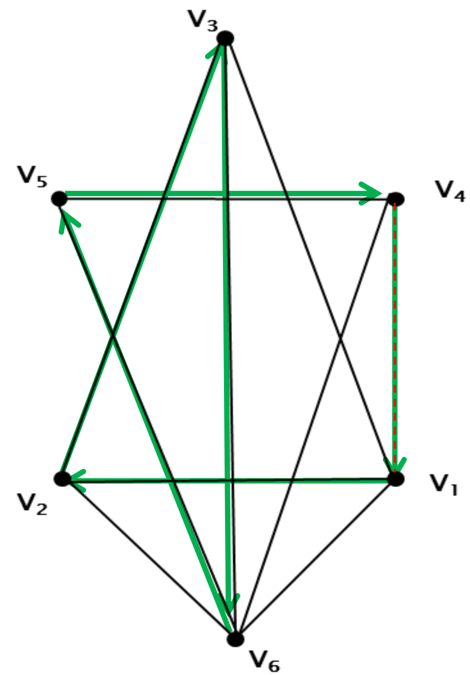
- ✓ Adicionando-se a aresta V_3V_4, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_2V_6V_5V_4V_3\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?



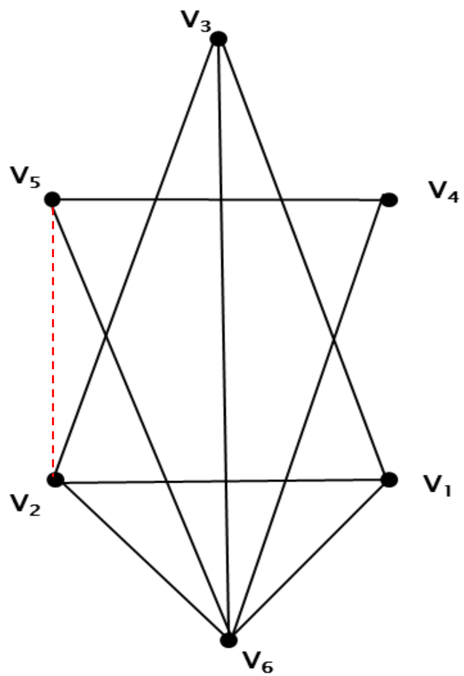


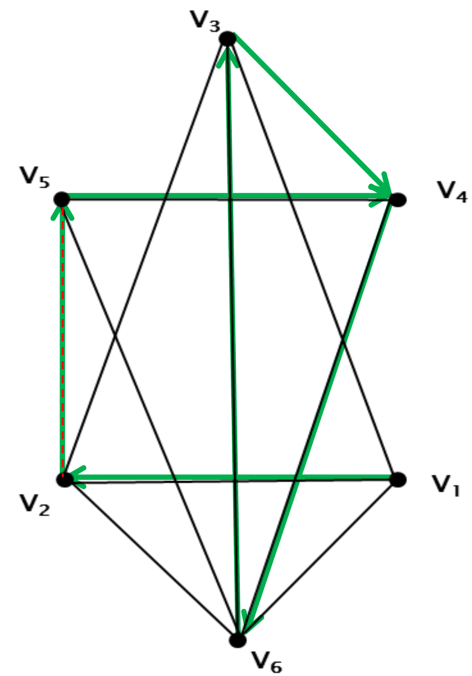
- ✓ Adicionando-se a aresta V_4V_1, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_2V_3V_6V_5V_4\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?



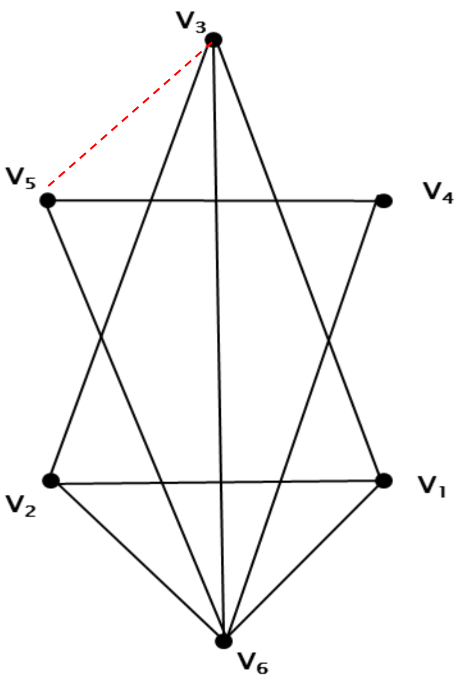


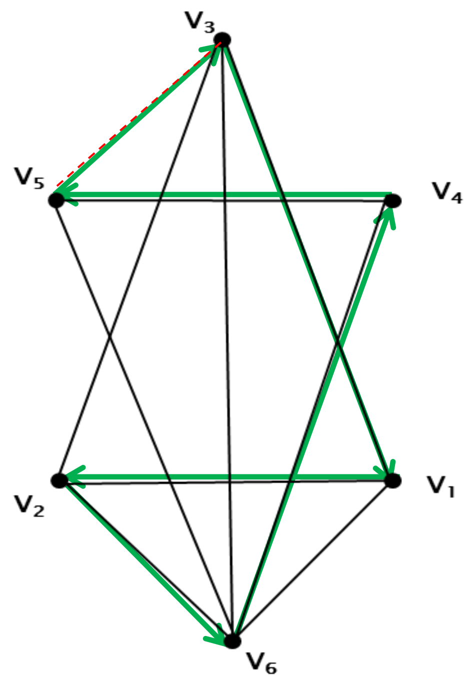
- ✓ Adicionando-se a aresta V_5V_2, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_2V_5V_4V_6V_3\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?



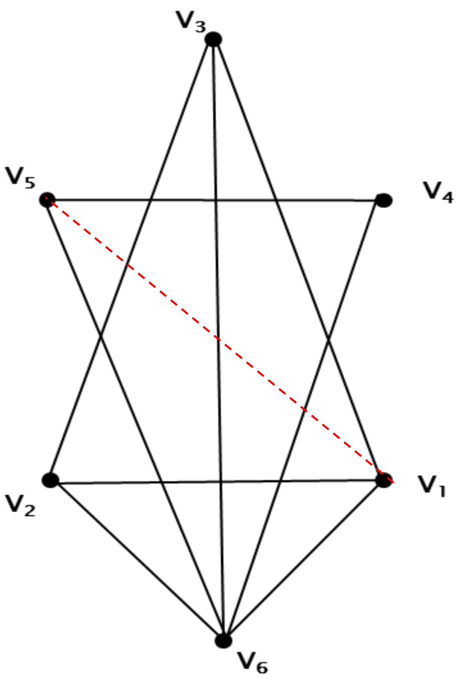


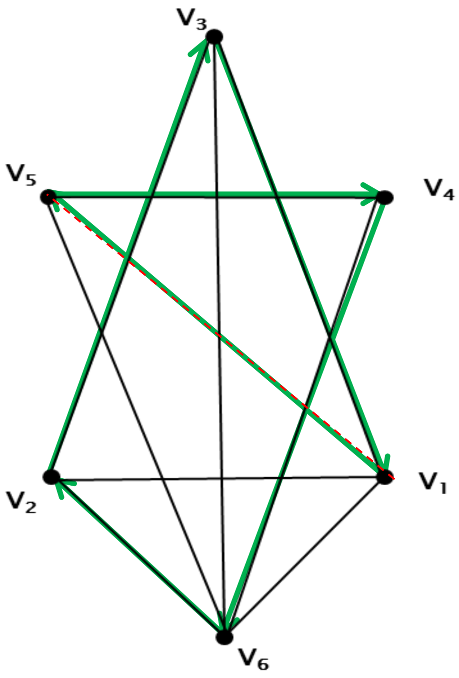
- ✓ Adicionando-se a aresta V_5V_3, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_2V_6V_4V_5V_3\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?



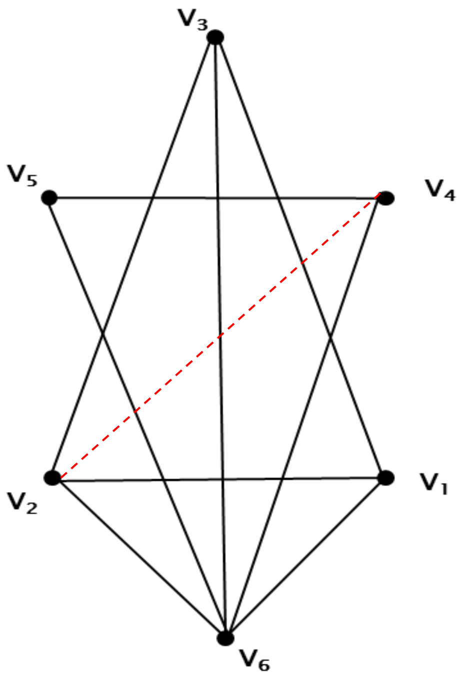


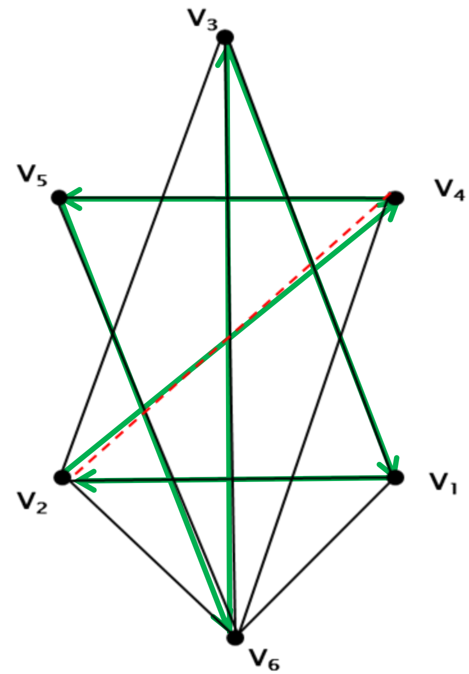
- ✓ Adicionando-se a aresta V_5V_3, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_5V_4V_6V_2V_3\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal

Exercício

- ✓ O grafo da Figura abaixo é **não hamiltoniano maximal** ?
- ✓ Ou seja, a adição de qualquer aresta entre vértices não adjacentes irá redundar um grafo Hamiltoniano?

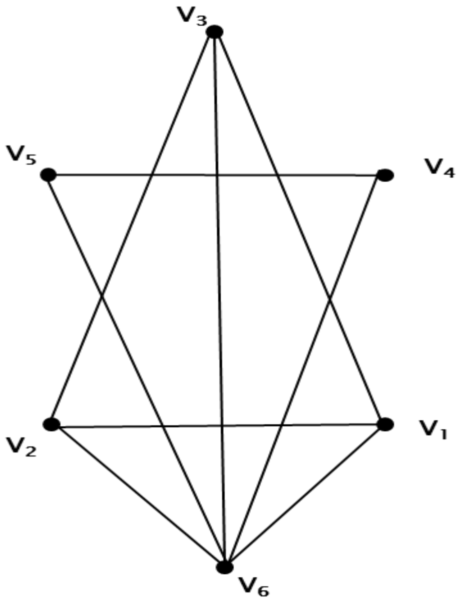




- ✓ Adicionando-se a aresta V_2V_4, obtém-se o **Ciclo Hamiltoniano** $\mathbf{V_1}V_2V_4V_5V_6V_3\mathbf{V_1}$

Grafo não hamiltoniano maximal
Conclusão

- ✓ Em razão do Processo de Construção passo a passo descrito nos slides anteriores, observa-se que o grafo G apresentado é Não Hamiltoniano Maximal, uma vez que adicionando-se qualquer aresta entre vértices não adjacentes produz-se um novo Grafo que é Hamiltoniano!



É Não Hamiltoniano Maximal

Teorema de Dirac

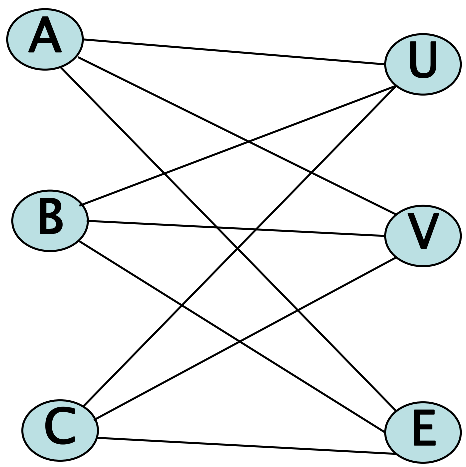
Grau

✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, **n ≥ 3**. Se para todo vértice **v ε V**, **d(v) ≥ n/2**, então **G** é **Hamiltoniano**.

Teorema de Dirac - Exemplo

Grau

✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, **n ≥ 3**. Se para todo vértice **v ε V**, **d(v) ≥ n/2**, então **G** é **Hamiltoniano**.

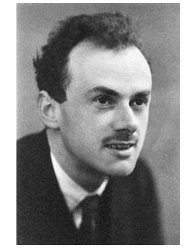


d(A) = 3 >= 6/2
d(B) = 3 >= 6/2
d(C) = 3 >= 6/2
d(U) = 3 >= 6/2
d(V) = 3 >= 6/2
d(E) = 3 >= 6/2

O Teorema de Dirac é atendido!

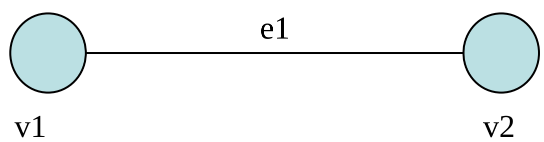
Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

Teorema de Dirac – Observação 1



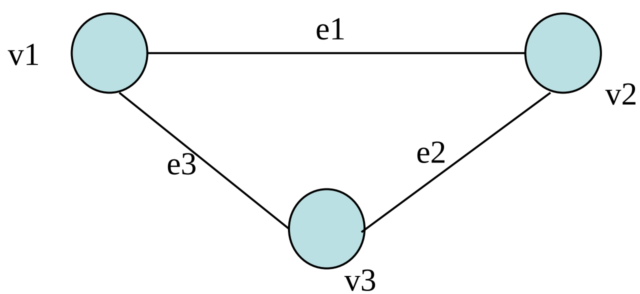
✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, **n ≥ 3**. Se para todo vértice **v ε V**, **d(v) ≥ n/2**, então **G** é **Hamiltoniano**.

✓ n deve ser **maior ou igual a 3**, pois se tivermos apenas 2 vértices não se consegue definir um ciclo;



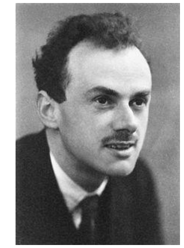
v1**e1**v2**e1**v1 **não** é ciclo !

✓ Com n>= 3, é possível construir-se um ciclo hamiltoniano:



v1e1v2e2v3e3**v1** é ciclo hamiltoniano!

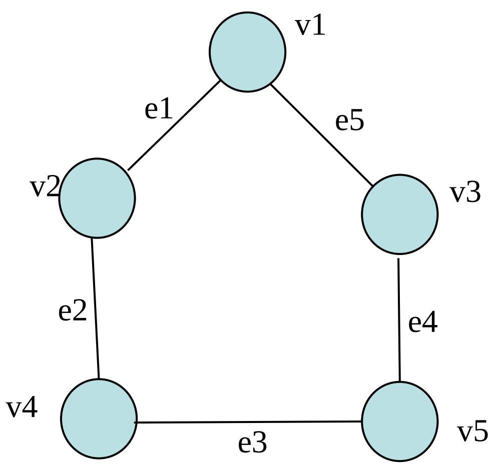
Teorema de Dirac – Observação 2



- Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, **n ≥ 3**. Se para todo vértice **v ε V**, **d(v) ≥ n/2**, então **G** é **Hamiltoniano**.

- A condição imposta pelo **Teorema de Dirac** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!

- Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição d(v) >= n/2. Exemplo:



d(v1) = 2 < 5/2
d(v2) = 2 < 5/2
d(v3) = 2 < 5/2
d(v4) = 2 < 5/2
d(v5) = 2 < 5/2

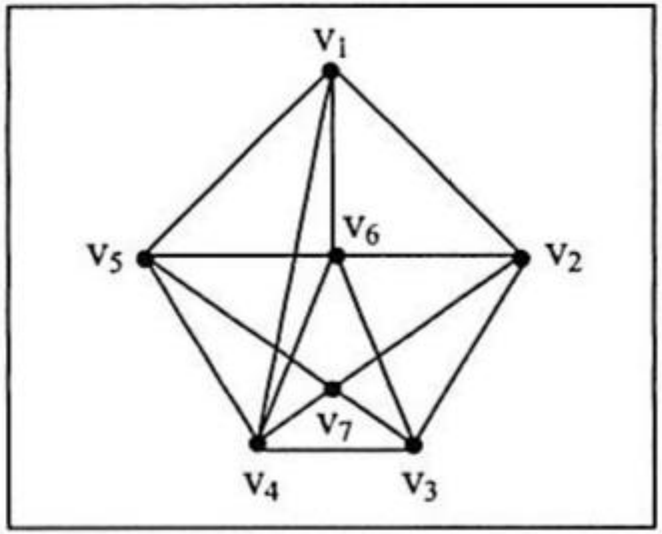
O Teorema Dirac ÑÃO é atendido!

Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5v1 é ciclo hamiltoniano !
Logo, o Grafo é hamiltoniano!

Teorema de Dirac - Exercício

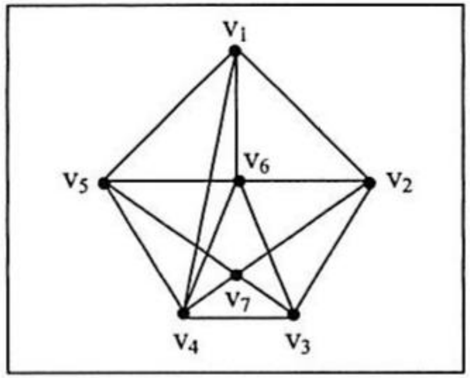
✓ O Grafo **G** abaixo, com 7 vértices, é um **Grafo Hamiltoniano** ?



Grafo G

Teorema de Dirac - Exercício

- O Grafo **G** abaixo, com 7 vértices, é um **Grafo Hamiltoniano** ?



Grafo G

- Cálculo do Grau dos Vértices do Grafo G:

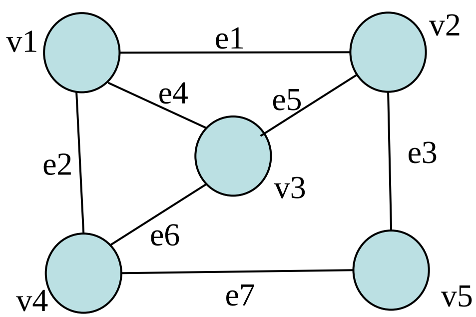
vértice	grau
v_1	4
v_2	4
v_3	4
v_4	5
v_5	4
v_6	5
v_7	5

- Como **n=7** vértices, observa-se que, a partir da tabela acima, todos os vértices têm grau acima de **n/2**;
- Portanto, o **Grafo G acima é Hamiltoniano**;
- Um exemplo de Circuito Hamiltoniando do Grafo é: $\mathbf{V_2}V_6V_5V_1V_4V_7V_3\mathbf{V_2}$

Teorema de Ore

- ✓ Corolário do Teorema de Dirac;
- ✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, |V| = **n ≥ 3**. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , **u ε V** e **v ε V**, **d(u) + d(v) ≥ n**, então **G** é **Hamiltoniano**.

Exemplo:



d(v1) + d(v5) = 3 + 2 >= 5
d(v2) + d(v4) = 3 + 3 >= 6
d(v3) + d(v5) = 3 + 2 >= 5
d(v4) + d(v2) = 3 + 3 >= 5
d(v5) + d(v3) = 2 + 3 >= 5
d(v5) + d(v1) = 2 + 3 >= 5

O Teorema de **Ore** é atendido!

Portanto existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

- ✓ O ciclo **v1**e4v3e6v4e7v5e3v2e1**v1** é **hamiltoniano**. Logo, o grafo é **hamiltoniano**!

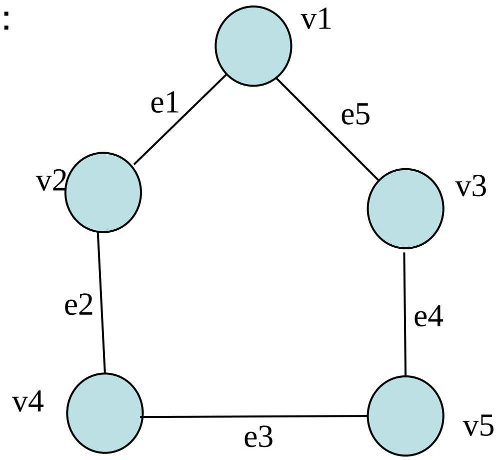
Teorema de Ore - Observação

- ✓ Seja **G = (V,E)** um grafo simples com **n** vértices, |V| = **n ≥ 3**. Se para cada par de vértices não adjacentes u e v , **u ε V** e **v ε V**, **d(u) + d(v) ≥ n**, então **G** é **Hamiltoniano**.

- ✓ A condição imposta pelo **Teorema de Ore** é **SUFICIENTE**, mas **NÃO Necessária**!


- ✓ Isso significa que podem existir **Grafos Hamiltonianos** que **não** verificam a condição d(u) + d(v) >= n, sendo u e v vértices quaisquer não adjacentes.

Exemplo:



d(v1) + d(v4) = 2 + 2 < 5

O Teorema Ore NÃO é atendido!

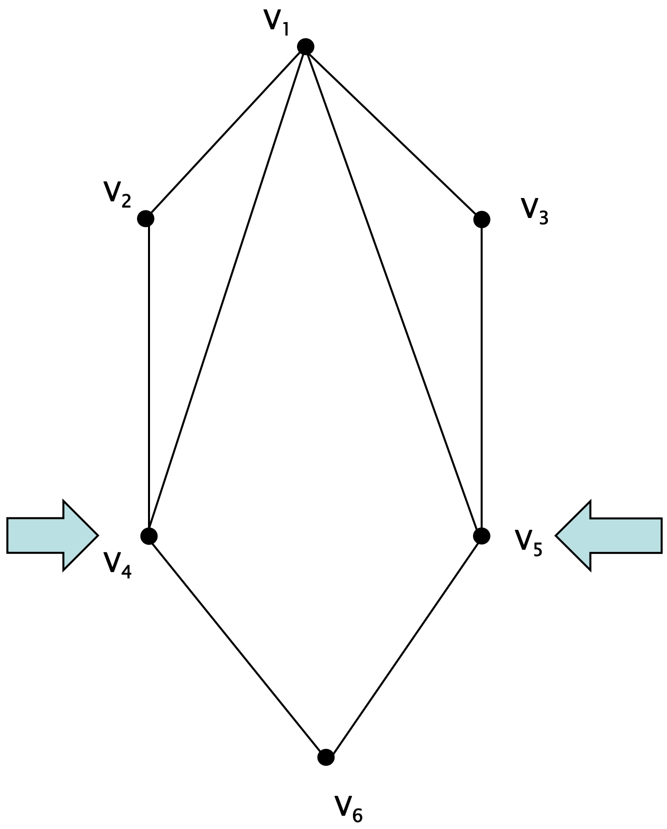
Mas, existe um ciclo hamiltoniano no grafo e, assim, **o Grafo é hamiltoniano.**

v1e1v2e2v4e3v5e4v3e5v1 é ciclo hamiltoniano !
Logo, o Grafo é hamiltoniano!


Fechamento de um Grafo G

- ✓ Seja **G** = (**V,E**) um grafo simples;
- ✓ Se existem dois vértices não adjacentes u_1 e v_1 em V, tal que $d(u_1) + d(v_1) \geq n$ em **G**; una-os por uma aresta, formando o supergrafo **G1**;
- ✓ Se existem dois vértices não adjacentes u_2 e v_2 em **G1**, tal que $d(u_2) + d(v_2) \geq n$ em **G1**, una-os por uma aresta, formando o supergrafo **G2**;
- ✓ Continue esse processo, recursivamente, unindo pares de vértices não adjacentes, cuja soma de graus seja no mínimo n, até que não restem mais pares para serem conectados;
- ✓ O supergrafo final obtido é chamado **Fechamento** de G e é denotado por **c**(G).

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G

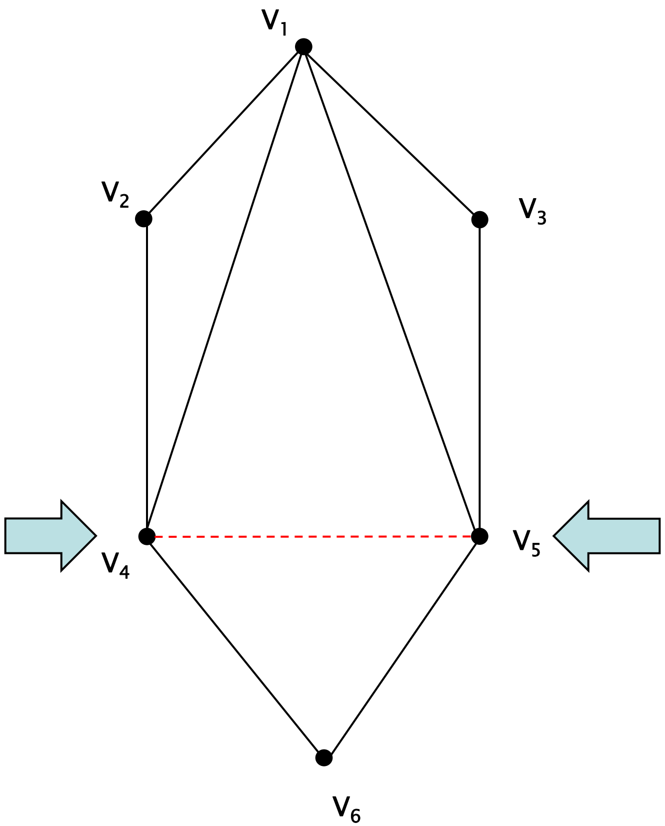
n=6

$d(V_4) = 3$

$d(V_5) = 3$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G1

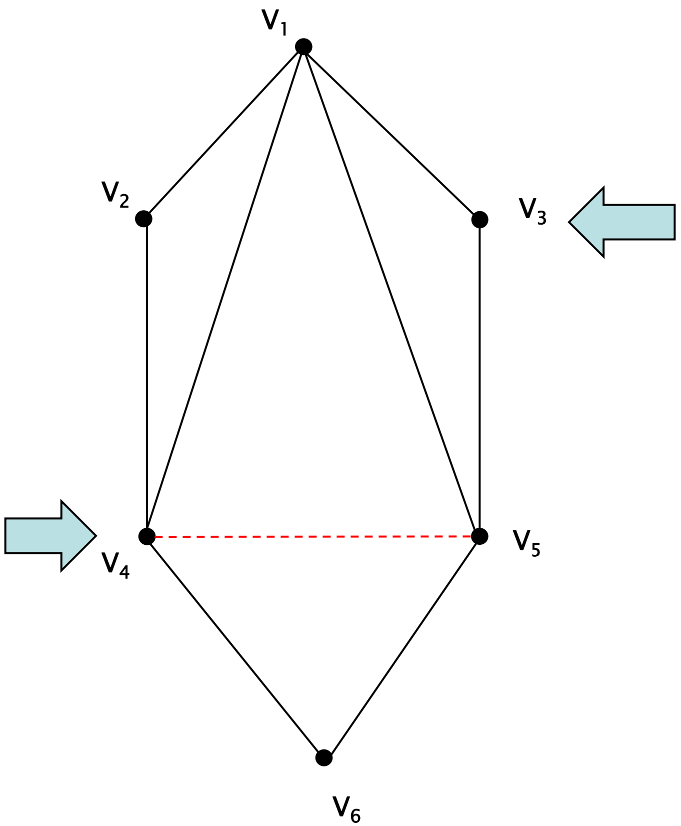
n=6

$d(V_4) = 3$

$d(V_5) = 3$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G1

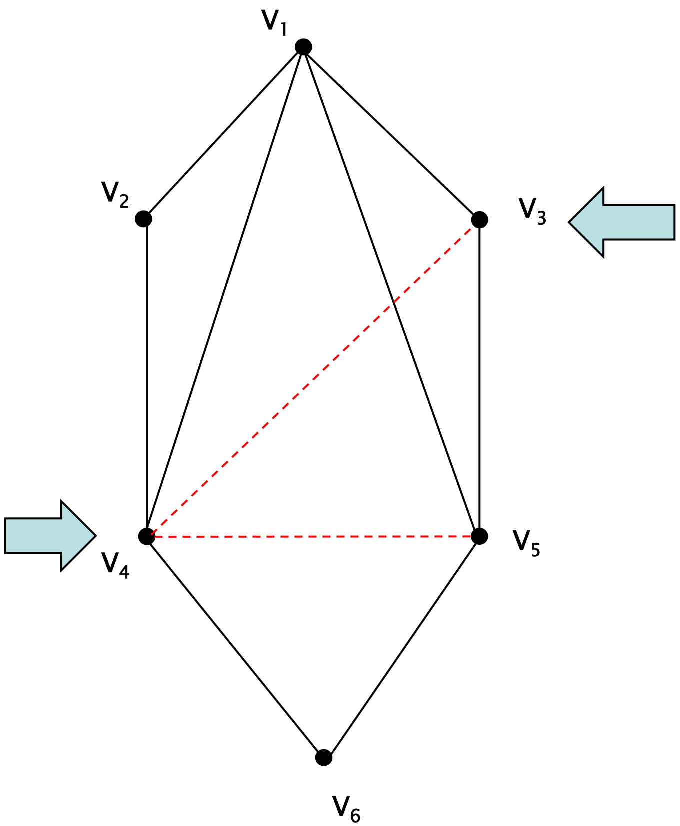
n=6

$d(V_3) = 2$

$d(V_4) = 4$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G2

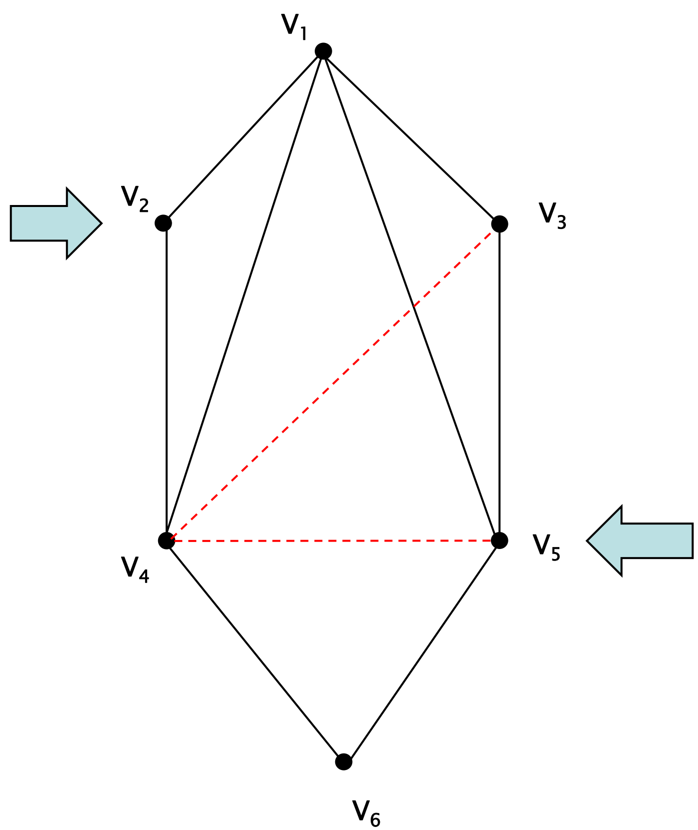
n=6

$d(V_3) = 2$

$d(V_4) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G2

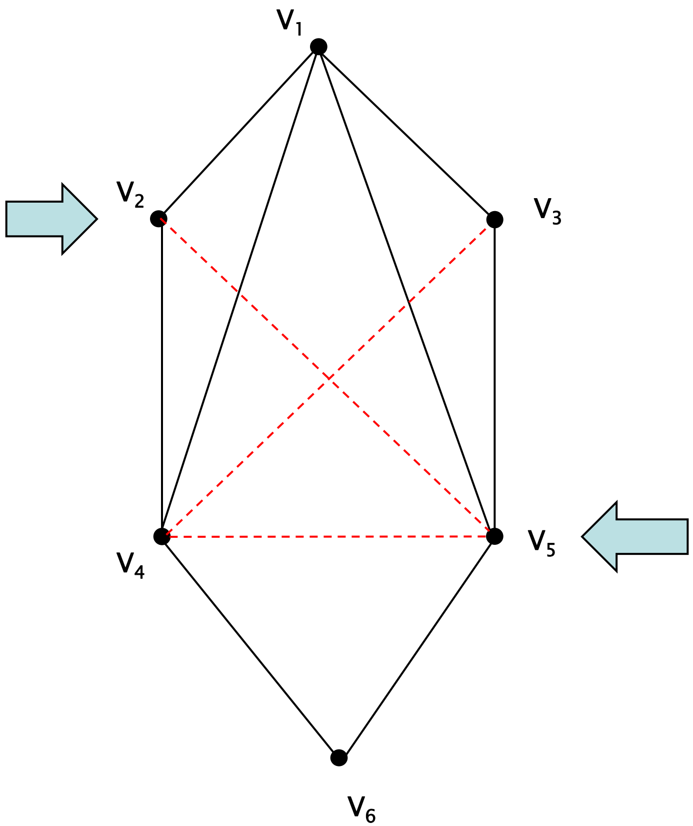
$n=6$

$d(V_2) = 2$

$d(V_5) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G3

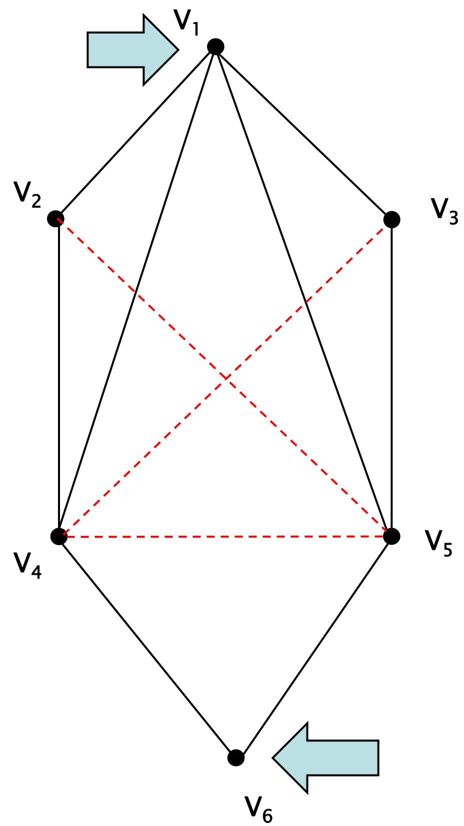
n=6

$d(V_2) = 2$

$d(V_5) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G3

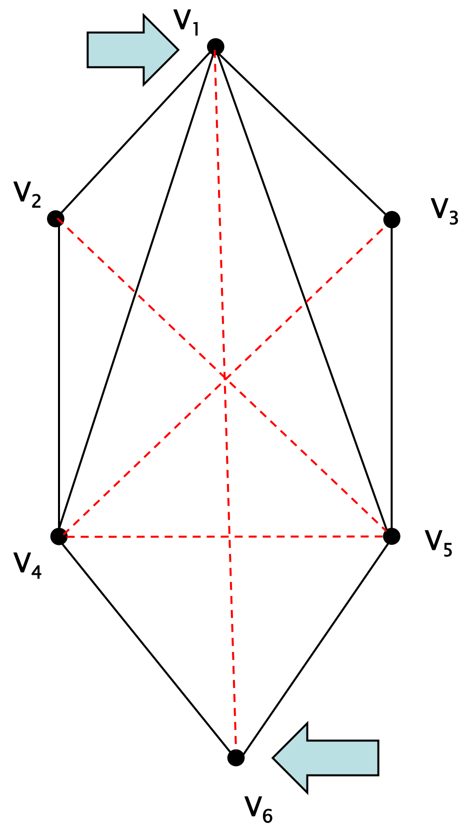
n=6

$d(V_1) = 4$

$d(V_6) = 2$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G4

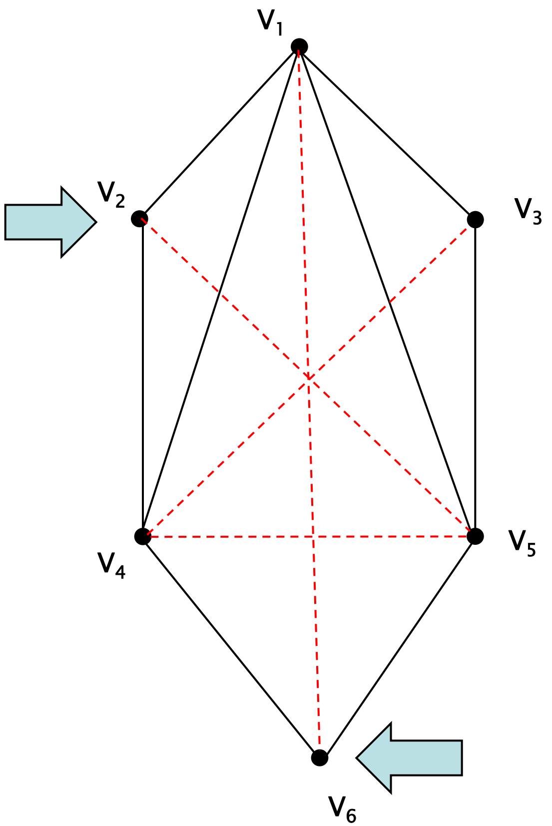
n=6

$d(V_1) = 4$

$d(V_6) = 2$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G4

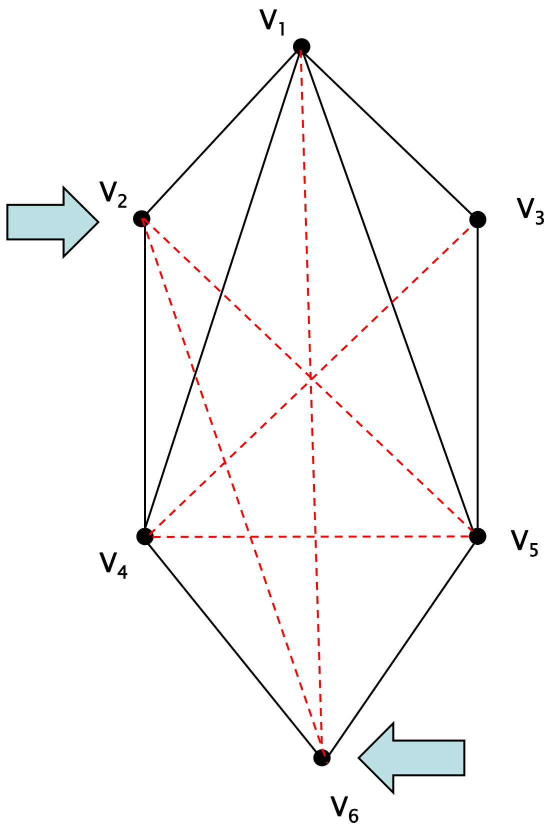
n=6

$d(V_2) = 3$

$d(V_6) = 3$

$$d(u_1) + d(v_1) \geq n$$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G5

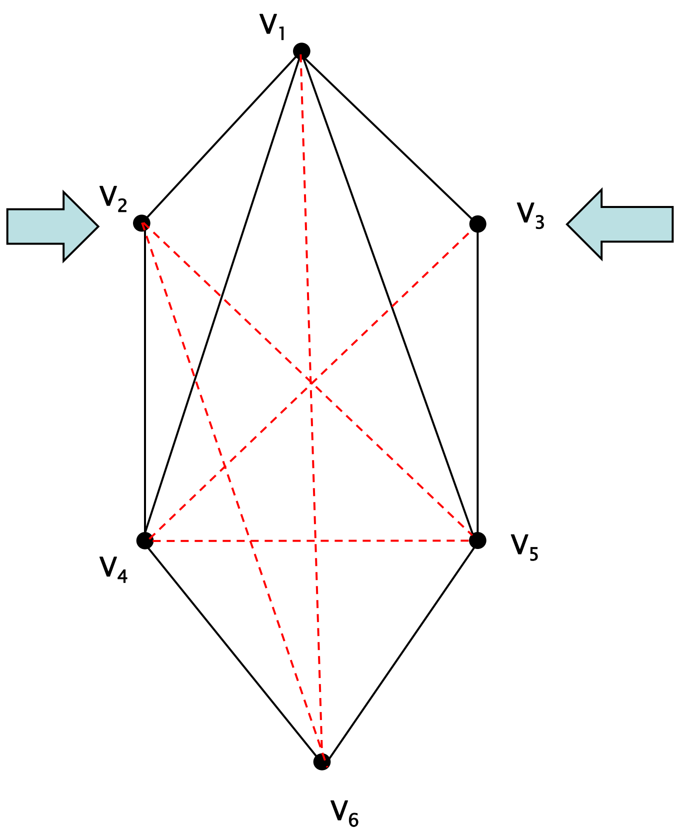
n=6

$d(V_2) = 3$

$d(V_6) = 3$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G5

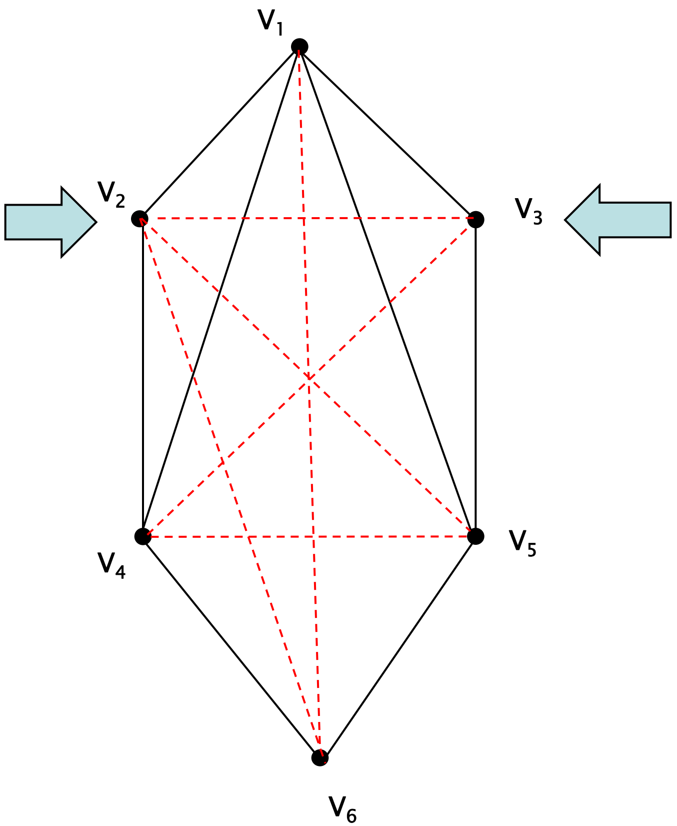
n=6

$d(V_3) = 3$

$d(V_2) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G6

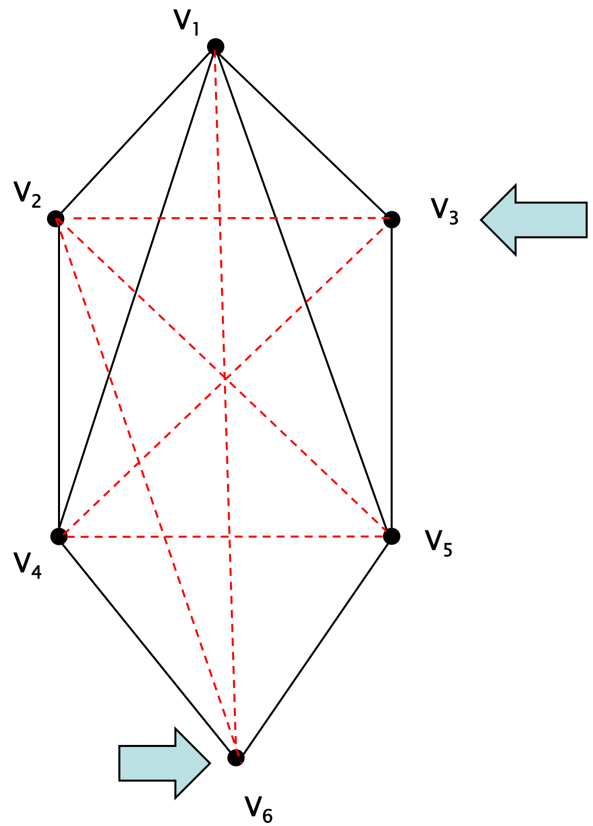
n=6

$d(V_3) = 3$

$d(V_2) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G6

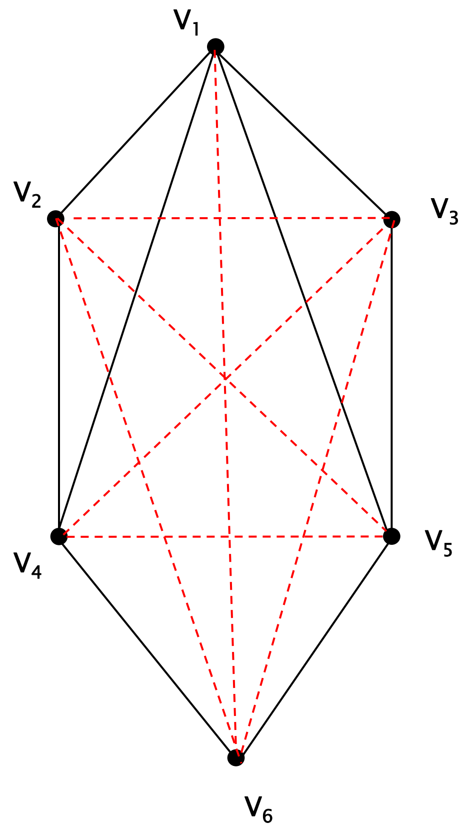
n=6

$d(V_3) = 4$

$d(V_6) = 4$

$d(u_1) + d(v_1) \geq n$

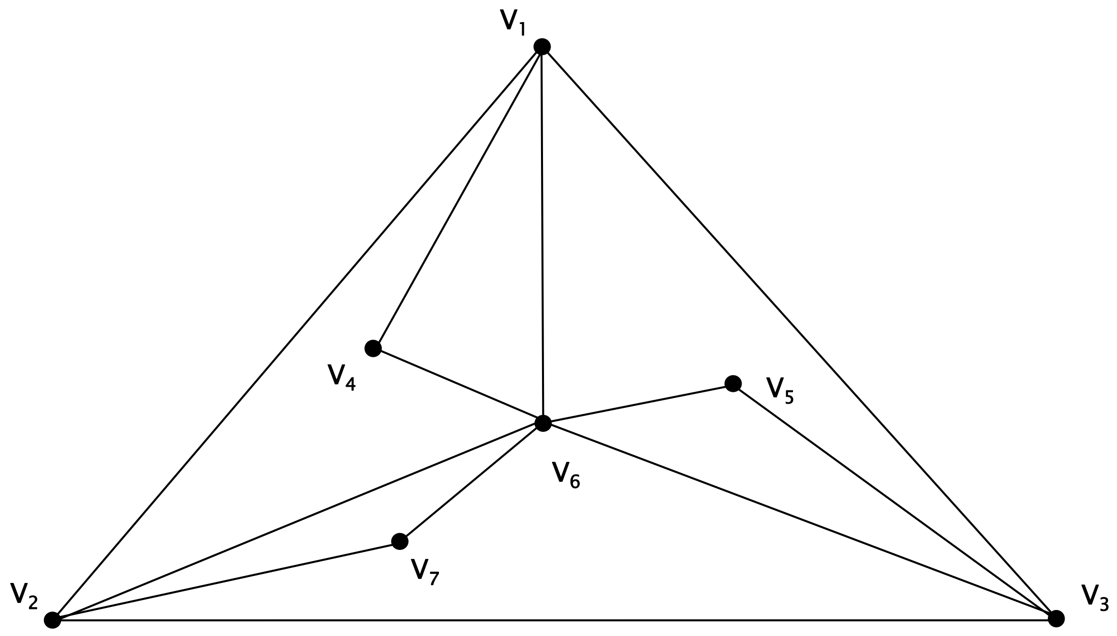
Fechamento de um Grafo G
Exemplo de Construção



Grafo G7 = c(G)

O Fechamento é obtido após 7 passos!

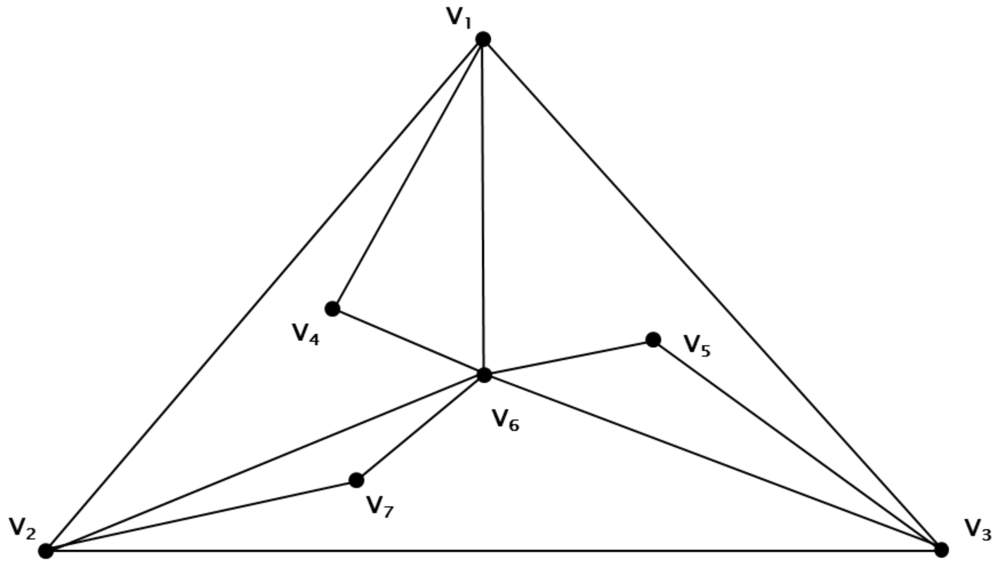
Fechamento de um Grafo G
Outro Exemplo de Construção



Grafo G

n=7

Fechamento de um Grafo G
Outro Exemplo de Construção



Grafo G

- ✓ n=7
- ✓ Para qualquer par de vértices não adjacentes de G, d(u) + d(v) < 7
- ✓ Logo, tem-se c(G) = G.

Teorema de Bondy

- ✓ Um grafo simples **G** é **Hamiltoniano se e somente se** seu **Fechamento** c(G) for **Hamiltoniano**;

- ✓ Corolário: Seja **G** um grafo simples com **n ≥** 3 vértices. Se c(G) é completo, ou seja, **c(G) =** $\mathbf{k_n}$, então **G** é **Hamiltoniano**.

O problema do Caixeiro Viajante

- ✓ Suponha um vendedor que atue em várias cidades, sendo que algumas delas são conectadas por estradas;
- ✓ O trabalho do vendedor exige que ele visite cada uma das cidades;
- ✓ É possível para ele planejar uma viagem de carro, partindo e voltando a uma mesma cidade, visitando cada uma delas **exatamente uma vez**?
- ✓ Se tal viagem for possível, é possível planejá-la de modo a se **minimizar** a distância total percorrida?
- ✓ Esse problema é conhecido como o “**Problema do Caixeiro Viajante**”;

O problema do Caixeiro Viajante

- ✓ Esse problema poderia ser modelado por um **Grafo** G , no qual os **vértices** corresponderiam às **cidades** e dois vértices estariam unidos por uma **aresta** ponderada se e somente se as cidades correspondentes forem unidas por uma estrada, a qual não passa por nenhuma das outras cidades;

- ✓ O peso da aresta poderia representar a distância entre as cidades;

- ✓ O problema se resume a: "**O grafo G é hamiltoniano**?" Se **sim**, é possível construir um **ciclo hamiltoniano** de peso (comprimento) **mínimo** ?

- ✓ **Infelizmente**, não existe um algoritmo que possa resolver esse problema em **<u>Tempo Polinomial</u>**.

Problema do Caixeiro Viajante

- ✓ **Não** existe algoritmo **correto** e **eficiente** para este problema;

- ✓ O problema é atacado com **Heurísticas**;

- ✓ Na **Engenharia de Computação**, busca-se criar algoritmos com **tempo de execução aceitável** e ser uma solução ótima para o problema em todas as suas instâncias;

- ✓ Um algoritmo heurístico não cumpre uma dessas propriedades, podendo ser ou um algoritmo que encontra boas soluções a maioria das vezes, **mas não há garantias** de que sempre as encontrará.

Divisor de Águas

- ✓ A complexidade **Polinomial** representa o divisor de águas dentre as classes de Algoritmos;
- ✓ Algoritmos **polinomais** são considerados **tratáveis**;
- ✓ Algoritmos com complexidades superiores às polinomiais são **intratáveis**;
- ✓ Exemplo: Caixeiro Viajante – **TST** – Travelling Salesman Problem.