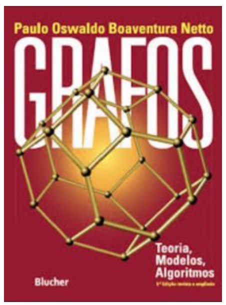
# Unidade 1 - Introdução à Teoria dos Grafos
# Conceitos Iniciais


Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

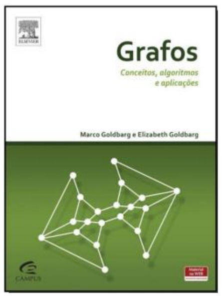
# Bibliografia

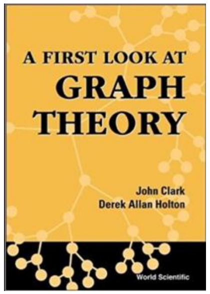

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997

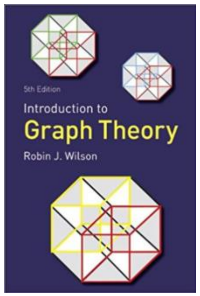


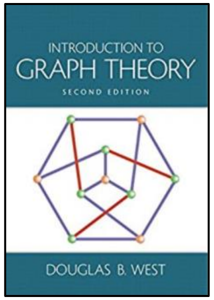


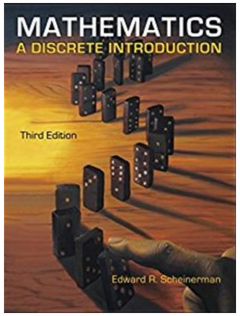


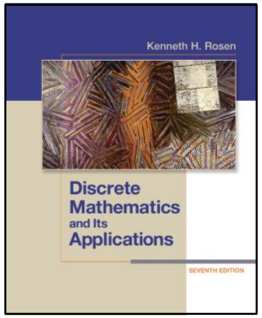


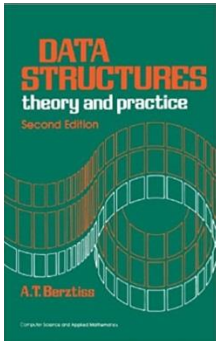



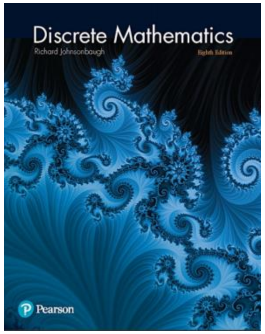



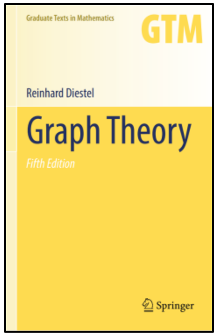



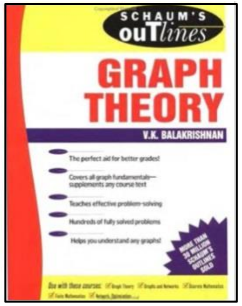




# Definição

**Definição 3.1** Um grafo G = (V(G),E(G)) ou G = (V,E) consiste de dois conjuntos finitos:

- V(G), (ou V), que é o conjunto de *vértices* do grafo, o qual é um conjunto não vazio de elementos chamados *vértices* e;
- E(G), (ou E), que é o conjunto de *arestas* do grafo, o qual é um conjunto (que pode ser vazio) de elementos chamados *arestas*.

A cada aresta e em E é atribuído um par não ordenado de vértices (u,v) chamados vértices-extremidade de e. Vértices também são referenciados como pontos ou nós.

# Grafos - Exemplo

**Exemplo 3.1** Seja o grafo G = (V,E), tal que

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$e_1 \leftrightarrow (a,b)$ $e_2 \leftrightarrow (b,c)$ $e_3 \leftrightarrow (c,c)$ $e_4 \leftrightarrow (c,e)$ $e_5 \leftrightarrow (d,f)$ $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
$e_7 \leftrightarrow (c,d)$ $e_8 \leftrightarrow (c,f)$ $e_9 \leftrightarrow (e,f)$ $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$ $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$ $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$

A Figura 3.1 mostra a representação em diagrama do grafo G.

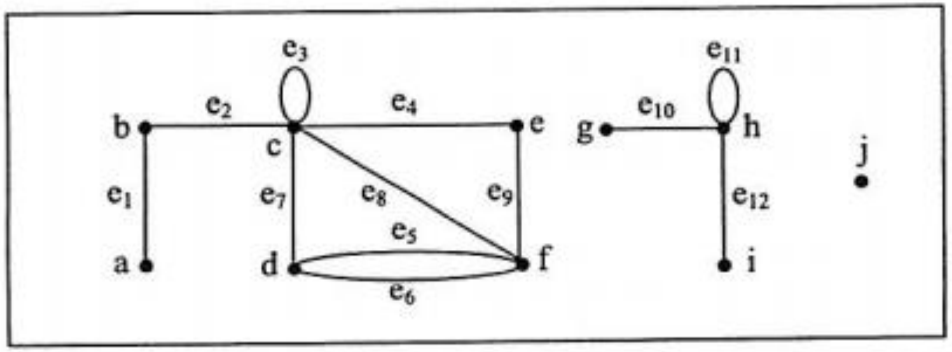



**Figura 3.1** Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

# Grafos - Observação

De acordo com a Definição 3.1, que formalmente define o conceito de grafo, é possível que o conjunto de aresta E seja vazio. Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado *grafo nulo*. A Figura 3.2 mostra o digrama de um grafo nulo com cinco vértices. Por outro lado, a Definição 3.1 exige que o conjunto de vértices seja não vazio, caso contrário, não se tem grafo.

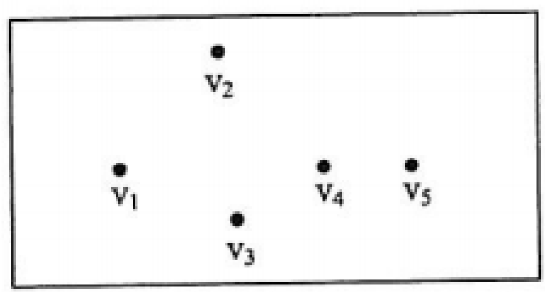



**Figura 3.2** Grafo nulo com cinco vértices.

# Grafos – Definições

- Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas *arestas paralelas* (por exemplo, as arestas $e_5$ e $e_6$ do grafo da Figura 3.1).
- Um vértice de G que não é extremidade de qualquer aresta é chamado *isolado* (por exemplo, o vértice j do grafo da Figura 3.1).
- Dois *vértices* que estão unidos por uma aresta são chamados *adjacentes* ou *vizinhos* (por exemplo, os vértices a e b do grafo da Figura 3.1, entre outros) (ver Figura 3.3).
- Duas *arestas* distintas $e_i$ e $e_j$ são *adjacentes* se têm um vértice em comum. Por exemplo, arestas $e_1$ e $e_2$ no grafo da Figura 3.1 (ver Figura 3.3).
- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado *conjunto vizinhança* de v e é notado por N(v). No grafo da Figura 3.1, por exemplo, N(f) = {c,d,e}.
- Um grafo é chamado *simples* se não tem *loops*, nem arestas paralelas (por exemplo, o grafo mostrado na Figura 3.4).

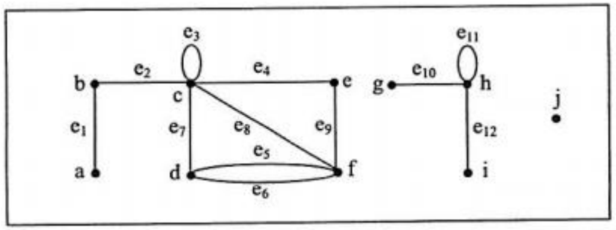



**Figura 3.1** Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

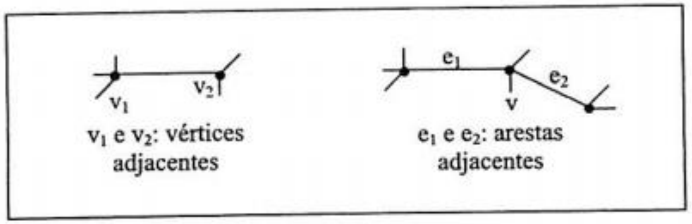



**Figura 3.3** Exemplos de vértices adjacentes ($v_1$ e $v_2$) e arestas adjacentes ($e_1$ e $e_2$).

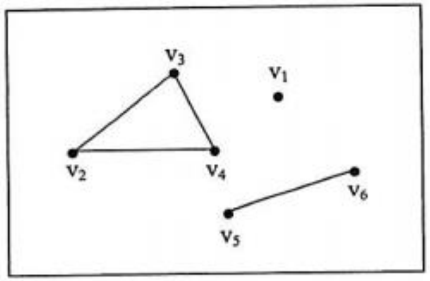



**Figura 3.4** Grafo simples: não tem *loops* e não tem arestas paralelas.

# Grafos - Definições

Seja G = (V,E) um grafo,

- diz-se que uma aresta e é *incidente* com o vértice v se v for um vértice-extremidade de e. Nesse caso, diz-se também que v é incidente a e;
- duas *arestas* incidentes com um mesmo vértice são *adjacentes* (arestas $e_1$ e $e_2$ na Figura 3.3 são incidentes com o mesmo vértice v e, conseqüentemente, são adjacentes);
- o *grau de um vértice* v, notado por d(v), é o número de arestas de G que são incidentes com v, contando cada *loop* duas vezes. É, pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta. Um vértice de grau 0 é um *vértice isolado,* e um vértice de grau 1 é um *vértice final*;
- um vértice de um grafo é *par* ou *ímpar* se o seu grau for par ou ímpar;
- a *seqüência de graus de um grafo* consiste nos graus de seus vértices escritos em ordem crescente, com repetições se necessário. Para os grafos da Figura 3.5, essas seqüências são (1,1,2,2,2) (grafo I); (1,1,2,2,2) (grafo II); e (1,2,3,4,8) (grafo III).

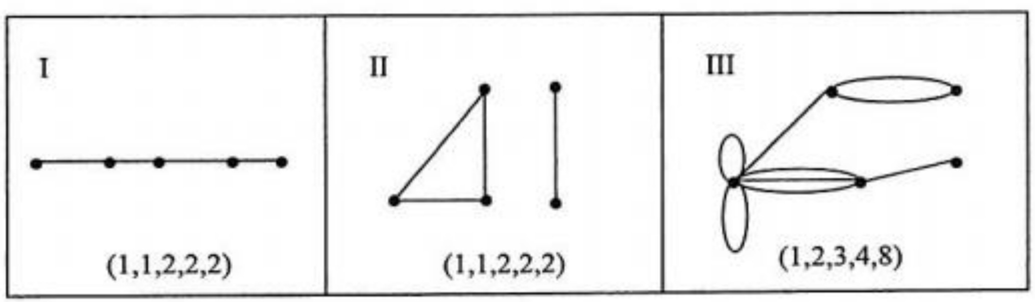



**Figura 3.5** Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2. O grafo em III tem um vértice final, um de grau 2, um de grau 3, um de grau 4 e um de grau 8.

# Grafos – Exemplo

**Exemplo 3.2** No grafo G = (V,E) mostrado na Figura 3.6,

- vértices $v_1$ e $v_2$ são adjacentes;
- vértices $v_1$ e $v_3$ são não adjacentes;
- arestas $(v_1,v_2)$ e $(v_2,v_3)$ são adjacentes;
- arestas $(v_1,v_2)$ e $(v_3,v_4)$ não são adjacentes;
- vértices $v_3$ e $v_4$ são incidentes com a aresta $(v_3,v_4)$, e nenhum outro vértice é incidente com essa aresta; e
- os graus dos vários vértices são: $d(v_1) = 2$; $d(v_2) = 8$; $d(v_3) = 3$; $d(v_4) = 1$; $d(v_5) = 2$; $d(v_6) = 3$; $d(v_7) = 4$; $d(v_8) = 1$ e $d(v_9) = 0$.

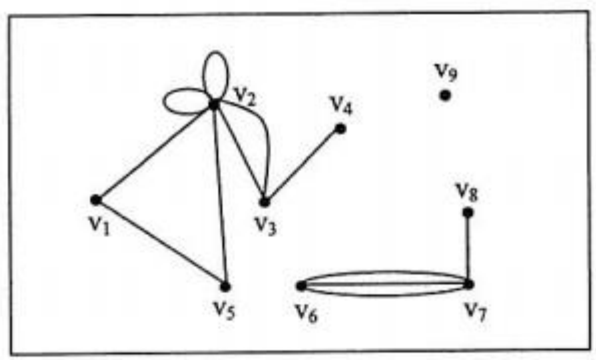



**Figura 3.6** Grafo com nove vértices e 12 arestas.

# Grafos - Exemplo

Considere o grafo com cinco vértices e oito arestas mostrado na Figura 3.7. Para esse grafo, tem-se $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 4$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$. Note que $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times$ o número de arestas do grafo. Esse resultado não é coincidência e é estabelecido pelo Teorema 3.1.

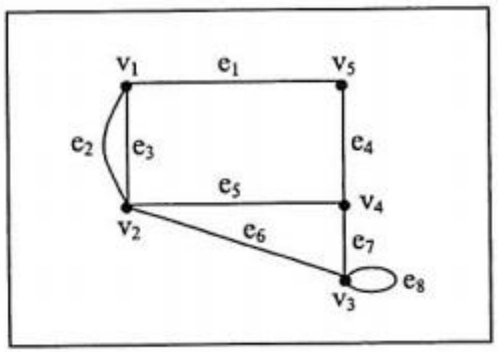



**Figura 3.7** Grafo com cinco vértices e oito arestas.

**Teorema 3.1** Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

# Grafos – Teorema 3.2

**Teorema 3.2** Em um grafo $G = (V,E)$, tal que $V = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ e $|E| = \{e_1, e_2, ..., e_m\} = m$, o número de vértices ímpares é sempre par.

**Prova:** O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2m - \sum_{u \in P} d(u)$$

A diferença acima é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma $\sum_{w \in I} d(w)$ é ímpar (uma vez que cada um eles é o grau de um vértice ímpar) e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que a soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar) ♦.

Note que nem sempre é fato que um grafo deve ter um número ímpar de vértices pares. Considere, por exemplo, o grafo da Figura 3.8, que tem um número par (quatro) de vértices pares (vértices de grau 2).

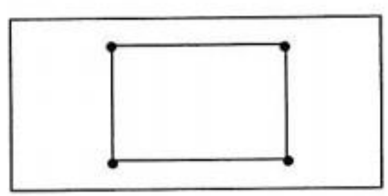


**Figura 3.8** Grafo com um número par de vértices pares.

# Grafo Regular

Em Teoria dos grafos, um **grafo regular** é um grafo onde cada vértice tem o mesmo número de adjacências, i.e. cada vértice tem o mesmo grau ou valência.

Um grafo regular com vértices de grau $k$ é chamado um grafo $k$**-regular** ou grafo regular de grau $k$.

**Definição 3.4** Seja o grafo G = (V,E), se para algum inteiro positivo k, d(v) = k para todo vértice v ∈ V, então G é chamado *k-regular*. Um *grafo regular* é um grafo que é k-regular para algum k.

**Observação 3.1** Em Teoria dos Grafos, os chamados *grafos cúbicos* (3-regulares) são particularmente importantes. Note que o grafo nulo G = (V,∅) é um grafo regular de grau 0.

**Exemplo 3.4** O grafo da Figura 3.8 é 2-regular. A Figura 3.9 mostra o único grafo 1-regular, dois grafos 2-regular e 2 grafos 3-regular.

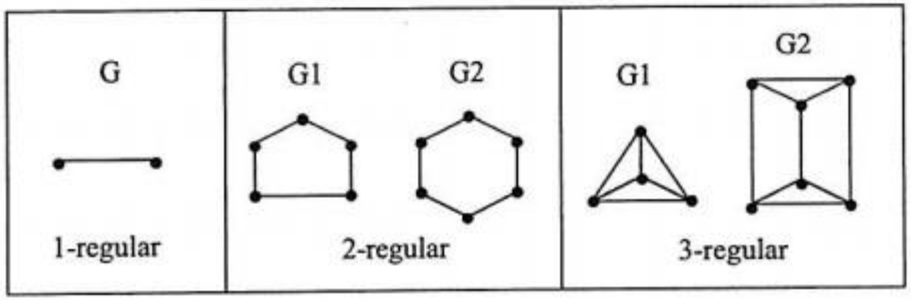



**Figura 3.9** Grafos regulares.

Freqüentemente, acontece o caso de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente. Para muitos propósitos, esses dois grafos são essencialmente o mesmo grafo. A Definição 3.5 trata formalmente dessa situação.

# Grafos – Isomorfismo

**Definição 3.5** Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são *isomorfos* se:

1. existir uma função bijetora f, do conjunto de vértices de G1, no conjunto de vértices de G2 ($f:V1 \rightarrow V2$) (f é total);
2. existir uma função bijetora g, do conjunto de arestas de G1, no conjunto de arestas de G2 ($g:E1 \rightarrow E2$) (g é total),

tal que uma aresta *e* é incidente a $v_1$ e $v_2$ em G1 se e somente se a aresta g(e) for incidente a $f(v_1)$ e $f(v_2)$ em G2. O par de funções f e g é chamado um isomorfismo de G1 em G2.

Parafraseando a Definição 3.5, diz-se que o grafo G1 = (V1,E1) é *isomorfo* ao grafo G2 = (V2,E2) se existir uma correspondência entre os conjuntos de vértices V1 e V2 e uma correspondência entre os conjuntos de arestas E1 e E2, de tal maneira que, se $e_1$ for uma aresta com vértices-extremidade $u_1$ e $v_1$ em G1, então a aresta correspondente $e_2$ em G2 (isto é, $g(e_1)$) deve ter como vértices-extremidade os vértices $u_2$ e $v_2$ em G2 que correspondem a $u_1$ e $v_1$, respectivamente; se os vértices $v_1$ e $v_2$ forem adjacentes em G1, os vértices $f(v_1)$ e $f(v_2)$ devem ser adjacentes em G2.

# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.5** Os grafos G1 e G2 mostrados na Figura 3.10 são isomorfos.

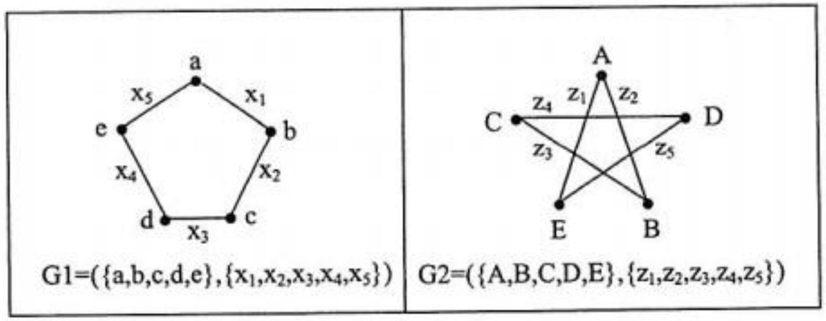



**Figura 3.10** Grafos isomorfos G1 e G2.

Para os grafos G1 e G2 da Figura 3.10, um isomorfismo pode ser estabelecido como as funções bijetoras f e g, definidas a seguir, que preservam a relação de adjacência entre os vértices.

(1) $f:\{a,b,c,d,e\}\rightarrow\{A,B,C,D,E\}$, tal que:

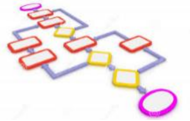
| x | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | B | C | D | E |

$x_1 \leftrightarrow (a,b)$. $g(x_1)$ deve ter como imagem a aresta que une f(a) a f(b), que é a aresta $(A,B) \leftrightarrow z_2$
$x_2 \leftrightarrow (b,c)$. $g(x_2)$ deve ter como imagem a aresta que une f(b) a f(c), que é a aresta $(B,C) \leftrightarrow z_3$
$x_3 \leftrightarrow (c,d)$. $g(x_3)$ deve ter como imagem a aresta que une f(c) a f(d), que é a aresta $(C,D) \leftrightarrow z_4$
$x_4 \leftrightarrow (d,e)$. $g(x_4)$ deve ter como imagem a aresta que une f(d) a f(e), que é a aresta $(D,E) \leftrightarrow z_5$
$x_5 \leftrightarrow (e,a)$. $g(x_5)$ deve ter como imagem a aresta que une f(e) a f(a), que é a aresta $(E,A) \leftrightarrow z_1$

A função g, portanto, é definida como:

(2) $g:\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}\rightarrow\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}$

| x | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_1$ |



QualitSys

# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.6** Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura 3.11, são isomorfos.

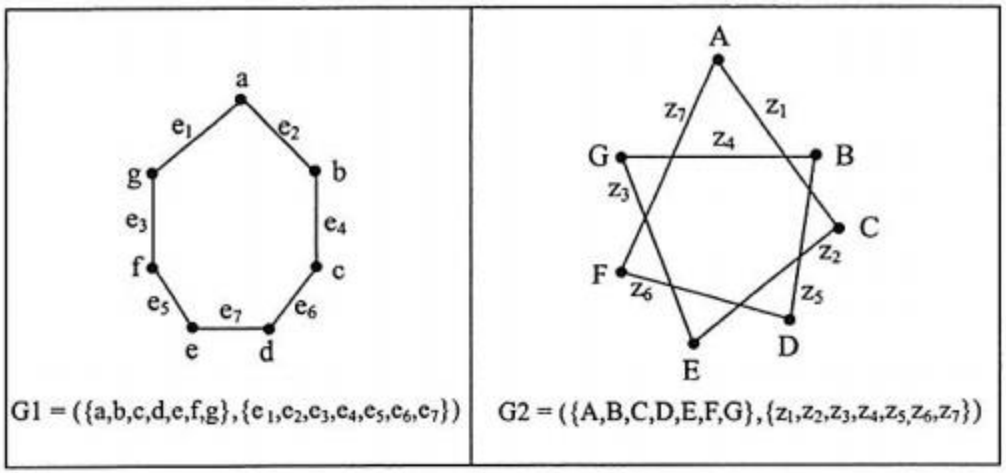



**Figura 3.11** Grafos isomorfos G1 e G2.

As funções f e g que definem o isomorfismo são:

(1) f:{a,b,c,d,e,f,g}→{A,B,C,D,E,F,G}, tal que:

| x | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | C | E | G | B | D | F |

(2) g:$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\} \rightarrow \{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7\}$

| x | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_5$ | $e_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | $z_7$ | $z_1$ | $z_6$ | $z_2$ | $z_5$ | $z_3$ | $z_4$ |

# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.7** A Figura 3.12 mostra cinco exemplos (I, II, III, IV, V) de pares de grafos isomorfos.

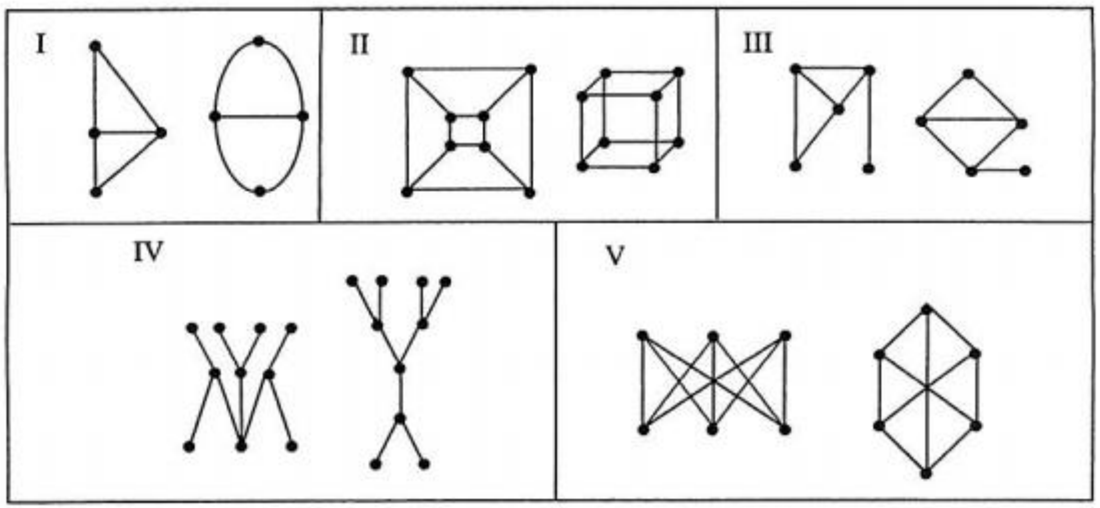



**Figura 3.12** Os grafos em I, II, III, IV e V são isomorfos.

# Grafos – Contra-exemplo - Isomorfismo

**Exemplo 3.8** A Figura 3.13 mostra dois pares de grafos que não são isomorfos. Em (I), no grafo à direita, cada vértice de grau 4 é adjacente a dois outros vértices de grau 4. No grafo à esquerda, cada vértice de grau 4 é adjacente a apenas um outro vértice de grau 4. Assim, os dois grafos em questão não são isomorfos.

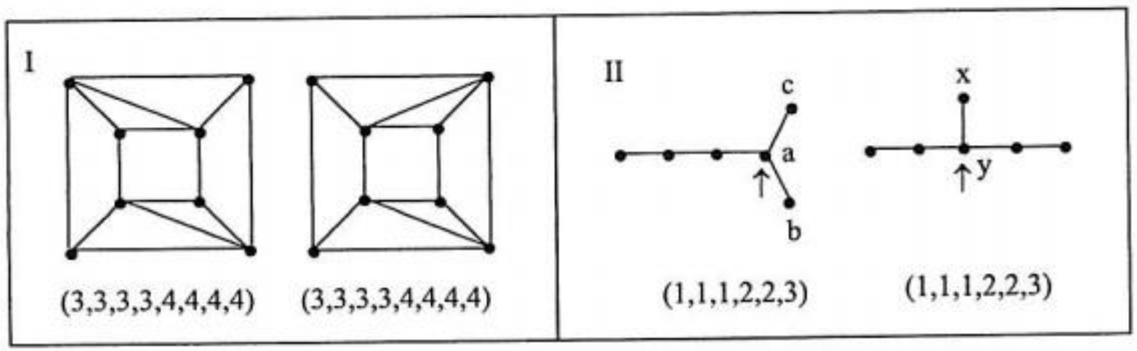



**Figura 3.13** Grafos em I e II são não isomorfos.

# Grafos – Isomorfismo - Observações

Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que dois grafos sejam isomorfos eles devem ter:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas; e
- um número igual de vértices com determinado grau.

Essas condições, entretanto, não são suficientes. Considere, por exemplo, os dois grafos mostrados na Figura 3.13 (II). Eles satisfazem todas as três condições e, entretanto, não são isomorfos. O fato de não serem isomorfos pode ser evidenciado considerando a seguinte argumentação: se os grafos fossem isomorfos, o vértice a do grafo à esquerda deveria corresponder ao vértice y do grafo à direita, uma vez que são os únicos dois vértices com grau três. No grafo à direita, existe apenas um vértice de grau 1 adjacente a y, que é o vértice x, enquanto no grafo à esquerda existem dois, b e c. A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo é ainda um problema não resolvido em TG. Existem, entretanto, vários algoritmos que se propõem à detecção automática de isomorfismo, como será visto posteriormente.

**Observação 3.2** O problema de determinar se dois grafos são isomorfos torna-se mais difícil à medida que o número de vértices e de arestas no grafo aumentam. Por exemplo, enquanto existem apenas quatro grafos simples não isomorfos com três vértices e 11 com quatro vértices, existem 1.044 grafos simples não isomorfos com sete vértices.

# Grafos – Isomorfismo – Invariantes

**Definição 3.6** Sejam G1 e G2 grafos isomorfos. Uma propriedade P é um invariante sempre que G1 tiver a propriedade P e G2 também tiver esta mesma propriedade.

Com base na Definição 3.6, se os grafos G1 e G2 são isomorfos, então existem funções bijetoras entre os vértices (e entre as arestas) de G1 e G2. Assim, se G1 e G2 são isomorfos, eles têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices. Portanto, se n e m são inteiros não negativos, as propriedades "tem n vértices" e "tem m arestas" são invariantes.

**Exemplo 3.11** Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura 3.17, são não isomorfos, uma vez que o invariante "têm o mesmo número de arestas" não é verificado.

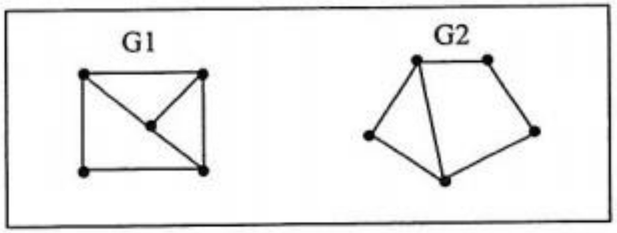



**Figura 3.17** G1 tem sete arestas, G2 tem seis arestas e "tem m arestas" é invariante. Portanto, G1 e G2 não são isomorfos.

**Observação 3.4** Sejam G1 e G2 dois grafos, a propriedade "os grafos têm o mesmo número de vértices com grau k (k > 0, inteiro)" é um invariante.

# Grafos – Isomorfismo – Invariantes

**Exemplo 3.12** Os grafos G1 e G2 da Figura 3.19 são não isomorfos.

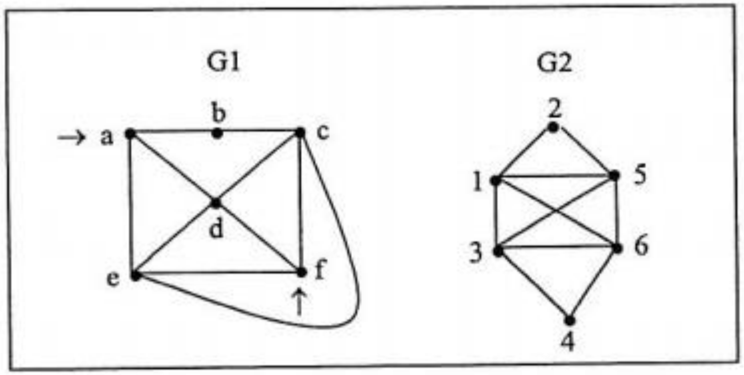



**Figura 3.19** Apesar de G1 e G2 terem o mesmo número de vértices e arestas, G1 tem vértices de grau 3, e G2 não tem vértices de grau 3. G1 e G2 não são isomorfos.

# Grafo Completo

**Definição 3.7** Um grafo *completo* de ordem n, notado por $K_n$, é um grafo que tem n vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

A Figura 3.20 mostra os grafos completos de $K_1$ até $K_6$.

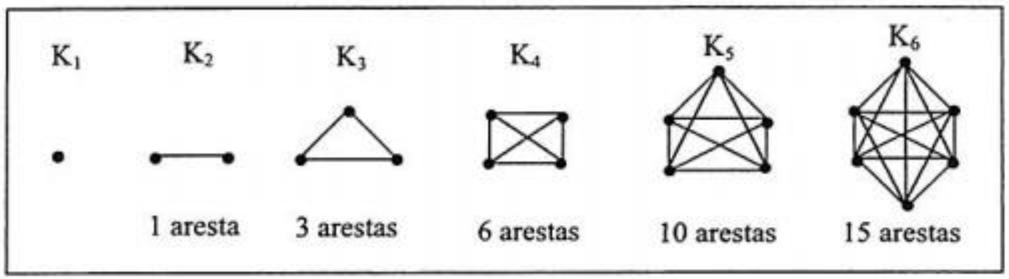



**Figura 3.20** Grafos completos $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$, $K_5$ e $K_6$.

**Observação 3.6** Obviamente, grafos completos são grafos simples, ou seja, não têm arestas paralelas ou *loops*. Uma vez que existem $\binom{n}{2}$ possíveis pares em n vértices, o grafo completo $K_n$ tem exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

**Observação 3.7** Note que todo grafo completo com n vértices é um grafo $(n-1)$-regular.

# Grafo Bipartido

**Definição 3.8** Seja G = (V,E) um grafo, se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \varnothing$), de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y, então G é chamado *bipartido*. A partição $V = X \cup Y$ é chamada *bipartição* de G.

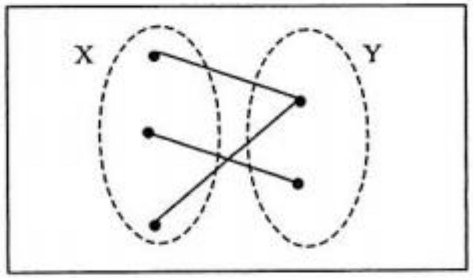



**Figura 3.21** Grafo bipartido.

# Grafo Bipartido

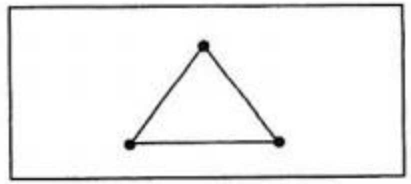


**Figura 3.22** Grafo não bipartido.

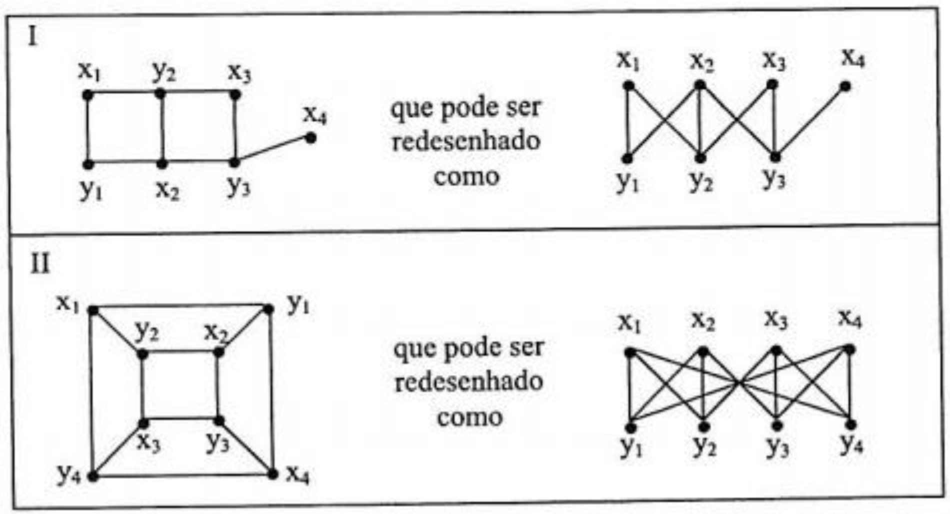



**Figura 3.23** Os grafos em I e II são exemplos de grafos bipartidos.

# Grafo Bipartido Completo

**Definição 3.9** Um *grafo bipartido completo* é um grafo simples bipartido G, com a bipartição $V = X \cup Y$, em que todo vértice em X está unido a todo vértice em Y. Se $|X| = m$ e $|Y| = n$, então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$. Para padronizar, assume-se que $m \leq n$. Note que $K_{n,n}$ é um grafo regular de grau n.

**Exemplo 3.13** A Figura 3.24 mostra os diagramas de $K_{m,n}$, para m = 1,2,3 e n = m,m+1,m+2.

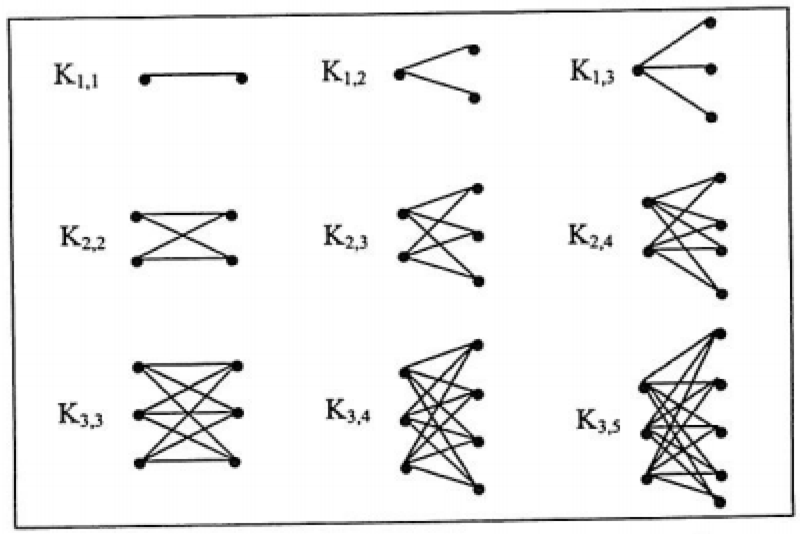



**Figura 3.24** $K_{m,n}$, para m = 1,2,3 e n = m,m+1,m+2.

# Subgrafo

**Definição 3.10** Sejam dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2). Diz-se que G2 *é subgrafo de* G1 se V2 ⊆ V1 e E2 ⊆ E1, e para toda aresta e ∈ E2, se e for incidente a $v_1$ e $v_2$, então $v_1, v_2 \in$ V2. Nesse caso, diz-se também que G1 *é supergrafo de* G2.

**Exemplo 3.14** A Figura 3.28 mostra um grafo e alguns de seus possíveis subgrafos.

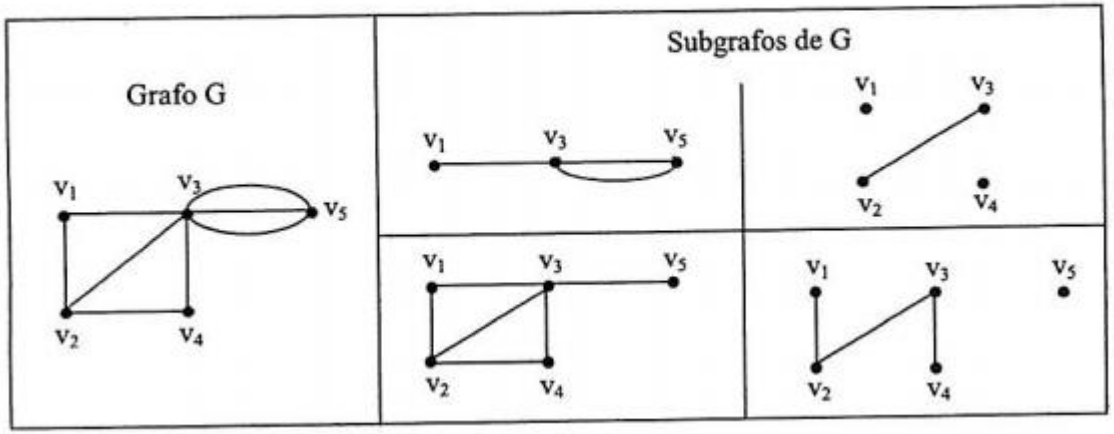



**Figura 3.28** Grafo G e quatro possíveis subgrafos.

# Subgrafo

**Exemplo 3.15** A Figura 3.29 mostra um grafo G e um grafo G1, que é subgrafo de G. Mostra também o grafo G2, que não é subgrafo de G.

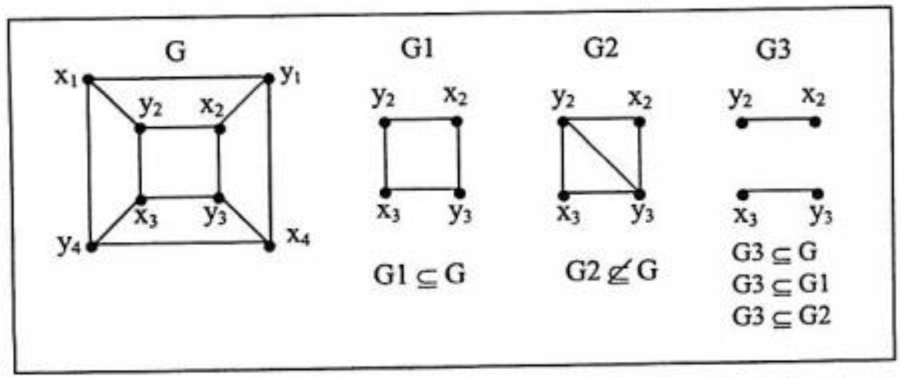



**Figura 3.29** Grafo G1 é subgrafo do grafo G, mas o grafo G2 não é subgrafo de G. O grafo G3 é subgrafo de G1, o que o torna um subgrafo de G também.

Note que:

- Todo grafo é seu próprio subgrafo.
- Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G
- Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G.
- Uma única aresta de G, com seus vértices-extremidade, é também um subgrafo de G.