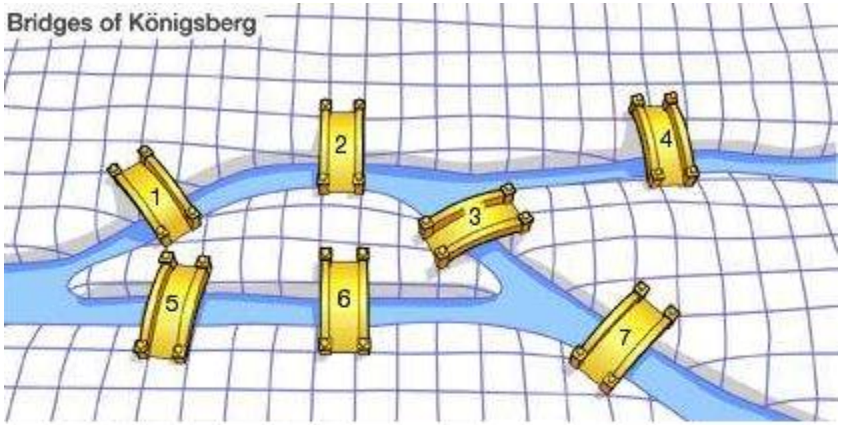
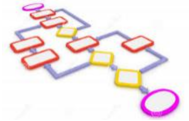
Unidade 2 - Grafos Eulerianos

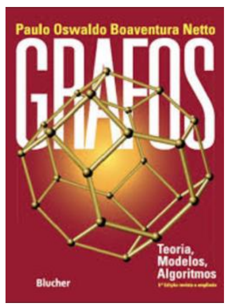


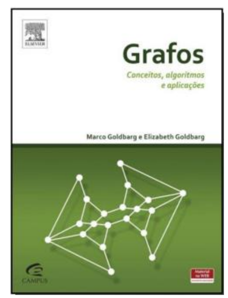
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

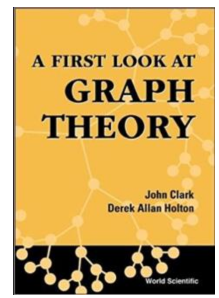


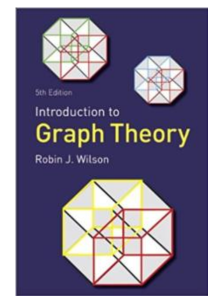
Bibliografia

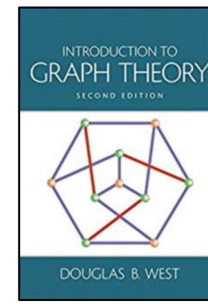
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997

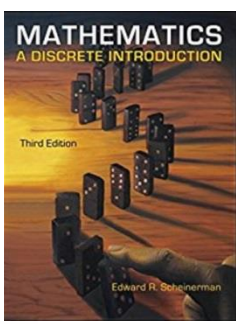


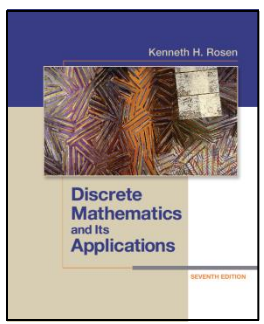


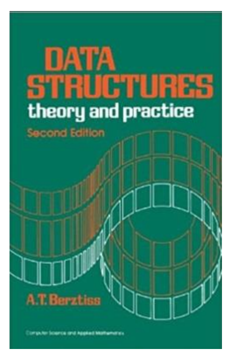


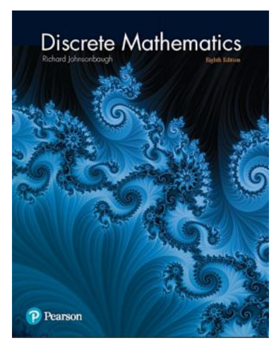


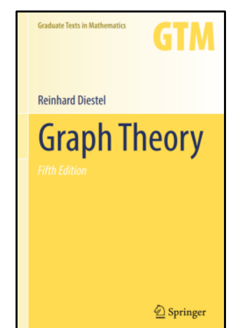


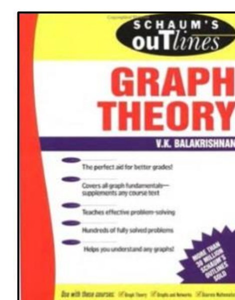






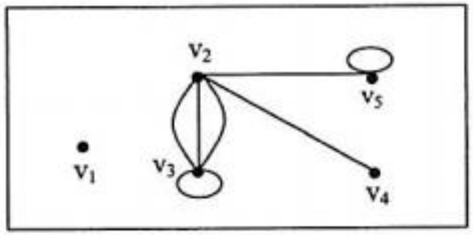






Lembrando...

- ✓ Um **grafo G** pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados **vértices** e um conjunto de **arestas** que unem **pares** desses objetos;
- ✓ A maneira mais comum de se representar um grafo é por meio de um **diagrama**;
- ✓ Frequentemente, o próprio diagrama é referenciado como um **grafo**.
- ✓ Generalizando o conceito, em um **grafo** é possível que mais de uma aresta conecte o mesmo par de vértices (**arestas paralelas**), bem como uma aresta pode conectar um vértice a si próprio (aresta chamada **loop**).



Grafo com vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e sete arestas, sendo três delas paralelas e duas são *loops*.

Formalmente...

- ✓ Um **grafo G** = (**V**(G), **E**(G)) ou G = (**V**,**E**) consiste de dois conjuntos finitos:
  - **V**(G), ou **V**, que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices e;
  - **E**(G), ou **E**, que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (que pode ser vazio) de elementos chamados arestas.
- ✓ À cada aresta **e** em **E** é atribuído um par não ordenado de vértices (**u**,**v**) chamados **vértices extremidades** de **e**.
- ✓ Vértices também são referenciados como **pontos** ou **nós**.

Exemplo

Seja o grafo G = (V,E), tal que

$$V = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \text{ e}$$

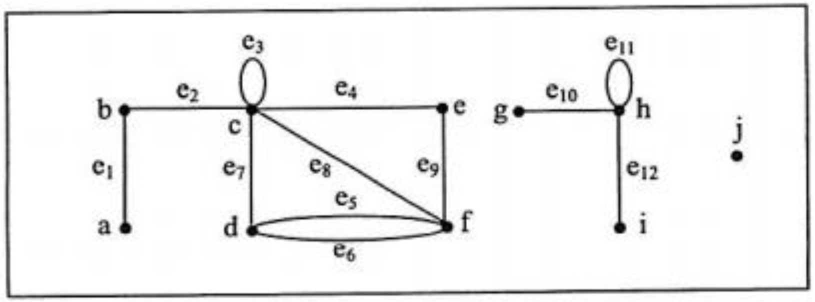
$$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$e_1 \leftrightarrow (a,b)$ $e_2 \leftrightarrow (b,c)$ $e_3 \leftrightarrow (c,c)$ $e_4 \leftrightarrow (c,e)$ $e_5 \leftrightarrow (d,f)$ $e_6 \leftrightarrow (d,f)$

$e_7 \leftrightarrow (c,d)$ $e_8 \leftrightarrow (c,f)$ $e_9 \leftrightarrow (e,f)$ $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$ $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$ $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

Passeio em um Grafo

- Muitos problemas em **Teoria dos Grafos** estão relacionados à possibilidade de se chegar a um **vértice** do grafo a partir de **outro**, seguindo-se uma **sequência** de **arestas**;

- Um **passeio** em um **grafo** é uma sequência finita

$$\boxed{W = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k}$$

cujos elementos são, alternativamente, **vértices** e **arestas** tal que, para $1 \leq i \leq k$, a aresta $\mathbf{e_i}$ tem vértices-extremidades $\mathbf{v_{i-1}}$ e $\mathbf{v_i}$;

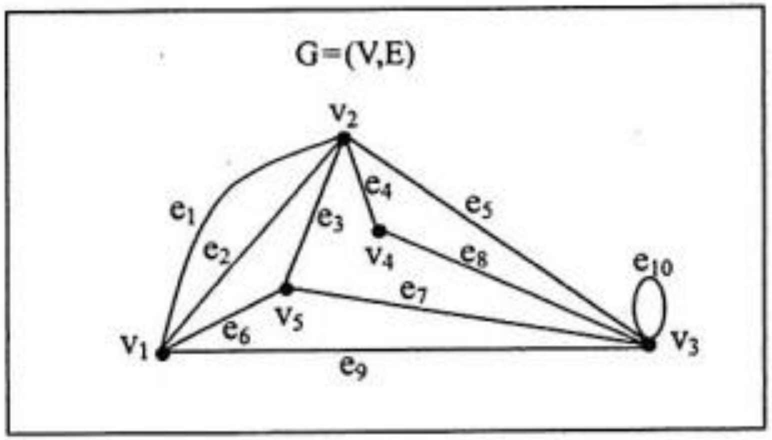
- Assim, cada aresta $\mathbf{e_i}$ é imediatamente **precedida** e **sucedida** pelos vértices aos quais é incidente;
- Diz-se que o **passeio W** é um **passeio** $\mathbf{v_o}$-$\mathbf{v_k}$ ou um **passeio** de $\mathbf{v_o}$ até $\mathbf{v_k}$;
- O vértice $\mathbf{v_o}$ é chamado **origem** do **passeio W** e o vértice $\mathbf{v_k}$ é chamado **término** de W;
- Os vértices $\mathbf{v_o}$ e $\mathbf{v_k}$ **não** precisam ser distintos;
- Os vértices $\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_{k-1}}$ são chamados **vértices internos**.

Comprimento de um Passeio em um Grafo

- Considere o grafo **G** = (**V**,**E**) e uma passeio em **G** dado pela sequência $W = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$.
- O inteiro **k**, que é o número de arestas do passeio, é chamado **Comprimento de W**;
- Em um passeio pode haver **<u>repetições</u>** de **vértices** e **arestas**;
- No grafo G = (V,E), dados dois vértices **u** ϵ V e **v** ϵ V em G, um passeio **u** – **v** é **fechado** se **u** = **v** e **aberto** se **u** ≠ **v**;

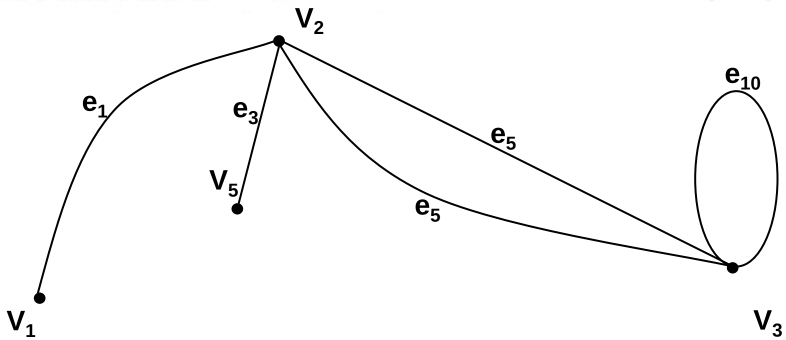
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo $G = (V,E)$, em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

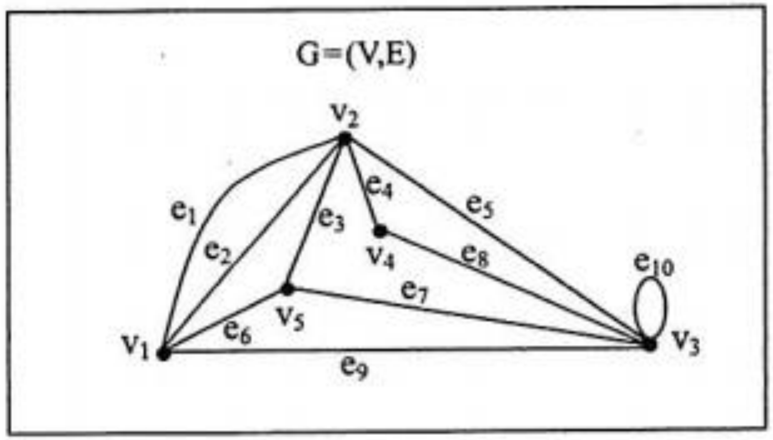
$W1 = v_1e_1v_2e_5v_3e_{10}v_3e_5v_2e_3v_5$ é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5.



- ✓ Observação: A aresta $\mathbf{e_5}$ está sendo **repetida** no passeio $\mathbf{W_1}$

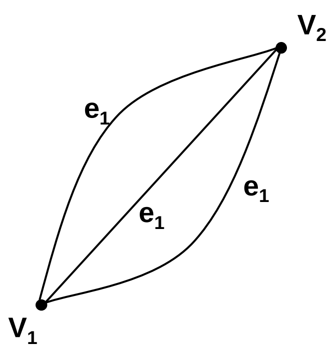
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W2 = v_1e_1v_2e_1v_1e_1v_2$ é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2.

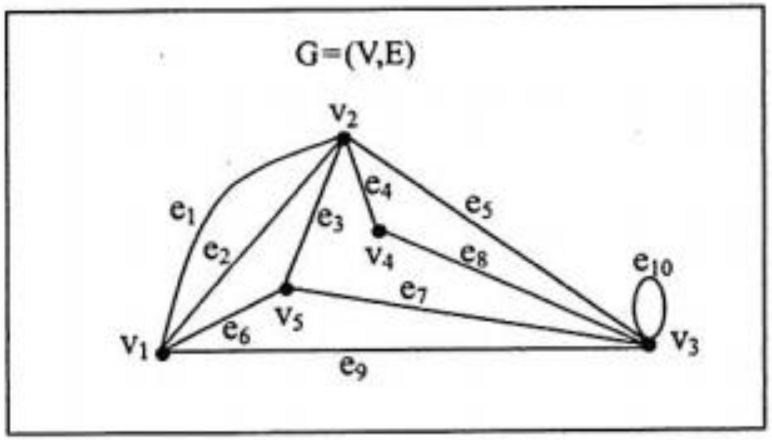


- ✓ Observação: A aresta $\mathbf{e_1}$ está sendo **repetida** no passeio $\mathbf{W_2}$

QualitSys

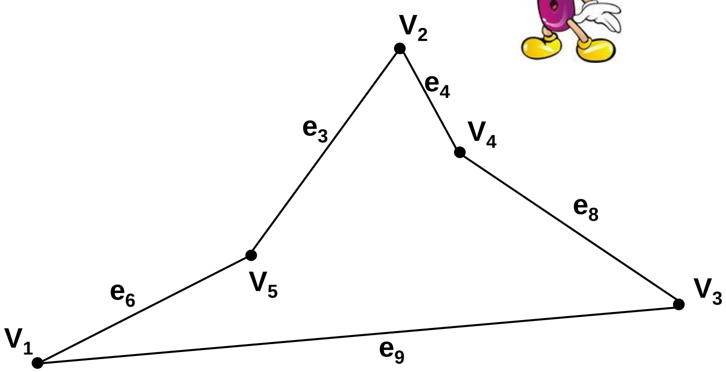
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

$W3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$ é um passeio fechado de tamanho 5.



Trilha em um Grafo

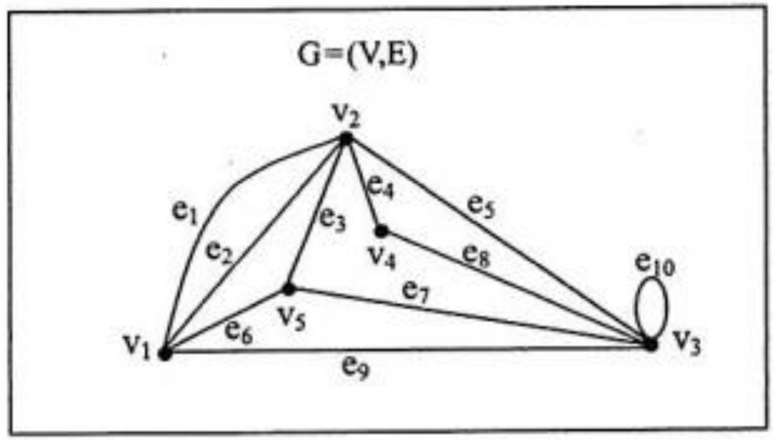
- Seja **G** = (**V**,**E**) um grafo e considere o passeio:

$$\boxed{W = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k}$$

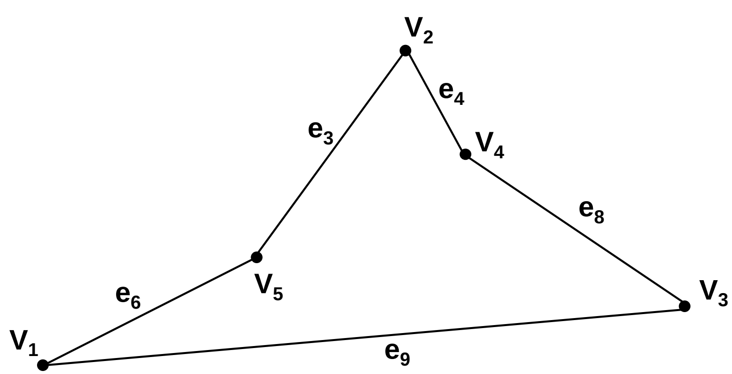
- Se as arestas $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_k}$ de **W** forem **distintas**, então **W** é chamado **Trilha**;
- Uma **trilha** que começa e termina no mesmo vértice **v** é chamada **Trilha Fechada** ou **CIRCUITO**;
- Caso contrário é uma **Trilha aberta**;
- Pode-se dizer, portanto, que uma **Trilha** é um **passeio** no qual **nenhuma aresta é repetida**.

Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo G = (V,E), em que V = $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e E = $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.



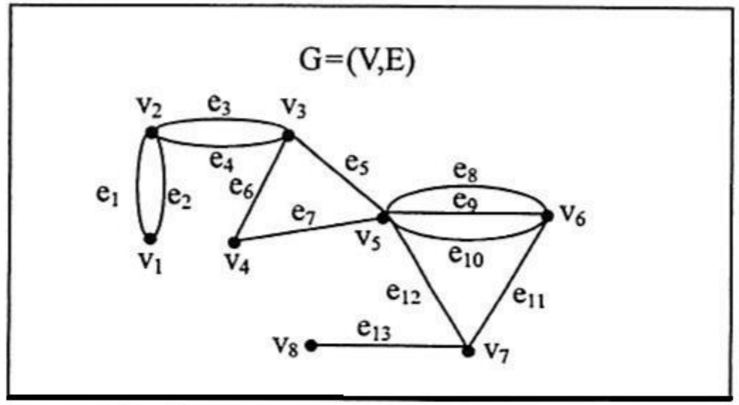
$$W_3 = V_1 e_6 V_5 e_3 V_2 e_4 V_4 e_8 V_3 e_9 V_1$$

W3 é uma trilha fechada.

- ✓ Observação: **W_3** é uma **trilha fechada**, pois inicia e termina no mesmo vértice e todas as **arestas** são **distintas**!

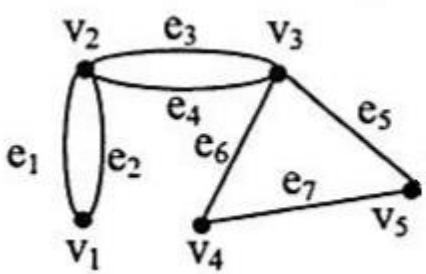
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo simples G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ e $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$.

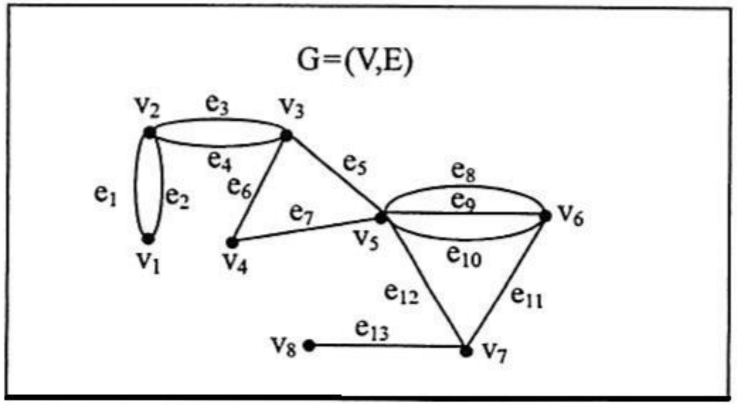
$W2 = v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_5e_7v_4e_6v_3e_4v_2e_2v_1$ é uma trilha fechada de tamanho 7 de v_1 a v_1.



- ✓ Todas as **arestas** de **W_2** são **distintas**!
- ✓ **W_2** inicia em **V_1** e termina em **V_1**;
- ✓ Portanto, **W_2** é uma **trilha fechada** ou um **circuito**;
- ✓ **W_2** tem 7 arestas, portanto o **tamanho** de **W_2** é **7**.

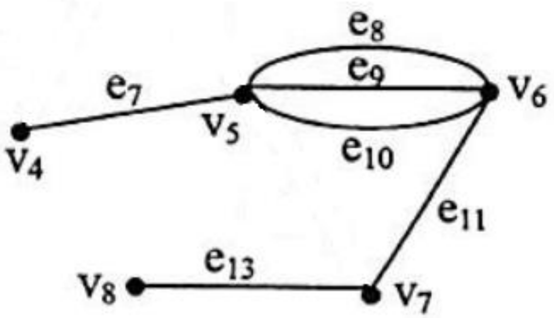
Exemplo

Considere o grafo G = (V,E) mostrado na Figura



Grafo simples G = (V,E), em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$ e $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13}\}$.

$W3 = v_4e_7v_5e_8v_6e_9v_5e_{10}v_6e_{11}v_7e_{13}v_8$ é uma trilha aberta de tamanho 6 de v_4 a v_8.



- ✓ Todas as **arestas** de $\mathbf{W_3}$ são **distintas**!
- ✓ $\mathbf{W_3}$ inicia em $\mathbf{V_4}$ e termina em $\mathbf{V_8}$;
- ✓ Portanto, $\mathbf{W_2}$ é uma **trilha aberta**;
- ✓ $\mathbf{W_3}$ tem 6 arestas, portanto o **tamanho** de $\mathbf{W_3}$ é **6**.

Passeio e Trilha

- ✓ Vértice inicial **u**
- ✓ Vértice final **v**

Vértice inicial u Vértice final v	u ≠ v	u = v
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	**PASSEIO ABERTO**	**PASSEIO FECHADO**
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	**TRILHA ABERTA**	**TRILHA FECHADA** ou **CIRCUITO**

Caminho

- Seja **G** = (**V**,**E**) um grafo e considere a **trilha**:

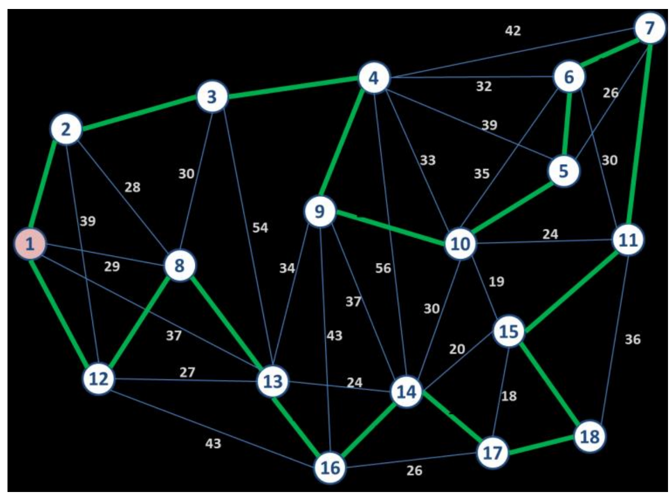
$$\boxed{w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k}$$

- Se as vértices V_0,V_1...,V_k de **W** forem **distintas**, então **W** é chamado **Caminho**;

- Em um **caminho,** entretanto, é permitido que seus primeiro e últimos vértices possam ser os mesmos;

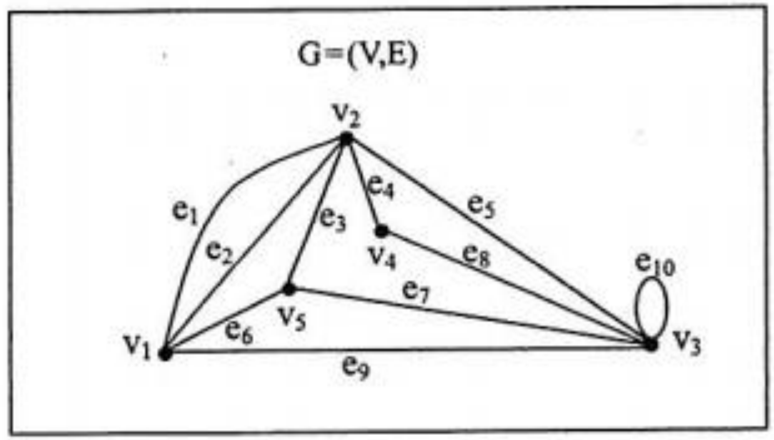
- Um caminho que começa e termina no mesmo vértice **v** é chamada **Caminho Fechado** ou CICLO;

- Todo **caminho** é uma **trilha**, mas nem sempre uma **trilha** é um **caminho**.



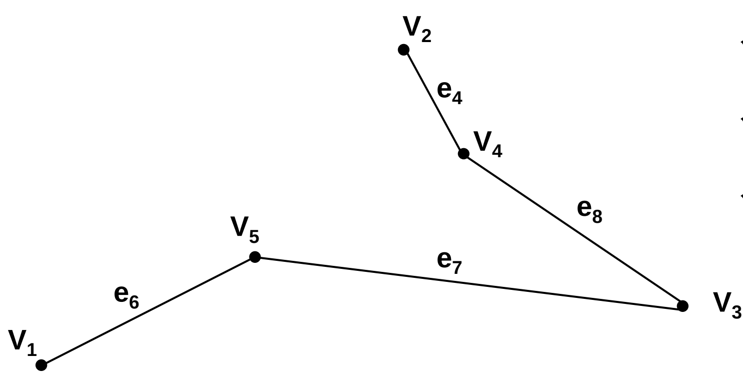
Exemplo

Considere o grafo $G = (V,E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V,E)$, em que $V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ e $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10}\}$.

$W4 = v_2v_4v_3v_5v_1$ é um caminho de comprimento 4.



- ✓ Em $\mathbf{W_4}$ não há repetição de vértices;
- ✓ Vértice inicial é diferente do vértice final;
- ✓ Portanto, $\mathbf{W_4}$ é um **caminho** de tamanho 4.

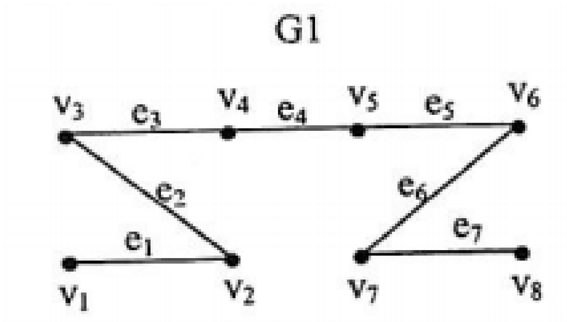
Passeio e Trilha

- ✓ Vértice inicial **u**
- ✓ Vértice final **v**

Vértice inicial u Vértice final v	u ≠ v	u = v
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	**PASSEIO ABERTO**	**PASSEIO FECHADO**
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	**TRILHA ABERTA**	**TRILHA FECHADA** ou **CIRCUITO**
CAMINHO Nenhum vértice pode aparecer mais de uma vez, com a possível exceção de que u e v podem ser o mesmo vértice	**CAMINHO ABERTO**	**CAMINHO FECHADO OU CICLO**

Trilha Euleriana

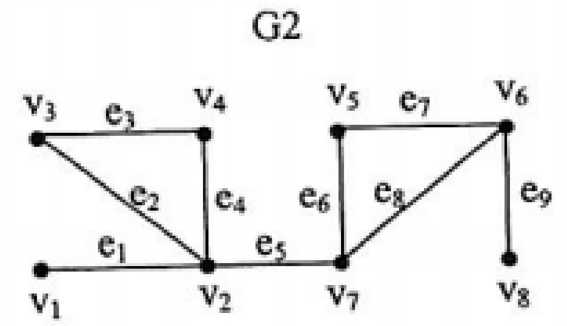
✓ Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir toda aresta de **G**.



✓ Exemplo: A trilha $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$ do grafo **G1** é uma **trilha** de **Euler**.

Trilha Euleriana

- Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir toda aresta de **G** exatamente uma vez.



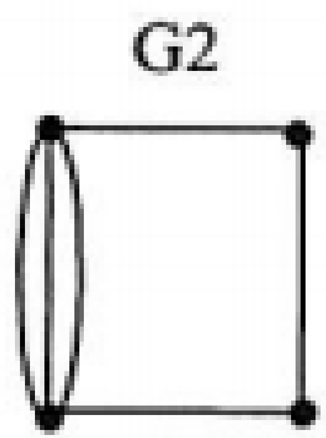
- Exemplo: O grafo **G2** acima **não** tem uma trilha de Euler.

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver uma **trilha** fechada (**circuito**) que inclui **todas** as arestas de **G**;

Grafos Eulerianos

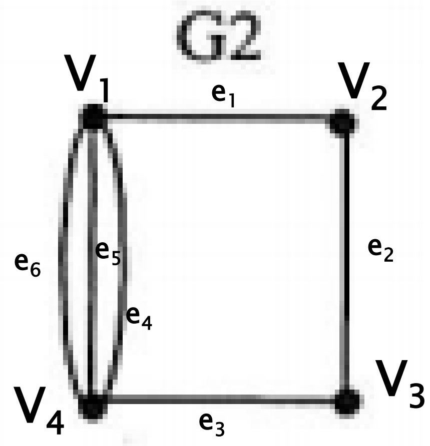
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G2** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

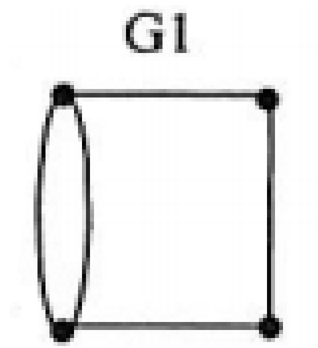


- ✓ O grafo **G2** é Euleriano?

- ✓ Precisa-se descobrir se há uma trilha de **Euler** fechada no grafo **G2**;
- ✓ A trilha $V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_4e_4V_1e_5V_4e_6V_1$ é uma **trilha Euleriana fechada**;
- ✓ Logo, **G2** é um **Grafo Euleriano.**

Grafos Eulerianos

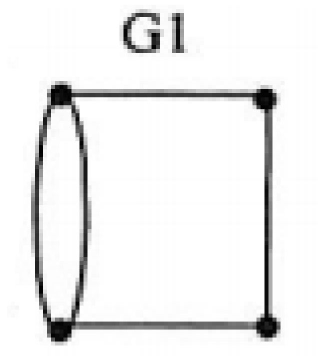
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G1** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



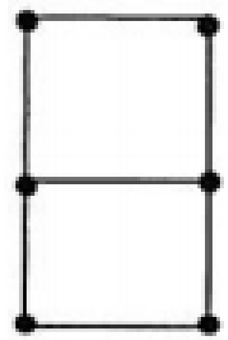
✓ O grafo **G1** é Euleriano?

✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G1** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

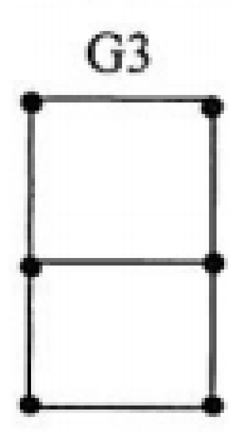
G3



- ✓ O grafo **G3** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

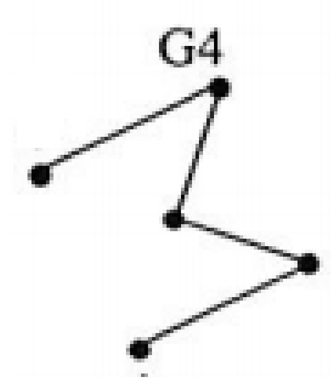


- ✓ O grafo **G3** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G3** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Grafos Eulerianos

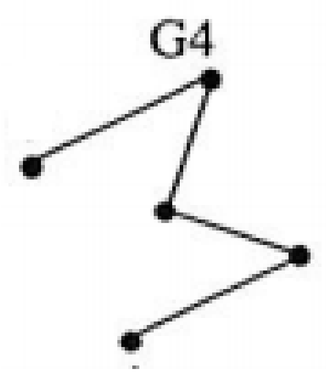
✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



✓ O grafo **G4** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.

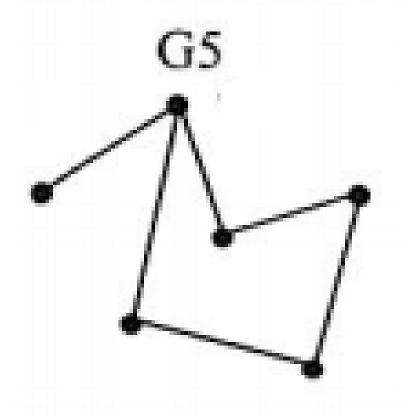


- ✓ O grafo **G4** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G4** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Grafos Eulerianos

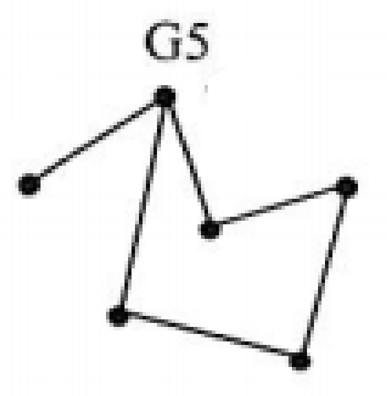
- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G5** é Euleriano?

Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha** de **Euler** fechada.



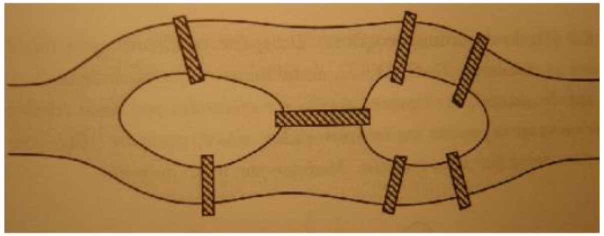
- ✓ O grafo **G5** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G5** uma **trilha Euleriana Fechada.**

Como determinar se um grafo é Euleriano?

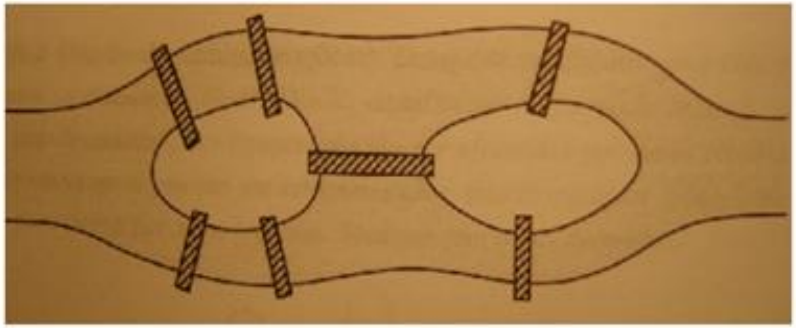
Grafo Euleriano?

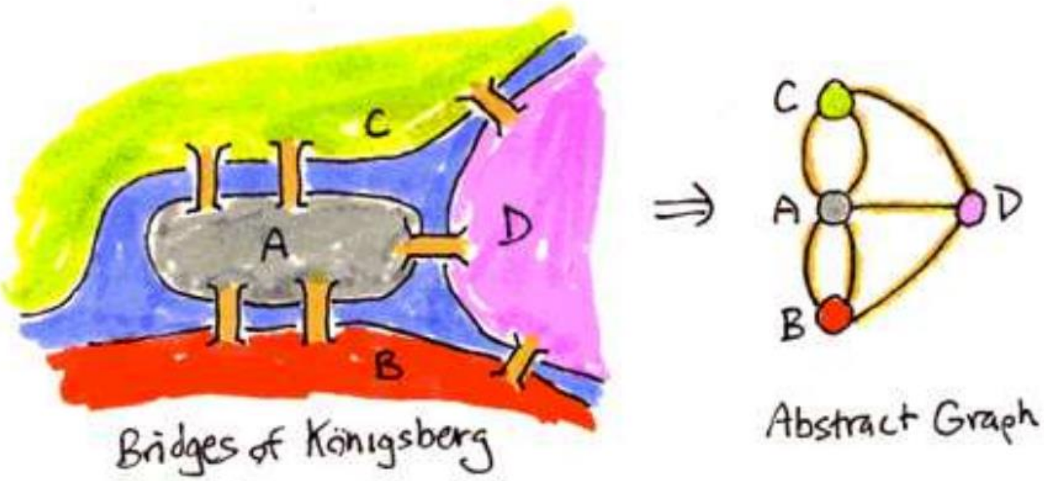
O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.



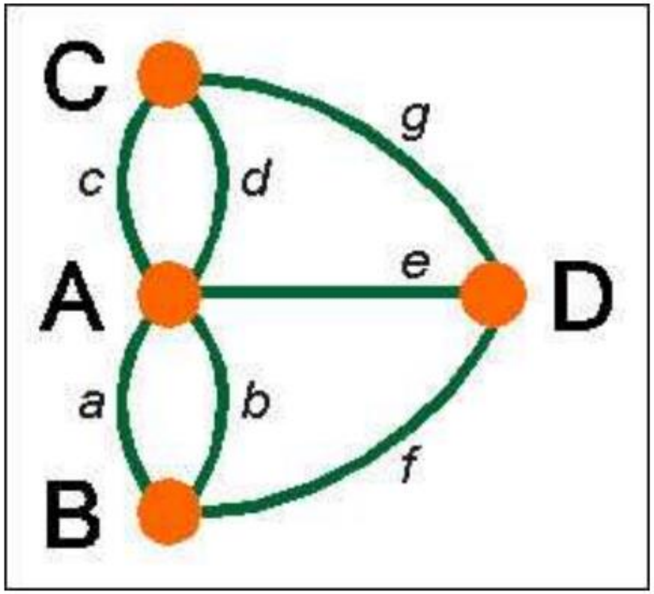
O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Se isto for possível o grafo é chamado grafo Euleriano.

Grafo Euleriano?





Grafo Euleriano?

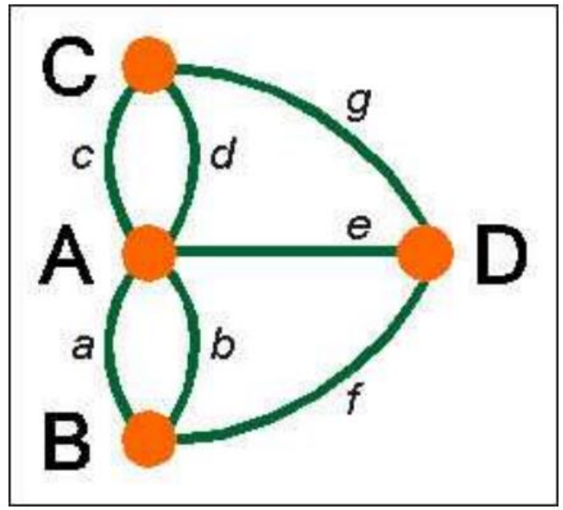


Grafo $G = (V, A)$

V = cjto de vértices = $\{A, B, C, D\}$

A = cjto de arestas = $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

Grafo Euleriano?



Grafo $G = (V, A)$

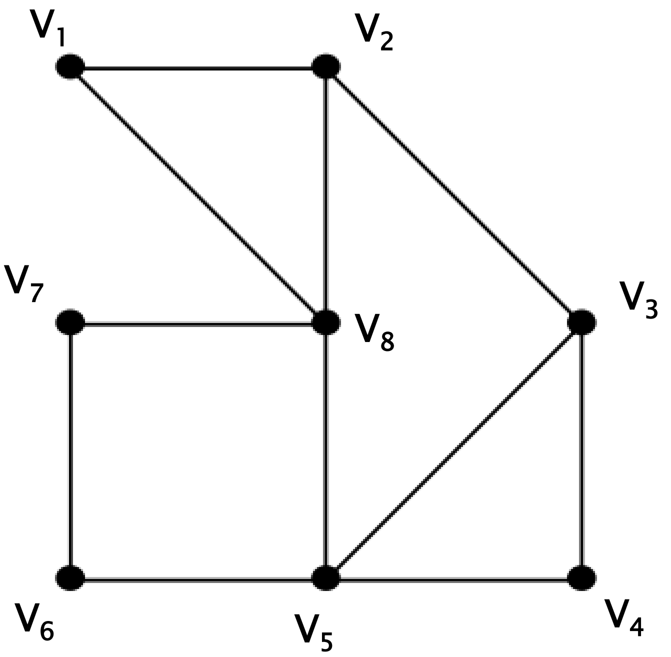
V = cjto de vértices $= \{A, B, C, D\}$

A = cjto de arestas $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

- ✓ **Euler** provou que o problema não tem solução !

Teorema de Euler

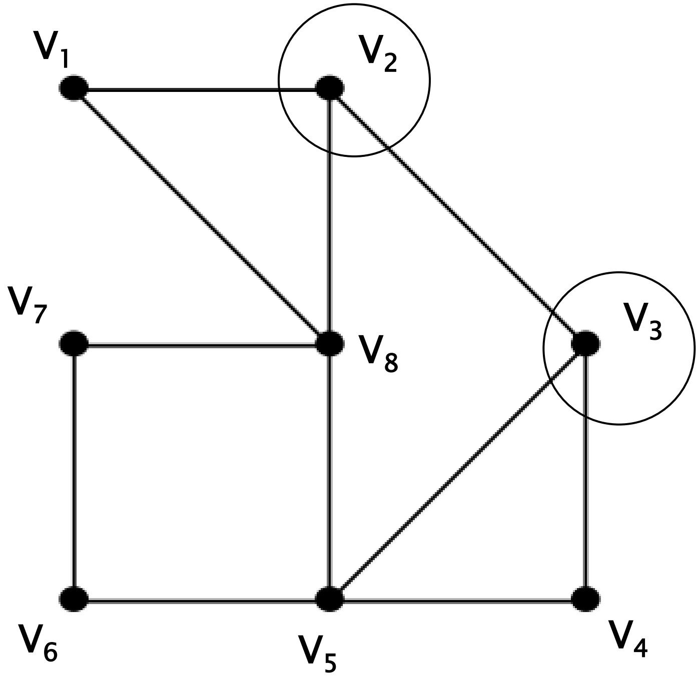
- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G**1 abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

- Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

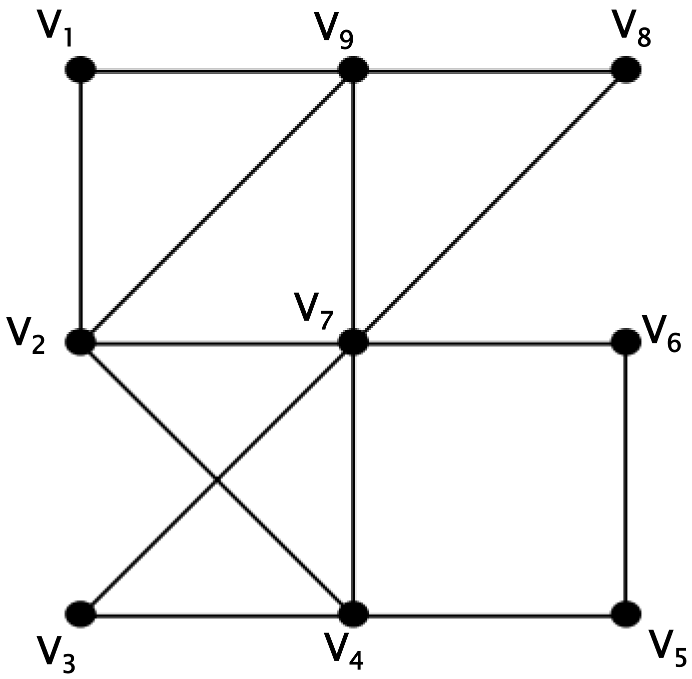
- Exemplo: O grafo **G1** abaixo é **Euleriano**?



- O grafo **G1** acima tem vértices V_2 e V_3 com grau ímpar;
- Portanto, o Grafo **G1** **não** é Euleriano!

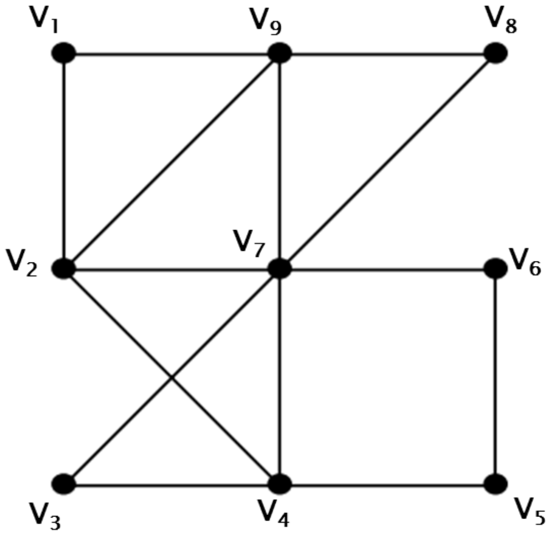
Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

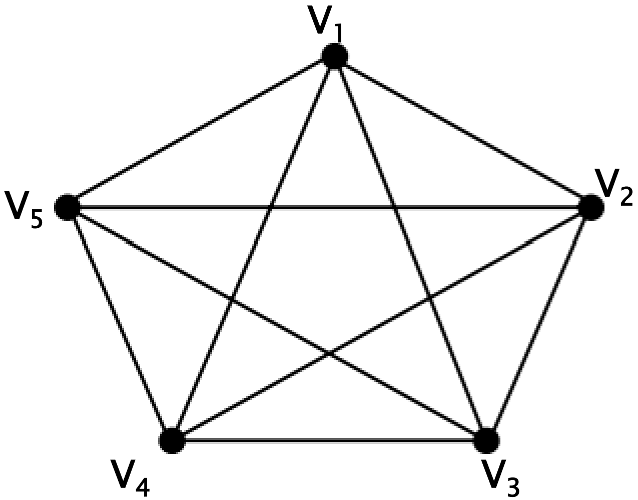
- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?



- ✓ Todos os vértices do grafo **G2** acima possuem graus pares;
- ✓ Portanto, o Grafo **G2** **é** Euleriano!
- ✓ **Circuito de Euler**: $\mathbf{V_1} – V_9 – V_2 – V_4 – V_3$ - $V_7 – V_9 – V_8 – V_7 – V_6 – V_5 – V_4 – V_7 – V_2 – \mathbf{V_1}$

Teorema de Euler

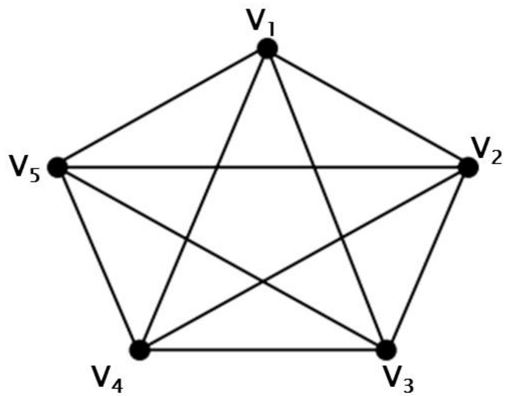
- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G3** abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.

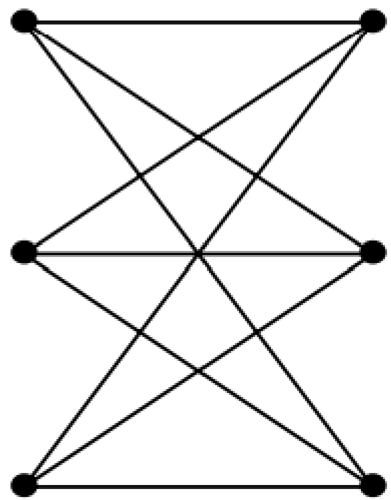
- ✓ Exemplo: O grafo **G3** abaixo é **Euleriano**?



- ✓ Todos os vértices do grafo **G3** acima possuem graus **pares**;
- ✓ Portanto, o Grafo **G3** **é** Euleriano!
- ✓ **Circuito de Euler**: $\mathbf{V_1} – V_2 – V_3 – V_1 – V_4 – V_2 – V_5 – V_3 – V_4 – V_5 – \mathbf{V_1}$

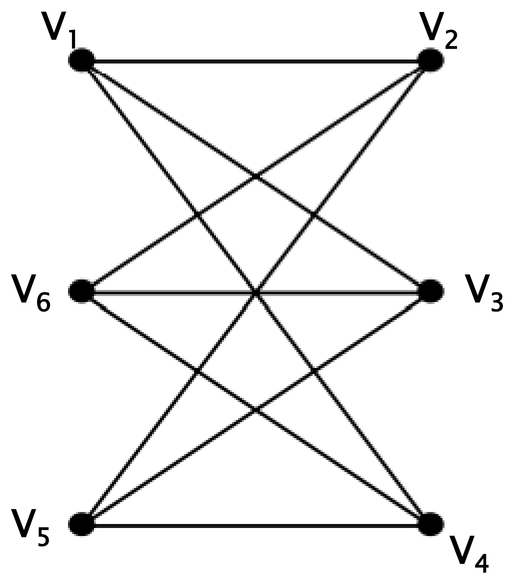
Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é **Euleriano**?



- ✓ O grafo **G4** acima tem todos os vértices com grau ímpar;
- ✓ Portanto, o Grafo **G4** não é Euleriano!