

Teoria dos Grafos

Unidade 4 – Emparelhamentos

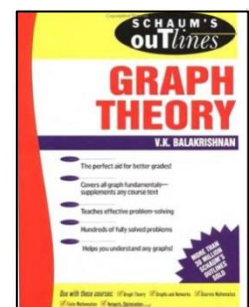
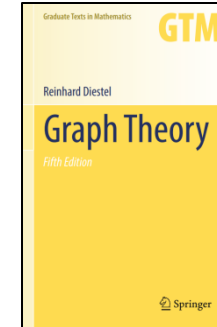
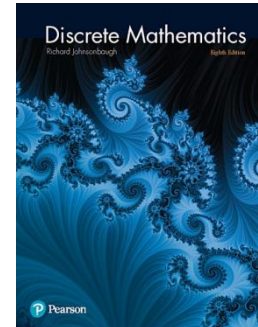
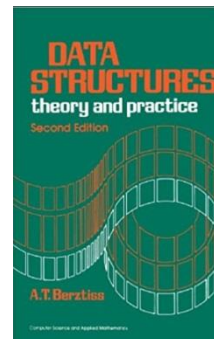
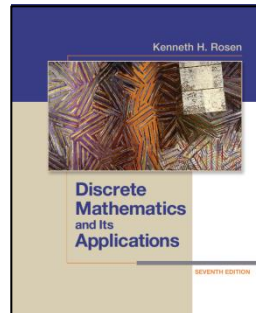
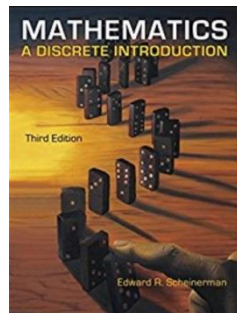
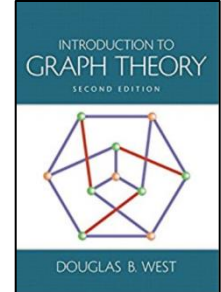
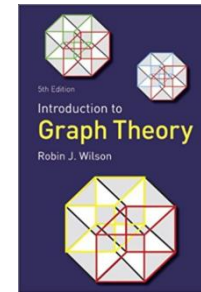
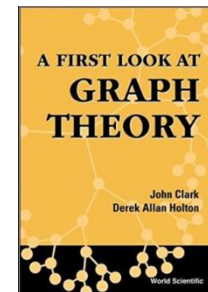
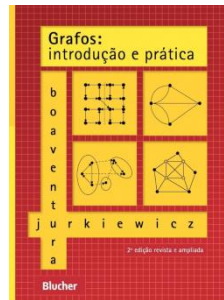
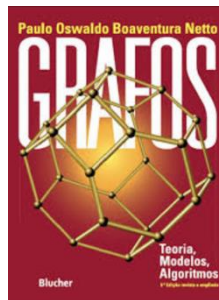


Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUVSP
aparecidovfreitas@gmail.com



Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka Jr.** 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura Netto**, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997



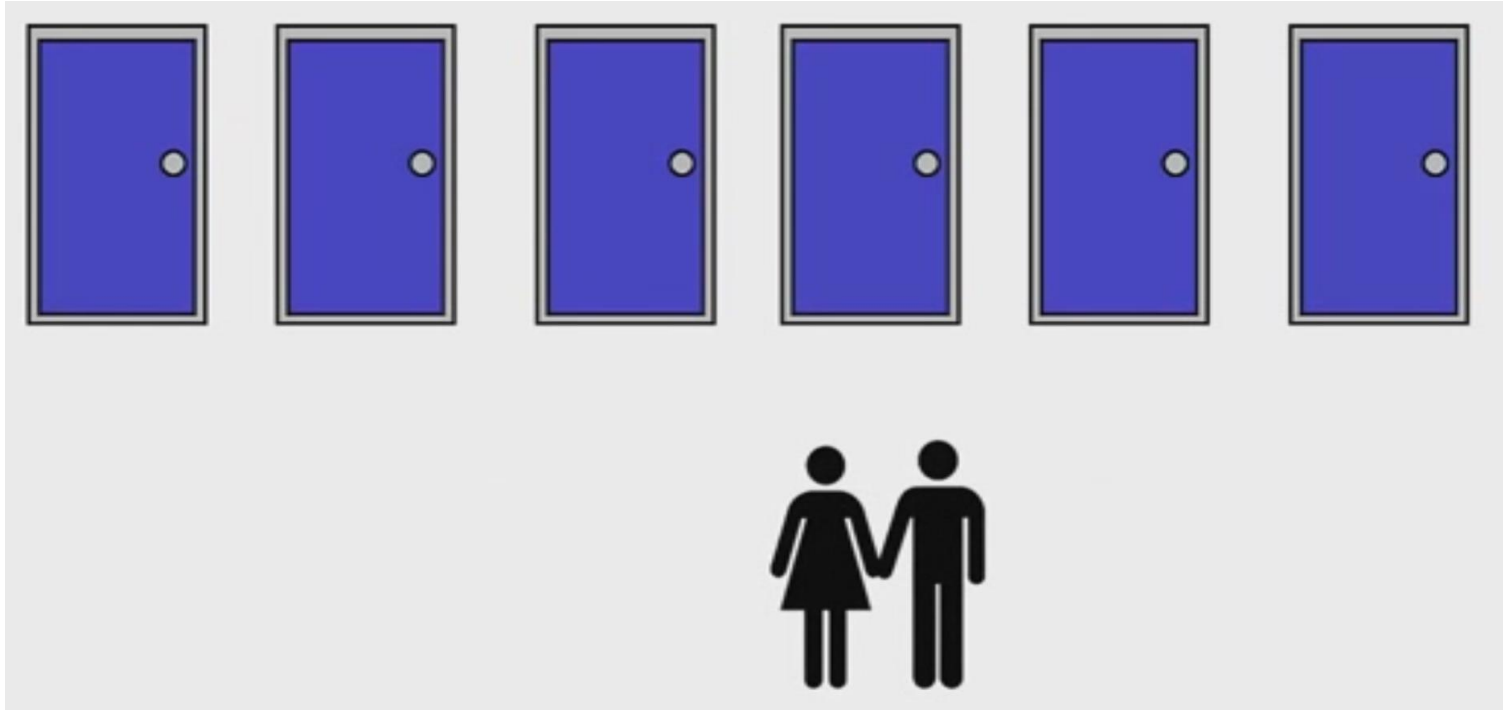


Contextualização



De quantas maneiras pode-se hospedar 6 casais
em 6 quartos de um hotel ?





Primeiro casal tem 6 possibilidades de escolha !





Segundo casal terá 5 possibilidades de escolha!





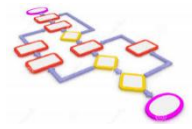
E assim, por diante...

Total de Possibilidades: $C(6,1) + C(5,1) + C(4,1) + C(3,1) + C(2,1) + C(1,1)$

$$C_s^n = \binom{n}{s} = \frac{n!}{s! \cdot (n-s)!}$$

Total de Possibilidades: $6+5+4+3+2+1 = 21$ possibilidades





Contextualização

- ✓ Consideremos uma variação do Problema apresentado;
- ✓ Considere um **hotel** com apenas **6** quartos;
- ✓ No instante do check-in, seis casais se apresentaram com as seguintes **preferências** de acomodações:



- ✓ O casal **A** tem preferência pelos quartos **1,2 e 4**
- ✓ O casal **B** tem preferência pelos quartos **2 e 6**
- ✓ O casal **C** tem preferência pelos quartos **2 e 3**
- ✓ O casal **D** tem preferência pelos quartos **3,5 e 6**
- ✓ O casal **E** tem preferência pelos quartos **3,4,5 e 6**
- ✓ O casal **F** tem preferência pelos quartos **2 e 5**





Contextualização

- ✓ Após o check-in, o dono do hotel, se deparou com o seguinte problema!
- ✓ **Será possível hospedar todos os casais respeitando suas preferências?**



Contextualização

✓ A questão corresponde a:

- Qual é o número máximo de subconjuntos de tamanho 2 que é possível formar com 12 elementos, respeitando-se as restrições apresentadas?



✓ Será que as ferramentas da Análise Combinatória serão suficientes para resolver esse problema?



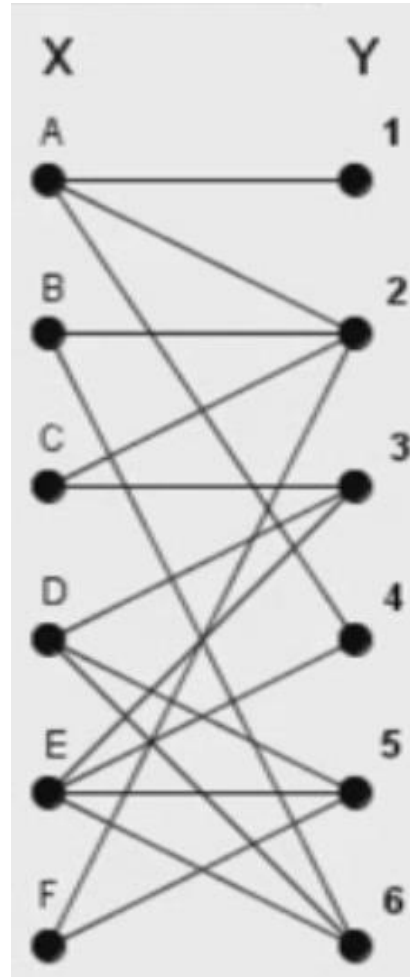
Aplicando Grafos no problema

- ✓ Pode-se criar um grafo para a partir dele tentar a solução do problema;
- ✓ Consideremos um grafo **G**, com **12** vértices, **6** representando os casais e 6 representando os quartos;
- ✓ Pode-se conectar os casais aos quartos respeitando-se as suas preferências;
- ✓ Nesse grafo, não haverá necessidade de se conectar casais com casais, pois essas conexões não se aplicam ao problema;
- ✓ Pode-se organizar os vértices de modo que vértices representando casais estejam à esquerda e vértices representando os quartos, à direita;
- ✓ Nessa situação, toda aresta conectará um vértice da esquerda à um vértice da direita.
- ✓ Pode-se denotar o conjunto dos vértices à esquerda por $X=\{A,B,C,D,E,F\}$ e o conjunto da direita por $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$.



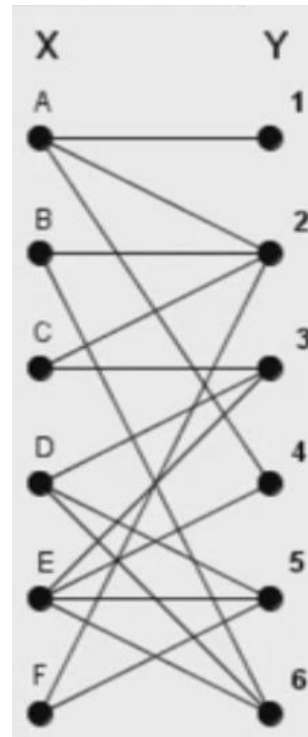
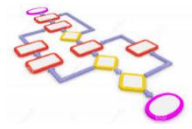


Aplicando Grafos no problema



- ✓ O casal A prefere os quartos 1,2 e 4
- ✓ O casal B prefere os quartos 2 e 6
- ✓ O casal C prefere os quartos 2 e 3
- ✓ O casal D prefere os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal E prefere os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ O casal F prefere os quartos 2 e 5





O grafo desenhado para o problema tem alguma característica interessante?



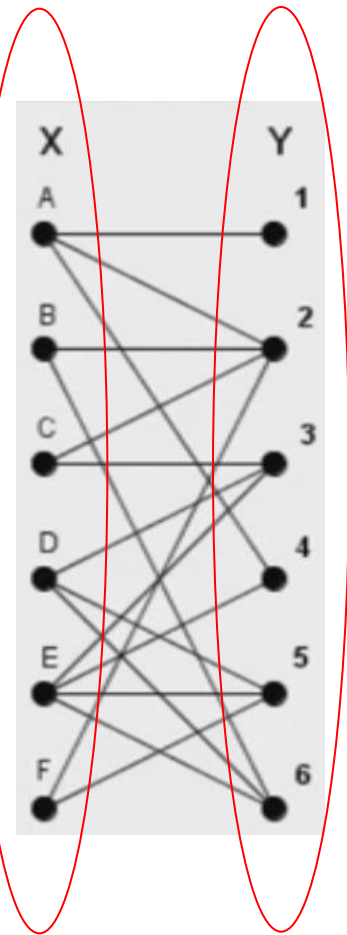


Grafo Bipartido

- ✓ Sim, o gráfico desenhado tem uma propriedade interessante!
- ✓ Trata-se de um **Grafo Bipartido**!

Grafo Bipartido

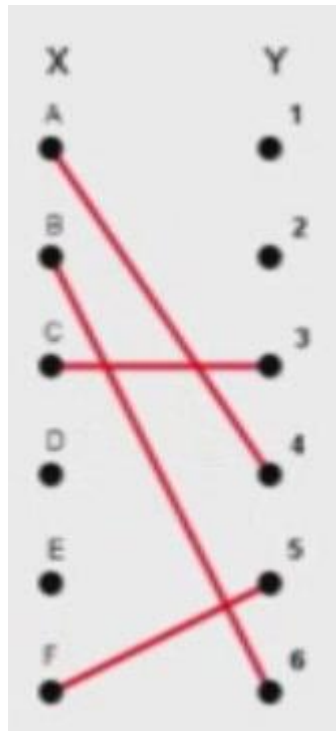
Um Grafo é dito Bipartido se o conjunto de vértices pode ser particionados em dois conjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y.





Tentativa de Solução

- ✓ A solução para o problema consiste em se determinar um relacionamento entre os vértices que atenda às restrições do problema;
- ✓ Será que o relacionamento abaixo, resolveria o problema?



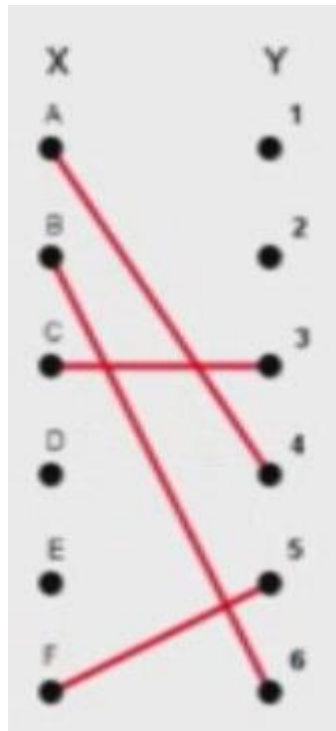
- ✓ **O casal A** prefere os quartos 1,2 e 4
- ✓ **O casal B** prefere os quartos 2 e 6
- ✓ **O casal C** prefere os quartos 2 e 3
- ✓ O casal D prefere os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal E prefere os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ **O casal F** prefere os quartos 2 e 5





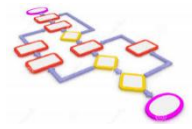
Tentativa de Solução

- ✓ O emparelhamento proposto **não** resolve o problema, pois os casais **D** e **E** não teriam quartos disponíveis;
- ✓ Assim, deve-se procurar um **emparelhamento** adequado que resolva o problema.



- ✓ O casal **A** preferia os quartos 1,2 e **4**
- ✓ O casal **B** preferia os quartos 2 e **6**
- ✓ O casal **C** preferia os quartos 2 e **3**
- ✓ O casal **D** preferia os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal **E** preferia os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ O casal **F** preferia os quartos 2 e **5**



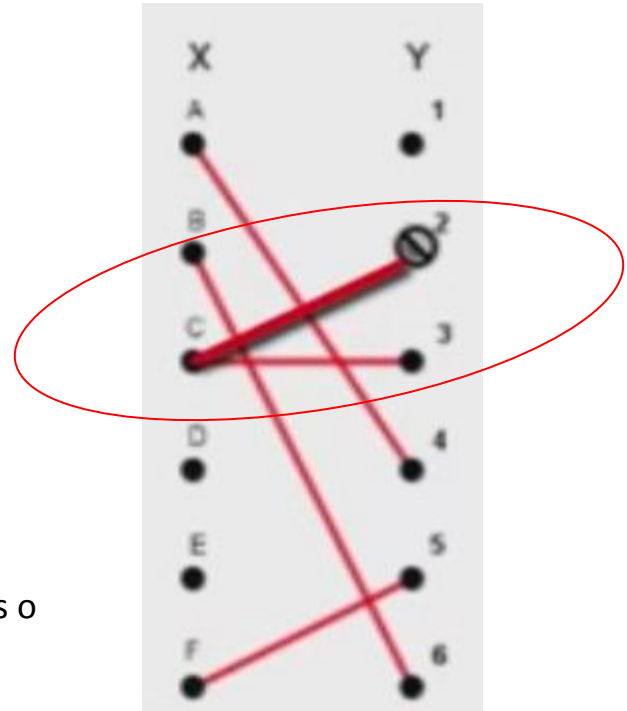


Emparelhamento

Emparelhamento

Emparelhamento é um conjunto de arestas onde não existem duas arestas incidentes a um mesmo vértice.

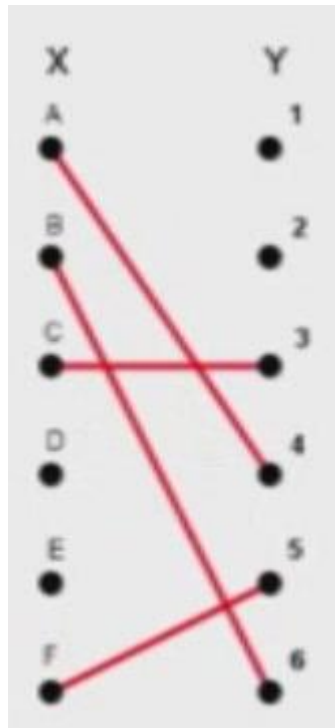
- ✓ No exemplo, os conjuntos X e Y **não** estão emparelhados, pois o vértice **C** de **X** está sendo conectado aos vértices **2** e **3** de **Y**;





Solução parcial

- ✓ Para a solução apresentada, conseguiu-se emparelhar **4 vértices**!
- ✓ Será que se consegue um emparelhamento maior?



- ✓ O casal **A** preferia os quartos 1,2 e **4**
- ✓ O casal **B** preferia os quartos 2 e **6**
- ✓ O casal **C** preferia os quartos 2 e **3**
- ✓ O casal **D** preferia os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal **E** preferia os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ O casal **F** preferia os quartos 2 e **5**





Emparelhamento Perfeito

- ✓ Para a solução do problema do hotel, deve-se encontrar um **emparelhamento perfeito**, que é um **emparelhamento que tem todos os vértices conectados**;

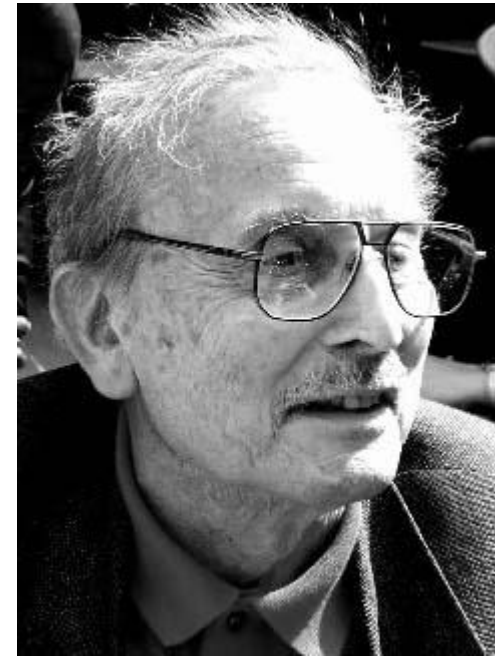
Será que para o problema do hotel, consegue-se obter um emparelhamento perfeito ?

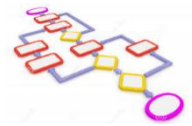




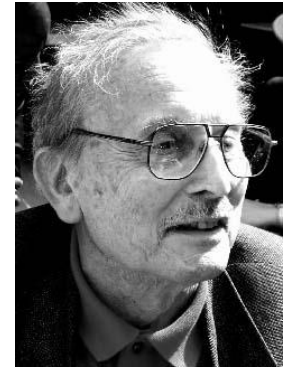
Teorema de Berge

- ✓ Graças ao Matemático francês Claude **Berge**, pode-se determinar se há um emparelhamento maior (com mais arestas) que o já encontrado.





Teorema de Berge



Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M -aumentante.

Vértice Livre

Vértice livre ou vértice não M -saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M .



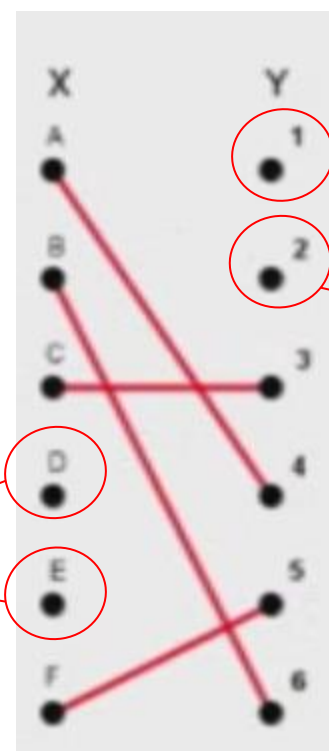
Teorema de Berge

Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.



Vértice Livre

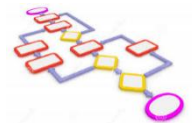
Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M .



Vértices Livres

Vértices Livres

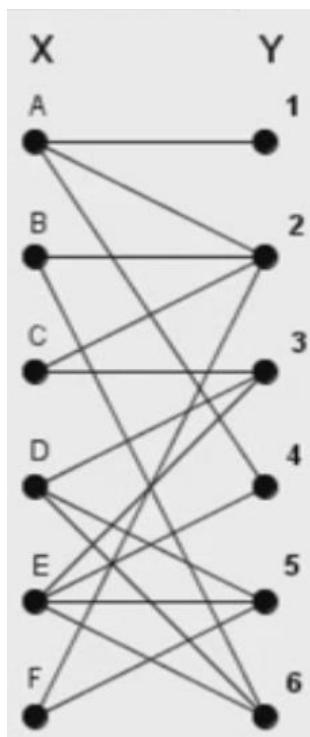




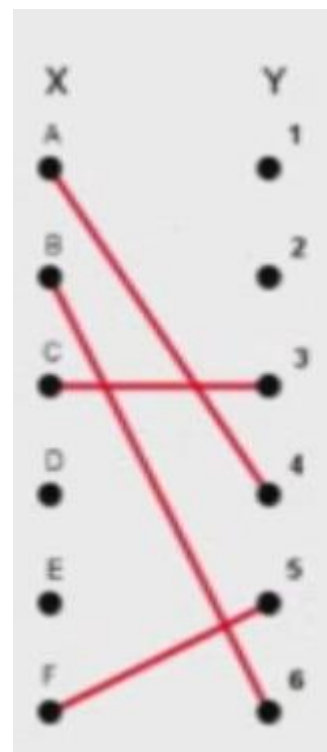
Teorema de Berge

Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.

✓ Problema Original



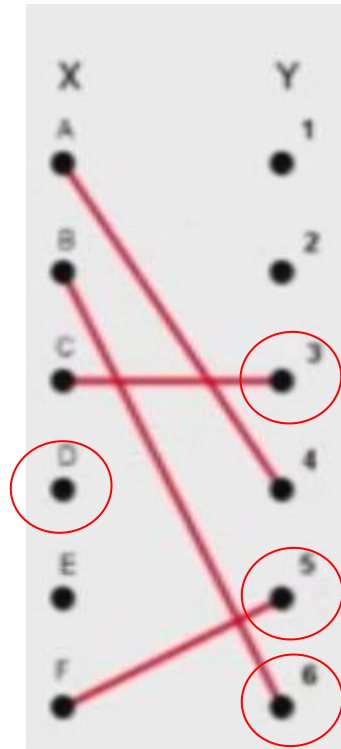
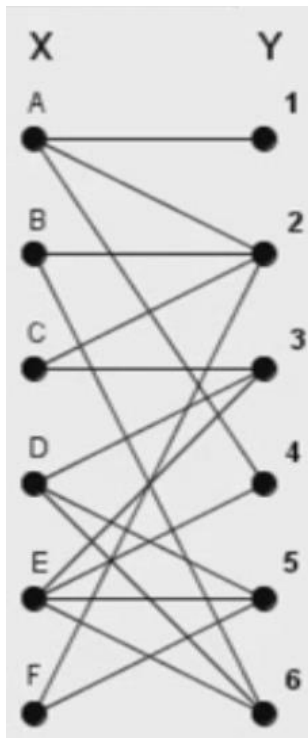
✓ Emparelhamento Parcial com **4 arestas conectadas**





Teorema de Berge

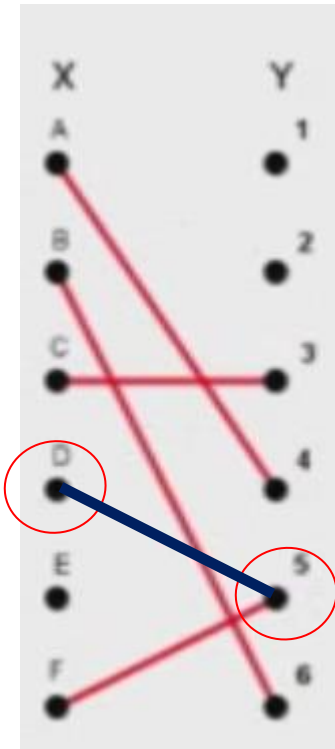
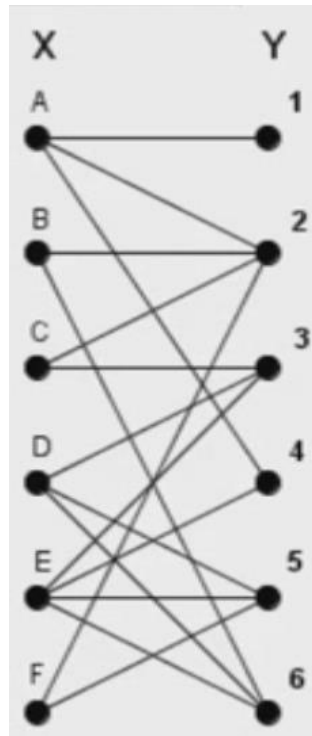
- ✓ Deve-se começar e terminar com vértices livres, alternando-se entre arestas que pertencem e não pertencem ao emparelhamento;
- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **D**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, podendo ser **D3**, **D5** ou **D6**;





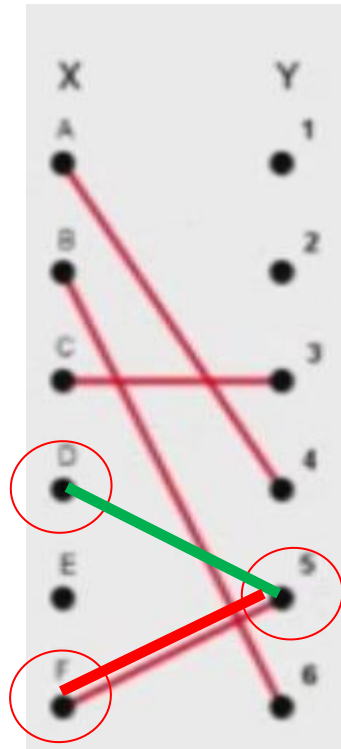
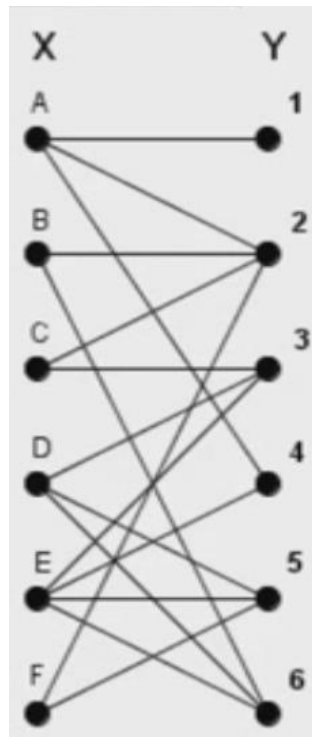
Teorema de Berge

- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **D**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, podendo ser **D3**, **D5** ou **D6**;
- ✓ Pode-se, por exemplo, escolher **D5**.



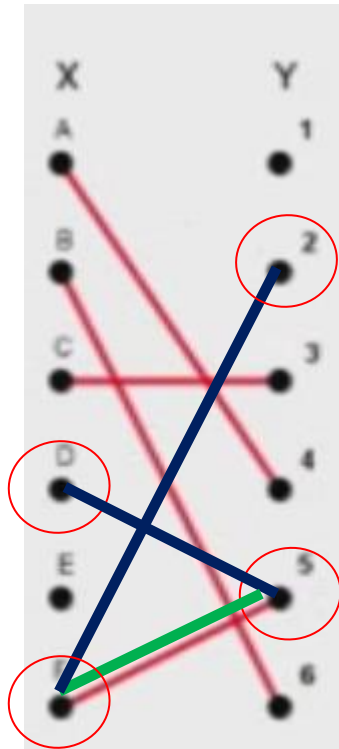
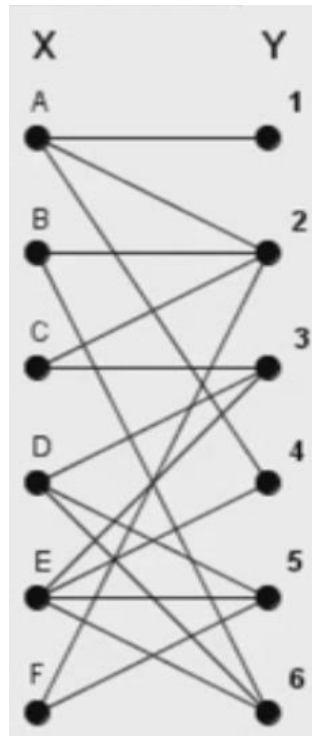
Teorema de Berge

- ✓ Pode-se, por exemplo, escolher **D5**;
- ✓ Como o caminho é alternante, a próxima aresta deve ser do emparelhamento;
- ✓ Portanto, a aresta do emparelhamento que deve ser escolhida é **F5**.



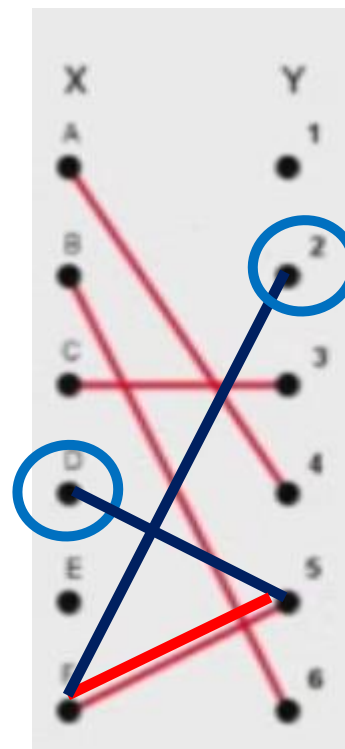
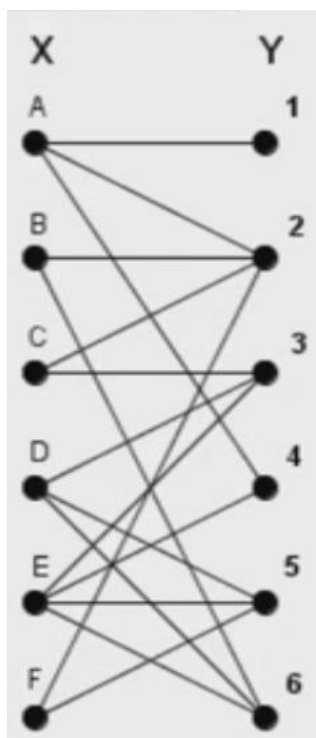
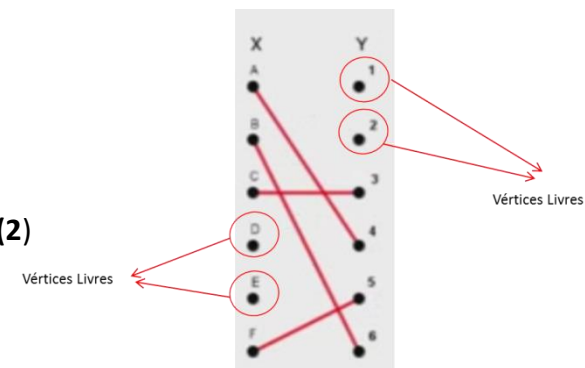
Teorema de Berge

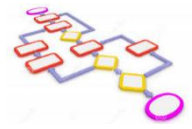
- ✓ Portanto, a aresta do emparelhamento que deve ser escolhida é **F5**
- ✓ Como o caminho é alternante, a próxima não deve ser do emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta a ser escolhida deve ser **F2**.



Teorema de Berge

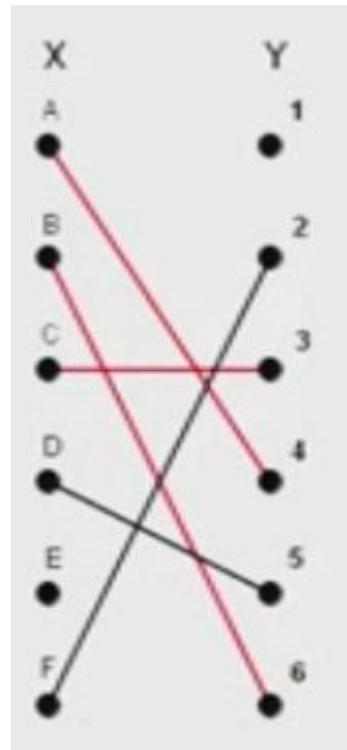
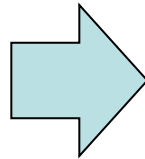
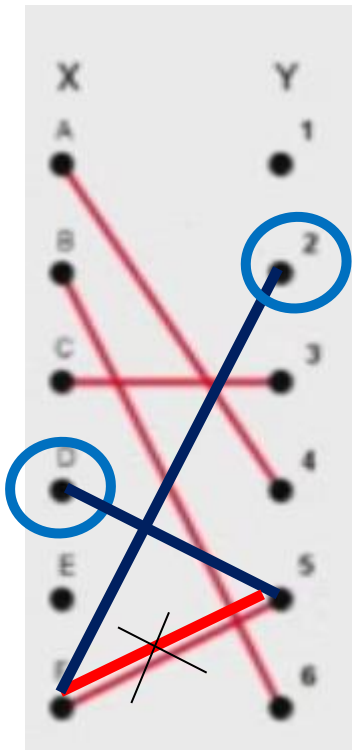
- ✓ Como o caminho é **alternante**, a próxima aresta deve ser do emparelhamento;
- ✓ Mas, não há aresta do emparelhamento ligando **2**;
- ✓ Portanto, o caminho encerra-se aqui;
- ✓ Mas, o caminho traçado iniciou-se com um **vértice livre (D)** e terminou **com vértice livre (2)**
- ✓ Assim, de acordo com o Teorema de Berge, obte-se um caminho **M-alternante**.





Teorema de Berge

- ✓ Próximo passo: Deve-se retirar do caminho M-aumentante (**D5F2**), toda aresta desse caminho que pertence a **M**;
- ✓ Deve-se portanto, retirar a aresta **F5**;
- ✓ Com isso, obtém-se um emparelhamento com uma aresta a mais.

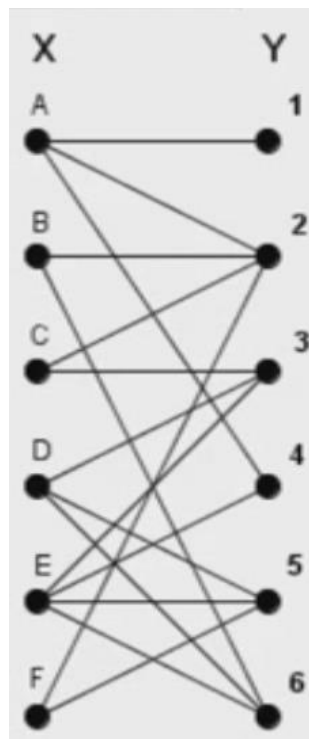


Agora, pode-se hospedar 5 casais!!!



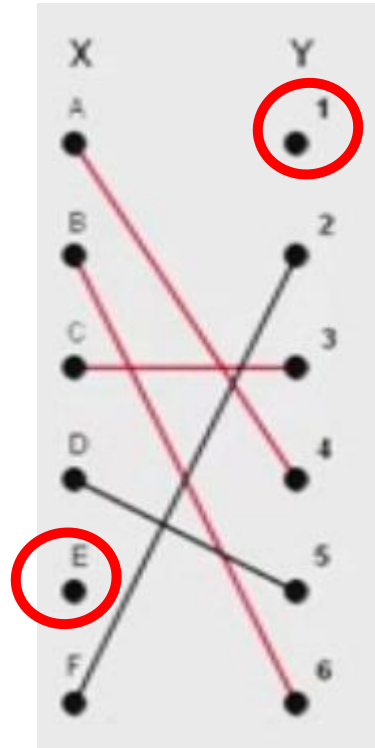


- ✓ Já se conseguiu hospedar **5** casais!
- ✓ Mas, será que poderemos hospedar os **6** casais?



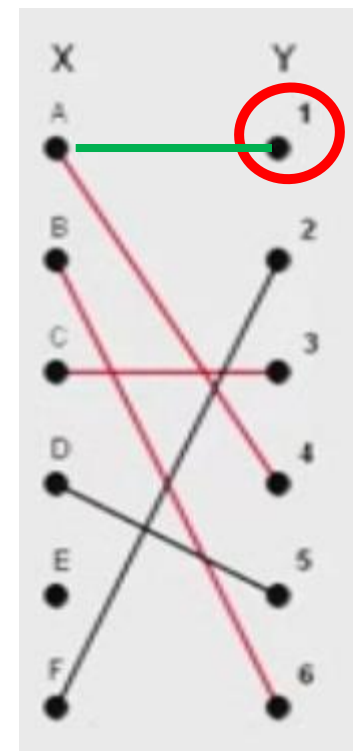
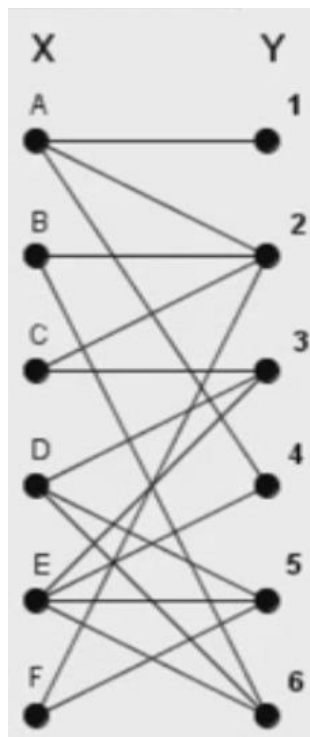
Teorema de Berge

- ✓ Será que poderemos hospedar os **6 casais**?
- ✓ Deve-se aplicar novamente o **Teorema de Berge**;
- ✓ Os vértices livres são **1 e E**.



Teorema de Berge

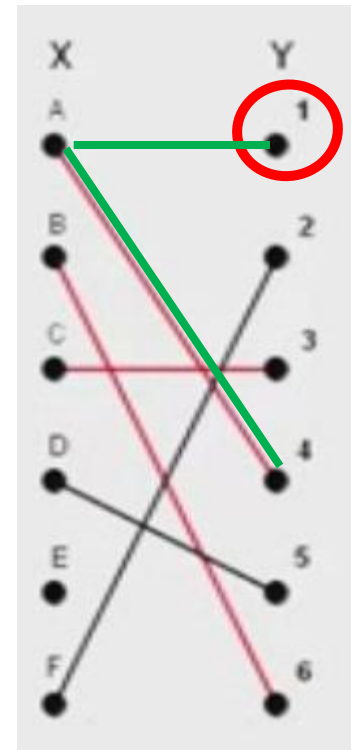
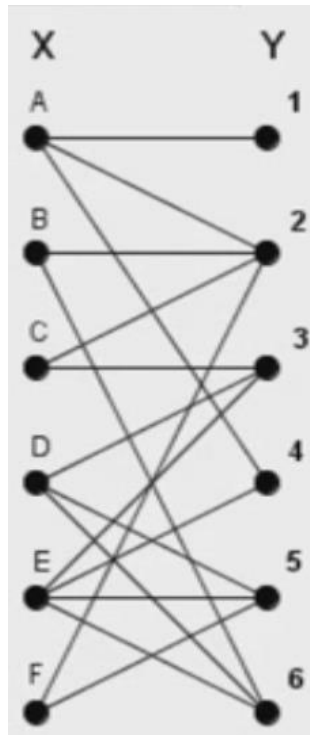
- ✓ Será que poderemos hospedar os **6 casais**?
- ✓ Deve-se aplicar novamente o **Teorema de Berge**;
- ✓ Deve-se começar e terminar com vértices livres, alternando-se entre arestas que pertencem e não pertencem ao emparelhamento;
- ✓ Os vértices livres são **1 e E**;
- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **1**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, devendo ser portanto, **A1**.

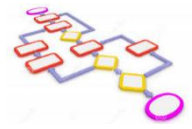




Teorema de Berge

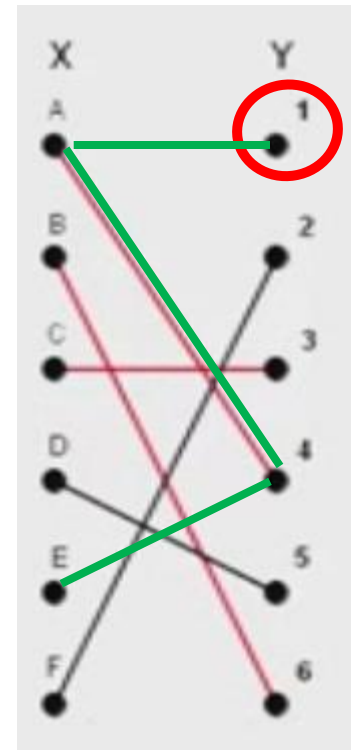
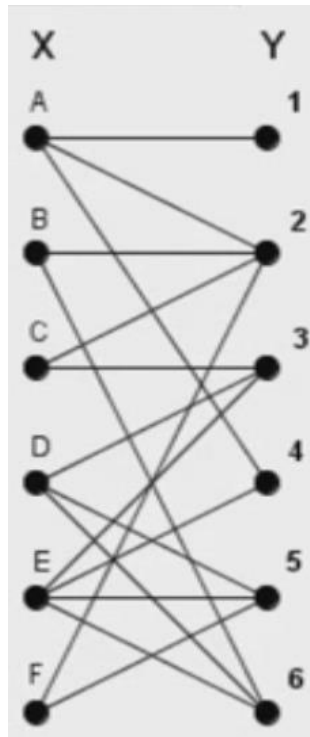
- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **1**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, devendo ser portanto, **A1**;
- ✓ Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta do emparelhamento, devendo ser, portanto, **A4**.

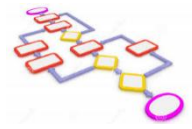




Teorema de Berge

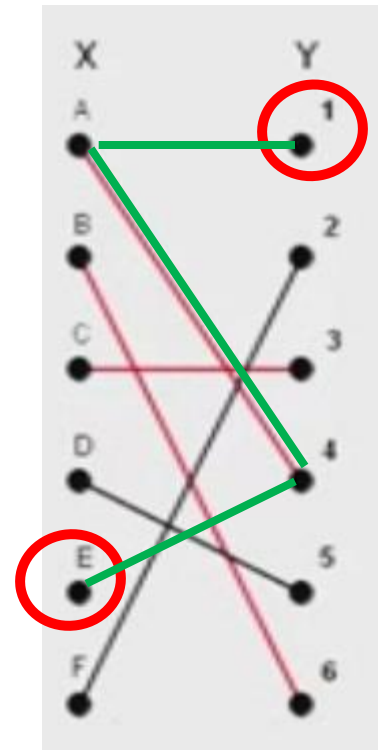
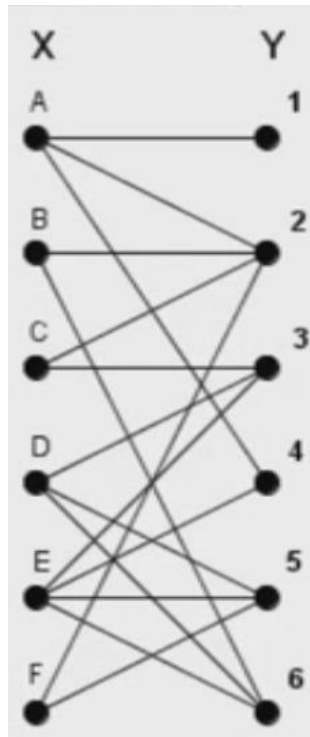
- ✓ Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta que não pertença ao emparelhamento;
- ✓ Assim, a próxima aresta deve ser **E4**;

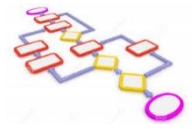




Teorema de Berge

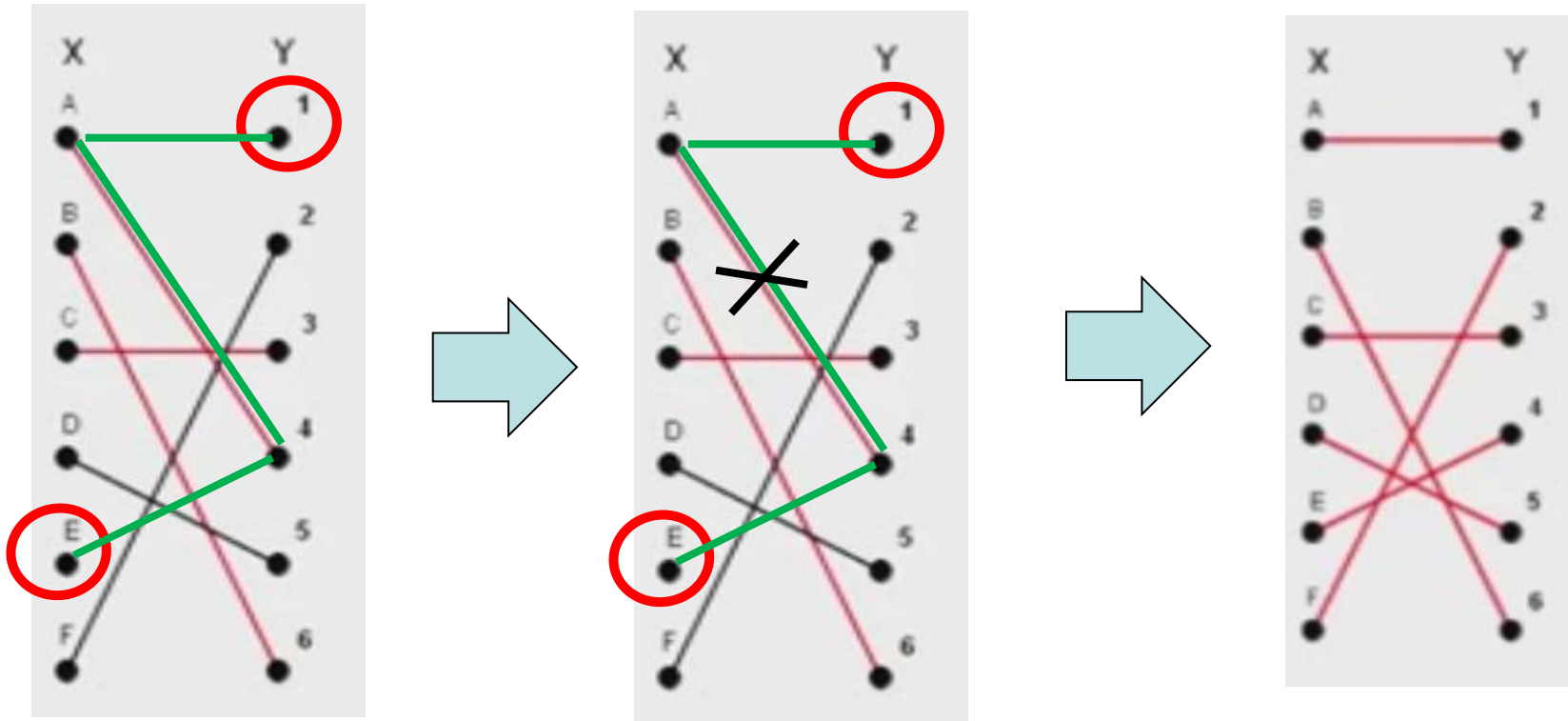
- ✓ Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta que pertença ao emparelhamento;
- ✓ Como não há aresta do emparelhamento que inicia em **E**, o caminho termina;
- ✓ Os vértice **1** e **E** são **livres**, portanto o caminho obtido é **M-aumentante**;





Teorema de Berge

- ✓ Deve-se eliminar todas as arestas do caminho **M-aumentante** que estão no emparelhamento;
- ✓ No caso, deve-se portanto eliminar a aresta



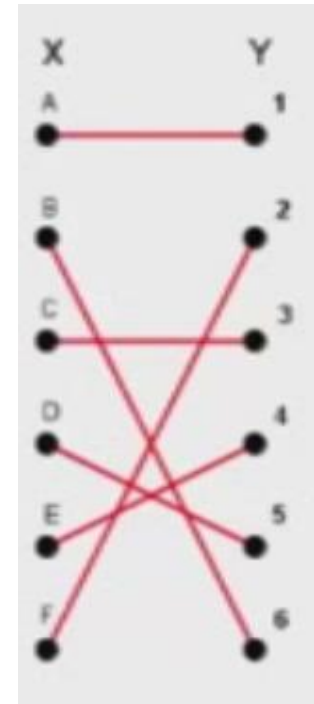


Teorema de Berge

✓ Portanto, conseguiu-se resolver o problema dos **6 casais**;



- ✓ O casal **A** preferia os quartos **1,2 e 4**
- ✓ O casal **B** preferia os quartos **2 e 6**
- ✓ O casal **C** preferia os quartos **2 e 3**
- ✓ O casal **D** preferia os quartos **3,5 e 6**
- ✓ O casal **E** preferia os quartos **3,4,5 e 6**
- ✓ O casal **F** preferia os quartos **2 e 5**



Formalização – Grafos Bipartidos

GRAFO BIPARTIDO

Grafo bipartido (bicolorido, bigrafo ou bipartite) é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y . Resumindo:

- Seja $G = (V, A)$ um grafo simples;
- V pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ;
- $V = X \cup Y$;
- $X \cap Y = \emptyset$;
- Vértices em X conectam-se apenas a vértices em Y (e vice-versa).

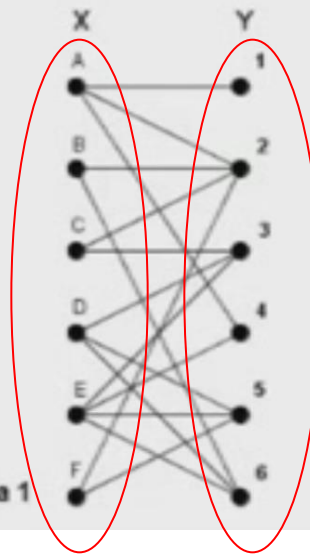


Figura 1



Formalização – Emparelhamentos

EMPARELHAMENTO

Sejam $G = (V, A)$ um grafo, $m, n \in \mathbb{N}$. Um emparelhamento (ou matching, ou acoplamento) é um conjunto $M \subseteq A$ tal que, $a_m \cap a_n = \emptyset$ para todas as arestas a_m e $a_n \in M$, com $m \neq n$. Em outras palavras, as arestas não têm vértices em comum, ou seja, não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.

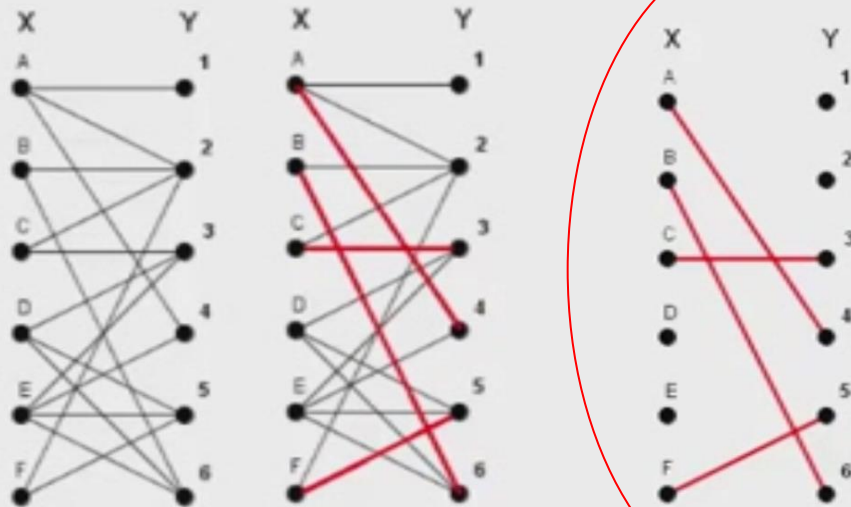
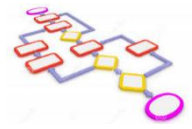


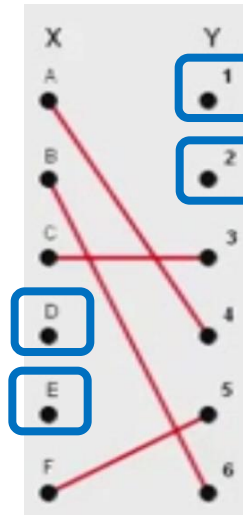
Figura 2





Formalização – Vértice Livre

- ✓ Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento **M**.

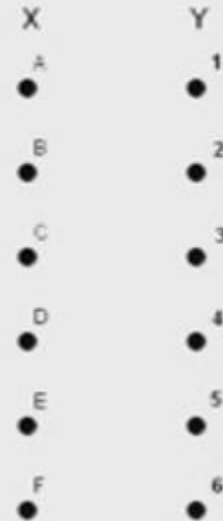
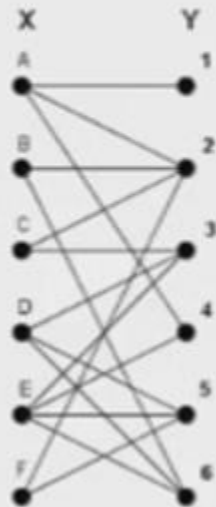


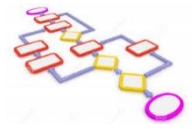


Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.

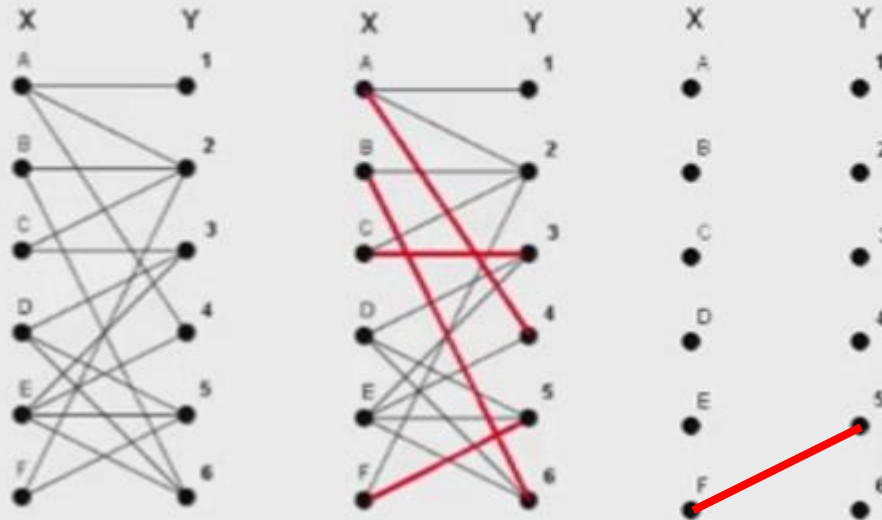




Formalização – Caminho M-Alternante

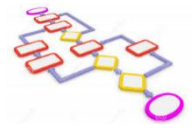
CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ Iniciou-se o caminho com uma aresta do emparelhamento (**F5**);
- ✓ Portanto, a próxima aresta do caminho **NÃO** deve pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta deve ser **D5** ou **E5**

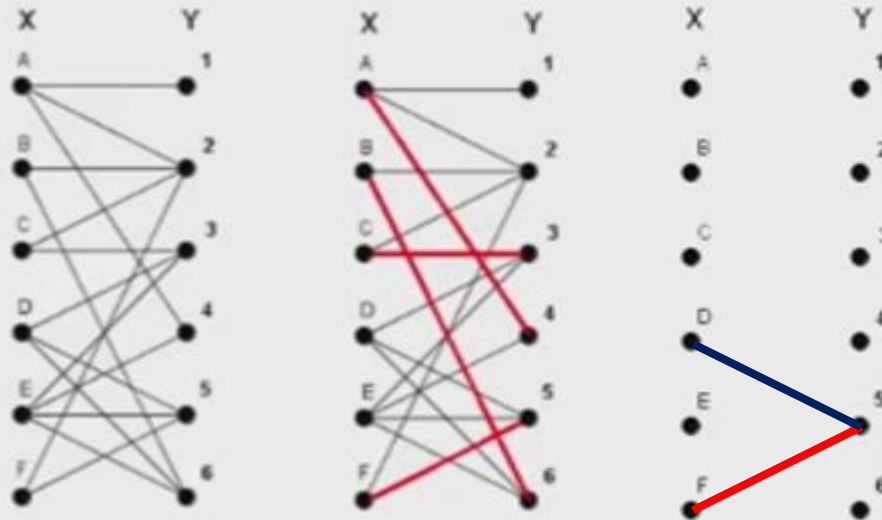




Formalização – Caminho M-Alternante

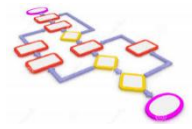
CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ Escolheu-se **D5**;
- ✓ Portanto, a próxima aresta do caminho **DEVE** pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe. Logo, terminou o caminho M-alternante.

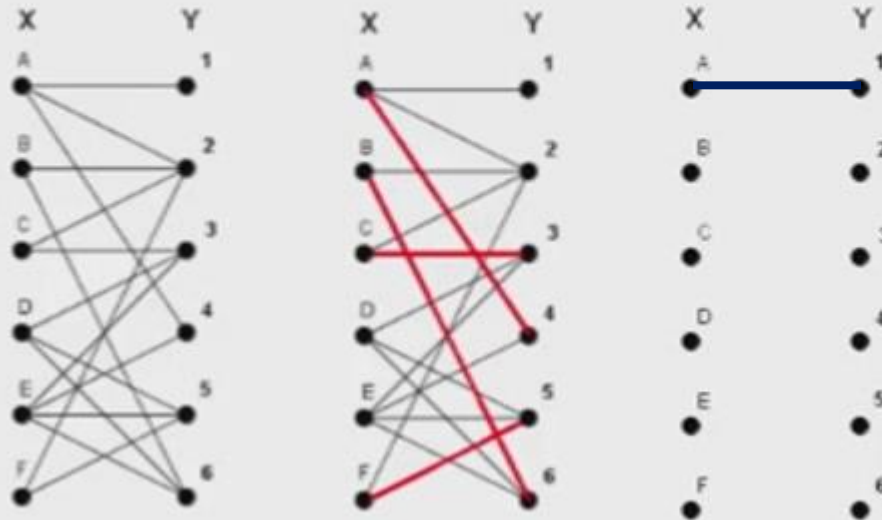




Formalização – Caminho M-Alternante

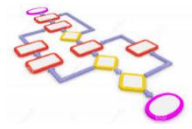
CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ Outro caminho M-Alternante
- ✓ Exemplo: Inicia-se em **A1** (aresta não pertencente ao emparelhamento)
- ✓ Logo a próxima aresta deve pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Assim, a próxima aresta deve ser **A4**

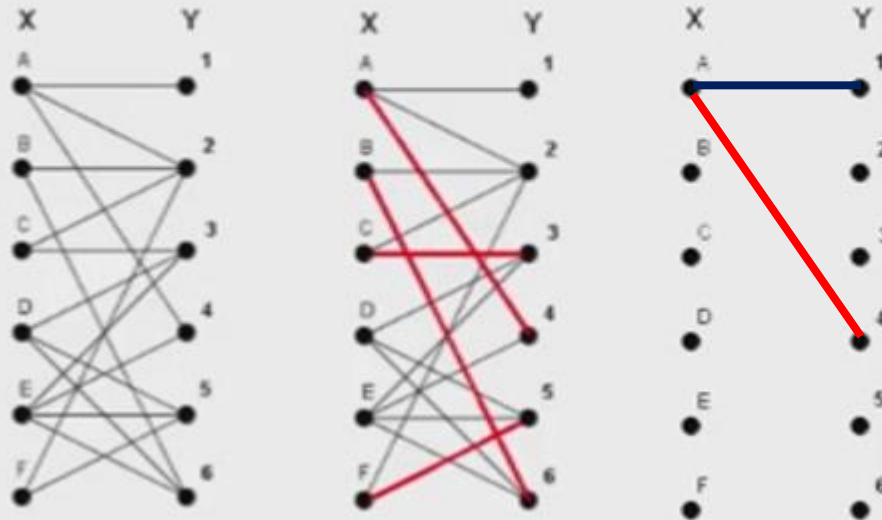




Formalização – Caminho M-Alternante

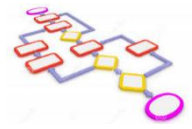
CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ A próxima aresta **NÃO** deve ser do emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta deve ser **E4**

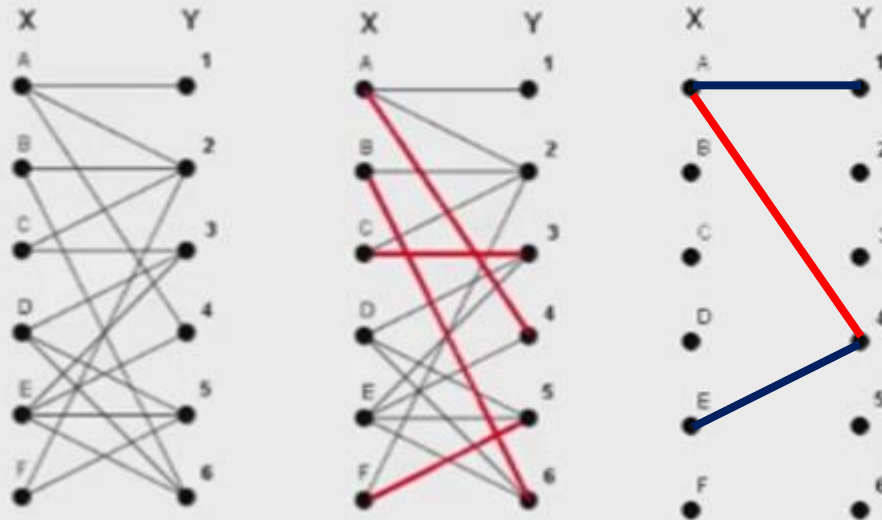




Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ A partir de **E4**, a próxima aresta do caminho **DEVE** pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe. Logo, terminou o caminho M-alternante





Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de M .

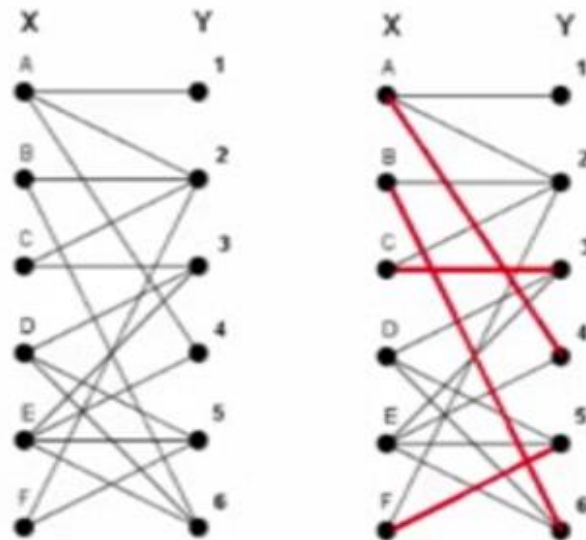


Figura 3





Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de M .

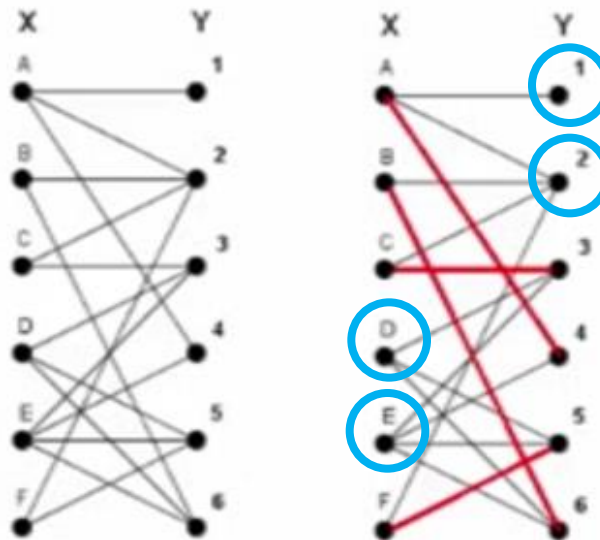


Figura 3

- ✓ Vértices Livres: **1,2,D,E**
- ✓ Para ser um caminho M-aumentante deve-se começar em um desses vértices livres e terminar também em um desses vértices livres.





Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de M .

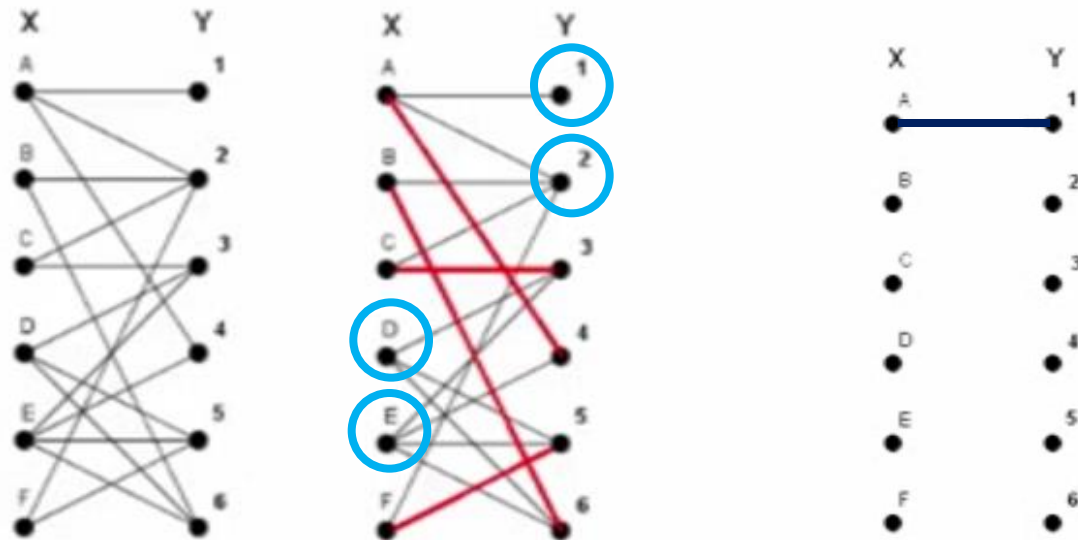


Figura 3

- ✓ Por exemplo, pode-se iniciar por **A1**, aresta **não** pertencente ao emparelhamento;
- ✓ Logo, a próxima aresta deve pertencer ao emparelhamento, devendo portanto ser **A4**;





Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de M .

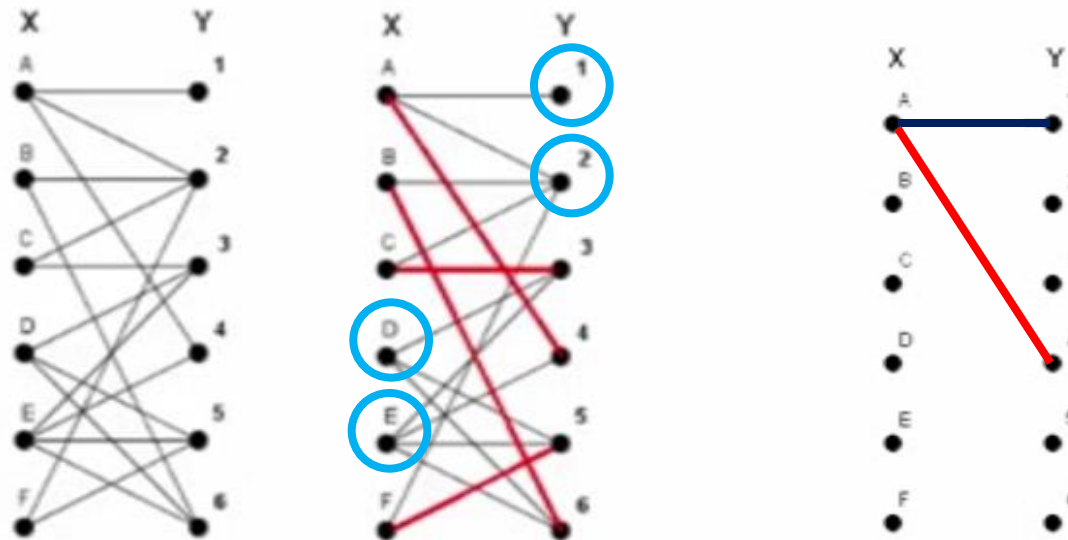


Figura 3

- ✓ A partir de **A4**, deve-se escolher uma aresta que **não** pertença ao emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta deve ser **E4**





Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de M .

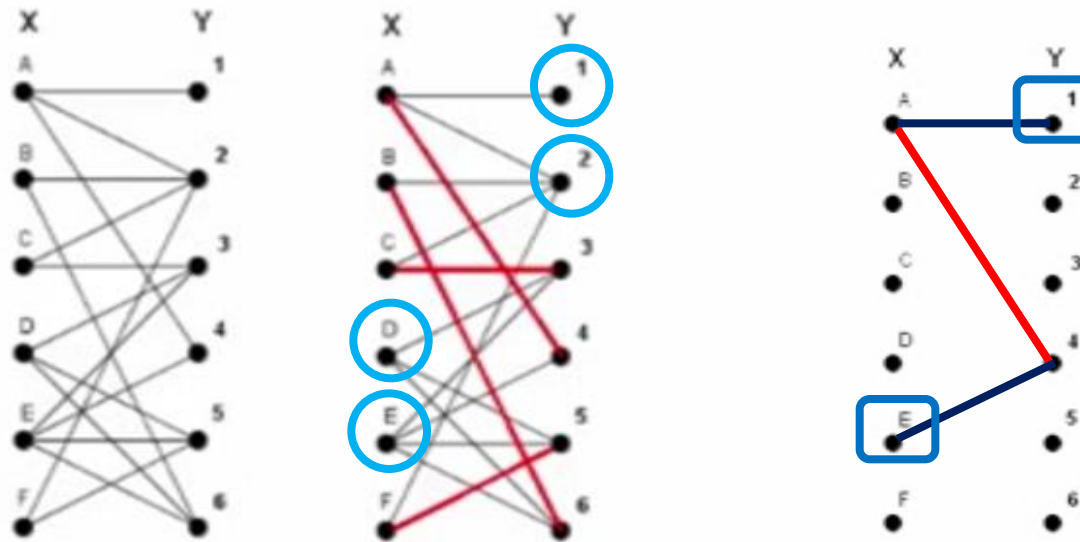


Figura 3

- ✓ A partir de **E4**, deve-se escolher uma aresta que pertença ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe no emparelhamento e, portanto, o caminho termina;
- ✓ Como E é vértice livre, então o caminho é **M-Aumentante**;
- ✓ Conclui-se portanto que o emparelhamento em vermelho **não é máximo**;
- ✓ Ou seja, há um emparelhamento maior que ele.



Formalização – Emparelhamento Perfeito

EMPARELHAMENTO PERFEITO

É um emparelhamento que tem todos os vértices conectados.

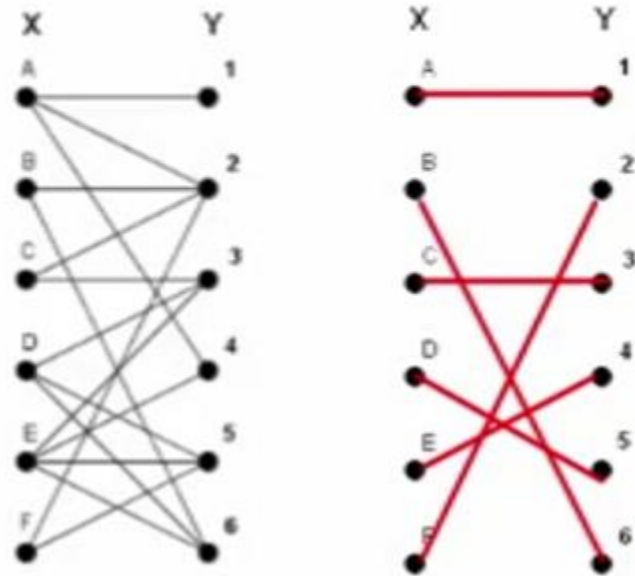
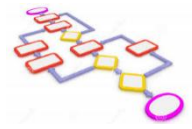


Figura 1

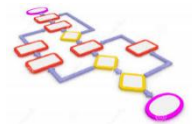




Outra questão

- ✓ Será que é possível saber-se de **antemão** se pode-se ou não hospedar todos, sem se precisar indicar quais são os quartos a serem alocados de imediato?





Outra questão

- ✓ Para responder a essa questão, precisa-se de novos conceitos, tais como: **Emparelhamento Completo** e **Vizinhança**;



-

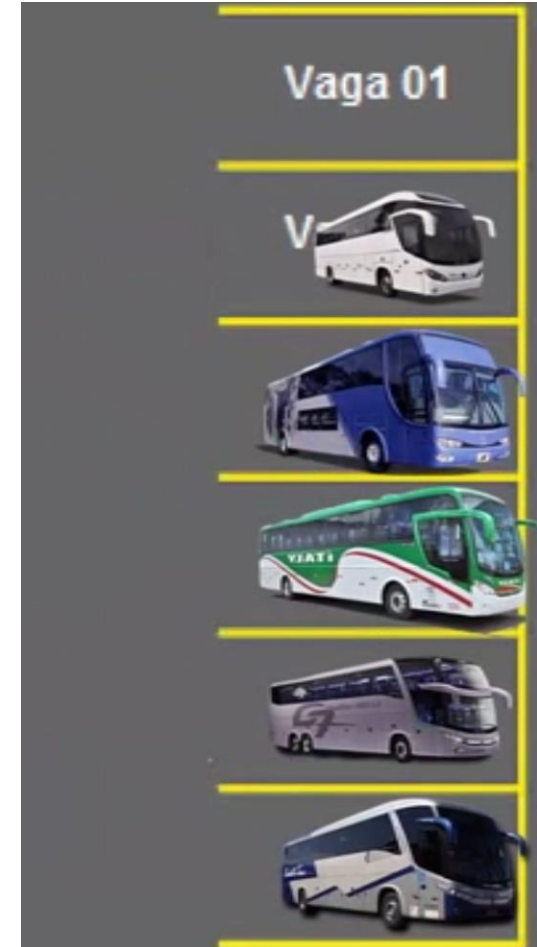




Vejamos um outro problema...



- ✓ Basta alocar-se um ônibus em cada vaga e ainda sobrá uma vaga!



O problema de alocação dos ônibus

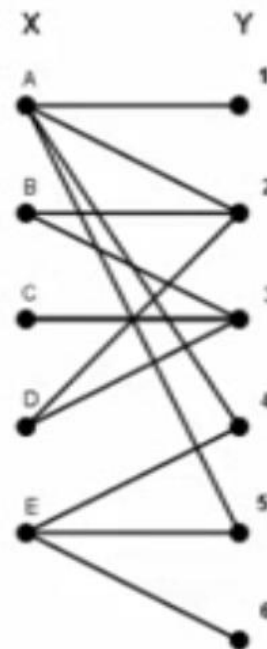
- ✓ Cada empresa tem um controle distinto da plataforma de acordo com as ações que possui, ou seja, os ônibus

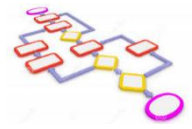
- da empresa A, que possuía mais ações, só poderiam estacionar nas vagas 1, 2, 4 e 5.
- da empresa B só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
- da empresa C só poderiam estacionar na vaga 3.
- da empresa D só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
- da empresa E só poderiam estacionar nas vagas 4, 5 e 6.



Modelando-se o problema com grafos

- ✓ Pode-se desenhar **11** vértices, **5** representando os ônibus e 6 representando-se as vagas;
- ✓ Conecta-se os ônibus às vagas respeitando-se as restrições;
- ✓ Como não há necessidade de se conectar ônibus com ônibus nem vagas com vagas, consegue-se organizar os vértices em um **grafo bipartido** onde $X=\{A,B,C,D,E\}$ e $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$;
- ✓ O problema se resume a saber se há um **Emparelhamento Completo**!





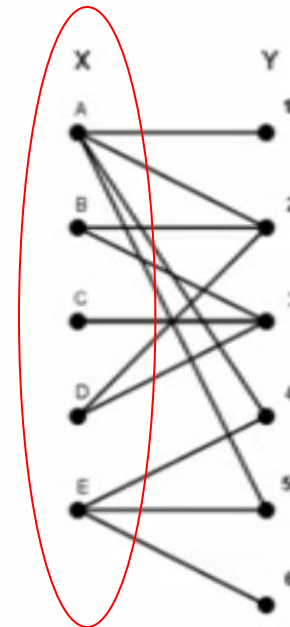
Emparelhamento Completo

Porém, dessa vez estávamos à procura da existência de um Emparelhamento Completo.

Emparelhamento Completo

É um emparelhamento que cobre (ou satura), em um grafo bipartido, todos os vértices do conjunto X, onde X representa o conjunto dos elementos que devem ser alocados.

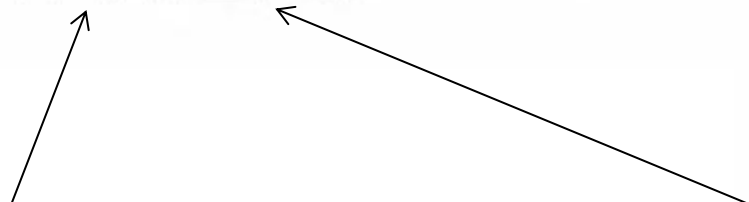
I





Teorema de Hall

Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo G bipartido com partição (X, Y) , existe um emparelhamento completo se e somente se, $|N(s)| \geq |s|$, para todo subconjunto S de X .



- ✓ Quantidade de elementos de $N(s)$ é maior ou igual à quantidade de elementos de S ;
- ✓ $N(s)$ é chamado Conjunto Vizinhaça de S ;





Conjunto Vizinhança

Conjunto Vizinhança

$N(s)$ é conhecido como conjunto vizinhança de S . Em outras palavras, seus elementos são todos os vértices que se conectam (são vizinhos) aos elementos de S .





Resolvendo-se o problema de Alocação dos Ônibus

Teorema de Hall

Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo G bipartido com partição (X, Y) , existe um emparelhamento completo se e somente se, $|N(s)| \geq |s|$, para todo subconjunto S de X .

- ✓ Deve-se analisar alguns subconjuntos de X ;
- ✓ O subconjunto $S = \{B, C, D\}$ possui a quantidade de elementos menor que a quantidade de vértices que se conectavam a eles;
- ✓ S tem 3 elementos;
- ✓ $N(s) = \{2, 3\}$ tem 2 elementos;
- ✓ Logo $|N(s)| < |s|$, o que **contradiz** o Teorema de Hall;
- ✓ Assim, **NÃO** há emparelhamento completo;
- ✓ Logo, **não** existe a possibilidade de se alocar todos os ônibus simultaneamente;

