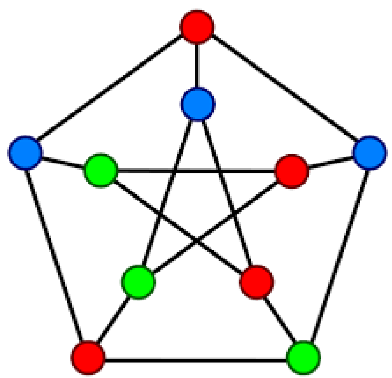
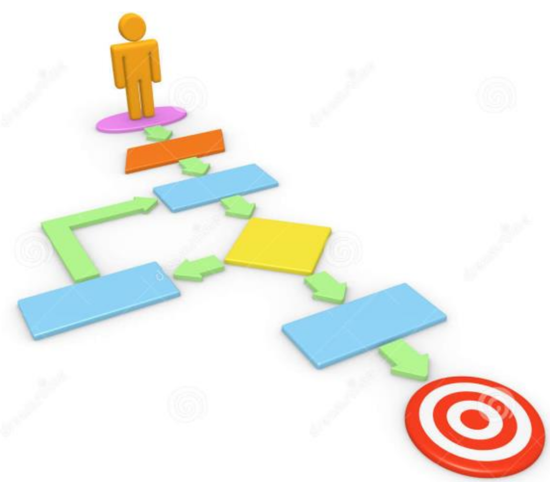
QualitSys

Unidade 6 - Algoritmos em Grafos

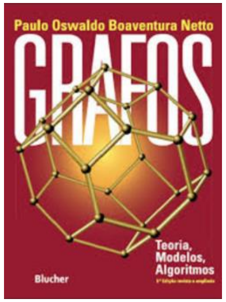


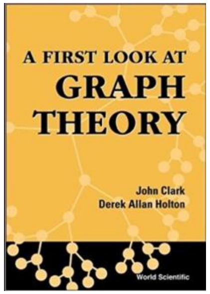


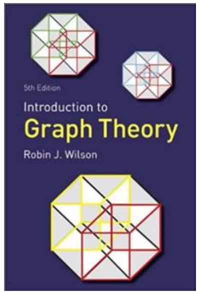
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

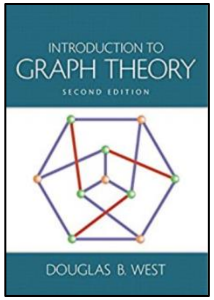
Bibliografia

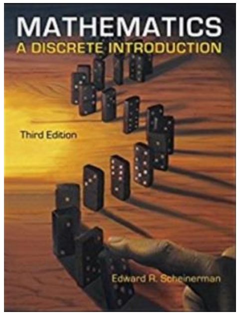
- Algoritmos Teoria e Prática – Cormen – 2ª edição – Editora Campus
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4^{th} Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7^{th} edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graph Theory – R. **Diestel** – Springer – 5^{th} Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997

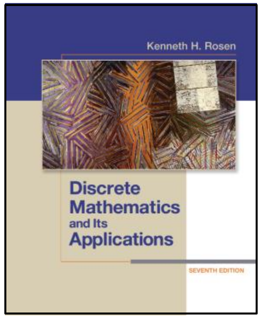


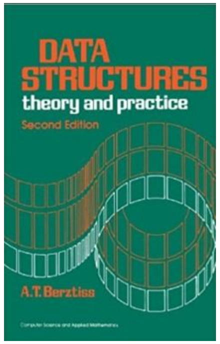


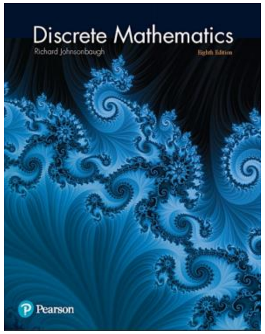


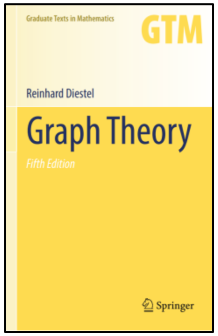


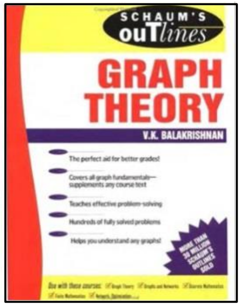












Tipo abstrato de Dado Grafo

- ✓ Um grafo é uma coleção de **vértices** e **arestas**;
- ✓ Pode-se modelar a abstração por meio de uma combinação de três tipos de dados: **Vértice**, **Aresta** e **Grafo**;
- ✓ Um vértice (**VERTEX**) pode ser representado por um objeto que armazena a informação fornecida pelo usuário, por exemplo, informações de um aeroporto;
- ✓ Uma aresta (**EDGE**) armazena relacionamentos entre vértices, por exemplo: número do vôo, distâncias, custos, etc.
- ✓ A ADT **Graph** deve incluir diversos métodos para se operar com grafos;
- ✓ A ADT **Graph** pode lidar com grafos **direcionados** ou **não-direcionados**. Uma aresta (u,v) é dita direcionada de u para v se o par (u,v) é ordenado, com u precedendo v;
- ✓ Uma aresta (u,v) é dita **não direcionada** se o par (u,v) **não** for ordenado.

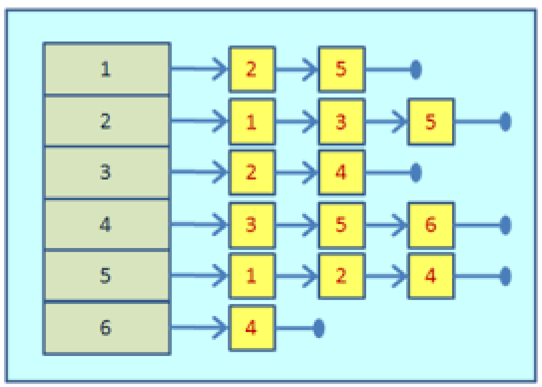
Métodos – TAD Grafo

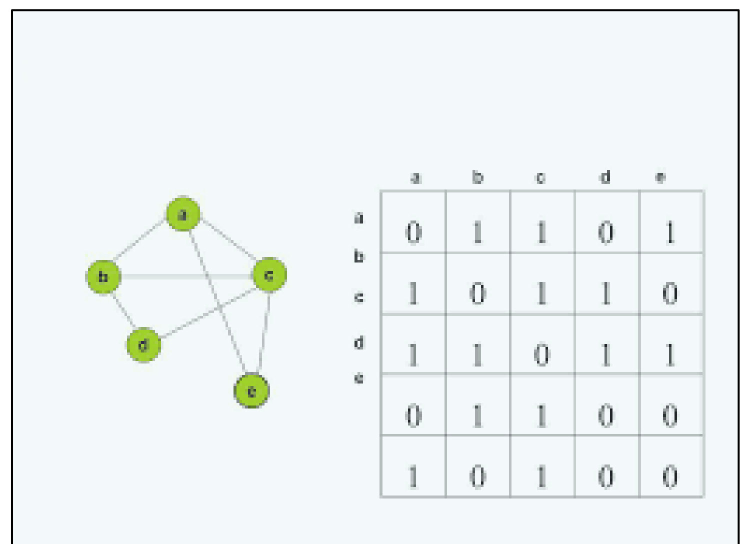
- outgoingEdges(v): Returns an iteration of all outgoing edges from vertex v.
- incomingEdges(v): Returns an iteration of all incoming edges to vertex v. For an undirected graph, this returns the same collection as does outgoingEdges(v).
- insertVertex(x): Creates and returns a new Vertex storing element x.
- insertEdge(u, v, x): Creates and returns a new Edge from vertex u to vertex v, storing element x; an error occurs if there already exists an edge from u to v.
- removeVertex(v): Removes vertex v and all its incident edges from the graph.
- removeEdge(e): Removes edge e from the graph.

QualitSys

Estruturas de Dados para Grafos

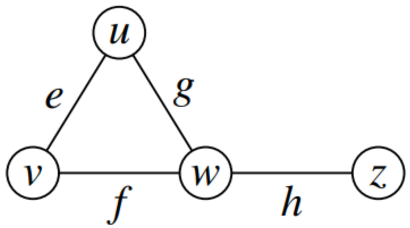
- ✓ **Duas abordagens são geralmente aplicadas:**
  - ✓ Lista de Adjacências
  - ✓ Matriz de Adjacências

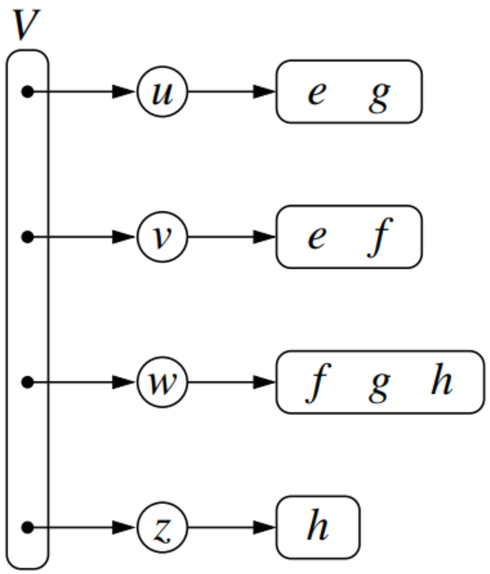




Lista de Adjacências

- ✓ Emprega-se uma lista de vértices, no qual cada vértice aponta para uma outra lista com as arestas incidentes ao vértice;

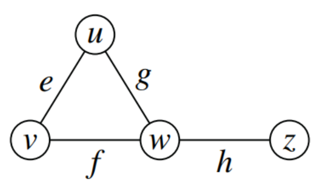


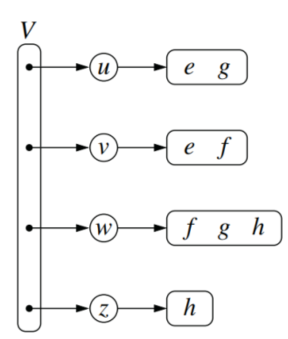


Qual o desempenho dos algoritmos que usam Listas de Adjacência?

Qual o desempenho dos algoritmos com a Lista de Adjacência?

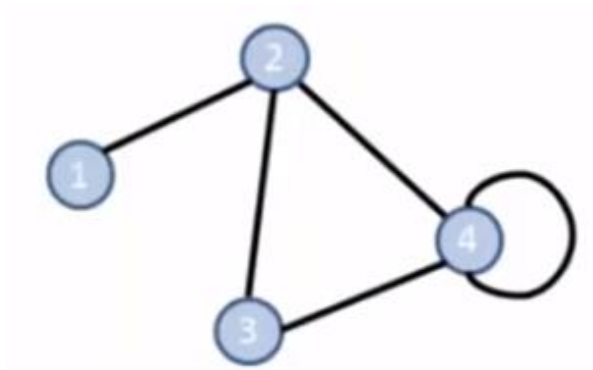
- ✓ A **pesquisa** de um determinado vértice na lista de vértices, tem complexidade **O(n)**;
- ✓ Igualmente, a pesquisa de uma determinada **aresta** na lista de arestas, tem complexidade **O(n);**
- ✓ O método que **insere** um novo **vértice** na lista de vértices, tem complexidade **O(1**);
- ✓ O método que **insere** uma nova **aresta** na lista de arestas também tem complexidade **O(1)**;
- ✓ O método que retorna os vértices na lista de vértices tem complexidade **O(n)**;
- ✓ O método que retorna as arestas na lista de arestas tem complexidade **O(n)**;
- ✓ O método que remove um vértice tem complexidade **O(deg(v))**.





Matriz de Adjacências

- ✓ Utiliza-se uma matriz **n x n** para o armazenamento do grafo;
- ✓ Sendo **n** o número de vértices do grafo;
- ✓ Uma aresta é representada por uma "**marca**" (um determinado valor) na posição (i,j) da matriz;
- ✓ Aresta liga o vértice **i** ao vértice **j**;
- ✓ Para muitos vértices e poucas arestas, desperdiça-se espaço.

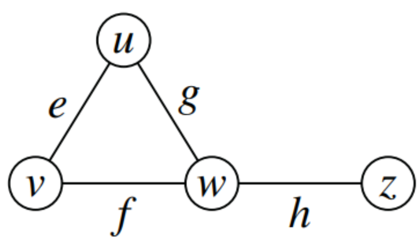


	1	2	3	4
1	**0**	**1**	**0**	**0**
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	1

Qual o desempenho dos algoritmos com a estrutura Matriz de Adjacências?

Qual o desempenho dos algoritmos com Matriz de Adjacências ?

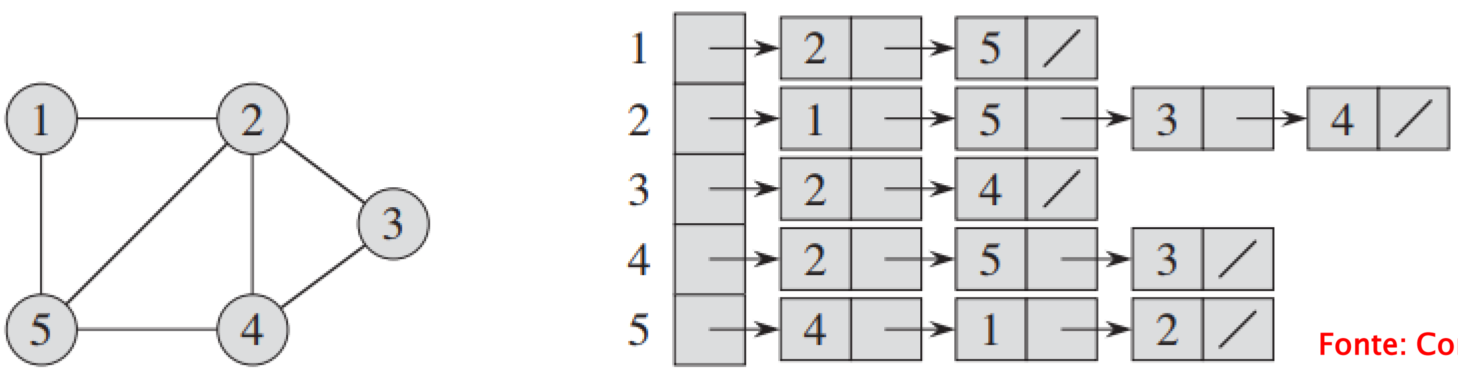
- A maior vantagem de uma matriz de adjacências é que qualquer aresta pode ser acessada no pior caso em tempo O(1);
- Entretanto, diversas outras operações são menos eficientes com o emprego de matriz de adjacências;
- Por exemplo, para se encontrar as arestas incidentes a um vértice V, deve-se examinar todas as n entradas associadas com V; Lembre-se que em listas de adjacência pode-se localizar arestas em O(d(V)).



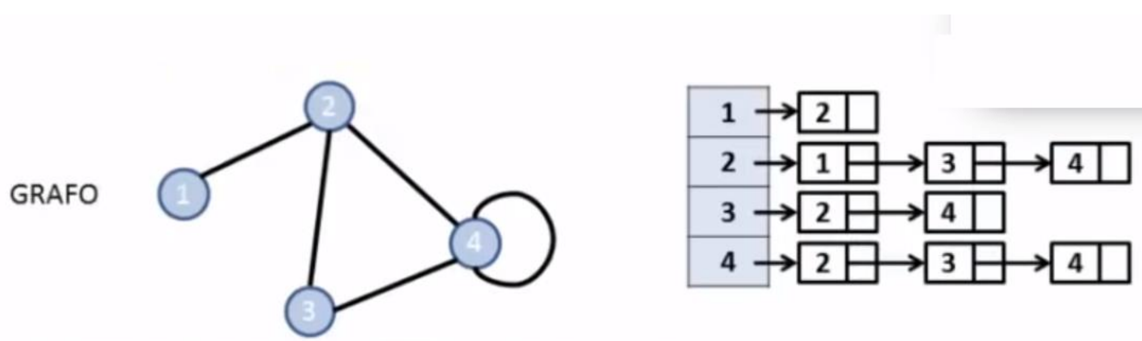
		0	1	2	3
$u \rightarrow$	0		e	g	
$v \rightarrow$	1	e		f	
$w \rightarrow$	2	g	f		h
$z \rightarrow$	3			h	

Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Fornece uma forma compacta de representar grafos **esparsos** – aqueles para os quais **|E|** é muito menor que **|V|²** . Assim, essa implementação é usualmente o método mais escolhido;

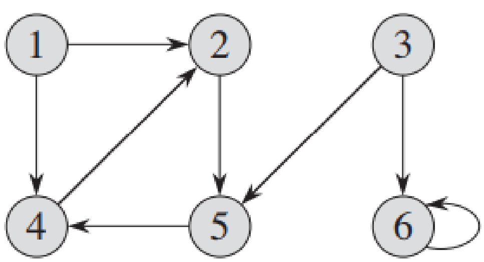


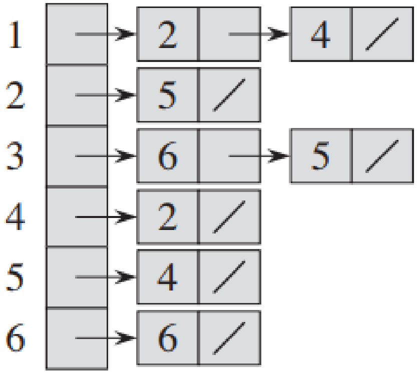
Fonte: Cormen



Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ A representação de um grafo G = (V,E) na forma de Listas de Adjacências consiste de um **array** Adj de | V| **listas**, uma para cada vértice em V;
- ✓ Para cada u ϵ V, a lista de ajdacência Adj[u] consiste de todos os vértices v tais que haja uma aresta (u,v) u ϵ E;
- ✓ Ou seja, Adj[u] consiste de todos os vértices adjacentes a u em G;
- ✓ Considerando que a lista de adjacências representa as arestas de um grafo, pode-se representar o grafo G com os atributos: **V**: conjunto de vértices de G e **Adj[u]**: conjunto de arestas de G, para todo u ϵ V;

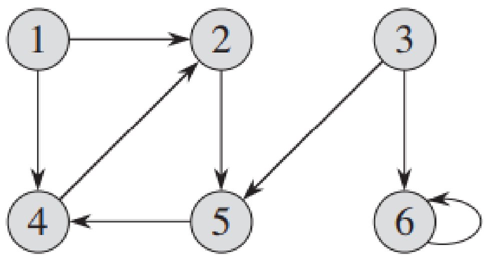




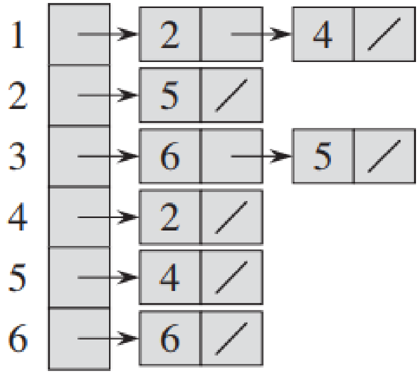
Fonte: Cormen

Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Em um grafo **G direcionado**, a soma dos nós de todas as listas de adjacências é **|E|**;
- ✓ Isso ocorre, uma vez que 1 aresta na forma (u,v) é representada uma única vez em Adj[u].



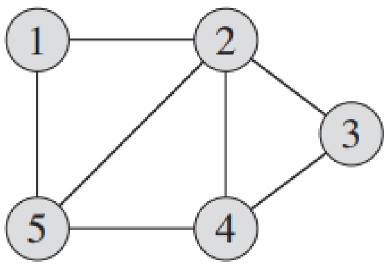
* 8 arestas

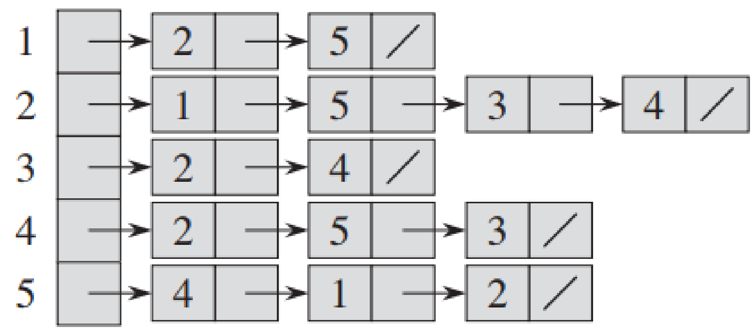


* 8 nós

Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Em um grafo **G não-direcionado**, a soma dos nós de todas as listas de adjacências é 2 * **|E|**;
- ✓ Isso ocorre, uma vez que se **(u,v)** é uma aresta não-direcionada, então u aparece em Adj[u] e vice-versa.



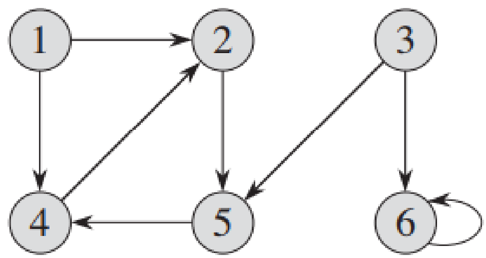


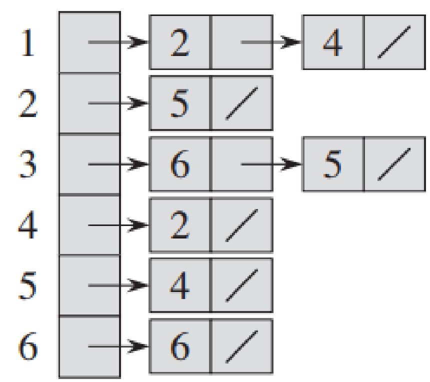
* 7 arestas

* 14 nós

Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Para grafos **direcionados**, a representação em listas de adjacências tem a desejável propriedade que a quantidade de memória necessária é Θ (V + E);





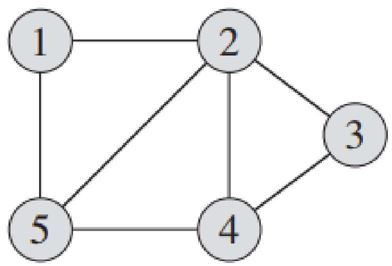
- ✓ 6 vértices
- ✓ 8 arestas

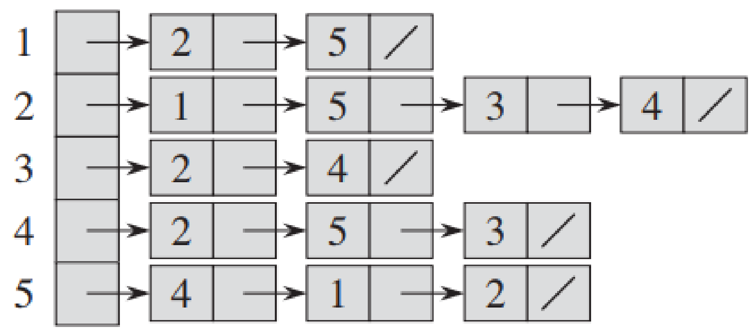
- ✓ 6 nós para vértices
- ✓ 8 nós para arestas

* Total de 14 nós

Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Para grafos **não-direcionados**, a representação em listas de adjacências tem a desejável propriedade que a quantidade de memória necessária é Θ (V + 2*E);





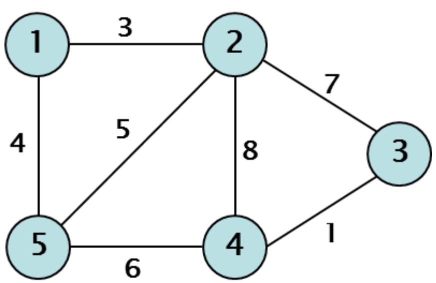
- ✓ 5 vértices
- ✓ 7 arestas

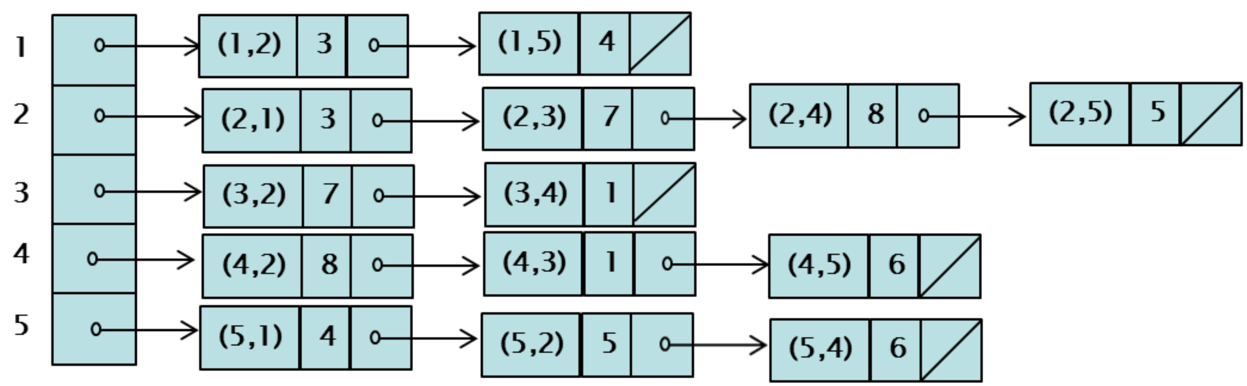
- ✓ 5 nós para vértices
- ✓ 14 nós para arestas

* Total de 19 nós

Implementação com Listas de Adjacências

- Pode-se facilmente adatar-se uma lista de adjacências para representar grafos com pesos;
- Ou seja, grafos para o qual cada aresta tem um peso associado, tipicamente dado por uma função de pesos: **w : E → R.**
- Por exemplo: seja **G = (V,E)** um grafo com pesos com uma função de pesos **w**. Pode-se armazenar o valor da função w para uma aresta e ϵ E no nó da lista ajd[u].

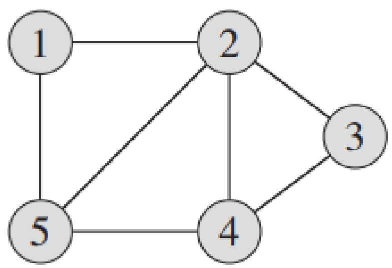


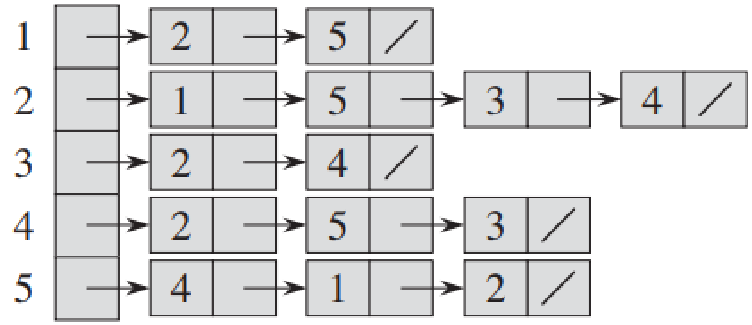


Implementação com Listas de Adjacências

- ✓ Uma potencial desvantagem da representação por **Lista de Adjacências** é que ela **não** provê uma forma rápida de se determinar se uma determinada aresta (u,v) está presente no grafo;

- ✓ Assim, será necessário pesquisá-la na Lista de Adjacências;





Busca em Grafos

- Consiste em "**explorar**" um grafo;
- Processo sistemático de como **caminhar** pelos vértices e arestas do grafo;
- Diversos problemas em grafos necessitam de operações de busca em grafos;
- A operação de busca pode exigir que se visite todos os vértices do grafo para determinados problemas;
- Os principais tipos de busca em grafos são: **Busca em Profundidade, Busca em Largura e Busca pelo Menor Caminho**;

Busca em Profundidade

- Parte-se de um vértice inicial e se explora o máximo possível cada um de seus ramos, antes de se retroceder (“**Backtracking**”);
- Explora-se todas as arestas de um determinado vértice antes de se retornar a seu antecessor;
- A estratégia seguida pela busca em profundidade (**Depth_first search** ou DFS) é buscar mais fundo no grafo sempre que possível;
- A busca é encerrada quando se encontra o que se quer ou visita-se todos os vértices;

Busca em Profundidade

DFS – Funcionamento

Defina um nó inicial

Escolha um de seus adjacentes ainda não visitados

- Visite-o

Repita o processo até atingir o nó objetivo, ou um nó cuja adjacência já tenha sido toda visitada (nó final)

Se atingir um nó final que não seja objetivo:

- Volte ao pai deste
- Continue de um nó irmão ainda não visitado

Busca em Profundidade

DFS – Reescrevendo...

Defina um nó inicial

Enquanto este não for um nó objetivo ou final (nó cuja adjacência já tenha sido toda visitada)

- Escolha um de seus adjacentes ainda não visitados
- Visite-o

Se nó final não objetivo:

- Volte ao pai deste
- Se houver pai, repita. Senão escolha outro nó inicial

Busca em Profundidade

DFS – Funcionamento

Defina um nó inicial

Enquanto este não for um nó objetivo ou final (nó cuja adjacência já tenha sido toda visitada)

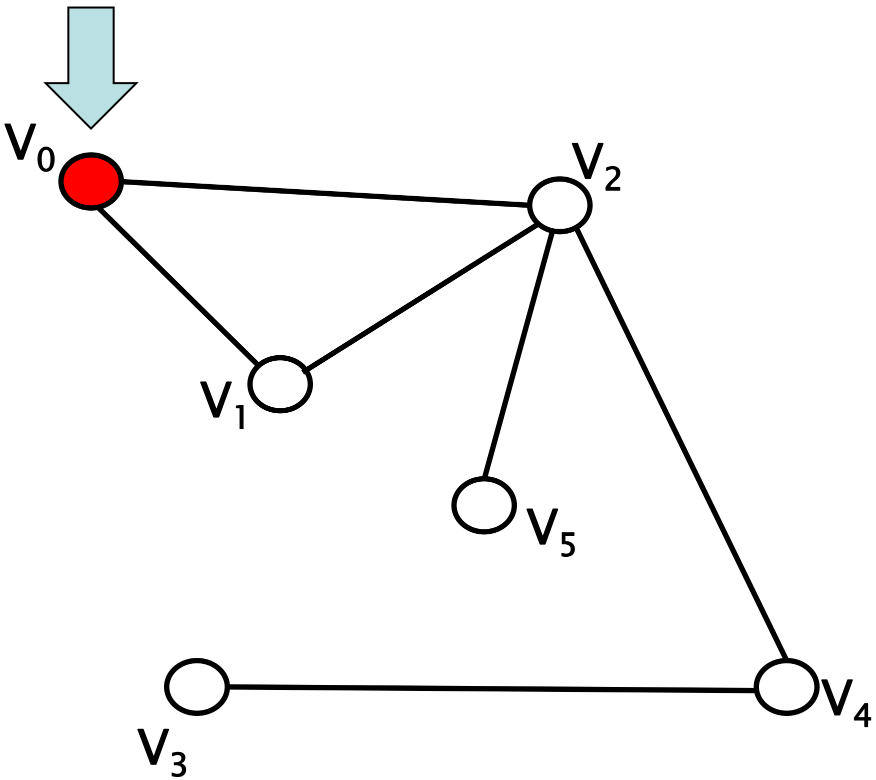
- Escolha um de seus adjacentes ainda não visitados
- Visite-o

Se nó final não objetivo:

- Volte ao pai deste
- Se houver pai, repita. Senão escolha outro nó inicial

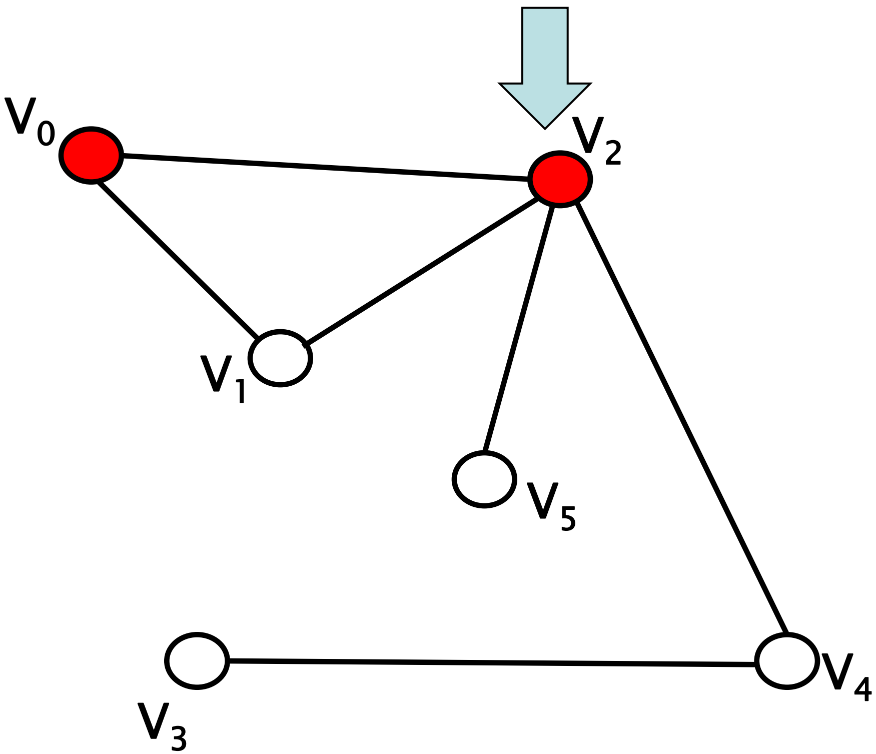
Busca em Profundidade

Inicia-se por exemplo, a busca em V_0.



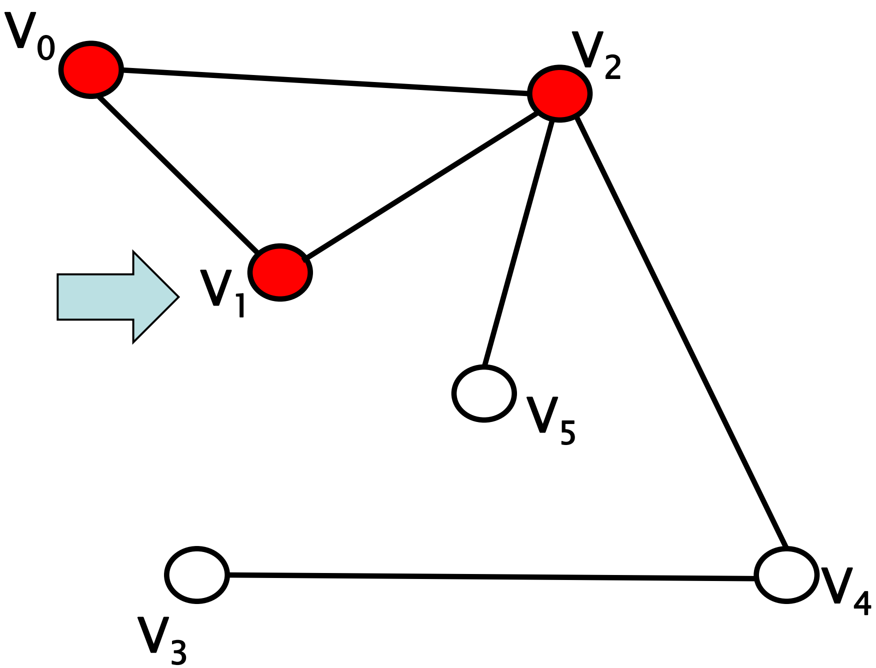
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_0: V_1 e V_2
Escolho V_2



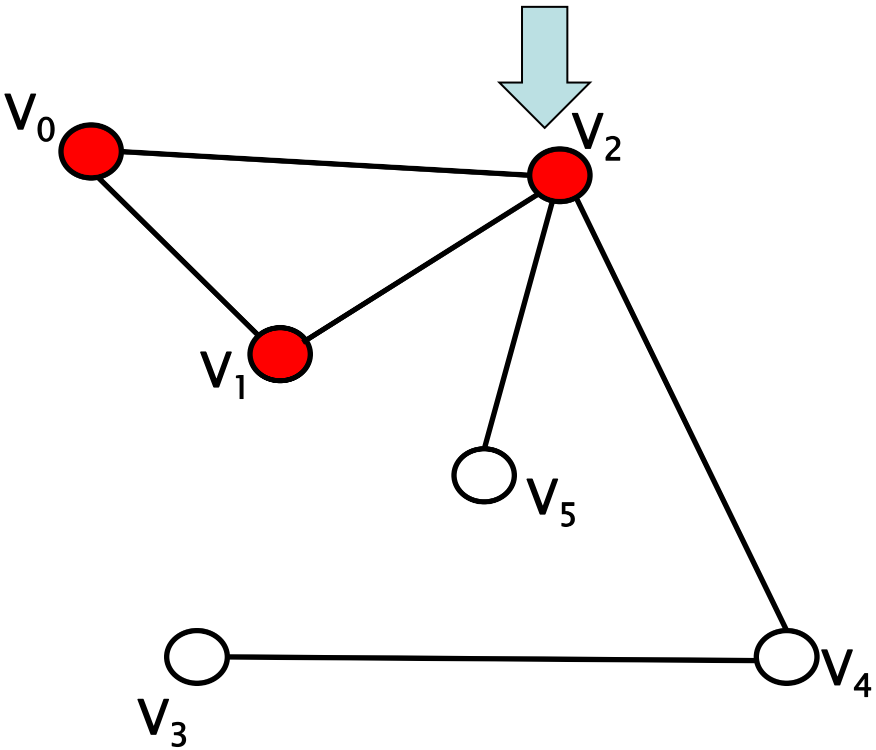
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_2: V_1, V_4, ou V_5
Escolho V_1



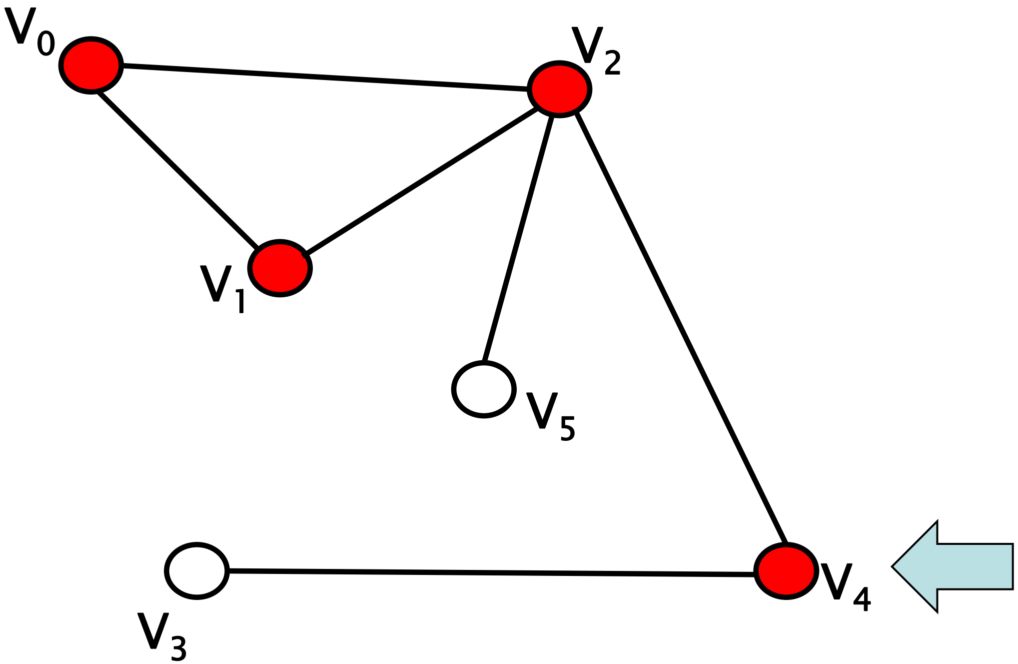
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_1: Nenhum
Ainda há vértices a serem percorridos



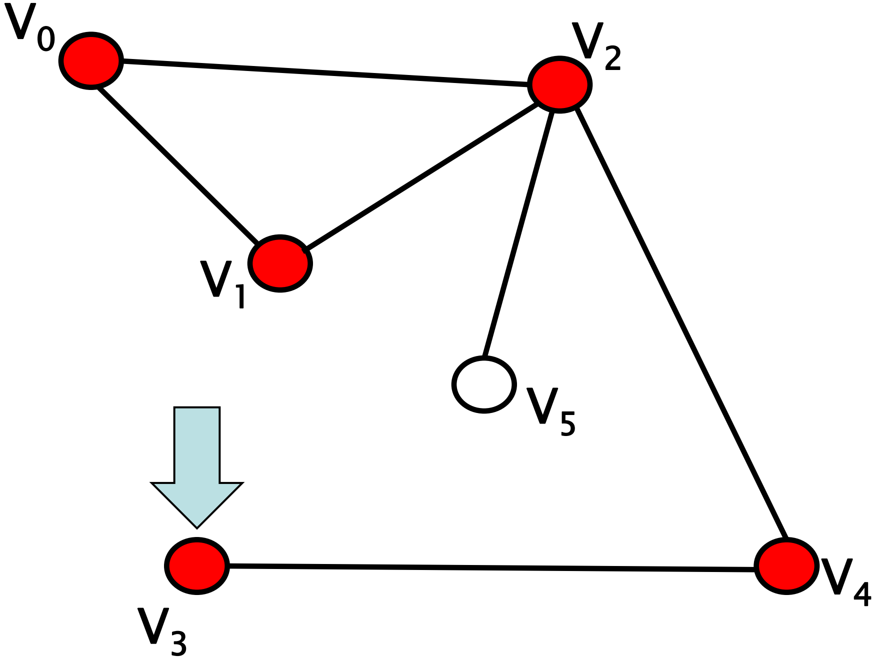
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_2: V_4 ou V_5
Escolho V_4



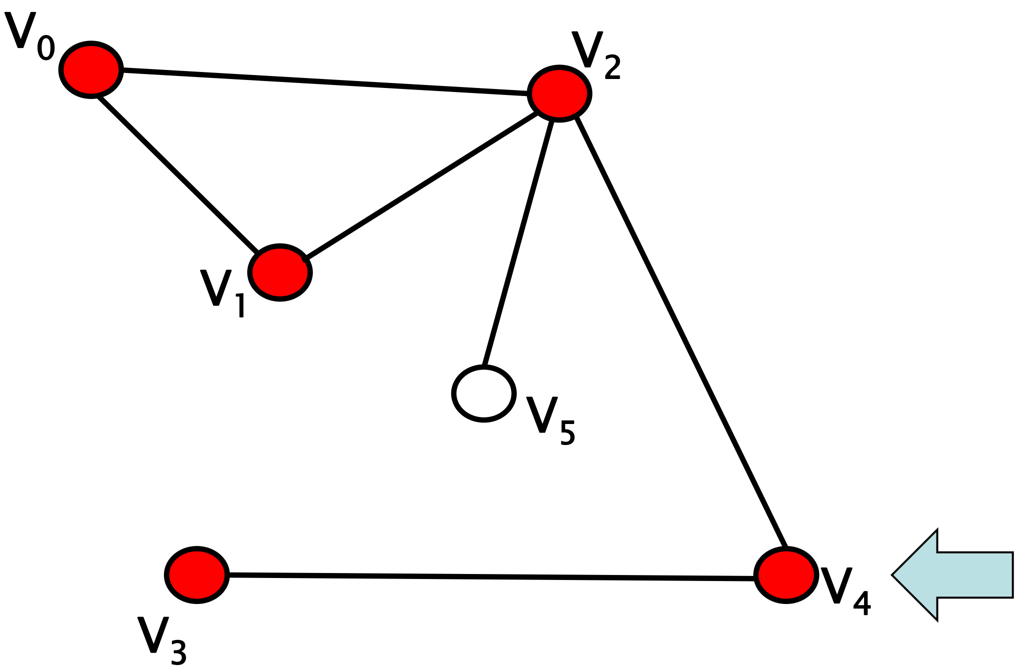
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_4: V_3
Escolho V_3



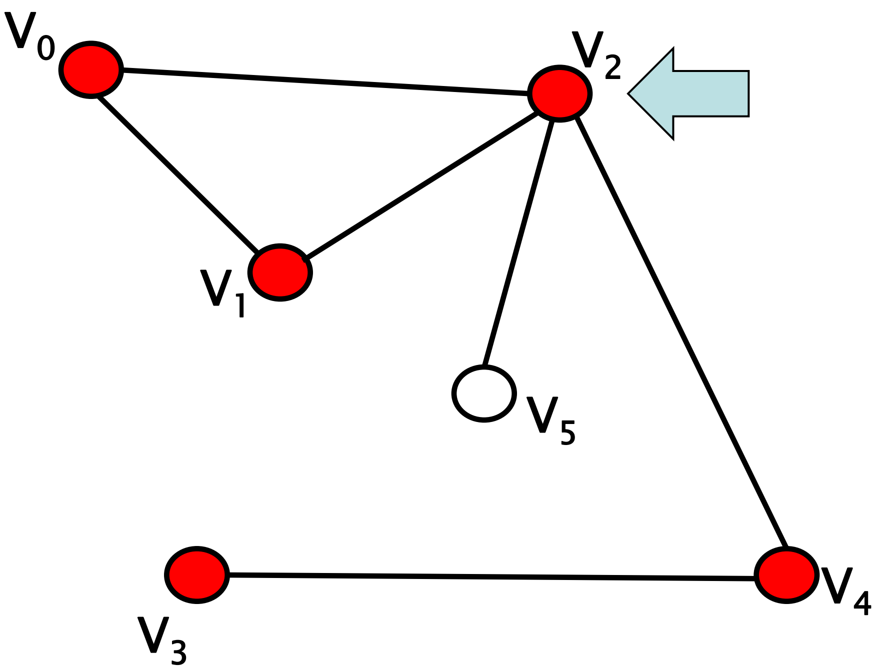
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_3: não há
Ainda há vértices não visitados
Volto para o Pai: V_4
Escolho V_4



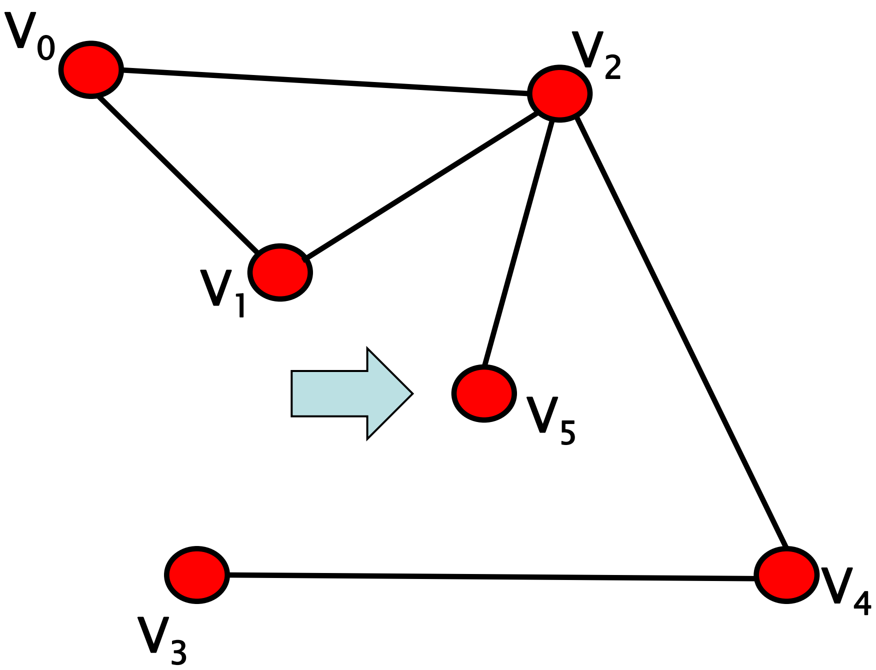
Busca em Profundidade

Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_4: não há
Ainda há vértices não visitados
Volto para o Pai: V_2
Escolho V_2



Busca em Profundidade

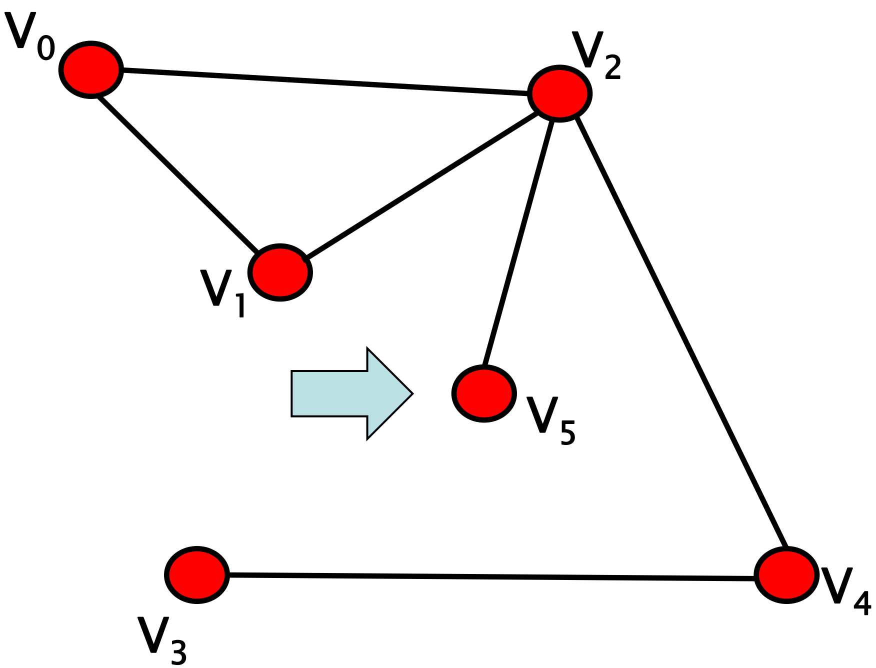
Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_2: V_5
Escolho V_5



Busca em Profundidade

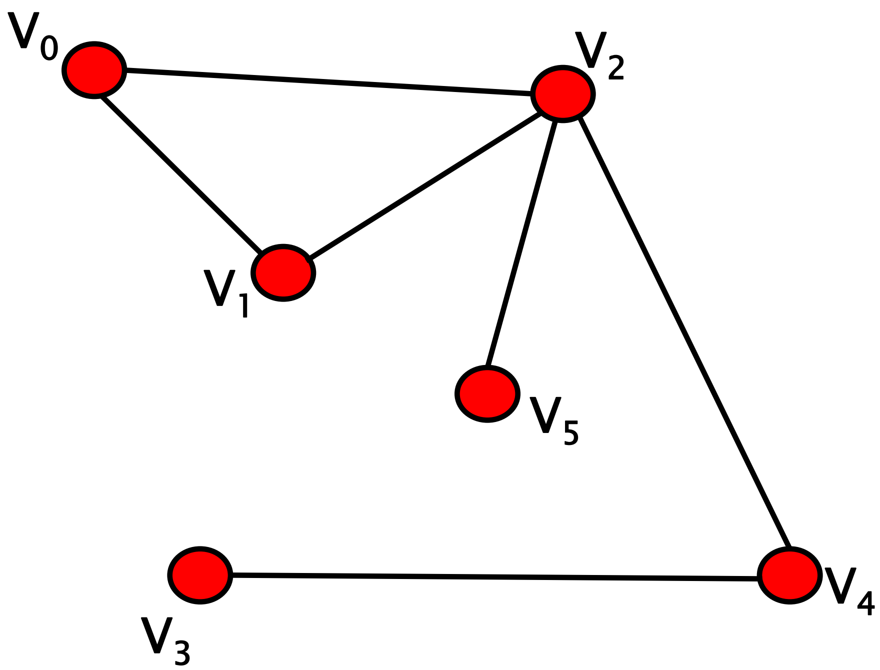
Vértices adjacentes ainda não visitados a partir de V_5 : não Há
Não há mais vértices a serem visitados

Fim da Busca em Profundidade



Busca em Profundidade

Sequência gerada: V_0, V_2, V_1, V_4, V_3 , V_5



QualitSys

Busca em Largura

- ✓ Parte-se de um vértice inicial e se explora todos os vértices vizinhos;
- ✓ Em seguida, para cada vértice vizinho, repete-se esse processo, visitando-se os vértices ainda não explorados;

Busca pelo menor caminho

- ✓ Parte-se de um vértice inicial, calcula-se a menor distância deste vértice à todos os demais, desde que exista uma aresta ligando-os;
- ✓ Esse problema pode ser resolvido com o **Algoritmo de Dijkstra** para grafos direcionados ou não direcionados com arestas de peso não negativo;