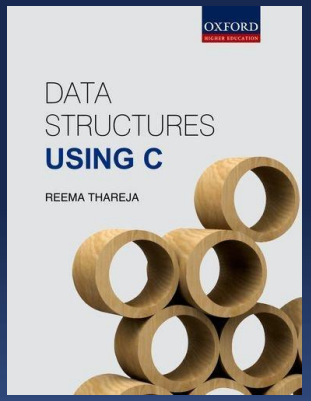
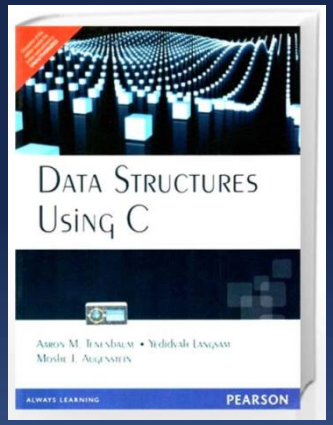
Unidade 15 - Hashing

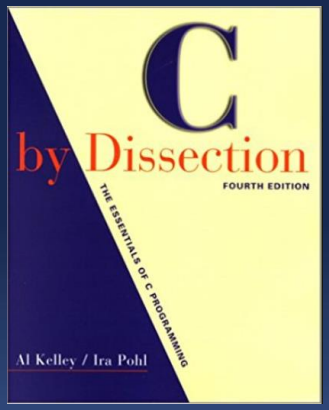
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

Bibliografia

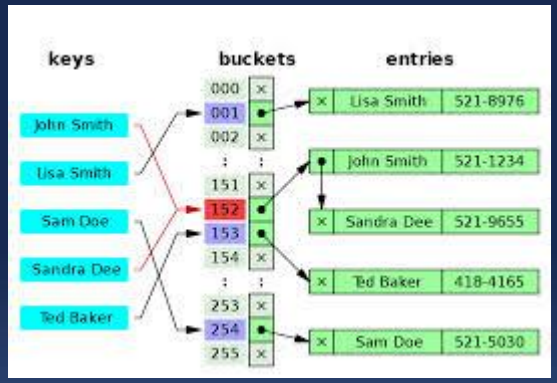
- Algoritmos – Teoria e Prática – **Cormen** – Segunda Edição – Editora Campus, 2002
- Data Structures using C – Oxford University Press – 2014
- Data Structures Using C – A. Tenenbaum, M. Augensem, Y. Langsam, Pearson 1995
- C By Dissection – Kelley, Pohh – Third Edition – Addison Wesley







Tabelas de Dispersão (Tabelas HASH) e Funções Hash



Visão Geral

- Considere uma pequena escola com cerca de **80** estudantes, onde cada estudante é identificado por uma código de matrícula de **2 dígitos**.
- Por exemplo, o estudante Paulo de Souza Alves tem o código de matrícula **55**.

Hashing – Visão Geral

- Considere uma pequena escola com cerca de **80** estudantes, onde cada estudante é identificado por uma código de matrícula de **2** dígitos.
- Por exemplo, o estudante Paulo de Souza Alves tem o código de matrícula **55**.

Hashing Interno - Visão Geral

- Suponha que para cada estudante são armazenados registros com os seguintes dados:

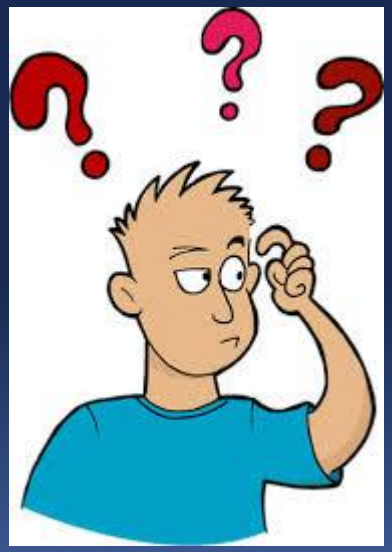
  - ✓ **Código de matrícula: 2 bytes**
  - ✓ **Nome do estudante: 50 bytes**
  - ✓ **Endereço do estudante: 70 bytes**
  - ✓ **Fone: 10 bytes**

Tamanho do Registro: 132 bytes

Como implementar uma estrutura de dados para armazenar os estudantes da escola que estão matriculados na disciplina "História" ?

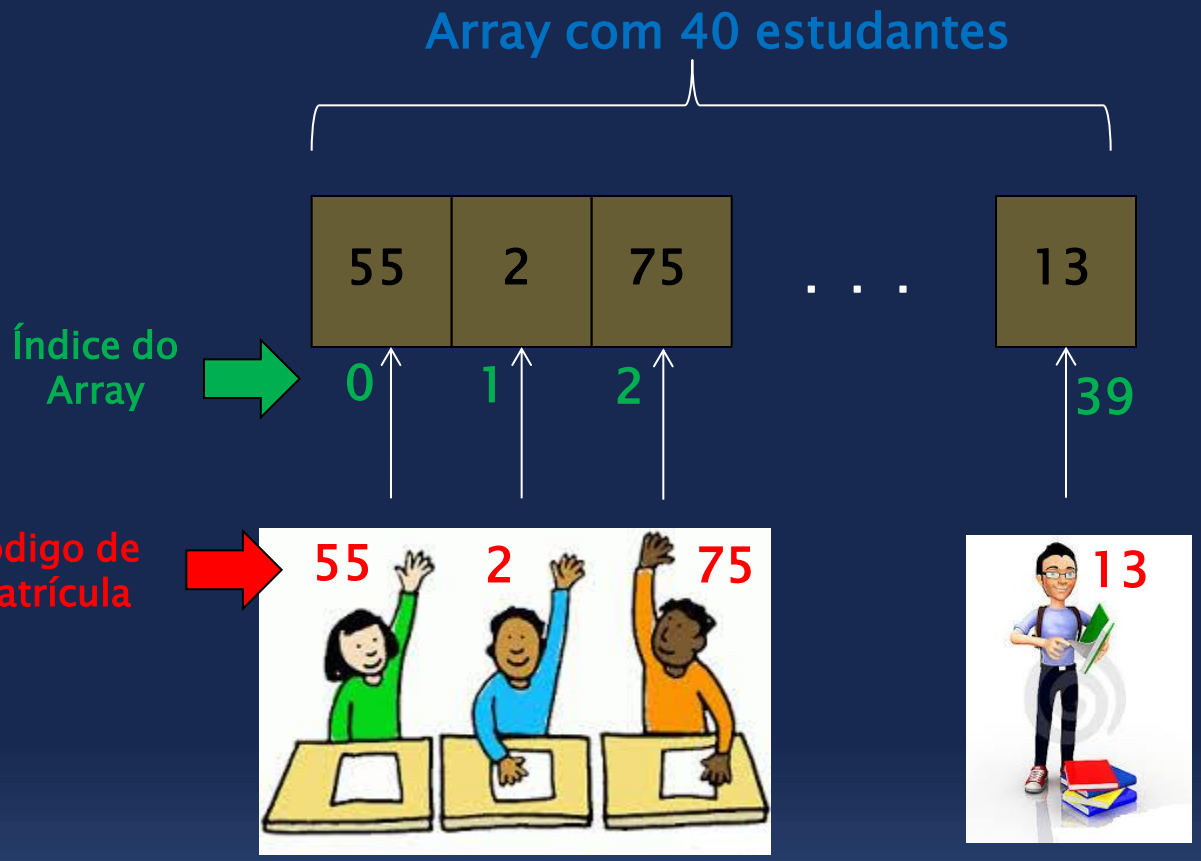
Observação:

A escola tem 80 estudantes, mas somente 40 alunos estão matriculados na disciplina "História".



Considerando que se conhece previamente o tamanho da tabela, a escolha natural é um array.

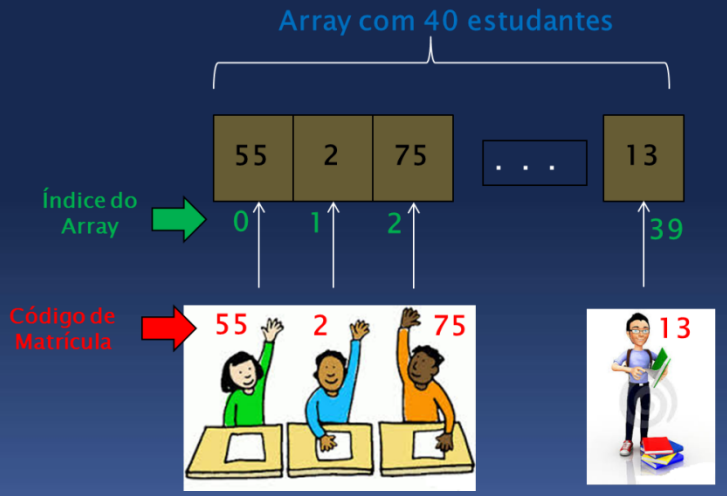
Implementação



Quais os comentários em relação à essa implementação ?

Implementação pura de Arrays

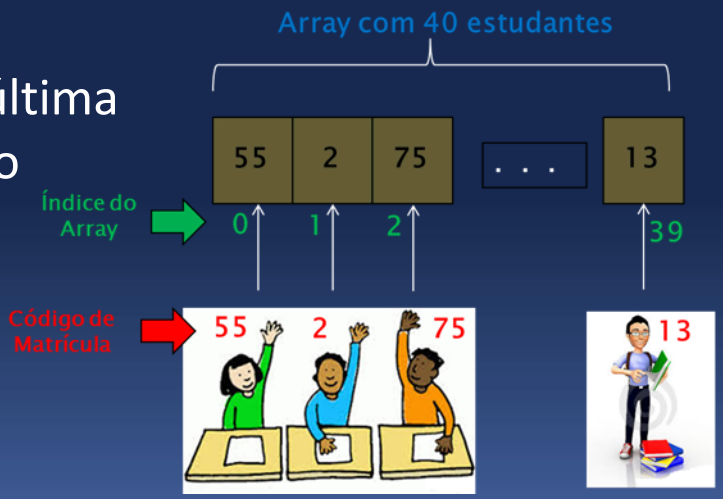
- O array tem tamanho exato para alocar **40** estudantes.
- Considerando que cada registro ocupa **132** bytes, o consumo de memória será de 40 * 132 = **5280 bytes** = **~5Kb**



O array ocupa pouca memória, mas como é a eficiência para se efetuar a busca (searching) de um estudante ?

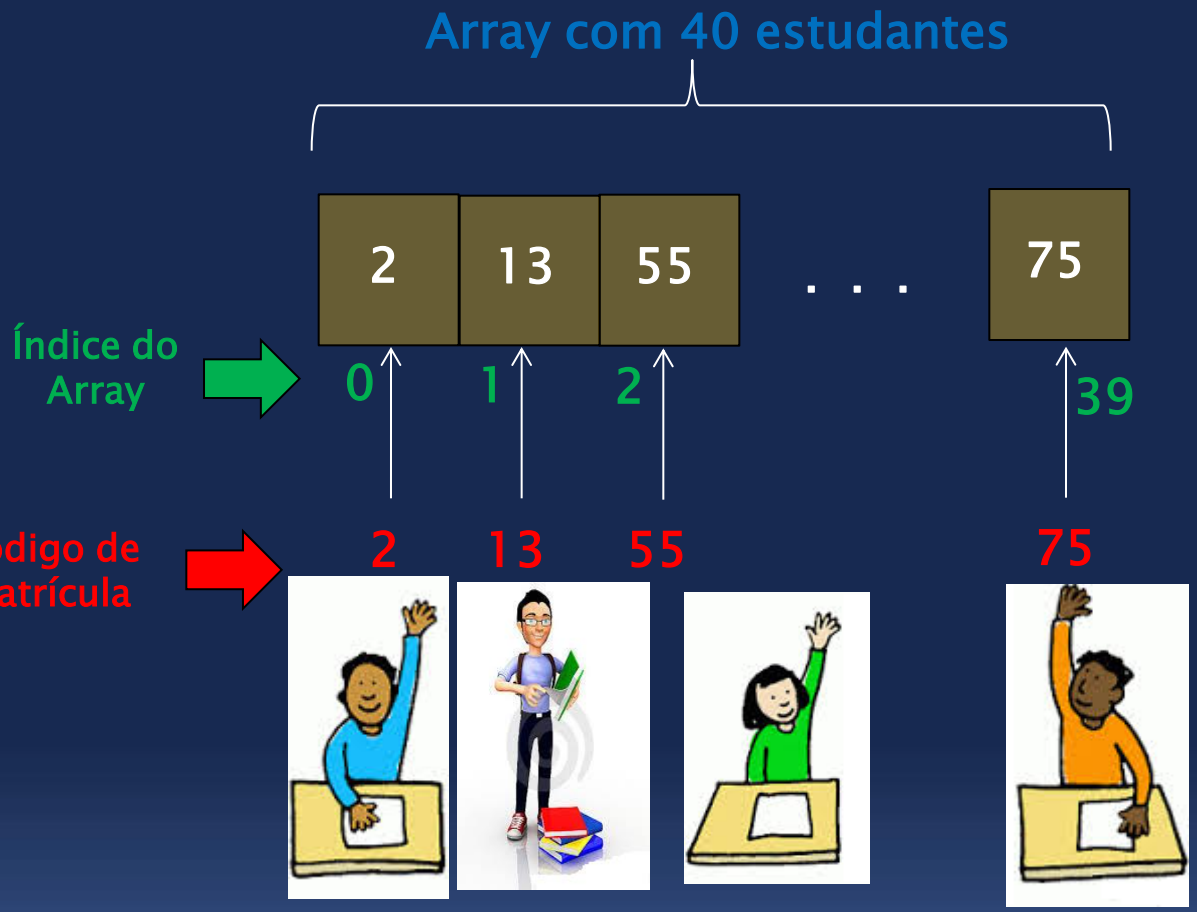
Operação de busca na implementação pura de Arrays

- ✓ Não há relacionamento entre o código de matrícula (**chave**) e o **índice** do array.
- ✓ Além disso, os dados estão desordenados.
- ✓ Assim, a busca será sequencial e o tempo é proporcional ao tamanho do array **O(n)**.
- ✓ Na **pior das hipóteses** (código de matrícula na última posição do array ou inexistente), será necessário percorrer-se todo o array.



Como melhorar a eficiência da busca ?

Melhorando a eficiência da busca



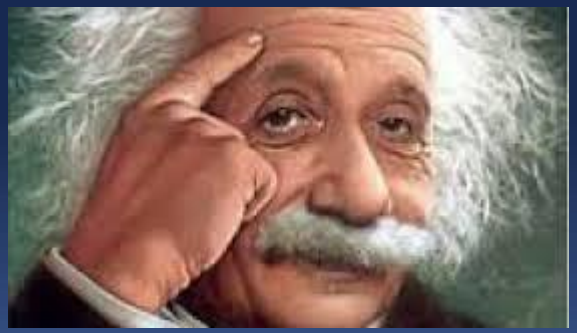
- ✓ Pode-se ordenar o array e efetuar-se uma **BUSCA BINÁRIA**
- ✓ Mas a complexidade ainda será **O(logn)**

Existe algum meio de se fazer uma busca com tempo constante O(1) ?

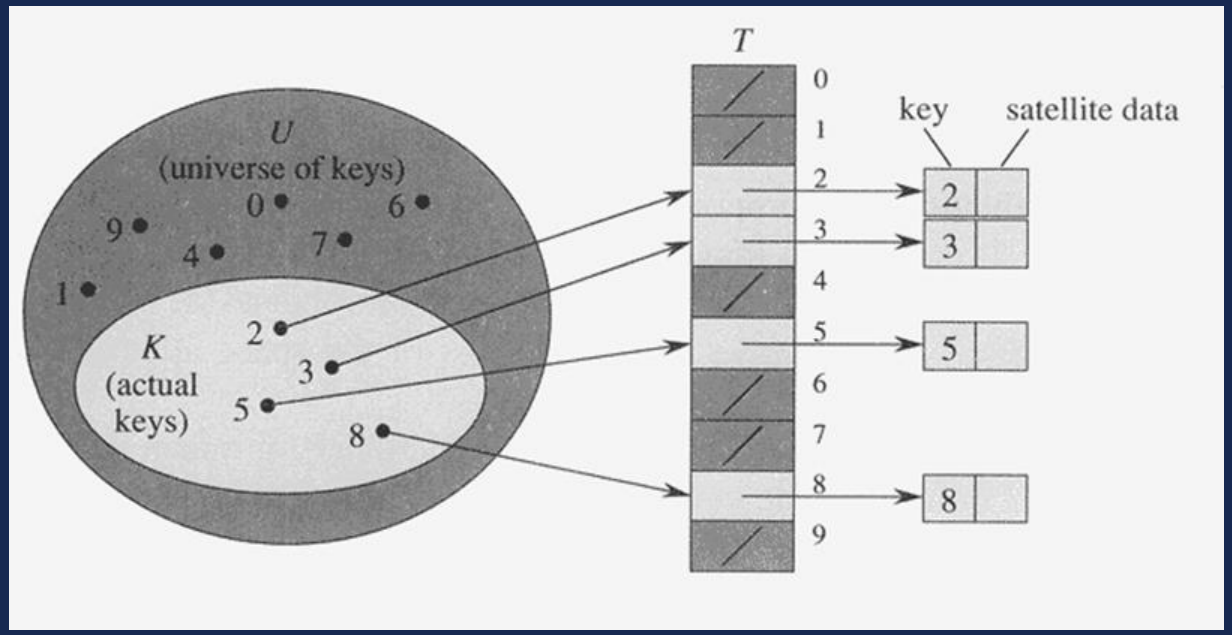
Acesso Direto ao dado ?

Redesenhando o array

- Cada estudante tem código de matrícula com dois dígitos, que daria um conjunto universo U = { 1,2,..., 99 } .
- Poderíamos criar um array com 100 elementos e associar cada código do estudante ao índice do array.
- Esse array é chamado **ARRAY ASSOCIATIVO**.



Empregando array associativo



- A tabela **T** é acessada de modo direto.
- Cada chave no Universo **U** corresponde a um índice na tabela.
- O conjunto **K** de chaves reais estão associados na tabela **T** à pointers aos dados.
- Inviável do ponto de vista de alocação de memória quando |**K**| << |**U**|

Array Associativo

Acesso Direto !!!

Quais as vantagens desse modelo ?

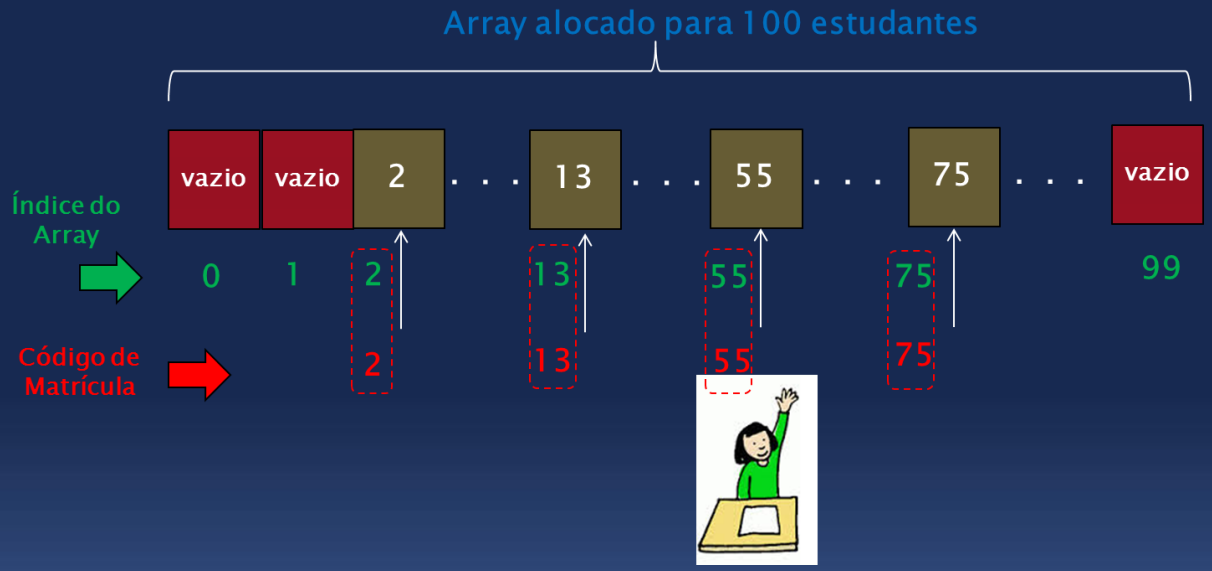
Array Associativo - Vantagens

- O acesso aos dados do estudante é feito de forma **direta**, uma vez que o **índice** do array coincide com a **chave** do estudante;
- O estudante de chave **55** está na posição **55** do array (**ACESSO DIRETO**);
- O tempo para acessar o estudante não depende do tamanho do array. Esse tempo é constante e a complexidade é **O(1)**.

Quais as desvantagens desse modelo ?

Array Associativo - Desvantagens

- Conforme premissa do problema, somente **40** alunos estão matriculados na disciplina "**História**".
- No entanto, foi alocada memória para **100** estudantes.
- A melhoria da eficiência da busca teve o preço de maior alocação de memória.

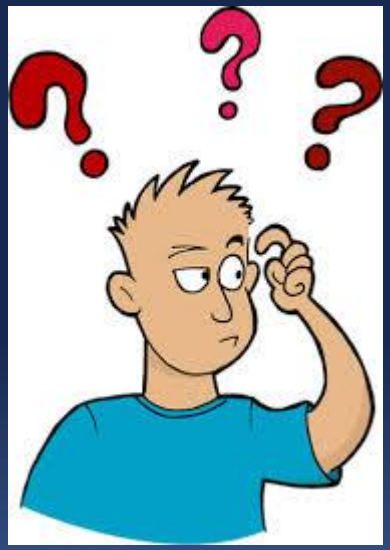


Qual o novo valor da memória alocada ?

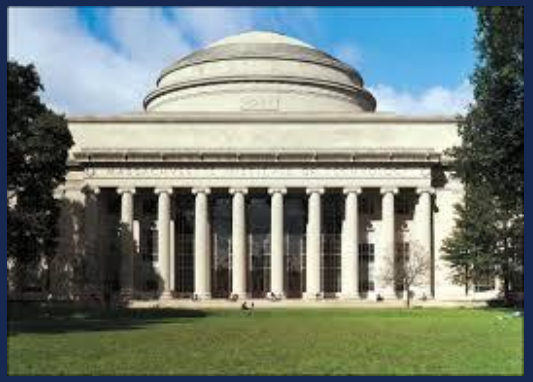
Nova memória alocada

- O array tem tamanho exato para alocar **100** estudantes, embora somente **40** efetivamente serão usados;
- Considerando que cada registro ocupa **132** bytes, o consumo de memória será de 100 * 132 = 13200 bytes = **~13 Kb;**
- Assim, nesse novo modelo, o consumo de memória aumento de 5Kb para 13kb;
- Houve um aumento de memória de **160 %.**

Mas, será que ainda há alguns inconvenientes com essa solução ?

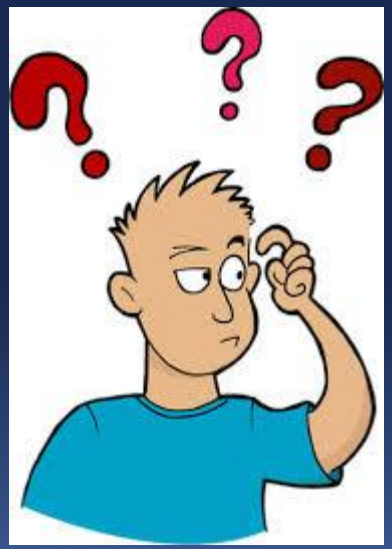


Nova situação



- Consideremos o **mesmo problema**...
- Porém, o estudante é de uma **grande universidade** com cerca de **10.000** alunos;
- Nessa Instituição, cada estudante é identificado por um código de matrícula correspondente a seu **CPF**;
- Por exemplo, o estudante André de Andrade Silva tem o código de matrícula associado a seu CPF: **640.348.123-15**;
- Assim, a chave do estudante é um valor de **11** dígitos.

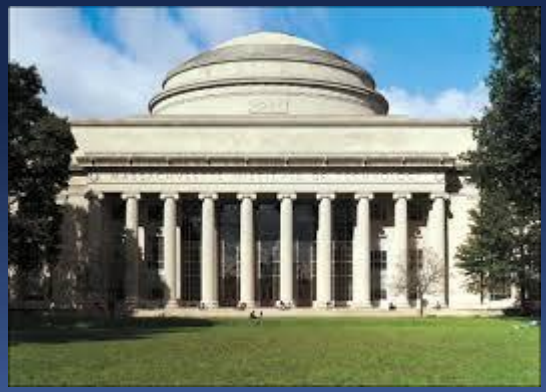
Considerando uma Universidade, como implementar uma estrutura de dados para armazenar os estudantes que estão matriculados na disciplina "História" ?



Observação:

A Universidade tem 10.000 estudantes, mas somente 40 alunos estão matriculados na disciplina "História".

Será que para esse caso também poderemos modelar um array associativo ?



Empregando array associativo

Array alocado para 100.000.000.000 estudantes

vazio | vazio | 0023034 5011 | 112456 77890 | 234567 12345 | 567456 23411 | vazio

99.999.999.999

Índice do Array

00230345011 | 11245677890 | 23456712345 | 56745623411

CPF do estudante

00230345011

11245677890

23456712345

56745623411

Qual o novo valor da memória alocada ?

Nova memória alocada

- O array tem tamanho exato para alocar 100.000.000.000 estudantes, embora somente **40** efetivamente serão usados.
- Considerando que cada registro ocupa 132 bytes, o consumo de memória será de 100.000.000.000 * **132** = 13.200.000.000.000 = **13 TB**;
- Assim, nesse novo modelo, o consumo de memória aumentou de **5Kb** para **13 Tb**.
- Dos 100.000.000.000 slots de memória somente **40** estarão sendo efetivamente alocados, o restante serão espaços vazios.

Quando então usarmos Arrays Associativos ?

Arrays Associativos

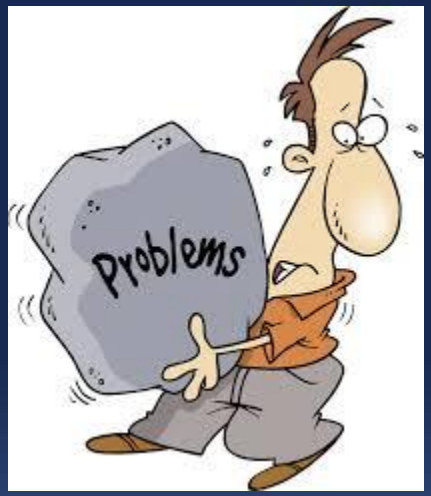
- São implementados por tabelas de acesso direto.
- Aplicáveis quando o conjunto universal de chaves **U** for pequeno.
- Operações de dicionários podem ser efetuadas em tempo constante - O(1).

Associative Arrays

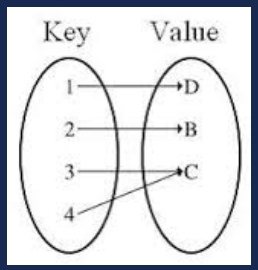
Index Key	Element Value
1	100
2	200
3	300
4	400
5	500
6	600
7	700

Existe alguma forma de contornar o problema da excessiva alocação de memória ?

Como obter eficiência na busca do dado sem comprometer a alocação de memória ?



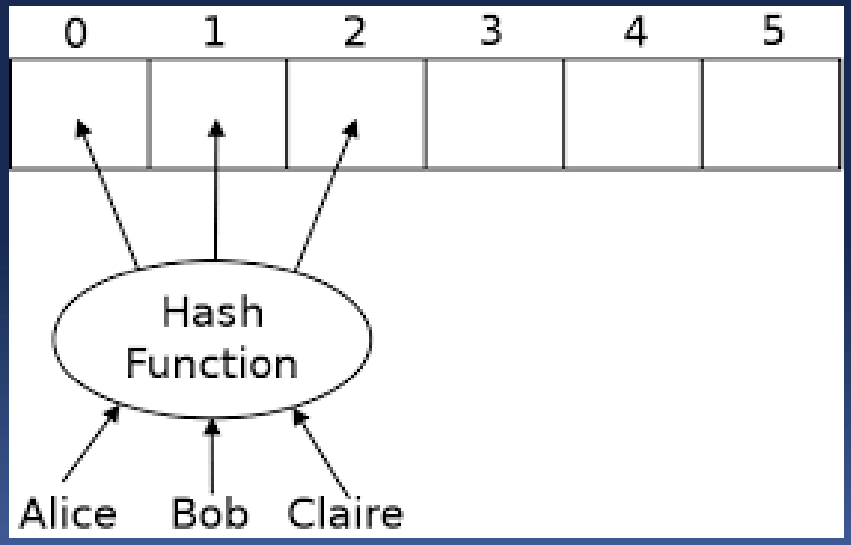
Estrutura de Dados MAP

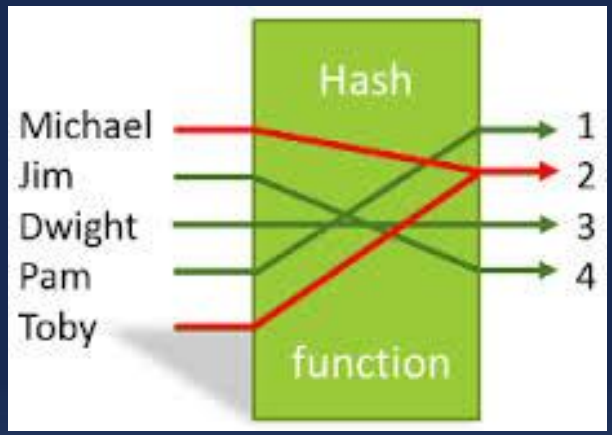


- ✓ Em termos matemáticos, um mapa (**map**) é uma estrutura de dados que estabelece uma relação de mapeamento entre dois conjuntos;
- ✓ Podemos definir um mapa como sendo um conjunto de pares na forma (**chave,valor**) no qual cada chave está associada a um determinado valor;
- ✓ **Mapas** são também chamados de Estruturas de Dados **Dicionário**;
- ✓ A implementação pode ser feita por arrays **associativos** ou por tabelas **hash**.

Hash Tables

- ✓ Correspondem a tipos de **arrays associativos** que são implementados quando |k|<< |U|, sendo **k** o conjunto de chaves válidas e U o **conjunto universo de chaves**.
- ✓ O mapeamento entre K e U é feito por meio de uma função.
- ✓ Essa função denomina-se Função de HASH.





Hashing

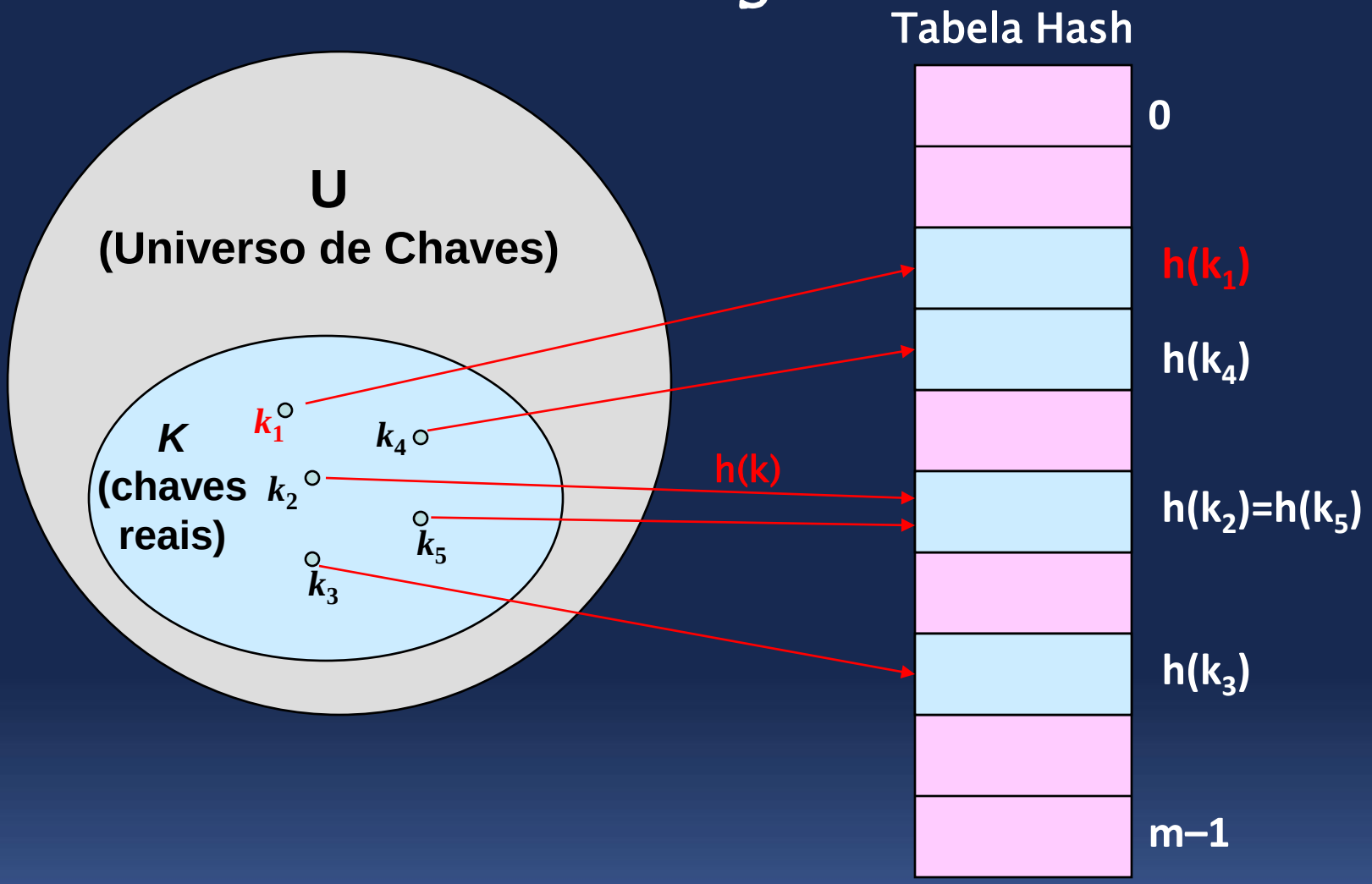


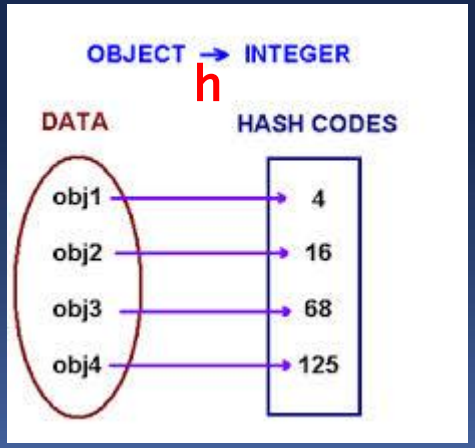
Tabela Hash
U
(Universo de Chaves)
K
(chaves reais)
k_1
k_4
k_2
k_5
k_3
h(k)
0
$h(k_1)$
$h(k_4)$
$h(k_2)=h(k_5)$
$h(k_3)$
m–1

Hashing

- Função Hash **h**: Efetua o mapeamento de **U** para os slots da hash table **T[0..m-1].**

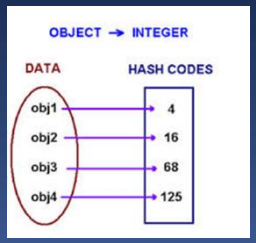
  $h : U \rightarrow \{0,1,\ldots, m-1\}$

- Com arrays, a chave **k** é mapeada para o slot **A[k]**.
- Com hash tables, a chave **k** é mapeada para o slot **T[h(k)]**.
- **h**(**k**) é o valor hash da chave **k**.

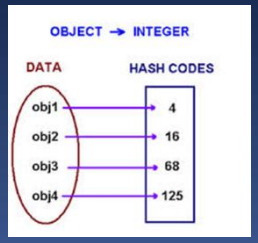


Hashing

- Aplica uma fórmula para calcular um endereço, determinando assim o posicionamento de um dado.
- O cálculo é feito através de uma função que mapeia as chaves dentro do conjunto (**Hashing**).
- Permite "**acesso direto**" aos registros como um índice (endereço) dentro da tabela.
- Útil quando a busca é feita sobre um número muito grande de dados que possuam faixas de valores muito variável. Exemplo: CPF em um arquivo de habitantes de uma cidade.



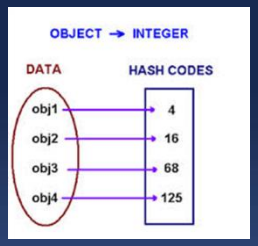
Gerando Funções Hashing
Método da Divisão

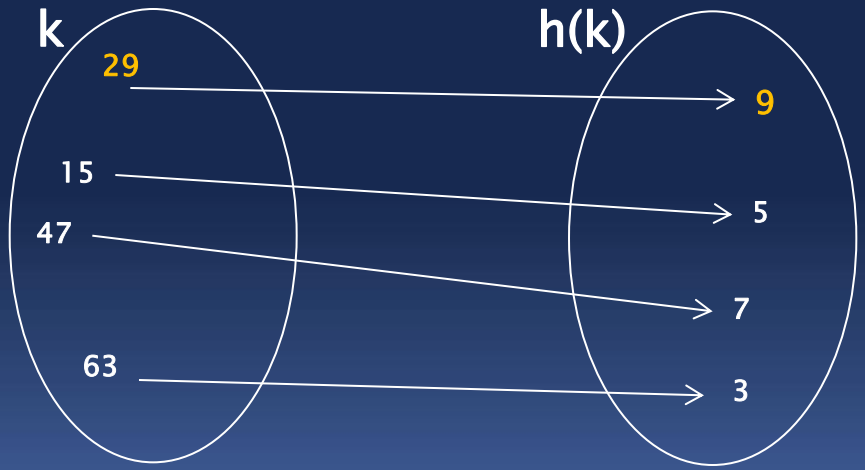


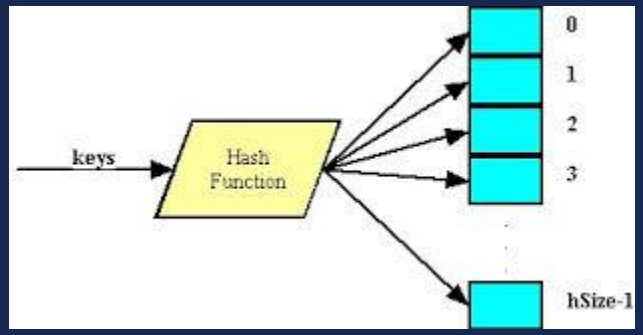
Gerando Funções Hashing
Método da Divisão

Princípio Básico: **O endereço do elemento na tabela é dado pelo resto da divisão da sua chave por *m* (h(k) = k mod m), onde m é o tamanho da tabela**
k é um inteiro correspondendo à chave

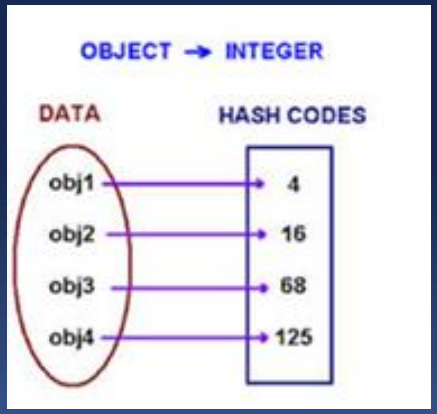
Exemplo: h(k) = k mod 10





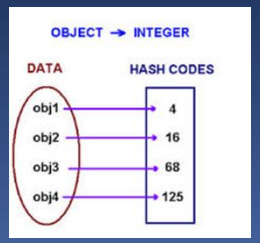


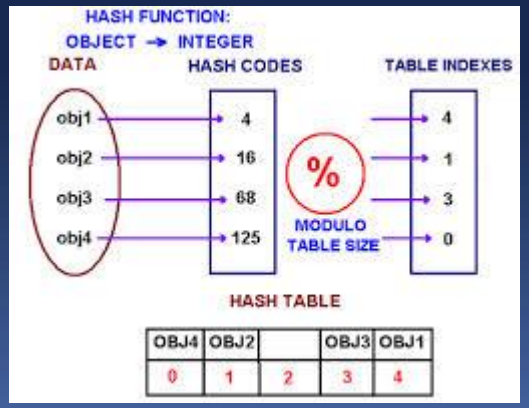
Exemplo - Hashing



Hashing - Exemplo

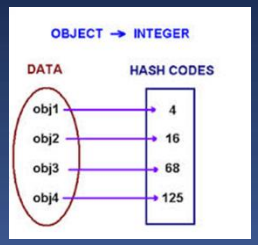
- Consideremos uma tabela hash com as seguintes características:
  - A tabela hash terá um máximo de **80** entradas (**0-79**).
  - Cada entrada da tabela irá armazenar o nome de um estudante.
  - Os valores dos campos chave terão valores contidos no intervalo [**0..1000**]
  - A função **HASH** é definida por **h(k) = k % 80**.
  - Ou seja, a função **h(k)** recebe uma chave **K** (entre **0** e 1000) e retorna um valor (índice) entre **0** e **79**.

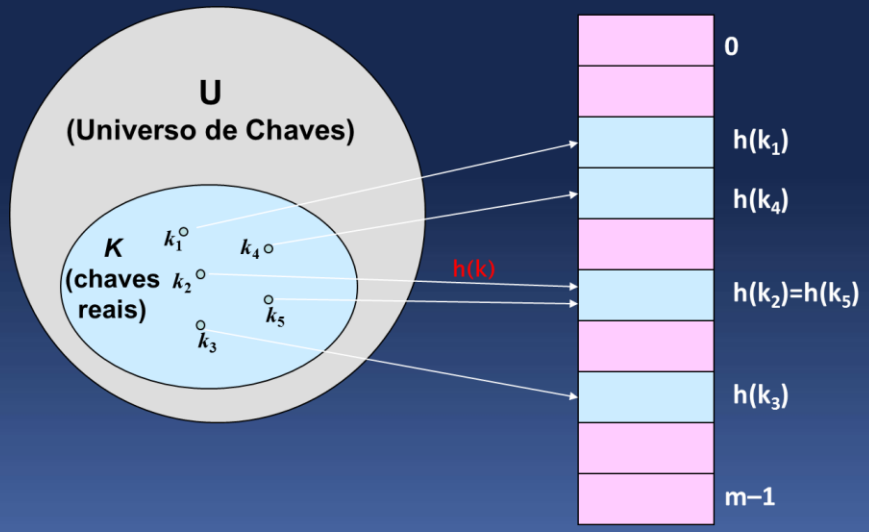




Simulações da Função Hash

Key	383	487	235	527	510	564	103	66	14
Índice	63	7	75	47	30	4	23	66	14

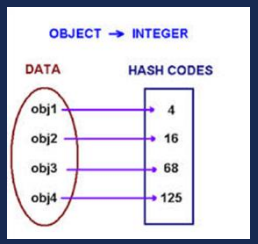




Puxa ! Então com o uso da Função Hash resolvi todos os problemas ?

Pouco uso de memória e acesso direto aos dados – O(1) ! ! !

Pois é ! Tudo na vida tem um preço ! ! !



Hashing - Observação

- No exemplo anterior, vamos considerar as seguintes chaves:

Key	100	180	260
Índice	20	20	20

As chaves **100,180** e **260** resultaram no mesmo **índice** ! ! !

Função **HASH**: **h(k) = k % 80.**

Esse problema é conhecido por

Executando novamente a aplicação

```
package maua;

public class Hash_01 {

        public static void main(String[] args) {

                Integer[] tabKeys = { 100, 180, 260} ;

                String[] tabNomes = { "Ana", "Ivo", "Ari"} ;

                String[] tabHash = new String[80];

                for (int i=0; i<tabKeys.length; i++ )  {

                        System.out.println("Chave: " + tabKeys[i] +  "
                                HashCode = " + hash(tabKeys[i]));
                        tabHash[hash(tabKeys[i]) ] = tabNomes[i];

                }

                for (int i = 0; i < tabHash.length ; i++)
                      if (tabHash[i] != null )
                        System.out.println("Indice = "+ i + "   ==>  Valor
                armazenado na tabela hash: " + tabHash[i] );
        }

        public static Integer hash(Integer key) {
                return (key % 80);
        }

}
```

Executando novamente a aplicação

Chave: 100 HashCode = 20
Chave: 180 HashCode = 20
Chave: 260 HashCode = 20
Indice = 20 ==> Valor armazenado na tabela hash: Ari

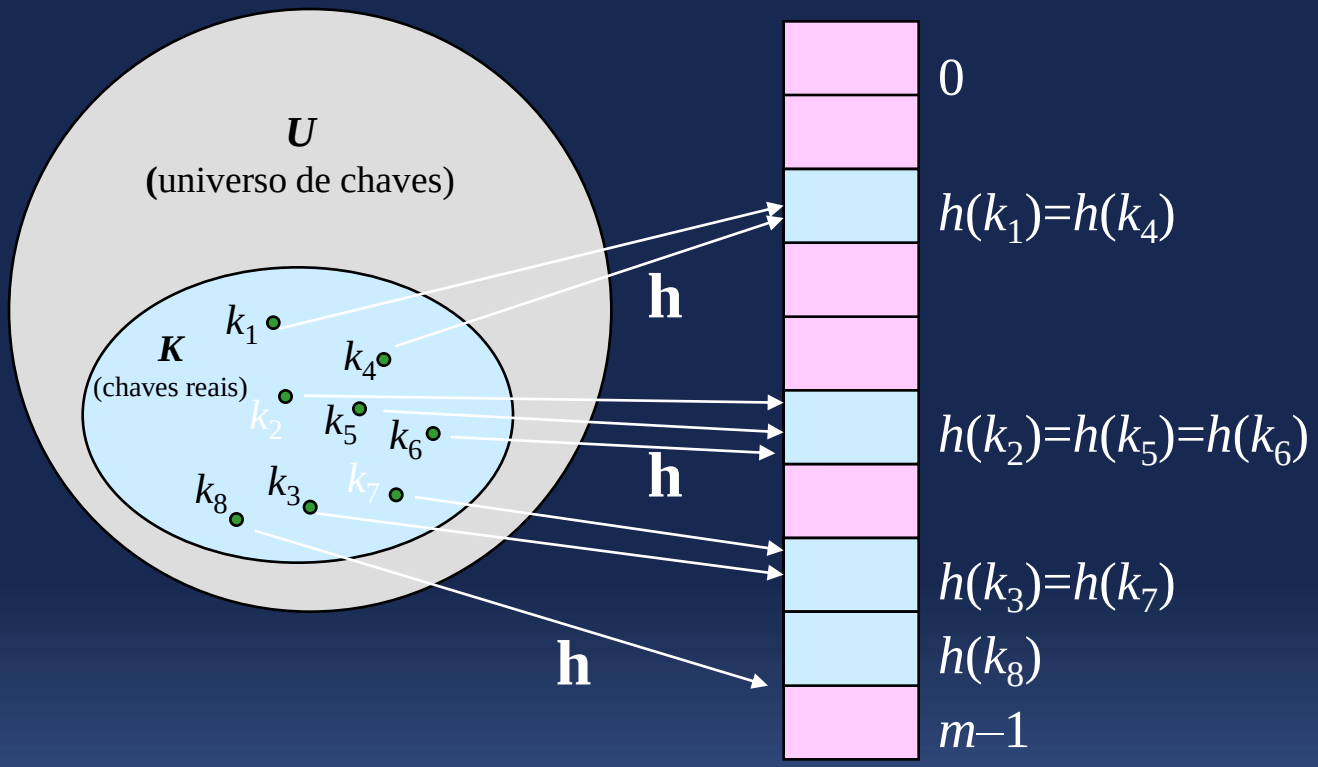
Somente **uma** chave foi armazenada na tabela HASH ! ! !

Como resolver o problema da colisão na tabela HASH ?

Algoritmos para Tratamento da colisão na tabela HASH

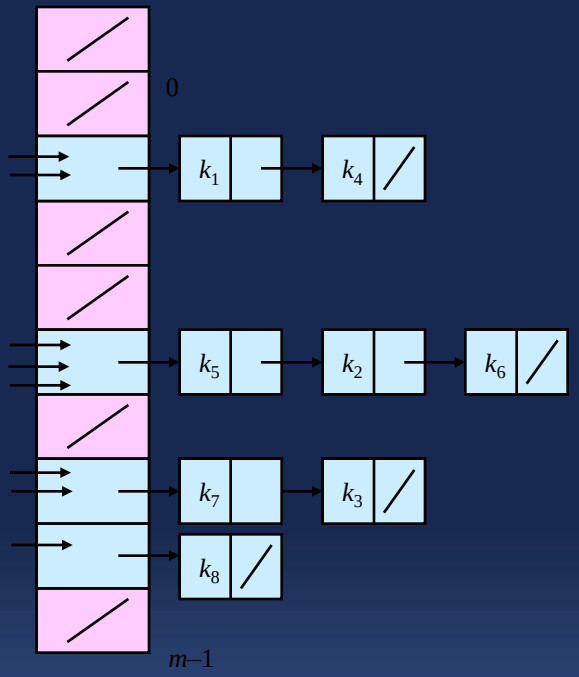
- Encadeamento
- Endereçamento aberto (**Rehashing**)

Resolução da Colisão por Encadeamento



Hashing com Encadeamento

- Todos os elementos que têm mesmo hashcode são armazenados num slot que referencia uma lista encadeada (ligada).
- O pointer para o head da lista é armazenado no slot da tabela hash.

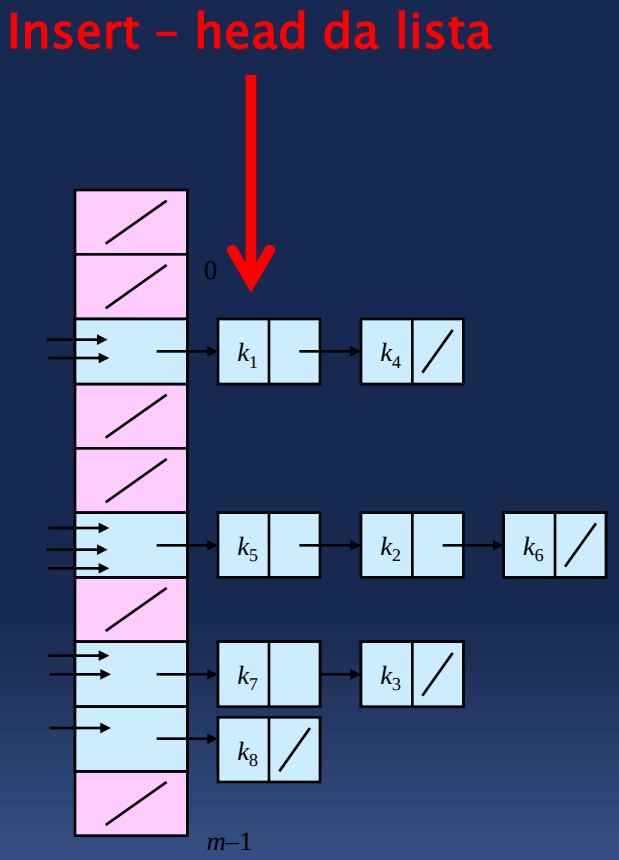


Hashing com Encadeamento
Operações de Dicionário

- Operação de **Insert** no head da lista:

T[h(key[x])]

- Complexidade no pior caso => O(1)



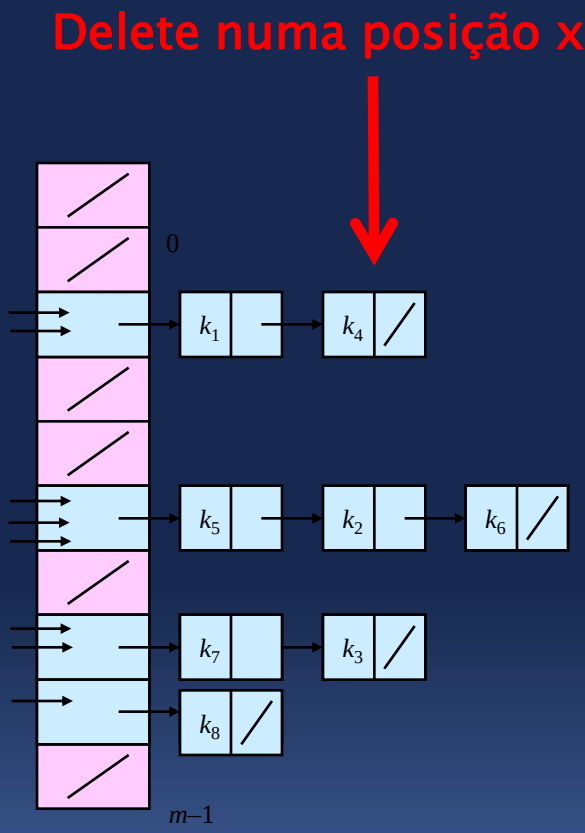
Hashing com Encadeamento
Operações de Dicionário

- Operação de **Delete** numa posição qualquer da lista encadeada:

T[h(key[x])]

- Complexidade no pior caso =>

Proporcional ao tamanho da lista: O(n)



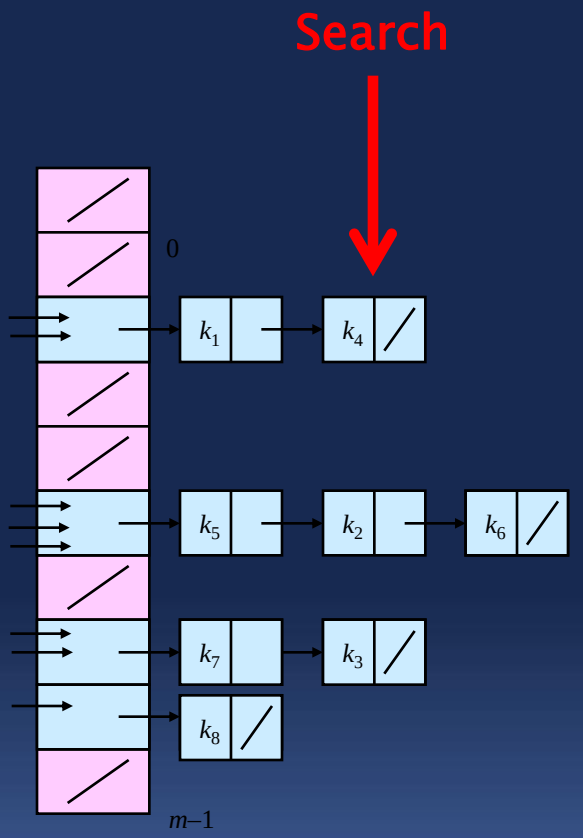
Hashing com Encadeamento
Operações de Dicionário

- Operação de **Search** de uma chave K na lista encadeada:

  T[h(k)]

- Complexidade no pior caso =>

  Proporcional ao tamanho da lista: O(n)

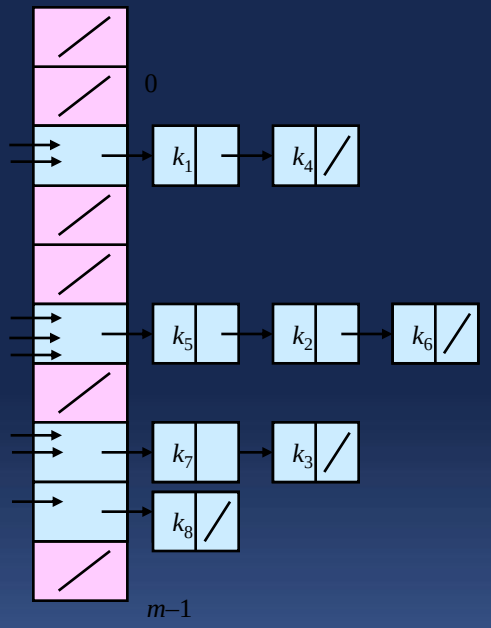


Hashing com Encadeamento
Exercício 1

- ✓ Insira os seguintes elementos em uma tabela Hash.
- ✓ A função de hashing é "resto da divisão por 10".
- ✓ Adotar a técnica de encadeamento para tratar as colisões.

Valores:

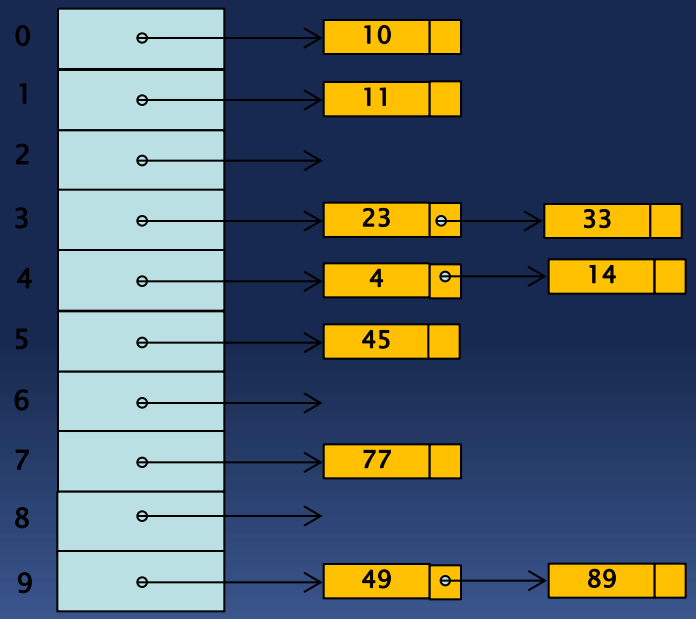
23, 45, 77, 11, 33, 49, 10, 4, 89, 14



Hashing com Encadeamento
Exercício 1 – Solução

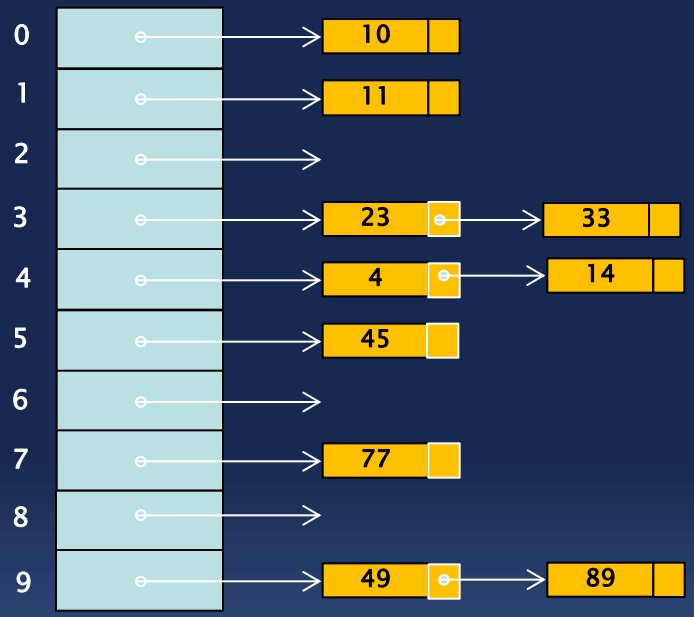
Chave	23	45	77	11	33	49	10	4	89	14
Endereço Calculado	3	5	7	1	3	9	0	4	9	4
Colisão ?	N	N	N	N	S	N	N	N	S	S

Função de Hashing: **E(c) = c % 10**



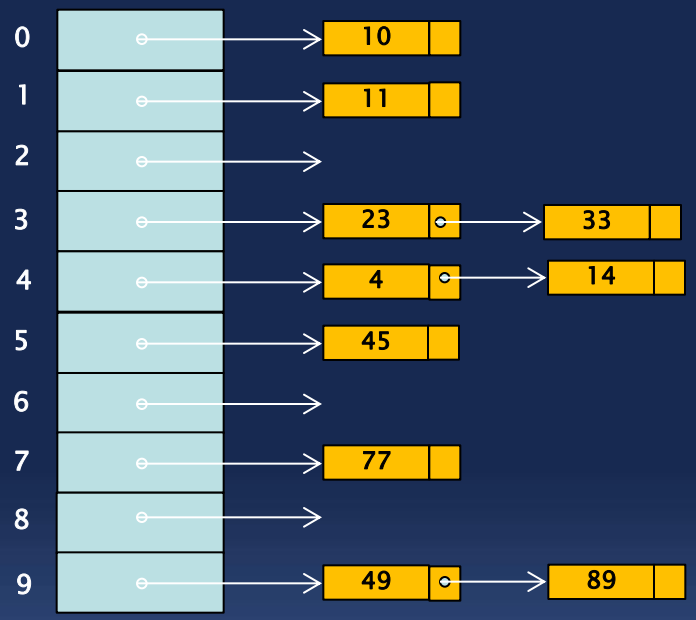
Hashing com Encadeamento Exercício 2

- ✓ Qual o número de acessos necessários para buscar cada registro inserido no exercício anterior ?



Hashing com Encadeamento
Exercício 2 - Solução

- ✓ Qual o número de acessos necessários para buscar cada registro inserido no exercício anterior ?

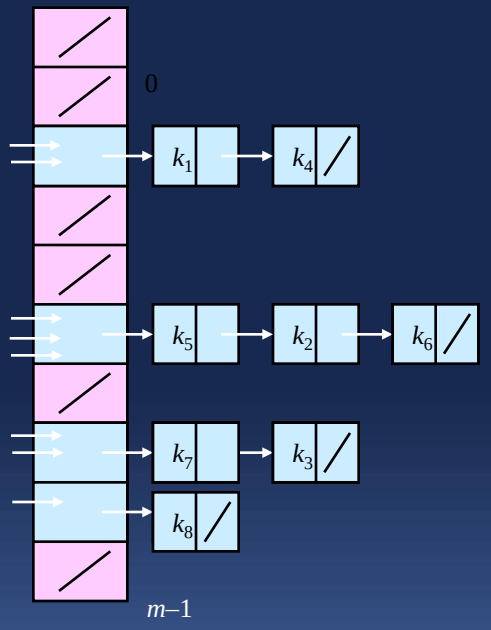


Chave	Nº de acessos
23	1
45	1
77	1
11	1
33	2
49	1
10	1
4	1
89	2
14	2
total	13
média	1,3

Hashing com Encadeamento
Exercício 3

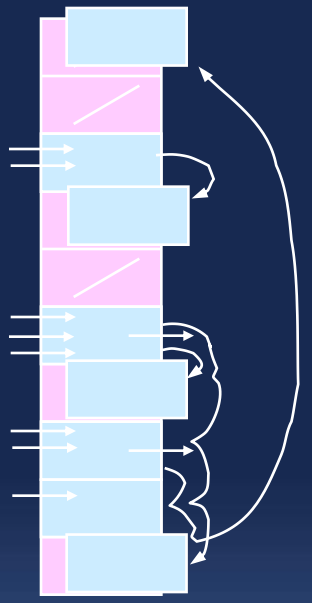
- ✓ Insira os seguintes elementos em uma tabela Hash.
- ✓ Função Hashing: F(k) = k mod 10.
- ✓ Usar hashing encadeado.

Valores: **23, 45, 77, 11, 33, 49, 10, 4, 89, 14**



Hashing com Endereçamento Aberto (Rehashing)

- ✓ Todos os elementos são armazenados na própria tabela hash.
- ✓ Quando ocorrer colisão, usa-se um procedimento sistemático (consistente) para armazenar os elementos em slots livres da tabela.
- ✓ Filosofias para tratamento de colisão:
  Busca Linear (utilização do primeiro espaço vazio)



Hashing com Endereçamento Aberto (Rehashing)

Chave	23	45	77	11	33	49	10	4	89	14
Endereço Calculado	3	5	7	1	3	9	0	4	9	4
Colisão ?	N	N	N	N	S	N	N	S	S	S
Endereço Efetivo					4			6	2	8

	Chave	Situação
0	10	1
1	11	1
2	89	1
3	23	1
4	33	1
5	45	1
6	4	1
7	77	1
8	14	1
9	49	1

(0=livre 1=ocupado)

Função de Hashing: E(c) = c % 10

10	11	89	23	33	45	4	77	14	49
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

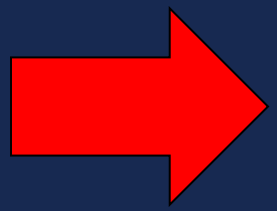
A inclusão da chave 33 gera colisão na posição 3. Insere na posição 4, que é a primeira livre após 3.

Hashing Endereçamento Aberto - Exercício 4

Insira as chaves em uma tabela Hash: `73,15,44,37,30,59,49,99`

Função Hashing: h(k) = k mod 11

k	h(k)
73	7
15	4
44	0
37	4
30	8
59	4
49	5
99	0



0	44
1	99
2	
3	
4	15
5	37
6	59
7	73
8	30
9	49
10	