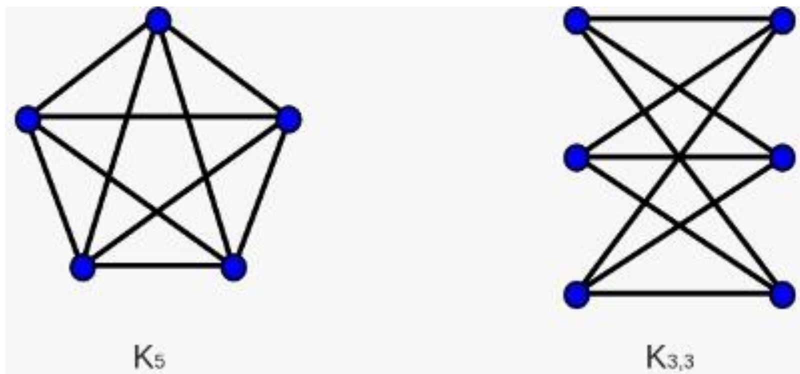
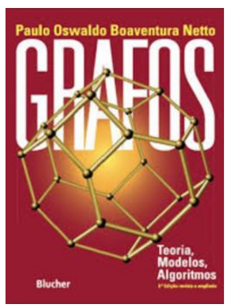
Unidade 7 - Grafos – Tópicos Adicionais

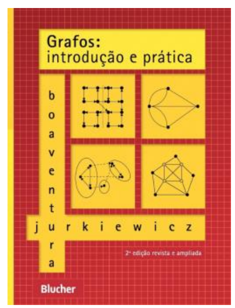


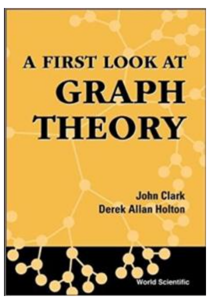
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

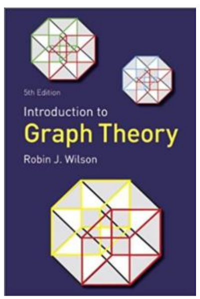
Bibliografia

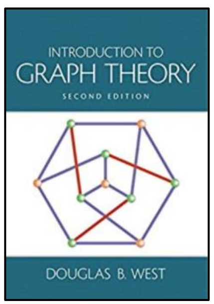
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Graph Theory – Theory and Problems of Graph Theory – V. **Balakrishnan** –Schaum's Outline – McGraw Hill - 1997

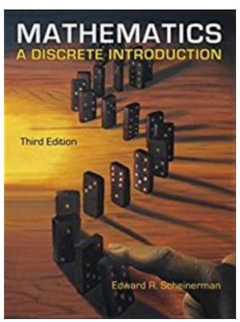


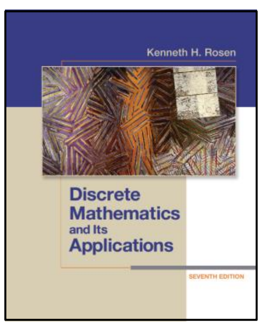


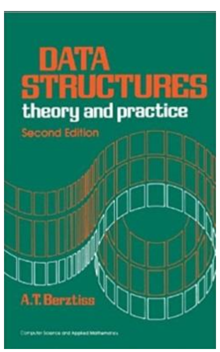


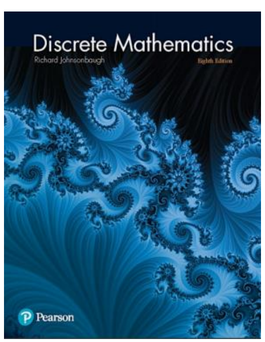


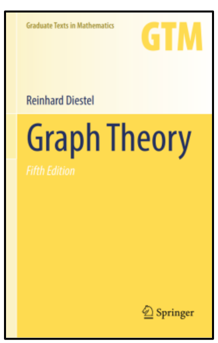


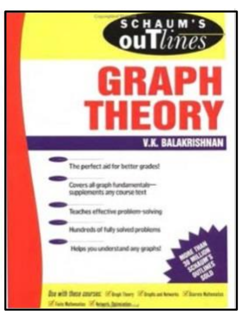






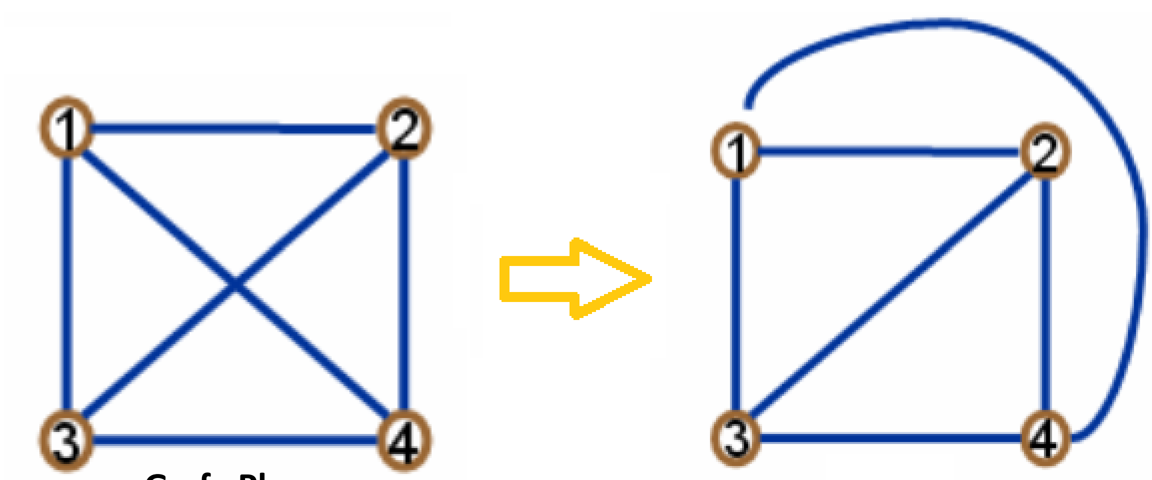






Introdução

- Muitos grafos podem ser redesenhados de forma a evitar que suas **arestas se cruzem** em lugares que não sejam nos vértices;
- Um **grafo** que possa ser redesenhado dessa maneira é chamado **Grafo Planar**.



Grafo Planar

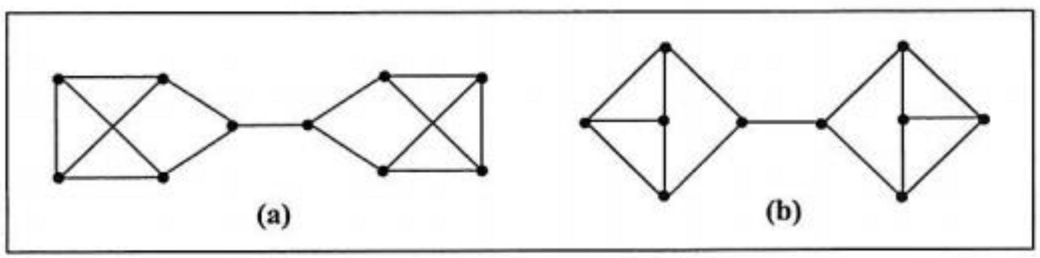
Planaridade

- ✓ O conceito de **Planaridade** subsidia muitas aplicações do mundo real;
- ✓ Em muitos projetos práticos, é desejável que se tenha um mínimo possível de intersecções;
- ✓ Assim, **grafos planares** desempenham um papel importante no chamado problema de **coloração**. Este problema consiste em tentar colorir os vértices de um grafo simples com determinado número de cores, de maneira que cada aresta do grafo una vértices de cores diferentes;
- ✓ Se o grafo for **planar**, seus vértices sempre podem ser coloridos dessa maneira com apenas quatro cores, como estabelece o **Teorema das Quatro Cores**.

Grafo Plano e Grafo Planar

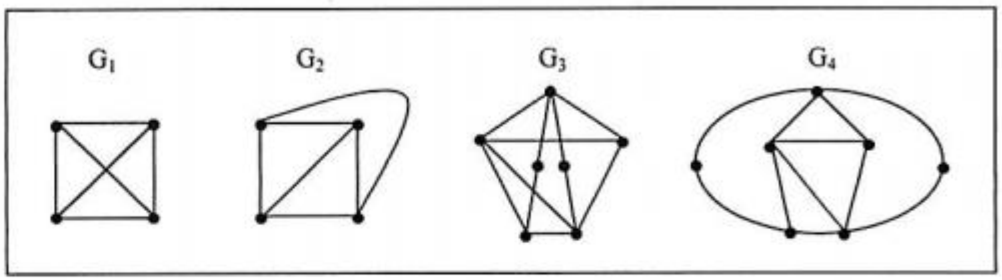
- ✓ Um **Grafo Plano** é um grafo desenhado em uma superfície plana, de maneira que duas quaisquer de suas arestas se **encontrem apenas nos vértices-extremidade** (considerando que elas se encontrem).

- ✓ Um **Grafo Planar** é um grafo **isomorfo** a um **Grafo Plano**, isto é, pode ser redesenhado como um **Grafo Plano.**



(a) **Grafo Planar,** dado que seu isomorfo (b) é **Plano**;

Grafo Plano e Grafo Planar
Exemplos

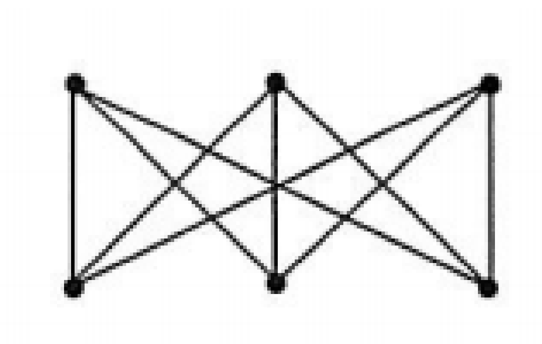


- ✓ **G_1** , **G_2**, **G_3** e **G_4** são todos Grafos Planares;
- ✓ **G_1** e **G_4** não são Grafos Planos;
- ✓ O Grafo **G_1** pode ser redesenhado como **G_2**;
- ✓ O Grafo **G_3** pode ser redesenhado como **G_4**.

Todo Grafo é passível de ser Plano?

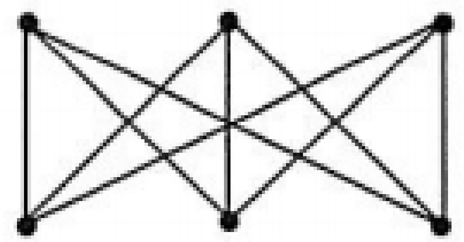
Todo Grafo é passível de ser Plano?

- ✓ Nem todo **Grafo** é passível de ter um desenho como um **Grafo Plano**;



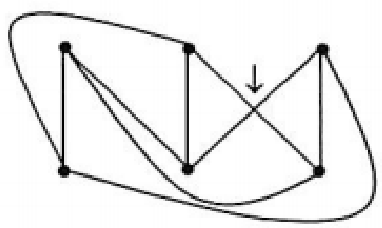
- ✓ Para o **Grafo** acima, é **impossível** obter-se uma versão **plana** do Grafo;

Todo Grafo é passível de ser Plano?



Grafo G_1

- ✓ Nesse caso, seu **redesenho** poderá reproduzir um número menor de intersecções, mas **não** se consegue eliminá-las;



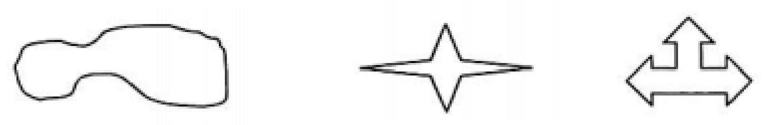
Grafo G_2

- ✓ $\mathbf{G_1}$ e $\mathbf{G_2}$ são **isomorfos**, porém não são **planos**;

Curva de Jordan

✓ Uma **Curva de J**ordan no plano é uma curva **contínua** que **não intercepta a si própria**, cuja **origem** e cujo **término coincidem**;

Curva de Jordan - Exemplos



Curva de Jordan
Contra-Exemplos

- ✓ As curvas acima NÃO são **Curvas de Jordan;**

Curvas de Jordan

- ✓ Se **J** é uma curva de Jordan no plano, então a parte do plano que é **interna** à **J** é chamada **interior de J** e denotada por **int J**;

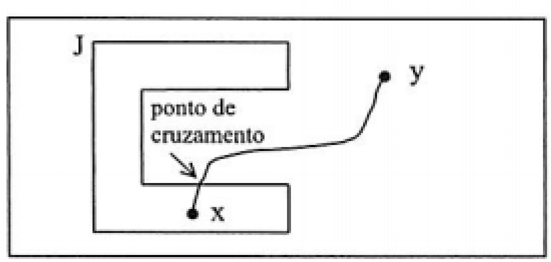
- ✓ São excluídos de int **J** os pontos que pertencem à **curva J**;

- ✓ De maneira semelhante, a parte do plano que é **externa** a **int J** é chamada de **exterior de** J e denotada **por ext J**.

Teorema da Curva de Jordan

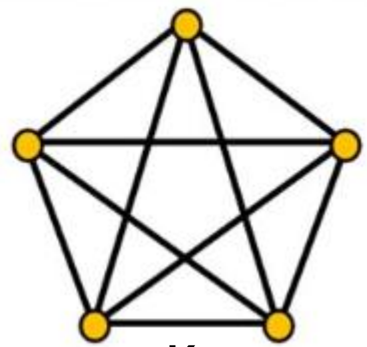
- O **Teorema da Curva de Jordan** estabelece que se **J** é uma curva de Jordan, se **x** é um ponto de **int J**, se **y** é um ponto de **ext J**, então **qualquer** linha (reta ou curva) que una **x** a **y** deve **cruzar J** em **algum ponto**;

- O **Teorema da Curva de Jordan** embora intuitivamente **óbvio**, é muito **difícil** de ser provado.



Teorema

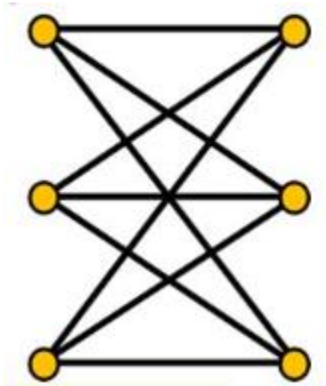
- ✓ O grafo completo de cinco vértices $\mathbf{K_5}$, não é planar.



K_5

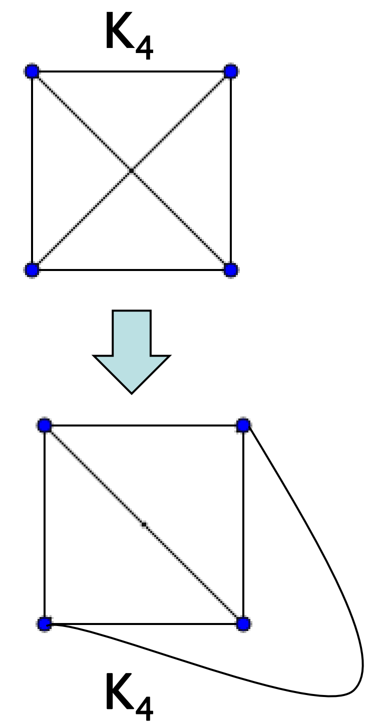
Teorema

- ✓ O grafo $\mathbf{K_{3,3}}$, não é planar.



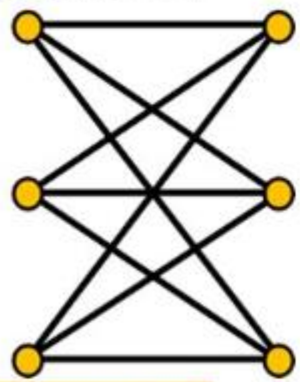
$K_{3,3}$

Nem todos grafos são planares



- K_4 é um grafo planar pois admite pelo menos uma representação num plano sem que haja cruzamento de arestas (representação planar);

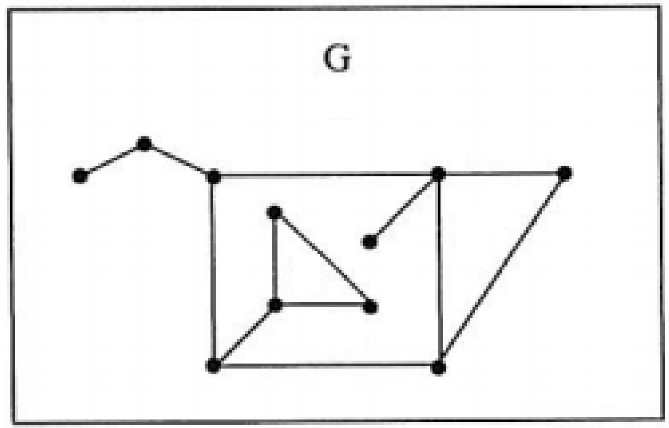
- Mas nem todos os grafos são planares!



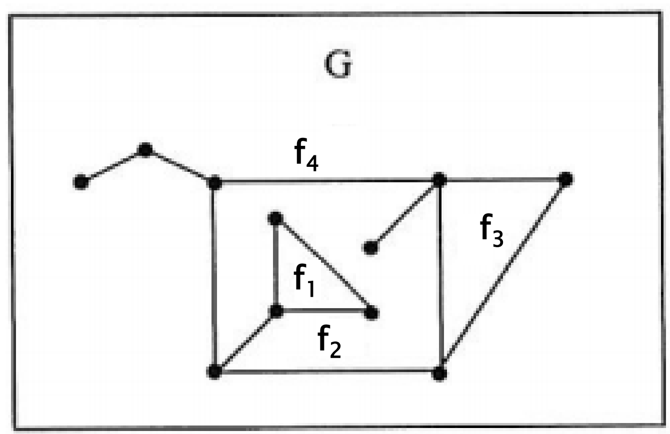
K_5 e $K_{3,3}$ não são planares!

Faces de um Grafo G

✓ Um **Grafo Plano G** particiona o plano em um número de regiões chamadas **Faces** de **G**;

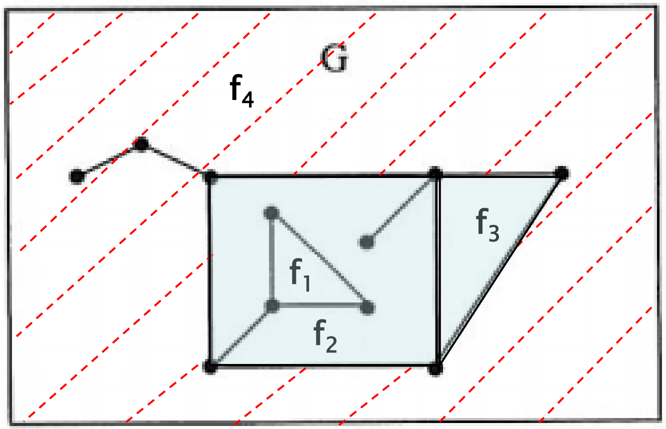


✓ O **Grafo Plano G** acima tem quatro faces: $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ e $\mathbf{f_4}$;
✓ A face $\mathbf{f_4}$ não é limitada e é chamada **face exterior**;



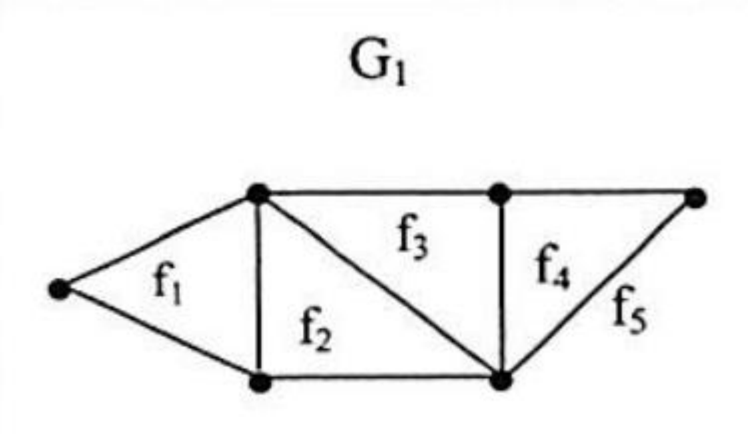
Faces de um Grafo G

- Qualquer **Grafo Plano G** tem exatamente uma **Face exterior**;
- Qualquer outra **Face** é limitada por um caminho fechado no grafo e é chamada **Face Interior**;
- O número de **Faces** de um Grafo Plano é denotado por **f(G)** ou simplesmente **f**.



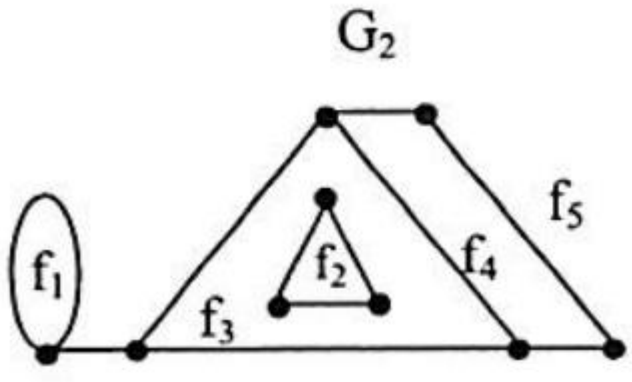
Faces de um Grafo G - Exemplo

✓ O Grafo $\mathbf{G_1}$ abaixo tem **5** faces;



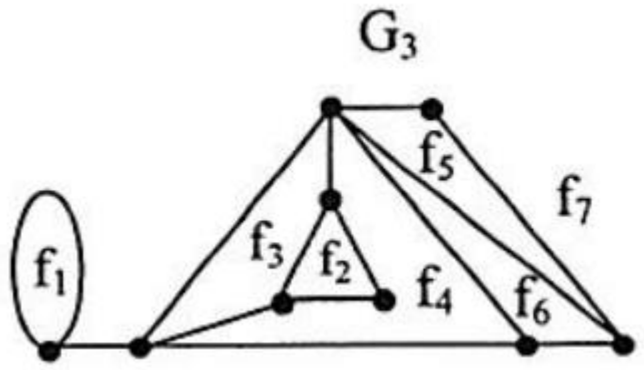
Faces de um Grafo G - Exemplo

- ✓ O Grafo $\mathbf{G_2}$ abaixo tem **5** faces;



Faces de um Grafo G - Exemplo

- ✓ O Grafo $\mathbf{G_3}$ abaixo tem **7** faces;



Fórmula de Euler

✓ Seja **G** um **Grafo conectado plano** e seja:

n – o número de **Vértices** de G;

e – o número de **Arestas** de G;

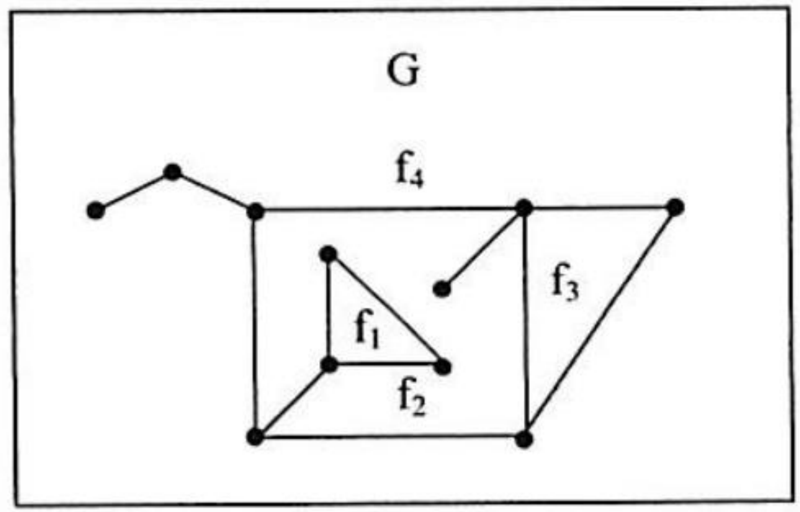
f – o número de **Faces** de G.

Então:

$$\boxed{n - e + f = 2}$$

Fórmula de Euler – Exemplo

- ✓ Seja **G** o **Grafo da Figura abaixo:**



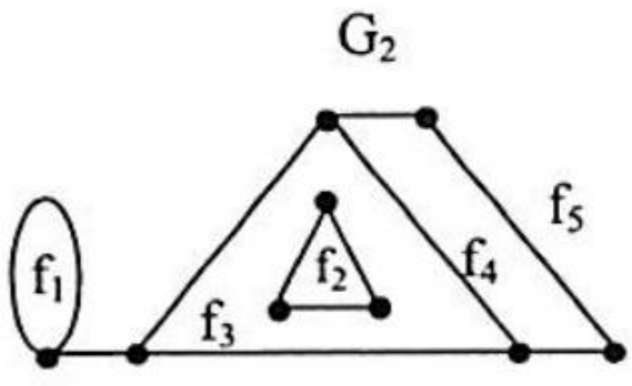
- ✓ O Grafo tem 11 vértices, 13 arestas e quatro faces, uma vez que o Grafo é Conectado;

- ✓ Logo: $n - e + f = 2 \Rightarrow 11 - 13 + 4 = 2$ (verdade)

$$\boxed{n - e + f = 2}$$

Fórmula de Euler - Exemplo

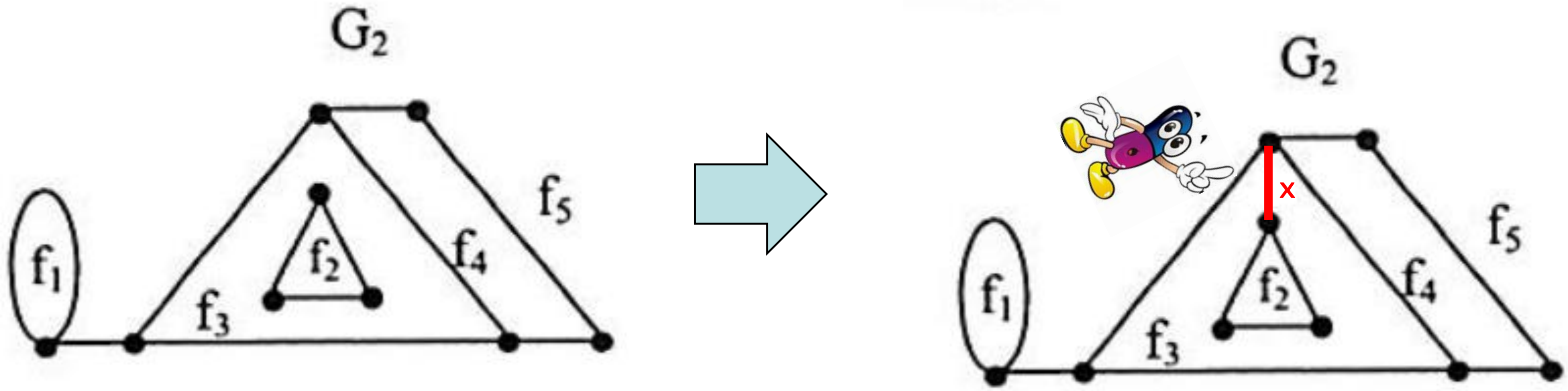
- ✓ Seja **G_2** o **Grafo da Figura abaixo:**



- ✓ Considerando que o Grafo **G_2** não é conectado, **não** se pode aplicar a Fórmula de Euler;
- ✓ Ou seja, nesse caso **a Fórmula de Euler não é válida.**

Fórmula de Euler - Exemplo

- ✓ Seja **G_2** o **Grafo da Figura abaixo;**
- ✓ Acrescentando-se a **aresta x**, para torná-lo Conectado, tem-se:



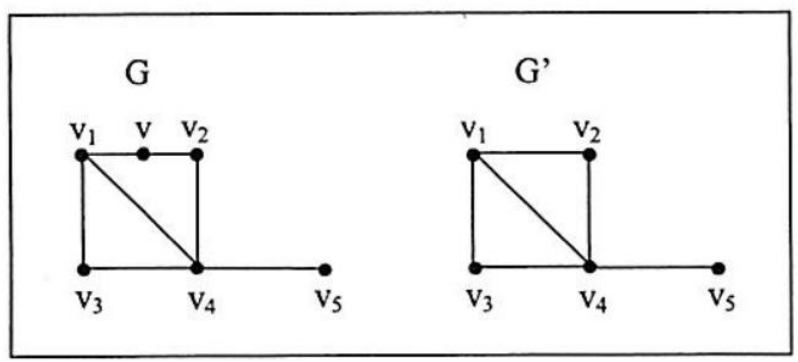
- ✓ n = 9
- ✓ e = 12
- ✓ f = 5

- ✓ Aplicando-se a **Fórmula de Euler**, tem-se: n – e + f = 2 => 9 – 12 + 5 = 2 (Verdade...)

Redução de Série

Se um grafo G tem um vértice com grau 2 e arestas (v,v_1) e (v,v_2), com $v_1 \neq v_2$, diz-se que as arestas (v,v_1) e (v,v_2) estão em série. Uma *redução de série* consiste na eliminação do vértice v do grafo G e na substituição das arestas (v,v_1) e (v,v_2) pela aresta (v_1,v_2). Diz-se que o grafo resultante G' foi obtido a partir de G por uma redução de série. Por convenção, diz-se que um grafo G é obtido a partir de si mesmo por uma redução de série.

No grafo G da Figura as arestas (v,v_1) e (v,v_2) estão em série. O grafo G' foi obtido a partir de G por uma redução de série.



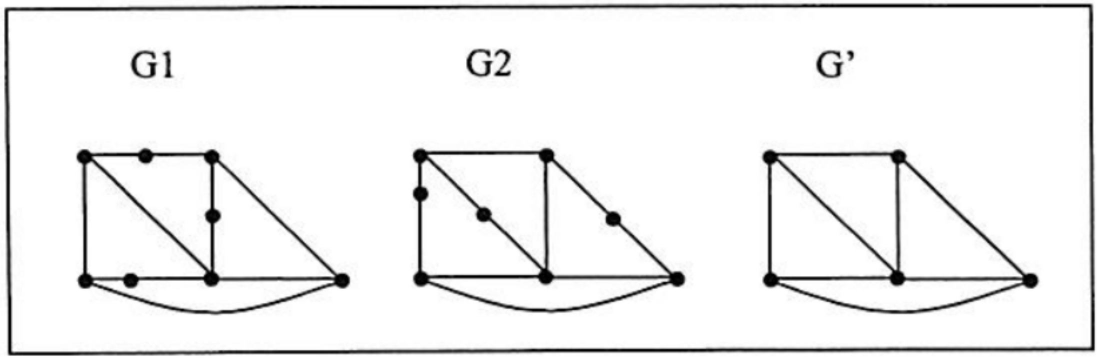
Grafo G', obtido a partir de G por uma redução de série.

Grafos Homeomorfos

Os grafos G1 e G2 são homeomorfos se G1 e G2 puderem ser reduzidos a grafos isomorfos por meio da realização de uma sequência de reduções de série.

De acordo com as definições, qualquer grafo é homeomorfo a si próprio. Os grafos G1 e G2 são homeomorfos se G1 puder ser reduzido a um grafo isomorfo a G2 ou se G2 puder ser reduzido a um grafo isomorfo a G1.

Exemplo Os grafos G1 e G2, mostrados na Figura , são homeomorfos, uma vez que ambos podem ser reduzidos ao grafo G', mostrado na mesma figura, por meio de uma sequência de reduções de série.



Os grafos G1 e G2 são homeomorfos. Cada um deles pode ser reduzido ao grafo G'.

Teorema de Kuratowski

- ✓ Um Grafo **G** é **planar** se e somente se não tiver um subgrafo **homeomorfo** a $\mathbf{K_5}$ ou $\mathbf{K_{3,3}}$.