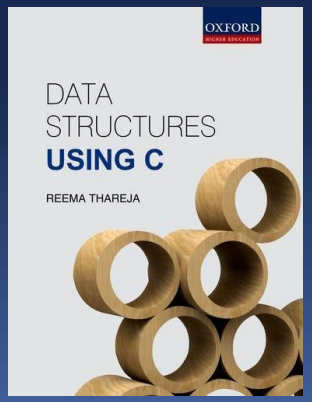
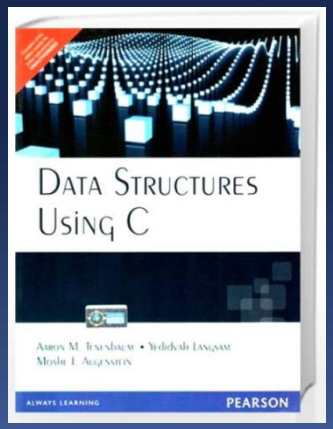
Unidade 12 – Árvores Binárias de Pesquisa

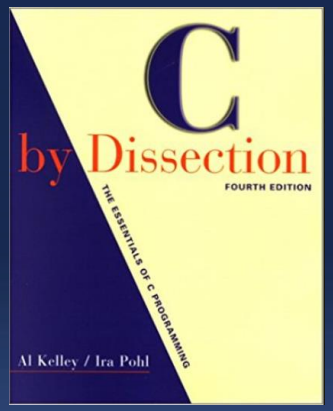
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

Bibliografia

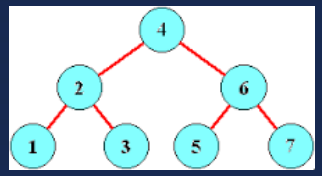
- Algoritmos – Teoria e Prática – Cormen – Segunda Edição – Editora Campus, 2002
- Data Structures using C – Oxford University Press – 2014
- Data Structures Using C – A. Tenenbaum, M. Augensem, Y. Langsam, Pearson 1995
- C By Dissection – Kelley, Pohh – Third Edition – Addison Wesley





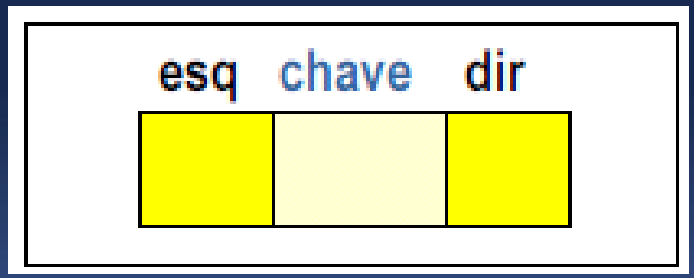


Árvore Binária de Pesquisa



- Também conhecida por:
  - Árvore Binária de Busca
  - Árvore Binária Ordenada
  - Search Tree (em inglês)

- Apresentam uma relação de ordem entre os nós.
- A ordem é definida por um campo **chave** (key).
- **Não permite chaves duplicadas**.



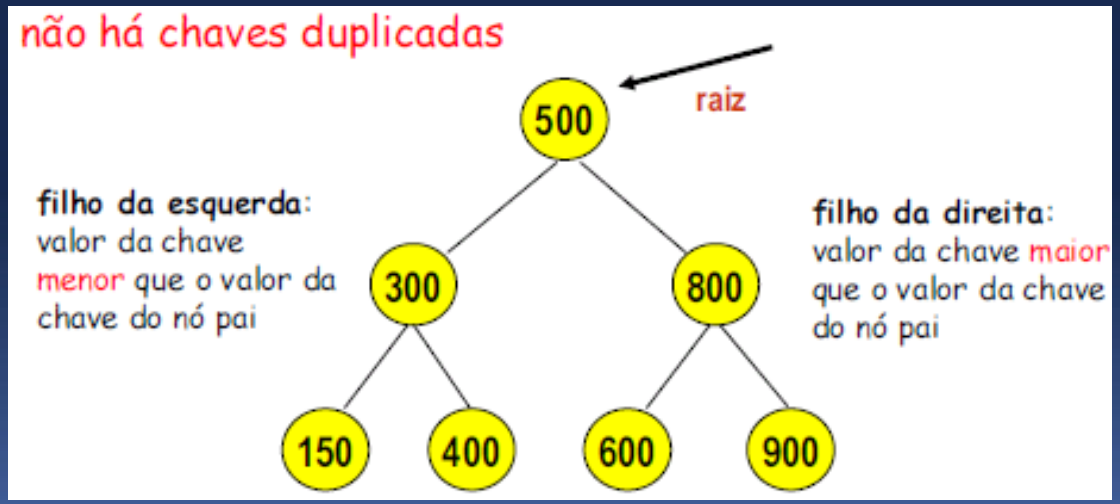
Árvore Binária de pesquisa

- **Definição de Niklaus Wirth:**

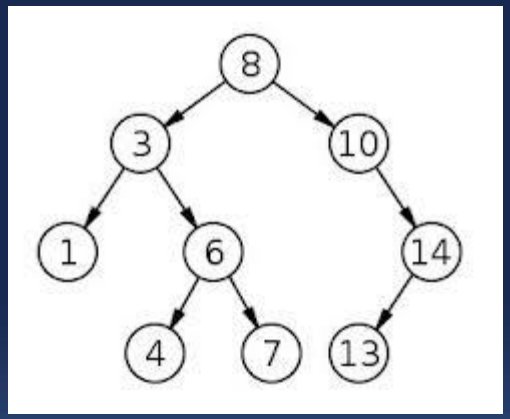
Árvore que se encontra organizada de tal forma que, para cada nó t_i , todas as chaves da sub-árvore:

à esquerda de t_i são **menores** que t_i e

à direita de t_i são **maiores** que t_i.



Inserção em Árvores Binárias de Pesquisa

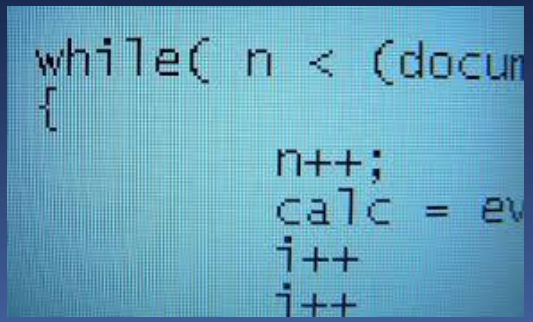


Carga da Árvore Binária de pesquisa

```
int[] valores = { 17,49,14,23,27,15,2,1,34,10,12 }  ;
```

```
String[] nomes = {
"Paulo","Ana","José","Rui","Paula","Bia","Selma","Carlos","Silvia","Teo","Saul" } ;
```

A partir das listas acima, implementar
a árvore binária de busca.



Inserção em uma árvore de busca binária

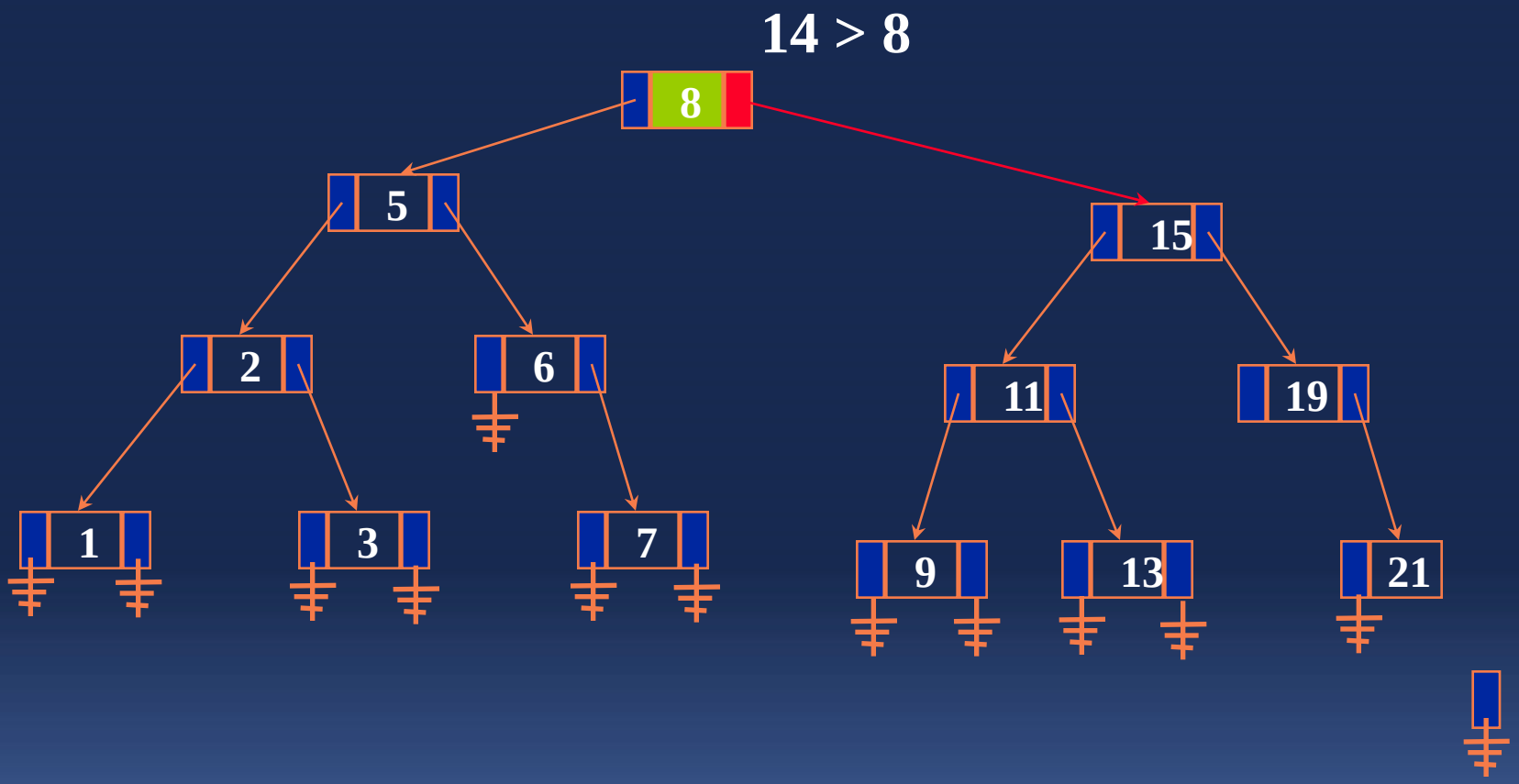
Lembrando que ...

- A sub-árvore da **direita** de um nó deve possuir chaves **maiores** que a chave do pai.
- A sub-árvore da **esquerda** de um nó deve possuir chaves **menores** que a chave do pai.

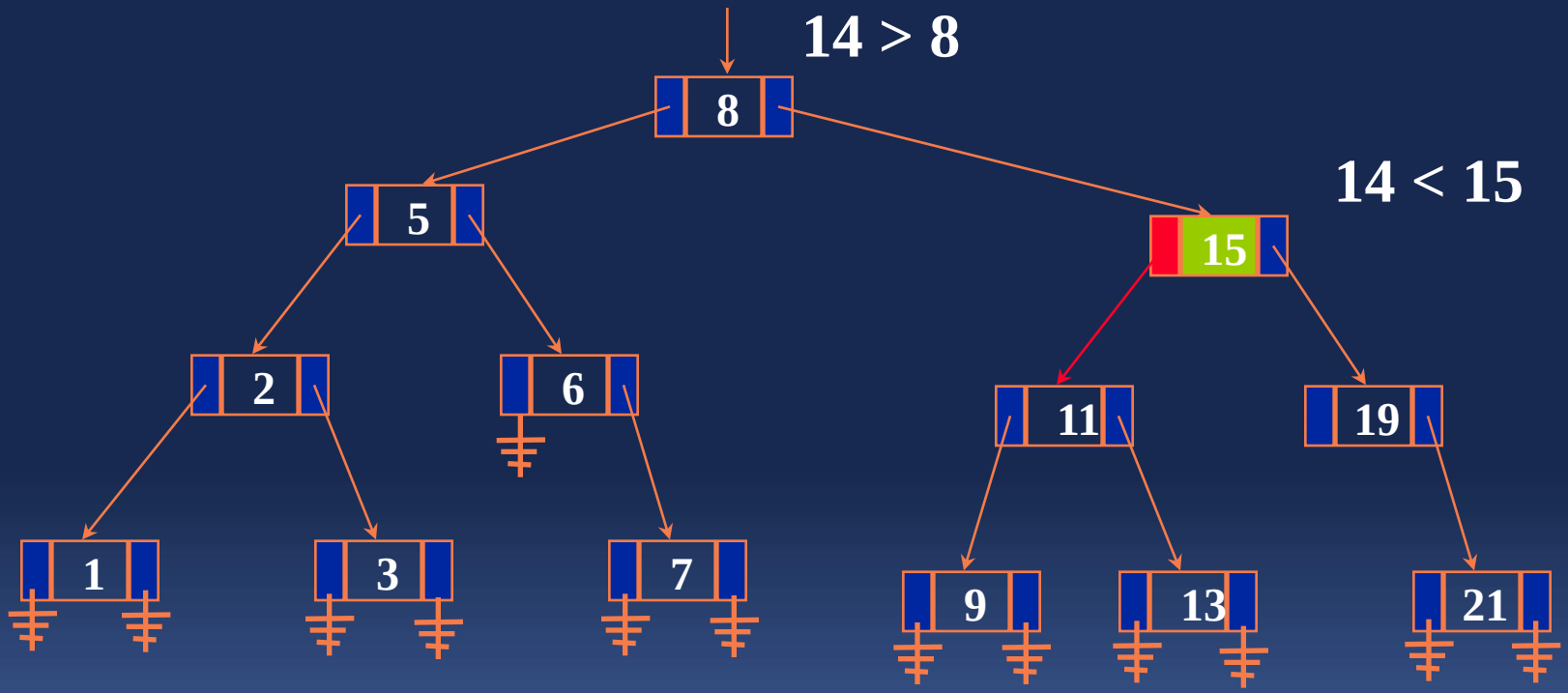
Princípio Básico

- Percorrer a árvore até encontrar um nó sem filho, de acordo com os critérios acima.

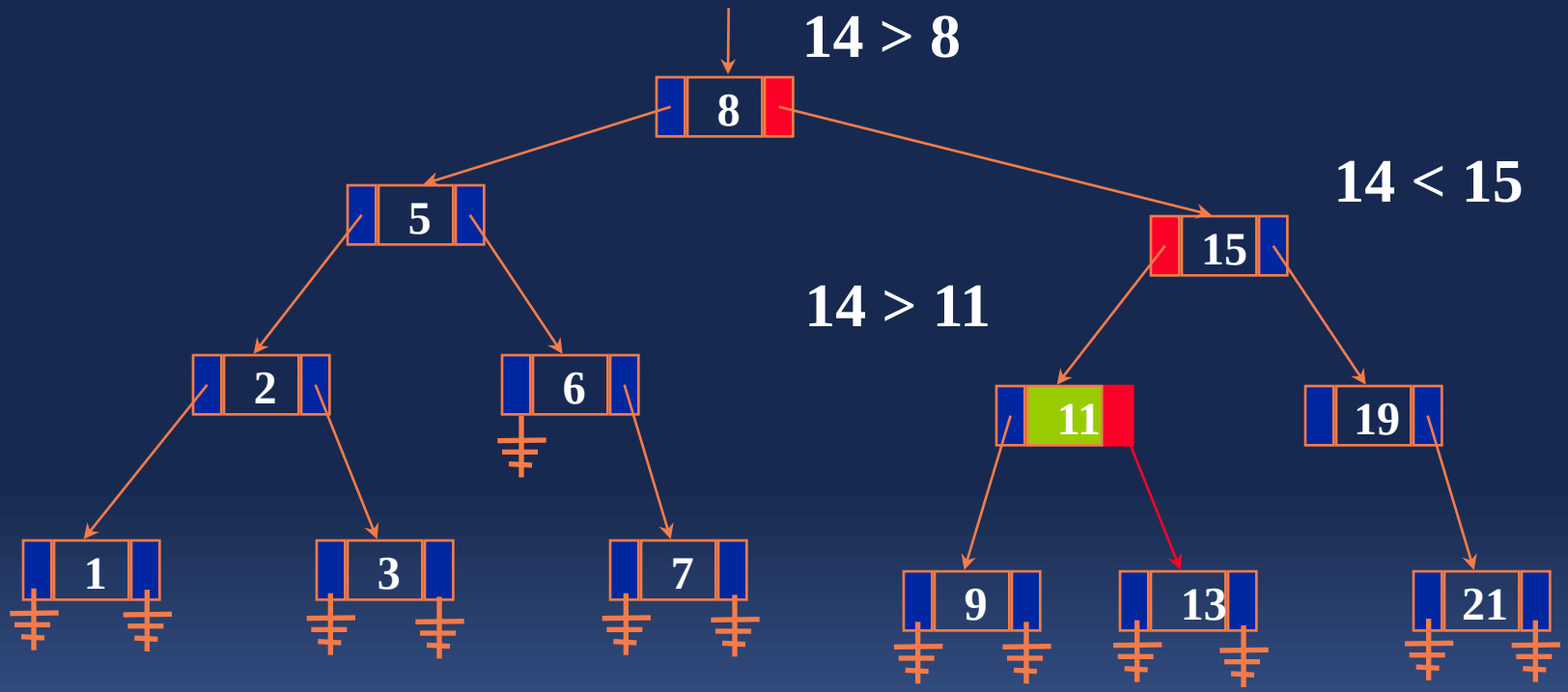
Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



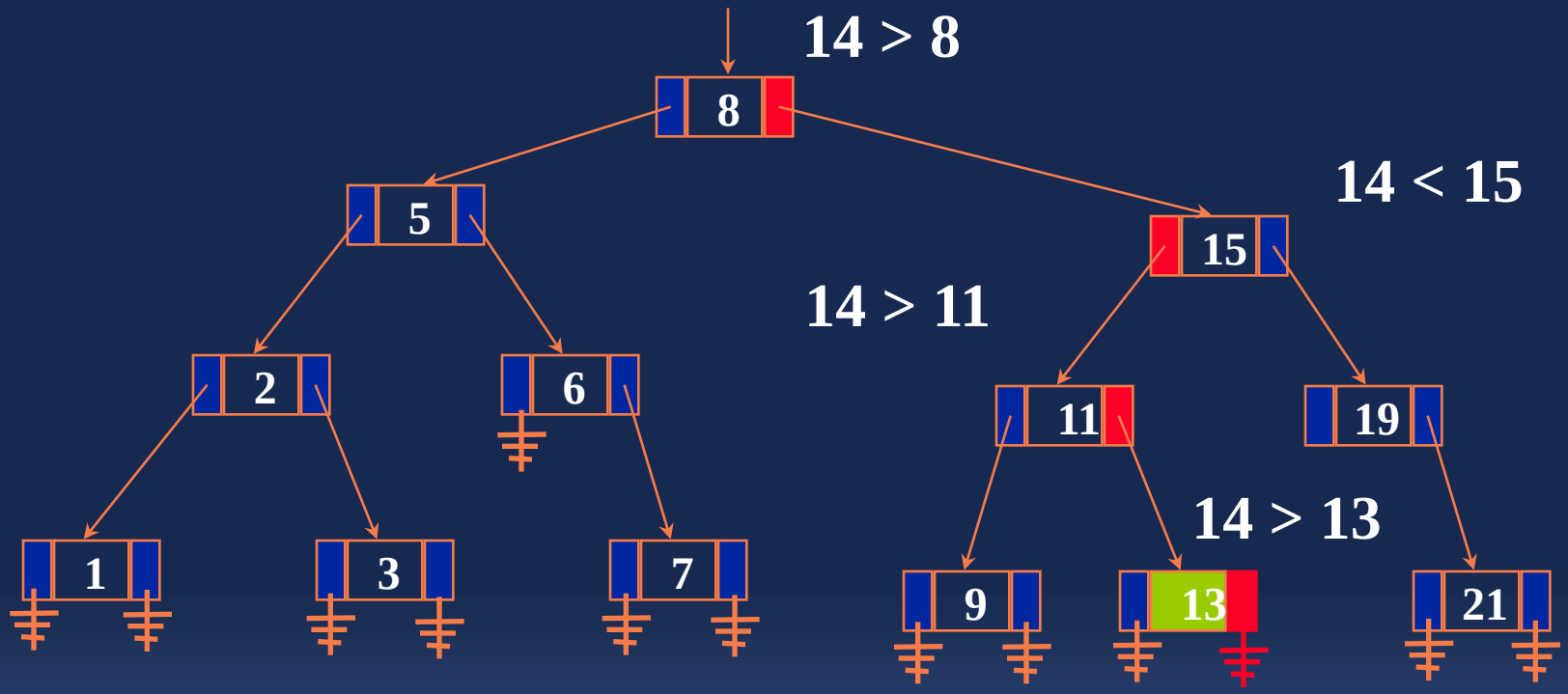
Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



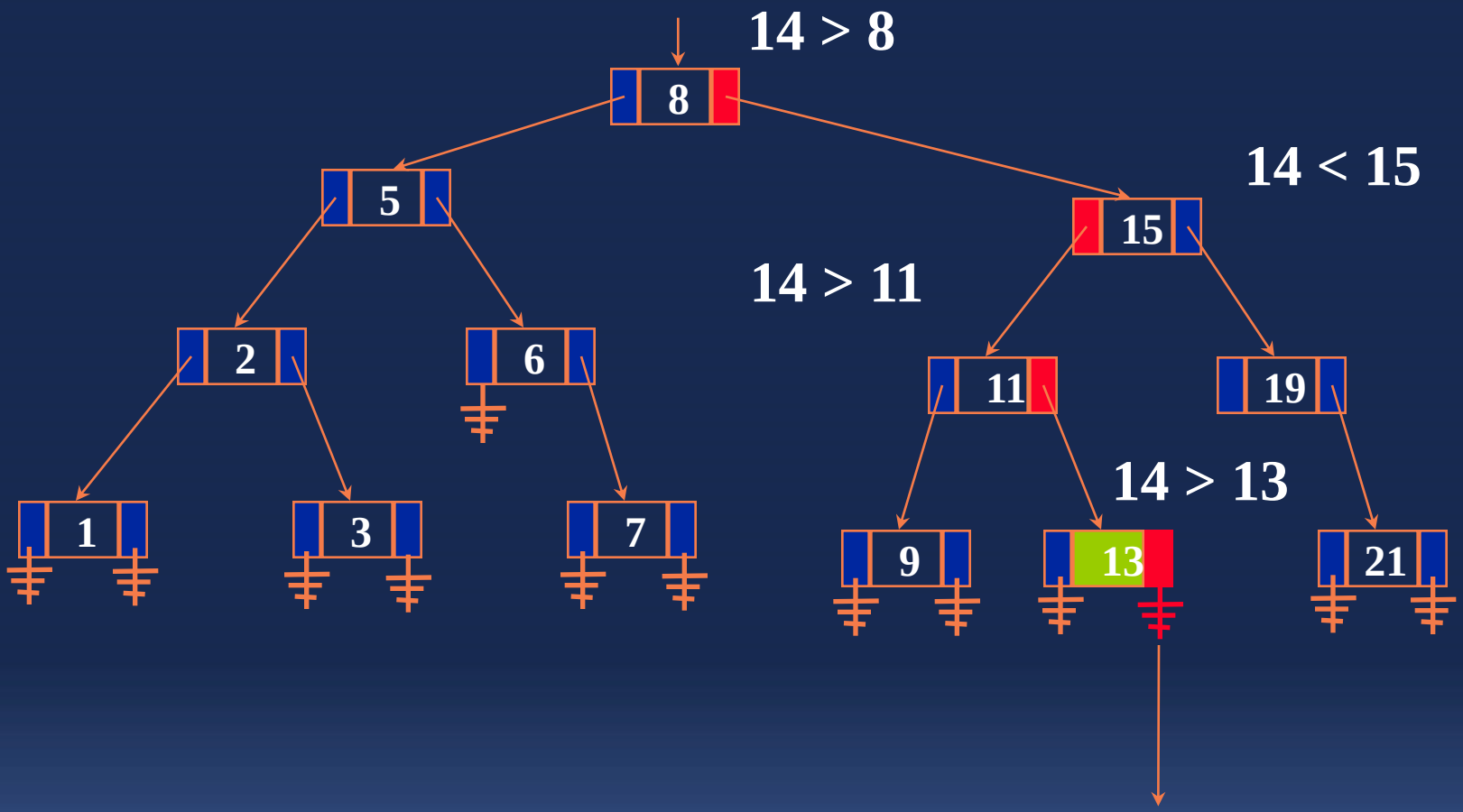
Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



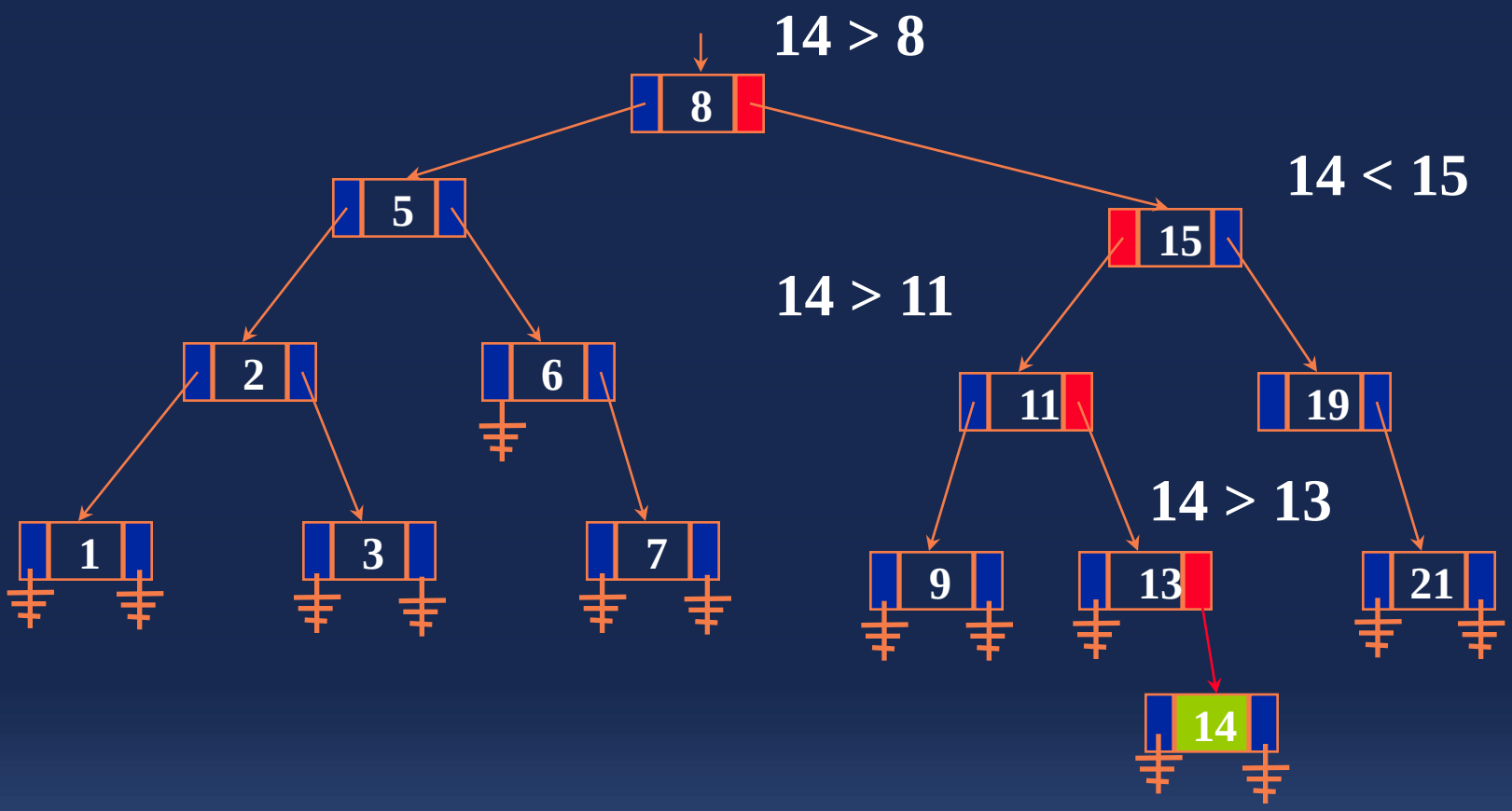
Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



Exemplo – Inserção de elemento com chave 14



Implementação da função addnode()

```
public void addNode(int chave, String nome) {

 SearchTreeNode newNode = new SearchTreeNode(chave,nome);
 if (root == null)
    this.insert_root(newNode);
 else {
         SearchTreeNode  NodeTrab = this.root;
         NodeTrab = this.root;
         while (true) {
             if (chave < NodeTrab.key) {
                 if (NodeTrab.left  == null) {
                      NodeTrab.left = newNode;
                      newNode.parent = NodeTrab;
                      newNode.nome = nome;
                      return;
                 }
                 else NodeTrab = NodeTrab.left;

             }
             else {
                  if (NodeTrab.right == null) {
                      NodeTrab.right = newNode;
                      newNode.parent = NodeTrab;
                      newNode.nome = nome;
                      return;
                  }
                      else NodeTrab = NodeTrab.right;
                  }
          }
  }
}
```

Busca em árvores de pesquisa

- ✓ Em uma árvore binária é possível encontrar qualquer chave existente **X** atravessando-se árvore:
  - ✓ sempre **à esquerda** se **X** for **menor** que a chave do nó visitado e
  - ✓ sempre **à direita** toda vez que for **maior**.
  - ✓ A escolha da direção de busca só depende de **X** e da chave que o nó atual possui.

- ✓ A busca de um elemento em uma árvore balanceada com **n** elementos toma tempo médio menor que $\log_2(\mathbf{n})$, tendo a busca então $O(\log_2 \mathbf{n})$.

n	log2 (n)
1	0.00
10	3.32
13	3.70
20	4.32
50	5.64
100	6.64
200	7.64
500	8.97

Exemplo – Busca da chave 13

chave = 13

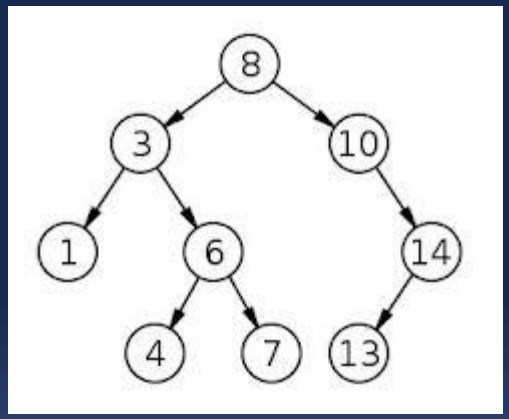
Algoritmo iterativo de search em árvore de busca

```
Node buscaChave (int chave) {
    Node noAtual = raiz; // inicia pela raiz

    while (noAtual != null && noAtual.item != chave) {

        if (chave < noAtual.key)
            noAtual=noAtual.left ; // caminha p/esquerda
        else
            noAtual=noAtual.right;  // caminha p/direita

    }
    return noAtual;
}
```

Implementação – Busca

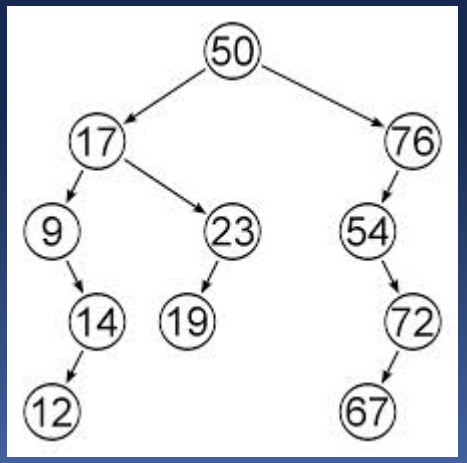
```
public SearchTreeNode Search_key(int key) {

        SearchTreeNode nodeTrab = this.root; // inicia pela raiz

        while (nodeTrab != null && nodeTrab.key != key) {

                if (key < nodeTrab.key)
                        nodeTrab = nodeTrab.left;
                else
                        nodeTrab = nodeTrab.right;
                }
        return nodeTrab;
}
```

Eliminação em Árvores Binárias de Busca



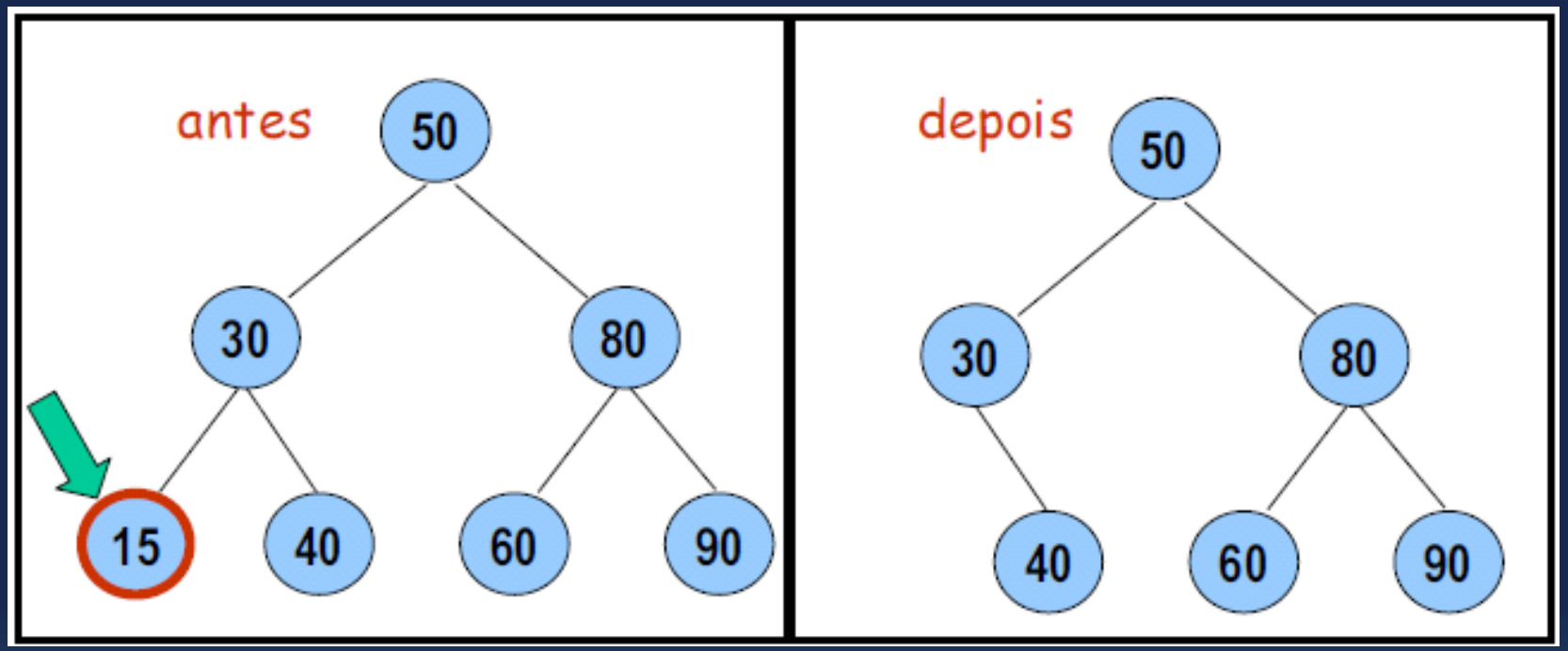
Eliminação em Árvores Binárias de Busca

- ✓ A eliminação é mais complexa do que a inserção.
- ✓ A razão básica é que a característica organizacional da árvore não deve ser alterada.
  - A sub-árvore **direita** de um nó deve possuir chaves **maiores** que a do pai.
  - A sub-árvore **esquerda** de um nó deve possuir chaves **menores** que a do pai.
- ✓ Para garantir isto, o algoritmo deve "**remanejar**" os nós.



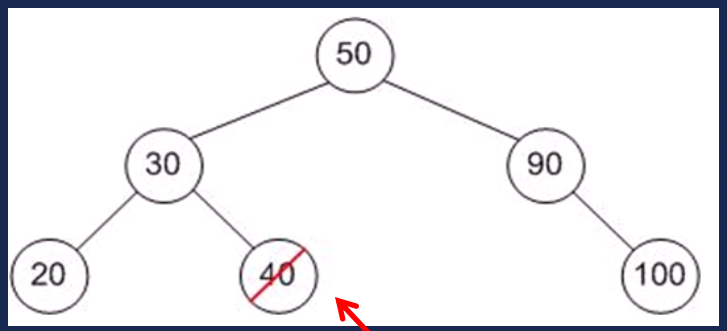
Caso 1 – Remoção de nó folha

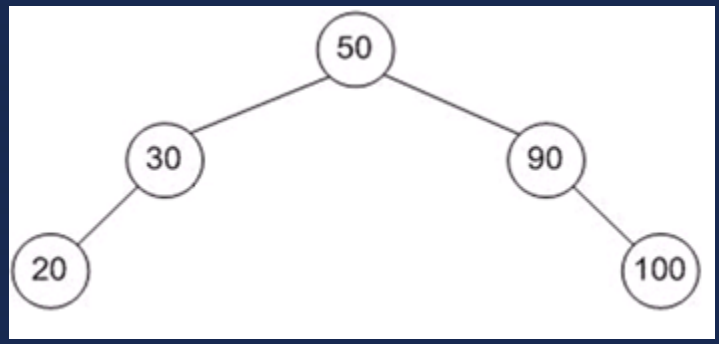
Caso mais simples, basta retirá-lo da árvore



Eliminação da chave 15

Caso 1 – Outro exemplo



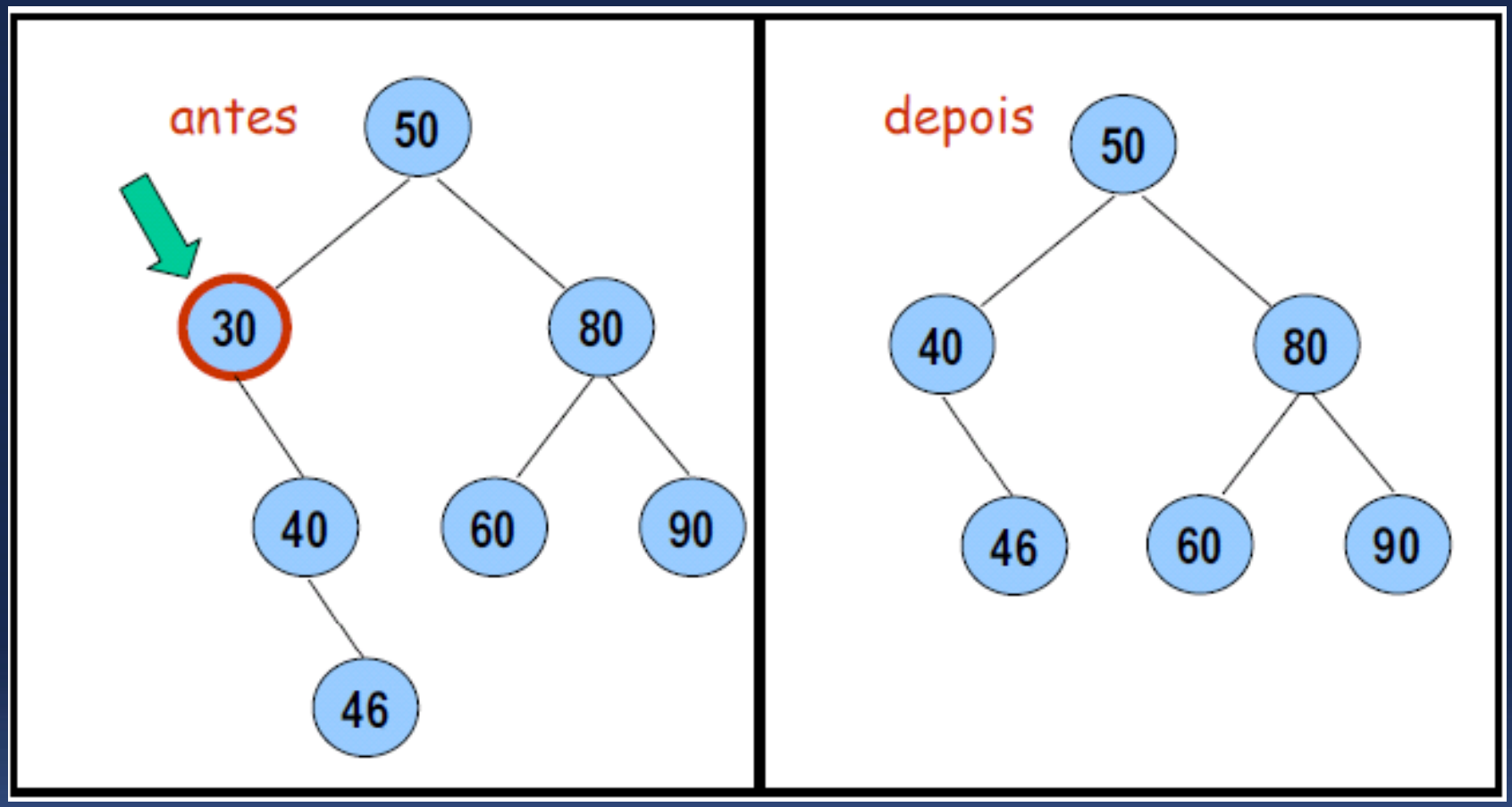


Eliminação da chave 40

Eliminação de nó que possui uma sub-árvore filha

- ✓ Se o nó a ser removido possuir somente uma sub-árvore filha:
  - *Move-se essa sub-árvore toda para cima.*
  - *Se o nó a ser excluído é filho esquerdo de seu pai, o seu filho será o novo filho esquerdo deste e vice versa.*

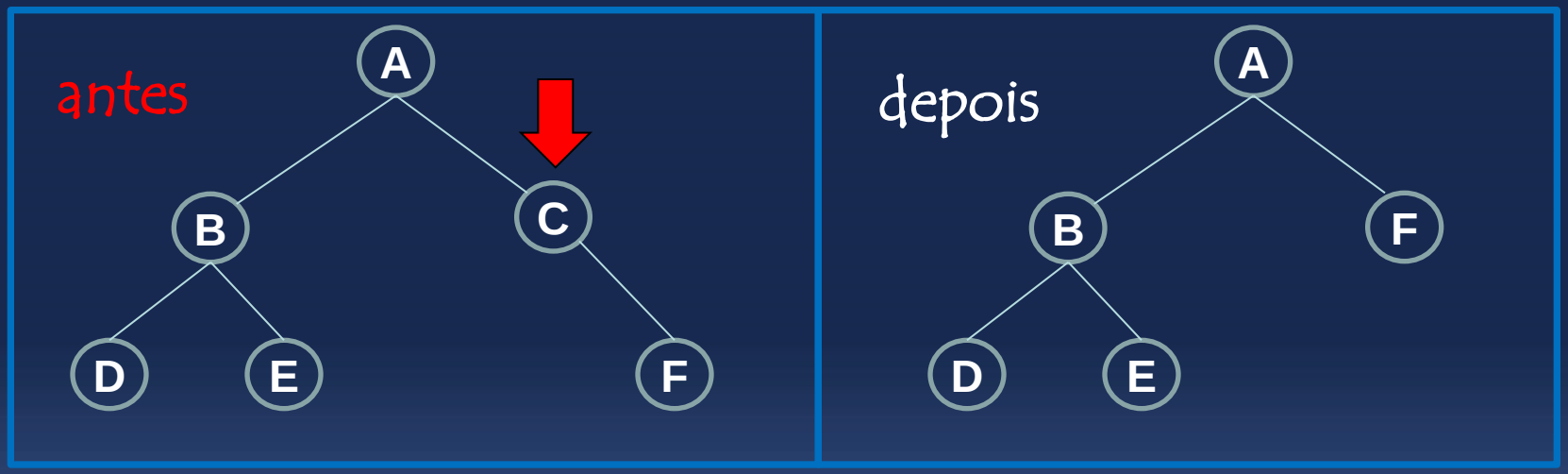
Caso 2 – O nó tem somente uma sub-árvore



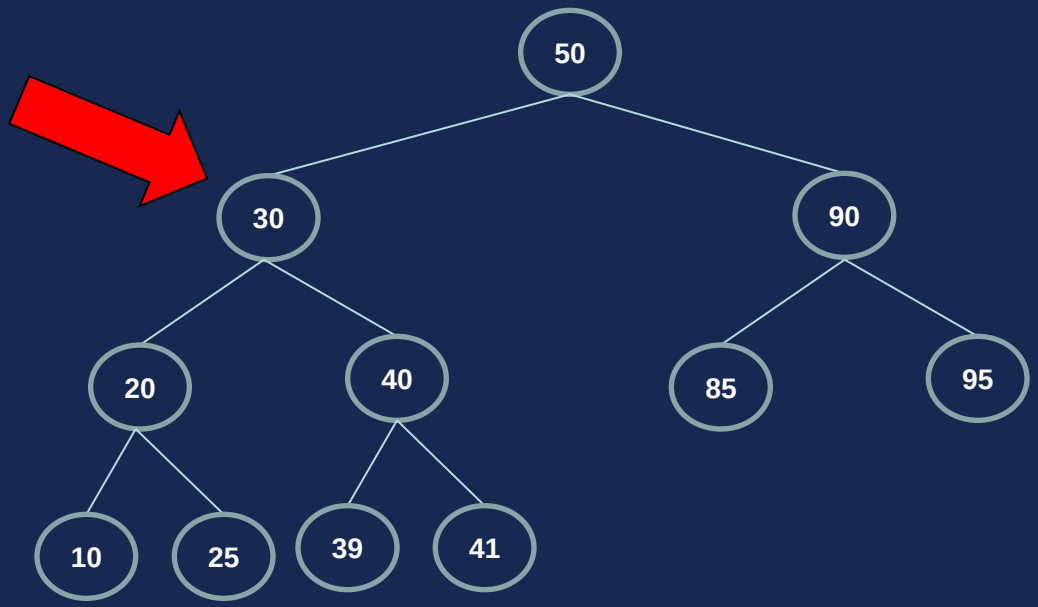
Eliminação da chave 30

O ponteiro do pai aponta para o filho deste

Caso 2 – Outro Exemplo



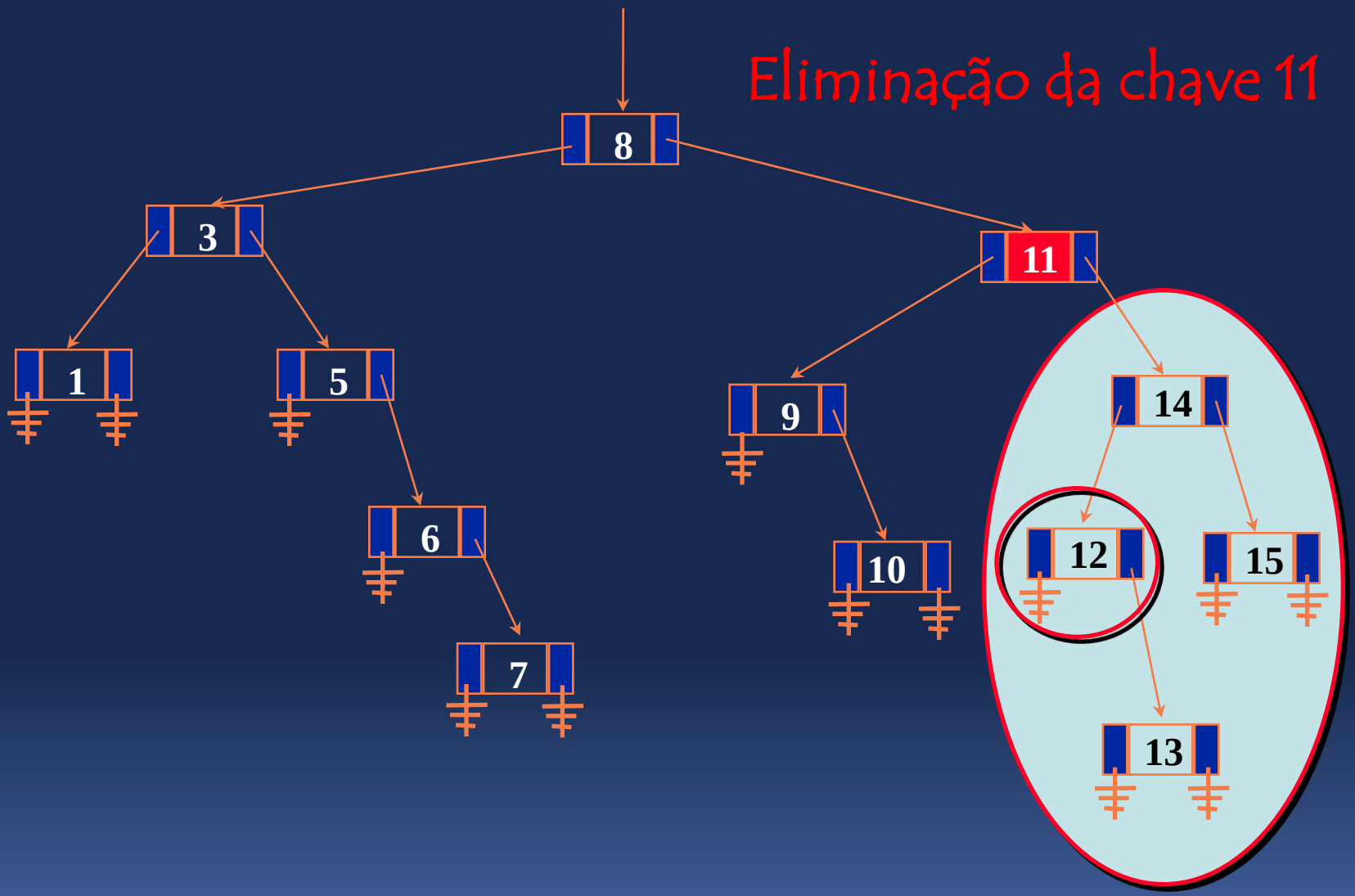
Eliminação de nó que possui duas sub-árvores filhas



A estratégia geral (Mark Allen Weiss) é:

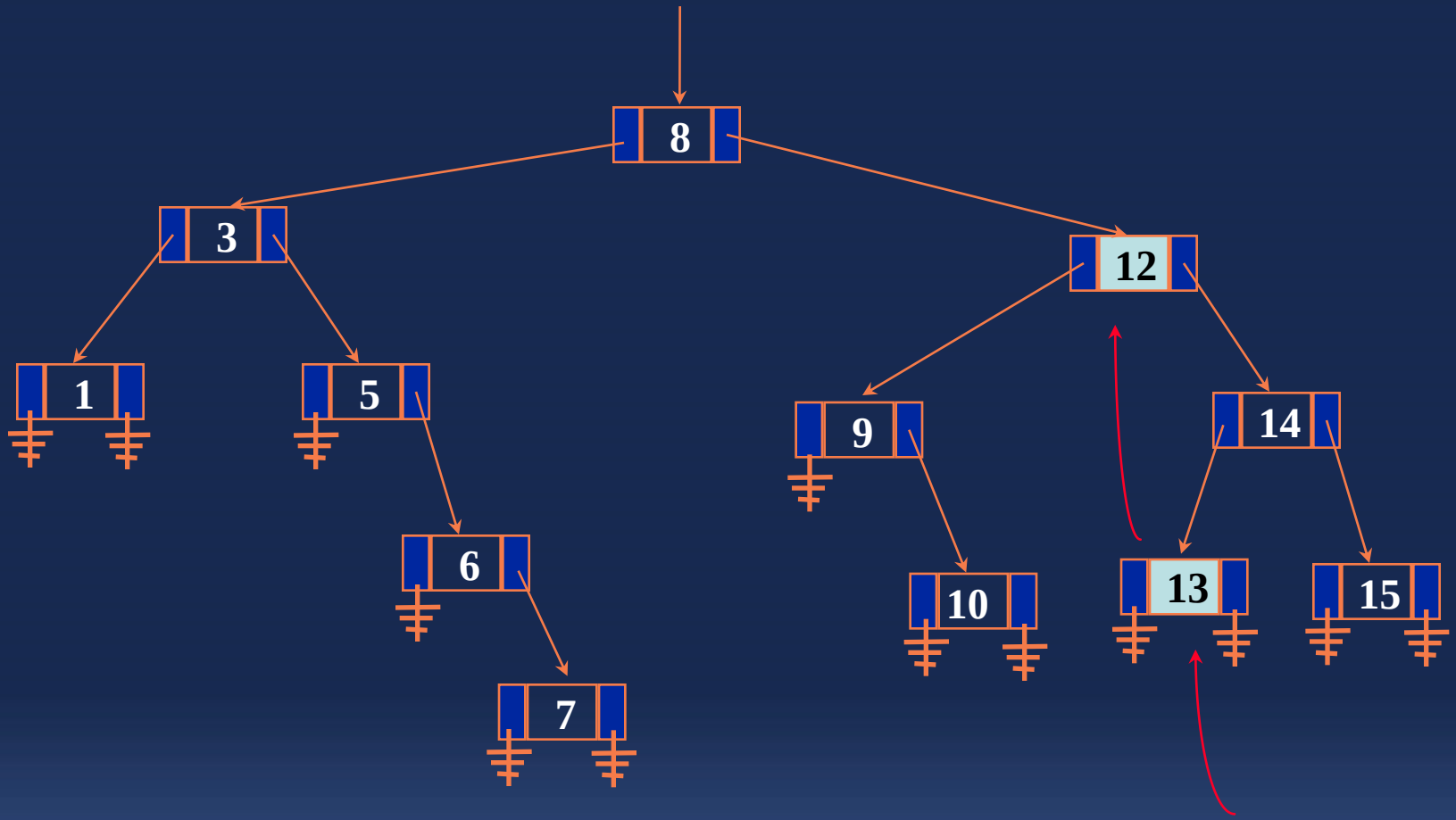
Substituir a chave retirada pela menor chave da sub-árvore direita

Caso 3 – Nó tem duas sub-árvores



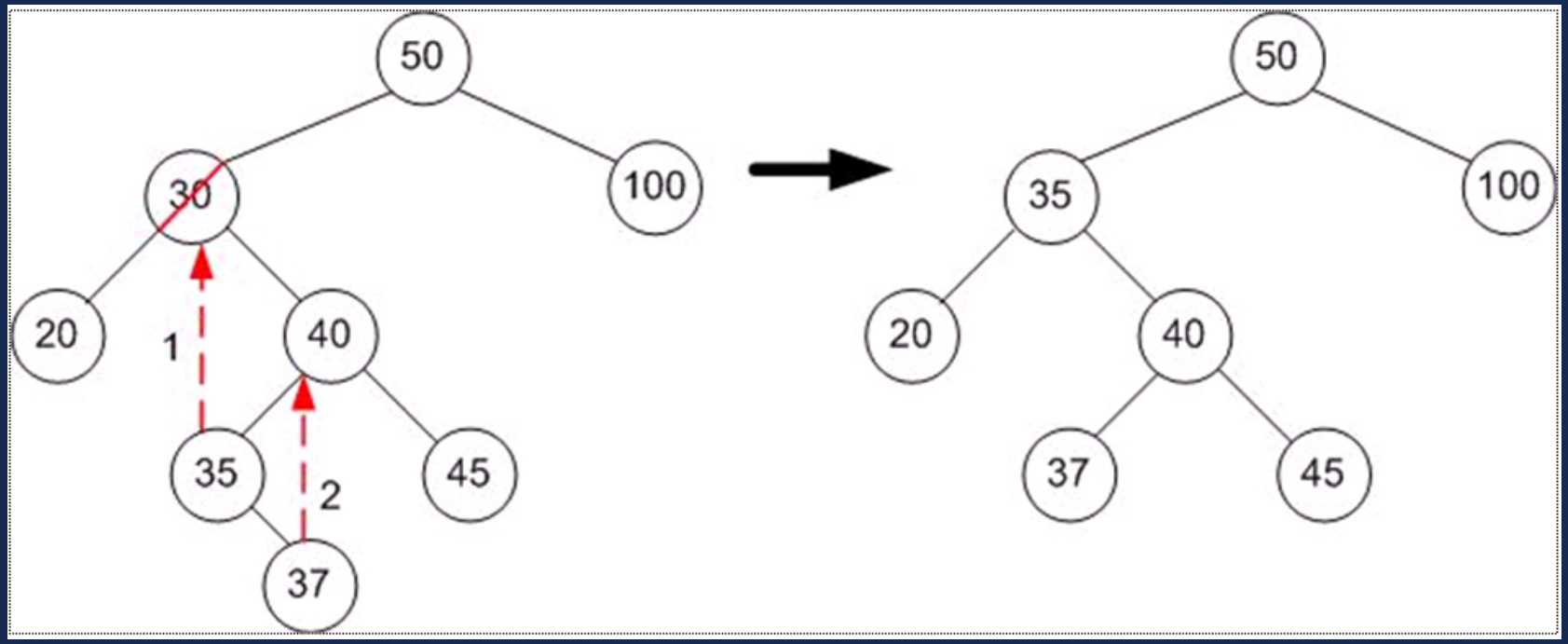
Substituir a chave retirada pela menor chave da sub-árvore direita

Caso 3 – Nó tem duas sub-árvores



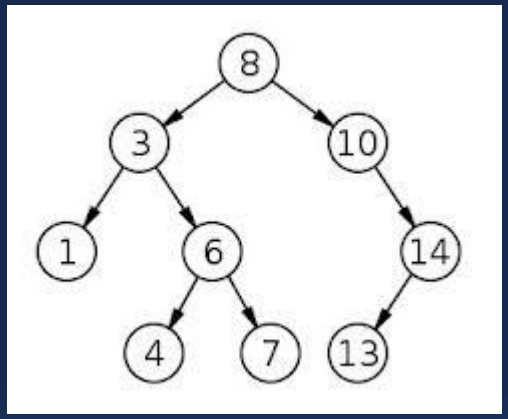
Eliminação da chave 11

Caso 3 – Outro exemplo



Eliminação da chave 30

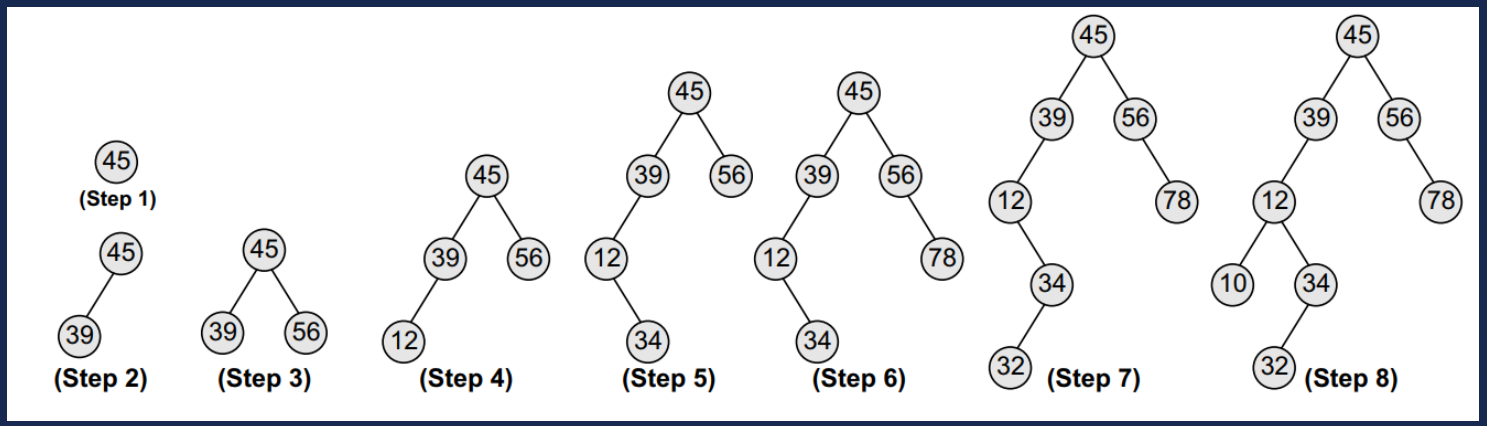
Implementação de Árvores Binárias de Busca

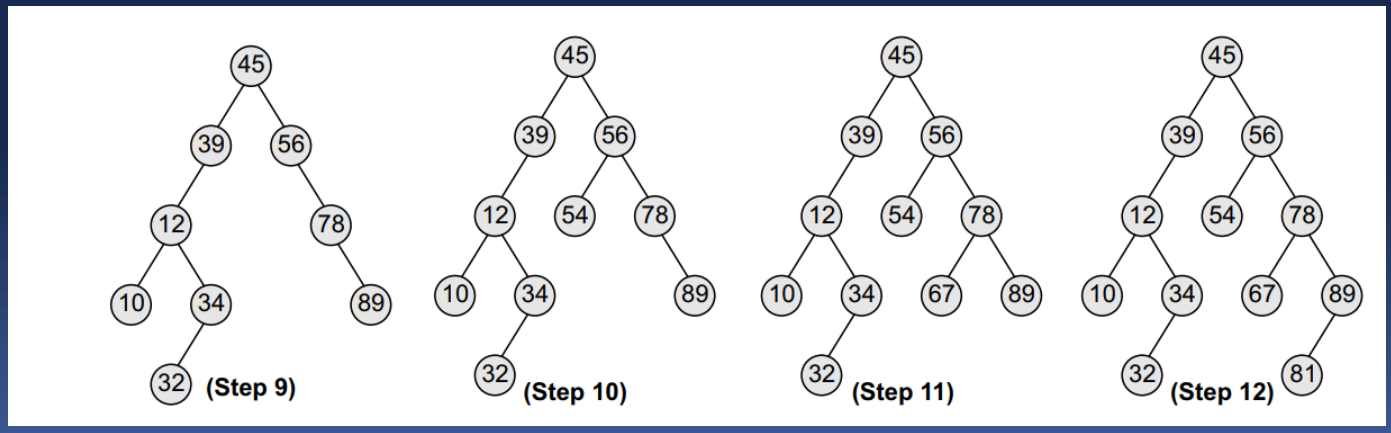


Busca em árvores de pesquisa

- ✓ Criação de uma árvore binária de busca com os seguintes elementos de dados:

45, 39, 56, 12, 34, 78, 32, 10, 89, 54, 67, 81





Criação de Árvore Binária de Busca

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct node {
        int data;
        struct node * parent;
        struct node * left;
        struct node * right;
};

struct node * tree;

enum boolean {
    true = 1, false = 0
};

typedef  enum boolean  bool;

void insert_node (struct node *);
struct node * cria_node (int);

struct node * left(struct node * );
struct node * right(struct node *);
enum boolean isLeft(struct node *);
enum boolean isRight(struct node *);
enum boolean isEmpty();
void preorder(struct node *);
void posorder(struct node *);
void inorder(struct node *);
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores binarias de pesquisa....\n");

    struct node * Nodetrab;

    int dados[] = { 45, 39, 56, 12, 34, 78, 32, 10, 89, 54, 67, 81 };

    for (int i = 0; i < 12 ; i++) {
        Nodetrab = cria_node(dados[i]);
        insert_node(Nodetrab);
    }

    printf ("\n\n ****** preorder ******\n\n");
    preorder(tree);

    return 0;

}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
void insert_node( struct node * ponteiro) {

    if (tree == NULL)
          tree = ponteiro;
    else {

        struct node * nodeTrab = tree;
        struct node * saveNode = NULL;

        while ( nodeTrab != NULL ) {
            saveNode = nodeTrab;
            if ( ponteiro -> data > nodeTrab->data )
                nodeTrab = nodeTrab->right;
            else
                nodeTrab = nodeTrab->left;
        }

        if (ponteiro -> data > saveNode->data )
            saveNode->right = ponteiro;
        else
            saveNode->left = ponteiro;

        ponteiro->parent = saveNode;
    }
}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
struct node * cria_node (int valor) {

    struct node * new_node ;

    new_node = (struct node *) malloc (sizeof (struct node));

    new_node -> left = NULL;
    new_node -> right = NULL;
    new_node -> parent= NULL;
    new_node -> data = valor;

    return new_node;
}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
struct node * left(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> left == NULL)
        return NULL;

    return ponteiro -> left;
}

struct node * right (struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> right  == NULL)
        return NULL;

    return ponteiro -> right;
}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
enum boolean isLeft(struct node * ponteiro ) {

    if (ponteiro -> left == NULL )
        return false;
    return true;
}


enum boolean isRight (struct node * ponteiro ) {

    if (ponteiro -> right == NULL )
        return false;
    return true;
}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
void preorder(struct node * ponteiro ) {

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

    if (isLeft(ponteiro))
        preorder(ponteiro ->left);

    if (isRight(ponteiro))
        preorder(ponteiro ->right);

}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
void posorder(struct node * ponteiro ) {

    if (isLeft(ponteiro))
        posorder(ponteiro ->left);

    if (isRight(ponteiro))
        posorder(ponteiro ->right);

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );
}
```

Criação de Árvore Binária de Busca

```
void inorder (struct node * ponteiro ) {

    if (isLeft(ponteiro))
        inorder(ponteiro ->left);

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

    if (isRight(ponteiro))
        inorder(ponteiro ->right);
}
```

Busca em árvores de pesquisa

```
int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores binarias de pesquisa....\n");

    struct node * Nodetrab;

    int dados[] = { 45, 39, 56, 12, 34, 78, 32, 10, 89, 54, 67, 81 };

    for (int i = 0; i < 12 ; i++) {
        Nodetrab = cria_node(dados[i]);
        insert_node(Nodetrab);
    }

    printf ("\n\n ****** preorder ******\n\n");
    preorder(tree);

    int key;
    printf ("\n\n Entre com uma chave de pesquisa: ");
    scanf("%d",&key);

    printf ("\n\nchave a ser consultada: %d", key);
    search_key(key);


    return 0;
```

QualitSys

Busca em árvores de pesquisa

```
enum boolean search_key(int key) {

    if (tree == NULL) {
          printf("\n\narvore nula, chave nao existente...");
          return false;
    }
    else {

         struct node * nodeTrab = tree;

        while ( nodeTrab != NULL ) {
            if (  nodeTrab->data == key ) {

                printf("\n\nkey %d encontrada na arvore...", key);
                return true;
            }
            else {
                    if (key > nodeTrab->data)
                        nodeTrab = nodeTrab->right;
                    else nodeTrab = nodeTrab->left;
            }
        }

        printf("\n\nkey %d NAO encontrada na arvore...", key);
        return false;
    }
}
```

Busca do menor elemento em uma árvore de pesquisa

```
int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores binarias de pesquisa....\n");

    struct node * Nodetrab;

    int dados[] = { -5, 39, 56, 9, 34, 78, 32, 10, -999, 54, 67, 81 };

    for (int i = 0; i < 12 ; i++) {
        Nodetrab = cria_node(dados[i]);
        insert_node(Nodetrab);
    }

    printf ("\n\n ****** preorder ******\n\n");
    preorder(tree);

    if (tree == NULL)
        printf("\n\narvore vazia. nao ha menor elemento...");
    else
        printf ("\n\nmenor elemento: %d " , findMenorElemento(tree) ->data) ;
    return 0;

}
```

Busca do menor elemento em uma árvore de pesquisa

```
struct node * findMenorElemento(struct node * ponteiro) {

    if ( (ponteiro == NULL) || (ponteiro->left == NULL))
          return ponteiro;
    else
         return findMenorElemento(ponteiro->left);
}
```