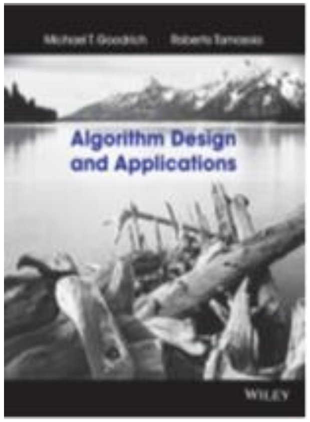
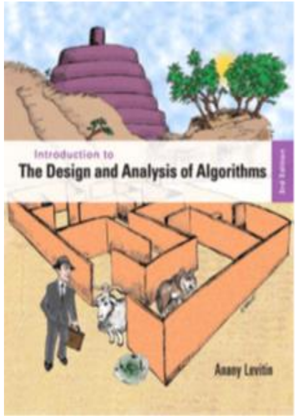
Unidade 3 - Análise de Algoritmos Recursivos

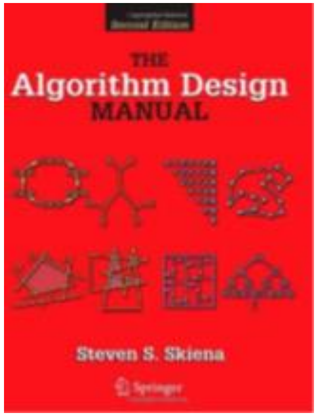
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

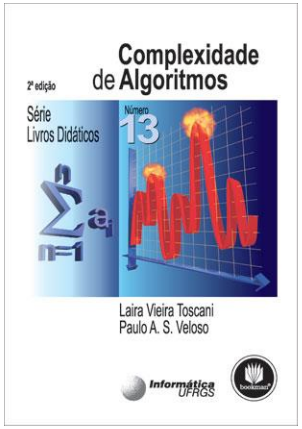
Bibliografia

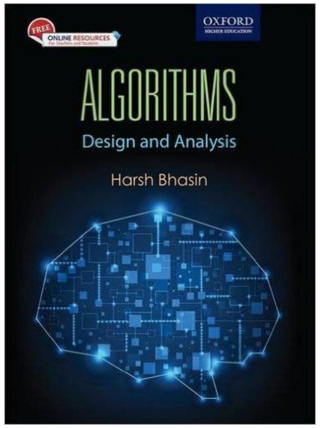
- Algorithm Design and Applications – Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia, Wiley, 2015
- Introduction to the Design and Analysis of Algorithms – Anany Levitin, Pearson, 2012
- The Algorithm Design Manual – Steven S. Skiena, Springer, 2008
- Complexidade de Algoritmos – Série Livros Didáticos – UFRGS
- Algorithms – Design and Analysis – Harsh Bhasin – Oxford University Press - 2015

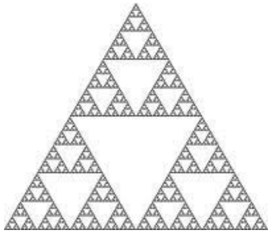












Introdução

- Repetição de instruções pode ser obtida por meio **iterações**;
- Outra forma de se implementar repetições é por meio de **Recursão**;
- Recursão ocorre quando uma função faz chamada de si própria;
- Entretanto, a fim de gerar uma resposta, uma condição de término deve ocorrer;
- Algoritmos recursivos são representados por **Recorrências**;
- Uma **Recorrência** é uma expressão que fornece o valor de uma função em termos dos valores “anteriores” da mesma função.

Exemplo - Fatorial

- O fatorial de um inteiro positivo n, denotado por n! , é definido por:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n.(n-1).(n-2)\ldots\ 3.2.1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Função Fatorial

- Exemplo: 5! = 5.4.3.2.1 = 120

Será que a função fatorial pode ser definida de forma recursiva ?

Fatorial – Definição Recursiva

- Observe que fatorial(5) = 5.(4.3.2.1) = 5.fatorial(4)

```
fatorial(5)
  5 * fatorial(5 - 1)
        4 * fatorial(4 - 1)
              3 * fatorial(3 - 1)
                    2 * fatorial(2 -1)
                          1 * fatorial(1 -1)
                                1
```

$$\text{fatorial}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n.\ \text{fatorial}(n-1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Recorrência

Funções Recursivas

- Possuem um ou mais **casos básicos**, os quais são definidos de forma não-recursiva em termos de quantidades fixas. No caso da função fatorial, o caso básico é n = 0.

- Também possuem ou ou mais **casos recursivos**, os quais são definidos por meio da aplicação da definição da função.

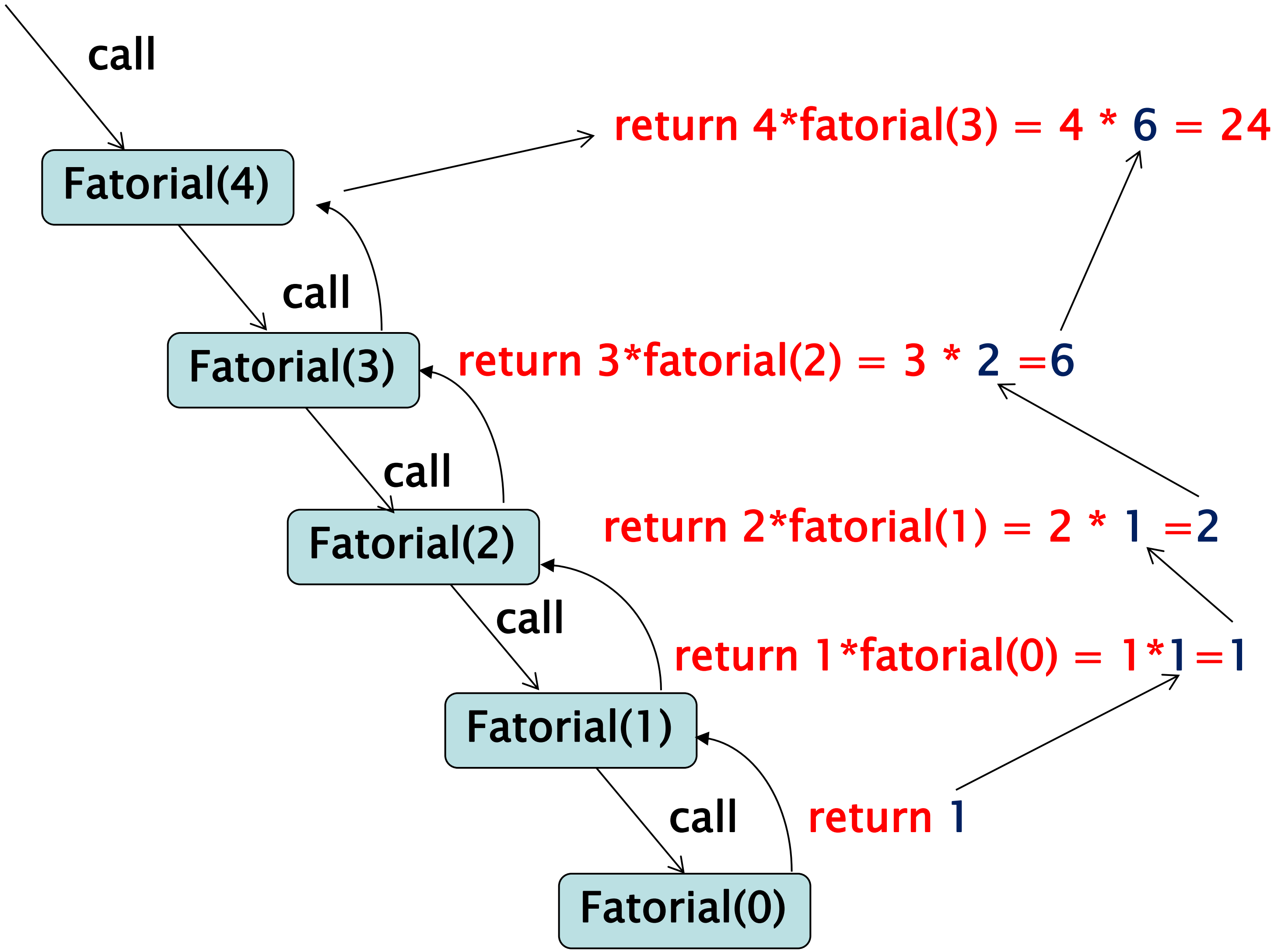
Função Fatorial - Pseudocódigo

```
Fatorial (n)

        if (n = 0)
                fatorial = 1

        else
                fatorial = n * fatorial(n-1)
```

Função Fatorial

```java
package maua;

public class fat {

	public static void main(String[] args) {
		int n=4;
		System.out.println("Fatorial(" + n + ") = " +
		fatorial(n) );

	}

	public static int fatorial(int n) {
		if (n==0)
			return 1; //caso básico
		else
			return(n*fatorial(n-1)); //caso recursivo
	}

}
```

Trace de Recursão



Recursão Linear

- Corresponde à forma mais simples de **recursão**.

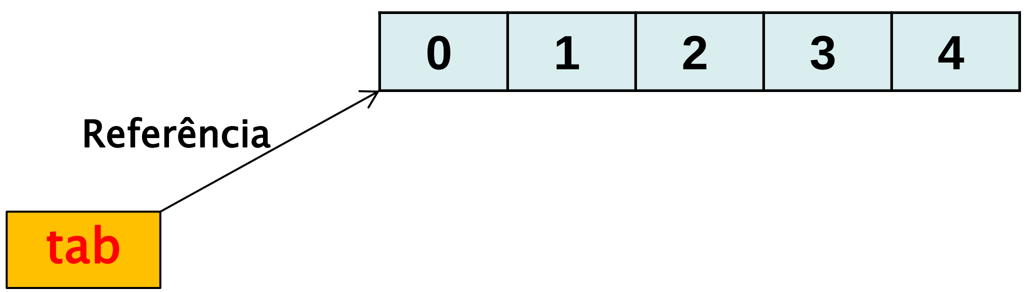
- Neste tipo de recursão **uma única chamada recursiva é feita de cada vez**.

- Este tipo de recursão é útil quando num algoritmo se deseja obter o primeiro ou último elemento de uma lista no qual os elementos restantes têm a mesma estrutura da estrutura original.

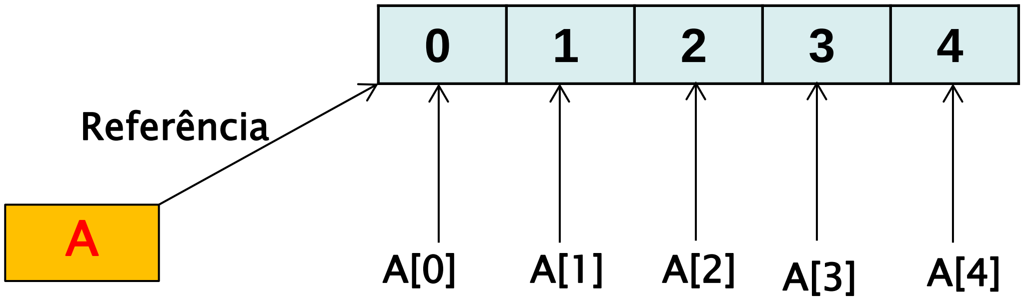
Soma dos elementos de um array

- Seja um array A, de n inteiros, no qual deseja-se obter a soma.

- Pode-se resolver este problema com o uso de recursão linear, observando-se que a soma de todos os n inteiros no array A é igual a A[0] se n = 1, ou a soma dos primeiros (n-1) inteiros em A mais o último elemento em A.



Soma dos elementos de um array



- Se $n=1$, $S(n) = a[0]$
- Se $n > 1$, $S(n) = S(n-1) + A[n-1]$

$$
\begin{aligned}
S_5 &= S_4 + A[4] \\
&= S_3 + A[3] + A[4] \\
&= S_2 + A[2] + A[3] + A[4] \\
&= S_1 + A[1] + A[2] + A[3] + A[4] \\
&= A[0] + A[1] + A[2] + A[3] + A[4]
\end{aligned}
$$

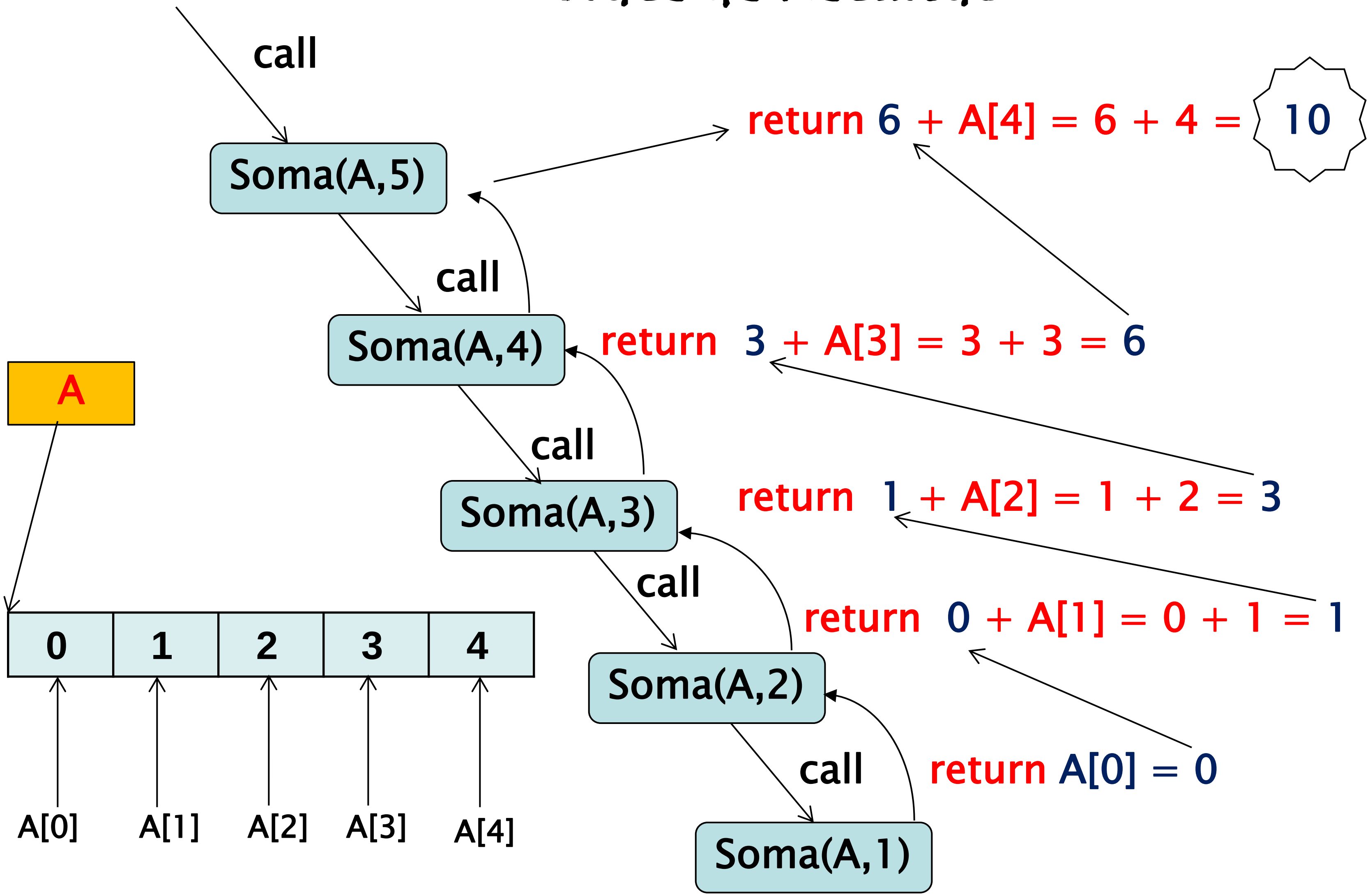
Soma dos elementos de um array
Pseudocódigo

```
soma_Rec(A,n)

        if (n = 1)
                return A[0];
        else
                return soma_Rec(A,n-1) + A[n-1];
```

Soma recursiva em array

```
package maua;

public class Soma_Array {

        public static void main(String[] args) {
                int[] tab = new int[5];
                for (int i=0;i<tab.length;i++)
                        tab[i] = i;
                        System.out.println("A soma dos elementos do
                        array é: " + soma_Rec(tab,tab.length) );
}

public static int soma_Rec(int[] A, int n) {
        if (n == 1)
                return A[0];
        else
                return soma_Rec(A,n-1) + A[n-1];
        }

}
```

Trace de Recursão



Propriedade importante da Recursão

- O método recursivo deve sempre assegurar que o procedimento **pára**.

- Isso é assegurado por meio da escrita do caso para **n = 1**;

- A chamada recursiva sempre é feita com um valor de parâmetro inferior a **n**, no caso **n-1**.

```
public static int soma_Rec(int[] A, int n) {
        if (n == 1)
                return A[0];
        else
                return soma_Rec(A,n-1) + A[n-1];
        }

}
```

Série de Fibonacci

- A sucessão de Fibonacci ou sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais, na qual os primeiros dois termos são **0** e **1**, e cada termo subsequente corresponde à soma dos dois precedentes.

- Os números de Fibonacci são, portanto, compostos pela seguinte sequência de números inteiros:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Série de Fibonacci

- Em termos matemáticos, a sequência é definida recursivamente pela fórmula abaixo, sendo os dois primeiros termos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n>1 \end{cases}$$

Série de Fibonacci -Pseudocódigo

```
Fibonacci(n)
        if (n <= 1)
                return n ;
        else
                return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
```

Série de Fibonacci

```
package maua;

public class Fibo {


        public static void main(String[] args) {
                int n=10;
                System.out.println (Fibonacci(n));

}

        public static int  Fibonacci(int n) {
                if (n <= 1) return n ;
                else
                        return (Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2));
        }

}
```

Atividade

- Defina um algoritmo recursivo para encontrar o **máximo** elemento de um array A de n elementos.

Máximo elemento de um array

```
package maua;

public class Max_Recursivo {

        public static void main(String[] args) {

                int[] tab = { 4,6,8,1,4,9,10,4} ;

                int n = tab.length;

                imprime(tab);

                System.out.println ("Maximo: "+ max_Recursive(tab,n) );

}
```

Máximo elemento de um array

```java
public static void imprime(int[] v) {
        System.out.print("Array: ");
        for (int i=0; i<v.length; i++) {
                System.out.print ( v[i] + "  ");
        }
        System.out.println("");
}
```

Máximo elemento de um array

```
public static int max_Recursive(int[] A,  int n) {

        if (n == 1) return A[0];

        else {
                int x = max_Recursive(A,n-1);

                if (x < A[n-1])

                        return A[n-1];

                else
                        return x;
        }
}
```

Atividade

- Considere a função abaixo:

```
Func (int a)
        if (a < 2 )
                return 1
        else
                return (a-1) * Func(a-1)
```

O que faz esta função ?

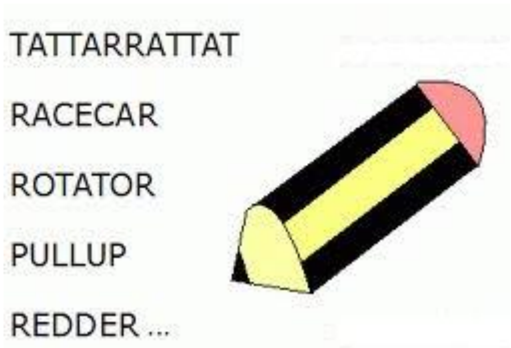
Atividade

```
package maua;

public class Exer_Recur1 {

        public static void main(String[] args) {

        int n = 5;
        System.out.println("\n" + Func(n) ) ;


        }

        public static int Func (int a) {
                if (a < 2 )
                        return 1;
                else
                return (a-1) * Func(a-1);
        }
}
```

Atividade

- Escreva uma implementação Java que recebe do usuário um **String** e chama uma **<u>função recursiva</u>** que <u>retorna um valor booleano</u> representando **true** se o String corresponder a uma **Palíndrome** ou **false** caso contrário.

- Exemplo de Palíndrome: A B C C B A X Y Z A Z Y X



Palíndrome Recursiva

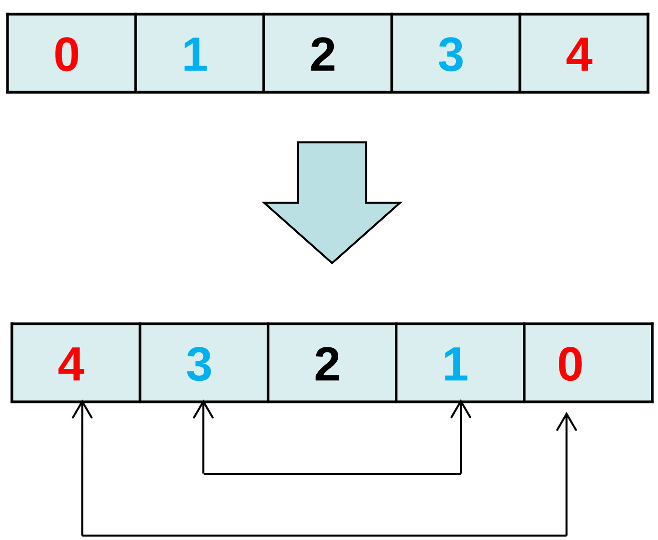
```
package maua;
import java.util.*;

public class Palindrome {

  public static void main(String[] args) {

        Scanner sc = new Scanner(System.in);
        System.out.println("Digite um String: ");
        String x = sc.nextLine();

        if ( isPalindrome(x) )
                System.out.println("O string " + x + " é uma PALÍNDROME...");
        else
                System.out.println("O string " + x + " não é uma PALÍNDROME...");
}
```

Palíndrome Recursiva

```
public static boolean isPalindrome(String s) {

        if (s.length() <= 1) return true;
        else  {
                if (s.charAt(0) != s.charAt((s.length() - 1)) )
                        return false;
                else
                        return isPalindrome( s.substring(1,s.length()-1) ) ;
              }
        }

}
```

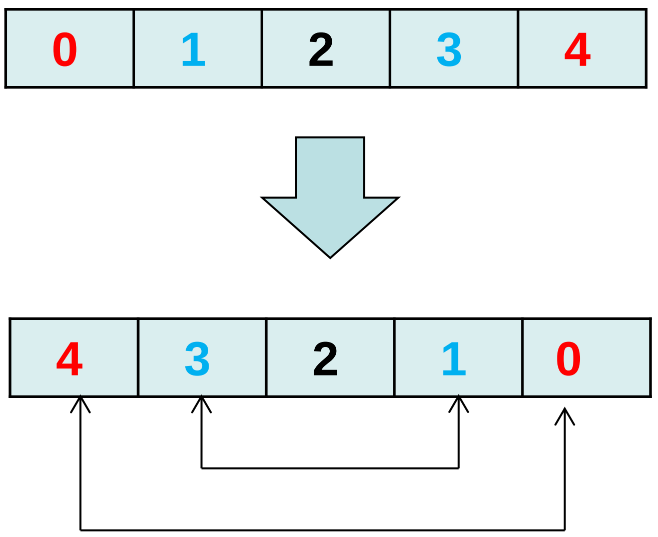
Atividade

- Escreva uma implementação Java que consiste em reverter os n elementos de um array, de modo que o primeiro elemento torna-se o último, o segundo elemento o penúltimo, e assim por diante.



Revertendo os elementos de um array com Recursão Linear

- O problema consiste em reverter os n elementos de um array, de modo que o primeiro elemento torna-se o último, o segundo elemento o penúltimo, e assim por diante.



Revertendo os elementos de um array com Recursão Linear
Pseudocódigo

```
reverte_array(A,i,j) {

        if (i<j) {
                    swap(v,i,j);
                    reverte_array(v, i+1, j-1);
        }
}
```

Revertendo os elementos de um array com Recursão Linear

```java
package maua;

public class Recur02 {


        public static void main(String[] args) {

                int[] tab = new int[6];
                for (int i=0; i<tab.length; i++) {
                tab[i] = i;
        }

        imprime(tab);

        reverte_array(tab,0,tab.length-1);

        imprime(tab);


}
```

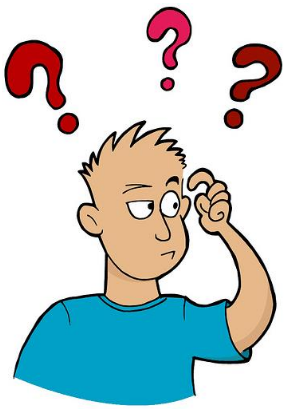
Revertendo os elementos de um array com Recursão Linear

```
public static void reverte_array(int[] v, int i, int j) {

        if (i<j) {
                    swap(v,i,j);
                    reverte_array(v, i+1, j-1);
        }
}

public static void swap(int[] v, int i, int j) {
        int trab = v[i];
        v[i] = v[j];
        v[j] = trab;

}
```

Revertendo os elementos de um array com Recursão Linear

```
public static void imprime(int[] v) {

        System.out.print("Array: ");

        for (int i=0; i<v.length; i++) {
                System.out.print ( v[i] + "  ");
        }
        System.out.println("");

        }

}
```

Como analisar Algoritmos Recursivos?



Recorrência

- ✓ Algoritmos Recursivos, em geral, são muito elegantes;
- ✓ Porém, a análise de Algoritmos Recursivos é mais trabalhosa, uma vez que se emprega uma Equação de Recorrência;
- ✓ Para se analisar o consumo de tempo de um algoritmo recursivo é necessário resolver-se uma equação de Recorrência;
- ✓ Uma Equação de Recorrência define sentenças matemáticas que o algoritmo deve atender em tempo de execução;
- ✓ Por exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 7 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

- ✓ Na análise recursiva do algoritmo, deve-se contar cada comparação, referência à arrays, chamadas recursivas e retornos de funções como operações básicas (**Modelo de Knuth**).

Recorrência

- O exemplo clássico de Recorrência, provavelmente o mais famoso, é a fórmula de Fibonacci:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Derivando Fórmula Explícita a partir da Fórmula de Recorrência

- ✓ Embora uma fórmula de recorrência nos dê uma boa ideia de como um determinado termo está relacionado com o anterior, ela não nos ajuda a encontrar – de forma direta – um determinado termo sem passar pelos termos relacionados na recorrência;

- ✓ Essa fórmula explícita fornece uma melhor visão da ordem de complexidade do algoritmo. Por exemplo, **prova-se** na série de Fibonacci que:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \\ 1, & \text{se } n=1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Fórmula Explícita

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Ordem de Complexidade Exponencial

Derivando Fórmula Explícita a partir da Fórmula de Recorrência

- ✓ Outro exemplo clássico de Recorrência é o cálculo do Fatorial de um número natural n;

$$\text{fatorial}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n.\ \text{fatorial}\ (n-1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Recorrência

$$\begin{aligned} \textbf{Fatorial(n)} &= n\ .\ \text{Fatorial}\ (n-1) \\ &= n\ .\ (n-1)\ .\ \text{Fatorial}(n-2) \\ &= n\ .\ (n-1)\ .\ (n-2)\ .\ \text{Fatorial}\ (n-3) \\ &= \ .\ .\ . \\ &= n\ .\ (n-1).(n-2)\ .\ .\ .\ \text{Fatorial}(0) \\ &= n\ .\ (n-1).(n-2)\ .\ .\ .\ 1 = n! \end{aligned}$$

Fórmula Explícita

Portanto, o algoritmo fará n multiplicações;
Logo, $O(n) = n$

QualitSys

O que significa Resolver uma Recorrência ?

Resolver uma Recorrência

- ✓ Resolver uma Recorrência significa encontrar uma **fórmula explícita** que forneça o valor da função diretamente em termos de seu argumento.

Derivando Fórmula Explícita a partir da Fórmula de Recorrência

- ✓ Embora uma fórmula de recorrência nos dê uma boa ideia de como um determinado termo está relacionado com o anterior, ela não nos ajuda a encontrar – de forma direta – um determinado termo sem passar pelos termos relacionados na recorrência;
- ✓ Uma das formas mais simples de se resolver a recorrência é pelo método da **Substituição**.

Método da Substituição

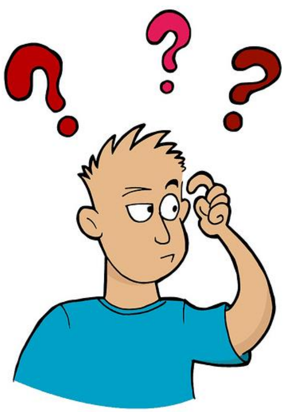
- ✓ A solução de uma equação de recorrência por substituição requer uma prévia instância da fórmula para ser substituída na equação dada;
- ✓ O processo é continuado até sermos capaz de alcançar a condição inicial;

Exemplo

✓ Resolver a seguinte relação de **Recorrência** por substituição:

$a_n = 2 \times a_{n-1} + 3 \; ; \; n \geq 2$

$a_1 = 2 \; ; \; n = 2$



QualitSys

Exemplo

- ✓ Resolver a seguinte relação de **Recorrência** por substituição:

$$a_n = 2 \times a_{n-1} + 3 \; ; \; n \geq 2$$

$$a_1 = 2 \; ; \; n = 2$$

- ✓ Desenvolvimento da Série:

  - ❖ $a_1 = 2$
  - ❖ $a_2 = 2 \times a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = 2 \times 2 + 3 \Rightarrow a_2 = 7$
  - ❖ $a_3 = 2 \times a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = 2 \times 7 + 3 \Rightarrow a_3 = 17$
  - ❖ $a_4 = 2 \times a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 2 \times 17 + 3 \Rightarrow a_4 = 37$

Exemplo

✓ Resolver a seguinte relação de **Recorrência** por substituição:

$$a_n = 2 \times a_{n-1} + 3 \; ; \; n \geq 2 \qquad (1)$$

$$a_1 = 2 \; ; \; n = 2$$

✓ Aplicando o método da Substituição, tem-se:

$$\mathbf{a_{n-1} = 2 \times a_{n-2} + 3} \qquad (2)$$

$$\mathbf{a_{n-2} = 2 \times a_{n-3} + 3} \qquad (3)$$

✓ Substituindo-se (2) em (1), tem-se:

$$a_n = 2 \times [\mathbf{2 \times a_{n-2} + 3}] + 3 \; ; \qquad (4)$$

✓ Substituindo-se (3) em (4), tem-se:

$$a_n = 2 \times [\mathbf{2 \times (2 \times a_{n-3} + 3) + 3}] + 3 \; ;$$

QualitSys

Exemplo

- ✓ $a_n = 2 \times [2 \times (2 \times a_{n-3} + 3) + 3] + 3$;

  $a_n = 2 \times [2 \times 2 \times a_{n-3} + 2 \times 3 + 3] + 3$;

  $a_n = 2 \times 2 \times 2 \times a_{n-3} + 2 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 + 3$;

  $a_n = 2 \times 2 \times 2 \times a_{n-3} + 3 \times (2 \times 2 + 2 + 1)$;

  $a_n = 2^3 \times a_{n-3} + 3 \times (2^2 + 2^1 + 2^0)$;

- ✓ Assim, tem-se

$$a_n = 2^k \times a_{n-k} + 3 \times (\underline{2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots 2^{k-1}}) \; ; \qquad (5)$$

Progressão Geométrica de razão 2 de 0 a k−1 (k elementos) , com o primeiro elemento $2^0 = 1$;

Soma dos elementos de uma Progressão Geométrica de razão q

1, 2, 4, 8, 16, ...

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots 2^{k-1}$

- q=2
- k elementos (0 a k−1)
- a1 = 1

$$S_n = \frac{a1 \, . \, (q^k - 1)}{q - 1}$$

Soma dos Elementos de uma Progressão Geométrica

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots 2^{k-1} = \frac{1 \, . \, (2^k - 1)}{2 - 1} = \frac{(2^k - 1)}{1} = 2^k - 1 \qquad (6)$$

Exemplo

- ✓ Substituindo-se (6) em (5), tem-se:

$$a_n = 2^k \text{ x } a_{n-k} + 3 \text{ x } (2^k - 1) \qquad (7)$$

- ✓ Se considerarmos n – k = 2, tem-se k = n – 2
- ✓ Sabe-se que $a_2 = 2$
- ✓ Assim, substituindo-se em (7) tem-se:

$$a_n = 2^{n-2} \text{ x } a_2 + 3 \text{ x } (2^{n-2} - 1)$$

$$a_n = 2^{n-2} \text{ x } 2 + 3 \text{ x } (2^{n-2} - 1)$$

$$a_n = 2^{n-1} + 3 \text{ x } (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} + 3 \text{ x } (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} + 3 \;.\; 2^{n-2} - 3$$

$$a_n = \tfrac{1}{2}\, 2^n + 3/4 \;.\; 2^n - 3 \Rightarrow a^n = 5/4 \;.\; 2^n - 3 \Rightarrow \mathbf{O(2^n)}$$