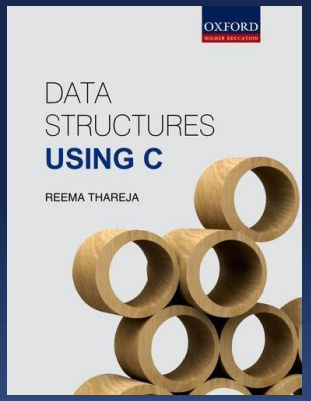
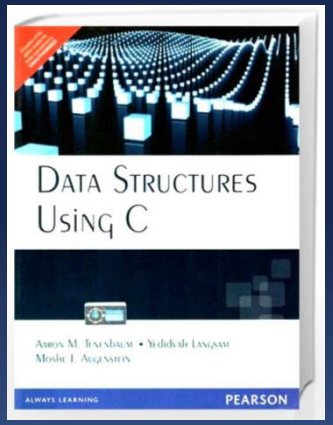
Unidade 10 – Análise de Algoritmos com Estruturas de Dados Hierárquicas

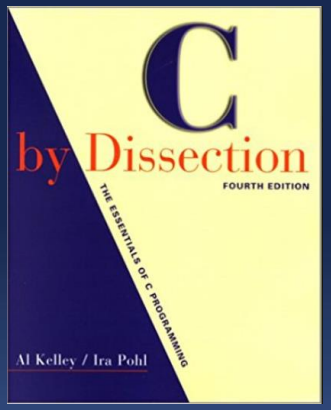
Prof. Aparecido V. de Freitas
Doutor em Engenharia
da Computação pela EPUSP
aparecidovfreitas@gmail.com

Bibliografia

- Algoritmos – Teoria e Prática – Cormen – Segunda Edição – Editora Campus, 2002
- Data Structures using C – Oxford University Press – 2014
- Data Structures Using C – A. Tenenbaum, M. Augensem, Y. Langsam, Pearson 1995
- C By Dissection – Kelley, Pohh – Third Edition – Addison Wesley





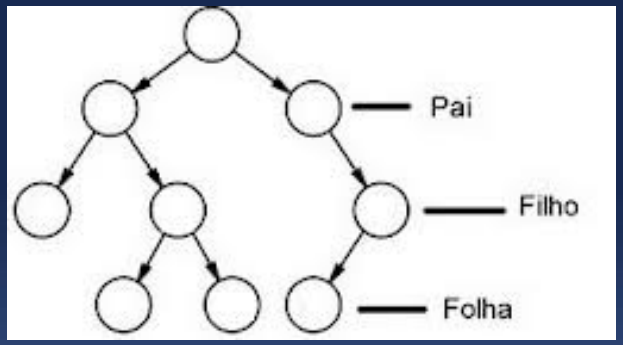


Árvores

- Árvore é uma estrutura de dados **não-linear**.
- Tem uma importância muito grande na Computação, pois disponibiliza **algoritmos muito mais rápidos** que os encontrados nas estruturas lineares.
- Têm diversas aplicações: sistemas de arquivos, interfaces gráficas, banco de dados, etc.
- Os relacionamentos encontrados em uma árvore são hierárquicos.
- Exemplo: Árvore Genealógica

Definição

- Árvore é um **tipo abstrato de dados** onde os dados são estruturados de forma hierárquica.
- Com exceção do topo, cada elemento da árvore tem um elemento pai e zero ou mais elementos filhos.
- Normalmente, o elemento topo é chamado raiz da árvore



Definição Formal

- Uma árvore **T** é um conjunto de nós que armazenam elementos em relacionamentos **pai-filho** com as seguintes propriedades:

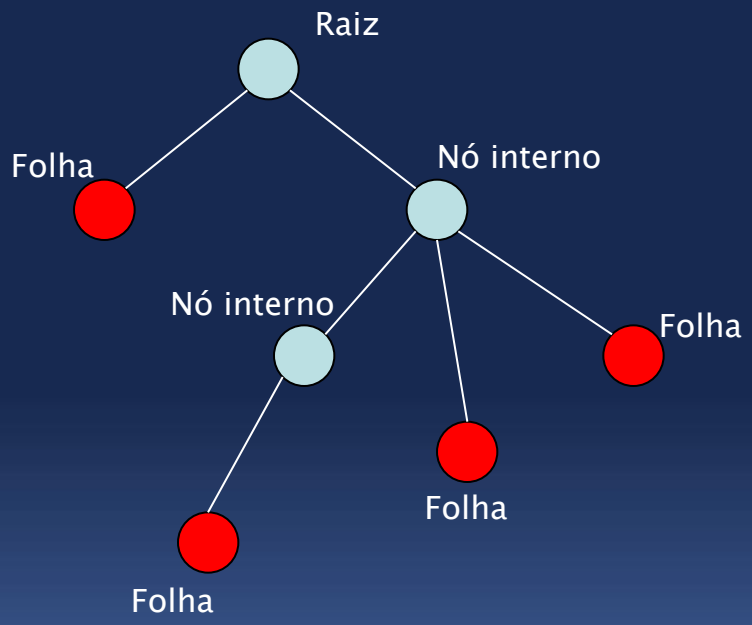
  - Se **T** não é vazia, ela tem um nó especial chamado raiz de **T**, que não tem pai.
  - Cada nó v de **T** diferente da raiz tem um único nó pai w;

- **Uma árvore pode não ter nós**. Quando isso ocorre, dizemos que a árvore T é vazia.

- Assim, uma árvore **T** ou é vazia ou consiste de um nó **raiz r** e um conjunto (possivelmente vazio) de árvores cujas raízes são filhas de **r**.

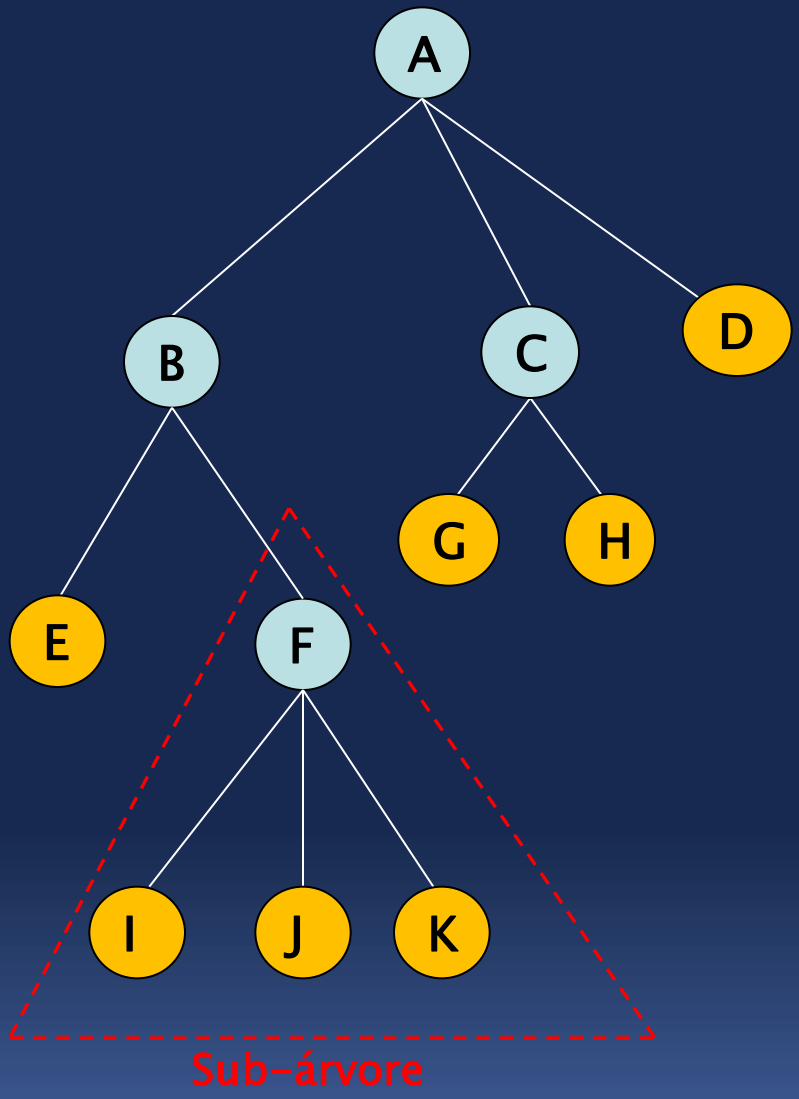
Outros relacionamentos

- Dois nós que são filhos do mesmo pai são **irmãos**.
- Um nó **v** é **externo** se não tem filhos.
- Nós externos também são conhecidos por **folhas**.
- Um nó **v** é **interno** se tem um ou mais filhos.



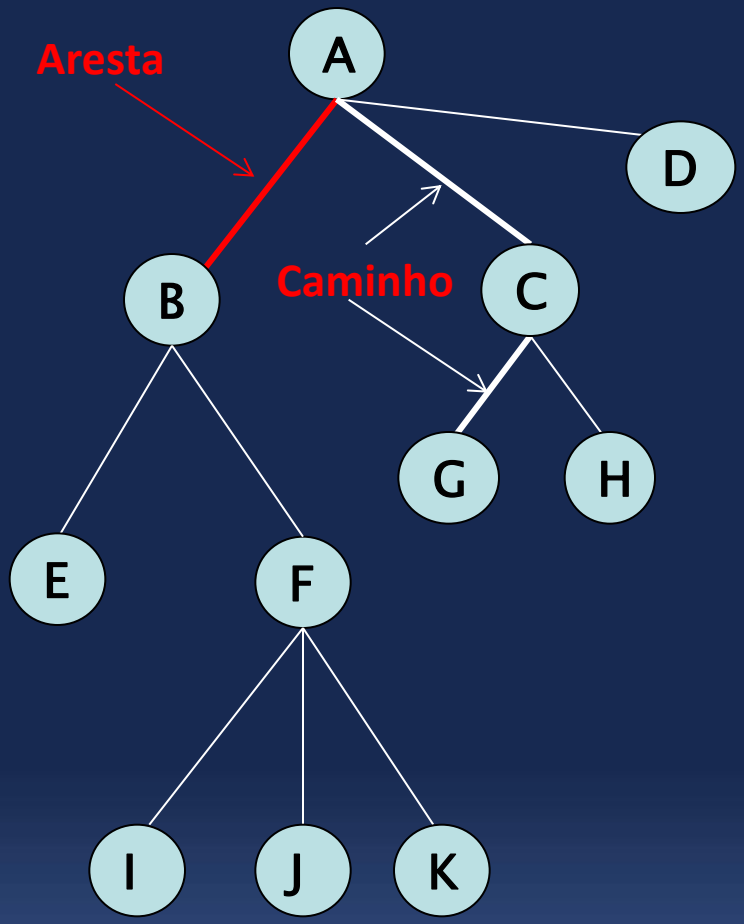
Definições

- **Raiz** (root): Nó sem pai (A)
- **Nó interno**: Nó com pelo menos um filho (A,B,C,F)
- Nó externo ou nó **folha**: nó sem filhos (D,E,G,H,I,J,K)
- **Ancestral** de um nó: pai, avô, bisavô, ...
- **Descendente** de um nó: filho, neto, bisneto, ...
- **Sub-Árvore**: árvore formada por um nó e seus descendentes.



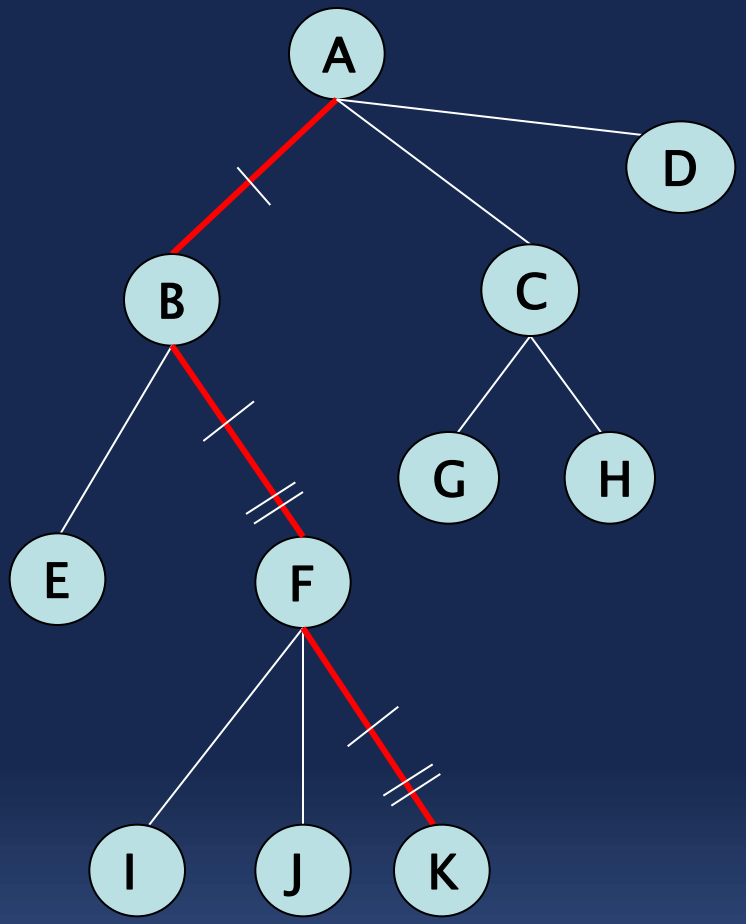
Definições

- **Aresta**: é um **par** de nós (u,v) tal que u é pai de v. (A,B)
- **Caminho**: é uma sequência de nós tais que quaisquer dois nós consecutivos da sequência sejam arestas. ((A,C),(C,G))
- **Tamanho de um caminho**: # de arestas em um caminho. (Tamanho do caminho ((A,C),(C,G)) = 2).



Definições

- **Profundidade de um nó n**: é Tamanho do caminho da raiz até o nó **n**.
  (Dept (K) = 3)
- **Profundidade da raiz: ZERO**
- **Altura de um nó**: Tamanho do caminho de **n** até seu mais profundo descendente.
  (Altura(B) = 2) .
- **Altura de qualquer folha**: ZERO
- **Altura da Árvore** = **Altura da Raiz**

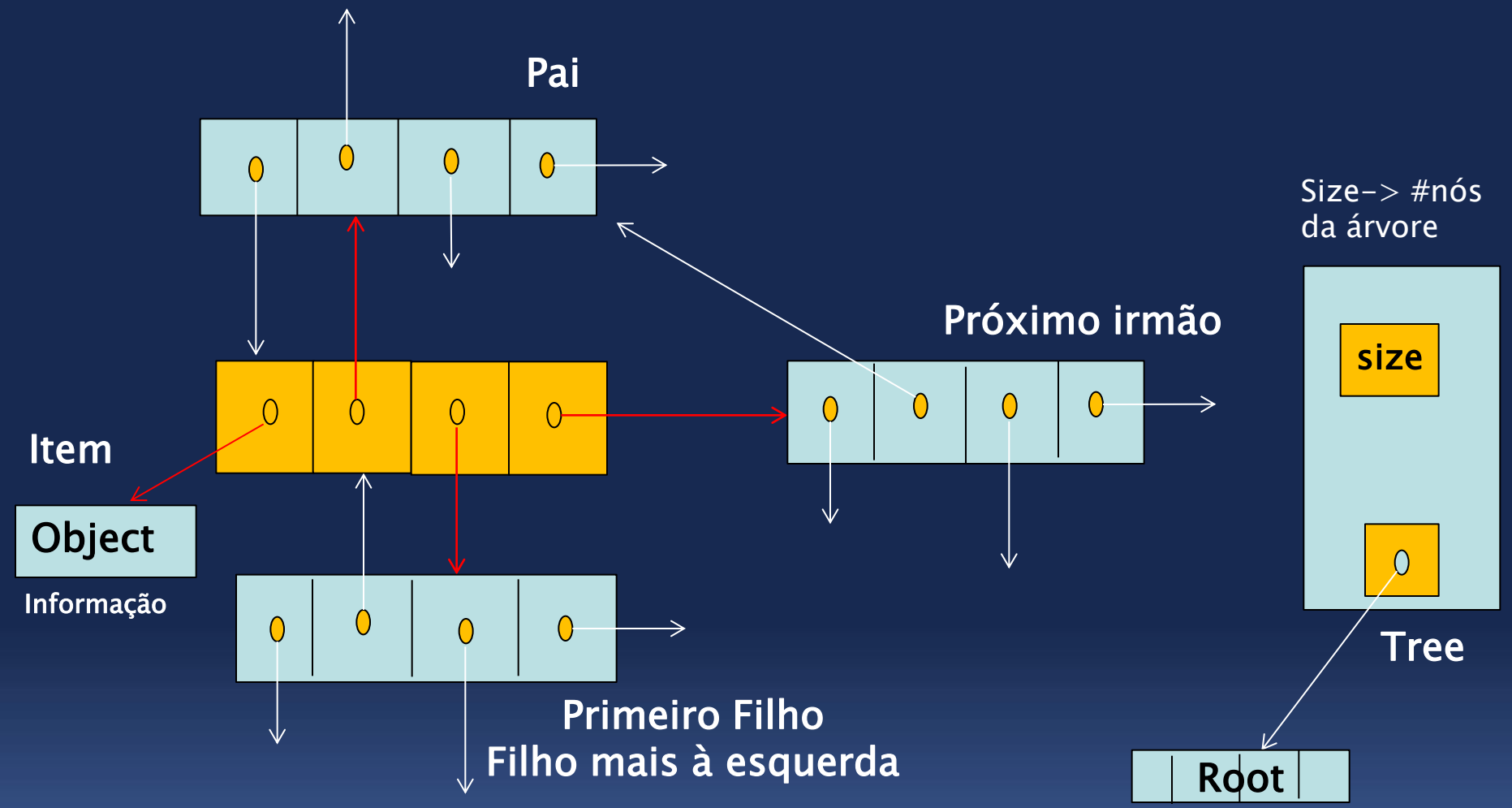


Tipos de Árvores

- Árvores Gerais (Genéricas)
- Árvores Binárias
- Árvores Binárias de Pesquisa
- Árvores de Expressão

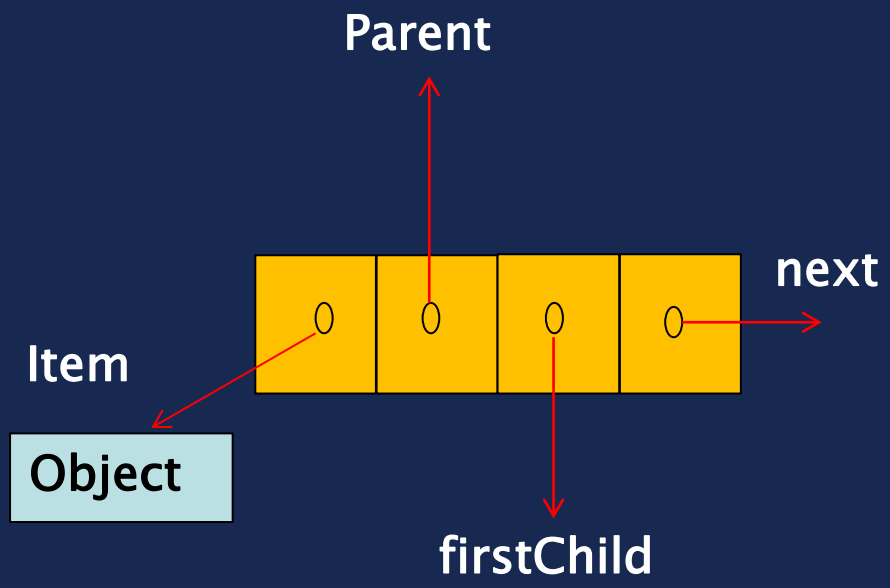
Representando Nó de Árvores Genéricas

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



Representando Nó de Árvores

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, primeiro filho e próximo irmão.



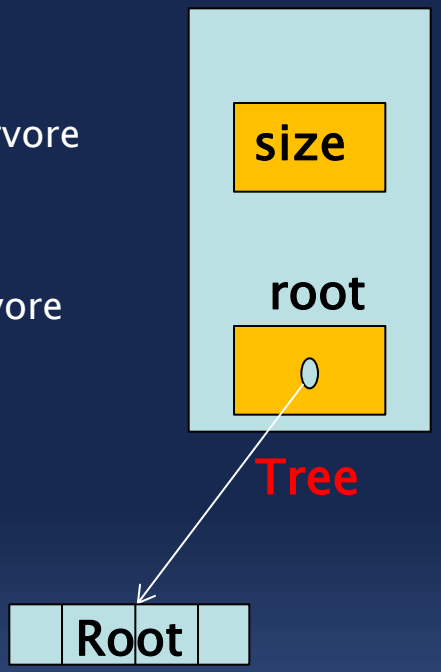

```
struct node {
        int data;
        struct node * parent;
        struct node * firstchild;
        struct node * next;

}
```

Representando Árvores

- O nó de controle possui a referência para o root e o total de nós na árvore.

size -> #nós da árvore

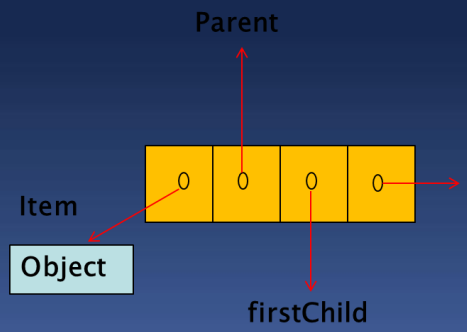
root -> raiz da árvore




```
struct Tree {
        int size;
        struct node * root;
}
```

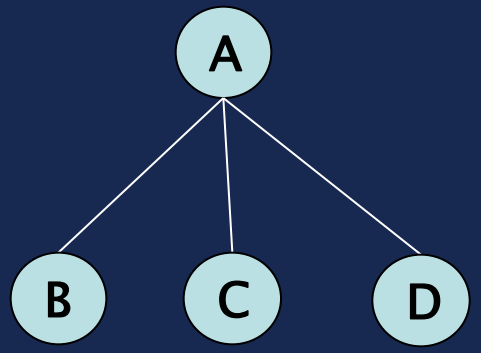
Representando Nó da árvore

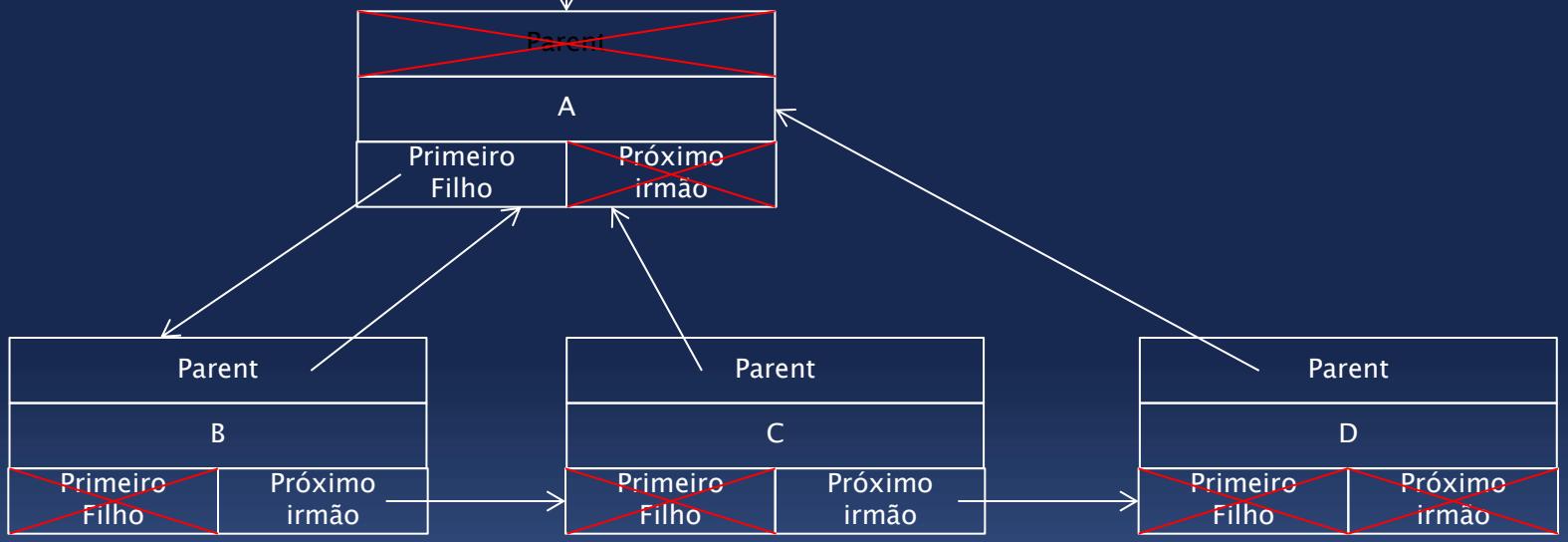
Pai	
Item	
Primeiro Filho	Próximo irmão



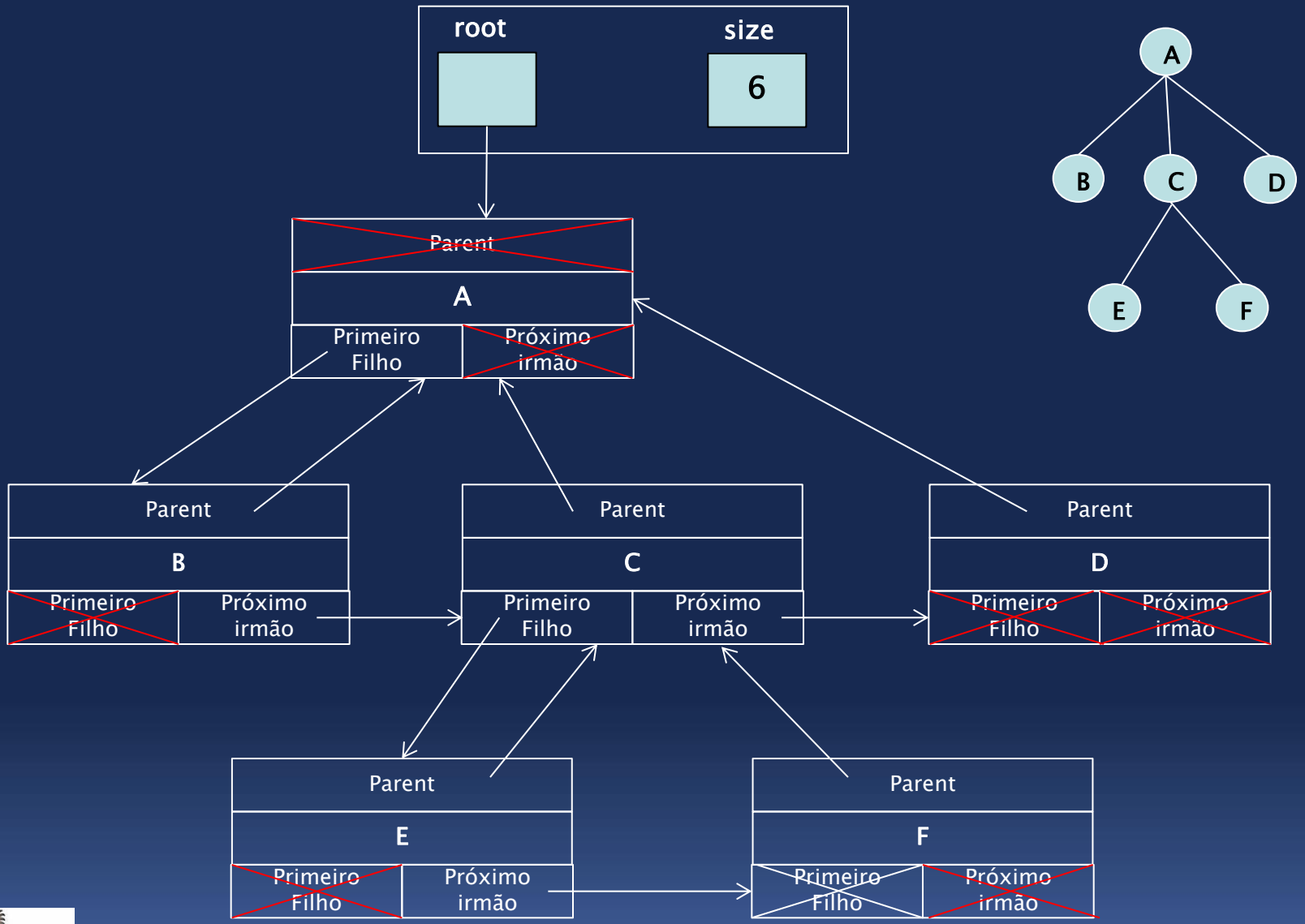
Exemplo


root
size
4


A
B
C
D


Parent
A
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
B
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
C
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
D
Primeiro Filho
Próximo irmão

Exemplo

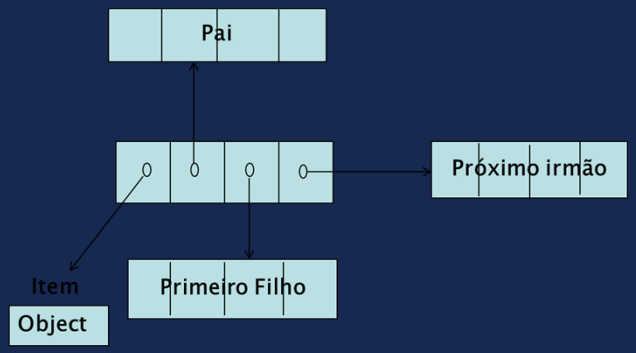

root
size
6
A
B
C
D
E
F
Parent
A
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
B
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
C
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
D
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
E
Primeiro Filho
Próximo irmão
Parent
F
Primeiro Filho
Próximo irmão

Os tipos abstratos de dados Tree e Node_Tree

ret_Root(): retorna o node root da árvore
parent(): retorna o pai do nó
imprime_Parent(): imprime o dado armazenado no pai
children(): retorna lista com os filhos do nó
imprime_Filhos(): Imprime dados dos filhos do nó
isInternal(): testa se nó é node interno
isExternal(): testa se nó é node externo
size(): retorna o número de nodes na árvore
isEmpty(): testa se a árvore é vazia
dept(): retorna o número de ancestrais do node
height(): retorna a altura do node
preorder(): retorna nodes em ordem preorder
postorder(): retorna nodes em ordem postorder
listNodes(): retorna uma coleção dos nodes da árvore
replace(v,e): altera o dado em um determinado node

Node_Tree

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct node *  node_parent(struct node * );


struct node {

        int data;

        struct node * parent;

        struct node * firstchild;

        struct node * next;

    };

    struct tree {

        int size;

        struct node * root;
    };
```



node_parent(v): retorna o pai de v

imprimeParent(): imprime o dado armazenado no pai

```
struct node * node_parent (struct node * ponteiro ) {

        if (ponteiro == NULL)
            return NULL;

    return    ponteiro->parent;
}


void imprimeParent ( struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> parent == NULL)
        printf ("\nNode root. Este node nao tem pai.....");
    else
        printf ("\nDado armazenado no node parent:  %d " , ponteiro -> parent -> data);
}
```

imprimeFilhos(): imprime os filhos do nó

```
void imprimeFilhos(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> firstchild == NULL )
        printf (" Este node nao tem filhos.....");
    else {

            struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

            while ( trab != NULL ) {

                printf ("\t %d", trab -> data );
                trab = trab -> next;
            }
    }
}
```

isInternal(): testa se nó é node interno

```
enum boolean isInternal( struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> firstchild != NULL ) {
        printf ("\nsim, o node eh interno....");
        return false;
    }
    printf("\no node nao eh interno....");
    return true;

}
```

dept(): retorna o número de ancestrais do nó

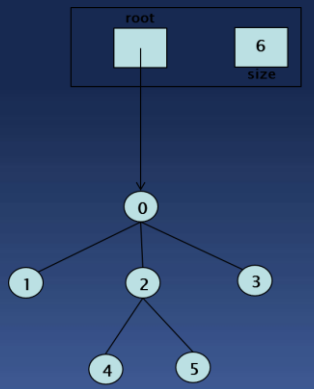
```
int dept(struct node * ponteiro)   {

    if (ponteiro -> parent == NULL )
        return 0;
    return ( 1 + dept( ponteiro -> parent));
}
```

height(): retorna a altura do nó

```
int height(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> firstchild == NULL)
        return 0;

    int h = 0;

    struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

    while (trab -> next != NULL) {

        h = maximo(h, height(trab -> next));
        trab = trab -> next;
    }

    return (h + 1) ;

}
```

Estrutura Tree

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct node *  node_parent(struct node * );


struct node {

        int data;

        struct node * parent;

        struct node * firstchild;

        struct node * next;

    };

    struct tree {

        int size;

        struct node * root;
    };
```



ret_Root(): retorna o node root da árvore.

```
struct node *   ret_Root  ()  {

        return root;

}
```

sizeTree(): retorna o número de nós da árvore

```
int sizeTree() {

    return size;

}
```

isEmpty(): testa se a árvore é vazia

```
enum boolean isEmpty() {

    if (size == 0)
        return true;
    return false;
}
```

Travessia de Árvores

- Os métodos vistos até agora permitem que se crie a árvores, seus nós e os relacionamentos (pai/filho) entre os nós criados.
- Travessia de uma árvore significa percorrer todos os nós da mesma.

Atravessando Árvores

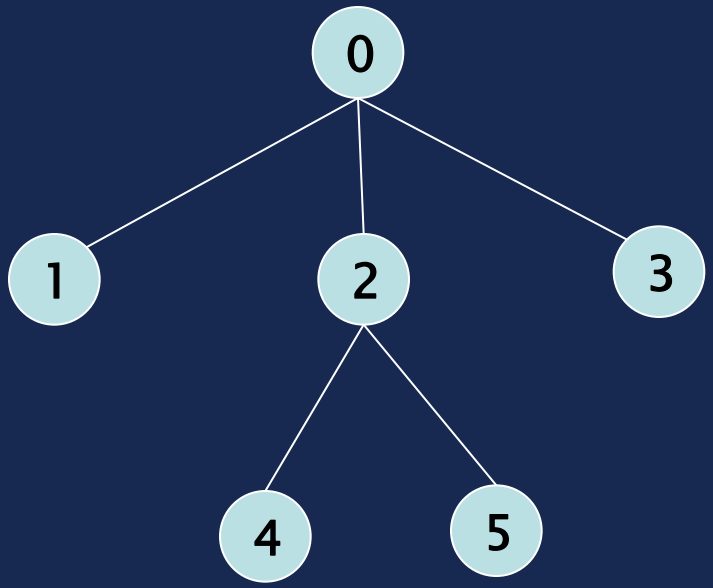
- Atravessar a árvore significa visitar **uma única vez** cada nó da árvore.
- Existem basicamente dois algoritmos de travessia: **preorder** e **postorder**.

Percurso - Preorder

- Na travessia **preorder** de uma árvore T, a raiz de T é visitada em primeiro lugar e em seguida as sub-árvores são visitadas recursivamente.

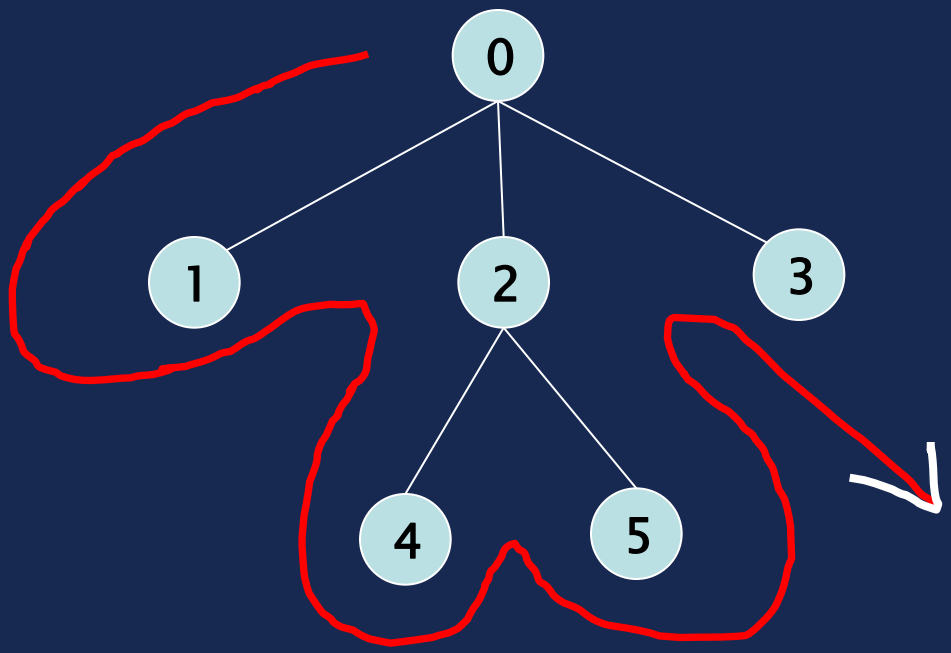
```
void preorder(struct node * ponteiro ) {

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

    struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

    while (trab != NULL) {

        preorder (trab);
        trab = trab ->next;
    }
}
```

Exercício



- Imprimir os nós da árvore com o uso da travessia preorder.

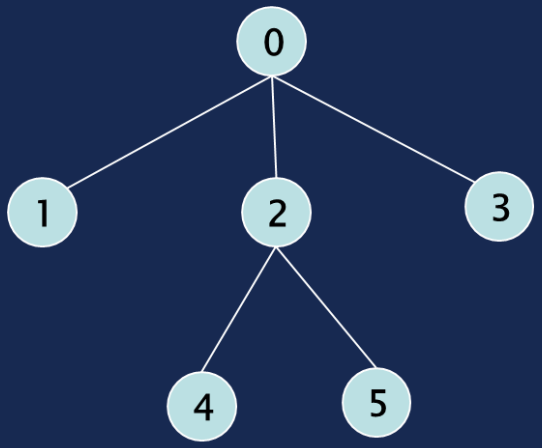
Percurso - Preorder



- Nós são visitados nesta ordem: 0 1 2 4 5 3

- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo **O(n)**, onde n é o total de nós da árvore.

Solução



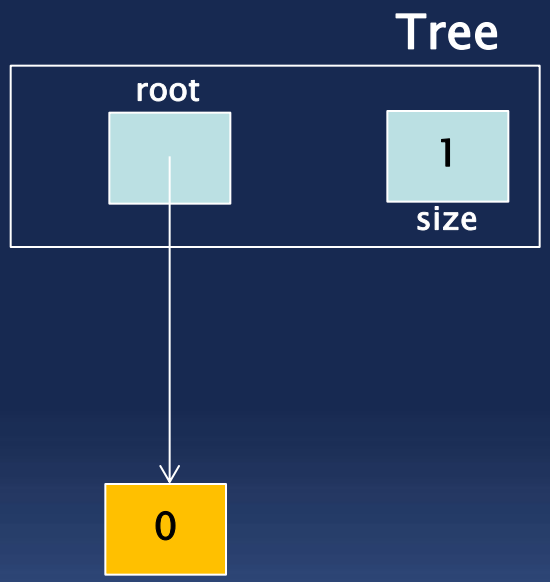
1. Construir a estrutura de dados que corresponde à árvore (estrutura de controle)
2. Criar o nó root e vinculá-lo à árvore
3. Construir os nós que compõem a árvore
4. Estabelecer os relacionamentos hierárquicos entre os nós
5. Aplicar o algoritmo de preorder na raiz da árvore.

QualitSys

Criação do nó root

```
void insert_root( int valor) {

   struct node * novo_node = cria_node(valor);

    root = novo_node;

    size = 1;
}
```

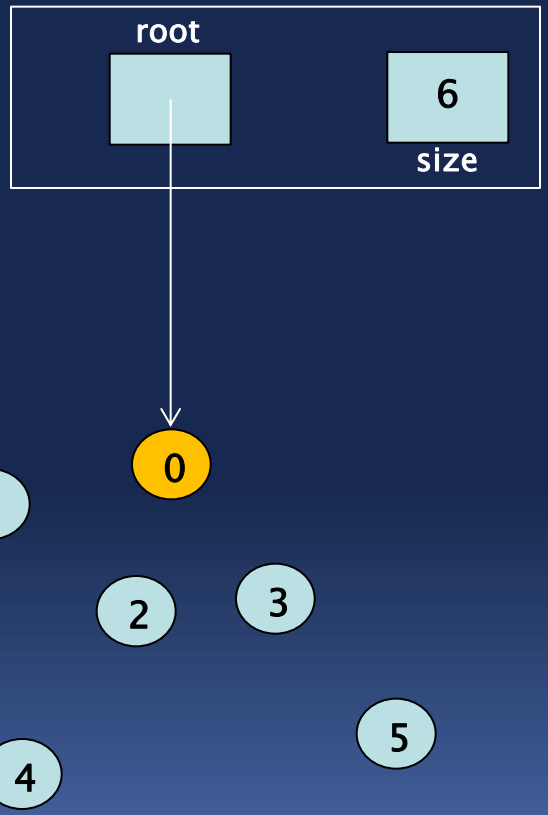
```
struct node * cria_node (int valor) {

    struct node * new_node ;

    new_node = (struct node *) malloc (sizeof (struct node));

    new_node -> firstchild = NULL;
    new_node -> next = NULL;
    new_node -> parent= NULL;
    new_node -> data = valor;

    return new_node;


}
```



QualitSys

Construção dos nós que compõem a árvore

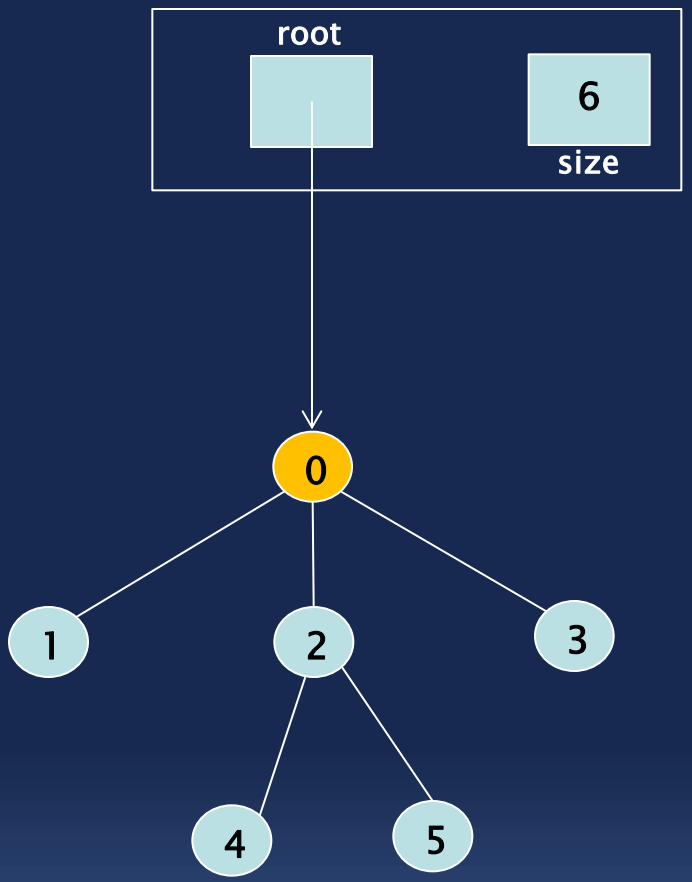
```
int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores genericas....\n");
    insert_root(0);


    struct node * no_1 = cria_node(1);
    struct node * no_2 = cria_node(2);
    struct node * no_3 = cria_node(3);
    struct node * no_4 = cria_node(4);
    struct node * no_5 = cria_node(5);
```



QualitSys

Relacionamentos hierárquicos entre os nós

```
root -> firstchild = no_1;

no_1 -> parent = root;
no_1 -> next = no_2;


no_2 -> parent = root;
no_2 -> next = no_3;

no_3 -> parent = root;

no_2 ->firstchild = no_4;
no_4 ->parent = no_2;

no_4 -> next = no_5;
no_5 -> parent = no_2;
```



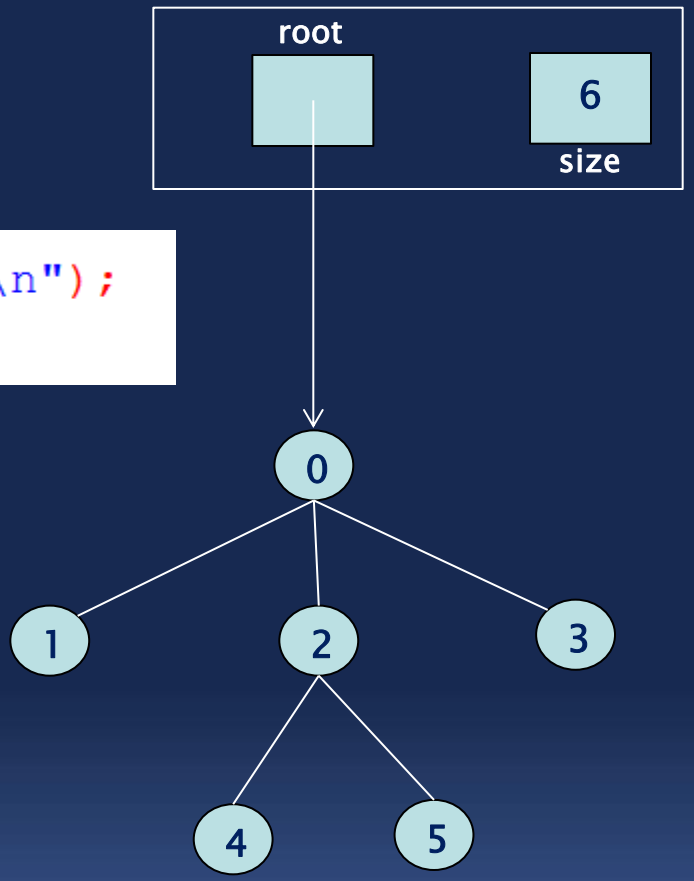
Relacionamentos hierárquicos entre os nós

```
root -> firstchild = no_1;

no_1 -> parent = root;
no_1 -> next = no_2;


no_2 -> parent = root;
no_2 -> next = no_3;

no_3 -> parent = root;

no_2 ->firstchild = no_4;
no_4 ->parent = no_2;

no_4 -> next = no_5;
no_5 -> parent = no_2;
```

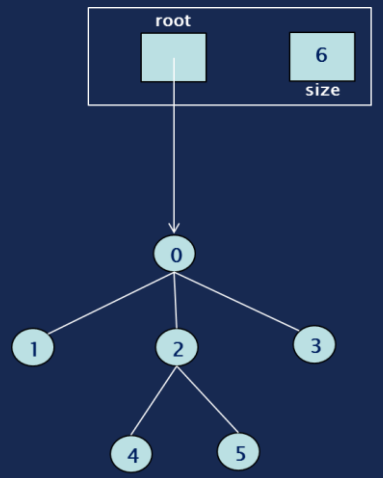
QualitSys

Algoritmo de preorder na raiz da árvore.

```
printf ("\n ****** preorder ******\n\n");
preorder(root);
```



```c
int main() {

    printf(" **** Implementacao de arvores genericas....\n");
    insert_root(0);


    struct node * no_1 = cria_node(1);
    struct node * no_2 = cria_node(2);
    struct node * no_3 = cria_node(3);
    struct node * no_4 = cria_node(4);
    struct node * no_5 = cria_node(5);

    root -> firstchild = no_1;

    no_1 -> parent = root;
    no_1 -> next = no_2;


    no_2 -> parent = root;
    no_2 -> next = no_3;

    no_3 -> parent = root;

    no_2 ->firstchild = no_4;
    no_4 ->parent = no_2;

    no_4 -> next = no_5;
    no_5 -> parent = no_2;
```

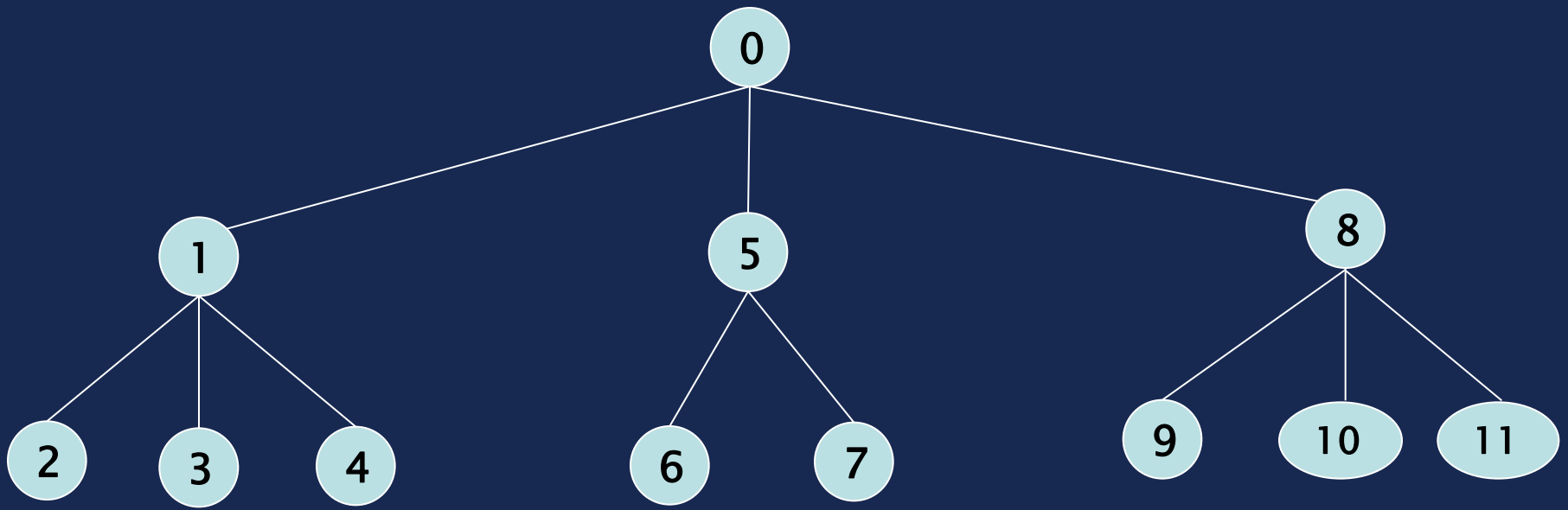



```c
printf ("\n ****** preorder ******\n\n");
preorder(root);
```

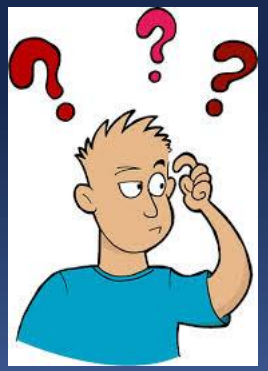
Resposta do programa:

0
1
2
4
5
3

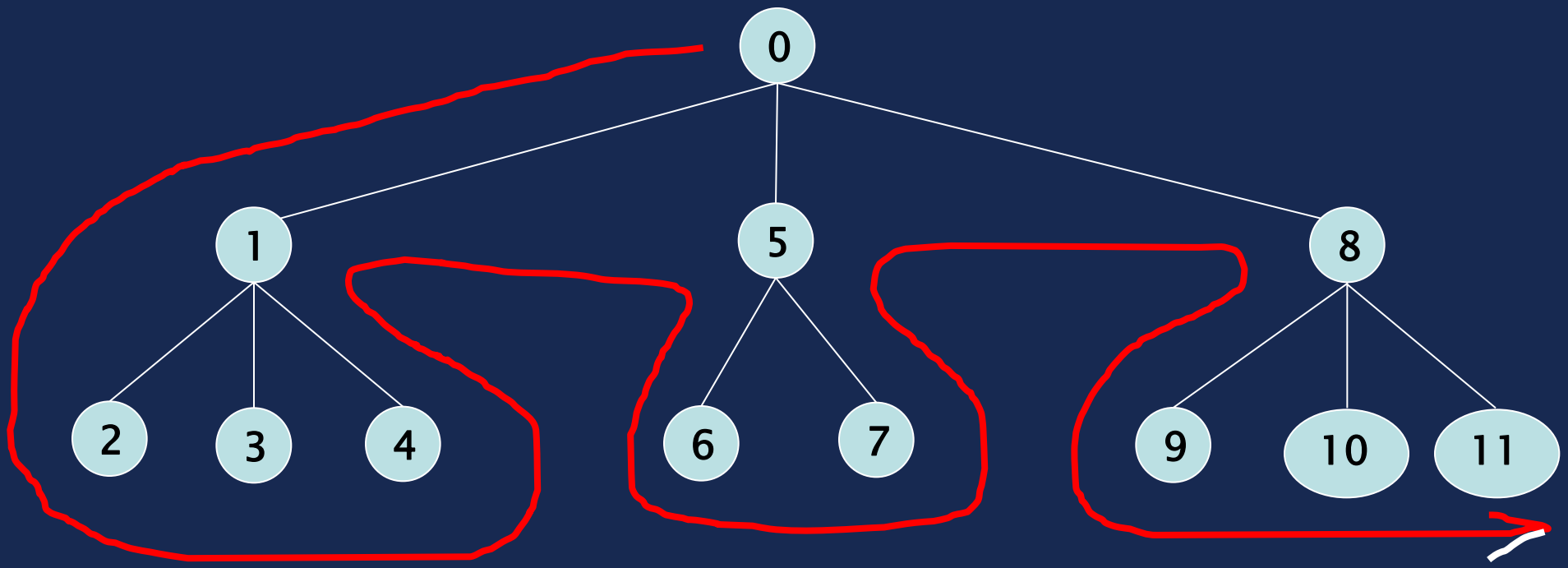
Outro exemplo



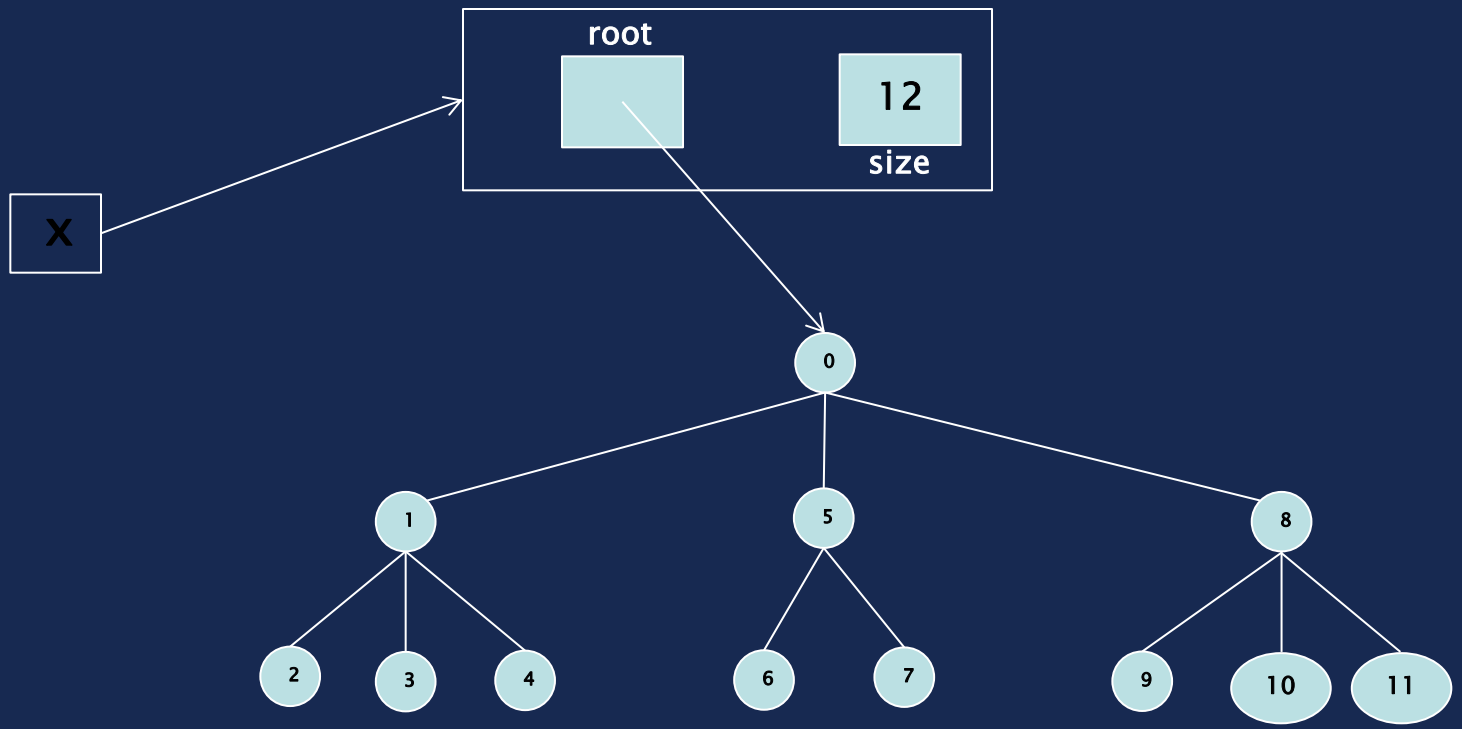
Qual o percurso preordem desta árvore ?

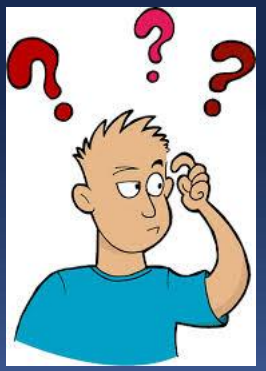


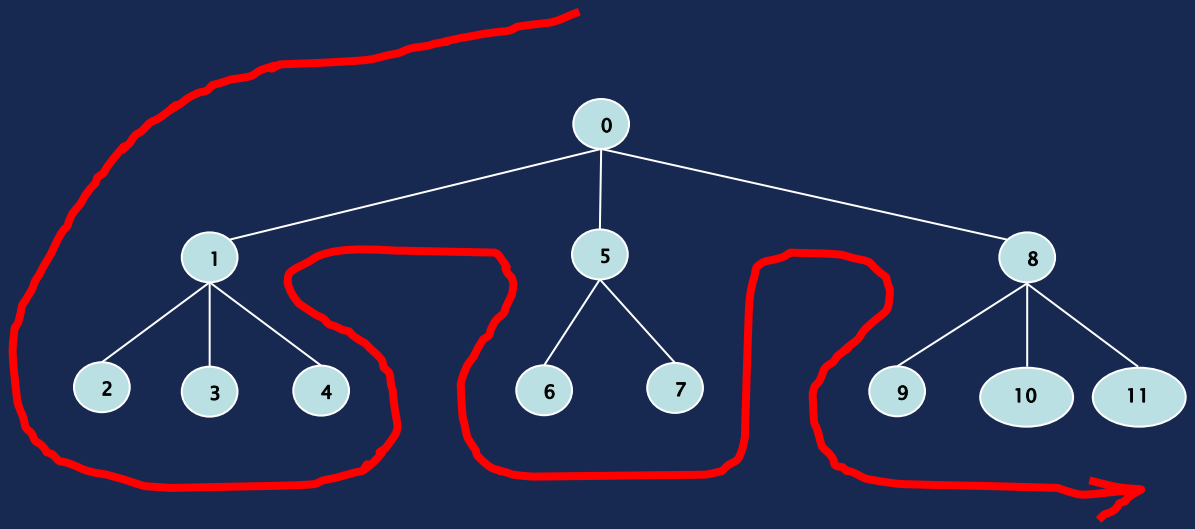
Preorder



Qual o percurso preordem desta árvore ?


root
12
size
X
0
1
5
8
2
3
4
6
7
9
10
11

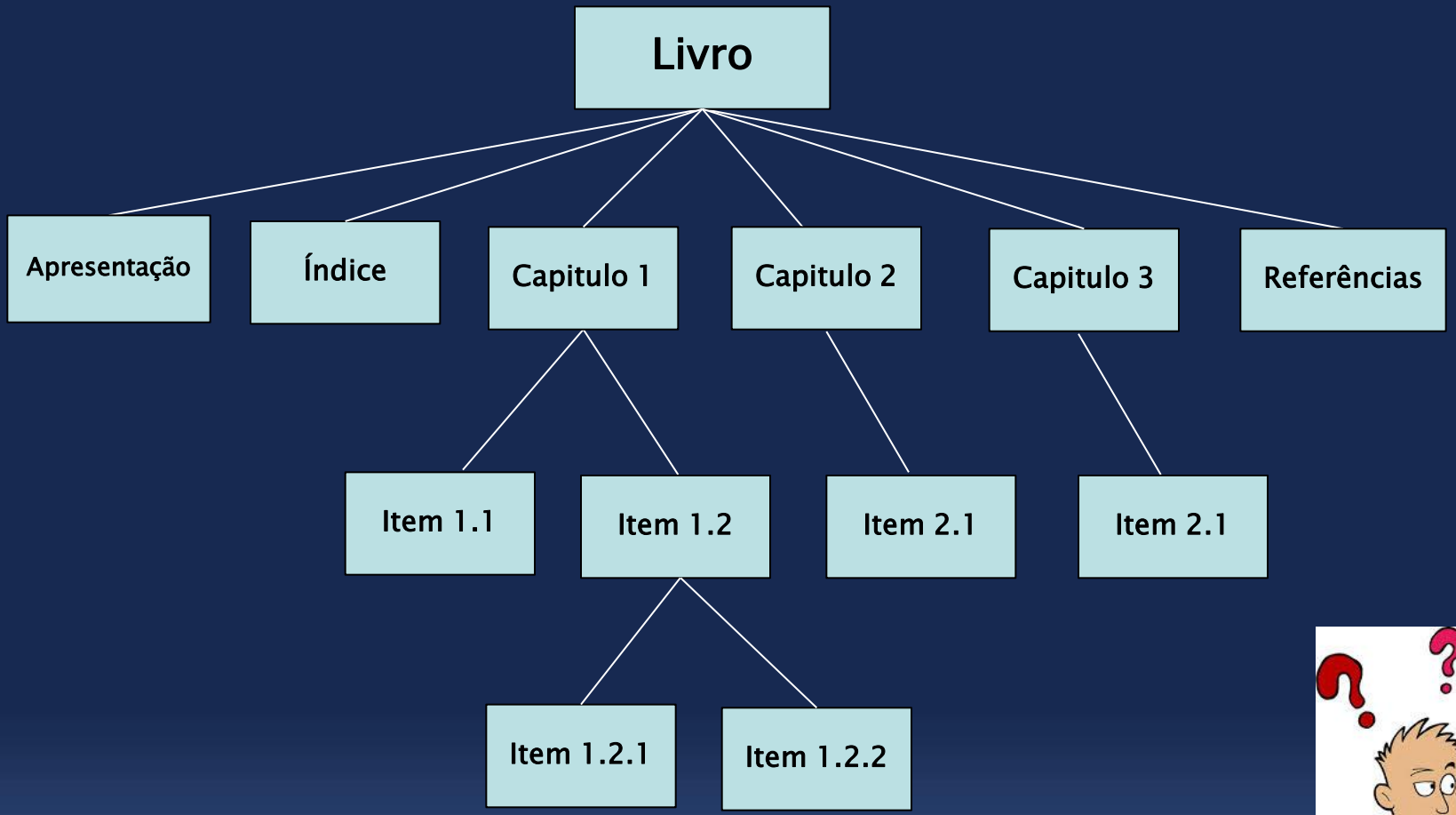


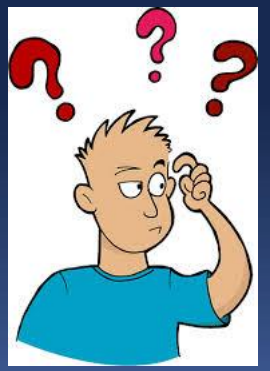


Resposta: Preorder

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Exercício





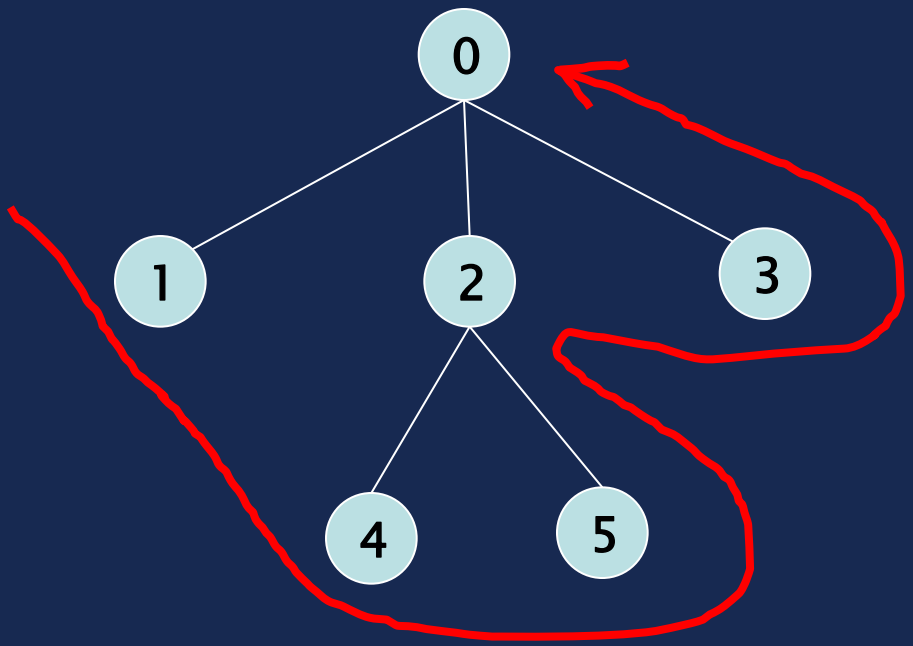
Qual o percurso preordem desta árvore ?

Percurso - Postorder

- Este algoritmo pode ser visto como o **oposto** do percurso **preorder**, pois as sub-árvores dos filhos são recursivamente atravessadas e em seguida o root é visitado.

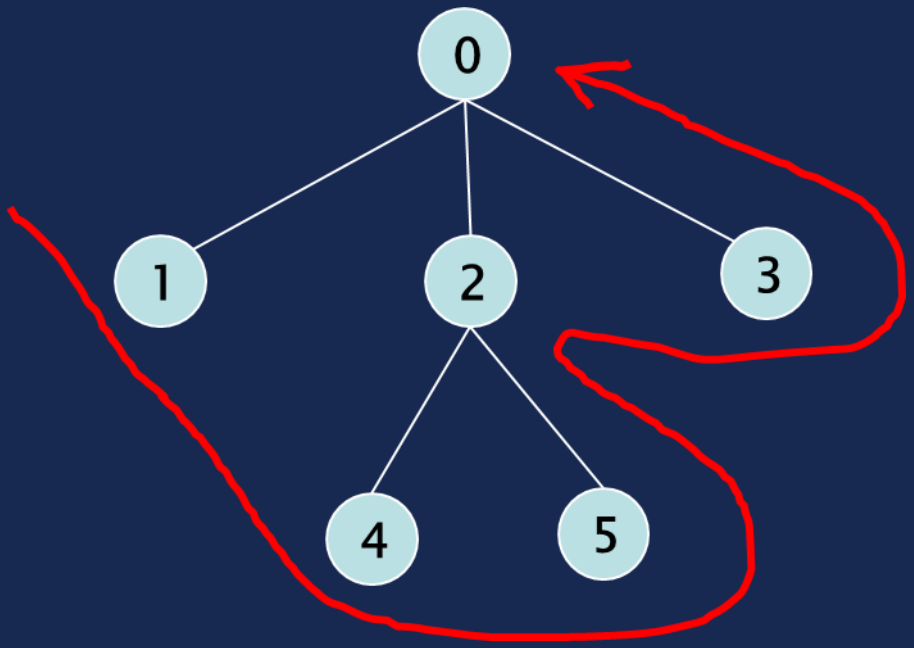
```
void posorder(struct node * ponteiro ) {

    struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

    while (trab != NULL) {

        posorder (trab);
        trab = trab ->next;
    }

    printf ("\t %d" , ponteiro -> data );

}
```

Percurso - Postorder



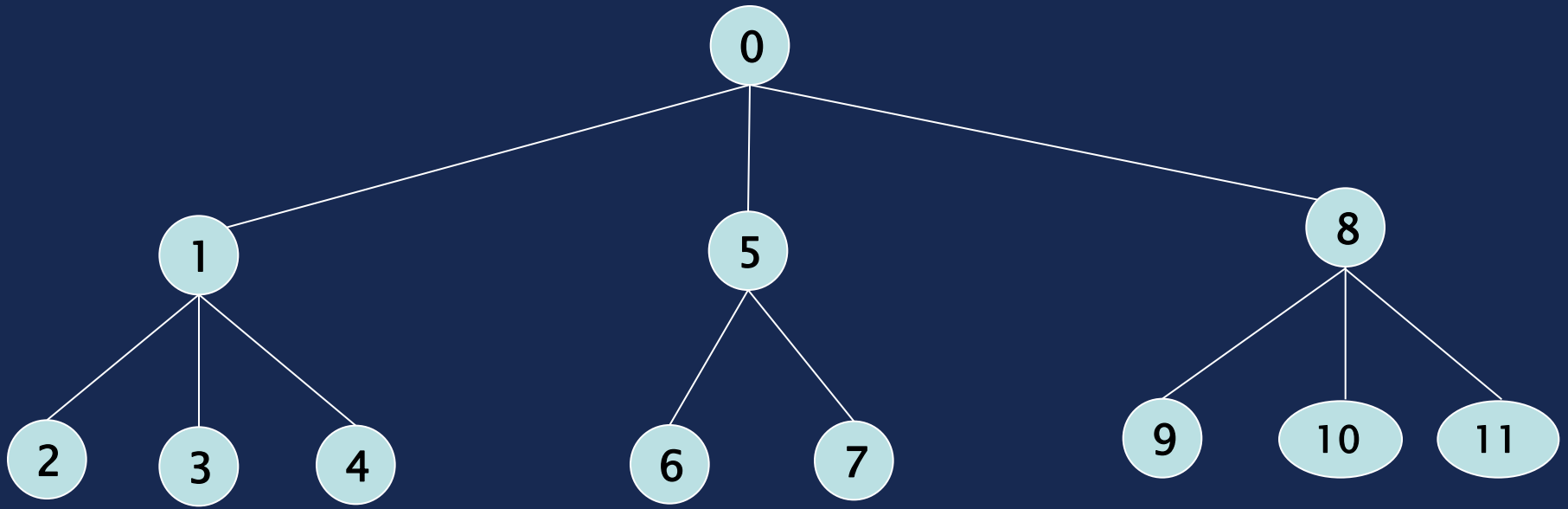
- Nós são visitados nesta ordem: 1 4 5 2 3 0

- Cada nó é visitado somente uma vez, assim o percurso preorder gasta tempo O(n), onde n é o total de nós da árvore.

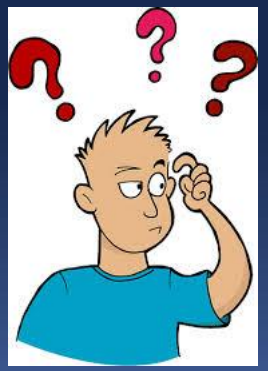


Resposta: Posorder → 1 4 5 2 3 0

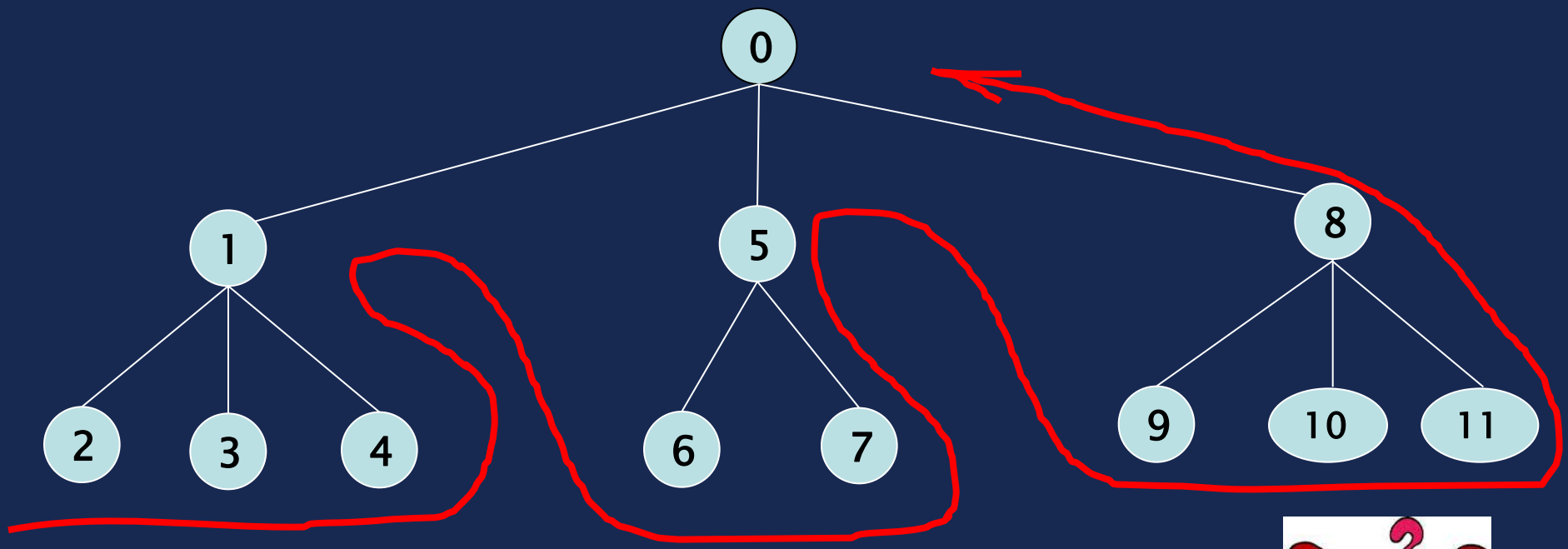
Outro exemplo



Qual o percurso postordem desta árvore ?

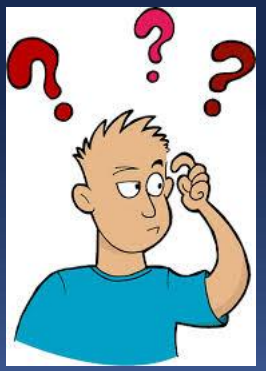


Outro exemplo



Qual o percurso postordem desta árvore ?

2 3 4 1 6 7 5 9 10 11 8 0



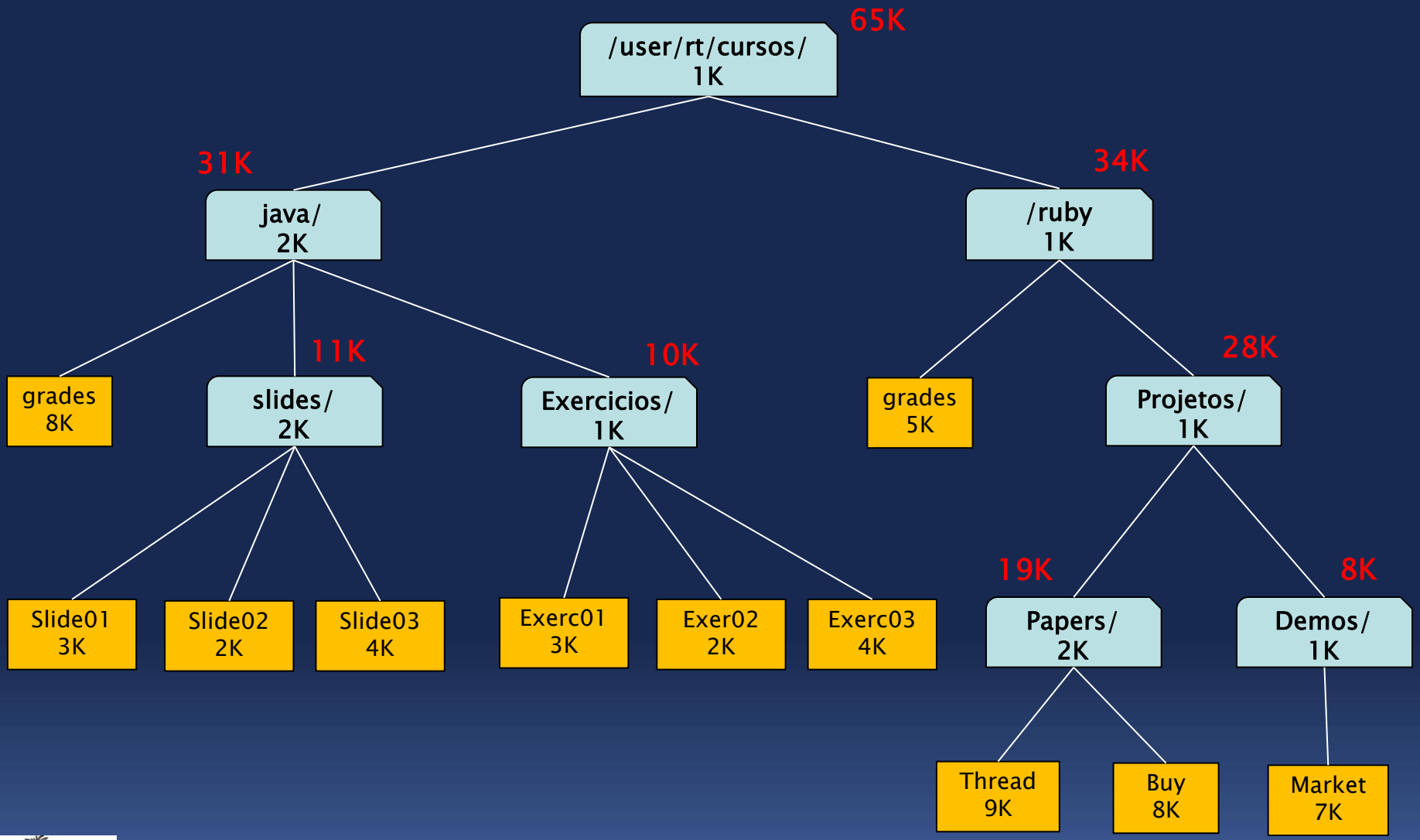
Aplicação travessia postorder

- O método **postorder** é útil para resolver problemas onde desejamos computar alguma propriedade para cada nó **v** da árvore, mas esta computação requer que a mesma computação tenha sido feita previamente para os filhos do nó **v**.

- Para exemplificar o método, considere um sistema de arquivos em árvore, onde nós externos representam arquivos e nós internos diretórios. O problema consiste em computar o espaço em disco usado por um diretório, o qual é recursivamente calculado por:

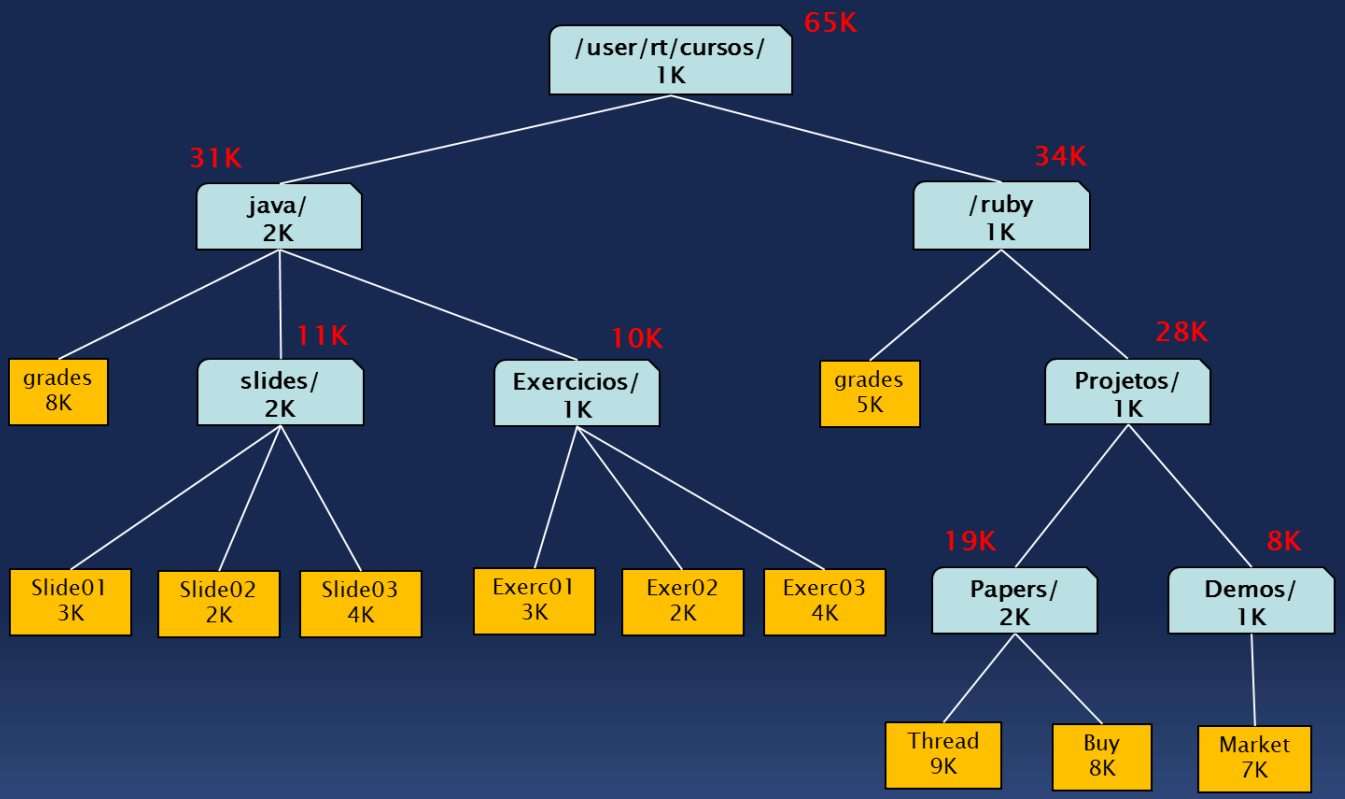
  - o tamanho do próprio diretório
  - o tamanho dos arquivos no diretório
  - o espaço usado pelos diretórios filhos

Aplicação travessia postorder



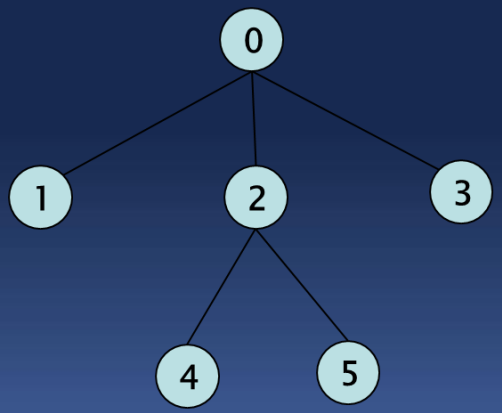
Exercício

- Escrever um código C para retornar o espaço total de bytes armazenados por um sistema de arquivos.

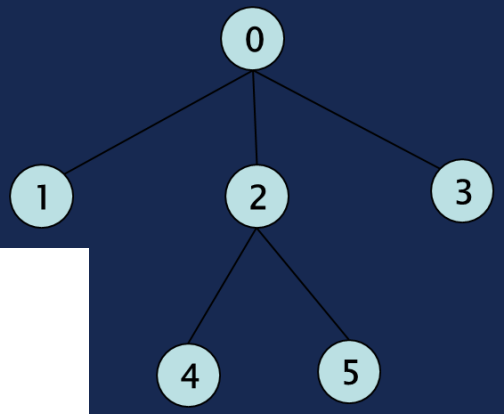


Exemplo completo

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

struct node * node_parent (struct node *);

void insert_root(int);

struct node  {

    int data;
    struct node  * parent;
    struct node  * firstchild;
    struct node  * next;
};

struct tree {

    int size;
    struct node * root;
};
```



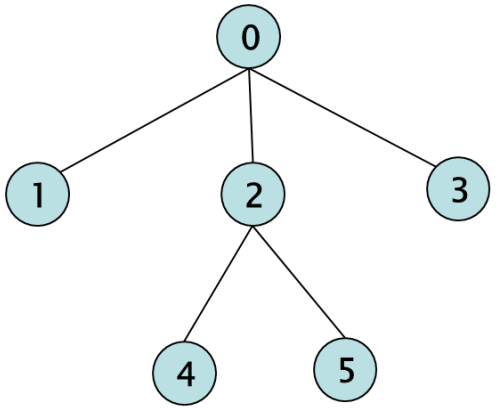
Exemplo completo




```
enum boolean {
    true = 1,
    false = 0
};

typedef enum boolean bool;

struct node * root = NULL;

int size = 0;

struct node * node_parent(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro == NULL)
        return NULL;

    return ponteiro -> parent;

}
```

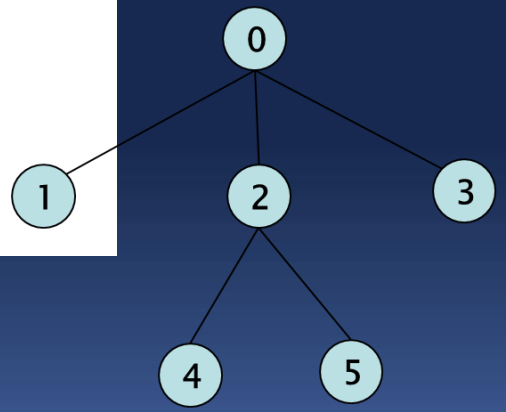
Exemplo completo

```
void imprimeParent (struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> parent == NULL)
        printf("\nNode root. Este node nao tem pai....");
    else
        printf("\\Dado armazenado no pai: %d ", ponteiro->parent->data);

}

void imprimeFilhos(struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> firstchild == NULL)
        printf(" Este node nao tem filhos...");
    else {
            struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

            while ( trab != NULL ) {
                printf("\t %d", trab -> data);
                trab = trab->next;

            }


    }
}
```



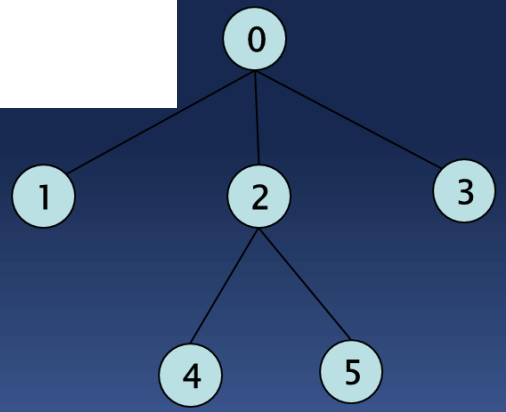
Exemplo completo

```
// ----- funcao  isInternal  -------
enum boolean isInternal (struct node * ponteiro) {
    if (ponteiro -> firstchild != NULL) {
        printf("\nsim, o node eh interno .... ");
        return false;
    }
    printf("\nO node nao eh interno....");
    return true;
}


//----------    funcao dept ---------------
int dept (struct node * ponteiro ){

    if (ponteiro -> parent == NULL)
        return 0;
    return ( 1 + dept (ponteiro -> parent ));
}
```



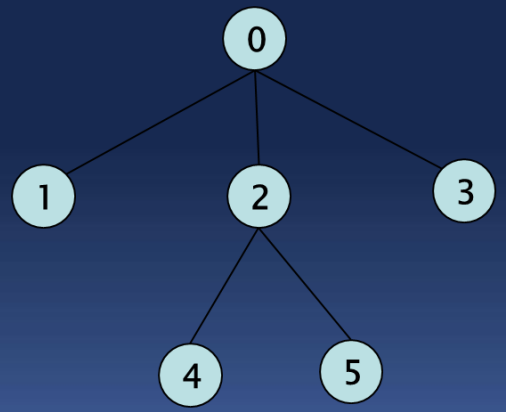
Exemplo completo

```
struct node * cria_node(int);

void insert_root (int valor) {
    printf("\nfuncao insert_root() ....");
    struct node * novo_node = cria_node(valor) ;
    root = novo_node;
    size = 1;
}
```



Exemplo completo

```
// ----- funcao  maximo -------
int maximo(int a , int b) {

    if (a >= b )
        return a;
    else
        return b;
}

// ---- funcao height() -----

int height (struct node * ponteiro) {

    if (ponteiro -> firstchild == NULL )
        return 0;

    int h = 0;

    struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

    while (trab -> next != NULL ) {

        h = maximo(h, height(trab -> next));
        trab = trab -> next;

    }

    return (h + 1);
}
```



Exemplo completo

```
struct node * cria_node(int valor) {

        struct node * new_node;

        new_node = (struct node *) malloc (sizeof (struct node) ) ;

        new_node -> firstchild = NULL;
        new_node -> next = NULL;
        new_node -> parent = NULL;
        new_node -> data = valor;

        return new_node;

    }


    void preorder (struct node * ponteiro) {

        printf("\t %d", ponteiro -> data);

        struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

        while (trab != NULL) {
            preorder(trab);
            trab = trab->next;
        }
    }

    void posorder (struct node * ponteiro) {

        struct node * trab = ponteiro -> firstchild;

        while ( trab != NULL) {
            posorder(trab);
            trab = trab -> next;

        }

        printf ("\t %d", ponteiro -> data);

    }
```

Exemplo completo

```
int main() {

    printf("\n\nImplementacao de Tree....");

    insert_root(0);

    struct node * no_1 = cria_node(1);

    struct node * no_2 = cria_node(2);

    struct node * no_3 = cria_node(3);

    struct node * no_4 = cria_node(4);

    struct node * no_5 = cria_node(5);

    root -> firstchild = no_1;

    no_1 -> parent = root;
    no_1 -> next = no_2;

    no_2 -> parent = root;
    no_2 -> next = no_3;
    no_2 -> firstchild = no_4;

    no_3 -> parent = root;

    no_4 -> parent = no_2;
    no_4 -> next = no_5;

    no_5 -> parent = no_2;
```

Exemplo completo

```
    printf("\n **** preorder **** \n\n");
    preorder(root);


    printf("\n **** posorder **** \n\n");
    posorder(root);

    printf("\n ==== altura da arvore: %d", height(root) ) ;

    return 0;

}
```