C. S. Seshadri

Diviseurs en géométrie algébrique

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A4_0>

DIVISEURS EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par C. S. SESHADRI

Dans la première partie de cet exposé, on va démontrer un théorème de SERRE sur les variétés complètes [6], suivant la méthode de GROTHENDIECK [4]. La seconde partie est consacrée aux généralités sur les diviseurs. Dans la littérature, on appelle souvent les diviseurs étudiés ici diviseurs localement principaux.

Les espaces algébriques considérés ici sont définis sur un corps K algébriquement clos. Par variété on entend un espace algébrique irréductible. Si X est un espace algébrique on note $O(X)$, $R(X)$, etc. (ou simplement O , R etc.) les faisceaux d'anneaux locaux, de fonctions régulières etc. sur X (pour définir $R(X)$ on suppose que X est une variété). Par faisceau cohérent sur X on entend un faisceau cohérent de O-modules sur X .

1. Préliminaires [4], [5] , [6] .

Si M est un module sur un anneau intègre A (commutatif et avec 1) on appelle un élément $m \in M$, élément de torsion, s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $a.m = 0$. On appelle M , module de torsion (resp. sans torsion), si chaque élément de M est un élément de torsion (resp. si $M \neq 0$ et si aucun élément non-nul de M n'est élément de torsion). Les éléments de torsion de M forment le sous-module de torsion de M (noté $T(M)$) ; si $M \neq 0$, $M/T(M)$ est un module sans torsion. Si M est un module de torsion de type fini sur A , l'idéal $\operatorname{ann} M$ de A (idéal de A formé par les éléments $a \in A$ tels que $a M = 0$) est non-nul.

Soient X un espace algébrique et F un faisceau de O-modules sur X . On appelle $\operatorname{supp} F$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $F_x \neq 0$. Si F est cohérent, $\operatorname{supp} F$ est une partie fermée de X . D'ailleurs, si X est affine, $\operatorname{supp} F$ est l'ensemble défini par l'idéal $\operatorname{ann} H^0(X , F)$ de l'algèbre affine $H^0(X , O)$, $H^0(X , F)$ étant considéré comme un module sur $H^0(X , O)$.

Un faisceau F de O-modules sur une variété X est dit faisceau de torsion (resp. faisceau sans torsion) si pour chaque $x \in X$, le module F_x sur l'anneau O_x est un module de torsion (resp. un module sans torsion).

PROPOSITION 1. - Si F est un faisceau cohérent sur une variété X, il existe un sous-faisceau cohérent $T(F)$ de F (et un seul) tel que $(T(F))_x = T(F_x)$.

L'unicité est triviale. L'existence est une conséquence du fait que, si X est affine, $T(F_x)$ est obtenu par localisation du module $T\ (H^0(X, F))$ par rapport à l'idéal maximal de $H^0(X, 0)$ qui définit x.

COROLLAIRE. - Si $F \neq 0$, $F/T(F)$ est un faisceau cohérent sans torsion.

PROPOSITION 2. - Si F est un faisceau cohérent sur la variété X, $\operatorname{supp} F \neq X$ si et seulement si F est un faisceau de torsion.

C'est une conséquence triviale du fait que si U est un ouvert affine, $\operatorname{supp} F \cap U$ est défini par l'idéal $\operatorname{ann} H^0(U, F)$ de $H^0(U, 0)$ où $H^0(U, F)$ est considéré comme un module sur $H^0(U, 0)$.

PROPOSITION 3. - Si F est un faisceau cohérent sans torsion sur une variété X, $F \subset R^n$, il existe un faisceau cohérent I, $I \neq 0$, d'idéaux de 0, tel que $I.F \subset 0^n$.

Soit I_x l'idéal $[0_x^n : F_x]$ de 0_x i.e. l'idéal des éléments i_x de 0_x tels que $i_x F_x \subset 0_x^n$. Comme F_x est de type fini sur 0_x, $I_x \neq 0$. Si on prend un ouvert affine U de X, on vérifie que I_x est obtenu par localisation de l'idéal $[H^0(U, 0^n) : H^0(U, F)]$ de $H^0(U, 0)$ par rapport à l'idéal maximal de $H^0(U, 0)$ qui définit x. Donc $\{I_x\}_{x \in X}$ est un faisceau cohérent I d'idéaux de 0 tel que $I.F \subset 0^n$.

Soit F un faisceau cohérent sans torsion sur une variété X. Alors l'homomorphisme canonique $F \to F \otimes_0 R$ est injectif. Les faisceaux R et $F \otimes_0 R$ sont des faisceaux localement constants et donc constants ([5] page 229). On peut ainsi identifier $F \otimes_0 R$ avec un espace vectoriel de dimension finie sur R (on identifie le corps des fonctions rationnelles avec le faisceau R comme R est constant). On appelle cette dimension rang de F et alors on peut considérer F comme un sous-faisceau de R^n, $n = \operatorname{rang} F$.

PROPOSITION 4. - Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 3, il existe un faisceau cohérent I d'idéaux $\neq 0$ de 0 tel que $I.F \subset 0^n$, où $n =$ rang de F ; $0^n/I.F$ et $F/I.F$ sont alors des faisceaux de torsion.

La démonstration est immédiate.

Si Y est une partie fermée d'un espace algébrique X, on note I_Y le faisceau cohérent d'idéaux de 0 défini par Y.

PROPOSITION 5. - *Soient* Y *une partie fermée d'un espace algébrique* X, *et* F *un faisceau cohérent sur* X, *avec* $\operatorname{supp} F \subset Y$; *alors il existe un entier* k *tel que* $I_Y^k F = 0$.

On est ramené au cas où X est affine, puisqu'il existe un recouvrement fini de X par des ouverts affines. Dans ce cas l'hypothèse implique que l'ensemble défini par l'idéal $\operatorname{ann} H^0(X, F)$ est contenu dans Y. Ceci entraîne, comme il est bien connu, que $\operatorname{ann} H^0(X, F) \supset I_Y^k$.

PROPOSITION 6. - *Soit* F *un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires sur une variété* X (*i.e. un sous-faisceau cohérent de* R) *tel que, pour chaque* x *en dehors d'un fermé* Y *de* X, F_x *soit un idéal de* 0_x. *Alors il existe un entier* k *tel que* $I_Y^k.F \subset 0$.

Par la proposition 3, et l'hypothèse il existe un faisceau cohérent J d'idéaux de 0 tel que $J_x = 0_x$ si $x \notin Y$, et $J.F \subset 0$. On a donc $\operatorname{supp}(0/J) \subset Y$ et, d'après la proposition 5, il existe un entier k tel que $I_Y^k(0/J) = 0$. Ceci implique $I_Y^k \subset J$ et donc on a $I_Y^k.F \subset 0$.

2. Théorème de dévissage.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie d'objets de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}'$ *est exacte à gauche en* $\mathcal{C}$ si

1° tout sous-objet d'un objet de $\mathcal{C}'$ est dans $\mathcal{C}'$.

2° pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathcal{C}$, l'objet A est dans $\mathcal{C}'$ pourvu que les deux autres sont dans $\mathcal{C}'$ (1).

Soit X un espace algébrique. On désigne par $C(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur X. Si Y est une partie fermée de X, un faisceau cohérent sur Y possède une extension canonique comme faisceau cohérent sur X (en mettant 0 en dehors de Y) et donc on peut considérer $C(Y)$ comme une sous-catégorie de $C(X)$. Avec ces notations on a le théorème suivant :

---

(1) Les axiomes qui définissent ici une sous-catégorie exacte à gauche sont un peu plus forts que ceux de GROTHENDIECK [4].

THÉORÈME de dévissage. - Soit D une sous-catégorie exacte à gauche de $C(X)$ qui possède la propriété suivante : pour tout partie fermée irréductible Y de X, il existe un faisceau cohérent M_Y de $C(Y)$ qui appartient à D et qui est sans torison en tant que faisceau sur Y. Alors on a $D = C(X)$.

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de X. Si $\dim X = 0$, X se réduit à un nombre fini de points $P_1, \dots, P_r$ et un faisceau cohérent sur X s'identifie avec un système $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, r$, où N_i est un espace vectoriel de dimension finie sur K. Donc le faisceau M_{P_i} sur P_i qu'on se donne par hypothèse est un espace vectoriel de dimension finie sur K. D'après les axiomes d'une sous-catégorie exacte à gauche, il est trivial de vérifier que chaque système $\{N_i\}$, $i = 1, \dots, r$, où N_i est un espace vectoriel de dimension finie sur K, considéré comme faisceau cohérent sur X, appartient à D.

Supposons maintenant le théorème démontré pour toute dimension $\leq n - 1$. Soit $\dim X = n$. Soit Y une partie fermée de X telle que $\dim Y \leq (n - 1)$. On vérifie facilement que $D \cap C(Y)$ est une sous-catégorie exacte à gauche de $C(Y)$, satisfaisant aux hypothèses du théorème. Donc, par l'hypothèse de récurrence $D \supset C(Y)$.

On va démontrer maintenant que si F est un faisceau cohérent sur X avec $\operatorname{Supp} F = Y$, $F \in D$. Si $I_Y.F = 0$, on a $F \in C(Y)$ et par ce qui précède $F \in D$. En tout cas, en vertu de la proposition 5, il existe un entier $k \geq 1$, tel que $I_Y^k F = 0$. On fait la démonstration par récurrence sur k. Supposons l'assertion démontrée pour chaque faisceau cohérent G sur X tel que $I_Y^{k-1}.G = 0$. Pour F on a une suite exacte

$$0 \to I_Y.F \to F \to F/I_Y.F \to 0$$

Le faisceau $I_Y.F$ est annulé par I_Y^{k-1} et le faisceau F/I_YF est annulé par I_Y. Donc $I_Y.F$ et F/I_YF appartiennent à D. Ceci entraîne que $F \in D$.

Supposons que X soit une variété et F un faisceau sans torsion sur X. On peut considérer F comme un sous-faisceau cohérent de R^n, $n = \operatorname{rang} F$ et en vertu de la proposition 4, il existe un faisceau cohérent d'idéaux I tel que $I.F \subset O^n$ et que les faisceaux F/IF, O^n/IF soient des faisceaux de torsion. Comme (F/IF) est un faisceau de torsion, $F/IF \in D$; donc $F \in D$ équivaut à $IF \in D$. De façon analogue, $IF \in D$ est équivalent à $O^n \in D$ et, d'après les axiomes d'une sous-catégorie exacte, à $O \in D$. Donc $F \in D$ est équivalent à $0 \in D$. Si on répète le même argument pour le faisceau sans torsion M_X qu'on se donne par hypothèse, on en déduit $0 \in D$ et ceci implique $F \in D$.

Supposons encore que X soit une variété mais que F soit un faisceau cohérent arbitraire. On démontre que $F \in D$. On peut supposer $F \neq 0$ et alors on a

$$0 \to T(F) \to F \to F/T(F) \to 0$$

où $T(F)$ est un faisceau de torison et $F/T(F)$ un faisceau sans torsion. Par la proposition 2, supp $T(F) \neq X$ et, comme X est une variété, dim supp $T(F) <$ dim $T(X)$. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence, $T(F) \in D$, et on vient de démontrer que $F/T(F) \in D$. Donc $F \in D$.

Soient X un espace algébrique arbitraire et $X_1, \dots, X_p$ ses composantes irréductibles. Si F est un faisceau cohérent sur X, $F/I_{X_i} F$ peut être identifié avec un faisceau sur la variété X_i (I_{X_i} est le faisceau d'idéaux de $O(X)$ déterminé par X_i) et par ce qui précède $F/I_{X_i} F \in D$. Donc le faisceau $G = \sum_{i=1}^{p} F/I_{X_i} F$ appartient à D. On a un homomorphisme canonique $\varphi : F \to G$. L'image de φ est un sous-faisceau cohérent de G, par conséquent l'image de φ appartient à D.

On a supp ker $\varphi \subset \bigcup_{i,j(i \neq j)} X_i \cap X_j$ et par conséquent dim supp ker $\varphi <$ dim X et par l'hypothèse de récurrence ker $\varphi \in D$. Donc $F \in D$ et le théorème est démontré.

COROLLAIRE (Théorème de Serre). - Si F est un faisceau cohérent sur un espace algébrique complet X, alors $H^0(X, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K.

On prend pour D la catégorie de tous les faisceaux cohérents F sur X tels que $H^0(X, F)$ soit de dimension finie sur K. On vérifie que D est une sous-catégorie exacte à gauche en $C(X)$. D'ailleurs, on sait que si Y est une partie fermée irréductible, alors Y est une variété complète. Donc le faisceau cohérent $O(Y)$ sur Y est un faisceau sans torsion avec la propriété $H^0(Y, O(Y)) \approx K$ et par conséquent $H^0(X, O(Y)) = H^0(Y, O(Y))$ est de dimension finie sur K (on désigne par le même symbole $O(Y)$, l'extension canonique de $O(Y)$ à X). D'après le théorème, le corollaire est démontré.

3. Diviseurs (Généralités).

Soient X une variété algébrique et $R^*(X)$, $0^*(X)$ (ou simplement R^* , 0^*) respectivement le faisceau constant sur X des fonctions rationnelles et non-nulles et le faisceau sur X des fonctions régulières et inversibles. Les faisceaux R^* et 0^* , munis de leur structure multiplicative, sont des faisceaux des groupes abéliens.

Un diviseur D sur X est une section du faisceau quotient $R^*/0^*$. Un élément de R^* qui est un représentant de la valeur $D(x)$ de D en x est appelé une fonction de définition de D en x . Plus généralement, une fonction $f \in R^*$ est appelée fonction de définition de D dans un ouvert U si, pour chaque $x \in U$ f est un représentant de $D(x)$, et alors f est déterminée à une fonction régulière et inversible près dans U . Puisqu'on peut relever une section de $R^*/0^*$ localement à une section de R^* , un diviseur D est déterminé par la donnée suivante : un recouvrement $\{U_i\}$ par des ouverts, et des fonctions rationnelles non-nulles f_i dans U_i telles que dans $U_i \cap U_j$, $f_{ij} = f_i/f_j$ soit une fonction régulière et inversible. On a $f_{ij} f_{jk} f_{ki} = 1$ dans $U_i \cap U_j \cap U_k$ et comme c'est bien connu, cela permet de construire un espace fibré localement trivial avec K^* comme groupe structural ; il est facile de voir que cet espace fibré est déterminé à une équivalence près [7] . D'ailleurs les faisceaux cohérents d'idéaux fractionnaires (i.e. les sous-faisceaux cohérents de R) engendrés par f_i et f_j coïncident dans $U_i \cap U_j$ et ne dépendent pas du choix des fonctions de définition de D dans U_i et U_j . Ceci entraîne que le diviseur D détermine canoniquement un faisceau cohérent d'idéaux fractionnaires localement principaux. On voit facilement que la réciproque est vraie et cela permet une définition équivalente d'un diviseur [1] .

Un diviseur D sur X est dit positif si pour chaque $x \in X$, $D(x) \in 0_x/0_x^*$ (i.e. toutes les fonctions de définition de D en x sont des fonctions régulières en x).

Comme $R^*/0^*$ est un faisceau de groupes abéliens sur X , il y a une structure canonique de groupe abélien dans l'ensemble des diviseurs sur X ; ce groupe est appelé groupe des diviseurs sur X . La loi de composition dans ce groupe est écrite additivement, et l'élément neutre dans ce groupe est donc appelé diviseur nul (0) .

Si f est une fonction rationnelle non-nulle sur X , elle définit un diviseur div f par la donnée (div f)(x) = image de f dans $R^*/0_x^*$. Les diviseurs obtenus de cette façon sont dits diviseurs principaux et forment un sous-groupe du groupe des diviseurs sur X ; le groupe quotient est appelé groupe des classes des diviseurs sur X. Deux diviseurs D_1 et D_2 sont dits équivalents, s'ils sont équivalents modulo le groupe des diviseurs principaux ; on écrit $D_1 \sim D_2$. On a vu qu'un diviseur définit à une équivalence près un espace fibré algébrique localement trivial avec groupe structural K^*. D'autre part il est facile de voir qu'un espace fibré algébrique localement trivial avec K^* comme groupe structural définit un diviseur à une équivalence près [7]. Donc le groupe des classes des diviseurs sur $X = H^1(X , O^*)$, groupe des classes d'espaces fibrés algébriques équivalents avec K^* comme groupe structural.

On peut définir de façon analogue un diviseur additif sur une variété X comme section du faisceau R/O (les diviseurs définis auparavant sont appelés diviseurs multiplicatifs ou simplement diviseurs). Les diviseurs additifs forment un groupe abélien et même un espace vectoriel sur K. Un diviseur additif est déterminé par la donnée suivante : un recouvrement $\{U_i\}$ de X par des ouverts, et des fonctions rationnelles f_i dans U_i telles que $f_i - f_j = f_{ij}$ soit une fonction régulière dans $U_i \cap U_j$. On peut définir, comme pour les diviseurs (multiplicatifs) les notions de fonction de définition d'un diviseur additif, d'équivalence entre deux diviseurs additifs, etc. On trouve par exemple $H^1(X , O)$ = le groupe des classes des diviseurs additifs sur X.

Soit D un diviseur (multiplicatif) sur X. On appelle supp D l'ensemble des points $x \in X$ tels que $D(x)$ ne soit pas l'élément neutre dans R^*/O^*_x i.e. chaque fonction de définition de D en x, ou bien n'est pas définie en x, ou bien y prend la valeur 0.

PROPOSITION 7. - Le support d'un diviseur D sur une variété X est une partie fermée $\neq X$ de X, $D = 0$ si et seulement si le support est vide.

La dernière assertion est triviale. Pour la première on démontre que l'ensemble E des points $x \in X$ tels que chaque fonction de définition de D en x appartienne à O^*_x est un ouvert non-vide ; en effet si on prend une fonction de définition g de D en x, elle est aussi une fonction de définition de D dans un ouvert U qui contient x. Par hypothèse si $x \in E$, g est régulière en x et $g(x) \neq 0$, et on peut choisir U de telle sorte que g soit régulière et inversible dans U, ce qui montre que E est un ouvert.

PROPOSITION 8. - Si D est un diviseur sur une variété normale X , supp D est une réunion d'hypersurfaces (i.e. de sous-variétés fermées de codimension 1).

Si f est une fonction sur une variété normale Y , on sait que si f n'est pas définie en $x \in Y$, x appartient à une variété de pôles ou de zéros de f (i.e. une composante irréductible de la fermeture de l'ensemble des points $x \in Y$ où $f(x) = \infty$ ou 0). Donc, si on prend pour f une fonction de définition de D dans un ouvert $U \subset X$, supp $D \cap U$ est la réunion des variétés polaires et nulles de f dans U et on sait que ces variétés sont de codimension 1 ([2], chapitre III).

REMARQUE. - Si X n'est pas normale, le support d'un diviseur D sur X n'est pas nécessairement de codimension 1. Il est en effet facile de définir une variété affine X de dimension >1 qui est partout normale sauf en un point unique x_0 (par exemple, le lieu du point (a , ab , b^2 , b^3) dans l'espace numérique à 4 dimensions). Il existe une fonction u qui est partout définie sur X , qui est entière sur l'anneau local de x_0 mais qui n'est pas contenue dans cet anneau ; lui ajoutant au besoin une constante, on peut supposer que x_0 n'est pas un zéro de u . Il y a alors un voisinage ouvert X' de x_0 tel que le diviseur de la fonction induite par u sur X' ait son support réduit au point x_0 .

Supposons que X soit une variété normale, et D un diviseur sur X . Soit S une hypersurface sur X . Si f est une fonction de définition de D en $x \in S$, l'ordre de f sur S ([2]) ne dépend pas du choix de f ni de $x \in S$. On peut noter cet entier par $\mathrm{ord}_S\, D$. Il est facile de voir que $\mathrm{ord}_S\, D = 0$ si et seulement si $S \not\subset$ supp D . Si on prend maintenant la combinaison formelle $C = \sum_S (\mathrm{ord}_S\, D).S$ où S parcourt l'ensemble de toutes les hypersurfaces de X , C est un cycle de codimension 1, qu'on appelle cycle associé au diviseur D .

PROPOSITION 9. - Soit X une variété normale. L'application qui associe à chaque diviseur D , le cycle de codimension 1 associé à D , est un homomorphisme injectif du groupe des diviseurs sur X dans le groupe des cycles de codimension 1.

La démonstration est triviale.

PROPOSITION 10. - Si X est en plus une variété non singulière, l'homomorphisme qui associe à chaque diviseur son cycle associé est bijectif.

Il suffit de montrer que pour toute hypersurface S, il existe un diviseur D, tel que le cycle $1.S$ soit le cycle associé à D. Puisque X est non-singulière, pour chaque $x \in X$, l'anneau local O_x est factoriel [3] ; donc pour chaque $x \in S$, S est défini par une seule équation dans un voisinage de x. Donc il existe un recouvrement $\{U_i\}$, $i = 1, \ldots, p$ de S par des ouverts U_i de X et pour chaque i, une fonction f_i régulière dans U_i et non-nulle en dehors de $U_i \cap S$ dans U_i avec $\mathrm{ord}_S f_i = 1$. Il en résulte que f_i/f_j est une fonction régulière et inversible dans $U_i \cap U_j$. Prenons maintenant le recouvrement $\{U_i\}$, $i = 0, \ldots, p$ où $U_0 = C S$ et posons $f_0 = 1$. Il est facile de voir que le diviseur D pour lequel f_i est une fonction de définition de D dans U_i est tel que le cycle associé à D soit $1.S$. Donc la proposition est démontrée.

REMARQUE. - La proposition n'est pas toujours vraie si X n'est pas non-singulière. Par exemple pour le cône $xy - zw = 0$ dans K^4, le cycle défini par $x = Z = 0$ n'est pas le cycle d'un diviseur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTIER (Pierre). - Diviseurs et dérivations en géométrie algébrique (Thèse Sc. math. Paris. 1958) ; à paraître dans Bull. Soc. math. France.

[2] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la Géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958, multigraphié (Cours professé à la Sorbonne en 1957/58).

[3] GODEMENT (Roger). - Propriétés analytiques des localités, Séminaire Cartan-Chevalley, t. 8, 1955/56, Géométrie algébrique, exposé n° 19.

[4] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, Séminaire H. Cartan, t. 9, 1956/57, Quelques questions de topologie, exposé n° 2.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la cohomologie des variétés algébriques, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 1-16.

[7] WEIL (André). - Fibre spaces in algebraic geometry (Notes prises par A. Wallace, 1952). - Chicago, University of Chicago, 1955.