Séminaire L. de Broglie. Théories physiques

J. Winogradzki

Les transformations de jauge en relativité généralisée

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. nº 10, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1954-1955__24__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de Théories Physiques
(Séminaire Louis de BROGLIE)
Année 1954/55)
-:-:-:-

18 janvier 1955

Exposé n° 10

LES TRANSFORMATIONS DE JAUGE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE.

par Mme J. WINOGRADZKI.

-:-:-:-

L'Univers de la théorie de la Relativité Généralisée est un espace quadridimensionnel affine et métrique, la métrique étant donnée par un tenseur du second rang qui représente le champ. En général, la connexion affine et le tenseur métrique sont asymétriques. Les équations du champ ont été établies de différentes manières. L'une d'entre elles, due à M. Einstein, est particulièrement intéressante. Le principe de Relativité Générale étant insuffisant pour déterminer les équations du champ généralisé, M. Einstein substitue au principe de Relativité Générale un principe de Relativité plus sévère et c'est de ce principe qu'il déduit les équations du champ. Il montre en effet que si l'on exige l'invariance des équations du champ par rapport aux λ-transformations, les équations du champ sont pratiquement déterminées.(1)

Il n'est pas nécessaire d'imposer a priori la nature précise de l'extension du groupe relativiste. Des considérations simples suggèrent un postulat à partir duquel on peut la déterminer. Le même postulat conduit aux équations du champ.(2)

1.- BASES AXIOMATIQUES.

L'une des méthodes classiques pour l'établissement des équations du champ gravifique pur consiste à les déduire de l'ensemble (E) des postulats suivants :

I.- L'Univers est un espace quadri-dimensionnel affine et métrique, la métrique étant donnée par un tenseur du second rang.

II.- La connexion affine et le tenseur métrique sont symétriques.

---

(1)- A. EINSTEIN. Generalization of Gravitation Theory. Appendix II of the Meaning of Relativity. Princeton, 1953. Nous utilisons les notations de ce Mémoire.

Extension du groupe relativiste. Dans Louis de Broglie Physicien et Penseur. Albin Michel, 1953.

(2)- J. WINOGRADZKI. C.R. Acad. Sc., 239, 1954, p.1359.

III.- Les équations du champ dérivent d'un principe variationnel. On fait varier la connexion affine et le tenseur métrique.

IV.- L'Hamiltonien est constitué par la densité de courbure.

V.- Les variations sont effectuées sans conditions a priori.

Si l'on supprime le postulat II, l'Univers a plusieurs densités de courbure se déduisant les unes des autres par transposition soit du tenseur métrique, soit de la connexion affine, soit des deux,

$$\mathfrak{g}^{ik} R_{ik} \quad , \quad \mathfrak{g}^{ik} R_{ki} \quad , \quad \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ik} \quad , \quad \mathfrak{g}^{ik} \tilde{R}_{ki} \quad ,$$

$\mathfrak{g}^{ik}$ étant la densité du tenseur métrique, R_{ik} et $\tilde{R}_{ik}$ les deux tenseurs de Ricci

(1) $$R_{ik} = \Gamma^{m}_{ik,m} - \Gamma^{m}_{im,k} + \Gamma^{m}_{pm} \Gamma^{p}_{ik} - \Gamma^{m}_{ip} \Gamma^{p}_{mk} \quad ,$$

(2) $$\tilde{R}_{ik} = \Gamma^{m}_{ki,m} - \Gamma^{m}_{mi,k} + \Gamma^{m}_{mp} \Gamma^{p}_{ki} - \Gamma^{m}_{pi} \Gamma^{p}_{km} \quad .$$

Evitant tout choix arbitraire, transcrivons le postulat IV :

IVa.- L'Hamiltonien est constitué par une quelconque des densités de courbure.

L'ensemble (E') des postulats I, III, IVa, V ne détermine pas les équations du champ d'une manière univoque, les équations du champ dépendent du choix de l'Hamiltonien. L'ensemble de postulats (E') est donc inacceptable. Cherchons à le modifier en restant aussi proches que possible de (E) .

L'ensemble de postulats (E) peut s'écrire I, III, IVa et un postulat réunissant II et V :

Va.- Les variations sont effectuées sous la condition a priori $g_{ik} = g_{ki}$, $\Gamma^{i}_{km} = \Gamma^{i}_{mk}$.

Ainsi, (E') ne se distingue de (E) que par le dernier postulat. C'est donc ce postulat que nous modifierons. Nous baserons cette modification sur l'idée Einsteinienne d'une extension du groupe relativiste,[(1)] mais sans imposer a priori, comme le fait M. Einstein, la nature précise de cette extension.

Les divers systèmes d'équations du champ résultant de (E') sont déjà invariants non seulement par rapport aux transformations de coordonnées, mais aussi par rapport à certaines autres transformations. L'hypothèse que les équations du champ satisfont à un principe de Relativité plus sévère que le principe de Relativité Générale n'est donc pas suffisante pour indiquer comment il faut modifier le postulat V. Ainsi, à moins d'introduire une limitation arbitraire, il ne reste qu'à admettre la validité d'un principe de Relativité aussi sévère que possible, c'est-à-dire l'invariance des équations du champ par rapport à un groupe aussi vaste que possible. Pour donner à cette hypothèse la précision nécessaire, il suffit d'admettre que les transformations qui constituent l'extension du groupe relativiste (que nous appellerons "transformations de jauge" pour rappeler l'analogie avec l'électromagnétisme) jouissent de certaines propriétés générales. Appelons J le groupe des transformations possédant ces propriétés générales des transformations de jauge. Pour obtenir les équations du champ satisfaisant au principe de Relativité le plus sévère, tout en modifiant le postulat V le moins possible, nous le ramplacerons par le postulat suivant :

Vb.- Les variations sont effectuées sans conditions a priori, à moins qu'une variation liée du tenseur métrique ou de la connexion affine ne donne des équations du champ satisfaisant à un principe de Relativité plus sévère que les équations obtenues par variation libre. Dans ce cas, on impose à la grandeur variée correspondante, tenseur métrique ou connexion affine, des conditions, du premier ordre au plus, fournissant des équations du champ invariantes par rapport au sous-groupe le plus vaste du groupe J .

Si l'on adopte la définition fort naturelle du groupe J qui suit, l'ensemble (E") des postulats I, III, IVa, Vb détermine l'extension du groupe relativiste (paragraphe 2) et conduit aux équations du champ (paragraphe 2, paragraphe 3).

Il nous reste à déterminer les propriétés des J-transformations, c'est-à-dire les propriétés générales à imposer aux transformations de jauge. Nous admettrons d'abord que ces transformations, comme les transformations de jauge de l'électromagnétisme, laissent le champ invariant et en sont indépendantes. Puisque dans la théorie classique du champ gravifique le tenseur métrique constitue le champ, il doit, en gravifique généralisée, sinon constituer le champ, du moins en faire partie. Les J-transformations s'écrivent donc

$$(3) \qquad \begin{cases} J(g_{ik}) = g_{ik} \,, \\ J(\Gamma^i_{km}) = \Gamma^i_{km} + \Lambda^i_{km} \,, \end{cases}$$

Λ^i_{km} étant indépendant du tenseur métrique. Λ^i_{km} est un tenseur en tant que différence de deux connexions affines. Nous admettrons que ce tenseur ne dépend pas, de par sa structure, de la connexion affine, excluant ainsi des J-transformations et, par conséquent, des transformations de jauge, la transposition de la connexion affine. On vérifie aisément que l'ensemble des transformations de coordonnées et des J-transformations **forme bien un groupe**.

Si $\underset{\sim}{A}$ est un être géométrique quelconque de l'Univers, on a, d'après (3),

(4) $$J[\underset{\sim}{A}(g_{ik}, \Gamma^i_{km})] = \underset{\sim}{A}(g_{ik}, \Gamma^i_{km} + \Lambda^i_{km}) \; .$$

2.- LES TRANSFORMATIONS DE JAUGE.

Faisons varier la connexion affine sous une condition a priori

(5) $$\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = 0 \; ,$$

le tenseur métrique sous une condition a priori

(6) $$\mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} = 0 \; ,$$

$\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}$ et $\mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}$ étant du premier ordre au plus. Les variations liées contiennent les variations libres comme cas particuliers ($\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} \equiv 0$, $\mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots} \equiv 0$). Les équations du champ s'écrivent

(7) $$\frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} [\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] = 0 \quad ,$$

(8) $$\frac{\delta}{\delta g^{ik}} [\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] = 0 \quad ,$$

δ désignant la dérivation hamiltonienne

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} \equiv \frac{\partial}{\partial \Gamma^i_{km}} - \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial \Gamma^i_{km,p}}$$
$$\frac{\delta}{\delta g^{ik}} \equiv \frac{\partial}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial g^{ik}_{\;,p}} \quad ,$$

$\mathfrak{H}$ l'Hamiltonien et $\sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}$ les multiplicateurs de Lagrange. Ces équations sont invariantes par rapport aux J-transformations pour lesquelles elles entrainent

(9) $$\frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} [J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots})] = 0$$

(10) $$\frac{\delta}{\delta g^{ik}} [J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] = 0$$

on a

(11) $$\frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} [J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots})] - \frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} [\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}]$$
$$= A^{km}_{i\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} + \frac{\delta}{\delta \Gamma^i_{km}} [\sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}) - \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{F}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}]$$

(12) $$\frac{\delta}{\delta g^{ik}} [J(\mathfrak{H}) + \sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] - \frac{\delta}{\delta g^{ik}} [\mathfrak{H} + \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} \mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}]$$
$$= A^{\beta\gamma}_{\alpha\, ik}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + B_{ik} + \frac{\delta}{\delta g^{ik}} [(\sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} - \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots})\, \mathfrak{f}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}]$$

A^{ik}_{mpq} étant une fonction de Λ^i_{km} , B_{ik} une fonction de Λ^i_{km} et de ses dérivées premières, $\sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}$ et $\sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}$ les multiplicateurs de Lagrange qui figurent, le premier dans les équations du champ sous leur forme initiale, le second dans les équations que l'on en déduit par la J-transformation. L'expression des fonctions A^{ik}_{mpq} et B_{ik} dépend de l'Hamiltonien considéré.

L'équation

$$(13) \qquad A^{km}_{i\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} + \frac{\delta}{\delta \Gamma^{\ i}_{km}} [\sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}\, J(\xi^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}) - \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}\, \xi^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] = 0$$

constitue donc une condition nécessaire et suffisante pour que les équations du champ (7), obtenues en faisant varier la connexion affine, soient invariantes par rapport à une J-transformation ; de même, l'équation

$$(14) \qquad A^{\beta\gamma}_{\alpha\, ik}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + B_{ik} + \frac{\delta}{\delta g^{ik}} [(\sigma'^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots} - \sigma^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots})\, \xi^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}] = 0$$

pour les équations du champ (8), obtenues en faisant varier le tenseur métrique.

Comme $\Lambda^{\ i}_{km}$ ne dépend ni de la connexion affine, ni du tenseur métrique, une condition nécessaire pour que soient satisfaites tant l'équation (13) que l'équation (14) est

$$(15) \qquad A^{ik}_{mpq} = 0 \ .$$

Une condition nécessaire pour que cette dernière équation soit satisfaite, obtenue en contractant deux indices convenablement choisis, s'écrit

$$(16) \qquad \Lambda^{\ i}_{km} = \delta^{i}_{k}\ \lambda_{m}$$

si l'Hamiltonien contient R_{ik} et

$$(17) \qquad \Lambda^{\ i}_{km} = \lambda_{k}\ \delta^{i}_{m}$$

si l'Hamiltonien contient $\widetilde{R}_{ik}$, λ_i étant un vecteur quelconque.

Ainsi, quel que soit le mode de variation, les équations du champ obtenues en faisant varier la connexion affine et, de même, celles obtenues en faisant varier le tenseur métrique, ne peuvent être invariantes que par rapport à des J-transformations dont le tenseur $\Lambda^{\ i}_{km}$ a la structure donnée par (16) respectivement (17). Les J-transformations satisfaisant à (16) sont les λ-transformations introduites par M. Einstein a priori [1]. Les J-transformations satisfaisant à (17) ("$\widetilde{\lambda}$-transformations") se déduisent des λ-transformations par simple transposition de la connexion affine. L'ensèmble des λ-transformations ou $\widetilde{\lambda}$-transformations et des transformations de coordonnées forme bien un groupe. Remarquons qu'à l'exception de la transformation identique, aucune λ ou $\widetilde{\lambda}$-transformation ne laisse invariante la torsion, ni même le vecteur de torsion. D'après la propriété fondamentale des transformations de jauge, ces grandeurs, quoique tensorielles, ne peuvent donc pas faire partie du champ.

Montrons maintenant que les λ ou $\tilde{\lambda}$-transformations sont les transformations de jauge, c'est-à-dire qu'il existe un mode de variation qui donne des équations du champ invariantes par rapport à toutes les λ-respectivement toutes les $\tilde{\lambda}$-transformations. En effet, lorsque le tenseur Λ^{i}_{km} satisfait à (16) respectivement (17), les conditions nécessaires et suffisantes (13) et (14) se réduisent à

$$(18) \qquad \frac{\delta}{\delta \Gamma^{i}_{km}} [\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}) - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} \mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}] = 0 \quad ,$$

$$(19) \qquad \pm (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) + \frac{\delta}{\partial g^{ik}} [(\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots}) \mathfrak{f}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}] = 0 \quad .$$

L'équation (18) admet la solution évidente

$$(20) \qquad \sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} = \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} \quad ,$$

$$(21) \qquad J(\mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}) = \mathfrak{F}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} \quad .$$

Donc, les équations du champ, obtenues en faisant varier la connexion affine aussi bien librement que sous une condition a priori λ-invariante respectivement $\tilde{\lambda}$-invariante quelconque, sont invariantes par rapport aux λ- ou $\tilde{\lambda}$-transformations.

Considérons maintenant l'équation (19). Plus explicitement, elle s'écrit

$$(22) \qquad \pm (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) + (\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots} - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots}) \frac{\delta \mathfrak{f}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}}{\delta g^{ik}} - (\sigma'^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots,m} - \sigma^{\beta\ldots}_{\alpha\ldots,m}) \times \times \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}}{\partial g^{ik}_{\ ,m}} = 0 \quad .$$

Cherchons une solution satisfaisant à

$$(23) \qquad \mathfrak{f}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} = \mathfrak{f}^{\alpha} \quad ,$$

$$(24) \qquad \frac{\delta \mathfrak{f}^{\alpha}}{\delta g^{ik}} = 0 \quad .$$

En effet, l'équation (22) ne contient alors, en dehors d'une certaine dérivée de $\mathfrak{f}$ que des dérivées de vecteurs ; elle prend la forme simple

$$(25) \qquad \pm (\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i}) - (\sigma'_{\alpha,m} - \sigma_{\alpha,m}) \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha}}{\partial g^{ik}_{\ ,m}} = 0$$

ou

$$(26) \qquad \pm \lambda_{\alpha,m} (\delta^{\alpha}_{i} \delta^{m}_{k} - \delta^{\alpha}_{k} \delta^{m}_{i}) - (\sigma'_{\alpha,m} - \sigma_{\alpha,m}) \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha}}{\partial g^{ik}_{\ ,m}} = 0 \quad .$$

Cette équation admet la solution évidente

$$(27) \qquad \sigma'_{\alpha} - \sigma_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \quad ,$$

$$(28)\qquad \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial g^{ik}{}_{,m}} = \pm\,(\delta^{\alpha}_{i}\,\delta^{m}_{k} - \delta^{\alpha}_{k}\,\delta^{m}_{i}) \quad .$$

D'où en intégrant (24) par rapport à $g^{ik}{}_{,m}$,

$$(29)\qquad f^{\alpha} = \mp\, 2(g^{m\overset{\alpha}{\vee}}{}_{,m} - \varphi^{\alpha}) \quad ,$$

φ^{α} étant une fonction arbitraire ne contenant pas les dérivées premières du tenseur métrique. D'après (29)

$$(30)\qquad \frac{\delta f^{\alpha}}{\delta g^{ik}} = \pm\, 2\,\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial g^{ik}} \quad .$$

Donc, d'après (24), φ^{α} ne doit pas contenir le tenseur métrique lui-même. Ainsi, les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique, sont invariantes par rapport à toutes les λ-transformations ou toutes les $\tilde{\lambda}$-transformations si la variation est effectuée sous la condition a priori

$$(31)\qquad f^{\alpha} \equiv \mp\, 2(g^{m\overset{\alpha}{\vee}}{}_{,m} - \varphi^{\alpha}) = 0 \quad ,$$

φ^{α} étant indépendant du tenseur métrique. Les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique sous la condition (31), sont indépendantes du choix de φ^{α} . On peut donc remplacer (31) par

$$(32)\qquad g^{n\overset{\alpha}{\vee}}{}_{,m} = 0 \quad .$$

L'étude des équations du champ obtenues en faisant varier la connexion affine déterminera φ^{α} et l'on obtiendra précisément $\varphi^{\alpha} = 0$.

Si l'on remplace (27) par la relation linéaire générale

$$(33)\qquad \sigma'_{\alpha} - \sigma_{\alpha} = A^{\beta}_{\alpha}\,\lambda_{\beta} + B_{\alpha}$$

où A^{α}_{β} et B_{α} sont des constantes et dét.$(A^{\alpha}_{\beta}) \neq 0$, on retrouve la condition (32).

3.- LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

L'étude précédente, qui a déterminé l'extension du groupe relativiste, conduit également aux équations du champ. Elle montre en effet que la variation du tenseur métrique sous la condition a priori (32) est conforme au postulat Vb et que la variation libre de la connexion affine est exigée par ce postulat. Montrons que les équations du champ ainsi obtenues sont bien indépendantes du choix de l'Hamiltonien.

Les équations du champ, obtenues en faisant varier le tenseur métrique sous la condition a priori (32), s'écrivent

$$(34)\qquad \frac{\delta}{\delta g^{ik}}\,(\mathfrak{H} + \sigma_{\alpha}\, g^{\beta\overset{\alpha}{\vee}}{}_{,\beta}) \equiv \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta g^{ik}} + \tfrac{1}{2}\,(\sigma_{i,k} - \sigma_{k,i}) = 0 \quad .$$

D'où, en éliminant les multiplicateurs de Lagrange, en posant

$$\frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta \mathfrak{g}^{ik}} \equiv W_{ik}$$

et en désignant par Cycl la somme des permutations circulaires,

$$\left.\begin{aligned} &(35) \qquad W_{\underline{ik}} = 0 \\ &(36) \qquad \text{Cycl } W_{\overset{\vee}{ik},m} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Comme l'Hamiltonien est une densité de courbure, W_{ik} est l'un des deux tenseurs de Ricci et s'exprime donc en fonction de la connexion affine et de ses dérivées premières.

Les équations du champ, obtenues en faisant varier librement la connexion affine, s'écrivent

$$\frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta \Gamma^{i}_{km}} = 0 \quad . \tag{37}$$

Elles relient la connexion affine au tenseur métrique et à ses dérivées premières. Si l'on considère comme les inconnues les 64 composantes de la connexion affine, ces équations forment un système de 64 équations algébriques linéaires. Ce système ne détermine pas entièrement la connexion affine en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées premières. Il est en effet invariant par rapport aux transformations de jauge. Mais l'ensemble des équations du champ possède la même invariance. Pour obtenir les équations auxquelles satisfait le tenseur métrique en vertu des équations (35) et (36), il n'est donc pas nécessaire de remplacer dans ces équations la connexion affine par la solution générale de (37). On obtient les mêmes équations pour le tenseur métrique en substituant à la solution générale de (37) une solution particulière quelconque, c'est-à-dire la solution d'une forme dégénérée quelconque de ce système, déduite de la forme non dégénérée (37) par une transformation de jauge.

Si l'Hamiltonien est $\mathfrak{g}^{ik} R_{ik}$, (37) s'écrit

$$\mathfrak{g}^{ik}{}_{,m} + \mathfrak{g}^{\alpha k}\Gamma^{i}_{\alpha m} + \mathfrak{g}^{i\alpha}\Gamma^{k}_{m\alpha} - \mathfrak{g}^{ik}\Gamma^{\alpha}_{m\alpha} = (\mathfrak{g}^{i\alpha}{}_{,\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{i}_{\alpha\beta})\delta^{k}_{m} \quad . \tag{38}$$

Remarquons d'abord qu'en contractant i et m on obtient l'équation (32), ce qui montre que φ^{α} est nul. En contractant k et m on obtient

$$\mathfrak{g}^{i\alpha}{}_{,\alpha} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\Gamma^{i}_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{i\alpha}\Gamma_{\alpha} \qquad (\Gamma_{\alpha} \equiv \Gamma^{\beta}_{\overset{\vee}{\alpha\beta}}) \tag{39}$$

L'équation (38) peut donc s'écrire :

$$\mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\,\underset{-}{k}}{}_{;m} = \mathfrak{g}^{ik}\Gamma_{m} - \frac{2}{3}\,\mathfrak{g}^{i\alpha}\Gamma_{\alpha}\delta^{k}_{m} \quad . \tag{40}$$

On peut, par une λ-transformation, donner au vecteur de torsion Γ_i une valeur quelconque. La λ-transformation qui annule le vecteur de torsion, appliquée à l'équation du champ (40), la met sous la forme dégénérée

$$\Gamma_i = 0 \quad , \quad \mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}_{;m} = 0 \tag{41}$$

équivalente à

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ki}}{}_{,k} = 0 \quad , \quad \mathfrak{g}^{\underset{+}{i}\underset{-}{k}}{}_{;m} = 0 \quad . \tag{42}$$

Ce système est invariant par rapport à la transposition simultanée du tenseur métrique et de la connexion affine. La transposition de l'une de ces deux grandeurs seulement le transforme en

$$\Gamma_i = 0 \qquad \mathfrak{g}^{\underset{-}{i}\underset{+}{k}}{}_{;m} = 0 \quad . \tag{43}$$

Le système (41) constitue donc une forme dégénérée du système (37) si l'Hamiltonien est $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}^{ik} R_{ik}$ (dégénérescence par λ-transformation) ou $\mathfrak{g}^{ik} \widetilde{R}_{ki}$ (dégénérescence par λ-transformation) ; le système (43) constitue une forme dégénérée du système (37) si l'Hamiltonien est $\underset{\sim}{\mathfrak{g}}^{ik} R_{ki}$ (dégénérescence par λ-transformation) ou $\mathfrak{g}^{ik} \widetilde{R}_{ik}$ (dégénérescence par $\widetilde{\lambda}$-transformation).

Désignons par $\underset{0}{\Gamma}{}^{i}_{km}$ la solution, bien déterminée sauf dans des cas particuliers, du système (41).[3] La solution du système (43) est $\underset{0}{\widetilde{\Gamma}}{}^{i}_{km}$. Posons

$$R_{ik}(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) \equiv \underset{0}{R}_{ik} \quad , \quad \widetilde{R}_{ik}(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) \equiv \underset{0}{\widetilde{R}}_{ik} \quad .$$

Ecrivons la dérivée hamiltonienne dans les quatre cas :

I. $$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ik} \quad , \quad W_{ik} = R_{ik}(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) = \underset{0}{R}_{ik}$$

II. $$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} R_{ki} \quad , \quad W_{ki} = R_{ik}(\underset{0}{\widetilde{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) = \underset{0}{\widetilde{R}}_{ik}$$

III. $$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \widetilde{R}_{ik} \quad , \quad W_{ik} = \widetilde{R}_{ik}(\underset{0}{\widetilde{\Gamma}}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) = \underset{0}{R}_{ik}$$

IV. $$\mathfrak{H} = \mathfrak{g}^{ik} \widetilde{R}_{ki} \quad , \quad W_{ki} = \widetilde{R}_{ik}(\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}) = \underset{0}{\widetilde{R}}_{ik}$$

Le champ $\mathfrak{g}^{ik}$ satisfait donc à l'un des deux systèmes suivants :

dans les cas I et III

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ki}}{}_{,k} = 0 \tag{32}$$

---

[3] – M.A. TONNELAT. J. Phys. Rad., 12, 1951, p.81 et 13, 1952, p.177

(35a) $$\mathfrak{g}\,\underset{0}{R}_{\underline{i\,k}} = 0$$

(36a) $$\mathrm{Cycl}\ \underset{0}{R}_{\underset{\vee}{i}\,k,m} = 0$$

dans les cas II et IV

(32) $$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{ki}}{}_{,k} = 0$$

(35b) $$\underset{0}{\tilde{R}}_{\underline{ik}} = 0$$

(36b) $$\mathrm{Cycl}\ \underset{0}{\tilde{R}}_{\underset{\vee}{i}\,k,m} = 0$$

Ces deux systèmes sont identiques. En effet, on a

(44) $$\tilde{R}_{\underline{ik}} - R_{\underline{ik}} = \Gamma_{i,k} + \Gamma_{k,i} - 2\,\Gamma_{\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\underline{ik}}$$

et

(45) $$\tilde{R}_{\underset{\vee}{ik}} + R_{\underset{\vee}{ik}} = -\Gamma^{\alpha}_{\underline{i\alpha},k} + \Gamma^{\alpha}_{\underline{k\alpha},i} + 2\,\Gamma_{\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{ik}}$$

Mais $\underset{0}{\Gamma}_{i} = 0$ et $\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\underline{i\alpha},k} - \underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\underline{k\alpha},i} = 0$ (4) . Donc

(46) $$\underset{0}{\tilde{R}}_{\underline{ik}} = \underset{0}{R}_{\underline{ik}} \quad \text{et} \quad \underset{0}{\tilde{R}}_{\underset{\vee}{ik}} = -\underset{0}{R}_{\underset{\vee}{ik}} \ .$$

Les équations du champ déduites des postulats (E') dépendent du choix de l'Hamiltonien. Mais en vertu de ces équations, quel que soit l'Hamiltonien, le tenseur métrique satisfait aux équations qui constituent les équations du champ déduites des postulats (E") .

---

(4) - E. SCHRÖDINGER. Proc. Ir. Acad. 51 A, 1947, p. 163.