

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## La théorie des opérateurs nucléaires

*Séminaire Schwartz*, tome 1 (1953-1954), exp. n° 12, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1953-1954\\_\\_1\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A13_0)

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

--:--:--

Séminaire SCHWARTZ

Année 1953/1954

--:--:--

17 février 1954

Exposé n° 12

LA THÉORIE DES OPÉRATEURS NUCLEAIRES.

1.- La trace.

Soit  $E$  un espace de Banach dont nous appellerons le dual  $E'$ . On sait que - par définition - il existe une correspondance biunivoque et isométrique entre l'espace  $B(E, E')$  des formes bilinéaires continues sur  $E \times E'$  et le dual de  $E \hat{\otimes}_{\pi} E'$ . A la forme bilinéaire canonique  $(x, x') \rightarrow \langle x, x' \rangle$  correspond donc une forme linéaire continue sur  $E \hat{\otimes}_{\pi} E'$  qu'on appelle "trace" et qu'on note  $\text{Tr}$ . Si  $u = \sum_{j} x_j \otimes y'_j$  on a, par définition,  $\text{Tr}(u) = \sum_{j} \langle x_j, y'_j \rangle$ . La forme Trace est de norme égale à 1. De plus tout  $u \in E \hat{\otimes}_{\pi} E'$  s'écrit sous la forme  $u = \sum_{n \geq 0} x_n \otimes y'_n$  avec  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\| \|y'_n\|$  finie, donc la série  $\sum_{n \geq 0} \langle x_n, y'_n \rangle$  converge absolument et l'on a, puisque la trace est continue

$$\text{Tr}(u) = \sum_{n \geq 0} \langle x_n, y'_n \rangle .$$

Pour justifier le mot "trace", rappelons qu'on peut identifier  $E \hat{\otimes} E'$  à l'espace des endomorphismes de rang fini de  $E$ , et que si  $E$  est de dimension finie la forme trace coïncide avec la trace usuelle des opérateurs.

Il existe une application continue canonique  $E' \hat{\otimes}_{\pi} E \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ . Tant qu'on ne sait pas si elle est biunivoque, on peut seulement parler de la trace d'un élément de  $E' \hat{\otimes}_{\pi} E$  et non de la trace de l'opérateur image  $\in \mathcal{L}(E, E)$ .

Rappelons d'autre part qu'il existe un isomorphisme  $S$  (symétrie) entre  $E \hat{\otimes} E'$  et  $E' \hat{\otimes} E$  défini par

$$S\left(\sum_j x_j \otimes y'_j\right) = \sum_j y'_j \otimes x_j \quad \begin{array}{l} x_j \in E \\ y'_j \in E' \end{array}$$

Si on identifie  $E \hat{\otimes} E'$  à l'espace des applications de rang fini de  $E$  dans  $E$  et  $E' \hat{\otimes} E \subset E' \hat{\otimes} (E')'$  à un espace de transformations de  $E'$ ,

l'application  $S$  correspond à la transposition des opérateurs. Grâce à  $S$ , la trace est aussi définie sur  $E' \hat{\otimes}_{\pi} E$ . On peut alors interpréter la dualité entre  $E \hat{\otimes}_{\pi} F$  et  $B(E, F)$  au moyen de la trace : soit  $A \in B(E, F) \subset \mathcal{L}(E; F')$ . Si  $1$  est l'identité dans  $F$ ,  $A \otimes 1$  envoie  $E \hat{\otimes}_{\pi} F$  dans  $F' \hat{\otimes}_{\pi} F$ . Donc si  $u \in E \hat{\otimes}_{\pi} F$  on peut former la trace de  $(A \otimes 1)(u) \in \mathcal{L}(F; F')$  et l'on a

$$(1) \quad \langle u, A \rangle = \text{Tr}((A \otimes 1)(u))$$

En effet, les deux membres pour  $A$  fixé sont des formes linéaires continues en  $u$  et elles sont égales pour  $u = x \otimes y$ .

2.- L'application  $E' \hat{\otimes}_{\pi} F \rightarrow \mathcal{L}_b(E_{\tau}; F)$ ,  $E, F$ , localement convexes.

L'indice  $_b$  désigne la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés dans un espace d'applications linéaires.

Soient  $E, F$  deux espaces localement convexes séparés quelconques. Aux éléments de  $E' \otimes F$  correspondent les applications linéaires continues de rang fini de  $E$  dans  $F$ . Donc  $E' \otimes F \subset \mathcal{L}(E_{\tau}; F)$  car ce dernier espace est l'espace des applications faiblement continues. (Cf. Exposé 8, n° 1)

PROPOSITION 1 : La topologie induite sur  $E' \otimes F$  par celle de  $\mathcal{L}_b(E_{\tau}; F)$  est identique à la topologie de  $E'_b \otimes_{\xi} F$ .

La topologie de  $E'_b \otimes_{\xi} F$  est par définition la topologie induite sur  $E' \otimes F$  par  $\mathcal{L}_{\xi}((E'')_{\tau}; F)$ . Or une partie équicontinue de  $E''$  est le polaire d'un voisinage de  $0$  dans  $E'$  qui est lui-même le polaire d'un ensemble borné de  $E$  donc (théorème du bipolaire) elle est l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée d'un borné de  $E$ . Or dans une  $\mathcal{G}$ -topologie, on peut remplacer les ensembles de  $\mathcal{G}$  par leur enveloppe convexe équilibrée fermée. Donc  $\mathcal{L}_{\xi}((E'')_{\tau}; F)$  et  $\mathcal{L}_b(E_{\tau}; F)$  induisent la même topologie sur  $E' \otimes F$ .

COROLLAIRE : Si  $E$  et  $F$  sont complets, il existe une application continue  $\varphi$  de  $E' \otimes_{\pi} F$  dans  $\mathcal{L}_b(E_{\tau}; F)$  qui prolonge l'identité sur  $E' \otimes F$ .

En effet, la topologie  $\pi$  étant plus fine que la topologie  $\xi$ , il existe une application canonique  $E' \hat{\otimes}_{\pi} F \rightarrow E' \hat{\otimes}_{\xi} F$  qu'on composera avec l'application  $E' \hat{\otimes}_{\xi} F \rightarrow \mathcal{L}_b(E_{\tau}; F)$ .

### 3.- Définition des applications nucléaires - Cas des espaces de Banach.

Désormais, le seul produit tensoriel considéré sera le produit  $\pi$ , ainsi  $E \hat{\otimes} F$  signifie  $E \hat{\otimes}_{\pi} F$ .

**DÉFINITION 1 :** Si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach on note  $L^1(E;F)$  le sous-espace  $\varphi(E' \hat{\otimes} F)$  de  $\mathcal{L}(E;F)$ . Les éléments de  $L^1(E;F)$  sont dits opérateurs nucléaires ou de Fredholm.  $L^1(E,F)$  est un espace quotient de  $E \hat{\otimes} F$ . La norme quotient de la norme  $\pi$  sera dite norme-trace ou norme nucléaire notée  $\| \cdot \|_1$  ou  $\| \cdot \|_{Tr}$ .

On ne connaît pas de cas où  $\varphi$  ne soit pas biunivoque mais on ne sait pas le démontrer en général.

$E' \hat{\otimes} F$  étant dense dans  $E' \hat{\otimes}_{\pi} F$  et  $\varphi$  étant continue, tout opérateur nucléaire est limite "uniforme" (dans  $\mathcal{L}_b$ ) d'opérateurs de rang fini donc en particulier est compact (l'image dans  $F$  d'une boule de  $E$  est relativement compacte).

**REMARQUE :** Si  $E = F$  est un Hilbert, les opérateurs nucléaires hermitiens sont les opérateurs complètement continus dont la suite  $(\lambda_n)$  des valeurs propres est sommable et

$$\|u\|_1 = \sum_n |\lambda_n|$$

Dans le cas des Banach généraux, tout opérateur nucléaire  $u$  admet une décomposition  $u = \sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$ ,  $x'_i \in E'$ ,  $\|x'_i\| \leq 1$ ,  $y_i \in F$ ,  $\|y_i\| \leq 1$ ,  $\sum |\lambda_i| < \infty$ , et la borne inférieure de  $\sum |\lambda_i|$  pour toutes ces représentations est précisément  $\|u\|_1$ .

**PROPOSITION 2 :** Soient  $u : E \rightarrow F$  un opérateur nucléaire. A une application continue  $H \rightarrow E$  et  $B : F \rightarrow G$ . Alors  $B \circ u \circ A$  est un opérateur nucléaire et  $\|B \circ u \circ A\|_1 \leq \|A\| \|u\|_1 \|B\|$

On a en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E' \hat{\otimes} F & \xrightarrow{{}^t A \otimes B} & H' \hat{\otimes} G \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{L}(E;F) & \xrightarrow{(u \rightarrow B \circ u \circ A)} & \mathcal{L}(H;G) \end{array}$$

(car les 2 applications de  $E' \hat{\otimes} F$  dans  $\mathcal{L}(H;G)$  que définit ce diagramme sont continues, et coïncident pour  $u_0 \in E' \hat{\otimes} F$  de la forme  $x' \otimes y$ ).

Donc, si  $u$  est nucléaire,  $u_0$  étant un élément de  $E \hat{\otimes} F$  tel que  $\varphi(u_0) = u$ , on a  $({}^t A \otimes B)u_0 \in H' \hat{\otimes} G$  et  $B \circ u \circ A = \varphi(({}^t A \otimes B)(u_0))$ , donc  $B \circ u \circ A$  est nucléaire. Compte tenu de ce que  $\|{}^t A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ ,



on a une telle égalité dans  $\mathcal{L}_b(E;F)$ .

Réciproquement, si  $\sum |\lambda_i| < +\infty$ , si  $x'_i$  est une suite équicontinue et si  $(y_i)$  est contenue dans une partie complétante de  $F$ ,  $\sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$  converge dans  $\mathcal{L}_b(E;F)$  et définit un opérateur nucléaire.

PROPOSITION 4 : Pour qu'un opérateur  $u$  soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit de la forme  $u = \sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$  où  $\sum |\lambda_i| < +\infty$ ,  $(x'_i)$  suite équicontinue,  $(y_i)$  suite contenue dans une partie complétante.

PROPOSITION 5 : Si  $u$  est nucléaire,  $B \circ u \circ A$  est nucléaire (prop. 2)

COROLLAIRE : Si  $u$  est nucléaire de  $E$  dans  $F$ , elle le reste quand on renforce la topologie de  $E$  et qu'on affaiblit celle de  $F$ ; si  $E_1$  est un sous-espace de  $E$ ,  $F$  un sous-espace de  $F_1$ ,  $u$  est nucléaire de  $E_1$  dans  $F_1$ .

Par contre si  $u$  est une application nucléaire de  $E$  dans  $F$ , et si  $u(E)$  est contenu dans un sous-espace  $F_2$  de  $F$ ,  $u$  n'est pas nécessairement nucléaire de  $E$  dans  $F_2$ . De même si  $u$  est nulle sur un sous-espace  $E_2$  de  $E$ , elle n'est pas nécessairement nucléaire de  $E/E_2$  dans  $F$ .

## 5.- Transposée d'une application nucléaire.

PROPOSITION 6 : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $u \in L^1(E;F)$  alors  ${}^t u \in L^1(F';E')$  et  $\|{}^t u\|_1 \leq \|u\|_1$ . Réciproquement si  $F$  est réflexif, et  ${}^t u$  nucléaire,  $u$  est nucléaire et  $\|{}^t u\|_1 = \|u\|_1$ .

Soit en effet  $u \in L^1(E;F)$ ,  $u = \varphi(u_0)$ ,  $u_0 \in E' \hat{\otimes} F$ . Soit  $i$  l'injection de  $F \hat{\otimes} E'$  dans  $F'' \hat{\otimes} E'$  alors  ${}^t u = \varphi(i(S u_0))$ ,  ${}^t u : F' \rightarrow E'$ , donc  ${}^t u$  est nucléaire. Comme  $S$  est une isométrie et que  $\|i\| \leq 1$  (on peut même montrer que  $i$  est une isométrie), on a

$$\|{}^t u\|_1 \leq \inf_{\varphi(u_0)=u} \|i(S u_0)\| \leq \inf_{\varphi(u_0)=u} \|u_0\| = \|u\|_1$$

Si enfin  $F$  est réflexif et  ${}^t u$  nucléaire,  ${}^{tt} u$  est nucléaire de  $E''$  dans  $F'' = F$ , donc  $u$  est nucléaire de  $E$  dans  $F$ . Dans tous les cas connus, la propriété subsiste sans l'hypothèse de réflexivité de  $F$ .

COROLLAIRE : Soient  $E, F$  deux espaces localement convexes séparés; si  $u : E \rightarrow F$  est nucléaire,  ${}^t u : F'_c \rightarrow E'_b$  est nucléaire, et a fortiori  ${}^t u : F'_b \rightarrow E'_b$  ou  $F'_c \rightarrow E'_c$ .

En effet on a  ${}^t u = {}^t \alpha {}^t \beta {}^t \gamma$  (Cf. définition 2)  ${}^t \beta$  est nucléaire,  ${}^t \alpha$  est continue et  ${}^t \gamma$  est continue de  $F'_c$  dans  $F'_1$  si  $\gamma$  est compacte, ce qu'on a le droit de supposer.

## 6.- Propriétés de relèvement.

PROPOSITION 7 : Soient  $E, F, G$  trois espaces localement convexes séparés  $E \subset F$  ; soit  $u$  une application nucléaire  $E \rightarrow G$ . Il existe alors une application nucléaire  $v : F \rightarrow G$  prolongeant  $u$ . De plus dans le cas des Banach on peut supposer  $\|v\|_1 \leq \|u\|_1 + \varepsilon$ .

Bornons-nous à faire la démonstration dans le cas des Banach.

Considérons le diagramme déjà vu (prop. 2) :

$$\begin{array}{ccc} F' \hat{\otimes} G & \xrightarrow{t_i \otimes 1} & E' \hat{\otimes} G \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ L^1(F; G) & \xrightarrow{u \rightarrow i \circ u} & L^1(E; G) \end{array}$$

$i = \text{injection de } E \text{ dans } F$

Le trajet  $\rightarrow \downarrow$  est un épimorphisme métrique, donc aussi  $\downarrow \rightarrow$ ,  
C.Q.F.D.

PROPOSITION 8 . Soient  $E, F, G$  trois espaces localement convexes séparés  $F \subset E$ ,  $F$  fermé ; on suppose que tout disque compact de  $E/F$  est l'image d'une partie complétante de  $E$ . Dans ces conditions, toute application nucléaire  $u : G \rightarrow E/F$  provient par passage au quotient d'une application nucléaire  $v : G \rightarrow E$ . De plus dans le cas des Banach on peut supposer  $\|v\|_1 \leq \|u\|_1 + \varepsilon$ .

Posons  $H = E/F$ . Supposons que  $u$  provienne d'un élément  $u_0$  de  $G'_A \hat{\otimes} H_B$  où  $B$  est une partie complétante compacte de  $H$  (prop. 3). Soit  $B_1$  une partie complétante de  $E$  qui se projette sur  $B$ . On a un épimorphisme  $E_{B_1} \rightarrow H_B$  et il suffit de montrer que  $u_0$  s'obtient à partir d'un élément de  $G'_A \hat{\otimes} E_{B_1}$  par projection, c'est-à-dire qu'on peut se ramener au cas des Banach. Mais dans ce cas on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G' \hat{\otimes} E & \xrightarrow{1 \otimes P} & G' \hat{\otimes} H \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ L^1(G, E) & \xrightarrow{u \rightarrow P \circ u} & L^1(G, H) \end{array}$$

$P$ , projection canonique de  $E$  sur  $H$ .

Ici encore  $\rightarrow \downarrow$  est un épimorphisme, donc  $\downarrow \rightarrow$ ,  
C.Q.F.D.

### REMARQUES .

1°) On est dans les conditions d'application de la proposition 8, si  $E$  est un Fréchet, ou si  $E$  est un dual d'espace de Fréchet, et  $F$  faiblement

fermé.

2°) Reprenons la proposition 7 , si l'on utilise la proposition 4 , on peut écrire  $u$  sous la forme  $u = \sum \lambda_i y'_i \otimes z_i$  et si grâce à Hahn Banach on prolonge simultanément les  $y'_i$  en des formes  $\overline{y'_i}$  équicontinues sur  $F$  , on peut poser  $v = \sum \lambda_i \overline{y'_i} \otimes z_i$  ,  $v$  prolonge  $u$  ce qui redémontre la proposition 7 . De même pour la proposition 8 .

---