<u>**רשימת הגדרות מתורת הגרפים**</u>

- <u>**גרף לא מכוון**</u> $G=(V,E)$: מבנה המורכב משתי קבוצות, V – קבוצת הצמתים ו- E – קבוצת הקשתות כאשר כל קשת $e\in E$ מזוהה עם זוג צמתים $u,v\in V$ (הסימון לקשת המזוהה עם צמתים u ו- v הוא (u,v)).
- <u>**גרף מכוון**</u> $G=(V,E)$: מוגדר כמו בהגדרה הקודמת פרט לכך שכל קשת מזוהה עם זוג <u>סדור</u> של צמתים מ- V.
- בגרף לא מכוון נאמר כי קשת (u,v) <u>**נוגעת**</u> בצמתים u ו- v.
- בגרף מכוון נאמר כי קשת (u,v) <u>**יוצאת**</u> מצומת u <u>**ונכנסת**</u> לצומת v.
- צמתים u ו- v נקראים <u>**קצוות**</u> של קשת (u,v).
- בגרף <u>לא מכוון</u> שתי קשתות נקראות <u>**מקבילות**</u> עם יש להן אותם קצוות.
- בגרף <u>מכוון</u> שתי קשתות נקראות <u>**מקבילות**</u> אם שתיהן יוצאות מאותו צומת u ונכנסות לאותו צומת v, כמו כן שתי קשתות נקראות <u>**אנטי-מקבילות**</u> אם קשת אחת יוצאת מצומת u ונכנסת לצומת v, והשנייה יוצאת מצומת v ונכנסת לצומת u.
- קשת ששני קצותיה הם אותו צומת נקראת <u>**לולאה עצמית**</u>.
- <u>**גרף פשוט**</u>: גרף שאין בו קשתות מקבילות ולולאות עצמיות (בגרף מכוון פשוט מותר שיהיו קשתות אנטי-מקבילות).
- אם קיימת קשת (u,v) בגרף לא מכוון G אזי נאמר כי u ו- v <u>**שכנים**</u>.
- אם קיימת קשת (u,v) בגרף מכוון G אזי נאמר כי v <u>שכן</u> של u.
- בגרף לא מכוון, <u>**דרגת צומת**</u> v (המסומנת $d(v)$) היא מספר הקשתות הנוגעות בצומת v.
- בגרף מכוון, <u>**דרגת כניסה**</u> של צומת v (המסומנת $d_{in}(v)$) היא מספר קשתות הנכנסות לצומת v, <u>**ודרגת יציאה**</u> של צומת v (המסומנת $d_{out}(v)$) היא מספר קשתות היוצאות מ- v.
- <u>**מסלול**</u> בגרף הוא סידרת צמתים וקשתות לסירוגין המתחילה ומסתיימת בצומת: $P=<v_0,e_1,v_1,e_2,\cdots,v_{k-1},e_k,v_k>$ כך שלכל $1\le i\le k$, $e_i=(v_{i-1},v_i)\in E$. נאמר כי המסלול P כנ"ל הוא מסלול בין v_0 ל- v_k.
- <u>**אורך מסלול**</u> הוא מספר קשתות במסלול.
- נאמר כי צומת v <u>**נגיש**</u> מצומת u אם קיים בגרף מסלול המתחיל ב- u ומסתיים ב- v.
- <u>מסלול</u> נקרא <u>**פשוט**</u> אם כל הצמתים במסלול שונים זה מזה.
- <u>**תת מסלול**</u> של מסלול P הוא תת סידרה רצופה של P המתחילה ומסתיימת בצומת.

- המסלול $< v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{k-1}, e_k, v_k >$ נקרא **מעגל** אם $v_0 = v_k$ והמסלול מכיל לפחות קשת אחת.
- מעגל $< v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{k-1}, e_k, v_k >$ נקרא מעגל **פשוט** אם הצמתים $v_1, v_2, \cdots, v_k$ שונים זה מזה. כמו כן, המעגל $< v_0, e_1, v_1, e_1, v_0 >$ בגרף לא מכוון אינו נחשב למעגל פשוט.
- גרף שאין בו מעגלים פשוטים נקרא **חסר מעגלים**.
- גרף $G'=(V',E')$ נקרא **תת גרף** של גרף $G=(V,E)$ אם $V'\subseteq V$ ו- $E'\subseteq E$.
- בהינתן קבוצה $V'\subseteq V$, **תת הגרף** של $G=(V,E)$ **המושרה** ע"י V' הינו גרף $G'=(V',E')$ כאשר $E'=\{(u,v)\in E \mid u,v\in V'\}$.
- גרף לא מכוון נקרא **קשיר** אם קיים מסלול בגרף בין כל זוג צמתים.
- רכיב קשירות בגרף לא מכוון הוא תת קבוצה מקסימלית (מבחינת ההכלה) של צמתים V' כך שקיים מסלול בין כל זוג צמתים מ- V'.
- גרף מכוון נקרא **קשיר היטב** אם קיים בו מסלול (מכוון) מכל צומת לכל צומת.
- **רכיב קשיר היטב** בגרף מכוון הוא תת קבוצה מקסימלית (מבחינת הכלה) של צמתים V' כך שקיים מסלול מכוון מכל צומת ב- V' לכל צומת ב- V'.
- גרף תשתית של גרף מכוון G הוא גרף לא מכוון המתקבל מ- G ע"י הסרת כיווני הקשתות.
- **גרף מלא**: גרף לא מכוון בו כל זוג צמתים הינם שכנים (K_n – הסימון לגרף מלא על n צמתים).
- **גרף דו-צדדי**: גרף $G=(V,E)$ בו ניתן לחלק את קבוצת הצמתים לשתי תתי קבוצות V_1 ו- V_2 כך ש- $V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\phi$ ולכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in V_1, v\in V_2$ או $u\in V_2, v\in V_1$. V_1 ו- V_2 נקראים צדדי הגרף.
- **גרף דו צדדי מלא**: גרף דו-צדדי לא מכוון $G=(V,E)$ בעל צדדים V_1 ו- V_2 בו לכל $v_1\in V_1$ ו- $v_2\in V_2$ מתקיים $(v_1,v_2)\in E$.
- **יער לא מכוון**: גרף לא מכוון, פשוט וחסר מעגלים.
- **עץ לא מכוון**: גרף פשוט, קשיר וחסר מעגלים.
- צומת $r\in V$ בגרף מכוון $G=(V,E)$ נקרא **שורש** אם כל צומת $v\in V$ נגיש מ- r.
- **עץ מכוון**: גרף מכוון שיש לו שורש וגרף התשתית שלו הוא עץ לא מכוון.
- **יער מכוון**: גרף שהוא אוסף של עצים מכוונים.
- בעץ מכוון עם שורש r, כל צומת על המסלול היחיד מ- r לצומת v כלשהו נקרא **אב קדמון** של v. אם (w,v) היא הקשת האחרונה במסלול הנ"ל, אזי w נקרא **אב** של v.
- אם u הוא אב קדמון של v אזי נאמר כי v הוא **צאצא** של u. אם w הוא אב של v אזי נאמר כי v הוא בן של w.

- כל צומת בעץ מכוון הוא אב קדמון וצאצא של עצמו.
- צומת בעץ מכוון שאין לו בנים נקרא **<u>עלה</u>**, וכל צומת שאינו עלה נקרא <u>צומת פנימי</u>.
- אורך המסלול משורש r של עץ מכוון לצומת v נקרא **<u>עומק</u>** של v בעץ.
- העומק המרבי של צומת בעץ מכוון נקרא **<u>גובה</u>** העץ.

<u>תכונות בסיסיות של גרפים</u>

- עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מתקיים: $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$
- עבור גרף קשיר $G=(V,E)$ מתקיים: $|E| \geq |V|-1$.

<u>משפט אפיון לעצים לא מכוונים</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. G הוא עץ (קשיר וחסר מעגלים)
2. בין כל זוג צמתים ב- G קיים מסלול פשוט יחיד.
3. G קשיר אך הסרת קשת כלשהי מ- G תפגע בקשירותו.
4. G קשיר ו- $|E|=|V|-1$.
5. G חסר מעגלים ו- $|E|=|V|-1$.
6. G חסר מעגלים אך הוספת קשת כלשהי ל- G תיצור מעגל פשוט ב- G.

<u>משפט אפיון לעצים מכוונים</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. G הוא עץ מכוון.
2. ל- G יש שורש ממנו יש מסלול יחיד לכל צומת.
3. ל- G יש שורש r עם דרגת כניסה 0 ולכל צומת אחר v, $d_{in}(v)=1$.
4. ל- G יש שורש אך השמטת קשת כלשהי מ- G תפגע בתכונה הזו.
5. גרף התשתית של G קשיר, יש בו צומת r בעל $d_{in}(r)=0$ ולכל צומת אחר v, $d_{in}(v)=1$.