Tugas Pemrograman B

Metode Newton-Raphson untuk Pencarian Akar Persamaan Nonlinear

Komputasi Numerik 02

M. Avicenna Raffaiz Adiharsa
2206062844

Departement Teknik Elektro
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia

Abstract*— Pencarian akar dari suatu fungsi nonlinear adalah permasalahan umum dalam berbagai bidang teknik dan sains, termasuk dalam analisis struktural, sistem dinamik, serta simulasi proses fisik dan kimia. Dalam laporan ini, diimplementasikan metode Newton-Raphson untuk mencari akar persamaan $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, yang memiliki akar nyata positif. Proses iteratif ini melibatkan evaluasi fungsi dan turunannya pada titik tebakan awal untuk menghasilkan pendekatan akar yang lebih akurat. Dengan toleransi kesalahan relatif sebesar 0.0001 dan batas iterasi sebanyak 100, metode ini menunjukkan konvergensi cepat terhadap akar riil dalam waktu komputasi yang singkat. Hasil eksperimen menunjukkan bahwa metode ini sangat efisien dan andal untuk kasus yang sesuai.

I. Pendahuluan

Dalam dunia teknik, banyak permasalahan nyata yang melibatkan persamaan nonlinear yang tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Misalnya, dalam bidang rekayasa panas, dinamika fluida, atau mekanika struktur, insinyur seringkali dihadapkan pada persamaan yang kompleks dengan akar-akar yang sulit ditentukan secara analitik. Untuk mengatasi hal tersebut, digunakan metode numerik.

Salah satu pendekatan populer adalah metode Newton-Raphson, sebuah metode terbuka (open method) yang memanfaatkan turunan fungsi untuk mempercepat konvergensi terhadap akar. Metode ini menjadi andalan karena sifatnya yang kuadrat dalam konvergensi jika tebakan awal cukup dekat dengan akar. Laporan ini bertujuan mengevaluasi performa metode Newton-Raphson pada fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, sebuah studi kasus dari buku *Numerical Methods for Engineers* karya Chapra & Canale.

II. Studi Literatur

Metode Newton-Raphson ditemukan oleh Isaac Newton dan Joseph Raphson. Ini adalah metode iteratif yang menggunakan pendekatan linear lokal terhadap grafik fungsi untuk memprediksi letak akar. Proses iterasinya diberikan oleh:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'x_i)}$$

Kunci utama keberhasilan metode ini terletak pada dua hal: fungsi harus memiliki turunan pertama yang dapat dihitung dan tidak mendekati nol di sekitar akar, dan tebakan awal harus cukup dekat dengan akar agar tidak menyimpang ke arah yang salah atau menyebabkan divergensi.

Metode ini bersifat lokal, artinya sensitivitas terhadap tebakan awal sangat tinggi. Di sisi lain, jika digunakan secara tepat, metode ini jauh lebih cepat daripada metode bracketing seperti Bisection atau False-Position karena konvergensinya bersifat kuadratik dibandingkan linier.

III. Penjelasan Data yang Digunakan

Fungsi yang dianalisis berasal dari Example 6.3 di buku *Numerical Methods for Engineers*:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Fungsi ini kontinu dan terdiferensiasi pada domain real, serta diketahui memiliki akar riil positif yang terletak antara 1 dan 2. Secara grafis, fungsinya bersifat naik, dan grafiknya memotong sumbu-x antara 1.5 hingga 1.6.

Turunan pertama fungsi:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

Turunan ini selalu positif untuk $x > 0$, sehingga grafik fungsi bersifat naik dan tidak memiliki titik belok di interval yang kita analisis. Ini menjamin bahwa metode Newton-Raphson tidak akan terjebak dalam osilasi atau stagnasi selama tebakan awal dipilih secara cermat..

IV. Penjelasan Metode yang Digunakan

Metode Newton-Raphson membutuhkan dua komponen penting dalam setiap iterasinya: evaluasi fungsi dan evaluasi turunannya. Langkah-langkah dalam algoritma yang diimplementasikan adalah sebagai berikut:

1. Pilih tebakan awal x_0. Dalam kasus ini, $x_0 = 1.5$.
2. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$.
3. Hitung pendekatan baru

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'x_0)}$$

4. Ulangi proses hingga galat relatif ϵ lebih kecil dari batas toleransi atau jumlah iterasi melebihi maksimum.

Toleransi galat yang digunakan dalam implementasi ini adalah 0.0001 atau 0.01%, sedangkan jumlah iterasi maksimum ditetapkan 100 untuk mencegah infinite loop jika metode gagal konvergen.

V. Diskusi dan Analisa Hasil Eksperimen

Program dalam bahasa C berhasil menemukan akar fungsi dalam waktu sangat singkat dan hanya membutuhkan 4 iterasi. Berikut hasilnya:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{next}	*ea (%)*
1	1.5	2.3750	18.7500	1.3733	9.2233
2	1.3733	0.1343	16.6448	1.36526	0.5911
3	1.3652	0.0005	16.5139	1.36523	0.0023
4	1.3652	0.0000	16.5133	1.26523	0.0000

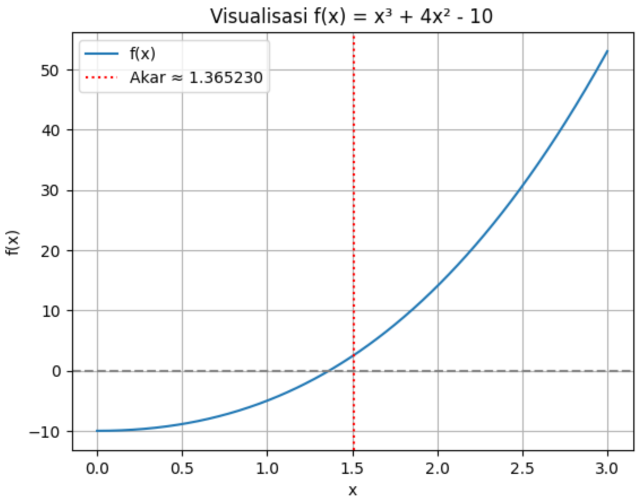

Fig. 1. Visualisasi fungsi dan akar $x^3 + 4x^2 - 10$

Untuk memverifikasi hasil dan melihat perilaku fungsi di sekitar akar, dibuatlah grafik fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ pada rentang $x = 0$ hingga $x = 3$. Grafik menunjukan bahwa fungsi memotong sumbu-x di sekitar $x \approx 1.365230$, yang sesuai dengan hasil perhitungan menggunakan metode Newton-Raphson.

VI. Kesimpulan

Metode Newton-Raphson sangat efektif untuk menyelesaikan persamaan nonlinear $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. Dengan tebakan awal yang baik dan syarat diferensiasi terpenuhi, metode ini menunjukkan konvergensi cepat dan akurasi tinggi. Meskipun memiliki potensi gagal konvergen jika turunan mendekati nol atau tebakan awal buruk, dalam kasus ini tidak ditemukan hambatan tersebut. Visualisasi grafik juga mendukung hasil iterasi numerik.

Penggunaan bahasa C memberikan fleksibilitas dan kecepatan dalam perhitungan, sedangkan visualisasi dengan Python membantu dalam verifikasi dan analisis hasil. Metode ini cocok untuk diimplementasikan dalam berbagai aplikasi teknik di masa depan.

VII. Link Github

https://github.com/avicennaraffaiz/TugasPemrogramanB_Raffa

References

[1] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2014.

[2] A. A. Goyal, and S. P. Narayan, "A Comparative Study of Newton-Raphson and Secant Methods in Root Finding," *International Journal of Computer Applications*, vol. 975, no. 8887, pp. 10–14, 2016. Available: https://doi.org/10.5120/ijca2016908887

[3] E. W. Weisstein, "Newton's Method," *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html

[4] S. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, 10th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2015.