Contact : Xavier GLOERFELT `xavier.gloerfelt@ensam.eu`

Table des matières

1 Couche limite laminaire 1
1.1 Approximation du profil de vitesse dans une couche limite 1
1.2 Couche limite laminaire accélérée 1
1.3 Calcul du point de décollement pour un profil de vitesse linéaire 2
1.4 Couche limite sur une projectile 3

2 Couche limite turbulente 3
2.1 Loi de puissance pour le profil de vitesse 3
2.2 Couche limite sans gradient de pression 3
2.3 Analyse de la couche limite de Prandtl 3
2.4 Transition vers la turbulence 4

1 Couche limite laminaire

1.1 Approximation du profil de vitesse dans une couche limite

Nous considérons une couche limite qui se développe sur une plaque plane, avec une vitesse de l'écoulement extérieur égale à u_∞. Le profil de vitesse $u(y)/u_\infty$ peut être approximé à travers une fonction du type

$$\frac{U}{u_\infty} = f(\eta), \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta} \tag{1}$$

Pour chaque profil considéré, montrer si le profil est adéquat pour représenter une couche limite. Après, utiliser une analyse intégrale pour trouver des expressions pour l'épaisseur de déplacement δ^*, l'épaisseur de quantité de mouvement θ, le facteur de forme H, le coefficient de frottement C_f et le coefficient de trainée C_D.

1. $\dfrac{U}{u_\infty} = f(\eta) = \dfrac{3}{2}\eta - \dfrac{1}{2}\eta^2$
2. $\dfrac{U}{u_\infty} = f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$
3. $\dfrac{U}{u_\infty} = f(\eta) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\eta\right)$
4. Comparer les résultats obtenus avec la solution de Blasius.

1.2 Couche limite laminaire accélérée

On considère une couche limite se développant sur une fine plaque plane, à bord d'attaque aigu, installée au milieu d'une soufflerie comme sur la figure 1 (étant donnée la symétrie, on ne représente ici que la moitié de la soufflerie).
La distance entre la plaque et les parois de la soufflerie est largement supérieure à l'épaisseur de la couche limite. Les parois de la soufflerie sont dessinées de façons telle à fournir la distribution de vitesse extérieure suivante :

$$u_\infty(x) = Ce^x \tag{1}$$

avec C une constante et x l'abscisse mesurée à partir du bord d'attaque de la plaque, de longueur 2 m. La vitesse extérieure au point E est égale à $u_\infty(x_E) = 0.8\,\text{m/s}$. La masse volumique et la viscosité cinématique de l'air sont $1.2\,\text{kg/m}^3$ et $1.5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$, respectivement. Supposons que

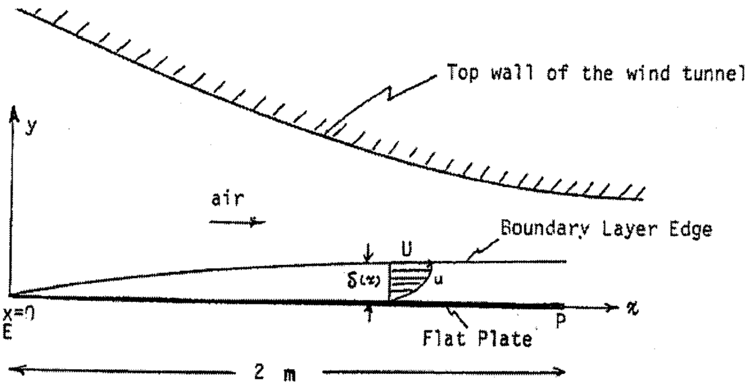

FIGURE 1 – Représentation de la couche limite.

la couche limite reste partout laminaire et que le profil de vitesse soit bien approché par une relation linéaire de la forme

$$\frac{U}{u_\infty} = \frac{y}{\delta} \tag{2}$$

où $\delta = \delta(x)$ est l'épaisseur locale de la couche limite.

1. Calculer le gradient de pression le long de la plaque.
2. Calculer la constante C et la vitesse extérieure au point P.
3. À l'aide de l'équation intégrale de von Karman :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + (2\theta + \delta^*)\frac{1}{u_\infty}\frac{\mathrm{d}u_\infty}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

avec δ^* l'épaisseur de déplacement, θ l'épaisseur de quantité de mouvement et τ_w la contrainte pariétale, établir une relation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} + P(x)Y = Q(x) \tag{7}$$

où $Y = \delta^2$ et $P(x)$ s'expriment en fonction de $u_\infty(x)$, $\frac{\mathrm{d}u_\infty}{\mathrm{d}x}$ et ν.

4. Résoudre l'équation (7) et en déduire l'épaisseur de couche limite δ au point P.
Note : l'équation (7) est une équation différentielle affine du premier ordre dont la solution peut s'écrire

$$Y(x)\exp\left(\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right) = Y(0) + \int_0^x \left[Q(t)\exp\left(\int_0^t P(u)\,\mathrm{d}u\right)\right]\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

5. Calculer la trainée s'exerçant globalement sur la plaque par unité d'envergure. On suppose que $e^{9x} \gg 1$.

1.3 Calcul du point de décollement pour un profil de vitesse linéaire

La détermination du point de décollement de la couche limite est un facteur dimensionnant pour de nombreuses géométries ayant un intérêt industriel. Dans ce cadre, le profil de pression extérieur créé par la géométrie peut-être assimilé à une distribution de vitesse extérieure générant le même gradient de pression. Ainsi, nous nous proposons d'étudier le point de décollement associé à un écoulement sur une plaque plane soumis à une vitesse extérieure linéaire du type

$$u_\infty(x) = U_0 - ax \tag{1}$$

avec U_0 et a des constantes positives et x la distance du bord d'attaque. Nous noterons par la suite ρ la masse volumique, p la pression.

1. Déterminer une expression du gradient de pression suivant x.
2. Déterminer une expression de l'épaisseur de quantité de mouvement θ par la méthode de Thwaites en fonction de $\overline{x} = ax/U_0$.
3. En déduire la position du point de décollement par la méthode de Thwaites. Cette position sera exprimée en fonction de $\overline{x} = ax/U_0$. Nous pourrons évaluer la performance de la méthode en comparant cette valeur à la solution numérique $\overline{x} = 0.12$.

1.4 Couche limite sur une projectile

La forme d'une projectile peut être approximée comme la composition d'un cylindre de longueur $L = 60\,\mathrm{cm}$ et diamètre $d = 20\,\mathrm{cm}$ avec une hémisphère sur une coté. Le projectile se déplace dans l'air, avec $\rho = 1.21\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 1.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/(m\,s)}$, à une vitesse de $U = 100\,\mathrm{m/s}$. Son coefficient de trainée est $C_D = 1$. Nous supposons que l'épaisseur de la couche limite est décrit par :

$$\frac{\delta}{x} = 0.379 \left(\frac{\rho U x}{\mu}\right)^{-1/5} \tag{1}$$

Où x est la distance à partir du bord d'attaque du projectile, et l'épaisseur de quantité de mouvement est $\theta {=} \frac{7}{72}\delta$.

1. Calculer la fraction de la trainée totale due au frottement visqueux sur la partie cylindrique du projectile, où le gradient de pression peut être considéré nul.

2 Couche limite turbulente

2.1 Loi de puissance pour le profil de vitesse

Nous définissons un profil de vitesse pour une couche limite de forme

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \qquad \text{pour} \qquad y < \delta \tag{1}$$

1. Calculer l'épaisseur de déplacement δ^*/δ en fonction de n.
2. Calculer l'épaisseur de quantité de mouvement θ/δ en fonction de n.
3. Calculer le facteur de forme H en fonction de n.

2.2 Couche limite sans gradient de pression

On considère une couche limite sans gradient de pression, pour laquelle le coefficient de frottement C_f et l'épaisseur de quantité de mouvement θ sont liés par

$$C_f = A\mathrm{Re}_\theta^{-\frac{1}{n}} \tag{1}$$

1. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\theta}{x} = \left[\frac{n}{n+1}\frac{A}{2}\right]^{\frac{n}{n+1}} \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} \qquad C_f = \frac{2n}{n+1}\frac{\theta}{x} \qquad C_D(L) = \frac{n+1}{n}C_f(L) \tag{2}$$

2.3 Analyse de la couche limite de Prandtl

En 1927, Prandtl a réalisé une analyse de couche limite turbulente sans gradient de pression en utilisant la formule suivante pour la contrainte pariétale :

$$\tau_w = 0.0225\rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta}\right)^{1/4} \tag{1}$$

et une loi de puissance (n=1/7) pour le profil de vitesse de la couche limite.

1. Montrer que $\dfrac{\delta}{x} = \dfrac{0.371}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$.
2. Montrer que $C_f = \dfrac{0.058}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$.
3. Montrer que $C_D(L) = \dfrac{0.072}{\mathrm{Re}_L^{1/5}}$.

2.4 Transition vers la turbulence

Pour des couches limites entièrement laminaires ou turbulentes, l'épaisseur de quantité de mouvement θ à une distance x du bord d'attaque de la plaque est donné par

$$\frac{\theta}{x} = \begin{cases} \dfrac{0.664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} & \text{laminaire} \\ \dfrac{0.0158}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulent} \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathrm{Re}_x = \dfrac{u_\infty x}{\nu}$, u_∞ étant la vitesse à l'infini. En réalité, la couche limite turbulente est usuellement précédée par une région initiale laminaire, comme montré en figure 2. Comme $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{C_f}{2}$ et le coefficient de frottement laminaire C_f a une valeur finie, l'épaisseur de quantité de mouvement doit être continu au point de transition.

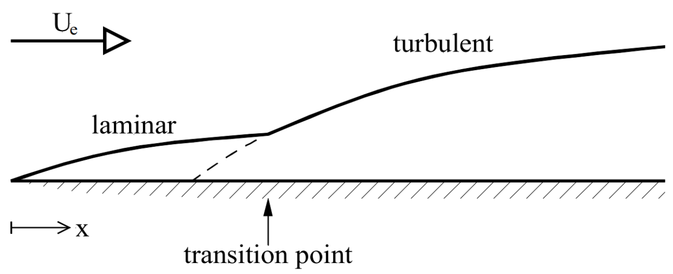

Figure 2

Sans considérer aucun développement intermédiaire, le coefficient de trainée total pour une côté d'une plaque de longueur L dépend seulement de l'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque :

$$C_D(L) = 2\frac{\theta(L)}{L} \tag{2}$$

1. Développer une procédure, illustré avec une diagramme ou avec du pseudo-code, qui montre les étapes pour calculer l'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque et le coefficient de trainée total pour une couche limite sur une plaque plane de longueur L. On suppose que $\mathrm{Re}_{x,tr}$ est donné.
2. On considère les valeurs suivantes : $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $\mathrm{Re}_{x,tr} = 5 \cdot 10^5$, $u_\infty = 8\,\mathrm{m/s}$. En utilisant l'algorithme développé à la question précédente, calculer :
   (a) La longueur de transition x_{tr} ;
   (b) L'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque $\theta(L)$;
   (c) Le coefficient de trainée C_D ;
   (d) La trainée totale D sur une côté d'une plaque rectangulaire lisse de dimension $L \times W = 4\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ pour un écoulement parallèle à L.