

# Chapitre 2

## Notions de base. Rappels de mécanique des fluides

### Notion de milieu continu

Pour décrire les propriétés d'un écoulement, il faut élaborer en premier lieu un modèle pour le fluide. Ce modèle peut être basé sur une approche *micro ou macroscopique*. Dans l'approche microscopique on s'intéresse au comportement de chacune des molécules du fluide, alors que dans l'approche macroscopique on définit un comportement moyen des molécules comprises dans un volume élémentaire donné dit particule fluide. L'approche microscopique, discrète, est qualifiée de *théorie cinétique* alors que l'approche macroscopique est dite *mécanique des milieux continus*. Aux conditions normales de température et de pression, le nombre de molécules dans un petit cube de  $10^{-3}$  mm d'arête dans le milieu ambiant est de l'ordre de  $2.7 \times 10^7$  (le libre parcours moyen correspondant, *i.e.* la distance moyenne que peut parcourir une molécule donnée sans entrer en collision avec d'autres molécules est de  $9.7 \times 10^{-5}$  mm). Il y a donc suffisamment de molécules dans ce petit volume pour que le fluide puisse être considéré comme un milieu continu et ses propriétés peuvent être déterminées sur la base de moyennes statistiques. La théorie des milieux continus offre donc une modélisation tout à fait adaptée au traitement de l'essentiel des problèmes d'aérodynamique et sera exclusivement utilisée dans ce cours <sup>1</sup>.

### Principes généraux

Nous considérons donc dorénavant le fluide comme un *milieu continu* et nous souhaitons maintenant construire les outils permettant de décrire l'écoulement de ce fluide. Pour y parvenir, nous allons procéder suivant la démarche générale suivante :

- nous sélectionnons trois principes physiques fondamentaux :
  - A)** la **masse** d'un système matériel <sup>2</sup> est conservée,
  - B)** le taux de variation dans le temps de la **quantité de mouvement** d'un système matériel est égal à la somme des forces qui s'exercent sur ce système (seconde loi de Newton),
  - C)** l'**énergie** d'un système matériel est conservée (premier principe de la thermodynamique) ;

---

<sup>1</sup>Notez cependant que, à une altitude de 130 km, il y a moins d'une molécule dans le petit cube de  $10^{-3}$  mm d'arête précédemment mentionné et le libre parcours moyen atteint alors 10 m ! Dans de telles conditions, rencontrées par les ingénieurs en charge de problèmes spatiaux, le fluide ambiant peut difficilement être considéré comme un milieu continu et l'utilisation de la théorie cinétique s'avère indispensable.

<sup>2</sup>Un système matériel est un ensemble de particules fluides.

- nous appliquons les principes physiques **A**, **B** et **C** à un système matériel bien choisi ;
- nous en déduisons les équations mathématiques qui traduisent ces principes physiques et permettent de décrire quantitativement un écoulement.

### Choix d'un système matériel

Dans le cas de la mécanique des solides la deuxième étape de la démarche ci-dessus ne pose pas de problème particulier : un solide est plutôt facile à voir et à définir ; il semble naturel d'étudier son mouvement en le choisissant comme le système matériel auquel s'appliquent les principes physiques ci-dessus.

Le mouvement d'un fluide possède *a priori* une nature plus difficile à saisir : à quel système matériel pouvons-nous appliquer ces principes physiques fondamentaux ?

Pour répondre à cette question considérons un écoulement général visualisé par les lignes de courant de la figure 2.1(a).

Considérons maintenant un volume "imaginaire" englobant une région *finie* de l'écoulement ; ce volume définit un *volume de contrôle*  $\mathcal{V}$  ; il est limité par une surface fermée  $\mathcal{S}$ , dite surface de contrôle, à travers laquelle le fluide peut entrer et sortir librement du volume  $\mathcal{V}$ .

Ce volume de contrôle peut être *fixe* (Fig. 2.1(b)), auquel cas l'écoulement traverse  $\mathcal{V}$ , ou bien *en mouvement avec le fluide* de sorte que les mêmes particules de fluide soient toujours présentes à l'intérieur du volume de contrôle que l'on qualifie alors de volume de contrôle matériel et que l'on note  $\mathcal{V}(t)$  pour indiquer qu'il évolue au cours du temps (Fig.2.1(c)).

Si nous appliquons les principes physiques fondamentaux **A**, **B** et **C** au volume de contrôle *fini*  $\mathcal{V}$  ou  $\mathcal{V}(t)$ , nous obtenons les équations de l'écoulement *sous forme intégrale* ; selon que le volume de contrôle est fixe ( $\mathcal{V}$ ) ou en mouvement avec le fluide ( $\mathcal{V}(t)$ ), ces équations seront dites écrites sous forme *conservative* ou *non-conservative* ; ces deux formes des équations de l'écoulement sont naturellement équivalentes puisqu'elles traduisent le même principe physique.

Alternativement, on peut considérer un élément de fluide *infinitésimal* - au sens du calcul différentiel mais assez grand cependant pour contenir un nombre de molécules tel que l'hypothèse de milieu continu s'applique ; un tel élément correspond à la notion de *particule fluide* - qui définit un volume de contrôle élémentaire  $d\mathcal{V}$ . Cet élément de fluide infinitésimal peut être fixe, auquel cas le fluide s'écoule à travers  $d\mathcal{V}$  (Fig.2.1(d)) ou en mouvement avec le fluide (Fig.2.1(e)). En appliquant les principes physiques fondamentaux à ce volume de contrôle élémentaire, on obtient les équations de l'écoulement sous forme différentielle, conservative ou non-conservative selon que  $d\mathcal{V}$  est supposé fixe ou en mouvement.

### Démarche suivie dans ce cours

Dans ce cours, nous allons privilégier le choix d'un volume de contrôle fini pour établir les équations de l'écoulement ; nous déduirons alors de la formulation intégrale (globale) les formes différentielles (locales) conservative ou non-conservative de ces équations <sup>3</sup>.

Avant d'en venir à la formulation des principes physiques **A**, **B** et **C**, nous définissons une notion préliminaire très importante dans l'étude de la dynamique des fluides : la dérivée matérielle ou particulaire d'une grandeur caractéristique de l'écoulement.

---

<sup>3</sup>L'approche différentielle, qui s'appuie sur un volume de contrôle élémentaire est *a priori* plus concrète et donc plus simple à comprendre que l'approche intégrale ; cependant, sa mise en oeuvre, si elle est effectivement simple dans le cas de la conservation de la masse, devient vite fastidieuse lorsqu'il s'agit de traduire un bilan de quantité de mouvement ou d'énergie.

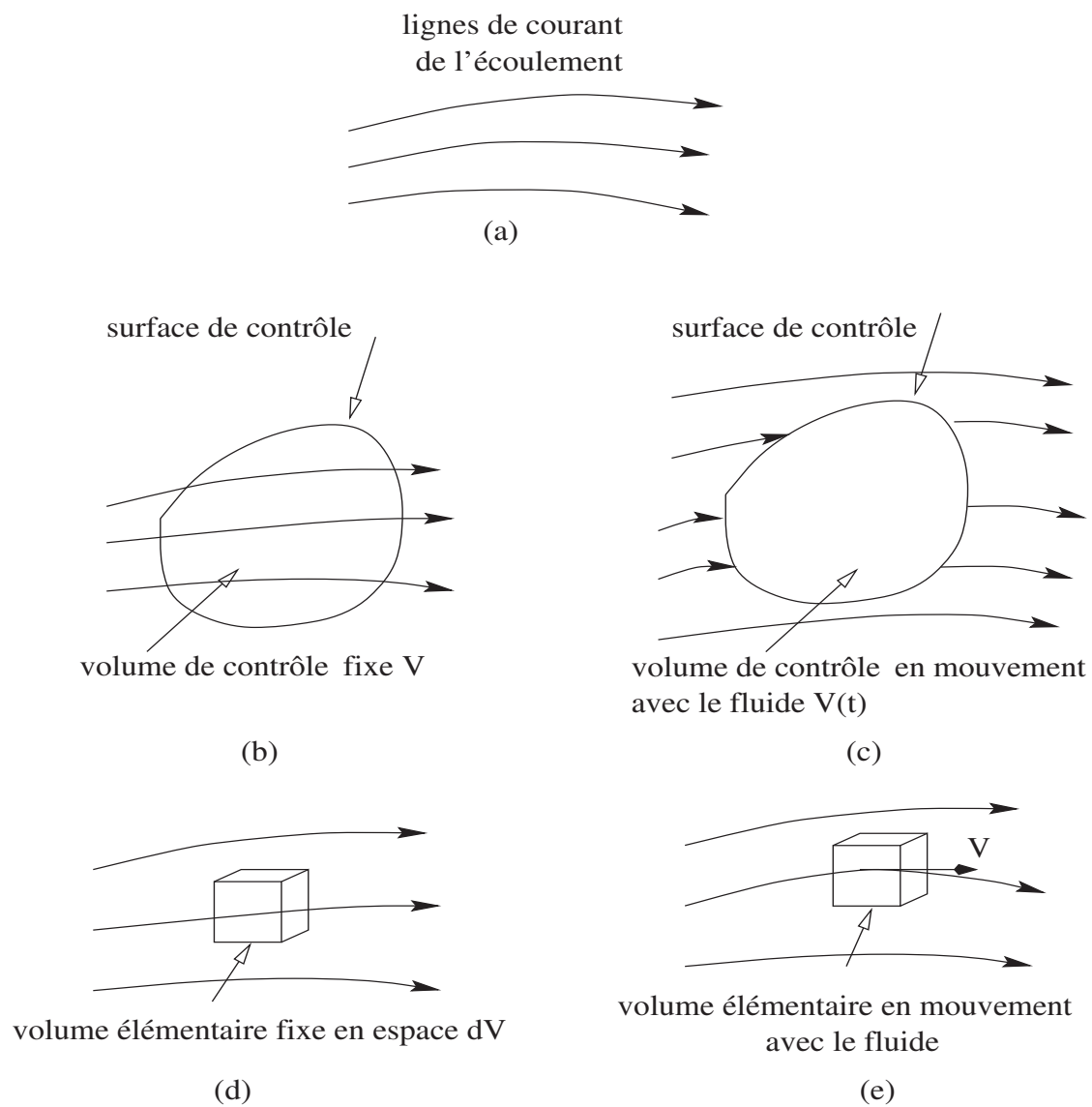


FIG. 2.1 – Différents systèmes matériels utiles pour décrire l'écoulement d'un fluide.

## 2.1 Notion de dérivée matérielle

Considérons une particule fluide, assimilable à un point de l'espace sur la Fig. 2.2, en mouvement avec un écoulement. Cette particule se déplace dans un espace auquel est associé un repère cartésien  $(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  ; son vecteur vitesse dans ce repère est donné par :

$$\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$$

où les composantes cartésiennes de la vitesse sont fonction de la position  $(x, y, z)$  et du temps  $t$  :  $u = u(x, y, z, t) = u(\underline{r}, t)$  et similairement pour  $v$  et  $w$ . Considérons alors par exemple le champ de masse volumique  $\rho = \rho(\underline{r}, t)$  - si  $dm$  est la masse d'une particule fluide de volume  $d\mathcal{V}$ , la masse volumique  $\rho$  est définie par  $dm = \rho d\mathcal{V}$  -.

A l'instant  $t_1$ , l'élément de fluide est situé au point 1 de coordonnées  $\underline{r}_1$  et sa masse volumique en ce point vaut  $\rho_1 = \rho(\underline{r}_1, t_1)$ . A l'instant ultérieur  $t_2$ , ce *même* élément de fluide s'est déplacé au point 2 de coordonnées  $\underline{r}_2$  et sa masse volumique vaut alors  $\rho_2 = \rho(\underline{r}_2, t_2)$ .

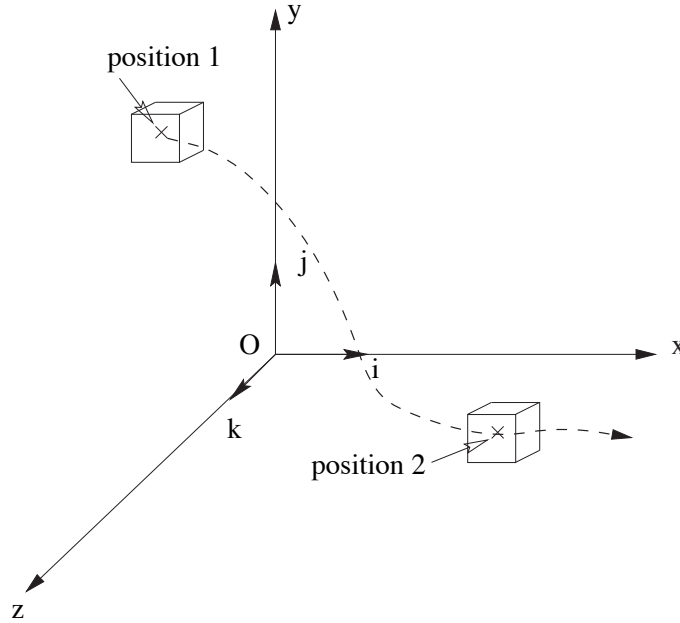


FIG. 2.2 – Élément en mouvement avec le fluide.

On peut relier  $\rho_2$  à  $\rho_1$  en écrivant un développement en série de Taylor de la masse volumique autour du point 1 :

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1(x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1(y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1(z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1(t_2 - t_1) + (\text{termes d'ordre supérieur})$$

Si on divise cette expression par  $(t_2 - t_1)$  et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur on obtient le taux de variation temporelle *moyen* de l'élément de fluide lorsqu'il se déplace du point 1 au point 2 :

$$\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}\right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 \left(\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right)$$

Le taux de variation instantané au cours du temps est obtenu en prenant  $t_2 \rightarrow t_1$ . Par définition de la vitesse de l'élément on a :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) = u_1$$

et similairement pour les composantes  $v_1$  et  $w_1$  de la vitesse au point 1. On peut donc écrire :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}\right) = \left(\frac{D\rho}{Dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + u_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 + v_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 + w_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1$$

La quantité  $\left(\frac{D\rho}{Dt}\right)_1$  désigne le taux de variation temporelle *instantané* de l'élément de fluide lorsqu'il passe au point 1. Le point 1 pouvant être n'importe quel point de l'espace considéré, on peut abandonner l'indice 1 et écrire finalement en termes d'opérateurs :

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + u \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + v \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + w \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (2.1)$$

Le taux de variation temporelle instantané de la masse volumique, noté  $\frac{D\rho}{Dt}$ , est appelé *dérivée particulaire* ou *dérivée matérielle* : il correspond physiquement au taux de variation temporelle de la masse volumique d'un élément de fluide *lorsque l'on suit le mouvement de cet élément*.

Si on introduit l'opérateur vectoriel  $\nabla$  :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \quad (2.2)$$

on peut réécrire :

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{dérivée particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\underline{V} \cdot \nabla}_{\text{dérivée convective}} \quad (2.3)$$

Une grandeur physique associée à une particule fluide varie donc en passant en un point de l'écoulement parce que :

- *en ce point donné*, la grandeur physique en question peut présenter une variation temporelle  $\Rightarrow$  dérivée locale  $\frac{\partial}{\partial t}$
- la particule fluide est *en mouvement vers un autre point de l'écoulement* en lequel la grandeur physique étudiée aura changé de valeur  $\Rightarrow$  dérivée convective  $\underline{V} \cdot \nabla$

Exemple 1 :

Soit une fusée sonde effectuant un vol vertical dans une atmosphère dont la température décroît linéairement à partir du sol suivant la loi :

$$T(x, y, z) = T_0 - bz \quad \text{avec} \quad b = 8 \times 10^{-3} K/m$$

L'engin est muni d'un capteur de température. Calculer le taux de variation de la température mesurée par ce capteur lorsque la fusée s'élève avec une vitesse de  $360 \text{ km/h}$ .

- Le taux de variation au cours du temps de la température mesurée par le capteur est la dérivée matérielle de cette température :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla T$$

où  $\underline{V}$  est la vitesse du capteur, *i.e.* la vitesse de la fusée. Le champ de température  $T(x, y, z)$  est stationnaire ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ) et tel que  $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial z} \underline{k} = -b \underline{k}$  (où  $\underline{k}$  est le vecteur unitaire associé à l'axe  $z$  supposé vertical ascendant). La vitesse du capteur vaut  $w \underline{k}$  avec  $w = 100 \text{ m/s}$ . Ainsi :

$$\frac{DT}{Dt} = -bw = -0.8 \text{ K/s}$$

La température mesurée par le capteur diminue donc de  $0.8 \text{ K}$  toutes les secondes.  $\square$

#### Exemple 2 :

Par définition l'accélération d'une particule fluide est la dérivée matérielle ou particulaire de la vitesse de cette particule, elle-même dérivée matérielle du vecteur position. On note  $\gamma_i$  la  $i^{\text{me}}$  composante du vecteur accélération ; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \gamma_i = \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v_i \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Dans le développement ci-dessus on a noté  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  et  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les composantes du vecteur position (au lieu de  $u, v, w$  pour les composantes du vecteur vitesse et  $x, y, z$  pour celles du vecteur position comme dans l'exemple précédent) afin de pouvoir adopter une notation indicielle compacte, très classique en mécanique, dite convention d'Einstein, selon laquelle la présence d'un même indice doublé dans une expression signifie une sommation sur cette indice.

#### Remarque :

Les développements précédents avaient pour but de donner une signification physique à la notion de dérivée matérielle. On peut raisonner de la façon plus mathématique suivante. Soit une particule fluide en mouvement ; sa position à l'instant  $t$  est donnée par  $(x, y, z)$ . La masse volumique (par exemple) de cette particule fluide à l'instant  $t$  s'écrit donc :

$$\rho(x, y, z, t) = \rho(x(t), y(t), z(t), t)$$

puisque la position de la particule évolue au cours du temps. On peut alors calculer la dérivée totale de  $\rho$  par rapport au temps en appliquant les règles classiques de dérivation composée :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Puisque  $u = \frac{dx}{dt}$  et similairement pour  $v$  et  $w$ , on constate donc que la *dérivée totale* d'une grandeur par rapport au temps n'est rien d'autre que la dérivée matérielle de cette grandeur (et inversement). Cette importante notion préliminaire établie, nous pouvons nous intéresser maintenant à l'obtention des équations qui régissent l'écoulement d'un fluide.

## 2.2 Equation de conservation de la masse

### 2.2.1 Forme intégrale

#### Cas d'un volume de contrôle fini en mouvement avec le fluide

Pour traduire en équation le principe de conservation de la masse, considérons tout d'abord un volume de contrôle fini  $\mathcal{V}(t)$  se déplaçant avec le fluide (cf. Fig.2.1(b)).

Le volume de contrôle fini  $\mathcal{V}(t)$  est formé d'un ensemble de particules fluides (toujours les mêmes) - on rappelle qu'une particule fluide est le plus petit élément de fluide dont les propriétés macroscopiques ne sont pas influencées par des molécules individuelles -. Soit  $dm$  la masse de toutes les molécules d'une particule fluide de volume élémentaire  $d\mathcal{V}$ ; la masse volumique du fluide  $\rho$  vérifie alors :

$$dm = \rho d\mathcal{V}$$

La masse de fluide contenue dans le volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  est donnée par :

$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho d\mathcal{V}$$

La variation de la masse  $m$  quand  $\mathcal{V}(t)$  se déplace avec le fluide est par définition donnée par la dérivée matérielle de  $m$ . Puisque la masse de chaque particule fluide est conservée au cours du mouvement (principe physique **A**), il en va de même pour la masse globale  $m$  du volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  et on peut écrire :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho d\mathcal{V} \right) = 0 \quad (2.4)$$

#### Cas d'un volume de contrôle fini fixe

Considérons maintenant un volume de contrôle fini  $\mathcal{V}$  fixe, de surface de contrôle  $\mathcal{S}$ , à travers laquelle le fluide s'écoule librement. Le principe de conservation de la masse appliqué à  $\mathcal{V}$  signifie que le taux de variation de la masse à l'intérieur du volume de contrôle  $\mathcal{V}$  est égal au flux de masse à travers la surface de contrôle  $\mathcal{S}$  : s'il entre plus de masse dans  $\mathcal{V}$  qu'il n'en sort, ce taux de variation sera positif, traduisant une augmentation de la masse contenue dans  $\mathcal{V}$ ; dans le cas contraire, un taux de variation négatif correspond à une masse de fluide sortant de  $\mathcal{V}$  plus importante que la masse de fluide y entrant.

Le flux de masse  $\mathcal{F}^m$  à travers la surface de contrôle  $\mathcal{S}$  est égal à la somme des flux de masse à travers les surfaces infinitésimales  $d\mathcal{S}$  qui composent  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{F}^m = \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{F}^m$$

avec un flux élémentaire  $d\mathcal{F}^m$  donné par :

$$d\mathcal{F}^m = \rho V_n d\mathcal{S}$$

où  $V_n$  désigne la composante de la vitesse  $\underline{V}$  perpendiculaire à l'élément de surface  $d\mathcal{S}$  (cf. Fig.2.3). On peut aussi écrire  $V_n = \underline{V} \cdot \underline{n}$ , où  $\underline{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $d\mathcal{S}$  *pointant par convention vers l'extérieur du volume de contrôle*. Ainsi, si le vecteur vitesse  $\underline{V}$  pointe également vers l'extérieur du volume de contrôle, le flux de masse  $\rho \underline{V} \cdot \underline{n}$  est positif ; autrement dit, avec ce choix d'orientation de la normale - qui est une convention quasi-universelle - un flux de masse hors du volume de contrôle est compté positivement et inversement un flux de masse dans le volume de contrôle est compté négativement. On a donc finalement :

$$\mathcal{F}^m = \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$$

Par ailleurs, puisque le volume de contrôle considéré est fixe, le taux de variation temporelle de la masse de fluide contenue dans  $\mathcal{V}$  est simplement donné par :

$$\tau^m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}.$$

Cette variation de masse est positive s'il entre plus de masse dans le volume de contrôle qu'il n'en sort d'où, compte tenu des conventions adoptées plus haut :

$$\tau^m = -\mathcal{F}^m$$

soit

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0 \quad (2.5)$$

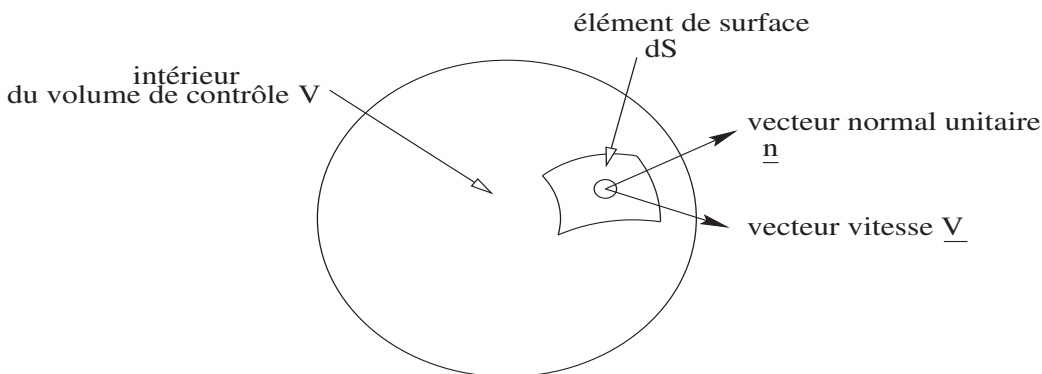


FIG. 2.3 – Normale extérieure au volume de contrôle.



**Lien entre les deux formulations intégrales : théorème de transport**

Nous considérons à nouveau un volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$ , qui est donc par définition en mouvement avec le fluide en écoulement. Nous cherchons à évaluer le taux de variation dans le temps d'une quantité scalaire  $f(\underline{r}, t)$  définie sur  $\mathcal{V}(t)$  ( $f$  peut être la masse volumique  $\rho$ , la température  $T$  ...); nous voulons donc calculer la quantité :

$$\mathcal{I} = \frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} f(\underline{r}, t) d\mathcal{V} \right)$$

Par définition d'un taux de variation instantané, on a :

$$\mathcal{I} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} f(\underline{r}, t) d\mathcal{V} \right]$$

La difficulté de l'évaluation de  $\mathcal{I}$  est liée au fait que dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  on a variation à la fois de la grandeur  $f$  et du volume de contrôle  $\mathcal{V}(t)$ . On va contourner cette difficulté en analysant tout d'abord la variation de  $\mathcal{V}(t)$ . La surface de contrôle  $\mathcal{S}(t)$  associée à  $\mathcal{V}(t)$  peut être décomposée en deux sous-surfaces selon le signe de  $\underline{V} \cdot \underline{n}$  ( $\underline{V}$  désigne toujours la vitesse locale du fluide et  $\underline{n}$  la normale extérieure à  $\mathcal{S}(t)$ ); on note  $\mathcal{S}_1(t)$  la partie de  $\mathcal{S}(t)$  sur laquelle  $\underline{V} \cdot \underline{n} \leq 0$  et  $\mathcal{S}_2(t)$  celle sur laquelle  $\underline{V} \cdot \underline{n} \geq 0$ . Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ ,  $\mathcal{S}_1(t)$  balaie un volume  $\mathcal{V}_1(\Delta t)$  qui se retrouve à  $t + \Delta t$  à l'extérieur de  $\mathcal{V}(t + \Delta t)$  (puisque  $\underline{V} \cdot \underline{n} \leq 0$  sur  $\mathcal{S}_1(t)$ ) et similairement  $\mathcal{S}_2(t)$  balaie un volume  $\mathcal{V}_2(\Delta t)$  qui se retrouve à  $t + \Delta t$  à l'intérieur de  $\mathcal{V}(t + \Delta t)$  (puisque  $\underline{V} \cdot \underline{n} \geq 0$  sur  $\mathcal{S}_2(t)$ ). Par conséquent, la variation du volume de contrôle matériel entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + \Delta t$  peut s'écrire :  $\mathcal{V}(t + \Delta t) = \mathcal{V}(t) + \mathcal{V}_2(\Delta t) - \mathcal{V}_1(\Delta t)$  (cf. Fig. 2.4(a)). On peut alors réécrire  $\mathcal{I}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\mathcal{V}(t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} f(\underline{r}, t) d\mathcal{V} \right] \\ & + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_2(\Delta t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_1(\Delta t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

On identifie naturellement le premier terme entre crochets de cette expression à  $\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial f(\underline{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V}$ .

Pour évaluer les termes restants, nous allons raisonner sur les surfaces de contrôle. Le volume  $\mathcal{V}_2(\Delta t)$  par exemple est la somme des volumes élémentaires balayés pendant  $\Delta t$  par une surface élémentaire de  $\mathcal{S}_2(t)$  (cf. Fig. 2.4(b)). On peut donc écrire dans ce cas  $d\mathcal{V} = (\underline{V} \cdot \underline{n}) \Delta t d\mathcal{S}$ , d'où :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_2(\Delta t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_2(t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_2(t)} f(\underline{r}, t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$$

On établit similairement :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{V}_1(\Delta t)} f(\underline{r}, t + \Delta t) d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{S}_1(t)} f(\underline{r}, t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$$

où le signe  $-$  provient du fait que  $\underline{V} \cdot \underline{n}$  étant négatif sur  $\mathcal{S}_1(t)$ , l'élément de volume élémentaire  $d\mathcal{V}$  balayé par un élément de surface élémentaire de  $\mathcal{S}_1(t)$  pendant  $\Delta t$  est donné par  $d\mathcal{V} = -(\underline{V} \cdot \underline{n}) \Delta t d\mathcal{S}$ . Puisque  $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_2(t)$ , on obtient finalement :

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial f(\underline{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}(t)} f(\underline{r}, t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{V}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant, dit théorème de transport :

*Le taux de variation au cours du temps de l'intégrale d'une grandeur scalaire  $f$  sur le volume matériel  $\mathcal{V}(t)$  est égal à la somme de l'intégrale sur le volume matériel  $\mathcal{V}(t)$  de la variation de  $f$  par rapport au temps et du flux de  $f$  à travers la surface de  $\mathcal{V}(t)$ .*

Soit, en termes mathématiques :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} f(\underline{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial f(\underline{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{S(t)} f(\underline{r}, t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{V} \quad (2.6)$$

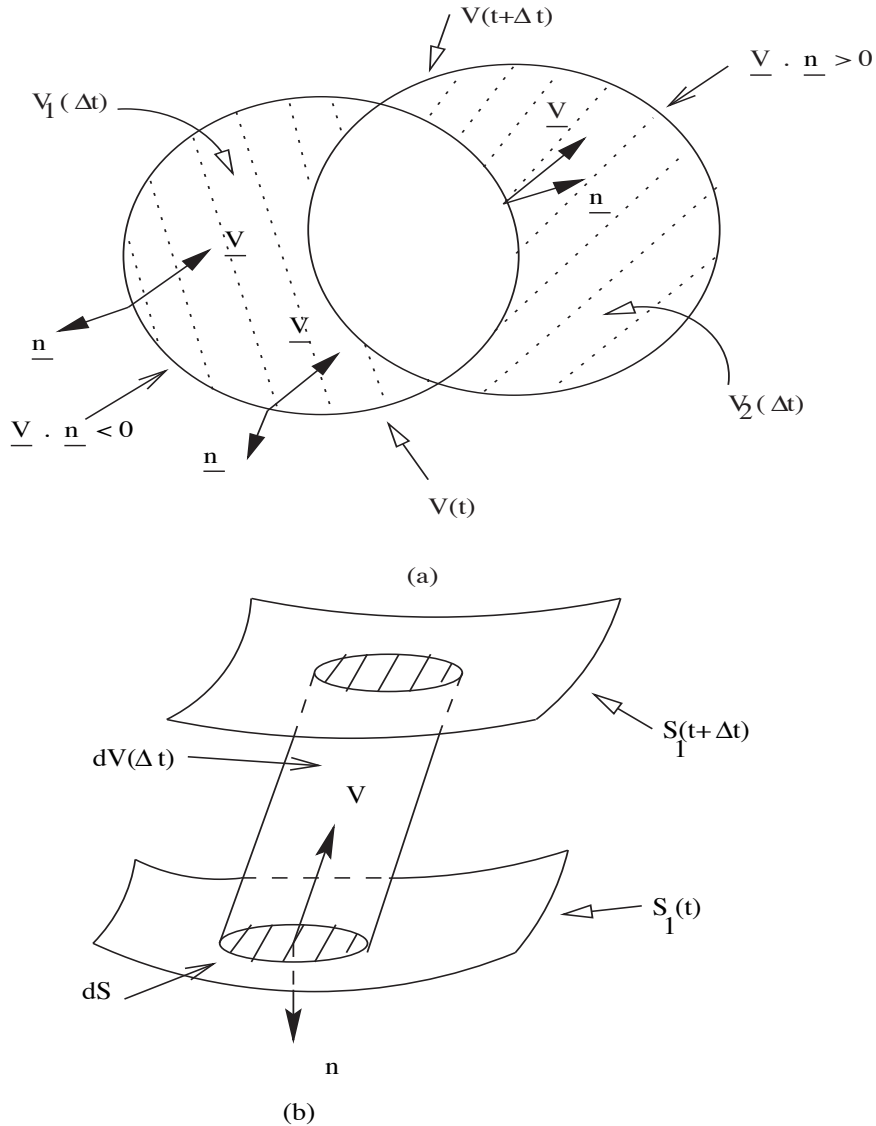


FIG. 2.4 – Variation du volume  $\mathcal{V}(t)$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

Remarque 1 :

La relation (2.6) appliquée avec  $f = \rho$  permet de prouver immédiatement l'équivalence entre les

formulations (2.4) et (2.5) de la conservation de la masse. On constate en effet que (2.4) peut s'écrire :

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}(t)} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

et cette équation est en particulier équivalente à (2.5) lorsque le volume matériel  $\mathcal{V}(t)$  coïncide avec le volume fixe  $\mathcal{V}$ .

Remarque 2 :

Si on applique (2.6) dans le cas particulier où  $f = 1$ , on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{V}$$

On peut alors remarquer que :

- l'intégrale  $\int_{\mathcal{V}(t)} d\mathcal{V}$  n'est rien d'autre que le volume matériel  $\mathcal{V}(t)$
- l'intégrale de surface  $\int_{\mathcal{S}(t)} \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{V}$  peut être transformée en une intégrale de volume à l'aide de l'important théorème de Green-Ostrogradsky qui stipule que :

$$\int_{\mathcal{S}} \phi \underline{F} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\phi \underline{F}) d\mathcal{V} \quad (2.7)$$

où  $\phi$  (resp.  $\underline{F}$ ) est une grandeur scalaire (resp. vectorielle) et  $\nabla \cdot (\phi \underline{F}) = \text{div}(\phi \underline{F}) = \frac{\partial(\phi F_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi F_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi F_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\phi F_i)}{\partial x_i}$ <sup>4</sup>.

On a donc :

$$\frac{D\mathcal{V}(t)}{Dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot \underline{V} d\mathcal{V}$$

Si on choisit alors comme volume matériel  $\mathcal{V}(t)$  un volume de contrôle élémentaire  $\delta\mathcal{V}(t)$  sur lequel la quantité  $\nabla \cdot \underline{V}$  peut être supposée constante, on peut écrire :

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{D\delta\mathcal{V}(t)}{Dt} = \nabla \cdot \underline{V} \quad (2.8)$$

Physiquement, on a donc établi que le taux de variation relatif du volume d'un élément de fluide est égal à la divergence de la vitesse  $\underline{V}$ . Si  $\nabla \cdot \underline{V} = \text{div}(\underline{V}) \geq 0$ , le volume de l'élément augmente (le fluide se détend) ; si  $\nabla \cdot \underline{V} \leq 0$ , le volume de l'élément diminue (le fluide se comprime). Si le volume de l'élément de fluide n'a pas de variation relative au cours du mouvement de cet élément, cela signifie que le fluide est *incompressible* ou que les effets de compressibilité sont négligeables dans l'écoulement considéré. On observe donc qu'un fluide incompressible est tel que  $\text{div}(\underline{V}) = 0$  en tout point de l'écoulement.

Remarque 3 :

---

<sup>4</sup>On rappelle que l'on a utilisé dans cette dernière expression la convention d'Einstein selon laquelle la présence d'un même indice doublé dans une expression signifie une sommation sur cet indice.

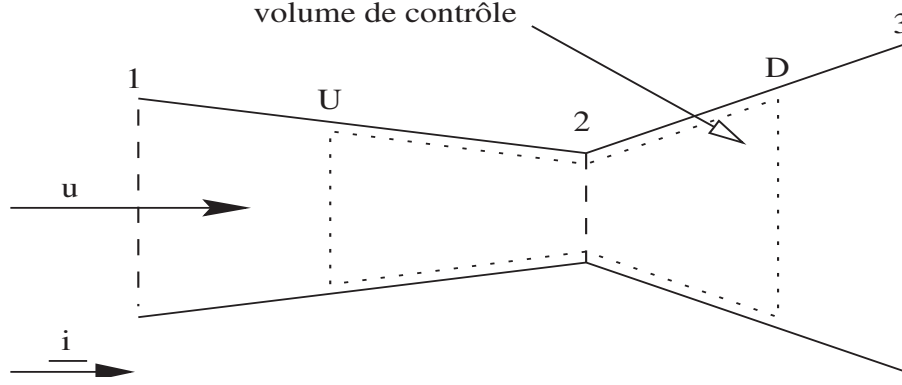


FIG. 2.5 – Géométrie du tuyau et volume de contrôle.

On a établi le résultat (2.6) dans le cas où  $f$  est une grandeur scalaire. Si on souhaite évaluer le taux de variation de l'intégrale d'une grandeur vectorielle  $\underline{F}(\underline{r}, t)$  sur le volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$ , on a intérêt à raisonner sur les composantes du vecteur  $\underline{F}$  :

$$\underline{F}(\underline{r}, t) = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} = F_1 \underline{e}_1 + F_2 \underline{e}_2 + F_3 \underline{e}_3 = F_i \underline{e}_i$$

On peut en effet écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \underline{F} d\mathcal{V} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F_i \underline{e}_i d\mathcal{V} = \left[ \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F_i d\mathcal{V} \right] \underline{e}_i$$

puisque les  $\underline{e}_i$  sont des vecteurs fixes.

En appliquant alors (2.6) avec  $f = F_i$ , on obtient finalement :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \underline{F}(\underline{r}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \underline{F}(\underline{r}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{F}(\underline{r}, t) \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} \quad (2.9)$$

### Exemple d'utilisation de la formulation intégrale (2.5)

On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique constante dans un tuyau de section circulaire (cf. Fig.2.5). On suppose la vitesse  $u$  du fluide uniforme dans une section du tuyau. Déterminer  $u_2/u_1$  et  $u_2/u_3$  sachant que  $d_1 = 2d_2$  et  $d_3 = 3d_2$ .

- On choisit comme volume de contrôle fixe  $\mathcal{V}$  une portion du tuyau comprise entre deux sections quelconques  $S_U$  à l'amont (*upstream*) et  $S_D$  à l'aval (*downstream*). La surface de contrôle associée à  $\mathcal{V}$  sera notée  $\mathcal{S}$ .

La conservation de la masse appliquée à  $\mathcal{V}$  s'écrit (cf. (2.5)) :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

Comme on suppose  $\rho = cste$ , cette relation se simplifie en :

$$\int_S \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

Le tuyau étant implicitement supposé étanche, il n'y a pas de flux de masse à travers ses parois, de sorte que l'égalité ci-dessus se réduit à :

$$\int_{S_U} \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{S_D} \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

Sur  $S_U$ ,  $\underline{V} = u_U \underline{i}$  et  $\underline{n} = -\underline{i}$  (normale unitaire *extérieure* au volume de contrôle), tandis que sur  $S_D$ ,  $\underline{V} = u_D \underline{i}$  et  $\underline{n} = \underline{i}$ .

On a donc tout simplement :

$$-u_U \int_{S_U} d\mathcal{S} + u_D \int_{S_D} d\mathcal{S} = 0$$

où les vitesses  $u_U$  et  $u_D$  ont pu être "sorties" des intégrales de surface puisque  $u$  est supposée constante dans une section donnée.

Les intégrales  $\int_{S_U} d\mathcal{S}$  et  $\int_{S_D} d\mathcal{S}$  sont égales à la surface des sections circulaires  $S_U$  et  $S_D$  soit  $\frac{\pi}{4} d_U^2$  et  $\frac{\pi}{4} d_D^2$  d'où finalement :

$$\frac{u_U}{u_D} = \frac{d_D^2}{d_U^2}$$

En choisissant successivement U,D en 1,2 puis en 2,3 on obtient  $u_2/u_1 = 4$  et  $u_2/u_3 = 9$ . On retrouve donc un résultat qualitatif conforme à l'intuition dans le cas d'un écoulement de fluide à masse volumique constante : le fluide accélère au passage d'un resserrement du tuyau et décélère au passage d'un élargissement.  $\square$

## 2.2.2 Forme différentielle

Comme on l'a déjà dit, la forme différentielle de l'équation de conservation de la masse peut être obtenue directement en appliquant **A)** à un volume de contrôle élémentaire  $d\mathcal{V}$  - cette démarche est présentée dans les Compléments de Cours liés à ce chapitre -. On choisit ici de déduire la forme différentielle conservative de l'équation de conservation de la masse de la forme intégrale (2.5) précédemment établie puis d'établir la forme différentielle non-conservative de cette équation à partir de la forme différentielle conservative.

### Forme conservative

Considérons la forme intégrale (2.5) de l'équation de conservation de la masse :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

Dans le cas où la masse volumique est *continue* sur  $V$  (cette hypothèse exclut la présence d'un choc), on peut appliquer à l'intégrale de surface ci-dessus le théorème de Green-Ostrogradsky (2.7) :

$$\int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \underline{V}) d\mathcal{V}$$

L'équation intégrale ci-dessus peut alors s'écrire :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) \right] d\mathcal{V} = 0$$

Comme cette intégrale est nulle pour un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  arbitraire, cela signifie que la fonction intégrée est identiquement nulle soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0 \quad (2.10)$$

où on rappelle que  $\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}$ .

L'équation (2.10) constitue *la forme différentielle conservative*<sup>5</sup> de l'équation qui traduit la conservation locale de la masse. Cette équation est parfois appelée *équation de continuité*; il s'agit d'un anglicisme dérivé de l'appellation "continuity equation" donnée à l'équation de conservation de la masse dans la littérature anglo-saxonne.

### Forme non-conservative

Partons de l'équation de conservation de la masse (2.10) et utilisons l'identité vectorielle :

$$\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = \rho \nabla \cdot \underline{V} + \underline{V} \cdot \nabla \rho$$

On peut alors réécrire (2.10) comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \underline{V} + \underline{V} \cdot \nabla \rho = 0$$

soit encore

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (2.11)$$

La relation (2.11) constitue la forme différentielle non-conservative de l'équation traduisant la conservation de la masse.

Remarque :

On a vu précédemment (2.8) que le caractère incompressible d'un fluide pouvait se traduire par l'égalité  $\nabla \cdot \underline{V} = 0$  en tout point de l'écoulement. La relation (2.11) nous indique qu'un fluide incompressible est également tel que  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ . Autrement dit, pour un fluide incompressible, la masse volumique  $\rho$  se conserve le long des trajectoires des particules fluides. En particulier, si l'écoulement à l'infini amont est uniforme -  $\rho = \rho_\infty$  ; on parle également d'écoulement *homogène* -, on aura partout dans l'écoulement  $\rho = \rho_\infty = \text{cste}$ . Ce cas d'un écoulement générateur uniforme étant très classique, on assimile souvent "fluide incompressible" à "fluide à masse volumique constante" ; cet abus de langage sera parfois commis dans ce cours.

---

<sup>5</sup>On dit qu'une équation est sous forme conservative lorsqu'elle est du type :  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{F} = 0$ . On reviendra ultérieurement dans ce cours sur l'origine et l'intérêt de la distinction forme conservative / forme non-conservative.

## c - Exemple d'utilisation

On considère un écoulement d'air, stationnaire, incompressible et uniforme (de vitesse  $U_\infty \underline{i}$ ) qui approche une plaque plane (cf. Fig.2.6). On verra ultérieurement, dans le chapitre du cours consacré aux effets de la viscosité, qu'une région se forme près de la plaque plane dans laquelle les effets de la viscosité sont importants. Des mesures expérimentales permettent d'établir que, dans cette région de l'écoulement, appelée couche limite, la composante suivant  $x$  (direction de l'écoulement incident) de la vitesse est bien représentée par la loi empirique :

$$u = U_\infty \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

où  $\delta$  désigne l'épaisseur de la couche limite, qui est fonction de l'abscisse  $x$  sur la plaque. On se pose la question de savoir si une ligne horizontale parallèle à la plaque et située à une distance  $\Delta$  de la plaque - avec  $\Delta$  la valeur de  $\delta$  en bout de plaque - est une ligne de courant.

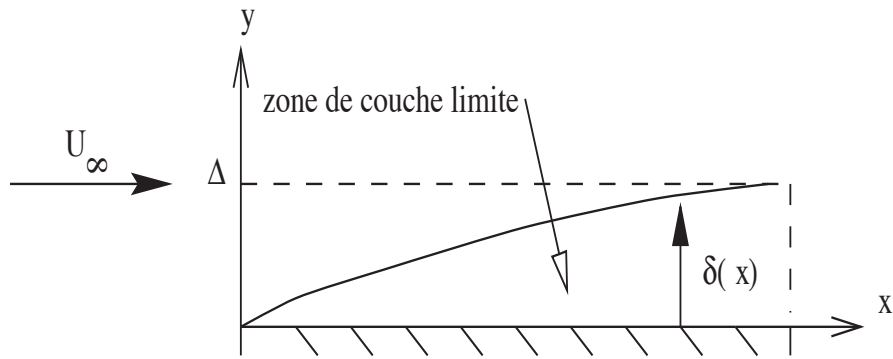


FIG. 2.6 – Ecoulement sur une plaque plane. Bilan de masse.

- Pour cet écoulement 2-D, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

L'écoulement étant supposé stationnaire, cette équation se réduit à  $\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0$  ; le fluide étant de plus supposé incompressible ( $\rho = cste$ ) cette relation se réduit elle-même à  $div(\underline{V}) = 0$  soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Puisque  $u = U_\infty (y/\delta)^{1/7}$  avec  $\delta = \delta(x)$ , on en déduit :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_\infty}{7} \frac{y^{1/7}}{\delta^{8/7}} \frac{d\delta}{dx}$$

En intégrant alors par rapport à  $y$  on obtient :

$$v = \frac{U_\infty}{8} \frac{y^{8/7}}{\delta^{8/7}} \frac{d\delta}{dx} + k$$

où la constante d'intégration  $k$  est déterminée par la condition au limite  $v = 0$  pour  $y = 0$  qui traduit le fait qu'il n'y a pas d'écoulement au travers de la plaque ; on en tire immédiatement  $k = 0$ .

On rappelle qu'une ligne de courant est une courbe qui admet en chacun de ses points une tangente parallèle au vecteur-vitesse en ce point. Par conséquent, la droite  $y = \Delta$  est une ligne de courant si le vecteur vitesse en  $y = \Delta$  est tel que  $v = 0$ . Comme  $v(y = \Delta) = \frac{U_\infty}{8} \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{8/7} \frac{d\delta}{dx} \neq 0$ , la ligne  $y = \Delta$  n'est pas une ligne de courant (du fluide s'écoule à travers cette ligne).  $\square$

Note :

Il est important de savoir utiliser aussi bien la forme intégrale que la forme différentielle de l'équation de conservation de la masse. La forme différentielle fournit une information locale sur l'écoulement ; la forme intégrale fournit une information globale : elle permet notamment d'évaluer les forces appliquées à un système matériel sans connaître le détail de l'écoulement.

Le volume de contrôle choisi pour appliquer la forme intégrale de la conservation de la masse peut contenir des surfaces de discontinuités (chocs) (voir sur ce point le chapitre du cours consacré aux écoulements supersoniques) alors que l'utilisation de la forme différentielle suppose la continuité de l'écoulement.

La distinction forme conservative / forme non-conservative ne présente pas d'intérêt d'un point de vue physique - nous avons vu que ces deux formulations étaient équivalentes -. En fait, l'intérêt de telle ou telle formulation est lié à la résolution *numérique* des équations de l'écoulement comme cela sera montré dans le cours "Bases de la simulation numérique des écoulements compressibles" qui présentera les principaux concepts de la Mécanique des Fluides Numérique dite aussi CFD pour "Computational Fluid Dynamics".

## 2.3 Equation de la quantité de mouvement

### 2.3.1 Forme intégrale

#### Cas d'un volume de contrôle fini en mouvement avec le fluide

On applique au volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  la seconde loi de Newton :

*Le taux de variation de la quantité de mouvement du fluide contenu dans  $\mathcal{V}(t)$  est égal à la somme des forces qui s'exercent sur  $\mathcal{V}(t)$ .*

La quantité de mouvement du fluide contenu dans le volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  est donnée par

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{V} d\mathcal{V}.$$



Le taux de variation de cette quantité au cours du temps est par définition sa dérivée matérielle soit :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{V} d\mathcal{V} \right).$$

La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{V} d\mathcal{V} \right) = \underline{F}$$

où le vecteur  $\underline{F}$  désigne la somme des forces s'exerçant sur  $\mathcal{V}(t)$  <sup>6</sup>.

Le terme  $\underline{F}$  se décompose en deux types de forces :

- *forces de volume* qui agissent “à distance” sur l'ensemble du volume de contrôle; il s'agit dans la plupart des cas de forces gravitationnelles.

On notera  $\underline{g}$  la force de volume spécifique (par unité de masse) agissant sur le fluide ( $\underline{g}$  est en général l'accélération de la pesanteur).

La force de volume agissant sur  $\mathcal{V}(t)$  s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{g} d\mathcal{V}.$$

- *forces de surface* qui agissent au niveau de la surface de contrôle  $\mathcal{S}(t)$ . Ces forces sont dues uniquement à deux sources : la distribution de *pression* imposée par le fluide entourant le volume de contrôle matériel, qui agit sur la surface  $\mathcal{S}(t)$  suivant la normale à cette surface; les *contraintes visqueuses* liées à la viscosité et à l'état de déformation du fluide - ces contraintes peuvent être normales ou tangentes à la surface de contrôle -.

Les forces de surface s'écrivent sous la forme générale :

$$\int_{\mathcal{S}(t)} \underline{t}(\underline{n}) d\mathcal{S}$$

où  $\underline{t}$  désigne le *vecteur contrainte* et  $\underline{n}$  est toujours la normale unitaire extérieure à  $\mathcal{S}(t)$ .

L'équation de la quantité de mouvement se met donc sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{V} d\mathcal{V} \right) = \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{t}(\underline{n}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{g} d\mathcal{V}.$$

On admet dans ce cours les résultats suivants relatifs au vecteur contrainte - la démonstration de ces propriétés serait l'objet d'un cours de Mécanique des Milieux Continus - :

- $\underline{t}(\underline{n})$  est défini par la relation :

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{tenseur des contraintes}} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

- le *tenseur des contraintes*  $\underline{\underline{T}}$  est symétrique :  $T_{ij} = T_{ji}$ . Les  $T_{ii}$  sont les contraintes normales, les  $T_{ij}$  ( $i \neq j$ ) sont les contraintes tangentielles ou de cisaillement (cf. Fig. 2.7).

<sup>6</sup>On remarquera que l'équation de la quantité de mouvement est une équation *vectorielle* qui conduit donc à 3 équations scalaires dans le cas d'un écoulement tridimensionnel.

- dans un fluide au repos la seule contrainte est la pression  $p$  qui agit suivant le sens opposé à  $\underline{n}$  et par conséquent :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\underline{\underline{\delta}}$$

où  $\underline{\underline{\delta}}$  est le tenseur unitaire de matrice associée la matrice identité.

- dans un fluide en mouvement il y a apparition de contraintes visqueuses. On écrit alors :

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (2.13)$$

où  $\underline{\underline{\tau}}$  est le tenseur - symétrique - des contraintes visqueuses.

On peut donc écrire finalement la forme intégrale non-conservative de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{V} d\mathcal{V} \right) = \int_{\mathcal{S}(t)} -p \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{g} d\mathcal{V}. \quad (2.14)$$

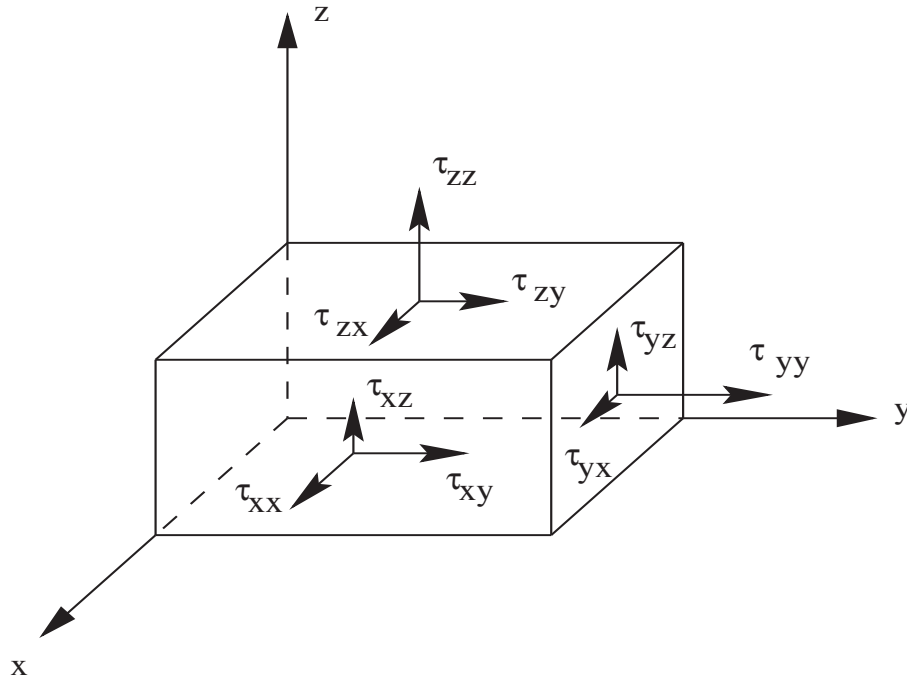


FIG. 2.7 – Contraintes visqueuses agissant sur un élément de fluide. Par convention,  $\tau_{ab}$  désigne une contrainte agissant dans la direction  $b$  sur la surface de l'élément dont la normale pointe dans la direction  $a$ . Les contraintes  $\tau_{aa}$  sont donc des contraintes normales ; les contraintes  $\tau_{ab}$  avec  $a \neq b$  sont des contraintes tangentielles ou de cisaillement. Les contraintes visqueuses normales dans un fluide sont en général négligeables devant les contraintes de cisaillement ; ces contraintes normales peuvent devenir importantes lorsque les gradients de vitesses “normaux”, du type  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ , sont importants ce qui est typiquement le cas dans une structure d'onde de choc par exemple.

**Cas d'un volume de contrôle fixe : forme conservative**

On utilise ici directement la version vectorielle du théorème de transport (2.9) dans le cas où le volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  coïncide avec le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ . On a donc :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} -p \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} d\mathcal{V}. \quad (2.15)$$

Cette équation - vectorielle - est la forme intégrale conservative de l'équation de la quantité de mouvement.

On peut réécrire (2.15) sous forme d'une équation scalaire sur les composantes du vecteur quantité de mouvement  $\rho \underline{V}$ . On note :  $\rho \underline{V} = \rho v_i \underline{e}_i + \rho v_j \underline{e}_j + \rho v_k \underline{e}_k = \rho v_i \underline{e}_i$ .

Par ailleurs :

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1,j} n_j \\ \tau_{2,j} n_j \\ \tau_{3,j} n_j \end{pmatrix}$$

donc  $(\underline{\tau} \cdot \underline{n})_i = \tau_{ij} n_j$ .

L'équation (2.15) exprimée en termes de composantes est donc de la forme :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho v_i (v_j n_j) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} -p n_i d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \tau_{ij} n_j d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho g_i d\mathcal{V}. \quad (2.16)$$

**Utilisation de la forme intégrale de l'équation de la quantité de mouvement**

On considère à nouveau l'écoulement sur une plaque plane présenté en 2.2.c. On rappelle qu'il s'agit d'un écoulement stationnaire de fluide incompressible, uniforme (de vitesse  $U_{\infty} \underline{i}$ ), qui approche une plaque plane de longueur  $c$ ; des mesures expérimentales permettent d'établir que la composante suivant  $x$  de la vitesse de l'écoulement lorsqu'il passe sur la plaque est donnée par :

$$u = U_{\infty} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

avec  $\delta(x)$  l'épaisseur de la couche limite à une distance  $x$  du bord d'attaque de la plaque. On suppose que la pression est uniforme sur la surface de contrôle indiquée sur la Fig. 2.8; on néglige les forces volumiques.

Calculer le coefficient de traînée  $C_D$  de la plaque dans le cas où  $\Delta = \delta(c) = 0.01c$ .

*On précise que le coefficient de traînée (grandeur sans dimension) est défini comme le rapport entre la force de traînée  $D$  de la plaque (résultante des forces qui s'opposent au mouvement du fluide) et la pression dynamique<sup>7</sup> associée à l'écoulement infini amont multipliée par la surface de la plaque :*

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 S}$$

<sup>7</sup>On désigne classiquement en aérodynamique la pression  $p$  comme la *pression statique*; par analogie, la quantité  $\frac{1}{2} \rho V^2$  est appelée *pression dynamique* - elle est nulle pour un écoulement au repos -.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel tel que celui considéré ici, on suppose que l'envergure de la plaque - dans la profondeur de la page - est égale à l'unité et on écrit :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}$$

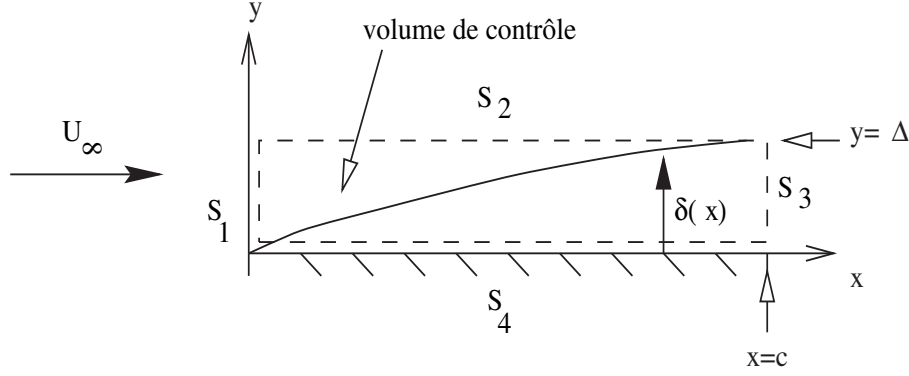


FIG. 2.8 – Ecoulement sur une plaque plane. Bilan de quantité de mouvement.

- Puisque les forces volumiques sont négligées :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} d\mathcal{V} \approx 0.$$

Puisque la pression est supposée uniforme sur la surface de contrôle, on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{S}} -p \underline{n} d\mathcal{S} = -p \int_{\mathcal{S}} \underline{n} d\mathcal{S}$$

On déduit du théorème de Green-Ostrogradsky (2.7) la relation générale suivante :

$$\int_{\mathcal{S}} \phi \underline{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \phi d\mathcal{V} \quad (2.17)$$

où  $\phi$  est une grandeur scalaire définie sur  $\mathcal{V}$ .

Dans le cas où  $\phi = 1$ , on obtient en particulier :

$$\int_{\mathcal{S}} \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

Par conséquent, la résultante des forces de pression qui s'appliquent *uniformément* sur  $\mathcal{V}$  est nulle - ce qui est parfaitement conforme à l'intuition -.

L'écoulement étant supposé stationnaire, on a en particulier  $\frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} = 0$ .

L'équation de la quantité de mouvement (2.15) se réduit donc dans le cas présent à la relation :

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$$

Le membre de droite de cette relation correspond aux forces de frottement visqueux qui ralentissent l'écoulement au niveau de la plaque. Si on projette ce terme sur la direction  $x$  de l'écoulement incident, on peut écrire :

$$\left( \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} \right) \cdot \underline{i} = -D$$

où  $D$  désigne l'intensité de la force de traînée et le signe  $-$  traduit l'orientation de cette force qui s'oppose au mouvement du fluide suivant les  $x$  croissants.

On en déduit donc la relation :

$$\left( \int_S \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} \right) \cdot \underline{i} = \int_S \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = -D$$

où on a utilisé  $\rho = \rho_\infty$  puisque le fluide est supposé incompressible. On cherche donc maintenant à évaluer l'intégrale  $\int_S \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S}$  :

- il n'y a pas de flux de masse à travers la plaque donc

$$\int_{\mathcal{S}_4} \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = 0$$

- sur  $\mathcal{S}_1$ ,  $\underline{V} = u\underline{i} = U_\infty \underline{i}$  et  $\underline{n} = -\underline{i}$  donc

$$\int_{\mathcal{S}_1} \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_1} -\rho_\infty U_\infty^2 d\mathcal{S} = -\rho_\infty U_\infty^2 \Delta$$

puisque l'on suppose que l'envergure de l'aile - suivant une direction  $z$  dans la profondeur de la feuille - est égale à l'unité :  $\int_{\mathcal{S}_1} d\mathcal{S} = \int_0^\Delta dy \times 1 = \Delta$ .

- sur  $\mathcal{S}_3$ ,  $\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j} = U_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \underline{i} + v\underline{j}$  où la composante  $v$  est non-nulle en raison de la viscosité du fluide et reste *a priori* indéterminée. En fait, comme  $\underline{n} = \underline{i}$  sur  $\mathcal{S}_3$ , la projection sur la normale élimine ce problème puisque  $(\underline{V} \cdot \underline{n})_{\mathcal{S}_3} = u$ . On a donc finalement :

$$\int_{\mathcal{S}_3} \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_1} \rho_\infty u^2 d\mathcal{S} = \rho_\infty U_\infty^2 \Delta \int_0^1 Y^{2/7} dY = \frac{7}{9} \rho_\infty U_\infty^2 \Delta$$

- sur  $\mathcal{S}_2$ ,  $\underline{V} = u\underline{i} + v_e \underline{j} = U_\infty \underline{i} + v_e \underline{j}$  où  $v_e$ , composante suivant  $y$  de la vitesse dite extérieure à la couche limite, est *a priori* indéterminée - et non-nulle (cf. 2.2.c) -. Comme  $\underline{n} = \underline{j}$  sur  $\mathcal{S}_2$ , on a finalement :

$$\int_{\mathcal{S}_2} \rho_\infty u (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_2} \rho_\infty U_\infty v_e d\mathcal{S} = \rho_\infty U_\infty \int_0^c v_e dx$$

En rassemblant ces diverses contributions on obtient :

$$-D = -\frac{2}{9} \rho_\infty U_\infty^2 \Delta + \rho_\infty U_\infty \int_0^c v_e dx$$

Pour déterminer entièrement la traînée  $D$ , il faut être en mesure d'évaluer cette dernière intégrale ; pour y parvenir, appliquons l'équation de conservation de la masse sous forme intégrale (2.5) à notre volume de contrôle ; on obtient :

$$\int_S \rho_\infty \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0$$

puisque l'écoulement est stationnaire et incompressible. On peut écrire de façon plus explicite :

$$\int_{S_1} \rho_\infty \underbrace{V \cdot n}_{=-U_\infty} dS + \int_{S_2} \rho_\infty \underbrace{V \cdot n}_{=v_e} dS + \int_{S_3} \rho_\infty \underbrace{V \cdot n}_{=U_\infty \left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7}} dS + \int_{S_4} \rho_\infty \underbrace{V \cdot n}_{=0} dS = 0$$

soit

$$\rho_\infty U_\infty \int_0^c v_e dx = \frac{1}{8} \rho_\infty U_\infty^2 \Delta$$

On en déduit *in fine*  $C_D = \frac{7}{36} \left(\frac{\Delta}{c}\right) = 1.94 \times 10^{-3}$  si  $\Delta = 0.01c$ .  $\square$

## 2.3.2 Forme différentielle

### Formulation conservative

On cherche à obtenir une forme différentielle de l'équation de la quantité de mouvement. Partons de la forme intégrale (2.16) de cette équation :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho v_i (v_j n_j) dS = \int_S -p n_i dS + \int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_{\mathcal{V}} \rho g_i d\mathcal{V}.$$

On a vu précédemment que pour parvenir à une forme différentielle de l'équation ci-dessus il convient de transformer les intégrales de surface qui y apparaissent en intégrales de volume afin d'obtenir une relation mettant en jeu une unique intégrale sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  ; la nullité de cette intégrale pour un volume  $\mathcal{V}$  arbitraire implique alors la nullité de l'expression intégrée ce qui fournit la relation différentielle désirée.

Pour transformer des intégrales de surface en intégrales de volume, nous allons utiliser le théorème de Green-Ostrogradsky (2.7) et la relation (2.17) qui en découle ; nous rappelons ici ces relations vectorielles en les donnant sous forme de relations scalaires sur les composantes des vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_S \phi F_j n_j dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\phi F_j)}{\partial x_j} d\mathcal{V} \quad (a) \\ \int_S \phi n_i dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mathcal{V} \quad (b) \end{array} \right. \quad (2.18)$$

En utilisant alors (2.18(a)) avec  $\phi = \rho v_i$  et  $F_j = v_j$ , (2.18(b)) avec  $\phi = p$  et (2.18(a)) avec  $\phi = 1$  et  $F_j = \tau_{ij}$ , on obtient la forme différentielle conservative de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2.19)$$

Sous forme totalement développée, (2.19) peut se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \end{array} \right.$$

et on peut apprécier l'intérêt d'une notation indicielle nettement plus compacte. La forme ci-dessus peut être légèrement condensée en notant que  $\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho u \underline{V})$  - et similairement pour les équations en  $v$  et  $w$  -.

La relation (2.19) peut aussi être mise sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V} \otimes \underline{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g} \quad (2.20)$$

où le produit  $\underline{V} \otimes \underline{V}$  est dénommé produit dyadique et représente un tenseur :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

La divergence de  $\underline{V} \otimes \underline{V}$  est naturellement un vecteur de composantes  $\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}$ .

### Formulation non-conservative

Partons de la forme semi-développée de l'équation (2.19) ci-dessus pour la première composante cartésienne de la vitesse :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \underline{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} + \rho g_x$$

Le premier membre de cette équation peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \underline{V}) &= u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla \cdot (\rho \underline{V}) + \rho \underline{V} \cdot \nabla u \\ &= u \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) \right]}_{=0 \text{ par (2.10)}} + \rho \frac{Du}{Dt} \end{aligned}$$

En procédant similairement pour les composantes  $v$  et  $w$  de la vitesse, on établit la forme non-conservative de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g} \quad (2.21)$$

### Modélisation des contraintes visqueuses

Dans une large partie de ce cours, on considérera des écoulements de *fluides idéaux*, c'est-à-dire de fluides *de viscosité nulle* : en l'absence de viscosité, le tenseur des contraintes visqueuses est identiquement nul.

Naturellement ce fluide idéal est un *modèle* de fluide - dans la réalité tous les fluides ont une viscosité, plus ou moins élevée - ; ce modèle est très intéressant pour au moins deux raisons : la première, immédiate, est qu'il permet de simplifier considérablement les équations décrivant l'écoulement ; la seconde raison, plus fondamentale, est que ce modèle permet de décrire correctement de nombreux problèmes d'aérodynamique, en dépit de cette simplification.

Ainsi, dans le cas de l'écoulement supersonique dans une tuyère par exemple, les caractéristiques de l'écoulement obtenues en supposant l'air fluide idéal - en particulier les structures de chocs - reproduisent pour l'essentiel les caractéristiques de l'écoulement réellement observées ; les différences entre prédiction et observation sont liées à la non-prise en compte des effets de la viscosité dans la zone de couche-limite qui se développe sur les parois de la tuyère.

Naturellement, il existe aussi de nombreux écoulements pour lesquels il est impossible de négliger la viscosité, au risque d'une prédiction gravement erronée. Il convient alors de préciser la forme retenue pour les contraintes visqueuses dont on a dit précédemment qu'elles dépendaient de la viscosité et de l'état de déformation du fluide.

L'air appartient à la famille des *fluides newtoniens* ; pour de tels fluides les contraintes visqueuses dépendent linéairement des taux de déformation dans l'écoulement - donc des gradients de vitesse - suivant la relation <sup>8</sup> :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.22)$$

où  $\mu$  désigne la *viscosité dynamique* du fluide et où on rappelle que la notation  $\delta_{ij}$  désigne les composantes du tenseur unité  $\underline{\delta}$  qui vérifient donc  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . La viscosité  $\mu$  est une propriété du fluide considéré mais dépend aussi de l'état thermodynamique local de l'écoulement. Pour des températures inférieures à 3000 K, la viscosité de l'air peut être considérée comme indépendante de la pression et seule la dépendance vis-à-vis de la température demande à être prise en compte. Cette dépendance est bien décrite par la loi dite de Sutherland :

$$\mu(T) = 1.458 \times 10^{-6} \frac{T^{1.5}}{T + 110.4} \quad (2.23)$$

où la température  $T$  s'exprime bien sûr en K et  $\mu$  est donnée en  $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ . La viscosité dynamique de l'air à 293 K vaut  $1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ .

---

<sup>8</sup>Des fluides dans lesquels les contraintes visqueuses ne sont pas proportionnelles aux gradients de vitesses sont dits non-newtoniens ; le sang est un exemple de ces fluides et l'hémodynamique, ou étude des écoulements sanguins, s'appuie donc sur les équations de Navier-Stokes mais fermées par une loi de comportement non-newtonienne qui introduit une dépendance non-linéaire entre contraintes et taux de déformation.



On peut “expliciter” la relation (2.22) ci-dessus en écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{V} \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{V} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \underline{V} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

L'équation de la quantité de mouvement écrite dans le cas d'un fluide idéal est appelée **équation d'Euler** ; elle s'écrit sous forme intégrale :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_S -p \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} d\mathcal{V}. \quad (2.24)$$

L'équation de la quantité de mouvement écrite pour un fluide newtonien est appelée **équation de Navier-Stokes**. Pour obtenir sa forme différentielle à partir de (2.19) il faut évaluer le terme  $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \\ &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{V}) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{V}) \\ &= \mu \Delta v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{V}) \end{aligned}$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien :  $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}$  (l'indice  $j$  est doublé car  $\partial x_j^2 \equiv \partial x_j \partial x_j$  et il y a donc sommation sur cet indice).

On en déduit la forme différentielle de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \Delta v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial(\nabla \cdot \underline{V})}{\partial x_i} \quad (2.25)$$

On rappelle que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \\ &= v_i \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right)}_{\text{=opar conservation de la masse}} + \rho \underbrace{\left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{= } \frac{dv_i}{dt} = \gamma_i} \\ &= \rho \frac{dv_i}{dt} \end{aligned}$$

et par conséquent l'équation de Navier-Stokes (2.25) peut aussi se mettre sous la forme équivalente :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \Delta v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial(\nabla \cdot \underline{V})}{\partial x_i} \quad (2.26)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible, la relation  $\nabla \cdot \underline{V} = 0$  permet de simplifier l'équation (2.25) ou (2.26) en :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \Delta v_i$$

ou

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \Delta v_i$$

où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  désigne la *viscosité cinématique*.

### Exemple d'application

On considère un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide newtonien dans un canal bidimensionnel de longueur infinie et de hauteur  $h$  (cf. Fig. 2.9) ; cet écoulement est classiquement appelé écoulement de Poiseuille. On suppose que l'écoulement est pleinement développé c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'évolution des composantes de la vitesse dans la direction principale de l'écoulement (direction  $x$ ). On suppose de plus que les forces de volume sont négligeables. On souhaite déterminer le profil de la vitesse du fluide dans le canal.

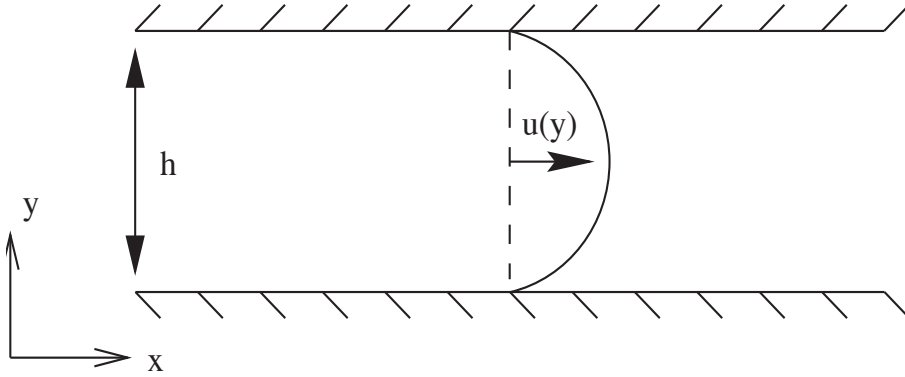


FIG. 2.9 – Écoulement de Poiseuille.

- Pour cet écoulement stationnaire de fluide incompressible l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Puisque l'écoulement est pleinement développé,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  et par conséquent  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . Comme on a également  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , on en déduit que la composante suivant  $y$  de la vitesse est constante ; comme

$v = 0$  au niveau des parois du canal (il n'y a pas d'écoulement de fluide à travers ces parois), on a nécessairement  $v = 0$  partout dans l'écoulement.

Dans le cas de ce problème incompressible ( $\nabla \cdot \underline{V} = 0$ ) bidimensionnel, l'équation de Navier-Stokes conduit *a priori* aux deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v \end{cases}$$

L'écoulement est stationnaire, pleinement développé et  $v$  est identiquement nulle ; par conséquent ces équations se réduisent à :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

La pression  $p$  est donc fonction de l'abscisse  $x$  seulement et comme les composantes de la vitesse sont supposées être fonction de l'ordonnée  $y$  seulement, la composante  $u$  de la vitesse vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx},$$

dont la solution générale est de la forme :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + k_1 y + k_2$$

Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  sont déterminées par les conditions aux limites de l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement visqueux, la vitesse du fluide à la paroi est la vitesse de la paroi ; dans le cas d'une paroi fixe, la vitesse du fluide à la paroi est donc nulle - nous reviendrons sur ces conditions aux limites à la fin de ce chapitre (cf. 6.3) -. Dans le cas présent on a donc  $u(0) = 0$  et  $u(h) = 0$  (cf. Fig. 2.9). On en déduit immédiatement :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) (y^2 - hy)$$

Le profil de vitesse dans le canal est donc parabolique ; la vitesse maximale du fluide est atteinte au centre du canal ( $y = h/2$ ) et vaut  $u_{max} = -\frac{1}{8\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) h^2$ . On observe que le gradient de pression  $\frac{dp}{dx}$  doit être négatif pour que l'écoulement se fasse suivant les  $x$  croissants ; on a une diminution de la pression suivant le sens de l'écoulement.  $\square$

### 2.3.3 Différents niveaux de simplification

Si on suppose le fluide idéal, la viscosité (dynamique ou cinématique) est identiquement nulle et l'équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit à l'équation d'Euler :

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) régit l'évolution de la quantité de mouvement pour un écoulement de fluide parfait ou idéal et a été largement étudiée dans des cours de mécanique des fluides antérieurs. Plus particulièrement, on s'intéresse souvent à des formes simplifiées de cette équation qui peuvent être obtenues au prix de certaines hypothèses sur l'écoulement considéré. Remarquons tout d'abord que les forces de gravité dérivent d'un potentiel dit gravitationnel  $\Phi = ||\vec{g}||z$  (où  $z$  désigne l'axe vertical orienté de bas en haut) tel que  $\vec{g} = -\nabla\Phi$ . L'équation (2.27) peut donc encore s'écrire :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi.$$

Une manipulation vectorielle du premier membre de cette équation permet de la transformer en :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi$$

ou encore, en introduisant le vecteur tourbillon  $\omega = \nabla \times \vec{V}$  et en réorganisant :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\Phi + \omega \times \vec{V} = 0$$

Si on suppose maintenant que l'écoulement de fluide idéal est incompressible et homogène, on en déduit  $\rho = cste$  partout dans l'écoulement soit :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) + \omega \times \vec{V} = 0 \quad (2.28)$$

L'équation (2.28), dite équation de Lamb (grand hydrodynamicien anglais) est une forme alternative de l'équation d'Euler, qui se prête bien à quelques simplifications supplémentaires.

Si, en plus de supposer le fluide idéal et l'écoulement incompressible à masse volumique constante, on fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire ou permanent, *i.e.* tel que les propriétés de l'écoulement ne varient plus en fonction du temps (soit encore  $\frac{\partial}{\partial t}$  pour toutes les grandeurs caractéristiques de l'écoulement), la conservation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) + \omega \times \vec{V} = 0$$

En projetant cette relation sur le vecteur vitesse local  $\vec{V}$ , on élimine le dernier terme du premier membre puisqu'il fait apparaître un produit mixte entre 3 vecteurs dont 2 sont colinéaires (le vecteur  $\vec{V}$  étant colinéaire à lui-même) et on obtient donc :

$$\nabla\left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0$$

La nullité de la dérivée convective dans un écoulement stationnaire et équivalente à la nullité de la dérivée matérielle et l'égalité ci-dessus signifie donc que :

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cste \text{ le long d'une ligne de courant} \quad (2.29)$$

où on a réintroduit la définition du potentiel gravitationnel et simplifié l'écriture  $||\vec{g}|| = g$ . L'expression (2.29) est généralement "ce qui reste quand on a tout oublié de la mécanique des fluides", à savoir la première version du théorème ou de la relation de Bernoulli. Comme pour un fluide tel que l'air les effets de la pesanteur peuvent être négligés devant les efforts de pression (ce qui n'est pas le cas bien sûr en hydrodynamique), on peut même écrire tout simplement :

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cste \text{ le long d'une ligne de courant}$$

Si il est utile de retenir cette relation, il est également indispensable de se souvenir des hypothèses formulées pour l'obtenir ; ainsi, la propriété ci-dessus est valable pour un écoulement stationnaire et incompressible de fluide idéal.

Cette propriété peut être généralisée au prix d'une hypothèse supplémentaire sur l'écoulement.

Si on repart maintenant de l'équation de Lamb, valable pour un écoulement de fluide idéal, et si on suppose cet écoulement incompressible, stationnaire et irrotationnel, c'est-à-dire tel que  $\omega \times \vec{V} = \vec{0}$ , alors l'équation de Lamb se réduit à :

$$\nabla \left( \frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) = 0$$

et on en déduit immédiatement que :

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cste \text{ partout dans l'écoulement}$$

ou encore, en négligeant les effets de la gravité, ce qui est légitime pour un fluide léger tel que l'air :

$$\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cste \text{ partout dans l'écoulement}$$

L'étude des écoulements stationnaires, incompressibles et irrotationnels de fluide idéal constitue un point central des cours de base de mécanique des fluides. Sous l'hypothèse d'irrotationnalité, le vecteur vitesse dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que l'on peut écrire  $\vec{V} = \nabla \Psi$  ; en injectant cette relation dans la relation de conservation de la masse, qui se réduit en incompressible à exprimer la nullité de la divergence de la vitesse, on obtient une équation de Laplace pour le potentiel des vitesses :  $\Delta \Psi = 0$ , complétée bien sûr par des conditions aux limites. Cette équation de Laplace peut être résolue par exemple par des techniques de transformation conforme en passant du plan physique au plan complexe. Une fois obtenu le potentiel des vitesses, son intégration fournit la vitesse et l'équation de Bernoulli fournit la pression ; la distribution de pression permet alors de calculer les efforts exercés par le fluide. Dans le cadre de ce cours d'aérodynamique, on s'intéressera tout particulièrement à des écoulements compressibles pour lesquels les relations de Bernoulli ne sont pas valables.

### 2.3.4 Application à la mesure de vitesse

On considère un profil placé dans un écoulement stationnaire et incompressible de fluide idéal non-pesant. Il existe dans cet écoulement une ligne de courant particulière qui sépare les lignes de courant des particules fluides qui contournent le profil par sa partie haute des lignes de courant des particules fluides qui contournent le profil par sa partie basse. Cette ligne de courant séparatrice part de l'infini

amont, où l'écoulement uniforme est défini par une masse volumique  $\rho_\infty$  ou  $\rho$  constante dans tout l'écoulement, une pression  $p_\infty$  et s'achève sur le profil en un point dit d'arrêt, noté A sur la figure 2.10 où la vitesse de la particule fluide s'annule et où la pression prend la valeur  $p_A$ , dite pression d'arrêt. Sans qu'il soit besoin de supposer l'écoulement irrotationnel, la première version de la relation de Bernoulli appliquée le long de cette ligne de courant particulière permet d'écrire :

$$0 + \frac{p_A}{\rho} = \frac{1}{2} \vec{V}_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

soit encore :

$$p_A = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \vec{V}_\infty^2 \quad (2.30)$$

La pression au point d'arrêt  $p_A$ , ou pression d'arrêt, est donc la somme de la pression  $p_\infty$  à l'infini amont et de la pression dynamique  $\frac{1}{2} \rho \vec{V}_\infty^2$  associée à l'écoulement générateur à l'infini amont. Cette relation peut être utilisée pour mesurer la vitesse d'un écoulement incompressible à partir de mesures de pression. On considère (voir Fig. 2.11) un écoulement incompressible dans une soufflerie.

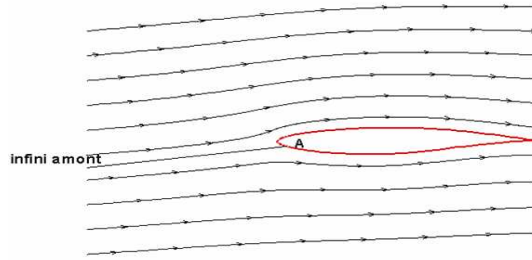


FIG. 2.10 – Profil placé dans un écoulement incompressible.

L'écoulement est supposé s'effectuer de la droite vers la gauche. Un tube de Pitot permet de mesurer la pression d'arrêt  $p_0$  au point B ; un capteur de pression permet de mesurer la pression (statique)  $p$  au point A. On suppose la pression et la vitesse à peu près uniformes dans la veine d'essai ; la masse volumique, constante dans l'écoulement, est notée  $\rho$ . L'application de la relation (2.30) permet d'obtenir de façon immédiate :

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho}} \quad (2.31)$$

La mesure d'une pression d'arrêt grâce au tube de Pitot placé dans la veine d'essai et d'une pression statique par un dispositif pariétal permet donc d'estimer la vitesse de l'écoulement dans la section de mesure de la pression statique. Il faut bien noter que la formule (2.31) n'est valable en toute rigueur que pour un écoulement incompressible.

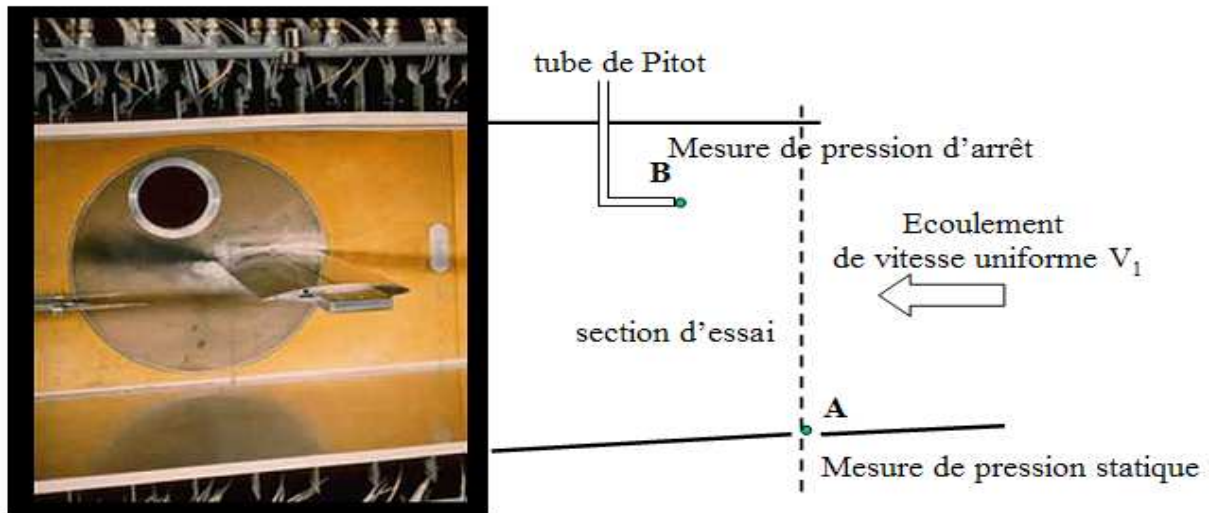


FIG. 2.11 – Mesure de vitesse dans une soufflerie basse-vitesse : cas d'un écoulement incompressible.

## 2.4 Equation de conservation de l'énergie

### 2.4.1 Forme intégrale

#### Cas d'un volume de contrôle fini en mouvement avec le fluide

On applique au volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  le premier principe de la thermodynamique :

*Le taux de variation de l'énergie contenue dans  $\mathcal{V}(t)$  est égal à la somme du travail effectué par unité de temps par les forces extérieures appliquées au volume  $\mathcal{V}(t)$  et du flux de chaleur qui passe par unité de temps à travers  $\mathcal{S}(t)$ .*

Pour pouvoir mettre ce principe physique en équation, la première question à se poser est naturellement de savoir quelle est l'énergie d'un élément de fluide ?

L'énergie totale d'un élément de fluide se décompose en :

- une *énergie interne* liée au mouvement moléculaire ; on notera  $e$  l'énergie interne spécifique (*i.e.* par unité de masse). Dans un gaz, même au repos, chaque atome ou molécule est animé d'un mouvement aléatoire qui s'accompagne en outre de phénomènes de rotation et de vibration de ces particules ; enfin, le mouvement des électrons autour des noyaux atomiques ajoute une énergie d'origine électronique à la particule. L'énergie interne  $e$  d'un élément de fluide est donc la somme de ces énergies sur l'ensemble des atomes ou molécules présents dans l'élément.
- une *énergie cinétique* liée au mouvement macroscopique du fluide et égale à  $\frac{1}{2}V^2$  (par unité de masse).

L'énergie totale spécifique  $E$  s'écrit donc :

$$E = e + \frac{1}{2}V^2$$

et le taux de variation de l'énergie totale contenue dans  $\mathcal{V}(t)$  vaut :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho E d\mathcal{V} \right)$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit donc formellement :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho E d\mathcal{V} \right) = \dot{W} + \dot{Q}$$

où il nous faut déterminer  $\dot{W}$  et  $\dot{Q}$ , respectivement travail effectué par unité de temps par les forces extérieures appliquées au volume  $\mathcal{V}(t)$  et flux de chaleur traversant  $\mathcal{S}(t)$  par unité de temps.

### Travail des forces

Le travail des forces s'exerçant sur  $\mathcal{V}(t)$  est celui des forces surfaciques d'une part et volumiques d'autre part. Un travail s'exprime comme le produit d'une force par un déplacement ; un travail par unité de temps est donc le produit d'une force par une vitesse. On a ainsi :

$$\dot{W} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{t}(\underline{n}) \cdot \underline{V} d\mathcal{S}$$

### Flux de chaleur

Le flux de chaleur traversant  $\mathcal{S}(t)$  peut avoir deux origines :

- échauffement “en volume” de l'élément de fluide lié à des phénomènes de rayonnement
- transfert de chaleur à travers la surface de contrôle lié à la présence de gradients de température : on parle alors de *conduction thermique*.

On se limitera dans ce cours à prendre en compte la conduction thermique. On note  $\underline{q}$  le flux de chaleur par conduction (par unité de surface et de temps) ;  $\underline{q}$  est lié à la température  $T$  du fluide par une loi de Fourier :

$$\underline{q} = -k \nabla T \quad (2.32)$$

où  $k$  désigne la *conductivité thermique* du fluide -  $k$  est en principe fonction de la température  $T$  mais cette dépendance peut être négligée dans le contexte des applications du cours -. Le flux de chaleur élémentaire qui passe par unité de temps et de surface à travers un élément infinitésimal  $d\mathcal{S}$  de la surface de contrôle  $\mathcal{S}(t)$  est donné par  $-\underline{q} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$  (où le signe  $-$  provient de l'orientation du vecteur normal unitaire  $\underline{n}$  et du fait que l'on compte positivement la chaleur reçue par le système considéré) et donc le flux de chaleur qui traverse  $\mathcal{S}(t)$  par unité de temps vaut :

$$\dot{Q} = - \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}$$

En rassemblant les contributions ci-dessus on peut écrire la forme intégrale non-conservative de l'équation de l'énergie :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\mathcal{V}(t)} \rho E d\mathcal{V} \right) = \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{t}(\underline{n}) \cdot \underline{V} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}(t)} \underline{q} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} \quad (2.33)$$



**Cas d'un volume de contrôle fixe ; forme conservative**

Le théorème de transport (2.6) appliqué à un instant  $t$  où  $\mathcal{V}$  coïncide avec  $\mathcal{V}(t)$  permet d'écrire la forme intégrale conservative de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho E}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho E (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_S \underline{t}(\underline{n}) \cdot \underline{V} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} - \int_S \underline{q} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} \quad (2.34)$$

**Cas d'un fluide idéal**

Dans un gaz - l'air en particulier -, les processus de transfert de quantité de mouvement et de transfert de chaleur ont le même ordre de grandeur. Par conséquent, l'hypothèse de fluide idéal conduit à considérer que l'écoulement se fait non seulement sans contraintes visqueuses mais aussi en l'absence de transfert de chaleur - on dit que l'écoulement est *adiabatique* -. On peut alors écrire l'équation de conservation de l'énergie sous la forme :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho E}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S \rho E (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = - \int_S p (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} \quad (2.35)$$

**Application de la forme intégrale de l'équation de conservation de l'énergie**

On considère un écoulement stationnaire de fluide idéal incompressible dans une conduite dont on connaît les différents paramètres géométriques - altitude et surface des sections d'entrée et de sortie - (cf. Fig.2.12) ; l'écoulement peut être considéré comme étant monodimensionnel - les propriétés de l'écoulement sont supposées constantes dans une section donnée de la conduite -. Le fluide s'écoule hors de la conduite, dans l'atmosphère, avec un débit volumique connu  $Q_f$ . On n'observe pas de variation de l'énergie interne  $e$  entre l'entrée et la sortie de la conduite. Indiquer comment la pression statique au niveau de la section d'entrée peut être déterminée.

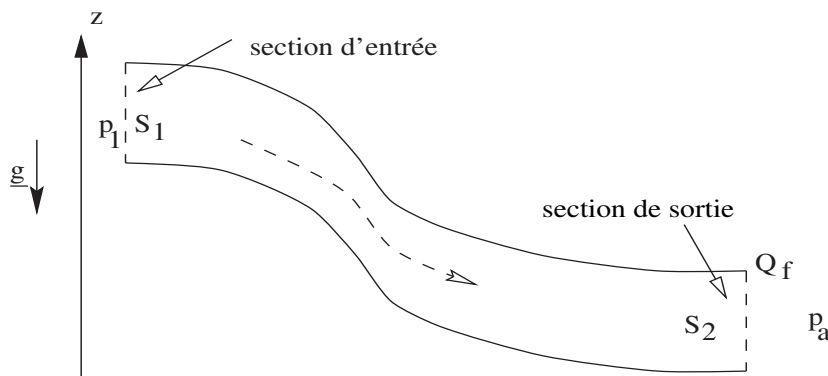


FIG. 2.12 – Ecoulement dans une conduite. Bilan d'énergie.

• On choisit un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  qui englobe le fluide compris entre les sections d'entrée 1 et de sortie 2 et on applique à ce fluide idéal et incompressible en écoulement stationnaire, l'équation (2.35) de conservation de l'énergie ; on obtient :

$$\int_{\mathcal{S}} \rho_{\infty} E(\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{S}} p(\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho_{\infty} \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V}$$

avec  $\rho_{\infty}$  la masse volumique constante du fluide.

On souhaite transformer en intégrale de surface l'intégrale qui exprime le travail du poids du fluide. La force de pesanteur dérive d'un potentiel et peut se mettre sous la forme :  $\underline{g} = -g\nabla z$  où  $g$  est l'accélération de la pesanteur terrestre,  $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \int \rho_{\infty} \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} &= -\rho_{\infty} g \int_{\mathcal{V}} \nabla z \cdot \underline{V} d\mathcal{V} \\ &= -\rho_{\infty} g \int_{\mathcal{V}} [\nabla \cdot (z\underline{V}) - \underbrace{z(\nabla \cdot \underline{V})}_{=0}] d\mathcal{V} \\ &= - \int_{\mathcal{S}} \rho_{\infty} g z \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\int_{\mathcal{S}} [E + \frac{p}{\rho_{\infty}} + gz](\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = 0$$

Comme  $\underline{V} \cdot \underline{n} = 0$  sur les parois de la conduite et que les propriétés de l'écoulement sont supposées constantes dans une section donnée, l'évaluation de cette intégrale conduit à :

$$(E_1 + \frac{p_1}{\rho_{\infty}} + gz_1)V_1S_1 = (E_2 + \frac{p_2}{\rho_{\infty}} + gz_2)V_2S_2$$

La conservation de la masse entre la section 1 et la section 2 fournit de façon immédiate (cf. 2.1.d) :

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$$

qui se réduit à  $V_1 S_1 = V_2 S_2$  pour un fluide incompressible. On en déduit :

$$E_1 + \frac{p_1}{\rho_{\infty}} + gz_1 = E_2 + \frac{p_2}{\rho_{\infty}} + gz_2$$

Puisque  $E = e + \frac{1}{2}V^2$  et que l'énergie interne ne présente pas de variation perceptible dans l'écoulement, on obtient par conséquent une forme de l'équation de l'énergie bien connue sous le nom d'*équation de Bernoulli* :

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho_{\infty}} + gz_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho_{\infty}} + gz_2$$

Dans cette expression  $z_1$  et  $z_2$  sont des altitudes connues,  $p_2$  est la pression atmosphérique,  $V_2$  est donnée par  $Q_f = V_2 S_2$  et  $V_1$  s'obtient par  $V_1 S_1 = V_2 S_2$  ; on peut donc évaluer  $p_1$ .  $\square$

### 2.4.2 Forme différentielle

#### Formulation conservative

Pour obtenir une forme différentielle de l'équation de conservation de l'énergie, on part de la forme intégrale (2.34) de cette équation et on utilise les relations (2.18) pour transformer les intégrales de surface qui apparaissent dans (2.34) en intégrales de volume - on fait implicitement l'hypothèse de la continuité de l'écoulement sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  -.

On a en particulier :

$$\begin{aligned} \int_S \underline{t}(\underline{n}) \cdot \underline{V} d\mathcal{S} &= \int_S t_i(\underline{n}) v_i dA \\ &= \int_S (-pn_i + \tau_{ij}n_j) v_i d\mathcal{S} \\ &= \int_S (-pv_i n_i + \tau_{ij}v_i n_j) d\mathcal{S} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} (pv_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}v_i) \right] d\mathcal{V} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_S -\underline{q} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} &= \int_S -q_i n_i d\mathcal{S} \\ &= \int_{\mathcal{V}} -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} k \Delta T d\mathcal{V} \end{aligned}$$

On en déduit la forme locale conservative de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + \frac{\partial(\tau_{ij}v_i)}{\partial x_j} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (2.36)$$

#### Cas d'un fluide idéal en l'absence de forces de volume

Pour un écoulement non-visqueux et adiabatique dans le cas où l'effet de la gravitation est négligeable - cette dernière hypothèse étant en général tout à fait valide dans l'étude d'un écoulement de gaz -, l'équation (2.36) se réduit à :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i}$$

soit

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H \underline{V}) = 0 \quad (2.37)$$

où l'on a introduit l'*enthalpie totale* spécifique  $H$ , définie par la relation :

$$H = E + \frac{p}{\rho} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{V}^2 = h + \frac{1}{2} \underline{V}^2 \quad (2.38)$$

avec  $h$  l'enthalpie spécifique ( $h = e + \frac{p}{\rho}$ ).

Si l'écoulement est *stationnaire*, on a donc  $\nabla \cdot (\rho H \underline{V}) = 0$ , soit  $\underline{V} \cdot \nabla H = 0$  puisque  $\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0$  par

conservation de la masse à l'état stationnaire. La relation  $\underline{V} \cdot \nabla H = 0$  traduit le fait que l'enthalpie totale  $H$  reste constante le long des lignes de courant d'un écoulement stationnaire de fluide non-visqueux. Si on suppose que l'état générateur de l'écoulement est tel que  $H = H_\infty$  alors  $H = cste$  partout dans l'écoulement ; un tel écoulement est qualifié d'*homenthalpique*. L'équation de l'énergie pour un écoulement de fluide parfait (on dit aussi un écoulement eulérien car régi par les équations d'Euler) stationnaire avec des conditions génératrices (à l'infini amont) uniformes se réduit donc à :

$$H = cste = H_\infty \quad (2.39)$$

où  $H_\infty$  désigne l'enthalpie totale spécifique associée à l'écoulement uniforme à l'infini amont. Ce niveau d'enthalpie restera constant dans l'écoulement sauf s'il est modifié par des apports de chaleur (passage dans une chambre de combustion par exemple).

### Formulation non-conservative

On procède classiquement en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v_i)}{\partial x_i} &= E \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial E}{\partial t} + E \nabla \cdot (\rho \underline{V}) + \rho \underline{V} \cdot \nabla E \\ &= \rho \frac{DE}{Dt} \end{aligned}$$

Après substitution dans (2.36) on obtient la forme non-conservative de l'équation de l'énergie totale :

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (p \underline{V}) + \rho \underline{g} \cdot \underline{V} + \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{V}) + k \Delta T \quad (2.40)$$

#### Remarque :

De nombreuses manipulations des équations (2.36) et (2.40) sont possibles ; on peut en particulier obtenir des équations de bilan pour l'énergie interne  $e$ , l'énergie cinétique, l'enthalpie  $h$ , la température  $T$  ... Un exemple de manipulation permettant d'obtenir une équation d'évolution pour la température est fourni dans une section ultérieure qui présente une synthèse des équations permettant de modéliser des écoulements de fluide idéal ou réel.

## 2.5 Un peu de thermodynamique

Prenons maintenant du recul et examinons les équations établies pour décrire un écoulement. Intéressons-nous en particulier aux variables inconnues qui apparaissent dans ces équations.

- l'équation de conservation de la masse fait intervenir la masse volumique  $\rho$  et le vecteur vitesse  $\underline{V}$  de composantes cartésiennes  $u, v, w$ .
- l'équation de la quantité de mouvement fait intervenir comme variables inconnues  $\rho$ ,  $\underline{V}$  et la pression  $p$  ; le tenseur des contraintes visqueuses dépend du vecteur vitesse  $\underline{V}$ , au travers des gradients de ses composantes, et de la viscosité  $\mu$  supposée connue ; la force de volume  $\underline{g}$  est connue à priori - par exemple  $\underline{g} = -g \underline{k}$  avec  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  -.

- l'équation de conservation de l'énergie fait à nouveau intervenir  $\rho$ ,  $\underline{V}$ ,  $p$  mais également l'énergie totale spécifique  $E$ , ou de façon équivalente l'énergie interne  $e$ , ainsi que la température  $T$  au travers du terme de flux de chaleur par conduction - la conductivité thermique  $k$  est supposée connue -.

On dispose donc de 5 équations scalaires pour 7 inconnues *a priori* indépendantes. Il est clair que pour pouvoir espérer résoudre ces équations, nous avons besoin de relations supplémentaires qui permettent de relier certaines de ces inconnues entre elles : c'est la *thermodynamique* qui va nous fournir ces relations, dites *équations d'état*.

### 2.5.1 Equations d'état d'un gaz caloriquement parfait

Les variables masse volumique  $\rho$ , pression  $p$ , température  $T$  et énergie interne  $e$  sont des variables d'état qui caractérisent l'état d'équilibre d'un système thermodynamique <sup>9</sup>.

Un système thermodynamique à l'équilibre est caractérisé par deux variables d'état indépendantes, et toutes les variables d'état peuvent être déterminées à partir de ces deux variables d'état connues, grâce aux équations d'état. Si nous faisons nos comptes, nous constatons donc que deux équations d'état nous permettent de faire passer de 4 à 2 le nombre de variables d'état inconnues dans les équations qui régissent le fluide et nous sommes alors ramenés à la résolution de 5 équations aux dérivées partielles faisant intervenir 5 inconnues ; cette résolution reste assurément difficile dans le cas général mais elle devient alors possible.

L'air sera considéré dans ce cours comme un *gaz parfait*, *i.e.* un gaz dans lequel les forces intermoléculaires sont négligées - les propriétés macroscopiques de ce modèle de gaz parfait fournissent une très bonne approximation des propriétés d'un gaz réel, excepté aux très basses et très hautes températures et densités, cas qui ne seront pas traités dans ce cours -.

Un gaz parfait obéit à l'équation d'état thermique suivante :

$$p = p(\rho, T) = \rho r T \quad (2.41)$$

où  $r$  est une constante du gaz ;  $r = \frac{\mathcal{R}}{M}$  avec  $\mathcal{R}$  la constante universelle des gaz parfaits et  $M$  la masse molaire du gaz considéré.

Aux conditions normales de température et de pression <sup>10</sup>, l'air est constitué de 21% d'oxygène et de 79% d'azote, d'où une masse molaire égale à 28.97 et une constante  $r$  qui vaut :

$$r = 287.06 \text{ J/kg} - \text{K}$$

La relation (2.41) permet par exemple de déterminer la température  $T$  lorsque la pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$  sont connues.

---

<sup>9</sup>On rappelle qu'un système thermodynamique est une quantité de matière séparée de son environnement par une surface fermée - à travers laquelle des échanges peuvent se produire avec le milieu environnant -. Dans le cas d'un écoulement de fluide, on peut par exemple considérer un volume de contrôle matériel  $\mathcal{V}(t)$  comme un système thermodynamique à l'équilibre

<sup>10</sup>Lors d'un vol hypersonique, les très hautes températures qui apparaissent dans l'écoulement conduisent à des réactions de dissociation, d'ionisation qui modifient la composition de l'air et donc sa masse molaire ; dans de telles conditions de vol, la masse molaire  $M$  diminue et par conséquent  $r$  augmente.

L'énergie interne  $e$  est une variable d'état qui peut être reliée à  $(\rho, T)$  par une équation d'état dite *équation d'état calorifique* :  $e = e(\rho, T)$ .

On peut aussi écrire  $e = e(v, T)$ , où  $v$  désigne le volume spécifique du gaz, *i.e.* le volume par unité de masse donc  $v = 1/\rho$ . On peut alors écrire la relation différentielle exprimant la variation d'énergie interne en fonction des variations élémentaires de température et de volume spécifique :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT$$

où la notation  $\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_b$  signifie "dérivée partielle par rapport à la variable  $a$ , la variable  $b$  étant maintenue constante".

Pour un gaz parfait,  $\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = 0$  et par conséquent l'énergie interne est uniquement fonction de la température :  $e = e(T)$ . On note :

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v$$

et on appelle  $C_v$  le *coefficient de chaleur spécifique à volume constant*. Dans le cas de l'air,  $C_v$  reste pratiquement constant pour des températures inférieures à 600 K ; pour les applications visées dans ce cours, on pourra supposer  $C_v$  constant de valeur :

$$C_v = 717 \text{ J/kg} - K$$

On qualifie un gaz pour lequel  $C_v = \text{cste}$  de gaz *caloriquement parfait*. On peut alors écrire :

$$e = C_v T + \text{cste} \quad \text{ou} \quad e = C_v T \quad (2.42)$$

sous réserve d'avoir défini de façon appropriée un état de référence. La relation (2.42) permet donc de déterminer l'énergie interne  $e$  lorsque la température  $T$  est connue.

Nous avons défini précédemment l'enthalpie  $h$  par la relation

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

L'enthalpie est également une variable d'état, donnée par une relation de la forme  $h = h(p, T)$ . On peut donc écrire la relation différentielle exprimant la variation d'enthalpie en fonction des variations élémentaires de pression et de température :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT$$

On définit le *coefficient de chaleur spécifique à pression constante* par :

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

Dans le cas de l'air,  $C_p$  reste également quasi-constant pour des températures inférieures à 600 K. On supposera donc dans ce cours  $C_p$  constant et tel que :

$$C_p = 1004 \text{ J/kg} - K$$

Comme on a par ailleurs :

$$\begin{aligned} dh &= de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \\ &= C_v dT + r dT \\ &= (C_v + r) dT \end{aligned}$$

on en déduit que l'enthalpie  $h$  est une fonction de la température seulement :  $h = h(T)$ . On peut donc écrire :

$$h = C_p T + cste \quad \text{ou} \quad h = C_p T \quad (2.43)$$

sous réserve, encore une fois, d'avoir défini de façon appropriée un état de référence.

On dispose en outre de la relation dite de Mayer :

$$C_p - C_v = r$$

Puisque  $C_p$  et  $C_v$  sont constants, on peut introduire une nouvelle constante  $\gamma$ , rapport de ces chaleurs spécifiques :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Pour des écoulements d'air dans lesquels la température ne dépasse pas 600 K, le coefficient  $\gamma$  reste constant et tel que :

$$\gamma = 1.4$$

Cette valeur sera systématiquement utilisée dans ce cours sauf mention explicite du contraire <sup>11</sup>. On peut déduire des relations précédentes les expressions suivantes pour  $C_v$  et  $C_p$  :

$$C_v = \frac{r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

La loi d'état (2.41) peut donc aussi se mettre sous la forme :

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (2.44)$$

## Conservation de l'énergie

Compte tenu de l'expression de l'enthalpie spécifique  $h$  en fonction de la température  $T$ , on peut exprimer la conservation de l'énergie pour un écoulement stationnaire de fluide parfait avec des conditions uniformes à l'infini amont sous la forme :

$$C_p T + \frac{1}{2} \vec{V}^2 = C_p T_\infty + \frac{1}{2} \vec{V}_\infty^2 \quad (2.45)$$

### 2.5.2 Processus réversible et entropie

#### Notion de réversibilité

Considérons un système de particules qui échange de l'énergie avec son environnement. Ce processus d'échange est dit *réversible* s'il peut être "inverse" de façon à ce que le système de particules et son environnement retournent à leur état initial.

Il est clair qu'il n'existe pas de processus réel qui soit parfaitement réversible ; en particulier, tous les

<sup>11</sup>Aux très hautes températures,  $\gamma$  tend vers l'unité.

écoulements de fluides réels subissent les effets irréversibles des frottements visqueux et des transferts de chaleur. Cependant, si on considère un élément de fluide situé hors de la zone de couche limite dans laquelle se produit l'essentiel des effets de la viscosité et de la conductivité thermique, et en l'absence d'ondes de choc dans l'écoulement, on peut estimer que l'évolution de cet élément se fait de façon quasiment réversible.

L'irréversibilité d'un écoulement de fluide réel suggère qu'il existe des limitations sur le sens dans lequel peut avoir lieu un échange d'énergie.

La seconde loi de la thermodynamique va nous permettre de préciser dans quel sens peut se faire l'évolution de l'état d'un système thermodynamique et de quantifier le degré d'irréversibilité d'un processus.

## Notion d'entropie

Le deuxième principe de la thermodynamique stipule que :

- il existe une variable d'état  $s$ , appelée *entropie*, qui est donnée, pour un processus réversible, par la relation :

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T}\right)_{rev} \quad (2.46)$$

où  $\delta q$  désigne l'apport de chaleur au système thermodynamique considéré. Cet apport de chaleur peut être relié à l'énergie interne  $e$  grâce au premier principe de la thermodynamique :

$$de = \delta q - pdv$$

où  $pdv$  représente le travail des forces de pression. On rappelle que  $v$  désigne le volume massique, *i.e.*  $v = 1/\rho$ ; le produit  $pdv$  doit être vu ici comme le produit de la pression par la surface élémentaire de l'élément de fluide, ce qui correspond à la force s'exerçant sur cet élément, lui-même multiplié par le déplacement élémentaire de l'élément, afin de traduire le travail de cette force.

En combinant les deux relations ci-dessus, on obtient la relation de Gibbs, entre les variables d'état température, entropie, énergie interne, pression et masse volumique :

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.47)$$

- tout *changement d'état* d'un système thermodynamique s'accompagne d'une *variation d'entropie*  $ds$  qui se décompose comme suit :

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T}\right)_{rev} + ds_{irrev} \quad (2.48)$$

où la contribution  $ds_{irrev}$  provient des processus irréversibles du type frottement visqueux, transfert de chaleur, choc, qui se produisent dans le système, et est telle que :

$$ds_{irrev} \geq 0 \quad (2.49)$$

On en déduit donc que :



- pour tout processus *adiabatique*, *i.e.* s'effectuant sans échange de chaleur ( $\delta q = 0$ ) :

$$ds \geq 0$$

- pour tout processus *adiabatique réversible*

$$ds = 0$$

Un tel processus est qualifié d'*isentropique* puisqu'il se fait à entropie constante.

Nous avons vu précédemment que les effets de la viscosité et des transferts de chaleur étaient nuls dans le cas d'un écoulement de fluide idéal ; un tel écoulement est donc adiabatique et les irréversibilités de l'écoulement se limitent à la présence éventuelle de chocs. Par conséquent, un écoulement de fluide idéal en l'absence de discontinuités pourra être considéré comme adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique <sup>12</sup>.

### Écoulement isentropique d'un gaz parfait

Dans le cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait tel que l'air, on peut écrire la relation de Gibbs (2.47) en utilisant la loi d'état thermique (2.41)  $p = \rho r T$  et la loi d'état calorifique (2.42), soit  $de = C_v dT$ . On en déduit :

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + r \frac{dv}{v}$$

Cette relation peut être intégrée entre deux états 1 et 2 :

$$s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + r \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Compte tenu de  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$  par (2.41) appliquée pour l'état 1 et l'état 2, on en déduit :

$$s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + (C_v + r) \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

En utilisant alors la relation de Mayer et en introduisant le rapport  $\gamma$  des chaleurs spécifiques, on obtient :

$$s_2 - s_1 = C_v \ln\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right] = C_v \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - C_v \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (2.50)$$

Un écoulement isentropique de gaz parfait est donc tel que

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad (2.51)$$

La relation (2.51) jouera un rôle très important dans la suite de ce cours lors de l'analyse des écoulements compressibles internes et externes. Là-encore, il est tout aussi important de se rappeler les conditions de validité de cette relation que la relation elle-même : la relation (2.51) est valable dans un écoulement compressible qui peut être supposé *isentropique* ; tout écoulement de fluide parfait

---

<sup>12</sup>Il n'y a pas de processus réels qui soient parfaitement isentropiques. Cependant, on peut toujours supposer un écoulement isentropique et prédire alors les caractéristiques de l'écoulement compte tenu de cette hypothèse. Si cette prédiction s'avère incorrecte, cela signifie que les irréversibilités de l'écoulement doivent être impérativement prises en compte.

peut être considéré comme un processus isentropique en-dehors des zones de discontinuité : la traversée d'une discontinuité s'accompagne d'une production d'entropie irréversible. Dans le cas d'un écoulement incompressible de fluide réel, il n'y a pas de discontinuités présentes dans l'écoulement mais les zones de couche limite et de sillage, dans lesquelles les effets visqueux ne peuvent être négligés, sont des zones de production d'entropie irréversible ; l'écoulement pourra être considéré comme isentropique en dehors de la couche limite et du sillage.

Entre deux points d'une zone d'écoulement isentropique, on peut écrire :

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$$

soit

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \quad (2.52)$$

En utilisant la loi d'état  $p = \rho r T$ , on peut aussi écrire :

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.53)$$

Enfin, en combinant les relations (2.52) et (2.53) on obtient :

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.54)$$

## 2.6 Mesure de vitesse pour un écoulement compressible

On considère à nouveau le problème de la mesure de la vitesse dans une soufflerie (voir Fig. 2.13) mais on suppose maintenant que l'écoulement dans la veine d'essai ne peut plus être considéré comme compressible, *i.e.* les variations de la masse volumique dans l'écoulement ne peuvent plus être négligées. Il n'est donc plus légitime d'appliquer la relation de Bernoulli pour obtenir la valeur de la vitesse à partir d'une mesure de pression d'arrêt et d'une mesure de pression statique. Par contre, on peut utiliser la conservation de l'énergie entre la section d'essai où la vitesse (supposée uniforme) vaut  $V_1$  et la température (supposée elle-aussi uniforme) vaut  $T_1$  et le point d'arrêt  $B$  où la température, dite d'arrêt, vaut  $T_0$  (en gardant naturellement présent à l'esprit le fait que le tube de Pitot mesure une pression d'arrêt au point  $B$  et pas une température d'arrêt) ; on écrit ainsi :

$$C_p T_1 + \frac{1}{2} V_1^2 = C_p T_0$$

soit

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{V_1^2}{C_p T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_1^2}{\gamma r T_1}$$

Or, la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}$$

On peut donc réécrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_1^2}{a_1^2}$$

ou encore

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \quad (2.55)$$

où on a fait apparaître le nombre de Mach local dans la section 1,  $M_1 = V_1/a_1$ . De façon générale, le nombre de Mach en un point d'un écoulement est défini comme le rapport de la vitesse de l'écoulement en ce point et de la vitesse du son au même point. La conservation de l'énergie nous a donc permis d'établir la relation (2.55), valable pour l'écoulement *compressible considéré*; comme l'écoulement peut être supposé isentropique entre la section amont où sont atteintes les conditions 1 et le point d'arrêt du tube de Pitot, on peut utiliser la relation (2.53) vue précédemment, en l'appliquant entre l'état 1 et l'état au point d'arrêt  $B$  soit :

$$\frac{p_0}{p_1} = \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

et on en déduit donc finalement :

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (2.56)$$

On observe donc que pour un écoulement compressible la mesure d'une pression statique et d'une pression d'arrêt permet d'accéder au nombre de Mach de l'écoulement mais pas à sa vitesse. Puisque vitesse et nombre de Mach sont reliés par  $V = a \times M$  et puisque la vitesse du son  $a$  ne dépend que de la température  $T$ , on constate donc qu'il est nécessaire de disposer également d'une mesure de température pour pouvoir estimer la vitesse de l'écoulement. On écrit précisément :

$$V_1 = a_1 M_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} a_1 \sqrt{\left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (2.57)$$

Cette formule peut être comparée à la formule (2.31) valable uniquement pour un écoulement incompressible et que l'on manipule ici pour la mettre sous une forme analogue à la formule (2.57) ci-dessus :

$$V_1 = \sqrt{2 \left( \frac{p_0 - p_1}{\rho_1} \right)} = \sqrt{2 \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{p_0}{p_1} - 1 \right)} = \sqrt{2 r T_1 \left( \frac{p_0}{p_1} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} a_1 \sqrt{\left( \frac{p_0}{p_1} - 1 \right)}$$

### Application numérique

On considère un avion en vol à une altitude de  $10 \text{ km}$ . Un tube de Pitot placé en bout d'aile mesure une pression de  $40000 \text{ Pa}$  ou  $\text{N/m}^2$ . La température de l'air ambiant est de  $230 \text{ K}$ ; la pression de l'air ambiant à cette altitude est de  $26500 \text{ Pa}$  environ. Calculer le nombre de Mach et la vitesse de déplacement de l'appareil.

• Puisque toutes les données du problème ci-dessus sont exprimées en unités du Système International, on peut directement appliquer la formule (2.56) ou (2.57). Le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$

vaut 1.4 pour l'air et la constante  $r$  vaut  $287.06 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Un calcul immédiat fournit  $M_1^2 = 0.6242$  soit  $M_1 = 0.79$ . De plus,  $V_1 = a_1 \times M_1$  avec  $a_1 = 304.0285 \text{ m/s}$  soit  $V_1 \approx 240.2 \text{ m/s}$ .

Si on applique "sans réfléchir" la formule (2.31) valable dans le seul cas d'un écoulement incompressible, on obtient  $V_1 = 259.4 \text{ m/s}$  soit une erreur de 8% par rapport à la valeur correcte obtenue en ne supposant pas l'écoulement incompressible. Plus le nombre de Mach de l'écoulement sera proche de 1 et plus l'écart des prédictions fournies par les 2 formules sera grand. Pour un écoulement supersonique (tel que le nombre de Mach dans l'écoulement générateur est supérieur à 1), la formule (2.57) n'est elle-même plus valable car on doit tenir compte de la formation d'une onde de choc devant le tube de Pitot : ce cas sera abordé dans le cadre du cours consacré aux écoulements supersoniques.

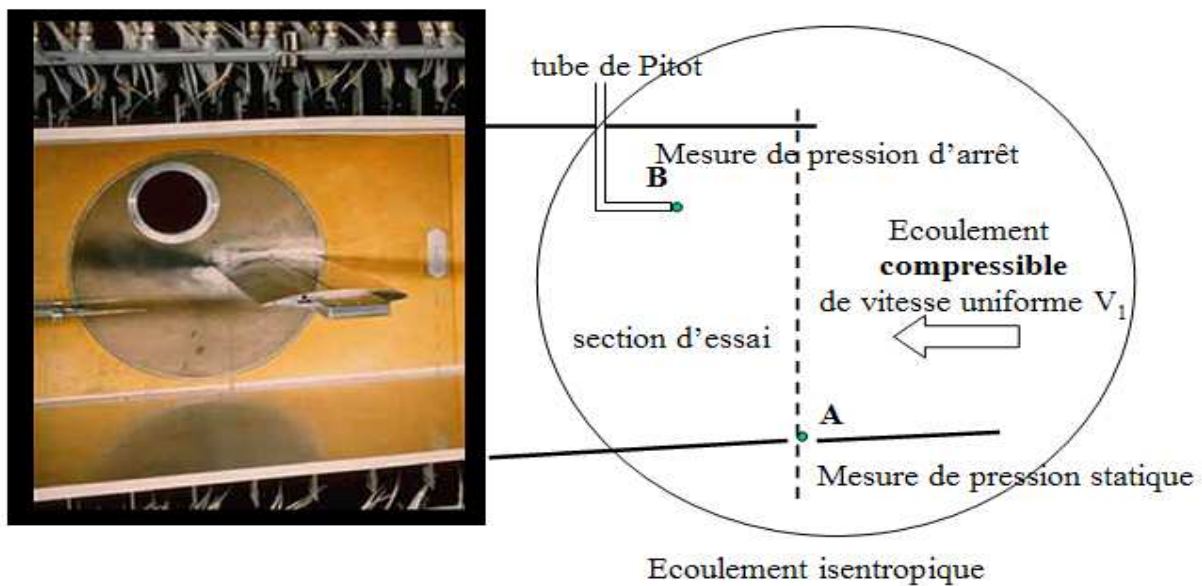


FIG. 2.13 – Mesure de vitesse dans une soufflerie basse-vitesse : cas d'un écoulement compressible.

## 2.7 Synthèse des équations de l'écoulement

### 2.7.1 Equations d'Euler

Nous avons précédemment dénommé "équations d'Euler" les équations de la quantité de mouvement dans le cas d'un fluide idéal (sans viscosité) ; on parle en anglais de *inviscid flow*. En fait, faisons-lui cette justice, Euler a établi en 1753 les équations de quantité de mouvement *et* l'équation de conservation de la masse ou de continuité (selon la terminologie anglo-saxonne). Il ne s'est pas intéressé à l'équation de l'énergie dans la mesure où la thermodynamique s'est développée bien plus tard, au 19ème siècle. Cependant, dans la littérature actuelle, en particulier celle en rapport avec la simulation numérique des écoulements (CFD), les équations d'Euler désignent l'ensemble des 5 équations précédemment établies : conservation de la masse (1 équation scalaire), équation de la quantité de mouvement (3 équations scalaires), conservation de l'énergie (1 équation scalaire). Nous adopterons dans ce cours cette terminologie. Nous rappelons ci-dessous les différentes formulations de ces équations d'Euler, qui décrivent l'écoulement d'un fluide idéal - pas d'effets de la viscosité dans les équations de quantité de mouvement, ni d'effets de viscosité ou de transfert thermique dans

l'équation de l'énergie - ; nous tenons compte dans ces formulations de l'existence de forces volumiques - gravitationnelles dans la plupart des applications - afin de leur donner un caractère aussi général que possible même si dans le cas des écoulements d'air considérés en aérodynamique l'effet de la gravité est négligeable.

### Forme intégrale

La formulation intégrale des équations d'Euler est particulièrement fondamentale : elle s'applique pour tous types d'écoulements ; en particulier, le volume de contrôle  $\mathcal{V}$  peut contenir des discontinuités.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} d\mathcal{S} = 0 \\ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} -p \underline{n} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} d\mathcal{V} \\ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho E (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{S}} p (\underline{V} \cdot \underline{n}) d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} \cdot \underline{V} d\mathcal{V} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

### Forme différentielle conservative

La forme différentielle fournit une information locale sur l'écoulement ; elle permet de connaître l'état de l'écoulement en chaque point de l'espace. Nous donnons ici la formulation conservative des équations d'Euler ; on parle aussi dans la littérature anglo-saxonne de *divergence form* puisque ces équations sont de la forme  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{F} = \underline{G}$  où  $\nabla \cdot \underline{F}$  désigne la divergence du flux  $\underline{F}$ .

- Equations en formulation vectorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \underline{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V} \otimes \underline{V}) = -\nabla p + \rho \underline{g} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \underline{V}) = -\nabla \cdot (p \underline{V}) + \rho \underline{g} \cdot \underline{V} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

- Equations en formulation indicelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(p v_i)}{\partial x_i} + \rho g_i v_i \end{array} \right. \quad (2.60)$$

• Equations totalement développées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} = -\frac{\partial(pu)}{\partial x} - \frac{\partial(pv)}{\partial y} - \frac{\partial(pw)}{\partial z} + \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w \end{array} \right. \quad (2.61)$$

### Forme différentielle non-conservative

Nous donnons ici uniquement la formulation vectorielle des équations d'Euler non-conservatives, qui utilisent des dérivées matérielles des grandeurs physiques de base (masse volumique, composantes de la vitesse, énergie totale spécifique).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{V} = 0 \\ \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \underline{g} \\ \rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (p\underline{V}) + \rho \underline{g} \cdot \underline{V} \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Remarque :

Dans le cas de l'écoulement d'un gaz parfait compressible - pour lequel la masse volumique  $\rho$  est une variable de l'écoulement -, les équations (2.61) par exemple se présentent comme un système couplé en les variables  $(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$ , dites *variables conservatives*, et la pression  $p$  est connue en fonction de ces variables grâce à l'équation d'état  $p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)[\rho E - \frac{1}{2}\rho V^2]$ .

Dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible tel que  $\rho = cste$ , les équations (2.62) par exemple se transforment en un système couplé pression/vitesse d'une part :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{V} = 0 \\ \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_\infty} + \underline{g} \end{array} \right.$$

et l'équation de l'énergie d'autre part.

### Description d'un écoulement de fluide idéal

Considérons (cf. Fig. 2.14) un écoulement de fluide idéal sur un obstacle fixe (profil d'aile, maquette de véhicule automobile ...) placé dans un écoulement ; à l'infini amont, l'écoulement est supposé uniforme et il est défini par un module de vitesse  $V_\infty$ , une masse volumique  $\rho_\infty$ , une pression statique  $p_\infty$  et une direction de l'écoulement (angle d'incidence  $\alpha$  pour un problème bidimensionnel). Cette situation, typique de celle rencontrée lors d'un essai en soufflerie ou d'une simulation numérique, est équivalente, en vertu du principe de réciprocité aérodynamique (formulé pour la première fois par Léonard de Vinci), à celle dans laquelle l'obstacle se déplace à vitesse prescrite dans l'air au repos (on passe d'une situation à l'autre selon que l'on se place dans un repère absolu ou dans un repère relatif fixé à l'obstacle). L'écoulement est entièrement décrit par les équations d'Euler qui viennent d'être rappelées mais ces équations ne font pas référence à la forme particulière de l'obstacle : celle-ci est prise en compte par le biais de conditions aux limites. Dans le cas considéré, on doit spécifier une condition pour l'écoulement du fluide au niveau de la paroi de l'obstacle : dans le cas d'un fluide idéal la condition de paroi stipule que l'écoulement glisse sur l'obstacle (on parle de condition de glissement ou *slip boundary condition* en anglais) ; ceci se traduit par la condition  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  pour le vecteur vitesse local au niveau de la paroi (la vitesse du fluide est purement tangentielle au niveau de la paroi solide ou encore sa composante normale s'annule). Les équations d'Euler (qui forment un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires), les conditions à l'infini amont et la condition de paroi ( $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Sigma$  où  $\Sigma$  désigne la surface de l'obstacle) définissent un "problème d'écoulement" (*flow problem* dans la terminologie anglo-saxonne), qui peut être résolu de façon analytique dans certains cas particuliers (pour des géométries simples ou des régimes d'écoulement particuliers - supersonique notamment - qui permettent une simplification du problème) mais ne possède pas de solution analytique (on parle en anglais de *closed-form solution*) dans le cas général. La résolution par voie numérique d'un problème d'écoulement dans le cas général s'appuie alors sur une formulation discrète des équations du problème et des conditions aux limites associées qui est décrite dans le cours ECOUL2. Si les équations d'Euler et les conditions aux limites sont écrites en utilisant des variables adimensionnées par l'état infini amont pris comme état de référence, on montre facilement (voir [15] par exemple) que les seules données du problème sont la géométrie  $\Sigma$  de l'obstacle et le nombre de Mach  $M_\infty = V_\infty/a_\infty$  (où  $a_\infty$  désigne la vitesse du son à l'infini amont, calculable à partir de  $p_\infty$  et  $\rho_\infty$ ) ainsi que l'angle d'incidence  $\alpha$ , qui suffisent à caractériser l'écoulement à l'infini amont. On s'intéressera tout particulièrement dans le présent cours à la résolution analytique de problèmes d'écoulement en régime supersonique ( $M_\infty > 1$ ).

### 2.7.2 Equations de Navier-Stokes

Nous avons donné précédemment l'appellation "équations de Navier-Stokes" aux équations de la quantité de mouvement dans le cas d'un fluide newtonien, c'est-à-dire un fluide dont le tenseur des contraintes visqueuses est de la forme :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Cette appellation est tout à fait correcte d'un point de vue historique. Cependant, le développement de la CFD a conduit à désigner sous le vocable "équations de Navier-Stokes" l'ensemble des équations qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux conducteur de la chaleur et que les chercheurs en CFD cherchent à résoudre numériquement. Nous adopterons cette terminologie dans ce cours. Nous

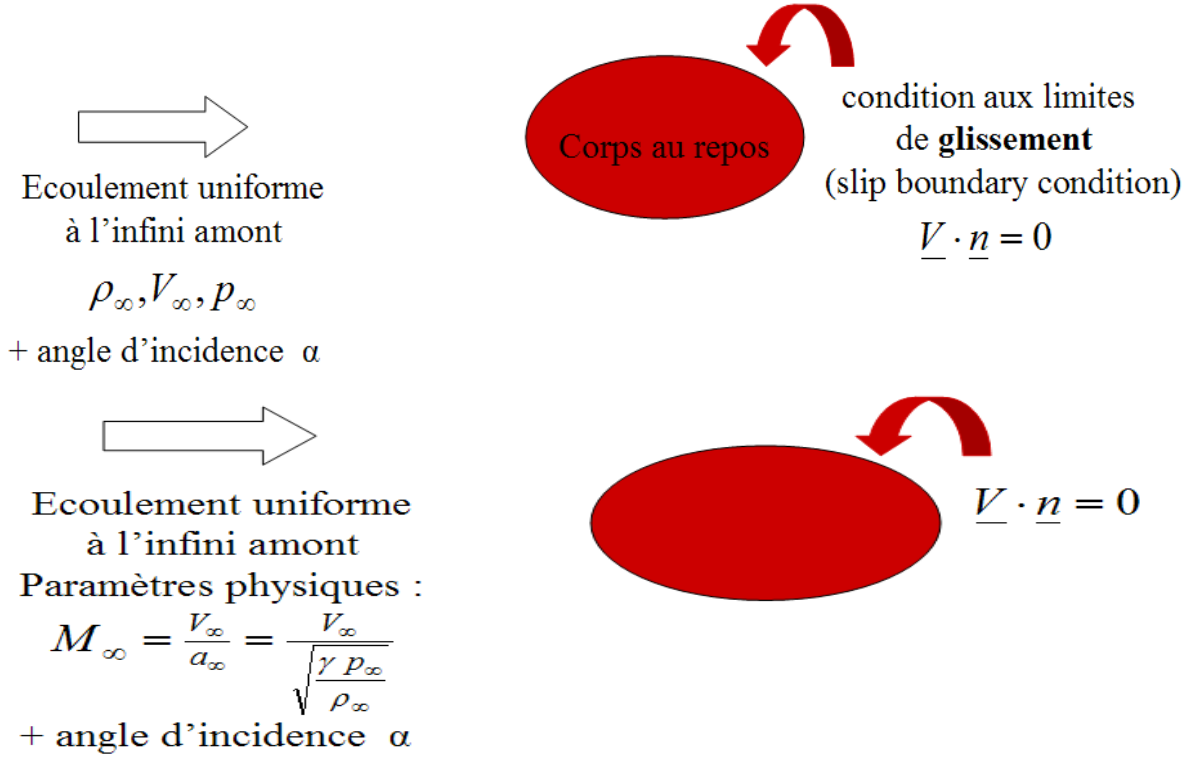


FIG. 2.14 – Description d'un problème d'écoulement libre de fluide parfait.

rappelons ci-dessous la formulation différentielle - sous forme indicielle - de ces équations de Navier-Stokes. Celles-ci diffèrent des équations d'Euler par la présence : de termes supplémentaires dans les équations de la quantité de mouvement, qui correspondent aux contraintes visqueuses ; de termes supplémentaires dans l'équation de l'énergie, qui traduisent le travail de ces contraintes visqueuses et le transfert de chaleur.

- Equations de Navier-Stokes sous forme conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(p v_i)}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + \frac{\partial(\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \end{array} \right. \quad (2.63)$$



- Equations de Navier-Stokes sous forme non-conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho \frac{DE}{Dt} = -\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + \frac{\partial(\tau_{ij}v_i)}{\partial x_j} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \end{array} \right. \quad (2.64)$$

### Equation de bilan pour la température $T$ d'un gaz parfait

Nous souhaitons transformer l'équation de l'énergie du système (2.64) en une équation sur la température  $T$ .

Puisque  $E = e + \frac{1}{2}\underline{V}^2 = C_v T + \frac{1}{2}\underline{V}^2$  dans le cas d'un gaz parfait, nous allons chercher à obtenir une équation de bilan sur l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}\underline{V}^2$ ; en faisant ensuite la différence entre cette équation et celle sur l'énergie totale  $E$ , nous obtiendrons l'équation désirée sur la température  $T$ .

Pour obtenir une équation sur l'énergie cinétique, formons le produit scalaire de la vitesse  $\underline{V}$  et de l'équation de quantité de mouvement de (2.64); on obtient :

$$\rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Comme :

$$\begin{aligned} v_i \frac{Dv_i}{Dt} &= v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \\ &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \end{aligned}$$

on en déduit l'équation de l'énergie cinétique :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

En effectuant maintenant la différence entre  $\frac{DE}{Dt}$  et  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right)$  on obtient :

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} - \frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij}v_i)}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Compte tenu de  $\frac{\partial(pv_i)}{\partial x_i} = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i}$  et  $\frac{\partial(\tau_{ij}v_i)}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ , on obtient finalement :

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.65)$$

ou encore

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \Delta T - p \nabla \cdot \underline{V} + \underline{\tau} : \nabla \underline{V} \quad (2.66)$$

On pose classiquement  $\phi = \underline{\tau} : \nabla \underline{V}$ ; physiquement,  $\phi$  correspond à un terme de *dissipation*, c'est-à-dire à l'énergie irréversiblement transformée en chaleur par les contraintes de cisaillement.

Dans le cas d'un fluide idéal incompressible, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

puisque dans ce cas  $k = 0$ ,  $\underline{\tau} = 0$  et  $\nabla \cdot \underline{V} = 0$ . La température  $T$  reste donc constante le long des trajectoires des particules fluides; si la distribution de température est uniforme à l'infini amont de l'écoulement,  $T = T_\infty$ , la température sera constante dans tout l'écoulement, que l'on qualifie alors d'*isotherme*.

### Description d'un écoulement de fluide réel

Considérons (cf. Fig. 2.15) un écoulement de fluide réel sur un obstacle fixe placé dans un écoulement; à l'infini amont, l'écoulement est supposé uniforme et il est défini, comme dans le cas vu précédemment d'un fluide idéal, par un module de vitesse  $V_\infty$ , une masse volumique  $\rho_\infty$ , une pression statique  $p_\infty$  et une direction de l'écoulement (angle d'incidence  $\alpha$  pour un problème bidimensionnel) mais également, et ceci est lié à la prise en compte de la viscosité, par une viscosité dynamique  $\mu_\infty$  (qui dépend de la température  $T_\infty$ ) (ainsi qu'une conductivité thermique  $k_\infty$  qui dépend également de  $T_\infty$ ). L'écoulement est entièrement décrit par les équations de Navier-Stokes qui viennent d'être rappelées mais ce système non-linéaire d'équations aux dérivées partielles ne fait pas référence à la forme particulière de l'obstacle qui doit donc être prise en compte par le biais d'une condition aux limites. Dans le cas d'un fluide réel, la condition de paroi stipule que l'écoulement adhère à l'obstacle (on parle de condition de non-glissement ou d'adhérence, *no-slip boundary condition* en anglais); en d'autres termes ceci signifie que la vitesse du fluide au niveau de la paroi solide est égale à la vitesse de déplacement de cette paroi solide et puisque l'obstacle est fixe dans le cas considéré on stipule donc  $\vec{V} = 0$  pour le vecteur vitesse local au niveau de la paroi (la vitesse du fluide est identiquement nulle au niveau de la paroi solide). Puisque la température est également une variable du problème, on doit également spécifier une condition aux limites thermique (la condition qui vient d'être écrite est elle relative à la dynamique de l'écoulement). Il existe deux grands types de conditions de paroi pour la température : si la paroi est *isotherme* (*i.e.* maintenue à une température fixée  $T_w$ ) on écrira que la température du fluide au niveau de la paroi solide est égale à  $T_w$ ; si la paroi est adiabatique (*i.e.* il n'y a pas de flux de chaleur à travers cette paroi) on écrira  $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$  à la paroi, où  $\vec{q}$  désigne le vecteur flux de chaleur et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la paroi solide, soit encore, compte tenu de la loi de Fourier qui relie le vecteur  $q$  au gradient de température,  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  où  $\partial n$  désigne une dérivée suivant la direction normale à la paroi. Le problème d'écoulement défini par les équations de Navier-Stokes, les conditions à l'infini amont et les conditions de paroi peut être résolu de façon analytique dans certains cas particuliers (on donne un exemple en conclusion de cette section en analysant le classique problème de Couette qui correspond à l'écoulement incompressible entre deux parois solides dont l'une est fixe et isotherme tandis que l'autre est en mouvement et adiabatique); dans le cas général, il n'est pas possible d'exhiber une solution analytique et on a donc à nouveau recours à une résolution discrète (par différences finies, volumes finis, éléments finis, méthodes spectrales...). Si les équations

de Navier-Stokes et les conditions aux limites sont écrites en utilisant des variables adimensionnées par l'état infini amont pris comme état de référence, on montre que les seules données du problème sont la géométrie  $\Sigma$  de l'obstacle, le nombre de Mach  $M_\infty$ , l'angle d'incidence  $\alpha$  et le nombre de Reynolds basé sur les conditions à l'infini amont et une dimension caractéristique de l'obstacle (corde d'un profil par exemple)  $Re_{\infty,L} = \rho_\infty V_\infty L / \mu_\infty$ . La conservation de l'énergie fait également apparaître un nombre sans dimension fonction de  $\mu_\infty$  et  $k_\infty$ , dit nombre de Prandtl, mais celui-ci est en réalité une constante du fluide considéré et ne dépend donc pas de l'écoulement (pour l'air le nombre de Prandtl est une constante qui vaut typiquement 0.71). On s'intéressera tout particulièrement dans le présent cours à des problèmes d'écoulement pour lesquels le nombre de Reynolds tend vers l'infini (on parle d'écoulements "à grand nombre de Reynolds") puisqu'il s'agit d'une situation typique des écoulements rencontrés en aérodynamique externe dans les domaines aéronautique et automobile.

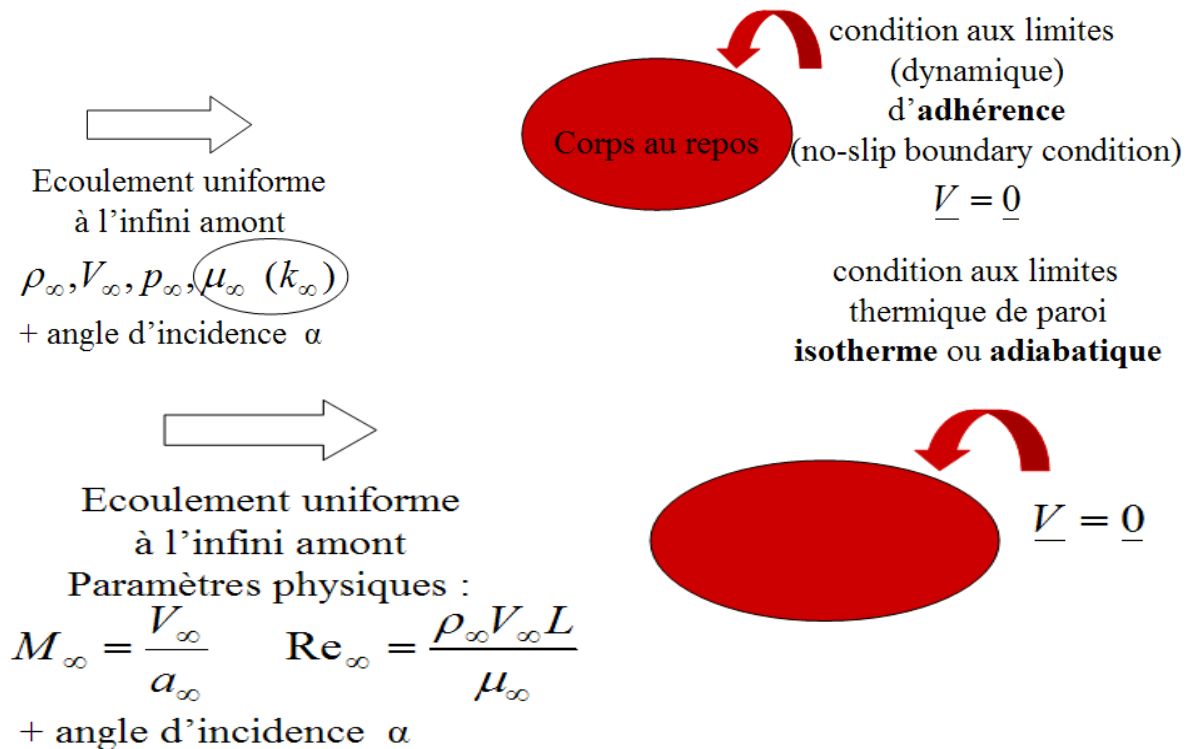


FIG. 2.15 – Description d'un problème d'écoulement libre de fluide réel.

### Exemple de solution analytique des équations de Navier-Stokes

Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible entre deux plaques infinies à la distance  $d$  l'une de l'autre (cf. Fig.2.16). On suppose que la plaque inférieure est fixe et maintenue à la température  $T_0$ ; on suppose par ailleurs que la plaque supérieure est animée d'un mouvement uniforme de translation à la vitesse  $U_0$  et qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre le fluide et cette plaque. Les forces volumiques sont négligées et on suppose de plus que l'écoulement ne varie pas suivant  $x$  (écoulement pleinement développé). Déterminer dans ces conditions la distribution de température qui s'établit entre les deux plaques.

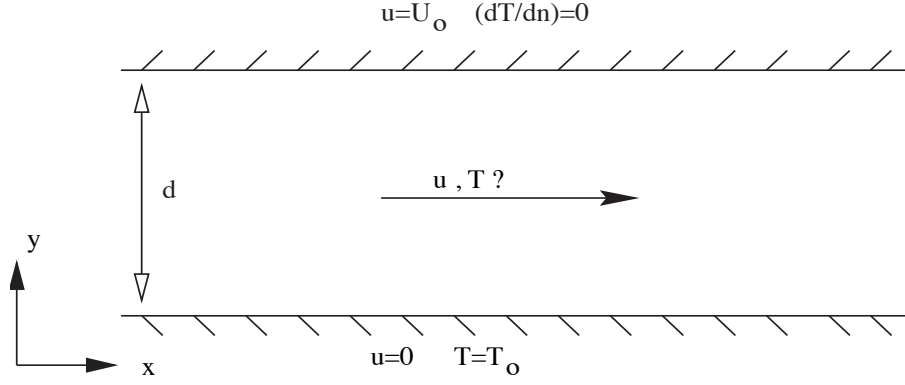


FIG. 2.16 – Écoulement de Couette. Bilan de température.

- Puisque  $\rho \equiv \rho_\infty$ , l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Puisque  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  et comme  $v = 0$  au niveau des plaques on a nécessairement  $v \equiv 0$  partout dans l'écoulement.

Les équations de la quantité de mouvement se réduisent alors à :

$$\begin{cases} 0 = \mu \Delta u \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

soit  $p = cste = p_\infty$  dans l'écoulement et  $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$ . On en déduit immédiatement :

$$u(y) = k_1 y + k_2$$

Comme  $u(0) = 0$  et  $u(d) = U_0$  on obtient finalement :  $u(y) = U_0 \left(\frac{y}{d}\right)$ .

Pour cet écoulement stationnaire et incompressible, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_v \underline{V} \cdot \nabla T = k \Delta T + \underline{\underline{\tau}} \cdot \nabla \underline{V}$$

soit, compte tenu de  $v = 0$  et  $T = T(y)$  :

$$k \frac{d^2 T}{dy^2} + \tau_{xy} \frac{du}{dy} = 0$$

avec la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  donnée par  $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)$ . On a donc :

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{U_0}{d}\right)^2$$

Par intégration immédiate, on en tire :

$$T(y) = c_1 + c_2 y - \frac{1}{2} \frac{\mu}{k} U_0^2 \left( \frac{y}{d} \right)^2$$

Compte tenu de  $T(0) = T_0$ , on a  $c_1 = T_0$ ; par ailleurs  $q(d) = -k \frac{dT(d)}{dy} = 0$  implique que  $c_2 = \left(\frac{\mu}{k}\right) \frac{U_0^2}{d}$   
d'où finalement :

$$T(y) = T_0 + (\frac{\mu}{k})U_0^2[(\frac{y}{d}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{d})^2]$$

On a en particulier  $T(d) = T_{aw} = T_0 + \frac{1}{2}(\frac{\mu}{k})U_0^2$ ; on remarque également que le transfert de chaleur du fluide vers la plaque inférieure est donné par :  $q(0) = -k\frac{dT}{dy}(0) = -\mu\frac{U_0^2}{d}$  (cf. Fig.2.17). En termes d'enthalpie, on peut écrire  $h(d) = C_p T(d) = h_0 + \frac{1}{2}PrU_0^2$  où on a introduit le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\mu C_p}{k}$ , qui compare les transferts de quantité de chaleur et de quantité de mouvement au sein du fluide. Pour l'air,  $Pr = 0.81$  ce qui indique que ces processus sont du même ordre de grandeur.  $\square$

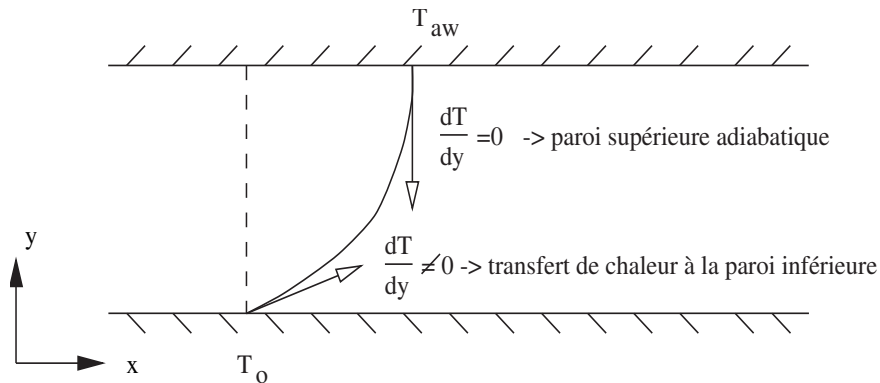


FIG. 2.17 – Distribution de température pour l'écoulement de Couette.