



*Laboratoire de Simulation Numérique
en Mécanique des Fluides - SINUMEF*

**Master FISE ou SDI
Spécialité Mécanique des fluides et Energétique**

UE : Aérodynamique fondamentale

Ecoulements potentiels

Enseignante : Paola CINNELLA

Année 2008 – 2009

ÉCOULEMENTS POTENTIELS

1. POTENTIEL DES VITESSES ET FONCTION DE COURANT

1.1 Écoulements irrotationnels et potentiel des vitesses

On s'intéresse ici à des écoulements incompressibles irrotationnels, i.e. tels que le rotationnel du champ de vitesse vaut zéro partout, sujets à des forces de masse conservatives. Nous avons vu que, pour ces écoulements, l'équation de continuité et de la quantité de mouvement s'écrivent sous la forme simplifiée :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{condition d'incompressibilité} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) && \text{conservation de la quantité de mouvement} \end{aligned} \quad (1)$$

Où \mathbf{u} est le vecteur vitesse, p est la pression, ρ la masse volumique du fluide (supposée constante), P le potentiel des forces de masse.

De plus, si l'écoulement est irrotationnel, i.e. si $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$, alors le champ de vitesse peut être écrit sous la forme :

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (2)$$

où la fonction φ est appelée le **potentiel des vitesses**. Dans ce cas, l'écoulement est aussi dit **potentiel**. Dans ce cas, l'équation de la quantité de mouvement peut être reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) &= 0 \quad \text{ou, de façon équivalente} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P &= C(t) \quad \text{équation de Bernoulli pour un écoulement instationnaire} \end{aligned} \quad (3)$$

Si, de plus, l'écoulement est stationnaire, l'on retrouve le fameux théorème de Bernoulli :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P = \text{cte} \quad (4)$$

Si maintenant l'on combine la condition d'écoulement incompressible avec celle d'écoulement potentiel, on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

i.e. l'équation de conservation de la masse se réduit à une équation de Laplace pour le potentiel des vitesses.

Dans ces conditions, le champ de vitesse peut être déterminé en résolvant une équation aux dérivées partielles scalaire et linéaire pour le potentiel φ , avec la condition de glissement à la paroi (condition de von Neumann pour φ) :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_w = (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})_w = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_w = 0 \quad (6)$$

La pression peut être évaluée ensuite à l'aide de l'équation algébrique de Bernoulli.

1.2 Fonction de courant - Généralités

Si le champ de vitesse est connu pour un instant de temps donné, il est possible de définir des lignes de champ, dites **lignes de courant**, tangentes au vecteur vitesse en tout point de l'écoulement.

Dans un espace à trois dimensions, une courbe suffisamment régulière peut par ailleurs être déterminée à l'aide de l'intersection de deux surfaces. Nous pouvons alors introduire deux fonctions scalaires, Ψ_1 et Ψ_2 , dites **fonctions de courant**, telles que les lignes de courant à un instant de temps donné peuvent être calculées comme l'intersection des surfaces de niveau de ces fonctions:

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = C_1, \quad \Psi_2(\mathbf{r}) = C_2,$$

où \mathbf{r} est le vecteur position. Par construction, le vecteur vitesse est tangent à ces deux surfaces en tout point de la courbe d'intersection. Il est connu que, étant donnée une surface définie par une équation de la forme $\Psi(\mathbf{r}) = \text{cte}$, le gradient de la fonction Ψ , $\nabla\Psi$, est un vecteur orthogonal à cette surface. Le vecteur \mathbf{u} , tangent à la courbe d'intersection des surfaces $\Psi_1(\mathbf{r}) = C_1$ et $\Psi_2(\mathbf{r}) = C_2$, est donc par définition orthogonal aux vecteurs $\nabla\Psi_1$ et $\nabla\Psi_2$ en tout point de cette courbe. De façon équivalente, cela revient à dire que \mathbf{u} est parallèle au produit vecteur des gradients $\nabla\Psi_1$ et $\nabla\Psi_2$:

$$\mu\mathbf{u} = \nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2, \quad (7)$$

où $\mu = \mu(\mathbf{r})$ est une constante de proportionnalité dépendante du point considéré. Comme il subsiste l'identité vectorielle

$$\nabla \cdot (\nabla\Psi_1 \times \nabla\Psi_2) \equiv 0 \quad (8)$$

et étant donné que, pour un écoulement incompressible,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$$

nous pouvons en déduire que, pour de tels écoulements, la constante μ est égale à 1 partout dans l'écoulement. Pour des écoulements compressibles stationnaires, pour lesquels l'équation de continuité vaut

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) \equiv 0$$

on a par contre $\mu(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$.

1.3 Fonction de courant pour les écoulements bidimensionnels

Un écoulement bidimensionnel est défini comme un écoulement n'admettant aucune variation en une direction donnée, que nous allons identifier, pour fixer les idées, avec l'axe z . En termes mathématiques, cela se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial z}(\text{grandeur quelconque}) \equiv 0.$$

Pour un tel écoulement bidimensionnel, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\mathbf{u} = (u, v, 0), \quad \text{avec} \quad u = u(x, y), v = v(x, y).$$

Etant donné un repère cartésien, un élément de courbe quelconque peut être défini comme :

$$ds = (dx, dy, dz).$$

En utilisant la définition de lignes de courant (condition de parallélisme entre un élément de ligne de courant et le vecteur vitesse) nous obtenons l'équation différentielle définissant ces lignes pour un écoulement 2D :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{et} \quad dz = 0 \Rightarrow z = \text{cte}.$$

Dans ce cas 2D une ligne de courant quelconque peut être obtenue par intersection d'une surface de l'espace 3D avec le plan de l'écoulement, i.e. on peut prendre:

$$\Psi_1 = \psi(x, y), \quad \Psi_2 = z.$$

En appliquant la condition de parallélisme (7) :

$$\mu \mathbf{u} = \nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \mu v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases}. \quad (9)$$

Il est par ailleurs utile d'écrire les équations des lignes de courant en coordonnées polaires, plus pratiques à utiliser pour certains écoulements à symétrie axiale. Les relations de passage d'un repère cartésien à un repère polaire s'écrivent (voir la Figure 1):

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$$

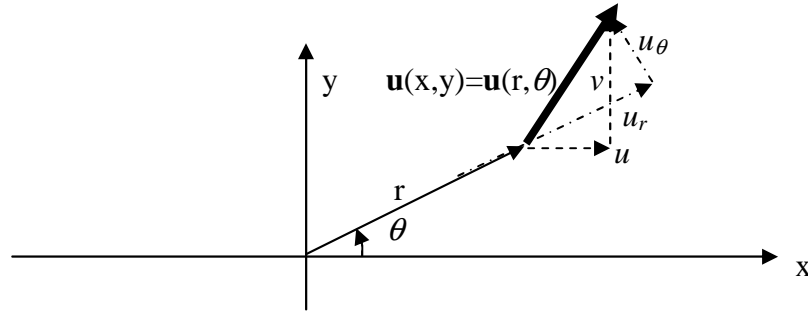


Fig. 1 : Relations entre un repère cartésien et un repère polaire.

En coordonnées polaires, la condition de parallélisme entre un élément de ligne de courant du plan (r, θ) , $ds = (dr, r d\theta)$ et le vecteur vitesse en composantes polaires $\mathbf{u}(r, \theta) = (u_r, u_\theta)$, donne l'équation différentielle suivante pour les lignes de courant:

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{r d\theta}{u_\theta} \quad \text{et} \quad dz = 0 \Rightarrow z = \text{cte}.$$

Dans ce cas, les lignes de courant peuvent être définies à l'aide des fonctions de courant:

$$\Psi_1 = \psi(r, \theta), \quad \Psi_2 = z$$

En utilisant encore une fois la condition (7) nous obtenons finalement:

$$\mu \mathbf{u} = \nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \mu v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}, \quad (10)$$

où \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ désignent le vecteur unitaire associé au vecteur position \mathbf{r} dans le plan (r, θ) et un vecteur unitaire orthogonal à ce dernier.

La fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel a une signification physique. Si nous désignons par dq le débit-volume élémentaire (par unité de profondeur dans la direction

z , donc exprimé en m^2/s) d'écoulant entre deux lignes de courant pour lesquelles la fonction de courant vaut ψ et $\psi+d\psi$, respectivement, nous pouvons écrire (voir la Figure 2) :

$$dq \stackrel{\text{par définition}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

mais

$$d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$$

et la normale à $d\mathbf{s}$ est:

$$\mathbf{n} ds = dy \mathbf{i} - dx \mathbf{j}.$$

Par conséquent, le débit élémentaire est donné par:

$$dq = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = u dy - v dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi.$$

Nous pouvons en déduire que le débit-volume d'écoulant entre deux lignes de courant ψ_1 et ψ_2 vaut:

$$Q = \int_1^2 dq = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (11)$$

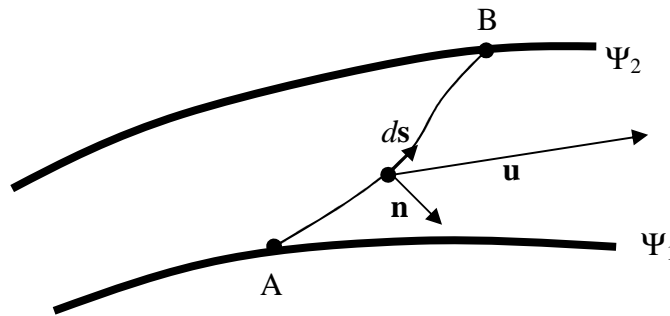


Fig. 2 : Signification physique de la fonction de courant.

1.4 Fonction de courant et potentiel des vitesses pour les écoulements irrotationnels

Nous nous plaçons désormais dans le cas d'écoulement potentiel (irrotationnel) et incompressible. Dans ce cas, nous avons les relations suivantes entre la fonction potentiel et les fonctions de courant:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla \phi = \nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 \\ \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2) = 0 \end{cases}$$

Nous voulons simplifier ces relations pour le cas d'écoulement 2D.

Écoulement bidimensionnel. Par définition de gradient et pour les considérations faites aux paragraphes 1.2 et 1.3 sur la fonction de courant en écoulement incompressible et 2D, nous pouvons écrire:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (12)$$

L'équation (12) montre que le gradient de la fonction de courant ψ est en tout point orthogonal au gradient de la fonction potentiel ϕ . Par conséquent, les lignes de courant et les lignes iso-potentiel d'un écoulement incompressible irrotationnel sont en tout point orthogonales entre elles.

En combinant les relations (12) avec la condition d'irrotationnalité nous obtenons:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

On a donc trouvé que la fonction de courant, tout comme la fonction potentiel, satisfait elle aussi une équation de Laplace. La même chose peut être démontrée en utilisant les coordonnées polaires.

Dans ce cas, une condition de paroi pour ψ peut être établie en se rappelant que, pour une paroi solide, le champ de vitesse doit satisfaire la condition :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Par conséquent, une paroi solide coïncide avec une ligne de courant puisque le vecteur vitesse lui est tangent en tout point (ou bien il vaut 0, pour un écoulement visqueux). Ceci se traduit par la condition de type Dirichlet :

$$\psi_w = cte$$

Le choix de cette constante étant arbitraire, nous pouvons poser, pour simplifier $\psi_w = 0$.

2. ECOULEMENTS POTENTIELS ELEMENTAIRES

Nous allons maintenant étudier certains écoulements potentiels 2D particulièrement simples. Puisque les écoulements potentiels sont régis par des équations linéaires, des écoulements plus complexes peuvent être obtenus en superposant ces écoulements élémentaires (principe de superposition des effets).

2.1 Source et puits

En utilisant les coordonnées polaires, l'écoulement généré par une source ponctuelle (resp., un puits), est caractérisé par un champ de vitesse de la forme

$$u_r = f(r); \quad u_\theta = 0.$$

Combinant ces conditions avec les relations (2) et (10), nous avons :

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \psi = \psi(\theta) \quad \text{et} \quad \phi = \phi(r) \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dr},$$

d'où:

$$ru_r = rf(r) = \frac{d\psi}{d\theta} = r \frac{d\phi}{dr}$$

La dernière égalité entre une fonction de la seule variable r et une fonction de la seule variable θ ne peut être vérifiée (pour tout choix des variables r et θ) que si les deux fonctions sont égales à une même valeur constante :

$$\frac{d\psi}{d\theta} = r \frac{d\phi}{dr} = cte$$

Afin de déterminer cette constante, nous utilisons le raisonnement suivant. En faisant référence à la figure 3, le débit-volume traversant une circonférence concentrique à la source ou puits ponctuel (sortant, donc positif, pour une source et entrant, donc négatif, pour un puits) est donné par :

$$q = \int_0^{2\pi} u_r(r) r d\theta = u_r(r) 2\pi r$$

Le dernier passage tient compte du fait que, le long de la circonférence, on a $r = cte$ et $u_r(r) = cte$. D'autre par, pour la conservation de la masse, le débit doit être le même pour une quelconque circonférence de centre S. On a alors:

$$u_r = \frac{q}{2\pi r} = ru_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dr} \quad (13)$$

avec q une constante.

En intégrant les relations (13) nous obtenons très facilement :

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r; \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (14)$$

Ces relations montrent que les lignes iso-potential pour ces écoulements sont des circonférences concentriques de centre S, et que les lignes de courant sont des droites sortant de l'origine S. En coordonnées cartésiennes, ces fonctions s'écrivent :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2); \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (15)$$

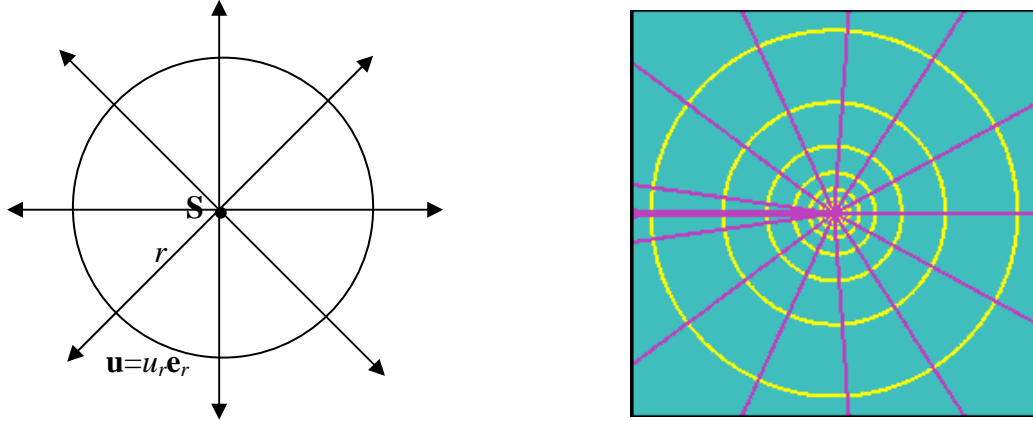


Fig. 3 : Configuration de source ou puits ponctuel (à gauche). À droite, lignes de courant (en violet) et lignes iso-potential (en jaune).

2.2 Écoulement uniforme

Nous considérons maintenant un écoulement uniforme de vitesse U_0 (en module). En coordonnées cartésiennes, les composantes du champ de vitesse s'écrivent (voir Figure 4):

$$u = U_0 \cos \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = U_0 \sin \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Intégrant ces relations, on peut déterminer le potentiel:

$$\varphi(x, y) = \int U_0 \cos \alpha \, dx + f(y) = (U_0 \cos \alpha) x + f(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'(y) = U_0 \sin \alpha \Rightarrow$$

$$f(y) = \int f'(y) \, dy + \text{cte} = \int U_0 \sin \alpha \, dy + \text{cte} = (U_0 \sin \alpha) y + \text{cte} \Rightarrow$$

$$\varphi = (U_0 \cos \alpha) x + (U_0 \sin \alpha) y + \text{cte}$$

De façon similaire on peut calculer la fonction de courant:

$$\psi = -(U_0 \sin \alpha) x + (U_0 \cos \alpha) y + \text{cte} \quad (16)$$

Ces relations montrent que les lignes de courant sont des droites parallèles au vecteur vitesse et que les lignes iso-potential sont des droites orthogonales à celles-ci (voir Fig. 4).

En coordonnées polaires, on a :

$$\varphi = U_0 r \cos(\theta - \alpha); \quad \psi = U_0 r \sin(\theta - \alpha). \quad (17)$$

Pour le cas particulier d'écoulement parallèle à l'axe x ($\alpha=0$), les expressions précédentes deviennent:

$$\varphi = U_0 x = U_0 r \cos \theta; \quad \psi = U_0 y = U_0 r \sin \theta. \quad (18)$$

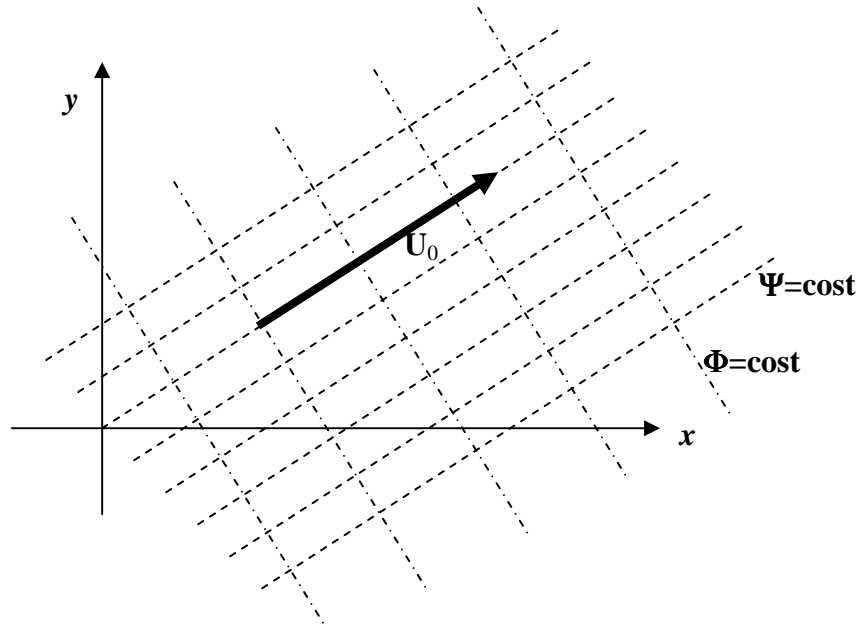


Fig. 4 : Lignes iso-potential (trait mixte) et lignes de courant (tirets).

2.3 Superposition d'une source et d'un puits de même intensité (dipôle)

Afin d'obtenir les expressions de φ et de ψ nous appliquons le principe de superposition des effets, aux fonctions obtenues pour les cas élémentaires de source et puits ponctuel. En faisant référence à la figure 5, la fonction de courant s'écrit :

$$\psi = \psi_{\text{Puits}} + \psi_{\text{Source}} = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{q}{2\pi} \theta_3$$

où l'on a tenu compte du signe opposé du débit pour la source et le puits. Les lignes de courant de l'écoulement résultant sont donc des lignes pour lesquelles l'angle θ_3 est constant. On en déduit que les lignes de courant sont des circonférences passant par les points S et P.

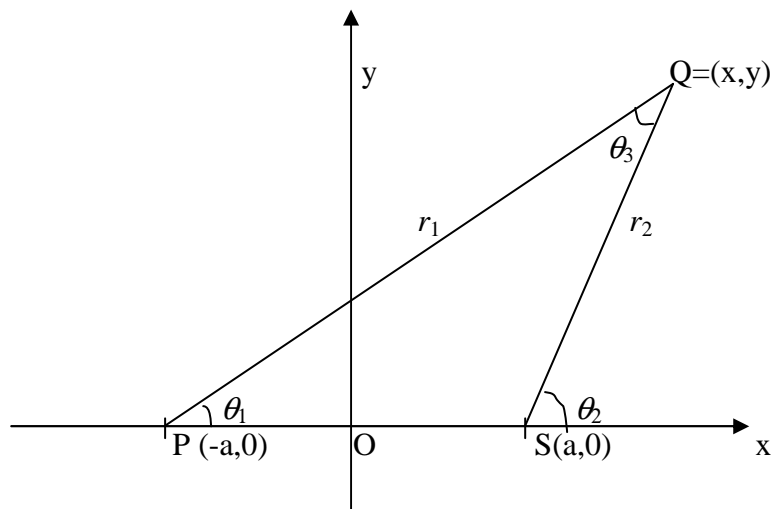


Fig. 5 : Dipôle fluide.

Similairement, en superposant les potentiels on obtient :

$$\varphi = \varphi_{\text{Puits}} + \varphi_{\text{Source}} = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{y^2 + (x-a)^2}{y^2 + (x+a)^2}}. \quad (19)$$

Le long d'une ligne iso-potentielle, on a :

$$\frac{y^2 + (x-a)^2}{y^2 + (x+a)^2} = \text{cte} \Rightarrow$$

$$(x-b)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad b = a \frac{1+\text{cte}}{1-\text{cte}}, \quad R = \frac{2a}{1-\text{cte}} \sqrt{\text{cte}}$$

Ceci démontre que les lignes iso-potentielle sont des circonférences dont le centre est un point de l'axe x de coordonnées $(b,0)$.

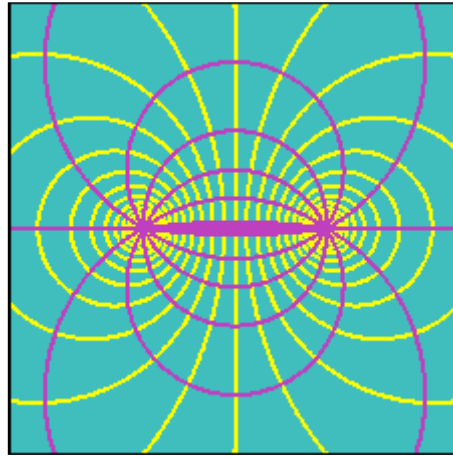


Fig. 6 Lignes de courant (en violet) et iso-potentielle (jaune) pour un dipôle.

2.4 Doublet

Si l'on fait tendre vers 0 la distance l entre une source et un puits de la même intensité (voir cas du dipôle) en maintenant constant le produit $m=ql$, on obtient la configuration d'écoulement potentiel dite **doublet** bidimensionnel. En coordonnées polaires, la fonction de courant pour cet écoulement est donnée par (voir Fig. 7):

$$\psi = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ m = \text{cte}}} \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta).$$

Mais, en faisant référence à la Figure 7, nous pouvons écrire:

$$\psi = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ m = \text{cte}}} \frac{q}{2\pi} \Delta\theta = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ m = \text{cte}}} \frac{q}{2\pi} \frac{l \sin \theta}{r - l \cos \theta} = \Psi = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ m = \text{cte}}} \frac{ql}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r - l \cos \theta} = \frac{m}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}. \quad (20)$$

Le potentiel, quant à lui, peut être obtenu en dérivant d'abord la fonction de courant pour déterminer les composantes du vecteur vitesse et en intégrant ensuite celles-ci. Le résultat final est :

$$\Phi = -\frac{m}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (21)$$

Les lignes de courant et iso-potentielle pour le doublet sont schématisées sur la figure 7.

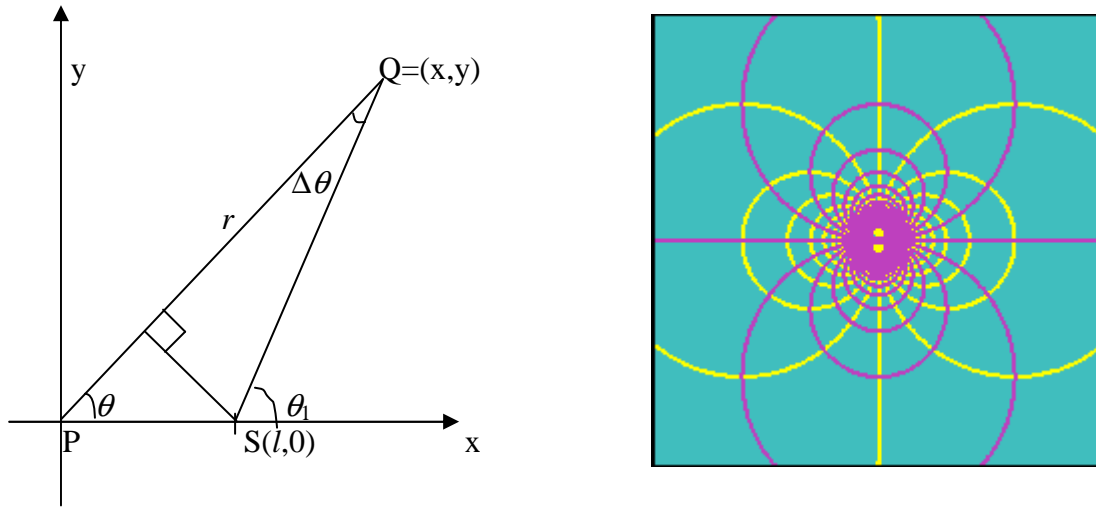


Fig. 7 : Doublet fluide.

2.5 Tourbillon potentiel

La condition d'irrotationnalité d'un écoulement implique l'impossibilité pour une particule fluide d'effectuer des rotations autour de son centre de masse. On peut toutefois définir des conditions d'écoulement dites **tourbillon potentiel** dans lesquelles les particules fluides translatent le long de trajectoires (coïncidentes, pour un écoulement stationnaire, avec les lignes de courant) circulaires concentriques par rapport à un point fixe, dit **centre du tourbillon**, sans tourner sur elles mêmes. D'un point de vue mathématique, ce tourbillon est caractérisé par un champ de vitesse de la forme (en coordonnées polaires):

$$u_\theta = f(r); \quad u_r \equiv 0.$$

Ceci implique:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(\theta), \quad \psi = \psi(r).$$

De plus,

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = f(r) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta) = -r \frac{\partial \psi}{\partial r}(r) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \text{cte} = k.$$

Le dernier passage est encore une fois justifié du fait qu'une fonction de la seule variable r est identiquement égale à une fonction de la seule variable θ seulement si les deux fonctions sont égales à une même valeur constante partout. En intégrant :

$$\varphi = k\theta; \quad \psi = -k \ln r; \quad \mathbf{u} = \frac{k}{r} \mathbf{e}_\theta.$$

Les relations précédentes montrent que les lignes iso-potentiel sont des droites sortantes du centre du tourbillon et que les lignes de courant sont des circonférences concentriques dont le centre coïncide avec le centre du tourbillon. La circulation autour d'une de ces circonférences est donnée par :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{k}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{k}{r} r d\theta = 2k\pi,$$

indépendamment de la ligne de courant choisie. La présence d'une circulation différente de zéro autour de ces courbes malgré le fait que l'écoulement est irrotationnel est due à la singularité associée à l'origine du tourbillon, où la vitesse tend vers l'infini, ce qui fait que les circuits d'intégration entourant l'origine ne sont pas réductibles et que le domaine fluide n'est pas simplement connexe du fait de cette singularité. Evidemment, pour tout autre circuit non

entourant l'origine la circulation est par contre bien égale à zéro. En résumé, les équations pour un tourbillon potentiel sont:

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r; \quad \mathbf{u} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta. \quad (22)$$

Les lignes de courant et iso-potentiel pour ce tourbillon sont représentés sur la figure 8.

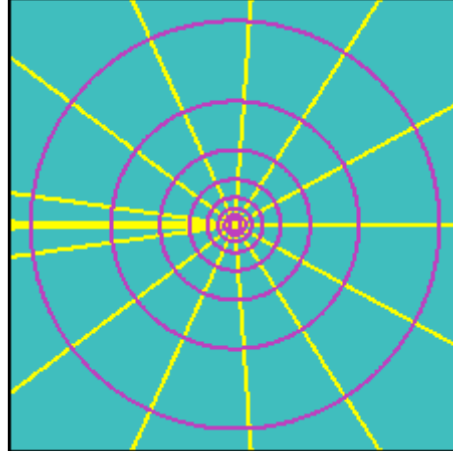


Fig. 8 : Lignes de courant (violet) et iso-potentiel (jaunes) pour un tourbillon potentiel.

2.5 Superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme

On considère la superposition d'un écoulement uniforme parallèle à l'axe x d'un repère cartésien et orienté comme celui-ci et un doublet placé dans l'origine de ce repère, orienté dans le sens opposé (i.e. avec la source à gauche et le puits à droite). En appliquant le principe de superposition des effets nous pouvons écrire:

$$\psi = \psi_{\text{écoul. unif.}} + \psi_{\text{doublet}} = U_0 r \sin \theta - \frac{m}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}.$$

Remarquons que la ligne de courant $\psi=0$ a pour équation:

$$r^2 = \frac{m}{2\pi U_0} = r_0^2,$$

i.e. la ligne de courant $\psi=0$ est une circonférence de rayon r_0 et centre dans l'origine. La fonction de courant peut alors être réécrite sous la forme:

$$\psi = U_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (23)$$

Les composantes radiale et tangentielle du vecteur vitesse résultant sont:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{U_0}{r} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta; \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (24)$$

On peut remarquer que, pour tout point appartenant à la circonférence de rayon r_0 la composante radiale de la vitesse (i.e. la composante normale à la circonférence) est identiquement nulle, ce qui est cohérent avec le fait que celle-ci est une ligne de courant. Par ailleurs, cette situation est équivalente à la condition de glissement sur une paroi solide. On en tire la conclusion très importante que le champ de vitesse à l'extérieur de la ligne de courant $\Psi=0$ est complètement équivalent à celui généré par un écoulement potentiel autour d'un cylindre de rayon r_0 .

On appelle **points d'arrêt** les points du champ fluide où la vitesse est nulle. Dans le cas présent, on peut constater facilement que la composante radiale de la vitesse est nulle tout au long de l'axe y et pour tous les points de la circonférence de rayon r_0 , alors que la composante tangentielle vaut zéro pour tous les points de l'axe x . On en déduit que l'écoulement a deux

points d'arrêt, correspondants aux intersections de la circonférence de rayon r_0 avec l'axe x (voir la Fig. 9):

$$R_1=(-r_0,0), \quad R_2=(r_0,0).$$

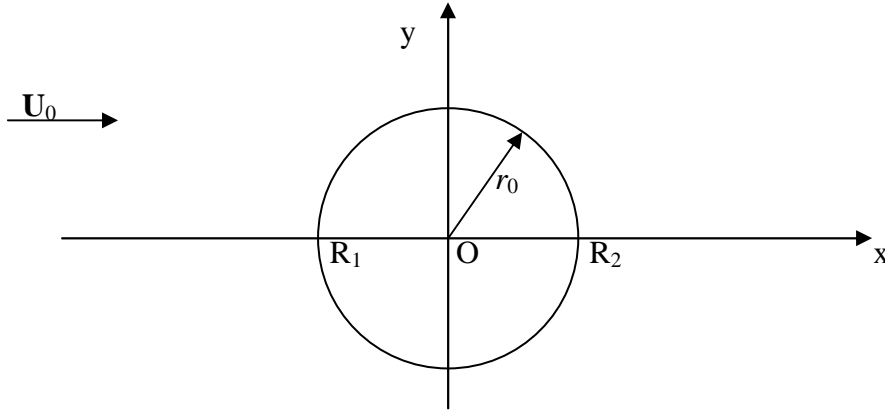


Fig. 9

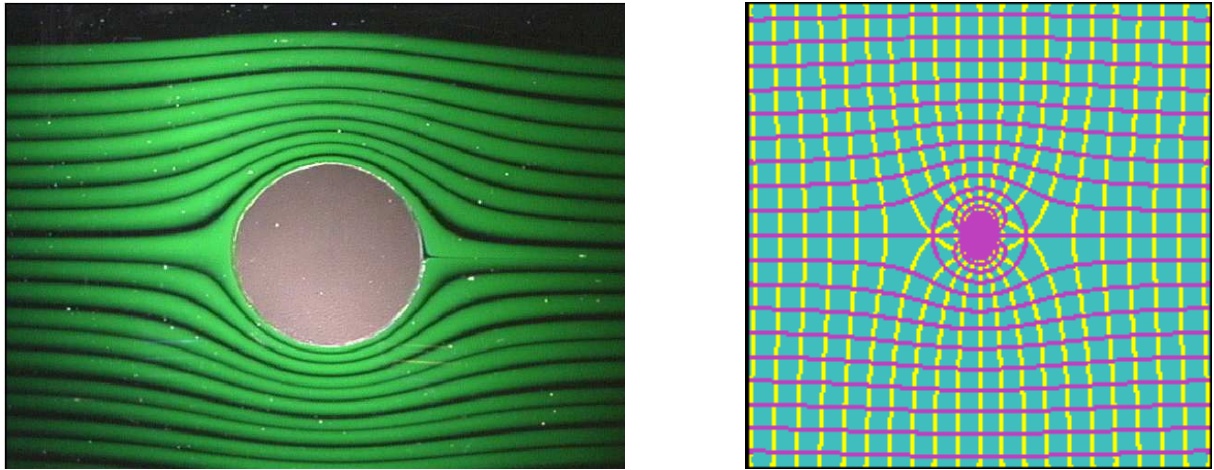


Fig. 10: Visualisation expérimentale des lignes de courant pour l'écoulement potentiel autour d'un cylindre à l'aide de l'analogie de Hele-Shaw et représentation des lignes de courant.

On considère à nouveau l'écoulement autour d'un cylindre en ajoutant cette fois une circulation. Pour ce faire, on ajoute à l'écoulement précédent un tourbillon potentiel avec une circulation horaire Γ (en valeur absolue). La fonction de courant et les composantes de vitesse pour cet écoulement sont de la forme:

$$\psi = U_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (25)$$

$$u_r = \frac{U_0}{r} \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta; \quad u_\theta = -U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (26)$$

On déduit des équations précédentes que la circonférence de rayon r_0 est encore une ligne de courant pour le nouvel écoulement. Le champ de vitesse résultant peut être considéré comme représentatif de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre tournant. On peut remarquer que l'expression de la vitesse radiale est inchangée par rapport au cas précédent. La vitesse tangentielle, par contre, s'annule tout au long d'une courbe située dans le demi-plan des ordonnées négatives. Cette courbe intersecte la circonférence de rayon r_0 (sur laquelle $u_r=0$) pour:

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi U_0 r_0}, \quad \text{avec } \pi < \theta < 2\pi$$

Cette équation a deux racines distinctes (ce qui implique deux points d'arrêt sur le cylindre) si:

$$\Gamma < 4\pi U_0 r_0.$$

Par rapport au cas du cylindre sans circulation les points d'arrêt sont maintenant situés à l'intrados du cylindre (voir Fig. 11a). Si $\Gamma = 4\pi U_0 r_0$, l'équation a deux racines coïncidentes, et l'écoulement a donc un seul point d'arrêt, situé à l'intersection du cylindre avec le demi-axe des ordonnées négatives (Fig. 11b). Enfin, si $\Gamma > 4\pi U_0 r_0$, il n'y a plus de points d'arrêt sur le cylindre, mais à l'intersection de la courbe $u_\theta=0$ avec l'axe des y négatives ($\sin\theta=-1$):

$$U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \Rightarrow r = \frac{\Gamma}{4\pi r} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi r}\right)^2 - r_0^2},$$

où l'argument de la racine est certainement positif pour $\Gamma > 4\pi U_0 r_0$. Des deux points d'arrêt ainsi trouvés, l'un est placé à l'intérieur du cylindre (on va donc l'ignorer), et l'autre à l'extérieur (voir Fig. 11c).

On veut maintenant examiner les forces aérodynamiques s'exerçant sur le cylindre dans le cas sans et avec circulation. Examinons d'abord le cas $\Gamma=0$. La distribution de pression sur la paroi du cylindre est donnée par l'équation de Bernoulli:

$$p_0 = p_c + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_c^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_0^2 \quad (27)$$

où p_0 est la pression aux points d'arrêt (où la vitesse est nulle) et les quantités avec un indice c sont évaluées à la paroi du cylindre. Le dernier terme, quant à lui, est valable dans l'écoulement au loin du cylindre (uniforme). Injectant les relations (24) dans (27), on a:

$$p_c = p_0 - \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_c^2 = p_0 - 2\rho U_0^2 \sin^2 \theta = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_0^2 - 2\rho U_0^2 \sin^2 \theta$$

Où l'on a tenu compte du fait que, sur le cylindre, $u_r=0$ et donc $|\mathbf{u}|=u_\theta=-2U_0\sin\theta$. Remarquons que la pression est maximale aux points d'arrêt et qu'elle décroît jusqu'à un minimum dans les points du cylindre avec $\theta=\pi/2$ et $\theta=3\pi/2$. A cause de cette distribution symétrique (voir Fig. 12) de la pression aucune portance ou traînée ne s'exercent sur le cylindre. On peut en effet vérifier facilement que:

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p_c \cos \theta r_0 d\theta = 0; \quad F_y = -\int_0^{2\pi} p_c \sin \theta r_0 d\theta = 0.$$

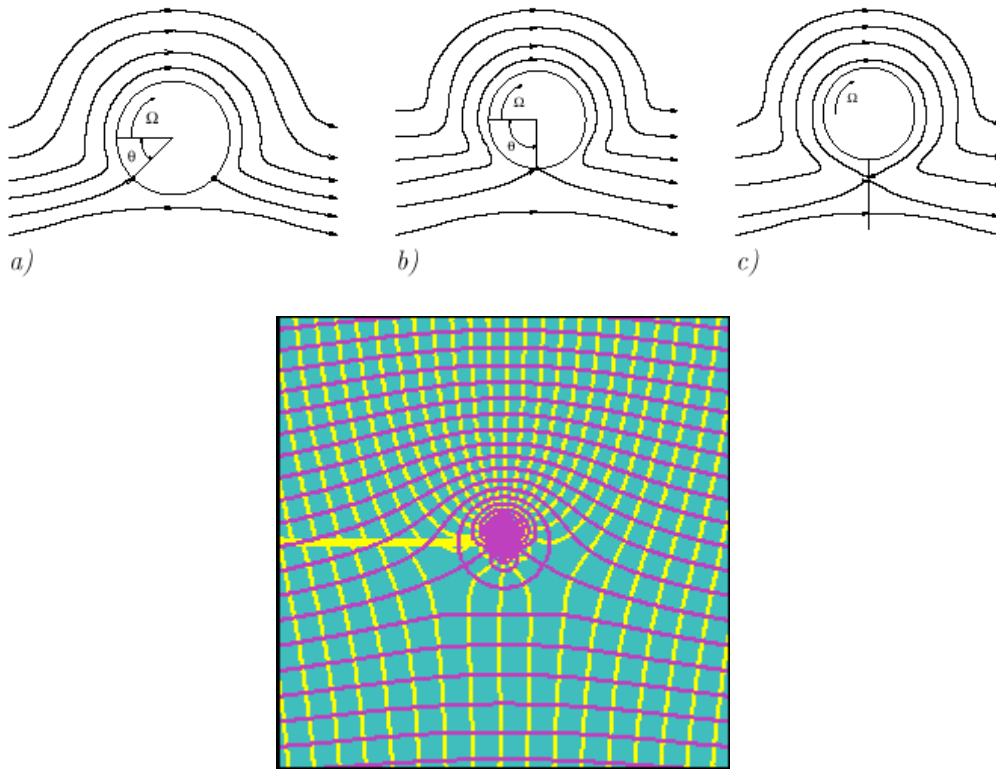


Fig. 11: En haut : schématisation des lignes de courant pour un écoulement potentiel autour d'un cylindre tournant. (a) Cas $\Gamma < 4\pi U_0 r_0$; (b) cas $\Gamma = 4\pi U_0 r_0$; (c) cas $\Gamma > 4\pi U_0 r_0$. En bas: représentation des lignes de courant (violet) et iso-potential (jaune) pour le cas (a).

On verra plus loin que ce résultat obtenu pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est en effet applicable à tout écoulement potentiel autour de cylindres de section quelconque : en effet, pour un écoulement irrotationnel autour d'un corps, la traînée est toujours nulle. Ce résultat est connu sous le nom de *paradoxe de d'Alembert*. Pour un écoulement sans circulations, la portance est tout aussi nulle, indépendamment de la forme du corps considéré.

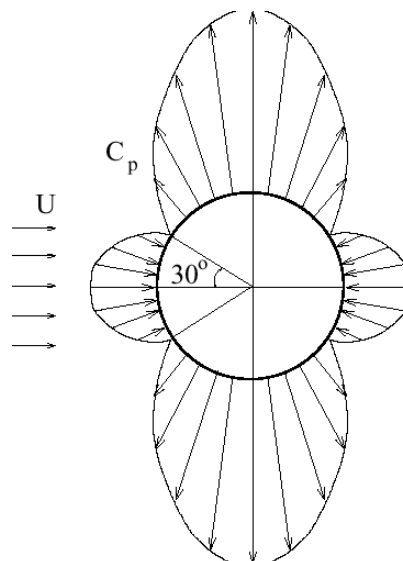


Fig. 12 : Distribution de pression sur un cylindre sans circulation.

Considérons maintenant le cas avec circulation. Dans ce cas, la vitesse à la paroi du cylindre vaut:

$$|\mathbf{u}| = u_\theta = -2U_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

L'équation de Bernoulli nous donne:

$$p_c = p_0 - \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}_c^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_0^2 - \frac{1}{2} \rho \left(2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2$$

Le lecteur peut vérifier comme exercice que les forces sur le cylindre sont donnée par:

$$\begin{cases} F_x = 0 & (\text{trainée}) \\ F_y = \rho U_0 \Gamma & (\text{portance}) \end{cases}$$

Nous allons voir plus tard que ce dernier résultat est, lui aussi, applicable à des cylindres non circulaires et qu'il est une conséquence du *théorème de Kutta-Joukowski*. La création de portance sur un cylindre tournant est un phénomène connu sous le nom d'effet *Magnus* et est utilisé, par exemple, dans certains sports afin de donner un "effet" à la balle (il s'agit précisément de l'équivalent de l'effet Magnus pour un écoulement irrotationnel autour d'une sphère).

3. POTENTIEL DE VITESSE COMPLEXE

Les variables complexes représentent un moyen puissant pour résoudre l'équation de Laplace, car elles permettent de transformer un problème dépendant de deux variables (réelles) indépendantes en un problème ne dépendant que d'une seule variable (complexe). Par contre, cette technique n'est applicable que pour des problèmes 2D. Le principe consiste à utiliser des transformations de variables, dites *transformations conformes*, qui permettent de transformer la solution pour l'écoulement potentiel autour d'un cercle en une solution pour un écoulement autour d'un corps de forme complexe.

Nous avons déjà vu, au paragraphe 1, comme le problème d'écoulement potentiel 2D se réduit à la solution d'une équation de Laplace, dont la fonction inconnue est, de façon équivalente, le potentiel des vitesses ou la fonction de courant. Nous avons aussi vu que les fonctions φ et ψ sont liées par les équations:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (28)$$

dérivant des relations entre ces fonctions et les composantes cartésiennes u et v du vecteur vitesse. Les fonctions φ et ψ , pour autant, ne sont pas indépendantes entre elles, ce qui est évident si l'on considère leur signification physique: si le potentiel de vitesse définit complètement le champ de vitesse, alors la fonction de courant, définissant les lignes de ce champ, reste aussi déterminée.

Nous allons voir dans ce chapitre que le potentiel des vitesses et la fonction de courant d'un écoulement potentiel 2D peuvent être regardées comme la partie réelle et imaginaire d'une fonction complexe d'une variable complexe. Par conséquent, un grand nombre d'écoulements potentiels peut être défini en utilisant des fonctions complexes satisfaisant des conditions opportunes. Ceci va nous permettre de décrire des écoulements plus complexes que ceux qu'on a construit au paragraphe précédent en utilisant uniquement le principe de superposition des effets.

3.1 Rappels sur les nombres complexes

On appelle *nombre complexe*, et le désigne avec la notation

$$a + i b$$

un couple ordonné de nombre réels (a,b) . Dans l'expression précédente, a est dite *partie réelle* du nombre complexe, b est dite *partie imaginaire* et le symbole i désigne l'unité imaginaire:

$$i = \sqrt{-1}; \quad i^2 = -1.$$

Etant donné la définition d'un nombre complexe, ses parties réelle et imaginaire peuvent être considéré comme les composantes d'un vecteur du plan complexe (ou plan d'Argand).

Remarquons que, si $b=0$, le nombre complexe coïncide avec sa partie réelle. Si par contre $a=0$, le nombre complexe est dit *nombre imaginaire*. Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelle et imaginaire sont égales.

Même si les nombres complexes sont des entités algébriques, on peut leur associer une représentation géométrique dans le plan d'Argand, présentée sur la Fig. 13. On peut associer à chaque point du plan d'Argand un nombre complexe, de manière que l'abscisse du point correspond à la partie réelle et l'ordonnée à la partie imaginaire de ce nombre.

Etant donné un nombre complexe

$$z = x + iy$$

On peut lui associer le vecteur \overrightarrow{Oz} du plan d'Argand, dont le module, noté r ou $|z|$ est donné par:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Et il est dit le *module du nombre complexe* z . On dit *argument du nombre complexe* z l'angle θ compris entre le semi-axe des abscisses positives et la droite orientée Oz , positif dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre. On a précisément:

$$\theta = \arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

L'argument de z n'est pas défini de façon unique, car tous les angles $\theta \pm 2n\pi$ sont aussi des arguments de z pour tout nombre entier n . On appelle *argument principal* de z l'argument compris entre $-\pi$ et π .

Dans beaucoup d'application il est plus intéressant d'écrire les nombre complexes à l'aide des coordonnées polaires ou en utilisant la notation dite exponentielle. Considérant à nouveau la Fig. 13, nous pouvons écrire :

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta$$

d'où:

$$x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

ou encore

$$z = r e^{i\theta}.$$

L'identité

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

représente le *théorème de De Moivre* et peut être démontrée en utilisant le développement de Taylor des fonctions $e^{i\theta}$, $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

On dit *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + iy$ le nombre complexe :

$$\bar{z} = x - iy.$$

On montre facilement que des nombres complexes conjugués ont le même module et des arguments opposés. En notation exponentielle cela donne:

$$\bar{z} = r e^{-i\theta}.$$

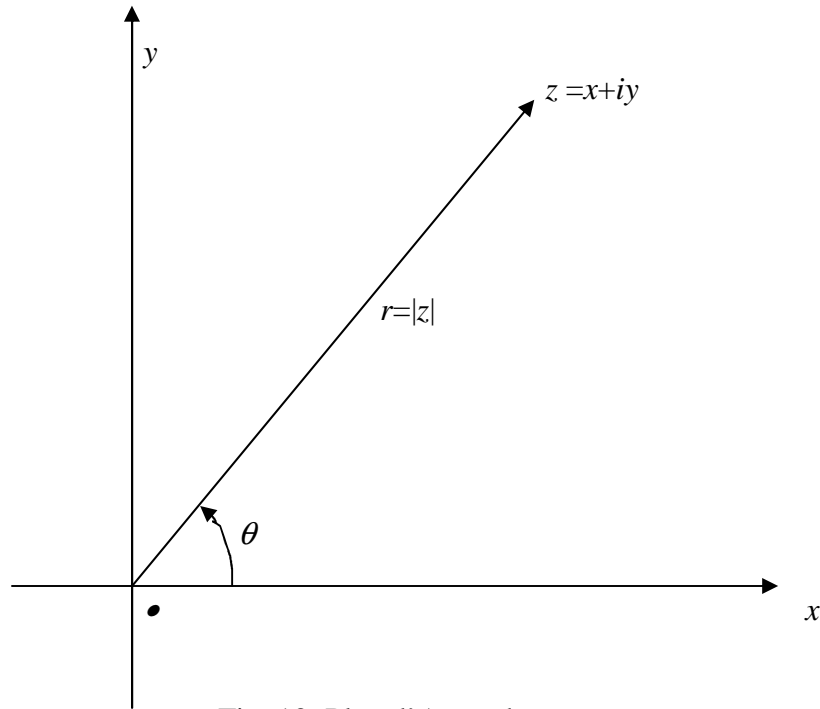


Fig. 13: Plan d'Argand.

3.2 Opérations sur les nombres complexes

Somme et soustraction.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Multiplication et division.

Multiplication en coordonnées cartésiennes :

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

En notation exponentielle:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Remarquons que le produit d'un nombre complexe et son conjugué est:

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = r^2.$$

Division en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Notation exponentielle:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Puissance et racine. Soit $z = x + iy$, la valeur z^n avec n entier et positif, peut être évaluée à l'aide des formules binomiales :

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

...

Une méthode plus simple consiste à utiliser la notation exponentielle :

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Similairement, la racine n -ème $z^{1/n}$ peut être calculée à partir de la notation exponentielle:

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right).$$

Toutefois, comme $-\pi \leq \theta \leq \pi$, tous les arguments de la forme: $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$, avec $0 \leq k \leq n-1$ sont des possibles arguments principaux pour la racine. Par conséquent, un nombre complexe n'a pas une seule racine, mais plutôt n racines de même module, dont les arguments principaux sont les nombres $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$.

Logarithme d'un nombre complexe. Utilisant à nouveau la forme exponentielle, le logarithme est donné par :

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

3.3 Fonctions complexes de variable complexe

Le nombre complexe $z = x + iy$, formé à partir des variables réelles x et y est dit *variable complexe*. On peut alors définir une fonction associant à la variable complexe z un nombre complexe w :

$$w = f(z) = f(x + iy).$$

D'autre part, w peut à son tour être décomposé en une partie réelle et une partie imaginaire :

$$w = f(z) = f(x + iy) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),$$

où $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des fonctions réelles des variables réelles x et y .

Exemple:

$$w = 4z^2 = 4(x + iy)^2 = 4(x^2 - y^2) + i8xy$$

$$\Phi(x, y) = 4(x^2 - y^2); \quad \Psi(x, y) = 8xy$$

Tout comme $z = x + iy$ permet d'identifier un point du plan d'Argand, $w = \Phi + i\Psi$ représente lui aussi un point d'un deuxième plan d'Argand, dans lequel Φ représente l'axe réel et Ψ l'axe imaginaire. Une fonction f , donc, associe à tout point du plan z un point correspondant du plan transformé w . Similairement, à chaque courbe continue du plan z on peut associer une courbe du plan w . Nous pouvons donc utiliser la relation $w = f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ pour transformer des figures du plan z en figures correspondantes du plan transformé.

Une *transformation conforme* est une transformation associant aux figures élémentaires du plan z des figures du plan w qui sont en similitude géométrique avec la figure de départ (par exemple, un rectangle infinitésimal du plan z est transformé en un rectangle du plan w , éventuellement tourné et de dimensions différentes, dont les cotés sont proportionnels à ceux du rectangle initial).

Une fonction $f(z)$ de variable complexe et dite *analytique* sur un domaine R si la dérivée de $f(z)$ existe et est unique en tout point de R .

La dérivée d'une fonction complexe $w=f(z)$ est définie comme:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Puisque:

$$\Delta w = \Delta \Phi + i\Delta \Psi; \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

nous pouvons réécrire la limite du rapport incrémental comme

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi + i\Delta \Psi}{\Delta x + i\Delta y}$$

Or, comme Δz est un vecteur du plan d'Argand, il existe plusieurs façons de le faire tendre vers 0. Si toutefois la fonction w est analytique, sa dérivée est définie de façon unique, indépendamment de la façon où Δz tend vers 0. Un premier choix consiste à faire tendre Δz vers zéro suivant l'axe x . Dans la pratique, cela revient à imposer $\Delta y=0$ et $\Delta z=\Delta x$. Dans ce cas, la dérivée est:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{\text{suivant } x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi + i\Delta \Psi}{\Delta x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Comme alternative, on peut faire tendre Δz vers zéro suivant l'axe y , i.e. en posant $\Delta z=i\Delta y$. Dans ce cas, nous obtenons:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{\text{suivant } y} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi + i\Delta \Psi}{i\Delta y} = -i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Si la fonction est analytique, la dérivée en un point est unique et donc il faut que ce soit :

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{\text{suivant } x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{\text{suivant } y} = -i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Ceci implique que les parties réelles et imaginaires sont égales :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Les relations qu'on vient d'établir s'appellent les *conditions de Cauchy-Riemann*. Elles représentent une condition nécessaire pour qu'une fonction w soit analytique.

Une fonction analytique est aussi dérivable autant que l'on veut. On peut alors dériver les conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$$

et, sommant les deux relations et en appliquant le théorème de Schwartz:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Similairement, on peut prouver que:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

En d'autres termes, les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe analytique sont des solutions de l'équation de Laplace.

Finalement, étant donné une fonction analytique $w(z)$, on peut montrer qu'elle admet une fonction inverse, et que cette fonction inverse $z(w)$ est à son tour une fonction analytique.

3.4 Représentation d'écoulements potentiels 2D à l'aide du potentiel complexe

Nous avons vu dans le paragraphe 1 que le potentiel des vitesses ϕ et la fonction de courant ψ pour un écoulement potentiel 2D sont liées par les relations:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (29)$$

identiques aux conditions de Cauchy-Riemann. Par ailleurs, nous avons vu que, pour un écoulement potentiel 2D les deux fonctions sont des solutions de l'équation de Laplace. Nous pouvons pour autant considérer le potentiel et la fonction de courant respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire d'un *potentiel complexe*:

$$w = \varphi + i\psi \quad (30)$$

Ce potentiel, en raison des relations (28) est par construction une fonction analytique de la variable complexe $z=x+iy$. Ceci va nous permettre d'exploiter les outils mathématiques disponibles pour les fonctions complexes analytiques afin d'étudier des écoulements potentiels 2D par une approche plus systématique que celle suivie au paragraphe 2. Remarquons que, pour le potentiel complexe w défini par l'équation (30) la dérivée (unique) dw/dz a une signification physique bien précise. En effet, nous pouvons écrire, par exemple:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv,$$

où nous avons utilisé les relations (29) liant les composantes cartésiennes du vecteur vitesse au potentiel des vitesses et à la fonction de courant. La dérivée dw/dz est appelée *vitesse complexe*, car elle n'est rien d'autre que le complexe conjugué du vecteur vitesse. En faisant recours à la notation exponentielle, la vitesse complexe s'écrit:

$$\frac{dw}{dz} = |\mathbf{u}| e^{-i\alpha}$$

où α est l'inclinaison locale du vecteur vitesse par rapport à l'axe x , positif dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre.

3.5 Potentiels complexes pour des écoulements potentiels 2D élémentaires

Les écoulements élémentaires décrits au paragraphe 2 en utilisant séparément le potentiel de vitesse et la fonction de courant peuvent être décrits de façon plus synthétique à l'aide du potentiel complexe.

Source ou puits. Soit q une constante réelle, le potentiel complexe d'une source ponctuelle placée dans l'origine du plan z est donné par:

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z.$$

Sa partie réelle est $\frac{q}{2\pi} \ln r$ et sa partie imaginaire est $-\frac{q}{2\pi} \theta$: l'on retrouve donc le potentiel des vitesses et la fonction de courant pour une source tels qu'on les a introduits au paragraphe 2.1. La vitesse complexe générée par la source est

$$\frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi z}$$

Et son module diminue avec la distance par rapport à l'origine comme $1/r$.

Ecoulement uniforme. Le potentiel complexe s'écrit:

$$w(z) = W_0 z$$

où W_0 est une constante complexe. La vitesse complexe est constante partout et égale à :

$$\frac{dw}{dz} = W_0$$

En posant

$$W_0 = U_0 e^{-i\alpha}$$

où U_0 est le module et α l'argument du nombre complexe W_0 , nous pouvons voir que le potentiel complexe ci-dessus décrit un champ de vitesse uniforme de module U_0 incliné d'un angle α (dit *angle d'attaque*) par rapport à l'axe x . La partie réelle et la partie imaginaire de ce

potentiel complexe coïncident avec les relations du paragraphe 2.2 pour le potentiel des vitesses et la fonction de courant d'un écoulement uniforme.

Doublet. Le potentiel complexe du doublet est:

$$w(z) = \frac{m}{2\pi z}$$

où m est une constante réelle mesurant l'intensité du doublet. La vitesse complexe du doublet est :

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{m}{2\pi z^2}$$

Dont le module décroît avec la distance par rapport à l'origine comme $1/r^2$.

Tourbillon potentiel. Soit Γ une constante réelle, le potentiel complexe d'un tourbillon ponctuel placé dans l'origine du plan z est:

$$w(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z .$$

Sa partie réelle est $-\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ et sa partie imaginaire $\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$: l'on retrouve donc bien le potentiel et la fonction de courant qu'on a vu au paragraphe 2.5.

Écoulement autour d'un cylindre sans circulation. En superposant les potentiels complexes pour un écoulement uniforme et pour un doublet on obtient le potentiel:

$$w = W_0 z + \frac{m}{2\pi z}$$

Plus particulièrement, pour $W_0 = U_0$ on retrouve le potentiel et la fonction de courant du paragraphe 2.6. Dans le cas où W_0 a une partie imaginaire différente de zéro, le potentiel complexe ci-dessus représente toujours l'écoulement autour d'un cylindre de rayon

$$r_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi U_0}} \text{ mais tourné d'un angle } \alpha = -\arg(W_0).$$

A la paroi du cylindre le potentiel vaut:

$$w(r_0 e^{i\theta}) = U_0 r_0 e^{i\theta} + U_0 \frac{r_0^2}{r_0 e^{i\theta}} = 2U_0 r_0 \cos \theta ,$$

et sa partie imaginaire est zéro. On en déduit que la fonction de courant à la paroi vaut zéro et que dont la paroi coïncide bien avec une ligne de courant.

La vitesse complexe est:

$$\frac{dw}{dz} = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right).$$

Elle s'annule sur l'axe réel en $\pm r_0$. Les intersections du cylindre avec cet axe sont donc des points d'arrêt pour l'écoulement. La vitesse à la paroi atteint ça valeur maximale, égale à $2U_0$, au sommet et à la base du cylindre, en $\pm i r_0$.

Écoulement autour d'un cylindre avec circulation

Si l'on superpose le potentiel précédant et un tourbillon avec circulation horaire, on obtient le potentiel complexe pour un écoulement autour d'un cylindre avec circulation :

$$w = U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z .$$

3.6 Transformations conformes et leur application au calcul d'écoulements potentiels 2D

Dans les paragraphes précédents nous avons remarqué qu'une fonction complexe w de la variable complexe z transforme le plan d'Argand z en un nouveau plan d'Argand w . Si la fonction w est analytique et sa dérivée ne s'annule ni tend vers l'infini en aucun point d'un certain domaine, la transformation déterminée par w est dite *transformation conforme*. Une transformation conforme change des figures infinitésimales du plan z en figures de la même forme du plan w .

En effet, soit δz un élément de courbe du plan z , il est transformé en un élément δw du plan w suivant la relation:

$$\delta w = \frac{dw}{dz} \delta z \Leftrightarrow \delta z = \frac{1}{dw/dz} = \frac{dz}{dw} \delta w \quad (31)$$

Elle montre que, si la dérivée du potentielle n'est pas nulle ni tend vers l'infini, la transformation directe $z \rightarrow w$ ainsi que son inverse $w \rightarrow z$ sont définies de façon unique (bijection). La dérivée dw/dz , par ailleurs, est à son tour une quantité complexe qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{dw}{dz} = a e^{i\beta}, \quad \text{où} \quad a = \left| \frac{dw}{dz} \right|, \quad \beta = \arg \left(\frac{dw}{dz} \right).$$

La transformation (31) peut donc être reformulée comme suit:

$$\delta w = a \delta z e^{i\beta} \Leftrightarrow \delta z = \frac{\delta w}{a} e^{-i\beta} \quad (32)$$

La (32) montre que la transformation conforme transforme de segment infinitésimal dz en un segment dw étiré du facteur a et incliné d'un angle β par rapport à dz . Par conséquent, un élément infinitésimal de surface du plan z est transformé en un élément de surface de même forme, puisque chacun de ses côtés s'étire de la même quantité a et s'incline du même angle β . Un exemple de transformation conforme est illustré sur la figure 14. Evidemment, en général dw/dz dépend de z et par conséquent les quantités a et β varient d'un point à l'autre. C'est pourquoi seules les figures infinitésimales sont conservées, car dans un voisinage d'un point z donné la dérivée dw/dz peut être considérée constante.

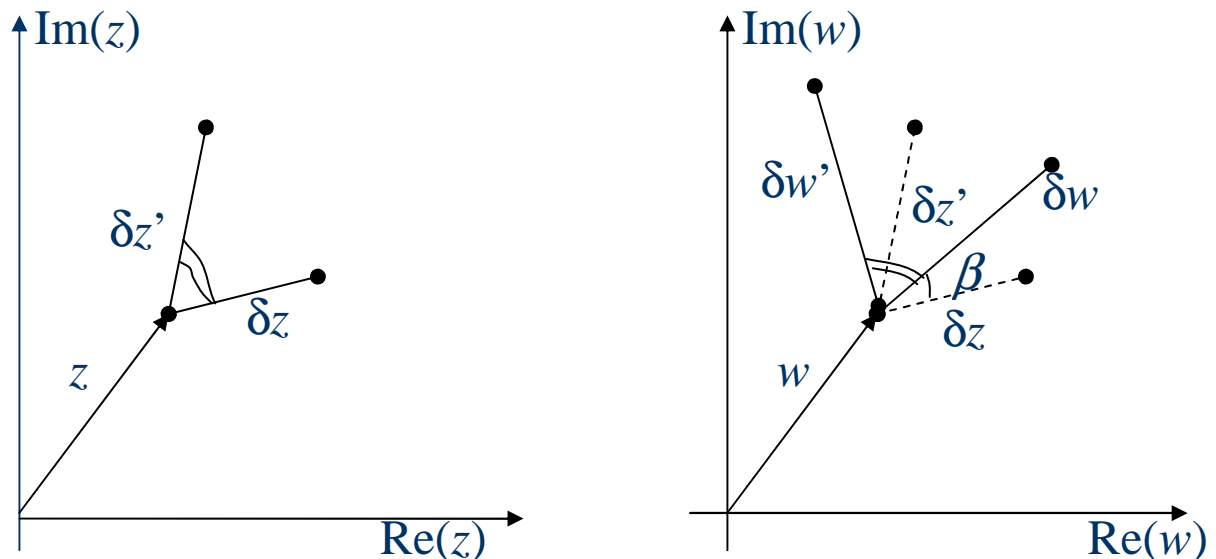


Fig. 14 : Illustration d'une transformation conforme.

La possibilité d'utiliser des transformations conformes pour transformer des écoulements simples en écoulements autour de corps de forme plus complexe justifie le choix de

représenter des solutions élémentaires de l'équation de Laplace à l'aide d'un potentiel complexe. Nous allons en fait démontrer qu'une transformation conforme transforme un potentiel complexe donné en un autre potentiel complexe et, par conséquent, transforme les lignes iso-potentiel et de courant d'un écoulement donné en lignes iso-potentiel et de courant de l'écoulement transformé.

Soit un écoulement défini dans un plan z' et représenté par le potentiel complexe $w(z')$ et soit une transformation conforme d'un plan z au plan z' .

$$z' = z'(z)$$

La fonction

$$w(z) = w(z'(z))$$

est analytique, puisque aussi bien $w(z)$ que $z'(z)$ sont analytiques (la première parce qu'elle représente un potentiel, la deuxième par définition de transformation conforme). En d'autres termes, la dérivée de la fonction composée :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dz'} \frac{dz'}{dz}$$

existe et elle est unique car les deux dérivées au deuxième membre existent et sont uniques. Le potentiel transformé w représente alors le potentiel complexe d'un écoulement potentiel dans le plan transformé z . Si P et P' sont deux points correspondants du plan z et du plan z' , i.e. si :

$$z'_{P'} = z'(z_P)$$

et

$$w(z'_{P'}) = w(z'(z_P))$$

Les deux points sont donc caractérisés par la même valeur du potentiel complexe. Si l'on étend ce raisonnement à tout les points appartenant à une même ligne iso-potentiel (ou de courant), on en déduit que les points transformés vont aussi former une ligne du plan transformé, grâce à la continuité de la transformation et que de plus cette ligne transformée sera encore une ligne iso-potentiel (resp., de courant).

On peut encore remarquer que la circulation de la vitesse complexe calculée au long de deux circuits correspondants des plans z et z' (i.e. deux circuits qui sont l'un le transformé de l'autre), conserve la même valeur dans les deux cas. En effet, les intégrales :

$$\oint_c \frac{dw}{dz} dz = \oint_c dw; \quad \oint_{c'} \frac{dw'}{dz'} dz' = \oint_{c'} dw'$$

donnent le même résultat puisque le potentiel complexe garde la même valeur en tout point correspondant des deux circuits.

Dans la suite du paragraphe nous allons considérer, parmi toutes les transformations conformes possibles, la transformation dite *de Joukowski*, particulièrement intéressante, car elle permet de transformer l'écoulement autour d'un cercle en écoulement autour de profils d'aile d'épaisseur et cambrure variés.

3.7 Transformation de Joukowski

Nous considérons désormais la transformation conforme suivante, due à Nicolaï Joukowski (représenté dans la photo de Fig. 15), grand mathématicien russe (1847-1921). Précisément, elle s'écrit :

$$z = z' + \frac{a^2}{z'}$$

avec a une constante réelle.

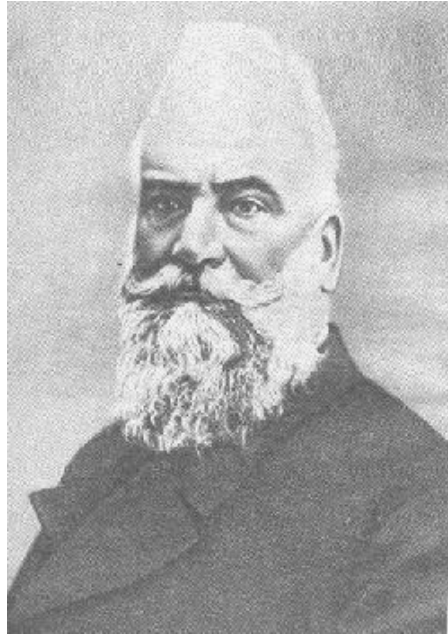


Fig. 15: Nicolai Joukowski.

Cette transformation permet de transformer un cercle de rayon r_0 du plano z' en une figure du plan z . De figures différentes peuvent être obtenues pour des choix différents de la constante a et de la position initiale du cercle.

- **Cas 1.** Si le centre du cercle est l'origine du plan z' , i.e. le point $z'=0$, la transformation de Joukowski transforme ce cercle en une ellipse définie par l'équation :

$$\frac{x^2}{(1+a^2/r_0^2)^2} + \frac{y^2}{(1-a^2/r_0^2)^2} = r_0^2,$$

ayant ses foyers sur l'axe réel du plan z , aux abscisses $-2a$ et $2a$. Les lignes de courant de l'écoulement initial et de l'écoulement transformé sont représentées sur la figure 16.

La suite de transformations utilisée pour déterminer l'écoulement autour de l'ellipse est la suivante :

- Potentiel pour un écoulement autour d'un cylindre du plan z' : $w = U_0 \left(z' + \frac{r_0^2}{z'} \right)$
- Transformation de Joukowski: $z = z' + \frac{a^2}{z'}$

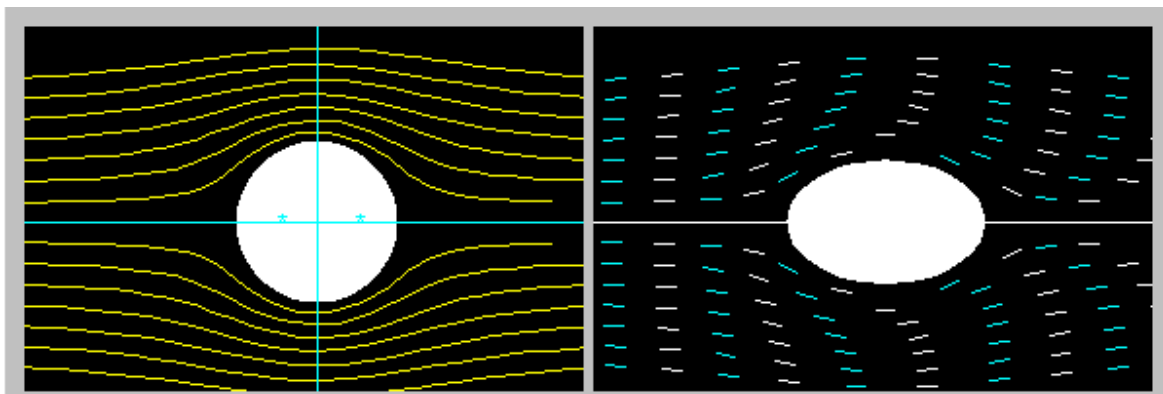


Fig. 16 : Ecoulement autour d'une ellipse déterminée par la transformation de Joukowski.

- **Cas 2.** Si le centre du cercle est l'origine du plan z' et, de plus, l'on choisit $a=r_0$ alors le cercle est transformé en un plaque plane du plan z , située sur l'axe réel entre les abscisses $-2a$ e $2a$.
- **Cas 3.** Si le centre du cercle est situé sur l'axe réel, e.g. en un point $z'_C=x'_C$, et si $a=r_0-x'_C$, le cercle se transforme en un profil d'aile symétrique par rapport à l'axe x (voir la figure 17). La suite de transformations à utiliser est:
 - Potentiel pour un écoulement autour d'un cylindre du plan z'' : $w = U_0 \left(z'' + \frac{r_0^2}{z''} \right)$
 - Translation du cylindre suivant l'axe réel: $z' = z'' + x'_C = z'' + m$
 - Transformation de Joukowski: $z = z' + \frac{a^2}{z'}$; $a = r_0 - x'_C$

Les coordonnées du bord de fuite du profil sont $(2a,0)$.

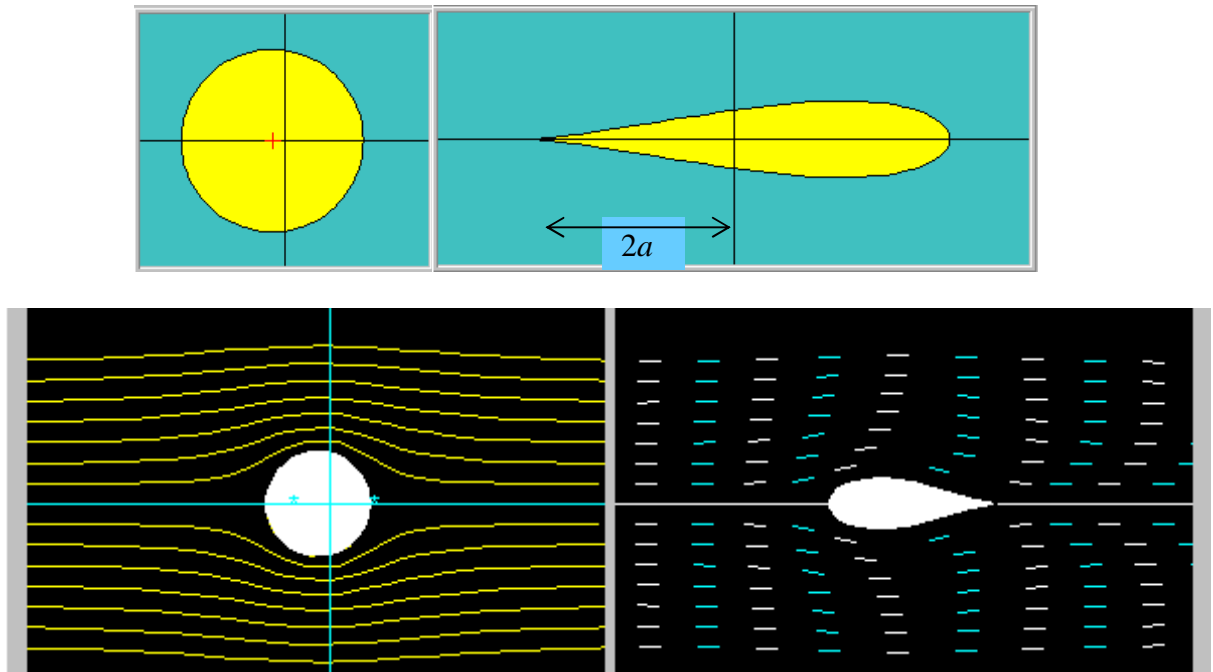


Fig. 17 : Profil symétrique. En haut : transformation de Joukowski. En bas, ligne de courant pour l'écoulement de base et transformé.

- **Cas 4.** Si le centre du cercle est situé sur l'axe imaginaire, e.g. en un point $z'_C=i y'_C$ et, de plus, $a = \sqrt{r_0^2 - y'^2_C}$, le cercle est transformé dans un arc circulaire (Fig. 18). La suite de transformation requise pour obtenir un tel écoulement est :
 - Potentiel pour un écoulement autour d'un cylindre du plan z'' : $w = U_0 \left(z'' + \frac{r_0^2}{z''} \right)$
 - Translation du cylindre suivant l'axe y : $z' = z'' - i y'_C = z'' - i m = z'' - m e^{i\pi/2}$
 - Transformation de Joukowski: $z = z' + \frac{a^2}{z'}$; $a = \sqrt{r_0^2 - y'^2_C}$

Les extrémités de l'arc sont situées en $(-2a,0)$ et $(2a,0)$. La hauteur maximale de l'arc est $2m$.

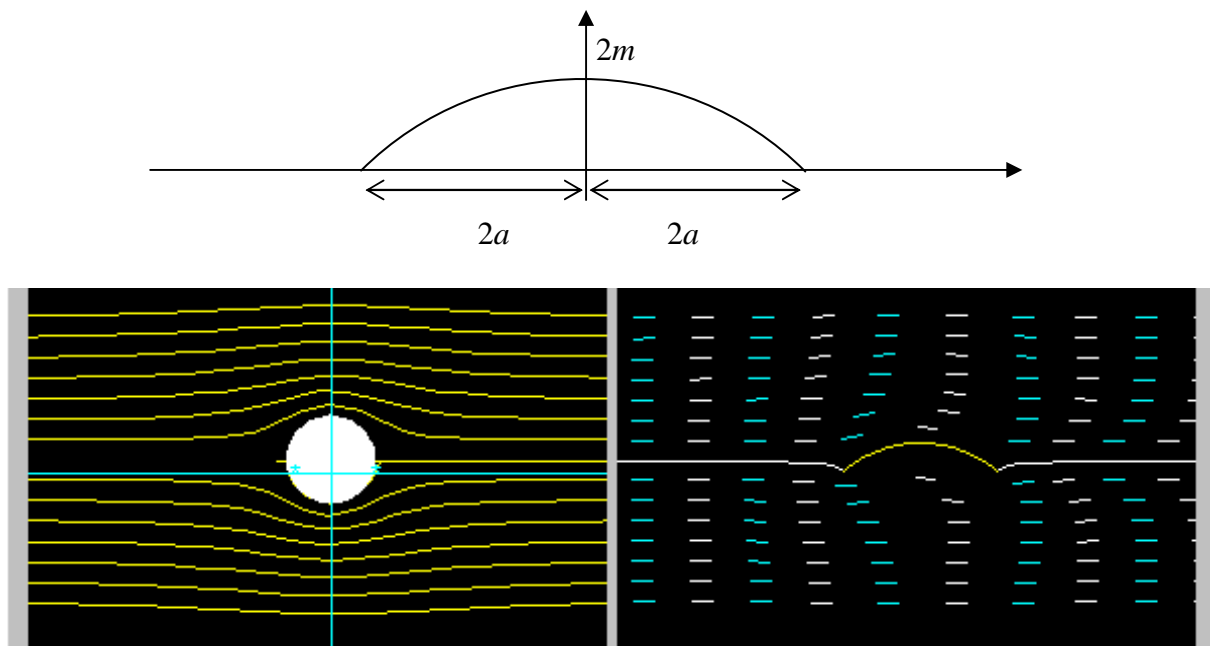


Fig. 18 : Arc circulaire. En haut : transformation de Joukovski. En bas, ligne de courant pour l'écoulement de base et transformé.

- **Cas 4.** Si le centre du cercle est situé en un point quelconque $z'_C = x'_C + iy'_C$, le cercle est transformé en un profil d'aile cambré, appelé *profil de Joukovski* (Fig. 19). La suite de transformation requise pour obtenir un tel écoulement est :

- Potentiel pour un écoulement autour d'un cylindre du plan z'' : $w = U_0 \left(z'' + \frac{r_0^2}{z''} \right)$
- Translation du centre du cylindre en $z' = x'_C + iy'_C$:

$$z' = z'' - (x'_C + iy'_C) = z'' - me^{i(\pi-\delta)}$$
- Transformation de Joukovski: $z = z' + \frac{a^2}{z'}$; $a = \sqrt{r_0^2 - y'^2_C} - x'_C$

Le bord de fuite du profil d'aile est situé en $(2a, 0)$.

En résumé, un déplacement du cercle de base le long de l'axe réel a pour effet une augmentation/réduction de l'épaisseur du profil transformé, alors qu'un déplacement le long de l'axe imaginaire a pour effet une augmentation/réduction de la cambrure du profil.

Il est très important d'observer que, pour tous les écoulements que l'on vient de présenter, la circulation autour du corps transformé est nulle, car la circulation autour du cylindre de base est nulle (cas sans circulation). Par conséquent, le théorème de Kutta-Joukowski nous dit que, pour tous ces écoulements, la portance, ainsi que la traînée, est tout aussi nulle.

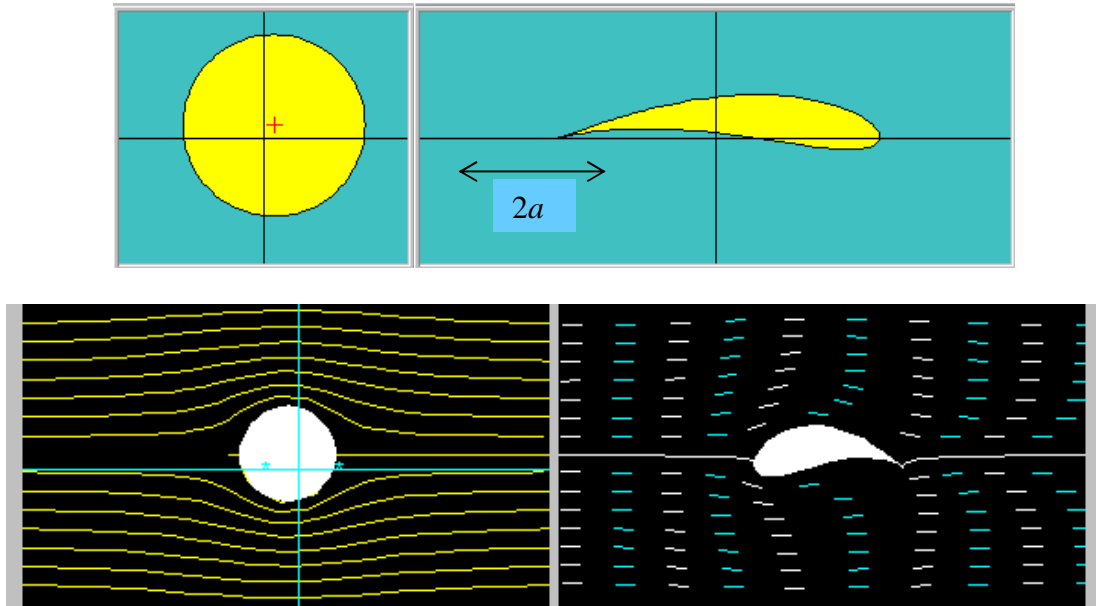


Fig. 19 : Profil de Joukowski. En haut : transformation de Joukowski. En bas, ligne de courant pour l'écoulement de base et transformé.

3.8 Ecoulement autour d'un profil de Joukowski avec angle d'attaque et circulation

Afin de nous approcher de plus en plus du comportement réel et de déterminer des configurations d'écoulement capables de générer de la portance, nous allons supposer maintenant que l'écoulement incident sur le cylindre de base est incliné d'un angle α par rapport à l'axe x et nous allons y ajouter une circulation (i.e. nous superposons à l'écoulement de base un tourbillon ponctuel situé dans l'origine). La suite de transformations nécessaire pour obtenir un écoulement autour d'un profil de Joukowski avec angle d'attaque et circulation est:

- Potentiel pour un écoulement autour d'un cylindre avec circulation du plan z''' :

$$w = U_0 \left(z''' + \frac{r_0^2}{z'''} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z'''$$

- Rotation de l'écoulement incident d'un angle α : $z'' = z''' e^{i\alpha}$
- Translation du centre du cylindre en un point $z'_c = x'_c + iy'_c$:

$$z' = z'' - (x'_c + iy'_c) = z'' - me^{i(\pi-\delta)}$$

- Transformation de Joukowski: $z = z' + \frac{a^2}{z'}$; $a = \sqrt{r_0^2 - y'^2_c}$

Une fois que le potentiel transformé est déterminé, la vitesse complexe de l'écoulement est obtenue en dérivant une fonction composée :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dz'''} \frac{dz'''}{dz''} \frac{dz''}{dz'} \frac{dz'}{dz} = \frac{dw}{dz'''} \frac{e^{-i\alpha}}{1 - (a^2 / z'^2)}$$

Remarquons que cette dérivée est singulière en $z' = \pm a$, si $dw/dz''' \neq 0$. Un des points singuliers se trouve à l'intérieur de la ligne de courant délimitant le profil d'aile et il peut être négligé. Le deuxième point singulier correspond au bord de fuite du profil. Pour que la dérivée soit définie partout dans l'écoulement il faut donc que ce soit $dw/dz''' = 0$ au bord de fuite, i.e. :

$$\frac{dw}{dz'''} = U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z'''^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z'''} = 0 \quad \text{en} \quad z''' = r_0 e^{-i(\alpha+\beta)}$$

avec $\beta = \pi - \delta$. Cette condition est bien vérifiée si la circulation autour du profil vaut

$$\Gamma = 4\pi r_0 U_0 \sin(\alpha + \beta). \quad (33)$$

Des exemples d'écoulements avec angle d'attaque et circulation (33) autour de corps de forme variée sont proposés dans les figures 20 et 21.

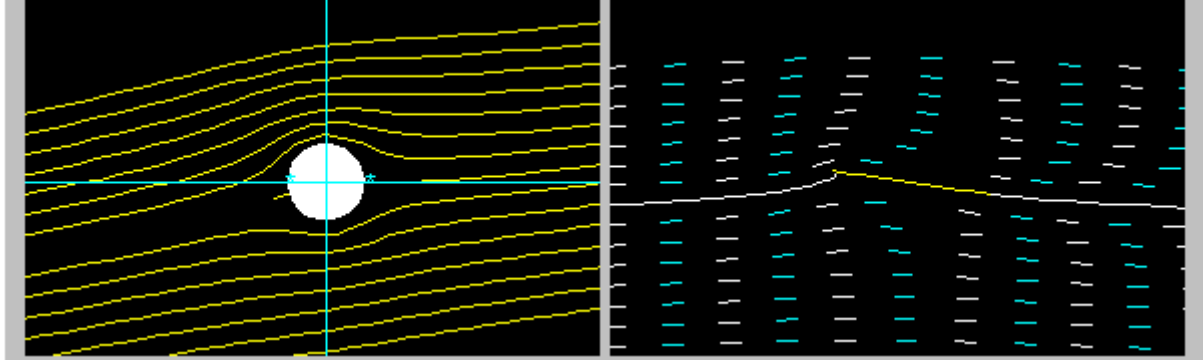


Fig. 20: Écoulement potentiel autour d'une plaque plane avec un angle d'attaque et une circulation (lignes de courant).

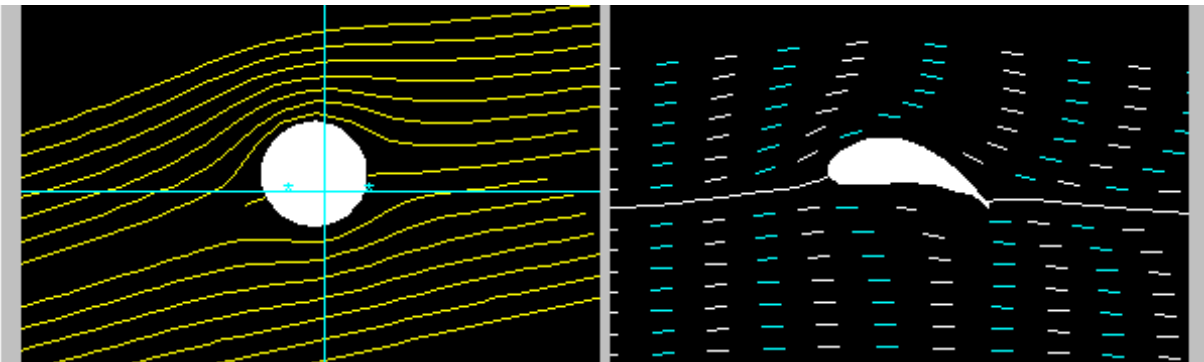


Fig. 20: Écoulement potentiel autour d'un profil de Joukowski avec un angle d'attaque et une circulation (lignes de courant).

Dans la pratique, l'hypothèse avancée par Joukovski, et confirmée par l'expérience, suppose que la valeur de la circulation qui s'établit autour d'un profil est telle que la vitesse au bord de fuite conserve toujours une valeur finie (et il paraît clair que, d'un point de vue physique, une vitesse infinie n'a pas de sens). En d'autres termes, la solution de Joukovski implique que la seule solution physiquement admissible est celle pour laquelle le bord de fuite est un point d'arrêt pour l'écoulement. Grâce à cette hypothèse, la valeur de la circulation autour d'un profil reste déterminée : c'est la seule valeur de Γ permettant d'éliminer la singularité au bord de fuite. Un écoulement qui respecte cette condition est dit satisfaire la **condition de Kutta**.

Remarquons que tous les champs de vitesse déterminés pour de différentes valeurs de la circulation restent des solutions valables de l'équation de Laplace pour l'écoulement irrotationnel autour d'un profil. La condition de Kutta permet de déterminer la circulation, et donc la portance, autour d'un profil de façon unique à partir de données sur l'écoulement incident et sur la géométrie du profil et, en même temps, elle détermine une valeur particulière de la circulation pour laquelle on a une solution correcte d'un point de vue physique, et qui permet de bien approximer l'écoulement autour d'un profil.