

Contact : Xavier GLOERFELT xavier.gloerfelt@ensam.eu

TABLE DES MATIÈRES

1	COUCHE LIMITE LAMINAIRE	1
1.1	Approximation du profil de vitesse dans une couche limite	1
1.2	Couche limite laminaire accélérée	6
1.3	Calcul du point de décollement pour un profil de vitesse linéaire	8
1.4	Couche limite sur une projectile	10
2	COUCHE LIMITE TURBULENTE	11
2.1	Loi de puissance pour le profil de vitesse	11
2.2	Couche limite sans gradient de pression	12
2.3	Analyse de la couche limite de Prandtl	13
2.4	Transition vers la turbulence	14

1 COUCHE LIMITE LAMINAIRE

1.1 APPROXIMATION DU PROFIL DE VITESSE DANS UNE COUCHE LIMITE

Nous considérons une couche limite qui se développe sur une plaque plane, avec une vitesse de l'écoulement extérieur égale à u_∞ . Le profil de vitesse $u(y)/u_\infty$ peut être approximé à travers une fonction du type

$$\frac{U}{u_\infty} = f(\eta), \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (1)$$

Pour chaque profil considéré, montrer si le profil est adéquat pour représenter une couche limite. Après, utiliser une analyse intégrale pour trouver des expressions pour l'épaisseur de déplacement δ^* , l'épaisseur de quantité de mouvement θ , le facteur de forme H , le coefficient de frottement C_f et le coefficient de traînée C_D .

$$1. \quad \frac{U}{u_\infty} = f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^2$$

Solution: Pour obtenir une représentation correcte d'une couche limite, le profil de vitesse doit au moins satisfaire les conditions suivantes :

— Condition d'adhérence à la paroi :

$$U(y=0) = 0 \implies f(\eta=0) = 0; \quad (2)$$

— Continuité des profils de vitesse au bord supérieur de la couche limite :

$$U(y=\delta) = u_\infty \implies f(\eta=1) = 1. \quad (3)$$

Ces deux conditions représentent le set minimal à satisfaire. Certains profils de vitesse peuvent aussi satisfaire les conditions suivantes additionnelles :

— Annulation des contraintes visqueuses au bord supérieur de la couche limite :

$$\tau(y=\delta) = 0 \implies U'(y=\delta) = 0 \implies f'(\eta=1) = 0; \quad (4)$$

— Conservation de la quantité de mouvement au bord supérieur de la couche limite :

$$U''(y=\delta) = 0 \implies f''(\eta=1) = 0; \quad (5)$$

— Conservation de la quantité de mouvement à la paroi (méthode de Pohlhausen) :

$$U''(y=0)/u_\infty = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_\infty}{dx} = -\Lambda \implies f''(\eta=0) = -\Lambda. \quad (6)$$

Nous pouvons donc dériver des expressions pour δ^* et θ en fonction de δ , et pour C_f en fonction de Re_δ :

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{u_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left[1 - f\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] dy = \delta \int_0^1 [1 - f(\eta)] d\eta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \frac{U}{u_\infty} \left(1 - \frac{U}{u_\infty}\right) dy = \int_0^\delta f\left(\frac{y}{\delta}\right) \left[1 - f\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] dy \\ &= \delta \int_0^1 f(\eta)[1 - f(\eta)] d\eta \end{aligned} \quad (8)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2}{\rho u_\infty^2} \mu \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = 2 \frac{\nu}{u_\infty^2} \frac{u_\infty}{\delta} f'(0) = 2f'(0) \frac{\nu}{u_\infty \delta} = \frac{2f'(0)}{\text{Re}_\delta} \quad (9)$$

Donc, en général :

$$\delta^* = A\delta, \quad \theta = B\delta, \quad H = \frac{A}{B}, \quad C_f = \frac{C}{\text{Re}_\delta} \quad (10)$$

avec

$$A = \int_0^1 [1 - f(\eta)] d\eta, \quad B = \int_0^1 f(\eta)[1 - f(\eta)] d\eta, \quad C = 2f'(0) \quad (11)$$

Une expression pour δ peut être obtenue à partir de l'équation intégrale de Von-Karman dans le cas simple de gradient de pression à l'infini nul ($\frac{du_\infty}{dx} = 0$) :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \implies B \frac{d\delta}{dx} = \frac{C}{2} \frac{\nu}{u_\infty \delta} \implies 2\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{C}{B} \frac{\nu}{u_\infty} \quad (12)$$

$$\frac{d(\delta^2)}{dx} = \frac{C}{B} \frac{\nu}{u_\infty} \implies \delta^2 = \frac{C}{B} \frac{\nu x}{u_\infty} \implies \delta = \left(\frac{C}{B}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu x}{u_\infty}\right)^{1/2} \quad (13)$$

Comme $\theta \propto x^{1/2}$, on obtient $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\theta}{x}$ et donc

$$C_f = 2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta}{x} \quad (14)$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{1}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 L} \int_0^L \tau_w dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} dx = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = \frac{1}{L} \int_0^L 2 \frac{d\theta}{dx} dx \\ &= \frac{2\theta(L)}{L} = 2C_f(L) \end{aligned} \quad (15)$$

Maintenant il suffit donc d'évaluer les intégrales et trouver les dérivées à $\eta = 0$ pour chaque fonction $f(\eta)$.

Nous considérons le profil $f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^2$. Sachant que $f'(\eta) = \frac{3}{2} - \eta$ et $f''(\eta) = -1$:

- $f(\eta=0) = 0$, condition d'adhérence à la paroi vérifiée ;
- $f(\eta=1) = 1$, condition de continuité des profils de vitesse vérifiée ;
- $f'(\eta=1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \neq 0$, annulation des contraintes visqueuses au bord non vérifiée ;
- $f''(\eta=1) = -1 \neq 0$, conservation de la quantité de mouvement au bord non vérifiée ;

Le profil satisfait l'ensemble minimum des conditions. On peut calculer donc les intégrales :

$$A = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) d\eta = \left[\eta - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad (16)$$

$$B = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3\right) \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3\right) d\eta \quad (17)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{9}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^6\right) d\eta \quad (18)$$

$$= \left[\frac{3}{4}\eta^2 - \frac{9}{12}\eta^3 - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{3}{10}\eta^5 - \frac{1}{28}\eta^7\right]_0^1 = \frac{-35 + 84 - 10}{280} = \frac{39}{280} \quad (19)$$

$$C = 2f'(0) = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\eta^2\right)_{\eta=0} = 3 \quad (20)$$

Donc

$$\delta = \left(\frac{C}{B}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu x}{u_\infty}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\delta}{x} = \frac{4.641}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (21)$$

Finalement pour ce profil on obtient

$$\delta^* = A\delta = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = 1.740 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.740}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (22)$$

$$\theta = B\delta = \frac{39}{280} \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = 0.6464 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\theta}{x} = \frac{0.6464}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (23)$$

$$H = \frac{A}{B} = \frac{1.740}{0.6464} = 2.69 \quad (24)$$

$$C_f = \frac{\theta}{x} = 0.6464 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \implies C_f = \frac{0.6464}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (25)$$

$$C_D = 2C_f(L) = 1.2928 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty L}} \implies C_D = \frac{1.2928}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (26)$$

2. $\frac{U}{u_\infty} = f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$

Solution: En considérant que $f'(\eta) = 2 - 6\eta^2 + 4\eta^3$ et $f''(\eta) = -12\eta + 12\eta^2$:

- $f(\eta=0) = 0$, condition d'adhérence à la paroi vérifiée ;
- $f(\eta=1) = 2 - 2 + 1 = 1$, condition de continuité des profils de vitesse vérifiée ;
- $f'(\eta=1) = 2 - 6 + 4 = 0$, annulation des contraintes visqueuses au bord vérifiée ;
- $f''(\eta=1) = -12 + 12 = 0$, conservation de la quantité de mouvement au bord vérifiée ;
- $f'''(\eta=0) = 0$, vrai pour une plaque plane infinie (gradient de pression nul).

Le profil satisfait l'entière ensemble des conditions aux limites et donc il représente un profil de Pohlhausen.

Remarque. Si on rajoutait un terme du second ordre dans le polynôme considéré (η^2), la condition de paroi ($f(\eta=0) = 0$) serait toujours satisfaite, mais la condition de raccord avec l'écoulement externe ($f(\eta=1) = 1$) ne le serait qu'en choisissant un coefficient nul pour ce terme.

On peut calculer les intégrales :

$$A = \int_0^1 (1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta = \left[\eta - \eta^2 + \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{5}\eta^5 \right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) (1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta \\ &= \left[\eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^4 + \frac{9}{5}\eta^5 - \frac{2}{3}\eta^6 - \frac{4}{7}\eta^7 + \frac{1}{2}\eta^8 - \frac{1}{9}\eta^9 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{630} (630 - 840 - 315 + 1134 - 420 - 360 + 315 - 70) = \frac{37}{315} \end{aligned} \quad (28)$$

$$C = 2f'(0) = 2(2 - 6\eta^2 + 4\eta^3)_{\eta=0} = 4 \quad (29)$$

Donc

$$\delta = \left(\frac{C}{B} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu x}{u_\infty} \right)^{1/2} = \sqrt{4 \frac{315}{37}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\delta}{x} = \frac{5.8356}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (30)$$

Et finalement

$$\delta^* = A\delta = \frac{3}{10} \sqrt{4 \frac{315}{37}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = 1.751 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.751}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (31)$$

$$\theta = B\delta = \frac{37}{315} \sqrt{4 \frac{315}{37}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = 0.68545 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \implies \frac{\theta}{x} = \frac{0.68545}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (32)$$

$$H = \frac{A}{B} = \frac{1.751}{0.68545} = 2.554 \quad (33)$$

$$C_f = \frac{\theta}{x} = 0.68545 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \implies C_f = \frac{0.68545}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (34)$$

$$C_D = 2C_f(L) = 1.3709 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty L}} \implies C_D = \frac{1.3709}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (35)$$

3. $\frac{U}{u_\infty} = f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$

Solution: En considérant que $f'(\eta) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$ et $f''(\eta) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$,

- $f(\eta=0) = \sin(0) = 0$, condition d'adhérence à la paroi vérifiée ;
- $f(\eta=1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, condition de continuité des profils de vitesse vérifiée ;
- $f'(\eta=1) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, annulation des contraintes visqueuses au bord vérifiée ;
- $f''(\eta=1) = -(\pi/2)^2 \neq 0$, conservation de la quantité de mouvement au bord non vérifiée ;
- $f''(\eta=0) = 0$, vrai pour une plaque plane infinie (gradient de pression nul).

Le profil satisfait les set minimal des conditions aux limites. On peut maintenant calculer les intégrales en utilisant les changement de variable suivant :

$$\frac{\pi}{2} = \alpha \implies \begin{cases} \eta = 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ \eta = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad d\eta = d\alpha \frac{2}{\pi} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \right] d\eta = [\eta]_0^1 - \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta = 1 - \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \frac{2}{\pi} d\alpha \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} [-\cos \alpha]_0^{\pi/2} = \frac{\pi - 2}{\pi}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \right] d\eta = \overbrace{\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta}^{2/\pi} - \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) d\eta \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right) d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos 2\alpha}_{2\alpha=\beta} d\alpha \right\} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} [\sin \beta]_0^{\pi} \right] = \frac{4 - \pi}{2\pi}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$C = 2f'(0) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \frac{\pi}{2} \right]_{\eta=0} = 2 \left(\cos 0 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \pi \tag{39}$$

Donc

$$\delta = \left(\frac{C}{B} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu x}{u_\infty} \right)^{1/2} = \left(\pi \frac{2\pi}{4 - \pi} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \pi \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{40}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4.795}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{41}$$

Et finalement

$$\delta^* = A\delta = \frac{\pi - 2}{\pi} \pi \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2 - \pi/2}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \Rightarrow \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.743}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{42}$$

$$\theta = B\delta = \frac{4 - \pi}{2\pi} \pi \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \sqrt{\frac{4 - \pi}{2}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \Rightarrow \frac{\theta}{x} = \frac{0.6551}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{43}$$

$$H = \frac{A}{B} = \frac{1.743}{0.6551} = 2.661 \tag{44}$$

$$C_f = \frac{\theta}{x} = 0.6551 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \Rightarrow C_f = \frac{0.6551}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{45}$$

$$C_D = 2C_f(L) = 1.3102 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty L}} \Rightarrow C_D = \frac{1.3102}{\sqrt{\text{Re}_L}} \tag{46}$$

4. Comparer les résultats obtenus avec la solution de Blasius.

Solution: Nous observons que la deuxième fonction polynomiale proposée est la seule approximation qui satisfait l'entier ensemble des conditions aux limites, et donc elle représente un profil de Pohlhausen. On sait que pour un profil de Blasius on a

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad \frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59 \tag{47}$$

L'épaisseur de couche limite δ , l'épaisseur de déplacement δ^* , l'épaisseur de quantité de mouvement θ et le facteur de forme H sont similaires à ceux de la solution de Blasius pour chacune des fonctions considérées dans cet exercice.

1.2 COUCHE LIMITE LAMINAIRE ACCÉLÉRÉE

On considère une couche limite se développant sur une fine plaque plane, à bord d'attaque aigu, installée au milieu d'une soufflerie comme sur la figure 1 (étant donnée la symétrie, on ne représente ici que la moitié de la soufflerie).

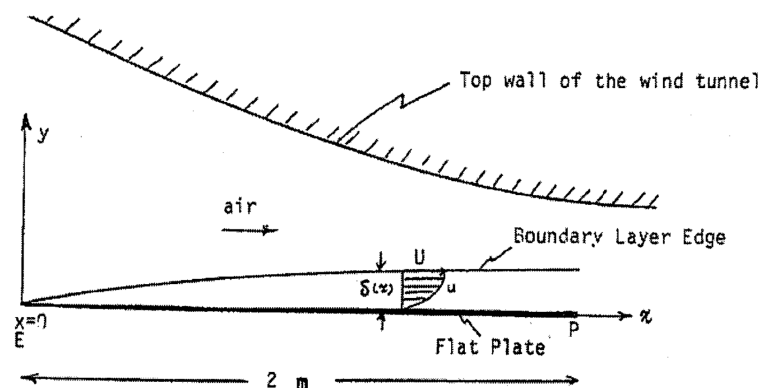


FIGURE 1 – Représentation de la couche limite.

La distance entre la plaque et les parois de la soufflerie est largement supérieure à l'épaisseur de la couche limite. Les parois de la soufflerie sont dessinées de façon telle à fournir la distribution de vitesse extérieure suivante :

$$u_{\infty}(x) = Ce^x \quad (1)$$

avec C une constante et x l'abscisse mesurée à partir du bord d'attaque de la plaque, de longueur 2 m. La vitesse extérieure au point E est égale à $u_{\infty}(x_E) = 0.8 \text{ m/s}$. La masse volumique et la viscosité cinématique de l'air sont 1.2 kg/m^3 et $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, respectivement. Supposons que la couche limite reste partout laminaire et que le profil de vitesse soit bien approché par une relation linéaire de la forme

$$\frac{U}{u_{\infty}} = \frac{y}{\delta} \quad (2)$$

où $\delta = \delta(x)$ est l'épaisseur locale de la couche limite.

1. Calculer le gradient de pression le long de la plaque.

Solution: A l'extérieur de la couche limite on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2 = C^{\text{te}} \quad (3)$$

À travers une différentiation et en appliquant l'équation (1), on obtient

$$\frac{dp_{\infty}}{dx} = -\rho u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} = -\rho C^2 e^{2x} \quad \text{avec } C = C^{\text{te}} \quad (4)$$

2. Calculer la constante C et la vitesse extérieure au point P .

Solution: La constante C se calcule en imposant la vitesse à l'origine de la plaque :

$$u_{\infty}(E) = u_{\infty}(0) = Ce^0 = C = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5)$$

On peut maintenant calculer la vitesse au point P :

$$u_{\infty}(P) = u_{\infty}(2) = Ce^2 = 5.911 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. À l'aide de l'équation intégrale de von Karman :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) \frac{1}{u_{\infty}} \frac{du_{\infty}}{dx} \quad (6)$$

avec δ^* l'épaisseur de déplacement, θ l'épaisseur de quantité de mouvement et τ_w la contrainte pariétale, établir une relation de la forme

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y = Q(x) \quad (7)$$

où $Y = \delta^2$ et $P(x)$ s'expriment en fonction de $u_{\infty}(x)$, $\frac{du_{\infty}}{dx}$ et ν .

Solution: Le profil de vitesse étant connu, on peut calculer les différents termes de l'équation de von Karman :

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{u_{\infty}}\right) dy = \delta \int_0^1 (1 - \eta) d\eta = \delta \left[\eta - \frac{\eta^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\delta}{2} \quad (8)$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{U}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{U}{u_{\infty}}\right) dy = \delta \int_0^1 \eta(1 - \eta) d\eta = \delta \left[\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\delta}{6} \quad (9)$$

$$\tau_w = \rho \nu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\rho \nu C e^x}{\delta} \quad (10)$$

En injectant toutes ces relations dans l'EIVK, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\rho \nu C e^x}{\delta \rho C^2 e^{2x}} &= \frac{1}{6} \frac{d\delta}{dx} + \left(\frac{1}{3}\delta + \frac{1}{2}\delta\right) = \frac{1}{6} \frac{d\delta}{dx} + \frac{5}{6}\delta \\ \Leftrightarrow \frac{\nu}{\delta C e^x} &= \frac{1}{6} \frac{d\delta}{dx} + \frac{5}{6}\delta & \Leftrightarrow \frac{\nu}{C e^x} &= \frac{1}{12} \frac{d\delta^2}{dx} + \frac{5}{6}\delta^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d\delta^2}{dx} + 10\delta^2 &= \frac{12\nu}{C} e^{-x} & \Leftrightarrow \frac{dY}{dx} + 10Y &= \frac{12\nu}{C} e^{-x} \end{aligned} \quad (11)$$

On reconnaît donc $P(x) = 10$ and $Q(x) = \frac{12\nu}{C} e^{-x}$

4. Résoudre l'équation (7) et en déduire l'épaisseur de couche limite δ au point P .

Note : l'équation (7) est une équation différentielle affine du premier ordre dont la solution peut s'écrire

$$Y(x) \exp\left(\int_0^x P(t) dt\right) = Y(0) + \int_0^x \left[Q(t) \exp\left(\int_0^t P(u) du\right)\right] dt \quad (12)$$

Solution: En appliquant la formule de résolution fournie, on obtient :

$$Y(x)e^{10x} = Y(0) + \int_0^x \frac{12\nu}{C} e^{-t} e^{10t} dt = Y(0) + \frac{12\nu}{C} \left[\frac{e^{9x}}{9}\right]_0^x \quad (13)$$

$$= Y(0) + \frac{12\nu}{C} \frac{e^{9x} - 1}{9} = Y(0) + \frac{4\nu}{3C} (e^{9x} - 1) \quad (14)$$

Sachant que, au bord d'attaque de la plaque on a $Y(0)=\delta^2(0)=0$, on trouve finalement :

$$\delta^2(x) = \frac{4\nu}{3C}(e^{9x} - 1)e^{-10x} \implies \delta(x) = \sqrt{\frac{4\nu}{3C}(e^{9x} - 1)e^{-5x}} \quad (15)$$

Plus particulièrement, l'épaisseur de couche limite au point P vaut :

$$\delta(2) = \sqrt{\frac{4\nu}{3C}(e^{18} - 1)e^{-10}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1.5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 0.8}(e^{18} - 1)e^{-10}} = 1.84 \text{ mm} \quad (16)$$

5. Calculer la traînée s'exerçant globalement sur la plaque par unité d'envergure. On suppose que $e^{9x} \gg 1$.

Solution: La traînée s'exerçant sur la plaque est donnée par :

$$D = 2 \int_0^L \tau_w dx \quad (17)$$

où le facteur 2 permet de tenir compte de la contribution des deux faces de la plaque et où on a désigné par L la distance entre le point E et le point P . Pour calculer la traînée, nous avons donc besoin de connaître le coefficient de frottement sur la plaque. En injectant la valeur de $\delta(x)$ dans l'équation (10) on obtient :

$$\tau_w = \frac{\rho\nu C e^x}{\delta} = \frac{\rho\nu C e^x e^{5x}}{\sqrt{\frac{4\nu}{3C}(e^{9x} - 1)}} = \frac{\sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} e^{6x}}{2\sqrt{e^{9x} - 1}} \quad (18)$$

En injectant ce résultat dans (17), nous obtenons finalement :

$$D = 2 \int_0^L \frac{\sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} e^{6x}}{2\sqrt{e^{9x} - 1}} dx = \sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} \int_0^L e^{6x} (e^{9x} - 1)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (19)$$

Sachant que $e^{9x} \gg 1$ sur la plupart du domaine d'intégration, on propose de simplifier l'intégrale sous cette approximation. Ainsi,

$$D \approx \sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} \int_0^L e^{6x} e^{-\frac{9x}{2}} dx = \sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} \int_0^L e^{\frac{3x}{2}} dx \quad (20)$$

$$\approx \sqrt{3\nu\rho C^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{3} \left(e^{\frac{3L}{2}} - 1 \right) = \sqrt{3 \cdot 1.5 \cdot 10^{-5} \cdot 1.2 \cdot 0.8^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2}{3} (e^3 - 1) = 0.073 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (21)$$

L'approximation induit une erreur relative de 1.3%.

1.3 CALCUL DU POINT DE DÉCOLLEMENT POUR UN PROFIL DE VITESSE LINÉAIRE

La détermination du point de décollement de la couche limite est un facteur dimensionnant pour de nombreuses géométries ayant un intérêt industriel. Dans ce cadre, le profil de pression extérieur créé par la géométrie peut-être assimilé à une distribution de vitesse extérieure générant le même gradient de pression. Ainsi, nous nous proposons d'étudier le point de décollement associé à un écoulement sur une plaque plane soumis à une vitesse extérieure linéaire du type

$$u_\infty(x) = U_0 - ax \quad (1)$$

avec U_0 et a des constantes positives et x la distance du bord d'attaque. Nous noterons par la suite ρ la masse volumique, p la pression.

1. Déterminer une expression du gradient de pression suivant x .

Solution: A l'extérieur de la couche limite, nous pouvons utiliser le théorème de Bernoulli (suffisamment loin, l'écoulement est irrotationnel) :

$$\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (2)$$

Donc, le gradient de pression suivant x est

$$\frac{dp}{dx} = \rho a(U_0 - ax) \quad (3)$$

2. Déterminer une expression de l'épaisseur de quantité de mouvement θ par la méthode de Thwaites en fonction de $\bar{x} = ax/U_0$.

Solution: La méthode de Thwaites nous propose pour l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta^2 = \frac{0.45\nu}{u_\infty^6} \int_0^x u_\infty^5(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4)$$

Ainsi, nous remplaçons

$$\theta^2 = \frac{0.45\nu}{(U_0 - ax)^6} \int_0^x (U_0 - a\varepsilon)^5 d\varepsilon \quad (5)$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{0.45\nu}{(U_0 - ax)^6} \left[-\frac{1}{6a}(U_0 - a\varepsilon)^6 \right]_0^x = \frac{0.45\nu}{6a(U_0 - ax)^6} [U_0^6 - (U_0 - ax)^6] \quad (6)$$

Par suite, il vient que

$$\theta^2 = \frac{0.45\nu}{6a} \left[\frac{U_0^6}{(U_0 - ax)^6} - 1 \right] = \frac{0.45\nu}{6a} \left[\frac{1}{(1 - \bar{x})^6} - 1 \right] \quad (7)$$

avec $\bar{x} = ax/U_0$. L'épaisseur de quantité de mouvement s'exprime alors

$$\theta = \sqrt{\frac{0.45\nu}{6a} \left[\frac{1}{(1 - \bar{x})^6} - 1 \right]} \quad (8)$$

3. En déduire la position du point de décollement par la méthode de Thwaites. Cette position sera exprimée en fonction de $\bar{x} = ax/U_0$. Nous pourrions évaluer la performance de la méthode en comparant cette valeur à la solution numérique $\bar{x} = 0.12$.

Solution: Le critère de Thwaites est associé au paramètre λ_2 :

$$\lambda_2 = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_\infty}{dx} \quad (9)$$

Lorsque $\lambda_2 = -0.082$, le coefficient de frottement s'annule et donc nous sommes au point de décollement. D'où

$$\lambda_2 = \frac{0.45}{6} \left[1 - \frac{1}{(1 - \bar{x})^6} \right] = 0.075 \left[1 - \frac{1}{(1 - \bar{x})^6} \right] \quad (10)$$

Nous posons $\chi = \frac{1}{(1 - \bar{x})^6}$. La couche limite décolle quand

$$0.075(1 - \chi) = -0.082 \quad (11)$$

D'où $\chi \approx 2.0933$. Ainsi le point de décollement est situé à

$$\bar{x} = 0.116 \quad (12)$$

Nous pouvons remarquer que cette valeur est très proche de la solution numérique.

1.4 COUCHE LIMITE SUR UNE PROJECTILE

La forme d'une projectile peut être approximée comme la composition d'un cylindre de longueur $L = 60$ cm et diamètre $d = 20$ cm avec une hémisphère sur une coté. Le projectile se déplace dans l'air, avec $\rho = 1.21$ kg/m³, $\mu = 1.5 \cdot 10^{-3}$ kg/(m.s), à une vitesse de $U = 100$ m/s. Son coefficient de traînée est $C_D = 1$. Nous supposons que l'épaisseur de la couche limite est décrit par :

$$\frac{\delta}{x} = 0.379 \left(\frac{\rho U x}{\mu} \right)^{-1/5} \quad (1)$$

Où x est la distance à partir du bord d'attaque du projectile, et l'épaisseur de quantité de mouvement est $\theta = \frac{7}{72} \delta$.

1. Calculer la fraction de la traînée totale due au frottement visqueux sur la partie cylindrique du projectile, où le gradient de pression peut être considéré nul.

Solution: La traînée totale est la somme de l'action du frottement sur la partie cylindrique, du frottement sur la partie sphérique, et de la traînée de pression (ou de forme) due à la séparation à l'arrière du projectile. Le coefficient de traînée est donné par :

$$C_D = \frac{1}{A} \int_0^A C_f(x) dS \quad (2)$$

Le coefficient de frottement est calculé à partir de l'équation intégrale de von Karman :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (3)$$

La couche limite se développe à partir du bord d'attaque du projectile. Sur la partie arrondie, elle est soumise à un gradient de pression favorable par effet de l'accélération de l'écoulement. Sur la partie cylindrique, le gradient de pression externe est nul. Donc, en utilisant Bernoulli on a :

$$p_e + \frac{1}{2} u_e^2 = C^{te} \quad (4)$$

et par dérivation :

$$\frac{dp_e}{dx} = -u_e \frac{du_e}{dx} \quad (5)$$

d'où

$$\frac{du_e}{dx} = 0 \quad (6)$$

L'équation de von Karman s'écrit alors :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (7)$$

La traînée visqueuse sur la partie cylindrique est donc donnée par :

$$\begin{aligned} C_{D_{\text{cyl}}} &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \frac{d}{2} d\alpha \int_{\frac{d}{2}}^{L+\frac{d}{2}} C_f(x) dx = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \frac{d}{2} d\alpha \int_{\frac{d}{2}}^{L+\frac{d}{2}} 2D\epsilon r d\theta x dx \\ &= \frac{2\pi d}{A} \left[\theta \left(L + \frac{d}{2} \right) - \theta \left(\frac{d}{2} \right) \right] = \frac{8}{d} \left[\theta \left(L + \frac{d}{2} \right) - \theta \left(\frac{d}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Remarque : La traînée est directement liée à l'épaisseur de quantité de mouvement.

Or,

$$\theta(x) = \frac{7}{72} \delta(x) = \frac{7}{72} \cdot 0.379 * x \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}} \Rightarrow \begin{cases} \theta \left(\frac{d}{2} \right) = 0.000504 \\ \theta \left(L + \frac{d}{2} \right) = 0.001529 \end{cases} \quad (9)$$

Et finalement on obtient

$$C_{D_{\text{cyl}}} = 0.041 \quad (10)$$

Sachant que le coefficient de traînée C_D du projectile complet est égal à 1, on en déduit que le coefficient de traînée dû au frottement visqueux sur la partie cylindrique ne représente que 4.1% du coefficient de traînée total.

Remarque : Dans le cas d'un projectile, la plus grande contribution à la traînée totale est due à la traînée de forme (ou traînée de pression) due au décollement derrière le culot, voire à la traînée d'onde en cas de vitesse supersonique (ce qui n'est pas le cas dans l'exemple considéré).

2 COUCHE LIMITE TURBULENTE

2.1 LOI DE PUISSANCE POUR LE PROFIL DE VITESSE

Nous définissons un profil de vitesse pour une couche limite de forme

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad \text{pour} \quad y < \delta \quad (1)$$

1. Calculer l'épaisseur de déplacement δ^*/δ en fonction de n .

Solution: En considérant la variable de similitude $\eta = \frac{y}{\delta}$:

$$\frac{u}{u_\infty} = \begin{cases} \eta^{1/n} & y < \delta \\ 1 & y \geq \delta \end{cases} \quad (2)$$

Pour $y \in [0, \delta]$, on obtient $\eta \in [0, 1]$ et $dy = \delta d\eta$. En appliquant la définition d'épaisseur de déplacement, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty} \right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \eta^{\frac{1}{n}} \right) d\eta \\ &= \delta \left[\eta - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \eta^{1 + \frac{1}{n}} \right]_0^1 = \delta \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \delta \end{aligned} \quad (3)$$

2. Calculer l'épaisseur de quantité de mouvement θ/δ en fonction de n .

Solution: En appliquant la définition on a :

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \eta^{\frac{1}{n}} \left(1 - \eta^{\frac{1}{n}}\right) d\eta \\ &= \delta \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} \right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \delta\end{aligned}\quad (4)$$

3. Calculer le facteur de forme H en fonction de n .

Solution: Étant donnés les résultats (3) et (4), le facteur de forme est :

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\delta}{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{n\delta} = \frac{n+2}{n}\quad (5)$$

2.2 COUCHE LIMITE SANS GRADIENT DE PRESSION

On considère une couche limite sans gradient de pression, pour laquelle le coefficient de frottement C_f et l'épaisseur de quantité de mouvement θ sont liés par

$$C_f = A \text{Re}_\theta^{-\frac{1}{n}}\quad (1)$$

1. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\theta}{x} = \left[\frac{n}{n+1} \frac{A}{2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} \quad C_f = \frac{2n}{n+1} \frac{\theta}{x} \quad C_D(L) = \frac{n+1}{n} C_f(L)\quad (2)$$

Solution: L'équation intégrale de von Karman pour une couche limite sans gradient de pression s'écrit :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}\quad (3)$$

Comme $\text{Re}_\theta = \frac{u_\infty \theta}{\nu}$, $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$ et u_∞ et ν sont constants, l'équation intégrale peut être écrite aussi comme

$$\frac{d\text{Re}_\theta}{d\text{Re}_x} = \frac{C_f}{2}\quad (4)$$

Donc, étant donnée l'expression pour le C_f , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\text{Re}_\theta}{d\text{Re}_x} = \frac{A}{2} \text{Re}_\theta^{-1/n} &\implies \text{Re}_\theta^{1/n} \frac{d\text{Re}_\theta}{d\text{Re}_x} = \frac{A}{2} \implies \frac{d\text{Re}_\theta^{\frac{n+1}{n}}}{d\text{Re}_x} = \frac{n+1}{n} \frac{A}{2} \\ \text{Re}_\theta^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n+1}{n} \frac{A}{2} \text{Re}_x &\implies \text{Re}_\theta = \left(\frac{n+1}{n} \frac{A}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \text{Re}_x^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\frac{\text{Re}_\theta}{\text{Re}_x} = \left(\frac{n+1}{n} \frac{A}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}} \implies \frac{\theta}{x} = \left[\frac{n}{n+1} \frac{A}{2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}}\quad (6)$$

L'équation (5) implique que $\theta \propto x^{\frac{n}{n+1}}$. Donc,

$$\theta \propto x^{\frac{n}{n+1}} \implies \theta = K x^{\frac{n}{n+1}} \implies \frac{d\theta}{dx} = K \frac{n}{n+1} x^{\frac{n}{n+1}-1} = \frac{n}{n+1} \frac{\theta}{x}\quad (7)$$

Ensuite, à travers l'équation de von Karman,

$$C_f = 2D \frac{d\theta}{dx} = \frac{2n}{n+1} \frac{\theta}{x} \quad (8)$$

et on obtient finalement

$$C_D = \frac{2\theta(L)}{L} = \frac{n+1}{n} C_f(L) \quad (9)$$

2.3 ANALYSE DE LA COUCHE LIMITE DE PRANDTL

En 1927, Prandtl a réalisé une analyse de couche limite turbulente sans gradient de pression en utilisant la formule suivante pour la contrainte pariétale :

$$\tau_w = 0.0225 \rho u_\infty^2 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{1/4} \quad (1)$$

et une loi de puissance ($n=1/7$) pour le profil de vitesse de la couche limite.

1. Montrer que $\frac{\delta}{x} = \frac{0.371}{\text{Re}_x^{1/5}}$.

Solution: L'équation intégrale de von Karman sans gradient de pression s'écrit :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (2)$$

Donc, on a besoin d'exprimer l'épaisseur de quantité de mouvement θ et le coefficient de frottement C_f . En utilisant l'équation (1) dans la définition du C_f on obtient :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{2 \cdot 0.0225 \rho u_\infty^2}{\rho u_\infty^2} \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{1/4} = 0.045 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{1/4} \quad (3)$$

Si on définit $\eta = \frac{y}{\delta}$, on obtient

$$\frac{U}{u_\infty} = \begin{cases} \frac{y^{1/7}}{\delta} & y < \delta \\ 1 & y \geq \delta \end{cases} = \begin{cases} \eta^{1/7} & \eta < 1 \\ 1 & \eta \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

Donc pour l'épaisseur de quantité de mouvement on obtient :

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \frac{U}{u_\infty} \left(1 - \frac{U}{u_\infty} \right) dy = \int_0^\delta \frac{U}{u_\infty} \left(1 - \frac{U}{u_\infty} \right) dy = \delta \int_0^1 \eta^{1/7} (1 - \eta^{1/7}) d\eta = \\ &= \delta \left[\frac{7}{8} \eta^{8/7} - \frac{7}{9} \eta^{9/7} \right]_0^1 = \delta \left(\frac{7}{8} - \frac{7}{9} \right) = \frac{7}{72} \delta \end{aligned} \quad (5)$$

En injectant les résultats (3) et (5) dans l'équation intégrale de von Karman, on a :

$$\begin{aligned} \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} &= \frac{1}{2} 0.045 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta} \right)^{1/4} \implies \delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = \frac{36}{7} 0.045 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/4} \\ \frac{4}{5} \frac{d\delta^{5/4}}{dx} &= \frac{36}{7} 0.045 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/4} \implies \delta^{5/4} = 0.28929 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/4} x \\ \left(\frac{\delta}{x} \right)^{5/4} &= 0.28929 \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{1/4} \implies \frac{\delta}{x} = \frac{0.371}{\text{Re}_x^{1/5}} \end{aligned} \quad (6)$$

2. Montrer que $C_f = \frac{0.058}{\text{Re}_x^{1/5}}$.

Solution: Les résultats des équations (5) et (6) nous donnent :

$$\theta = \frac{7}{72}\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{x} = \frac{7}{72} \frac{\delta}{x} = \frac{7}{72} \frac{0.371}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0.03604}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (7)$$

De plus,

$$\theta \propto \delta \propto x \text{Re}_x^{-1/5} \propto x^{4/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{4}{5} \frac{\theta}{x} \quad (8)$$

En injectant ces résultats dans l'équation intégrale de von Karman, on obtient :

$$C_f = 2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{8}{5} \frac{\theta}{x} = \frac{8}{5} \frac{0.03604}{\text{Re}_x^{1/5}} = \frac{0.0577}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (9)$$

3. Montrer que $C_D(L) = \frac{0.072}{\text{Re}_L^{1/5}}$.

Solution: En appliquant la définition :

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = \frac{1}{L} \int_0^L 2 \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{2\theta(L)}{L} = 2 \frac{0.03604}{\text{Re}_L^{1/5}} = \frac{0.072}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (10)$$

2.4 TRANSITION VERS LA TURBULENCE

Pour des couches limites entièrement laminaires ou turbulentes, l'épaisseur de quantité de mouvement θ à une distance x du bord d'attaque de la plaque est donné par

$$\frac{\theta}{x} = \begin{cases} \frac{0.664}{\text{Re}_x^{1/2}} & \text{laminaire} \\ \frac{0.0158}{\text{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulent} \end{cases} \quad (1)$$

avec $\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$, u_∞ étant la vitesse à l'infini. En réalité, la couche limite turbulente est usuellement précédée par une région initiale laminaire, comme montré en figure 2. Comme $\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$ et le coefficient de frottement laminaire C_f a une valeur finie, l'épaisseur de quantité de mouvement doit être continu au point de transition.

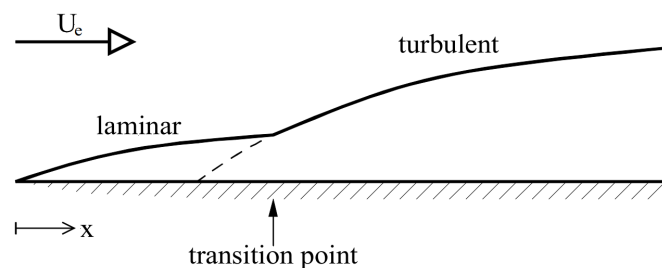


FIGURE 2

Sans considérer aucun développement intermédiaire, le coefficient de trainée total pour une côte d'une plaque de longueur L dépend seulement de l'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque :

$$C_D(L) = 2 \frac{\theta(L)}{L} \quad (2)$$

1. Développer une procédure, illustré avec une diagramme ou avec du pseudo-code, qui montre les étapes pour calculer l'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque et le coefficient de trainée total pour une couche limite sur une plaque plane de longueur L . On suppose que $Re_{x,tr}$ est donné.

Solution: Les expressions données pour l'épaisseur de déplacement dans la couche limite laminaire et turbulente sont définies à partir du bord d'attaque de la couche limite, soit en $x=0$ pour la couche limite laminaire et en x_0 pour la couche limite turbulente. Donc, si on considère l'abscisse x_0 étant le début "virtuel" de la couche limite turbulente, on obtient :

$$\text{laminaire : } \frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}} \quad (3)$$

$$\text{turbulent : } \frac{\theta}{x - x_0} = \frac{0.0158}{Re_x^{1/7}} \quad (4)$$

Au point de transition x_{tr} , l'épaisseur de quantité de mouvement pour la couche limite turbulente s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_{tr} &= \frac{0.0158(x_{tr} - x_0)}{Re_{x_{tr}-x_0}^{1/7}} = 0.0158(x_{tr} - x_0) \left[\frac{\nu}{u_\infty(x_{tr} - x_0)} \right]^{1/7} \\ &= 0.0158(x_{tr} - x_0)^{6/7} \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{1/7} \end{aligned} \quad (5)$$

On peut donc calculer x_0 :

$$x_0 = x_{tr} - \left[\frac{\theta_{tr}}{0.0158} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/7} \right]^{7/6} \quad (6)$$

De plus, pour assurer la continuité de l'épaisseur de quantité de mouvement au point de transition, on doit avoir :

$$\theta_{tr} = \frac{0.664x_{tr}}{Re_{x_{tr}}^{1/2}} \quad (7)$$

et donc

$$x_{tr} = Re_{x_{tr}} \frac{\nu}{u_\infty} \quad (8)$$

On peut maintenant écrire l'algorithme en pseudo-code qui décrit les étapes pour ré-

soudre le problème :

$$x_{tr} = \frac{\nu}{u_{\infty}} Re_{x_{tr}}$$

if $L \leq x_{tr}$ **then**

$$Re_L = \frac{u_{\infty} L}{\nu}$$

$$\theta(L) = \frac{0.664 L}{Re_L^{1/2}}$$

$$C_D = 2 \frac{\theta(L)}{L}$$

else

$$\theta_{tr} = \frac{0.664 x_{tr}}{Re_{tr}^{1/2}}$$

$$x_0 = x_{tr} - \left[\frac{\theta_{tr}}{0.0158} \left(\frac{u_{\infty}}{\nu} \right)^{1/7} \right]^{7/6}$$

$$\theta(L) = 0.0158 \left(\frac{\nu}{u_{\infty}(L - x_0)} \right)^{1/7} (L - x_0)$$

$$C_D = 2 \frac{\theta(L)}{L}$$

end if

$$D = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^{1/2} A C_D \quad \text{avec} \quad A = W \times L$$

2. On considère les valeurs suivantes : $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Re_{x, tr} = 5 \cdot 10^5$, $u_{\infty} = 8 \text{ m/s}$. En utilisant l'algorithme développé à la question précédente, calculer :
- La longueur de transition x_{tr} ;
 - L'épaisseur de quantité de mouvement à la fin de la plaque $\theta(L)$;
 - Le coefficient de trainée C_D ;
 - La trainée totale D sur une côté d'une plaque rectangulaire lisse de dimension $L \times W = 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ pour un écoulement parallèle à L .

Solution: En utilisant le pseudo-code, on obtient

$$x_{tr} = \frac{\nu}{u_{\infty}} Re_{x_{tr}} = 0.9375 \text{ m} \quad (9)$$

Comme $x_{tr} < L$, on utilise la seconde partie de l'algorithme :

$$\theta_{tr} = \frac{0.664 x_{tr}}{\text{Re}_{x_{tr}}^{1/2}} = \frac{0.664 \cdot 0.9375}{(5 \cdot 10^5)^{1/2}} = 8.803 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x_{tr} - \left[\frac{\theta_{tr}}{0.0158} \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{1/7} \right]^{7/6} \\ &= 0.9375 - \left[\frac{8.803 \cdot 10^{-4}}{0.0158} \left(\frac{8}{1.5 \cdot 10^{-5}} \right)^{1/7} \right]^{7/6} = 0.6274 \text{ m} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\theta(L) = 0.0158 \left[\frac{\nu}{u_\infty(L - x_0)} \right]^{1/7} (L - x_0) \quad (12)$$

$$= 0.0158 \left[\frac{1.5 \cdot 10^{-5}}{8(4 - 0.6274)} \right]^{1/7} (4 - 0.6274) = 6.809 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (13)$$

$$C_D = 2 \frac{\theta(L)}{L} = \frac{2 \cdot 6.809 \cdot 10^{-3}}{4} = 3.404 \cdot 10^{-3} \quad (14)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 A C_D = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 8^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3.404 \cdot 10^{-3} = 1.046 \text{ N} \quad (15)$$