作者: ZCC
学号: 空白模板

2023-2024 春季学期习题集 (高等代数 100 题)

课后习题, 思考题总结

本习题集供复习时使用. 依照惯例, 需要明确公理体系.

- 允许 ZF 公理与 Dependent Choice (等价于 Baire-纲定理, 稍强于命题 “可数个可数集之并仍可数”), 通俗地说, 允许将带有独立关系的可数个集合合并为一个集合. DC 公理强于 ZF 但符合直觉, 因此承认.
- 使用延拓公理 (Hahn-Banach 公理) 时需额外申明. 例如以下情形之一.
  - 对子集子空间 $U \subset V$, 映射 $f : U \to W$ 不必通过 V 分解. 换言之, f 的定义域不能轻易扩大 (除非能明确写出映射的定义式).
  - 将上一条中的 U 视作一维空间, 则对任意 $u \in U$ 总存在 $f \in U^*$ 使得 $f(u) \neq 0$. 若承认有别于 HB 的公理, 存在对偶为零空间的无穷维线性空间 (见 H. Läuchli, *Auswahlaxiom in der Algebra* 一文)
  - 接上一条, 总存在单射 $V \hookrightarrow V^{**}$. HB 无法证明该单射在一般情形下是严格单的, 但 $C^0([0,1];\mathbb{R})$ 是 HB-可证明的反例.
  - 张量积的构造契合 “普适映射问题的唯一解”.
  - 线性空间是平坦模, 线性单射是纯子模 ($U \otimes -$ 保持单射与满射).
- HB 公理已经足够应对无穷维线性空间的常见问题. 我们不轻易使用更强的选择公理, 其等价形式包括:
  - 任何线性空间有基;
  - 任何子集子空间有直和补 (任何单射可裂); 何满射可裂;
  - 对任意 U, $\mathcal{L}(U, -)$ 保持满射; 对任意 U, $\mathcal{L}(-, U)$ 将满射映至单射.

请结合自身情况, 合理参考该习题集.

目录

1 线性空间

Problem 1. 给定任意域 k 上的线性空间 V, 试证明以下论断等价:

1. V 不是有限维的;
2. 存在无穷集 $S \subset V$, 使得 S 是线性无关组.

Problem 2. 假定线性空间与线性映射都是任意的. 试证明以下关于线性映射 $T : U \to V$ 的说法是等价的 (这种性质叫单):

1. T 作为集合间的映射是单射, 换言之, $T(u_1) = T(u_2)$ 当且仅当 $u_1 = u_2$;
2. $T(u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$;
3. T 将线性无关组映至线性无关组;
4. 对任意线性映射 $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $S_1 = S_2$ 当且仅当 $T \circ S_1 = T \circ S_2$;
5. 对任意线性映射 $S \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $S = 0$ 当且仅当 $T \circ S = 0$.

若线性空间是有限维的, 或是承认选择公理, 以上性质等价于

- 存在线性映射 $S : V \to U$ 使得复合映射 $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} U$ 是恒同映射.

Problem 3. 假定线性空间与线性映射都是任意的. 试证明以下关于线性映射 $T : U \to V$ 的说法是等价的 (这种性质叫满):

1. T 作为集合间的映射是满射, 换言之, 对任意 $v \in V$ 总有 u 使得 $T(u) = v$;
2. 对任意线性映射 $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $S_1 = S_2$ 当且仅当 $S_1 \circ T = S_2 \circ T$;
3. 对任意线性映射 $S \in \mathcal{L}(W, U)$, 则 $S = 0$ 当且仅当 $S \circ T = 0$.

若线性空间是有限维的, 或是承认选择公理, 以上性质等价于以下任意一条:

- 存在线性映射 $S : V \to U$ 使得复合映射 $V \xrightarrow{S} U \xrightarrow{T} V$ 是恒同映射;
- 对 U 的任意一组基 S, $\mathrm{span}(T(S)) = V$.

Problem 4. 证明: 对有限维线性空间的自同态 $\varphi : U \to U$, 以下三点等价:

$$\varphi \text{ 是满的} \leftrightarrow \varphi \text{ 是同构} \leftrightarrow \varphi \text{ 是单的}. \tag{1}$$

作为对比, 请在无穷维空间中给出不满的单射, 以及不单的满射.

Problem 5. 对有限生成的 Abel 群的自同态 $\varphi : G \to G$, 有

$$\varphi \text{ 是满的} \leftrightarrow \varphi \text{ 是同构} \to \varphi \text{ 是单的}. \tag{2}$$

Problem 6. 以下假定 k 是任意域, 所有线性空间都是 k-线性空间.

1. 给定线性空间 V, 如何定义非空子集 S 是一个 V 的线性无关组?

2. 给定线性空间 V, 请写出一个一元子集 S, 使得 S 不是线性无关组.

3. 给定有限维线性空间 U 与 V, 用 $\dim U$ 与 $\dim V$ 表示 $\mathcal{L}(U,V)$ 的维数.

4. 接上一问: 取定 U 与 V 的的一组基, 如何以此表示 $\mathcal{L}(U,V)$ 的一组基?

5. 给定有限维线性空间 U 与 V, 用 $\dim U$ 与 $\dim V$ 表示 Cartesian 积 $U \times V$ 的维数.

6. 接上一问: 取定 U 与 V 的的一组基, 如何以此表示 $U \otimes V$ (外直和) 的一组基?

Problem 7. 类比以下集合的运算与自然数运算, 并按照提示推广. 以下记 $\mathrm{Card}(S)$ 为有限集合 S 的大小.

1. (有限集) 记 $X \sqcup Y$ 是 X 与 Y 的无交并, 则 $\mathrm{Card}(X \sqcup Y) = \mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y)$;

2. (有限集) 记 $X \times Y$ 是 X 与 Y 的笛卡尔积, 则 $\mathrm{Card}(X \times Y) = \mathrm{Card}(X) \cdot \mathrm{Card}(Y)$;

3. (有限集) 记 Y^X 是 X 到 Y 的全体映射, 则 $\mathrm{Card}(Y^X) = \mathrm{Card}(Y)^{\mathrm{Card}(X)}$. 这里约定 $0^0 = 1$;

4. 证明: $Y^{X_1 \sqcup X_2} \cong Y^{X_1} \times Y^{X_2}$, 并写出相应的元素间对应. 证明 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$;

5. 将上一问推广至任意指标集所示的对象 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$;

6. 证明: $(Y_1 \times Y_2)^X \cong Y_1^X \times Y_2^X$, 并写出相应的元素间对应. 证明 $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$;

7. 将上一问推广至任意指标集所示的对象 $\{Y_\beta\}_{\beta \in I}$;

8. 证明: $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$, 并写出相应的元素间对应. 证明 $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$;

9. 上一问表明 $X \times -$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X, -)$ 互为伴随. 将上一问从二元映射推广至多元映射.

将以上结论推广至线性映射.

Problem 8. 给定域 k. 假定 U 是有限维非零线性空间, V 是任意非零线性空间.

1. 请证明: 对任意给定的 $u \in U$, 如下是 k-线性映射:

$$\mathcal{L}(U,V) \to V, \quad f \mapsto f(u). \tag{3}$$

   我们把这个线性映射记作 Φ_u.

2. 请证明: Φ 可以看作这样一个 k-线性映射:

$$\Phi : U \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(U,V),V), \quad u \mapsto \Phi_u. \tag{4}$$

   并证明 Φ 是单射.

3. 作为推论, 若 U 是有限维的, V 是一维的, 那么有同构

$$U \cong \mathcal{L}(\mathcal{L}(U,V),V), \quad u \mapsto [f \mapsto f(u)]. \tag{5}$$

4. 假定 U 是能写出一组基的非零线性空间, V 是任意非零线性空间. 证明 Φ 仍旧是单射.

5. 假定 U 是能写出一组基的非零线性空间, 其一组基是集合 S (可能是无限集). 若 V 是一维线性空间, 请写出 $\mathcal{L}(U,V)$ 中所有线性映射. 作为推论:

$$\mathcal{L}(k[x],k) \cong k[\![x]\!]. \tag{6}$$

这表明, 幂级数与形式幂级数之间存在一个配对. 更一般地, 有限和的对偶是形式和. 有限数列空间的对偶空间是数列全空间.

6. 若假设基的存在性 (选择公理), V 是有限维线性空间. 那么形如 $\mathcal{L}(U,V)$ 的线性空间不可能是可数维的 (要么是有限维的, 要么是不可数维的). 作为推论, Φ 永远是单射. Φ 是同构当且仅当 U 是有限维的.

Problem 9. 对任意给定线性映射 $f:U\to V$, 请证明以下事实:

1. 若对线性空间任意 W, 线性

$$f\circ - : \mathcal{L}(W,U)\to\mathcal{L}(W,V), \quad \varphi\mapsto f\circ\varphi \tag{7}$$

总是单射, 则 f 是单射. 反之亦然.

2. 若对线性空间任意 W, 线性

$$-\circ g : \mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{L}(U,W), \quad \varphi\mapsto \varphi\circ f \tag{8}$$

总是单射, 则 f 是满射. 反之亦然.

当且仅当承认直和补的存在性 (等价于选择公理), 有如下事实:

1. 若对线性空间任意 W, 线性

$$f\circ - : \mathcal{L}(W,U)\to\mathcal{L}(W,V), \quad \varphi\mapsto f\circ\varphi \tag{9}$$

总是满射, 则 f 是满射. 反之亦然.

2. 若对线性空间任意 W, 线性

$$-\circ g : \mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{L}(U,W), \quad \varphi\mapsto \varphi\circ f \tag{10}$$

总是满射, 则 f 是单射. 反之亦然.

Problem 10. 设 V 是 k-线性空间, 请证明

$$\mathcal{L}(V,k) \overset{\Phi^\sharp}{\to} \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,k),k),k) \xrightarrow{\Phi^\flat} \mathcal{L}(V,k) \tag{11}$$

的复合是恒等映射, 且该复合先单后满. 因此 $\mathcal{L}(V,k)$ 同构于 $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,k),k),k)$ 的直和项. 以上

$$\Phi^\sharp : \mathcal{L}(V,k)\to\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,k),k),k), \quad f\mapsto\Phi_f, \tag{12}$$

$$\Phi^\flat : \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,k),k),k)\to\mathcal{L}(V,k), \quad \mathfrak{F}\mapsto\mathfrak{F}\circ\Phi. \tag{13}$$

Problem 11. 若承认延拓公理, 试证明 V 是 $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,k),k)$ 的直和项.

Problem 12. 数学史告诉我们, 由自然数集 $\mathbb{N}$ 构造有理数域 $\mathbb{Q}$ 的方式非常朴素, 但实数域 $\mathbb{R}$ 的构造却是费解的. 幸运地是, 我们可以借助高等代数描述实数. 以下仅讨论 $\mathbb{Q}$-线性空间.

1. 记 V 是有理数列空间, 子集 V_c 由收敛的有理数列组成, 是 V_0 由收敛至零有理数列组成. 请证明 $V_0 \subsetneq V_c \subsetneq V$ 是真包含的线性空间.

2. 我们尝试给出 $\mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 中的部分元素. 一种自然的想法是将 V 中元素与线性映射 $a \in \mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 都写作无穷矩阵, 线性映射定义作逐点相乘求和:

$$a : V_0 \to \mathbb{Q}, \qquad \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto (a_0\, a_1\, a_2 \cdots) \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 0} a_i u_i. \tag{14}$$

请验证, $\mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 中形如无穷矩阵的元素构成了一个线性空间 (记作 V_{00}), 并给出该空间的一组基. 注意: 需要着重证明, 为什么符合条件的 a 有且仅有有限项非零?

3. 上一问的构造的可数维线性空间是 $\mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 的真子空间. 证明 $\mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 是不可数维的, 并尝试找出一些 $\mathcal{L}(V_0, \mathbb{Q})$ 中的其他元素. 注意: 这表明延拓公理在某种程度上是反直觉的.

4. 请证明: $V_{00} \subsetneq V_0 \subsetneq V_c \subsetneq V$ 中相邻两项的商都是不可数维的线性空间.

5. 用分析语言解释自然的商映射 $L : V_c \to V_c/V_0$ 中的 L 与 V_c/V_0.

6. 依照惯例, 我们将 V_c/V_0 中的元素记作 $v + V_0$, 此处数列 v 是商空间的代表元. 定义数列的逐点乘法

$$(v + V_0) \cdot (u + V_0) = v \cdot u + V_0. \tag{15}$$

请证明: 该种乘法与代表元的选取无关, 因此是良定义的.

7. 验证 $(V_c/V_0, +, 0 + V_0, \cdot, 1 + V_0) \simeq (\mathbb{R}, +, 0, \times, 1)$ 是通常的实数域. 这里 0 是全零数列, 1 是全一数列.

8. 给定函数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. 同以往定义, f 在数列上的定义是逐点的, 故将数列映作数列. 请证明, f 在 0 处连续, 当且仅当对任意 $u \in V_0$, 总有

$$\{f(u_n)\}_{n \geq 1} \in V_c. \tag{16}$$

此处 V_0 可视作无穷小量. 形象地说, 连续映射是保持收敛数列的映射.

9. 证明连续函数 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 可以被唯一地提升作连续函数 $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得 $\widetilde{f}|_{\mathbb{Q}} = f$.

Problem 13. 假定 k 是无限域.

1. 证明, 任意 k-线性空间一定不是有限个线性真子空间的并.

2. 若线性映射 $f \in \mathcal{L}(k^n, k)$ 使得 $f(A)$ 总是 A 的某项, 求所有可能的 f.

3. 若 $\{T_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{L}(U, V)$ 是两两不同的映射, 试证明存在 $v \in U$ 使得 $\{T_i(v)\}_{i=1}^n$ 两两不同.

4. 证明, 若线性映射 $f : k^{n \times n} \to k^{n \times n}$ 满足 $f(AB) \in \{f(A) \cdot f(B), f(B) \cdot f(A)\}$, 则恒有 $f(AB) = f(A)f(B)$ 或恒有 $f(AB) = f(B)f(A)$.

5. 若 Abel 加群 G 上有相容的乘法运算 (仅满足乘法封闭性, 乘法结合律, 以及分配律), 且加法自同态 $f : G \to G$ 满足

$$f(ab) \in \{f(a) \cdot f(b), f(b) \cdot f(a)\}, \quad (\forall a, b \in G). \tag{17}$$

则恒有 $f(ab) = f(a)f(b)$ 或恒有 $f(ab) = f(b)f(a)$.

6. 证明, 若 $f : k^{n\times n} \to k^{n\times n}$ 对一切矩阵 A 都有 $f(A^{-1}) = f(A)^{-1}$, 则 f 形如以下两者之一:

$$\exists C \in \mathrm{GL}_n(k) : f(A) = C^{-1}AC, \quad \exists C \in \mathrm{GL}_n(k) : f(A) = C^{-1}A^T C, \tag{18}$$

Problem 14. 给定域 k, 选定线性性空间 $\mathbb{V}$, 以下将研究 $\mathbb{C}$ 的所有线性子空间, 并以此表述线性空间的各种同构定理 (该问题对 Abel 群, 模等仍适用).

1. 定义偏序关系 $(\mathrm{Sub}(\mathbb{V}), \leq)$, 其中
   - $\mathrm{Sub}(\mathbb{V})$ 是 $\mathbb{V}$ 的全体线性子空间构成的集合,
   - 称 $U \leq V$ 当且仅当 U 是 V 的子空间,
   - 依通常定义加入子空间的二元运算 $+$ 与 $\cup$, 分别表示子空间的和与交.

2. 请验证 $(\mathrm{Sub}(\mathbb{V}), +, 0)$ 构成一个有结合律的交换幺半群, $(\mathrm{Sub}(\mathbb{V}), \cap, \mathbb{V})$ 亦然.

3. 给定 $U \leq V$, 定义闭区间 $[U, V] := \{W \mid U \leq W \leq V\}$. 子空间对应定理的表述是: 对任意子空间 U, 有同构的偏序集
$$(\mathrm{Sub}(\mathbb{V}/U), \leq) \xrightarrow{\sim} ([U, \mathbb{V}], \leq). \tag{19}$$
换用自然语言描述之 (请证明该命题):
$$(\mathbb{V}/U) \text{ 的全体子空间} \xrightarrow{\text{对应}} \mathbb{V} \text{ 中包含} U \text{ 的子空间}, \quad V/U \mapsto V. \tag{20}$$
以上对应方式也保持子空间的从属关系. 另一个等价的表述是区间同构
$$[V_0, V_1] \cong [V_0/U, V_1/U] \quad \text{此处} 0 \leq U \leq V_0 \leq V_1 \leq \mathbb{V}. \tag{21}$$
后者是 $\mathrm{Sub}(\mathbb{V}/U)$ 的区间. 此处应证明, 存在集合间的双射 $\varphi : [V_0, V_1] \to [V_0/U, V_1/U]$, 使得 $\varphi(X) \leq \varphi(Y)$ 当且仅当 $Y \leq X$.

4. 以上对应关系蕴含了如下事实: 商空间的子空间恰是子空间的商空间.
$$\begin{array}{ccc} V_0/U & \xrightarrow{\sim} & V_0 \\ \wedge & & \wedge \\ V_1/U & \xrightarrow{\sim} & V_1 \end{array}. \tag{22}$$
请以此证明第二同构定理: 对任意 $U, V \in \mathrm{Sub}(\mathbb{V})$, 有同构
$$\frac{U+V}{U} \cong \frac{V}{U \cap V}. \tag{23}$$
另一个等价的表述是区间同构
$$[U \cap V, U] \cong [V, U+V], \quad W \mapsto W + V. \tag{24}$$

5. 给定 $0 \leq U \leq V_0 \leq V_1 \leq \mathbb{V}$, 证明 $\dfrac{V_1/U}{V_0/U} \cong \dfrac{V_1}{V_0}$.

6. 称区间 $[U, W]$ 中的两个线性空间 V_1 与 V_2 是相对该区间互补的, 若以下条件满足:
$$V_1 \cap V_2 = U, \quad V_1 + V_2 = W. \tag{25}$$
请证明: 若 $V^\sharp$ 与 $V^\flat$ 都是 V 的补空间 (相对于区间 $[U, W]$), 满足 $V^\flat \leq V^\sharp$, 则 $V^\flat = V^\sharp$. 通俗地说: 一个空间的两个补空间不可能是真包含关系.

7. 请证明如下恒等式: 对任意 $V, U^\sharp, U^\flat \in \mathrm{Sub}(\mathbb{V})$, 满足 $U^\flat \le U^\sharp$, 则

$$U^\sharp \cap (V + U^\flat) = (U^\sharp \cap V) + U^\flat. \tag{26}$$

8. 请尝试以下替换, 证明以上全部命题

$$(\mathbb{V}, \mathrm{Sub}(\mathbb{V}), \le, +, \cap, 0) \xrightarrow{\text{替换}} (n, \text{正因数}(n), \text{整除}, \text{最小公倍数}, \text{最大公因数}, 1). \tag{27}$$

9. 对任意 $V^\sharp, V^\flat, U^\sharp, U^\flat \in \mathrm{Sub}(\mathbb{V})$, 满足 $U^\flat \le U^\sharp$, $V^\flat \le V^\sharp$, 以下四段区间是同构的:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{U^\flat + (V^\sharp \cap U^\sharp)}{U^\flat + (V^\flat \cap U^\sharp)} & \xleftrightarrow{\text{子空间对应}} & \dfrac{U^\sharp \cap V^\sharp}{(V^\flat \cap U^\sharp) + (V^\sharp \cap U^\flat)} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \dfrac{(V^\sharp \cap U^\sharp) + V^\flat}{(V^\sharp \cap U^\flat) + V^\flat} & \xleftrightarrow{\text{子空间对应}} & \dfrac{(U^\sharp \cap V^\flat) + (U^\flat \cap V^\sharp)}{U^\flat + V^\flat} \end{array}. \tag{28}$$

10. 我们借用平面几何对上述公式进行简单的表示: 对整数 n, 记线性空间 U^n 对应区域 $\{(x, y) \mid x \le n\}$, V^m 对应区域 $\{(x, y) \mid y \le m\}$, 此时

$$\cdots \le U^{-1} \le U^0 \le U^1 \le \cdots \tag{29}$$

是线性空间依包含关系所成的链, $V^\bullet$ 的情形亦然. 再令线性空间的和 $+$ 对应区域的并, 交 $\cap$ 对应区域的交. 以上的习题表明, 此种几何对应是良定义的. 特别地, 我们将商空间 A/B 表示为 A 对应的区域减去 B 对应的区域. 我们用对上一题的符号进行替换: $(\sharp, \flat) \mapsto (1, 0)$. 请写出四段区间同构的无字证明.

2 线性映射

Problem 15. 以下给定域 k, 记 n-阶矩阵环为 $M_n(k)$.

1. 称 $\mathrm{d} \in \mathcal{L}(M_n(k), M_n(k))$ 为导子, 当且仅当对任意 $P, Q \in M_n(k)$, 总有

$$\mathrm{d}(PQ) = P \cdot \mathrm{d}(Q) + \mathrm{d}(P) \cdot Q. \tag{30}$$

2. 我们将导子全体记作 $\mathcal{D}(M_n(k), M_n(k))$. 请分别计算

   - $\mathrm{d}(f(P))$, 此处 f 是多项式;
   - $\mathrm{d}(P \cdot Q^{-1})$, 此处 Q 是可逆矩阵;
   - 证明 $X \cdot \mathrm{d}(X) = \mathrm{d}(X) \cdot X$, 或给出反例.

3. 请证明: 对于导子 d^1 与 d^2, Lie 括号 $[\mathrm{d}^1, \mathrm{d}^2]$ 也是导子. 此处定义

$$[\mathrm{d}^1, \mathrm{d}^2](P) = \mathrm{d}^1(\mathrm{d}^2(P)) - \mathrm{d}^2(\mathrm{d}^1(P)). \tag{31}$$

4. 这表明 $[\mathrm{d}^1, \mathrm{d}^2]$ 有自然的 Lie 代数结构.

5. 下考虑 $\mathcal{D}(M_n(k), M_n(k))$ 上一类特殊的导子. 记线性映射

$$\mathrm{ad}_\bullet : M_n(k) \to \mathcal{D}(M_n(k), M_n(k)), \quad A \mapsto \mathrm{ad}_A, \tag{32}$$

   其中 $\mathrm{ad}_A(X) := [A, X] = AX - XA$. 我们将 ad_A 称作内导子. 请验证

   - $\mathrm{ad}_A \in \mathcal{D}(M_n(k), M_n(k))$,
   - $\mathrm{ad}_{[A,B]} = [\mathrm{ad}_A, \mathrm{ad}_B]$,
   - $\mathrm{ad}_{\mathrm{d}A} = [\mathrm{d}, \mathrm{ad}_A]$.

   从而全体内导子构成子-Lie 代数.

6. 请计算 $\mathcal{D}(M_n(k), M_n(k))$ 中全体内导子 (作为线性子空间) 的维数, 以此说明 $\mathcal{D}(M_n(k), M_n(k))$ 的导子都是内导子. 提示: 可以先证明导子与内导子的商等于某个上同调 (例如群上同调 $H^1(M_n(k), M_n(k))$, 或者 Hochschild 上同调等.), 再使用 Morita 等价 $M_n(k) \sim k$.

7. 请计算 $\mathcal{D}(k[x], k[x])$.

8. 考虑实数域 $\mathbb{R}$. 记 $C(I)$ 是开区间 I 上连续函数全体, 则 $\mathcal{D}(C(I), C(I)) = 0$. 这表明我们无法对连续函数定义非平凡的导数!

9. 证明以上结论对可微次数小于等于 n 的函数全体仍适用; 对该结论光滑函数而言有何不同?

Problem 16. 给定任意域 k. 请使用线性映射的语言解释方阵的相似变换是什么, 矩阵的相抵变换又是什么?

Problem 17. 若 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $S^2 = T^2 = 0_V$ 以及 $ST + TS = \mathrm{id}_V$, 则存在直和分解 $V = U \oplus V$, 使得 $S : U \to W$ 与 $T : W \to U$ 是同构.

Problem 18. 给定任意域 k. 请使用线性映射的语言解释同时相抵化: 给定 $A, B \in k^{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ 当且仅当存在 $P \in \mathrm{GL}_m(k)$ 与 $Q \in \mathrm{GL}_n(k)$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{\operatorname{rank}(A)} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_{\operatorname{rank}(B)} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

注意: 该结论当然能推广至任意有限个矩阵.

Problem 19. 以下域 k 是任意的.

1. 取同阶方阵 A 与 B, 若 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(ABA)$, 证明 AB 与 BA 相似.
2. 取同阶方阵 A 与 B, 若 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(ABA)$, 证明 AB 与 BA 相似.
3. 取 $A \in k^{m\times n}$ 与 $B \in k^{n\times m}$, 若对任意 $d \in \mathbb{N}_+$ 总有 $\operatorname{rank}((AB)^d) = \operatorname{rank}((BA)^d)$, 则存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

Problem 20. 给定任意域 k. 请使用线性映射的语言解释幂零标准型: 幂零矩阵一定相似于某个矩阵, 其 $(i, i+1)$ 坐标处的元素是 0 或 1, 其余坐标处的元素是 0. 换言之, 幂零矩阵在任意域上都有 Jordan 标准型.

Problem 21. 给定任意域 k. 请使用线性映射的语言证明 Fitting 引理: 给定有限维空间和线性映射 $T \in \operatorname{Hom}_k(V, V)$, 请证明内直和关系:

$$V = \underbrace{\left(\bigcup_{n\geq 1} \operatorname{null}(T^n)\right)}_{\text{零空间增长极限}} \oplus \underbrace{\left(\bigcap_{n\geq 1} \operatorname{range}(T^n)\right)}_{\text{像空间消减极限}}. \tag{34}$$

这一事实表明, 任意域上的矩阵相似于一个分块对角矩阵 (2×2-分块), 其左上分块是可逆的, 右下分块是幂零的. 试问: Fitting 引理对无限维空间是否成立?

Problem 22. 使用简洁的语言证明, 若线性自同态 T 在某域上的特征多项式能分解作一次因式的乘积, 则 T 在某组基下为 Jordan 标准型 (在相差一个行列置换或转置的意义下唯一).

Problem 23. 证明, 若域的特征为零, $[A, [A, B]] = O$, 则 $[A, B]$ 幂零.

Problem 24. 写出有限维线性自同态可上三角化的定义, 并在特征为零的域上证明以下问题.

1. $\operatorname{rank}([A, B]) \leq 1$, 则 A 与 B 可同时上三角化.
2. 两个交换的幂零矩阵可同时上三角化.
3. 若 $[A, B]$ 是 A 的多项式, 则该多项式常数项必定为零. 并证明 A 与 B 可同时上三角化.
4. 若 $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = O$, 则 A, B, $[A, B]$ 可同时上三角化.
5. 若 $[A, B] = aA + bB$, 则 A 与 B 可同时上三角化.

Problem 25. 仍给定任意域 k. 定义线性子空间为一个单射 $i: U \to V$. 定义相应的商映射 $\pi: V \to V/U$. 假定以下线性映射复合为零

$$\underbrace{W \xrightarrow{T} V \xrightarrow{\pi} V/U}_{\text{复合为零}}, \tag{35}$$

则 T 被 U 以唯一的方式分解. 换言之, 存在唯一的线性映射 $\widetilde{T}: W \to U$ 使得 $i \circ \widetilde{T} = T$. 简而言之, 某映射被商映射 π 湮没, 当且仅当其经由子映射 i.

Problem 26. 假定以下线性映射复合为零

$$\underbrace{U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{S} Q}_{\text{复合为零}}, \tag{36}$$

则 S 被 V/U 以唯一的方式分解. 换言之, 存在唯一的线性映射 $\widetilde{S}: V/U \to Q$ 使得 $\widetilde{S} \circ \pi = S$. 简而言之, 某映射无法分辨子空间 U, 当且仅当其能定义在商空间 V/U 上.

Problem 27. 请证明: 任何线性映射 T 总能唯一地分解做先满后单的两个映射的复合. 换言之, 若线性映射 i, j 是单射, p, q 是满射, 且满足 $i \circ p = j \circ q$, 则 $\mathrm{im}(q) \cong \mathrm{im}(p)$.

Problem 28. 设 U, V, W 是给定域上的线性空间. $\alpha: U \to V$ 与 $\beta: V \to W$ 是线性映射且满足 $\beta \circ \alpha = 0$. 若对任何一个线性空间 X 和线性映射 $f: V \to X$ 使得 $f \circ \alpha = 0$, 都存在一个唯一的线性映射 $\mu: W \to X$ 使得 $f = \mu \circ \beta$, 证明 β 是满射, 且有线性同构 $W \cong V/\mathrm{range}(\alpha)$. 注意: 许多网传的解答都假定了有限维空间或是选择公理, 实际上该题只需简单应用泛性质.

Problem 29. 使用积的泛性质表述典范同构 $\mathcal{L}(U, \prod_\lambda V_\lambda) \cong \prod_\lambda \mathcal{L}(U, V_\lambda)$, 并写出元素的对应. 此处 λ 取遍某一指标集.

Problem 30. 使用余积的泛性质表述典范同构 $\coprod_\lambda \mathcal{L}(U, V_\lambda) \to \mathcal{L}(U, \coprod_\lambda V_\lambda)$, 并写出元素的对应. 此处 λ 取遍某一指标集.

Problem 31. 给出典范单射 $\coprod_\lambda \mathcal{L}(U, V_\lambda) \to \mathcal{L}(U, \coprod_\lambda V_\lambda)$, 并写出元素的对应, 此处 λ 取遍某一指标集. 并说明该单射取等当且仅当 $\dim U < \infty$.

Problem 32. 给出典范单射 $\coprod_\lambda \mathcal{L}(U_\lambda, V) \to \mathcal{L}(\prod_\lambda U_\lambda, V)$ 并写出元素的对应, 此处 λ 取遍某一指标集. 并给出该单射不取等的例子.

Problem 33. 请使用以下步骤, 说明由泛性质定义的直和 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 恰为直积 $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 中仅有限项指标非零的元素.

1. 使用投影映射的左逆元, 将所有 U_λ 视同直积 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 的子空间. 若 $\mu \neq \lambda$, 则 $U_\lambda \cap U_\mu = 0$.
2. 任意给定线性空间 W. 证明任意一族线性映射 $\{f_\lambda: U_\lambda \to W\}_{\lambda \in \Lambda}$ 唯一地对应一个保持线性组合的集合间的映射 $f: \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \to W$.
3. 同时, 以上保持线性组合的映射 f 唯一地对应一个 $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{span}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda), W)$ 中的映射 F.
4. 从而得出 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cong \mathrm{span}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda)$.

Problem 34. 记 $[0,1]$ 区间上连续实值函数全体为 V. 定义积分变换为实线性映射

$$\mathcal{I} : V \to V, \quad f \mapsto \mathcal{I}(f). \tag{37}$$

其中, $(\mathcal{I}(f))(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

1. 求 $\mathcal{I}$ 的所有特征值及其对应的特征空间 (或特征向量).
2. 找到 V 的一族不变子空间 $\{V_x\}_{x\in\mathbb{R}}$, 使得 $V_x \subsetneq V_y$ 当且仅当 $x < y$.
3. 证明: $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 是线性无关的当且仅当 $\det\left(\int_0^1 f_i f_j \,\mathrm{d}\,x\right)_{1\le i,j\le n} \neq 0$.
4. 证明: $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 是线性无关的, 当且仅当存在 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset I$ 使得 $\det(f_i(x_j))_{1\le i,j\le n} \neq 0$.
5. 证明: 若存在 V 中函数的等式 $\sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(y) = \sum_{i=1}^m c_i(x)d_i(y)$, 且 m 是该二元函数写作 $\sum f(x)g(y)$ 的最小数目, 则 $\operatorname{span}(\{a_i\}_{i=1}^m) = \operatorname{span}(\{c_i\}_{i=1}^m)$ (y-项同理). 此处可以采用张量积说明.
6. 证明: $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 是线性无关的收敛幂级数, 当且仅当 $\det\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\,x^j} f_i(x)\right)_{1\le i,j\le n}$ 是非恒零的函数.
7. 试给出反例: $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ 是线性相关的光滑函数, 但 $\det\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\,x^j} f_i(x)\right)_{1\le i,j\le n}$ 是非恒零的函数.

Problem 35. 求以下线性映射的所有特征值及其对应的特征空间 (或特征向量):

1. $\varphi_{a,b} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad f(x) \mapsto f(ax+b)$, 此处 $a, b \in \mathbb{R}$ 是给定的;
2. $\mathcal{R} : \mathbb{R}[\![X]\!] \to \mathbb{R}[\![X]\!], \quad f(X) \mapsto X \cdot f(X)$, 这也叫右移运算;
3. $\mathcal{L} : \mathbb{R}[\![X]\!] \to \mathbb{R}[\![X]\!], \quad f(X) \mapsto (f(X) - f(0))/X$, 这也叫左移运算;
4. 记 $[0,1]$ 区间上连续实值函数全体为 V, 求以下线性算子的特征值与特征空间:

$$V \to V, \quad f(x) \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\,y, \tag{38}$$

此处选取 $K(x,y) = \min(x,y) - x \cdot y$.

Problem 36. 给定复线性变换 $T : V \to V$ 与复系数非常值多项式 f, 证明: $f(T)$ 的特征值是 $\{f(\lambda) \mid \lambda$ 是T 的特征值.$\}$. 注意: 复数域可换做代数闭域.

Problem 37. 对复线性空间的自同态 $T : V \to V$ 定义 $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid (z \cdot \mathrm{id} - T)^{-1}$ 不存在$\}$. 请给出 $\sigma(T) = \mathbb{C}$ 但 T 没有特征值的例子. 习惯地, 当 T 满足某些连续性条件时, 称 $\sigma(T)$ 为 T 的谱.

Problem 38. 举例, $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $S \circ T = \mathrm{id}_V$, 但 $\operatorname{null}(T \circ S)$ 是无穷维的.

Problem 39. 由数学分析, 我们可以找到两个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的函数, 使得一者单但不满, 另一者满但不单, 同时两者之和为恒等映射. 下将以上事实代入线性空间.

1. 给定集合 S 与线性空间 V, 证明集合间的全体映射 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(S, V)$ 有自然的线性结构 (函数的线性组合是逐点赋予的). 另一种写法是 V^S, 表示 S-个 V 的直积 ($\prod_{s\in S} V$).
2. 考虑集合间映射

$$-\circ f : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f, \tag{39}$$

并证明这也是线性映射.

3. 试说明: 以上定义的 $(- \circ f)$ 单当且仅当 f 满; $(- \circ f)$ 满当且仅当 f 单.

4. 寻找单且不满的映射 $f_1 \in \mathbb{H}\rtimes\gtrdot_{\mathrm{Sets}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 与满且不单的 $f_2 \in \mathbb{H}\rtimes\gtrdot_{\mathrm{Sets}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 使得 $f_1 + f_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Problem 40. 以下给出一种从集合构造以之为基的线性空间的方法. 给定集合 X 与域 k, 定义 k-线性空间 $V := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X, k)$. 证明单射

$$i : X \hookrightarrow V^*, \quad x \mapsto [f \mapsto f(x)]. \tag{40}$$

往后考虑 V^* 中的 $\mathrm{span}(i(X))$ 即可.

Problem 41. 以下问题用于研究代数数.

1. 称 $r \in \mathbb{C}$ 是代数整数, 当且仅当存在首一整系数多项式 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(r) = 0$. 记 $\mathbb{Q}(r)$ 为包含 r 的最小数域. 证明 $\mathbb{Q}(r)$ 是有限维 $\mathbb{Q}$-线性空间, 其一组基是 $\{1, r, r^2, \ldots, r^{d-1}\}$ $(d = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(r) - 1)$.

2. 取代数整数 $r \in \mathbb{C}$. 写出以下 $\mathbb{Q}$-线性自同态的矩阵形式

$$m_r : \mathbb{Q}(r) \to \mathbb{Q}(r), \quad x \mapsto rx, \tag{41}$$

   其中选取基底为 $\{1, r, \ldots, r^{d-1}\}$ 是基底. 同时写出 m_r 的特征多项式.

3. 给出例子: m_r 在 $\mathbb{Q}(r)$ 中没有 Jordan 标准型.

4. 若 $r, s \in \mathbb{C}$ 是代数整数, 试通过线性映射的矩阵表述证明 $r + s$ 和 $r \cdot s$ 均是代数整数.

5. 置 $g(x) = x^{2024} + x + 1$. 对任意首一多项式 $f \in \mathbb{Z}[x]$, 根据代数基本定理分解得

$$f(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \quad (\text{over } \mathbb{C}). \tag{42}$$

   试证明:

$$(x - g(z_1))(x - g(z_2)) \cdots (x - g(z_n)) \in \mathbb{Z}[x]. \tag{43}$$

Problem 42. 本题用于探究一类几乎是同构的线性映射. 在处理无限维线性空间时, 我们时常遇到一些复合的恒等映射 $S \circ T$, 但 $T \circ S$ 与恒等仅相差一个 range-有限维的映射 (可思考多项式空间上的求导映射, 或是平移映射). 以下习题的目的是将所有 $\mathcal{L}(U, V)$ 替换做某个 $\mathcal{L}(U, V)$ 的商空间, 使得上述求导, 平移映射成为商空间中的同构. 简而言之, 有限维线性空间构成原空间的 Serre 子范畴.

1. 称 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 是拟同构, 当且仅当 $\mathrm{null}(T)$ 与 $W/\mathrm{range}(T)$ 均是有限维的. 显然有限维空间间的线性映射都是拟同构. 请证明: 若 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 与 $S \in \mathcal{L}(U, V)$ 都是拟同构, 则 $T \circ S$ 亦然.

2. 称 $S \in \mathcal{L}(U, V)$ 与 $T \in \mathcal{L}(V, U)$ 互为拟逆, 当且仅当 $(S \circ T - \mathrm{id}_V)$ 与 $(T \circ S - \mathrm{id}_U)$ 的 range 均是有限维的. 请证明: 实多项式空间中通常的求导运算有拟逆. 一般多项式空间如何?

3. 证明: T 存在拟逆, 当且仅当对任意 range 有限维的线性映射 F, 映射 $(F + T)$ 也具有拟逆. 此处, 映射的来源与去向相同.

4. 采用 1. 的记号. 请证明: 若 T 与 S 均有拟逆, 则 $T \circ S$ 亦然.

5. 请证明: 某映射具有拟逆, 当且仅当它是拟同构. 此时, 应当承认选择公理.

6. 给定拟同构 $T \in \mathcal{L}(U,V)$, 定义其指标

$$\mathfrak{S}(T) := \dim(\mathrm{null}(T)) - \dim(V/\mathrm{range}(T)). \tag{44}$$

给定拟同构 T 与 range 有限的映射 F, 请证明 $\mathfrak{S}(T+F) = \mathfrak{S}(T)$. 此处, 映射的来源与去向相同.

7. 请证明: $\mathfrak{S}(T) + \mathfrak{S}(S) = \mathfrak{S}(T \circ S)$. 特别地, 互为拟逆的映射有互为相反数的指标.

8. 给定由 S, T 与 $T \circ S$ 诱导的三条正合列, 则有诱导的长正合列

$$0 \to \ker(S) \to \ker(T \circ S) \to \ker(T) \to \mathrm{coker}(S) \to \mathrm{coker}(T \circ S) \to \mathrm{coker}(T) \to 0. \tag{45}$$

9. 给定拟同构 $T \in \mathcal{L}(U,V)$. 若限制在子空间上的映射 $T^\flat : U^\flat \to V^\flat$ 也是拟同构, 则 $T_\flat : \frac{U}{U^\flat} \to \frac{V}{V^\flat}$ 也是良定义的拟同构. 特别地, $\mathfrak{S}(T) = \mathfrak{S}(T^\flat) + \mathfrak{S}(T_\flat)$.

10. 定义商空间 $\mathcal{H}(U,V) := \mathcal{L}(U,V)/\mathcal{L}^0(U,V)$, 其中 $\mathcal{L}^0(U,V)$ 由 $\mathcal{L}(U,V)$ 中所有 range-有限的映射组成, 记商空间中的对象 $[T] := T + \mathcal{L}^0(U,V)$. 试证明: $[\mathrm{id}_V] = [0]$ 当且仅当 $\dim V < \infty$, 这说明有限维空间等价于零对象.

11. 证明复合运算 $[S \circ T] = [S] \circ [T]$ 是良定义的, 即结果不依赖代表元之选取.

12. 假定域的特征为零. 证明导函数映射

$$\mathcal{D} : k[X] \to k[X], \quad X^n \mapsto n \cdot X^{n-1} \tag{46}$$

与原函数映射

$$\mathcal{I} : k[X] \to k[X], \quad X^n \mapsto \frac{1}{n+1} X^{n+1} \tag{47}$$

在商空间中互逆, 即 $[\mathcal{D}] \circ [\mathcal{I}] = [\mathcal{I}] \circ [\mathcal{D}] = [\mathrm{id}_{k[X]}]$.

3 对偶空间

Problem 43. 称偏序集 $(S, \leq_S)$ 与 $(T, \leq_T)$ 间保持偏序结构的映射

$$f : (S, \leq_S) \to (T, \leq_T), \quad g : (T, \leq_T) \to (S, \leq_S) \tag{48}$$

构成一个 Galois 连接, 当且仅当以下性质恒成立:

$$f(s) \leq_T t \quad \Longleftrightarrow \quad s \leq_S g(t) \quad (\forall s \in S, \forall t \in T). \tag{49}$$

1. 证明: $f \dashv g$ 是 Galois 连接当且仅当 $s \leq_S g(f(s))$ 对一切 $s \in S$ 成立, 且 $f(g(t)) \leq_T t$ 对一切 $t \in T$ 成立.

2. 给定线性子空间的偏序集 $(\mathrm{Sub}(V), \leq)$, 对偶地定义偏序集 $(\mathrm{Sub}(V^*), \leq^*)$, 其中 $A \leq^* B$ 当且仅当 $B \subset A$ 是子空间的包含关系. 注意: 在对偶空间的取反包含运算是非常合理的. 请证明: $\mathrm{ann}(U) \leq^* B$ 与 $U \leq \ker(B)$ 均等价于命题
$$f(u) = 0\,(\forall f \in B, \forall u \in U). \tag{50}$$
从而 $(\mathrm{ann} \dashv \ker)$ 是一个 Galois 连接.

3. 试问: 找一个 $\mathrm{ann}(\ker(B)) \neq B$ 的例子. 并在承认延拓公理时证明 $U = \ker(\mathrm{ann}(U))$ 恒取等.

Problem 44. 令 S 是 $\mathbb{R}^2$ 上全体开集, $U \leq_S V$ 当且仅当 U 是 V 的子集; T 是 $\mathbb{R}^2$ 上全体闭集, $B \leq_T D$ 当且仅当 B 是 D 的子集. 再令 f 是取闭包, g 是取内部.

1. 证明以上 f 与 g 是保持偏序关系的映射, 且是一个 Galois 连接.

2. 给定 $\mathbb{R}^2$ 中的子集. 今仅提供取闭包以及取内部两种运算. 请证明: 最多会出现 7 种不同的集合 (包括 S 自身). 并给一个取等的例子. 该结论对一般的拓扑空间也成立.

3. 给定 $\mathbb{R}^2$ 中的子集. 今仅提供取闭包以及取补集两种运算. 请证明: 最多会出现 7 种不同的集合 (包括 S 自身). 并给一个取等的例子. 该结论对一般的拓扑空间也成立.

4. 映射 $f : X \to Y$ 的本质是子集的对应, 原像函数 f^{-1} 亦然. 鉴于集合的子集是偏序集, 试问: (f, f^{-1}) 是否构成 Galois 连接? 同时判断以下语句的正误:

   (a) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$,

   (b) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,

   (c) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

   (d) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

5. 请证明, 函数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是连续的, 当且仅当 f^{-1} 保持 Galois 连接 (开集闭集模型). 换言之, 证明以下几条等价:

   (a) f 是连续函数 (使用极限记号或 ε-δ 语言定义, 两者的等价性见数学分析);

   (b) 开集的原像恒为开集 (这是连续函数的普适性定义, 对一般的拓扑空间均适用);

   (c) 闭集的原像恒为闭集.

Problem 45. 证明以下结论对有限维对偶空间均正确, 对承认延拓公理与否有下表. 注意: 永远正确的等式适合作为证明题, 通常公理内不正确的等式适合作为反例.

编号	定理名称	通常情形	承认延拓公理	备注
G1	$\ker(\mathrm{ann}(V)) \stackrel{?}{=} V$	仅 $\supset$	成立	
G2	$\mathrm{ann}(\ker(B)) \stackrel{?}{=} B$	仅 $\supset$	仅 $\supset$	反例
E1	$\mathrm{ann}(V_1+V_2) \stackrel{?}{=} \mathrm{ann}(V_1)\cap\mathrm{ann}(V_2)$	成立	成立	证明
E2	$\mathrm{ann}(V_1\cap V_2) \stackrel{?}{=} \mathrm{ann}(V_1)+\mathrm{ann}(V_2)$	仅 $\supset$	成立	
E3	$\ker(B_1+B_2) \stackrel{?}{=} \ker(B_1)\cap\ker(B_2)$	成立	成立	证明
E4	$\ker(B_1\cap B_2) \stackrel{?}{=} \ker(B_1)+\ker(B_2)$	仅 $\supset$	仅 $\supset$	反例
Z1	$\ker(\varphi^*) \stackrel{?}{=} \mathrm{ann}(\mathrm{im}(\varphi))$	成立	成立	证明
Z2	$\ker(\varphi) \stackrel{?}{=} \ker(\mathrm{im}(\varphi^*))$	仅 $\supset$	成立	
Z3	$\mathrm{im}(\varphi^*) \stackrel{?}{=} \mathrm{ann}(\ker(\varphi))$	仅 $\supset$	成立	
Z3’	$\mathrm{im}(\pi^*) \stackrel{?}{=} \mathrm{ann}(\ker(\pi))$, π 满	成立	成立	证明
Z4	$\mathrm{im}(\varphi) \stackrel{?}{=} \ker(\ker(\varphi^*))$	仅 $\supset$	成立	
Z5	f 满推得 f^* 单	成立	成立	证明
Z6	f 单推得 f^* 满	不成立	成立	
L1	$V^*/\mathrm{ann}(S) \xrightarrow{?} S^*$	单	同构	
L2	$(V/S)^* \xrightarrow{?} \mathrm{ann}(S)$	同构	同构	证明

4 多项式

Problem 46. 对任意多项式 $f \in \mathbb{Z}[X]$, 证明有以下命题的推导关系 (未标注的箭头均不取达):

$$f \text{ 在 } \mathbb{Z}[X] \text{ 中不可约} \implies f \text{ 在 } \mathbb{Q}[X] \text{ 中不可约} \impliedby f \text{ 在 } \mathbb{C}[X] \text{ 中不可约}. \tag{51}$$

对整系数首一多项式而言, 以上关系作何变化?

5 内积空间

Problem 47. 以下, 实内积空间 V 不必是有限维的, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ 总是可逆的, 伴随映射 φ^* 总是存在的.

1. 证明 φ^* 是单射, 且 $(\mathrm{im}(\varphi^*))^\perp = 0$.
2. 证明: 若 φ^* 是满射, 则 $(\varphi^{-1})^*$ 存在, 且 $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.
3. 证明: 若 $(\varphi^{-1})^*$ 存在, 则 φ^* 可逆, 且 $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.
4. 置 V 为仅有限项非零的实数列空间 (同构于 $\mathbb{R}[x]$), 其上的内积定义作
$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a_i)_{i\geq 1}, (b_i)_{i\geq 1} \mapsto \sum_{i\geq 1} a_i b_i. \tag{52}$$
定义左移映射 $L : V \to V, \quad (a_i)_{i\geq 1} \mapsto (a_{i+1})_{i\geq 1}$, 试求 $(\mathrm{id} + L)$ 的伴随.
5. 举例说明 φ^{-1} 不必有伴随.

Problem 48. 依照内积的 Cauchy-Schwartz 不等式, 求出使得不等式
$$\left(\sum_{j\geq 1} |a_j|\right)^4 \leq C \cdot \left(\sum_{j\geq 1} |a_j|^2\right) \cdot \left(\sum_{j\geq 1} j^2 |a_j|^2\right) \tag{53}$$
成立的的最佳常数 C.

Problem 49. 给定实内积空间或复内积空间上的范数. 证明: 该范数诱导内积, 当且仅当平行四边形法则.

Problem 50. 找一个内积空间及其线性真子空间 $U \subsetneq V$, 使得某些 $x \in V \setminus U$ 不存在 U 上的最近投影.

Problem 51. 给定 $[0,1]$ 区间上实多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 的线性无关组 $\{1, x^1, x^2, x^3 \ldots\}$, 请对以下三种内积分别进行 Gram-Schmidt 正交化过程:
$$(f,g) := \int_{-1}^{1} fg \mathrm{d}x, \quad [f,g] := \int_{-1}^{1} \frac{fg}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x, \quad \langle f,g\rangle := \int_0^\infty fge^{-x}\mathrm{d}x. \tag{54}$$
其结果分别是 Legendre 多项式, Chebyshev 多项式, 以及 Laguerre 多项式.

Problem 52. 说明完备的内积空间既不可能是可数维线性空间, 更不可能是可数集.

Problem 53. 若实或复线性空间 V 有一组基, 请请定义一种 V 上的一种内积. 你能给 $\mathbb{R}$ 上全体连续实值函数定义一个内积吗?

Problem 54. 称有限维实或复线性空间 V 上的两个范数 $\|-\|_a$ 与 $\|-\|_b$ 等价, 当且仅当 $\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \in (0, +\infty)$. 请证明这是一个等价关系, 并说明任意两种范数等价.

Problem 55. 给定实或复矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$, 请证明最大奇异值 $\sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$ 是范数. 并说明矩阵空间上任何范数与最大奇异值范数等价.

Problem 56. 给定闭区间上的连续实值多项式空间 $V := \mathbb{R}[x]$, 以及二元运算
$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad f, g \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}\,t. \tag{55}$$
此处 w 在开区间 $(-1,1)$ 上连续. 请证明: 以上双线性型是内积, 当且仅当 $w \geq 0$ 且瑕积分 $\int_{-1}^{1} w(t)\,\mathrm{d}\,t$ 存在.

Problem 57. 给定正数数列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 与 $c \geq 1$, 证明阶方阵 $b_{i,j} := (a_i + a_j)^{-c}$ 是正定的.

Problem 58. 依照 Fourier 变换 (或常微分方程等任意方法) 证明

$$\sqrt{|x+y|} - \sqrt{|x-y|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin xt \sin yt}{t\sqrt{t}} \,\mathrm{d}\, t. \tag{56}$$

对相应的内积构造 Gram 矩阵, 证明不等式

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \sqrt{|x_i + x_j|} \geq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sqrt{|x_i - x_j|}. \tag{57}$$

Problem 59. 请按照以下提示证明数学分析中一类积分不等式问题: 若平方可积的连续函数 f 满足

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x) \,\mathrm{d}\, x = 1 \quad (1 \leq k \leq n), \tag{58}$$

试求下确界

$$\inf \int_0^\infty f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x. \tag{59}$$

1. 选定内积空间为 $[0, +\infty)$ 上平方可积的连续函数, 内积为 $(f, g) := \int_0^\infty f(x) g(x) \,\mathrm{d}\, x$.

2. 取 $f(x)$ 为题干所述, $g(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-kx}$, 采用平方积分的 Cauchy 不等式.

3. 移项, 整理得形如 $\int_0^\infty f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x \geq \frac{a^T A a}{a^T B a}$ 的式子, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 为列向量, A 与 B 是相应的矩阵.

4. 求出二次型的最小值, 考虑取等条件.

Problem 60. 定义正项数列 $\{u_i\}_{i=1}^n$ 与 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 的极大-极小值如下:

$$K_{\min}(u, v) := \sum_{i=1}^n \min(u_i, v_i), \quad K_{\max}(u, v) := \sum_{i=1}^n \max(u_i, v_i). \tag{60}$$

证明, 对点列 $\{\vec{x}^k\}_{k=1}^N \subset (\mathbb{R}_+)^n$,

1. n 阶方阵 $a_{i,j} := K_{\min}(\vec{x}^i, \vec{x}^j)$ 是半定的, 且依概率 1 正定;

2. n 阶方阵 $b_{i,j} := 1/(K_{\max}(\vec{x}^i, \vec{x}^j))$ 是半定的, 且依概率 1 正定;

3. 以上两个矩阵的 Hadamard 积是半定的, 且依概率 1 正定.

Problem 61. 给定阶数相同的实矩阵矩阵 A 与 B. 证明 $AB = O$ 的充要条件是

$$\det(I_n - xA) \cdot \det(I_n - yB) = \det(I_n - xA - yB) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}). \tag{61}$$

由此, 对均值为 0 的 $\mathbb{R}^n$-正态分布 X, 随机变量 $X^T A X$ 与 $X^T B X$ 独立的充要条件是 $AB = O$.

Problem 62. 是否存在一种形如 $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) w(x) \,\mathrm{d}\, x$ 的实多项式空间中的内积, 使得 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ 经标准正交化后的结果是 $\{1, x + f_0(x), x^2 + f_1(x), x^3 + f_2(x), \ldots\}$, 此处 f_k 是次数不超过 k 的多项式.

Problem 63. 判断以下关于实内积空间 $(V, (-,-))$ 的正误. 注意: 承认延拓公理与否并不影响结果.

1. 存在 V 到 V^* 的单射;

2. $f \in V^*$ 一定形如 $(v, -)$;

3. 对子集 $S_1, S_2 \subset V$, 总有 $(S_1 \cup S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$;

4. 对子空间 $V_1, V_2 \subset V$, 总有 $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$;

5. 对子集 $S \subset V$, 总有 $(S^\perp)^\perp = \mathrm{span}(S)$;

6. 对子集 $S \subset V$, 总有 $S^\perp = ((S^\perp)^\perp)^\perp$;

7. 若子空间 $U \subset V$ 满足 $(U^\perp)^\perp = U$, 则有内直和 $U^\perp \oplus U = V$.

Problem 64. 假设 $(V, (-,-))$ 是实内积空间. 任取单位向量 $v_0 \in V$, 定义反射

$$R : V \to V,\ x \mapsto x - 2(x, v_0)v_0. \tag{62}$$

今取等距自同构 $A : V \to V$, 满足 $(Au, Av) = (u, v)$. 请证明: 若 V 是有限维的, 则 1 是 A 或 RA 的特征值. V 无限维时情况如何?

Problem 65. 给定有限维非零内积空间 V 及其有限个非零线性真子空间 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 证明 $V \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ 包含一组正交基 (大小为 $\dim V$). 同时对 Hilbert 空间的完备正交基做类似的证明.

Problem 66. 以下取复矩阵 A, 正规即 $AA^* = A^*A$. 试证明以下条件均与正规等价.

1. $[A, [A, A^*]] = O$, 此处 $[P, Q] := PQ - QP$ 是通常意义下的 Lie 括号.

2. A 的奇异值恰是特征值的绝对值.

3. $\mathrm{tr}(A^2 A^{*\,2}) = \mathrm{tr}((AA^*)^2)$. 注: 将 $(-)^2$ 换成 $(-)^k$ $(k = 3, 4, \ldots)$, 均是等价条件.

4. 有唯一分解 $A = A_1 + iA_2$, 其中 A_1 与 A_2 是自伴 (即 Hermite) 的, 且 $[A_1, A_2] = O$.

Problem 67. 考虑通常的复内积空间 $V = \mathbb{C}^n$.

1. 证明, 对线性自同态 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 存在自同态 $\mathcal{U}$ 与唯一的 $\mathcal{S}$ 使得 $\varphi = \mathcal{U}\mathcal{S}$. 此处
   - $\mathcal{U}$ 是酉的 (或等距的), 即, $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$ 对一切 $x, y \in V$ 成立;
   - $\mathcal{S}$ 是正定 Hermite 的, 即, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ 且 $(\mathcal{S}x, x) \geq 0$ $(\forall x \in V)$.

2. 证明, $\mathcal{U}$ 均是 $\mathcal{S}$ 唯一的, 当且仅当 φ 可逆.

3. 证明 φ 是正规算子 $(\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi)$ 当且仅当 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{U}$ 交换.

4. 定义 $\Delta(\mathcal{U}\mathcal{S}) := \sqrt{\mathcal{S}}\,\mathcal{U}\sqrt{\mathcal{S}}$, 此处 $\sqrt{S}$ 半正定 Hermite 算子的唯一半正定平方根 (记作 $\sqrt{\mathcal{S}}^2 = \mathcal{S}$). 今取 $x, y \in V$, 并定义线性变换
$$(x \otimes y) : V \to V, \quad v \mapsto (x, v) \cdot y. \tag{63}$$
请求解 $\Delta(x \otimes y)$, 并证明 $\Delta(\Delta(x \otimes y)) = \Delta(x \otimes y)$.

Problem 68. 给定矩阵全体 $\mathbb{C}^{n\times n}$, 试探讨以下关于 Cayley 变换的问题.

1. 自伴矩阵一一对应 (双射) 于不以 -1 为特征值的酉矩阵, 对应方式为 $\varphi : A \mapsto (I - iA)(I + iA)^{-1}$. 请写出其逆变换.

2. 自伴矩阵满对应 (满射) 于酉矩阵, 对应方式为 $\psi : A \mapsto \exp(iA)$. 请写出其逆变换 (也就是原像, 或称作多值函数).

3. 鉴于以上探讨的均是可对角化矩阵 (对应复半单线性算子), 我们只需追踪矩阵的谱. 请分别将以上两题中的自伴矩阵换作复数域, 用通俗的语言描述复函数 $\varphi, \varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. 注: 请特别留意实轴的像.

4. 已知实正交矩阵是酉矩阵. 试问: 前两题中实正交矩阵的原像分别是什么?

5. 试考虑转换 $\sqrt{-1} \mapsto J := \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$, 则 1. 也有如下等价表述: 变换 $X \mapsto (I+X)\cdot(I-X)^{-1}$ 将 $\mathrm{Sp}(2n)$ 中特征值不为 1 的矩阵一一对应至 Hamilton 矩阵全体 $H(2n)$. 此处:

   - 辛矩阵 $\mathrm{Sp}(2n) := \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid A^T JA = J\}$ (特别地, $\det(A) = 1$),
   - Hamilton 矩阵 $\mathrm{H}(2n) := \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid A^T J + JA = O\}$ (特别地, JA 是对称矩阵).

Problem 69. 称有限维实线性空间上 V 的双线性型 B 是反对称的, 当且仅当 $B[u, v] + B[v, u] = 0$ 恒成立. 试探讨以下问题.

1. 请证明 B 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} O & I & O \\ -I & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$, 换言之, 任何反对称矩阵均合同于此类矩阵.

2. 请设计一个算法, 将 V 的一组基依次转化作 $\{e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k, u_1, \dots u_s\}$, 其中 $B[e_i, f_j] = \delta_{i,j}$, 以及 $B[e_i, u_j] = B[f_i, u_j] = B[u_i, u_j] = 0$.

   - 注意: 算法 (伪代码) 的输入是基 $S := \{v_1, \dots, v_{n=\dim V}\}$, 输出是基 $\widetilde{S} := \{\widetilde{v_1}, \dots, \widetilde{v_n}\}$, 使得 $\widetilde{S}$ 中元素 (经过重排) 形如 $\{e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_k, u_1, \dots u_s\}$ 且满足题设条件. 此处 $2k + s = n = \dim V$, 参数 (k, s) 由双线性型的秩决定 $(r = 2k)$.

3. 构造或证伪: 若 $n = \dim V \geq 4$, 则存在列向量 $(v_3, \dots, v_n)$, 使得 $B[u, v] = \det(u, v, v_3, \dots, v_n)$.

4. 若 B 非退化. 对任意线性子空间 $U \subset V$ 定义 $U^B := \{v \in V : B[v, -] \in \mathrm{ann}(U)\}$. 证明 $(U^B)^B = U$.

5. 若 B 非退化. 证明: 限制在子空间上的双线性型 $(U, B|_{U\times U})$ 是非退化的, 当且仅当 $V = U \oplus U^B$.

6. 若 B 非退化. 称子空间 U 是 Lagrange 的, 若 $U^B = U$.

7. 请举例的非退化子空间与 Lagrange 子空间.

8. 若 B 非退化. 试证明: 若子空间 U 满足 $U^B \subset U$, 且子空间 W 是 Lagrange 子空间, 则 $\frac{(U^B+W)\cap U}{U^B}$ 是 $\frac{U}{U^B}$ 的 Lagrange 子空间. 注意: 此处需先说明 B 能视作 U/U^B 上的非退化反对称双线性型 (通过商空间的泛性质说明其良定义).

Problem 70. 考虑两组非退化有限维反双线性型 (V_1, B_1) 与 (V_2, B_2). 称线性同构 $\varphi : (V_1, B_1) \to (V_2, B_2)$ 是辛同构, 当且仅当 $B_2[\varphi(u), \varphi(v)] = B_1[u, v]$ 恒成立. 简而言之, B_2 关于线性映射 φ 的拉回是 B_1.

今给定非退化反对称双线性型 $(\mathbb{R}^{2n}, B[-, -])$, 将向量记作 $(u, v) \in \mathbb{R}^{2n}$, 定义

$$B : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad ((u, f), (v, g)) \mapsto g^T u - f^T v. \tag{64}$$

请证明以下是辛自同态, 且任意辛自同态形如以下三者之复合:

1. $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad (u, v) \mapsto (-v, u)$;

2. $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad (u, v) \mapsto (u, Su + v)$, 此处 S 是实对称的;

3. $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \quad (u, v) \mapsto (A^{-1}u, A^T v)$, 此处 A 是可逆的.

最后由群同态基本定理, 证明 $\mathbb{R}^{2n}$ 上全体非退化反对称双线性型同构于商群 $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2n)$.

6 张量积

Problem 71. 使用张量的内蕴构造, 或是课堂定义在延拓公理下的转化, 有结论: $u \otimes v = 0$ 当且仅当 $u = 0$ 或 $v = 0$. 例如, 在承认命题 $\exists f \in U^*, (f(u) \neq 0)$ 时证明容易. 以此为引理, 证明 $\sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i = 0$ 且 $\operatorname{rank}(\{v_i\}_{i=1}^n) = n$ 时, 所有 u_i 为零.

Problem 72. 说明以下论断的错误之处. 考虑 3 维 k 线性空间 $U = k^3$, 我们知道张量积 $U \otimes_k U$ 由商关系 $U \otimes_k U := (U \times U)/\sim$ 构造得到. 由于商空间的维数小于原空间的维数, 遂有矛盾

$$9 = \dim(U \otimes_k U) < \dim(U \times U) = 6. \tag{65}$$

Problem 73. 以下 V 为 n-维线性空间.

1. 证明双线性映射
$$V^* \times V \to k, \quad (f, v) \mapsto f(v) \tag{66}$$
非退化. 记诱导的线性映射为 $\varphi : V^* \otimes V \to k$.

2. 记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 V 的基, $\{f_i\}_{i=1}^n \subset V$ 为对偶基 $(f_i(e_j) = \delta_{i,j})$. 试构造同构
$$\psi : (V^* \otimes V)^* \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V. \tag{67}$$
若 $x \in (V^* \otimes V)^*$ 由 $\{f_i \otimes e_j \mapsto c_{i,j}\}_{1 \leq i, \leq j}$ 决定, 请描述 $\psi(x)$.

3. 记 $\mathscr{A} \in \operatorname{Hom}_k(V, V)$ 为线性自同态. 证明, 复合映射
$$k \xrightarrow{\varphi^*} (V^* \otimes V)^* \xrightarrow{\text{(b)}} V^* \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_{V^*} \otimes \mathscr{A}} V^* \otimes V \xrightarrow{\varphi} k \tag{68}$$
恰为纯量乘积映射 $\mathrm{id}_k \cdot \operatorname{tr}(\mathscr{A})$.

Problem 74. 证明 $\mathrm{id}_U \otimes -$ 保持单射和满射, 即,

1. 若 $i : V \to W$ 是线性单射, 则 $\mathrm{id}_U \otimes i : U \otimes V \to U \otimes W$ 也是线性单射;

2. 若 $p : V \to W$ 是线性单射, 则 $\mathrm{id}_U \otimes p : U \otimes V \to U \otimes W$ 也是线性单射.

Problem 75. 证明线性方程组零解维数不随域扩张改变.

Problem 76. 证明线性方程组零解维数不随域扩张改变.

Problem 77. 使用初等因子法证明矩阵相似与否与扩域无关.

Problem 78. 构造 k 的有限扩域使得线性自同态 $\varphi : k^n \to k^n$ 有 Jordan 标准型, 并以此刻画有理标准型.

Problem 79. 给定有限维 k-线性自同态 $\mathscr{A}$, 则存在唯一的分解 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_D + \mathscr{A}_N$, 使得

1. 若 $\mathscr{A}_D$ 存在两个不变子空间 $U_1 \subsetneq U_2$, 则存在不变子空间 V 使得 $U_2 = U_1 \oplus V$;

2. $\mathscr{A}_N$ 是幂零算子;

3. $[\mathscr{A}_D, \mathscr{A}_N] = \mathscr{O}$, 即, $\mathscr{A}_D$ 与 $\mathscr{A}_N$ 交换.

Problem 80. 给定 k 上的方阵 $A \in k^{m \times m}$ 与 $B^{n \times n}$ (阶数不必相等).

1. 证明:
$$\varphi : k^{m\times n} \to k^{m\times n}, \quad X \mapsto AX - XB \tag{69}$$
是单射 (等价地, 是同构; 再等价地, 是满射) 当且仅当 A 与 B 的特征多项式没有重因式.

2. 若 φ 不是同构, 请依照特征多项式计算零空间维数.

3. 若 φ 是同构, 请依照像的相抵分解 (低秩逼近) 写出 $AX - XB = C$ 的解.

Problem 81. 对任意域, 线性变换 $k^{n\times n} \to k^{n\times n}, \quad X \mapsto AX - XA^T$ 的零空间维度至少为多少? 描述取得最小值的充要条件.

Problem 82. 证明: 记 A 的所有可交换矩阵构成线性空间 C_A, 则与 C_A 中所有可交换的矩阵一定是 A 的多项式.

Problem 83. 证明: 对特征值为正实数的复矩阵 A 与 B, 总有 $A = B$ 当且仅当 $A^k = B^k$ (存在 $k \geq 1$). 以此定义此类矩阵的任意实数次方.

Problem 84. 称实矩阵是 "好的", 当且仅当其满足 $|a_{i,i}| > 2 \cdot \sum_{j\neq i} |a_{j,i}|$. 试证明, 对任意 "好的" 矩阵 A 与 B, 则 $A = B$ 当且仅当 $A^3 = B^3$. 实际上, 本题中所有矩阵的非对角部分可以是复数.

Problem 85. 证明多项式的友矩阵通过某对称矩阵与其转置相似, 并由此证明任意任意域上的方阵 A 通过对称矩阵与 A^T 相似.

Problem 86. 证明 $\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n\text{ 个}}$ 与 $\underbrace{B \oplus \cdots \oplus B}_{n\text{ 个}}$ 相似当且仅当 A 与 B 相似. 在特定域中, 将相似换做正交相似或是酉相似均可行.

Problem 87. 定义同阶数方阵的张量和 $A \boxplus B := A \otimes I + I \otimes B$. 证明

1. 依照幂级数的收敛性定义 $\exp(X)$. 证明 $\exp(A \boxplus B) = \exp(A) \otimes \exp(B)$.

2. 依照幂级数的收敛性定义 $\sin(X)$ 与 $\cos(X)$. 给出类似的和差化积以及积化和差公式.

Problem 88. 找出任意域上的两个非方阵, 使得 $A \otimes B$ 与 $B \otimes A$ 是不相似的方阵.

Problem 89. 使用 A 与 B 特征多项式的结式 (resultant) 描述 $\det(xI - A \otimes B)$.

Problem 90. 给定 $X \in k^{(mn)^2}$. 若对任意 $A \in k^{n\times n}$ 总有 $[A \otimes I_m, O]$, 则存在 $B \in k^{m\times m}$ 使得 $X = I_n \otimes B$.

Problem 91. 我们知道, 简单图对应一个主对角为零的对称 $\{0,1\}$-矩阵. 试问: 两个图的 $\oplus$ (外直和), $\boxplus$ (张量和) 与 $\otimes$ (张量积) 运算分别对应什么?

7 张量的秩

Problem 92. 定义 $x \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ 的秩为 x 能写作简单张量和的最小数量. 自然可定义 $\operatorname{rank}(0) = 0$. 对证明以下对 $n = 2$ 成立的事实.

1. 若 $i : W \hookrightarrow V$ 是子空间, 则不妨设 $\mathrm{id}_U \otimes i : U \otimes W \hookrightarrow U \otimes V$ 为子集子空间. 对任意给定的 $x \in U \otimes W \subset U \otimes V$, 写作 $x = \sum_{i=1}^{s} u_i \otimes v_i$. 若 $\{u_i\}_{i=1}^{s}$ 是线性无关组, 则 $\operatorname{span}(v_i) \subset W$.

2. 假定 $x \in U \otimes V$ 的秩为 r, 则对任意 $x = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$, 线性空间 $\operatorname{span}(\{u_i\}_{i=1}^{r})$ 的维数是 r. 该空间与简单张量和的选取方式无关 (但凡数量为 r).

3. 假定 $x \in U \otimes V$, 则 $\operatorname{rank}(x)$ 在域扩张下不变.

Problem 93. 假定 $\dim U = m$ 以及 $\dim V = n$. 今任取 $x \in U \otimes V$, 求 $\operatorname{rank}(x)$ 的所有可能取值.

Problem 94. 假定 V 有一组基 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, 考虑 $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\ 个 V}$, 求 $\sum_{i=1}^{r} e_i \otimes e_i \otimes \cdots \otimes e_i$ 的秩.

Problem 95. 以下事实对任意阶张量均成立.

1. $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(\lambda x)$, 此处 $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

2. $\operatorname{rank}(x + y) \leq \operatorname{rank}(x) + \operatorname{rank}(y)$, 并给一个不取等的例子. 可以选取 $x = y$ 为复张量

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{70}$$

3. $\operatorname{rank}(x)$ 在域扩张下不会增加, 并给一个减少的例子. 可以考虑如下张量关于扩域 $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 的秩

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{71}$$

Problem 96. 求以下 $(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3}$ 中张量的秩,

$$\sum_{\mathrm{cyc}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t \sum_{\mathrm{cyc}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^{\otimes 3}, \tag{72}$$

并证明 $(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3}$ 中秩为 2 的张量不能由有限个多项式的零点集决定.

Problem 97. 证明在通常拓扑下, $(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3}$ 中秩为 2 的张量全体包含一个开集, 秩为 3 的张量全体亦然.

Problem 98. 称 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ 上两个张量 τ_1 与 τ_2 是等价的, 当且仅当存在三个 $\mathbb{C}^2$ 的同构使得 $(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3)(\tau_1) = \tau_2$. 这自然是一个等价关系. 请求等价类数量以及代表元, 并证明 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ 中秩不为 2 的张量全体被某个没有内点的闭集 (某些多项式的零点集) 覆盖.

Problem 99. 以下问题将联系张量积于计算复杂度.

1. 证明 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$-线性空间, 并写出 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.

2. 证明以下映射良定义

$$\Phi : V \otimes U^* \to \operatorname{Hom}_k(U, V), \quad v \otimes f \mapsto [u \mapsto v \cdot f(u)]. \tag{73}$$

3. 证明 Φ 是同构若 U 或 V 是有限维的, 并依此同构证明下述同构 $\theta : V^* \otimes_k U^* \cong (V \otimes_k U)^*$, 并简要描述简单张量 $f \otimes g$ 在 θ 下的像.

4. 已知乘积运算 $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是非退化对称 $\mathbb{R}$-双线性型. 请说明该乘积运算何以视作 $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 中的元素? 特别地, 该 3-张量空间同构于 $\mathbb{C}^{\otimes_{\mathbb{R}} 3}$.

5. 计算乘积运算 (视作上述 3-张量) 的秩 r. 证明: 任何计算 $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的通用算法将不可避免地计算 r 次实数乘法.

Problem 100. 已知 $k^{p\times q} \times k^{q \times r} \to k^{p \times r}$ 中的一般乘法至少需要 $C(p,q,r)$ 次 k 中的乘法运算. 求张量的

$$\sum_{1\le i\le p,\, 1\le j\le q,\, 1\le k\le r} E_{i,j} \otimes E_{j,k} \otimes E_{i,k} \in k^{p\times q} \otimes k^{q\times r} \otimes k^{p \times r} \tag{74}$$

的秩. 特别地, $C(2,2,2) = 7$.