Ex 1. 直接写出以下矩阵的行列式, 或简要说明其行列式的求解方式.

> $\lambda \in \mathbb{F}$ 是给定的常数, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是矩阵.

1. 置换矩阵.

   > 答: $(-1)^{\text{逆序数}}$.

2. 初等变换矩阵 $D_i^\lambda, T_{j,i}^\lambda$, 以及 $S_{i,j}$.

   > 答: $\det D_i^\lambda = \lambda$, $\det T_{j,i}^\lambda = 1$, 以及 $\det S_{i,j} = -1$.

3. 若 A 是对角矩阵, 求 $\det A$.

   > 答: 对角元乘积.

4. 若 A 是上三角矩阵, 求 $\det A$.

   > 答: 对角元乘积.

5. 若 $A = \begin{pmatrix} X & O \\ Y & Z \end{pmatrix}$, 其中 X 与 Z 是方阵, 求 $\det A$.

   > 答: $\det A = \det X \cdot \det Z$.

6. A^{-1} (若存在) 的行列式.

   > 答: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

7. 方阵乘积的行列式.

   > 答: $\det AB = \det A \cdot \det B$.

8. 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 求 $\det A$.

   > 答: 0.

9. λA 的行列式 (用 $\det A$ 表示).

   > 答: $\lambda^{\text{矩阵阶数}} \cdot \det A$.

10. A^T 的行列式 (用 $\det A$ 表示).

    > 答: $\det A^T = \det A$.

11. 将 A 顺时针旋转 $\pi/2$ 后的行列式 (用 $\det A$ 表示).

    > 答: 顺时针旋转 $\pi/2$ 后取转置, 无非对换第 i 行与第 $n-i$ 行 (取遍 $1 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor$). 符号 $(-1)^{n(n-1)/2}$.

12. f 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 求 $\det(f(A))$.

    > 答: 没什么确切的答案. 错误答案: $f(\det A)$.

13. 求 $\det e^A$.

    > 答: (为定义 e^A, 需默认数域). 依照 $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, 可以猜到答案是 $e^{\operatorname{tr}(A)}$. 严格的证明步骤如下:
    >
    > 1. 在 $\mathbb{C}$ 上使用 Jordan 标准型 $A = P^{-1}JP$. 依照 e 的级数定义得
    >
    > $$e^{P^{-1}JP} = P^{-1}e^J P \tag{1}$$
    >
    > 2. 由于 J 是上三角矩阵, 故 e^J 上三角, 且 e^J 在 (i,i) 处分量是 J 在 (i,i) 处分量的指数. 因此 $\det e^J = e^{\operatorname{tr}(J)}$. 从而 $\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

3. 依照定义, tr 与 $\det$ 不依赖域的选取. 式 $\det e^A = e^{\mathrm{tr}(A)}$ 在 $\mathbb{F}$ 上成立, 当且仅当在 $\mathbb{C}$ 上成立.

Ex 2. 试比较以下.

1. 举出 $\det(A-B)=0$ 但 $\det(A^2-B^2)=1$ 的例子.

> 答: 例如 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

2. 举出 $\det(A-B)=1$ 但 $\det(A^2-B^2)=0$ 的例子.

> 答: 例如 $A=(1/2)$ 与 $B=(-1/2)$.

3. 假设 $AB=BA$, 则 $\det(A^2-B^2)=\det(A-B)\det(A+B)$.

> 答: 交换性条件保证了 $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

记 $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, 其中 $A,B,C,D\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. 记 $N=DA-CB$.

> 此处的 $\mathbb{R}$ 可以换做一般的域.

1. 举出 $\det M=0$ 但 $\det N\neq 0$ 的例子.

> 答: 找出 $A=C$, $B=D$, 以及 $DA-AD$ 可逆的例子即可.
>
> 例如, 考虑 $A=C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 与 $B=D=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. 由 $r(M)=2$ 知 $\det M=0$. 另一方面, $N=DA-AD=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 可逆. 这一构造对任意域也是成立的, 因为 -1 一定是域的可逆元.

2. 举出 $\det M\neq 0$ 但 $\det N=0$ 的例子.

> 答: 依照下一问的提示, 每对相邻的 2×2 方块乘法不可交换. 简单试验得
>
> $$M=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{2}$$
>
> 经初等变换, M 可以变作置换矩阵, 从而 $\det M\neq 0$. 计算知 $\det N=0$. 这一构造对任意域也是成立的.

3. 假设 $AB=BA$, 则 $\det M=\det N$. 对称的命题略.

> 答: 以下的说理方式在一般域上可行, 但需要一些多项式, 扩域方面的知识储备. 我们仅考虑 $A,B,C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F}$ 是数域).
>
> 若 $AB=BA$, 则有以下分块矩阵的恒等式
>
> $$\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}O&B\\I&-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B&O\\D&CB-DA\end{pmatrix}. \tag{3}$$
>
> 因此 $\det M\cdot\det B\cdot(-1)^{n^2}=\det B\cdot\det(CB-DA)$. 依照 $\det(CB-DA)=(-1)^n\det(DA-CB)$, 得
>
> $$\det B\cdot(\det M-\det(DA-CB))=0. \tag{4}$$
>
> 对任意 $x\in\mathbb{F}$, 记 $B^{(x)}:=B+xI$, 以及 $M^{(x)}:=\begin{pmatrix}A&B^{(x)}\\C&D\end{pmatrix}$. 此时仍有 $AB^{(x)}=B^{(x)}A$. 遂有
>
> $$\det B^{(x)}\cdot(\det M^{(x)}-\det(DA-CB^{(x)}))=0. \tag{5}$$
>
> 试回顾这一个事实: 若数域上的两个多项式满足 $f\cdot g=0$, 则 $f=0$ 或 $g=0$. 若将数域换成一般域, 需要做一些细微调整.
>
> 依照行列式的展开式 (或考虑特征值), 当 x 足够大时 $\det B^{(x)}\neq 0$. 这说明
>
> $$\det M^{(x)}-\det(DA-CB^{(x)}) \tag{6}$$
>
> 是恒零的多项式. 取 $x=0$, 得证.

4. 计算 $\det\begin{pmatrix}I&B\\C&D\end{pmatrix}$.

答: 使用上一问的结论, 得 $\det(D-CB)$.

Ex 3. 使用矩阵初等变换, 证明对任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 总有

$$\lambda^n \cdot \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \cdot \det(\lambda I_n - BA). \tag{7}$$

答: 对 $\lambda \neq 0$, 考虑列初等变换

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} \overset{\text{行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda I_m & \lambda A \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix} \overset{\text{列变换}}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda I_m & O \\ B & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}. \tag{8}$$

从而

$$\lambda^n \cdot \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \cdot \det(\lambda I_n - BA). \tag{9}$$

推广: 对方阵 A, B 与 C (未必可逆), 总有 $\det(A + B + ACB) = \det(A + B + BCA)$.

答: 类似 Ex2-3 的证明. 选定数域, 取 $A^{(x)} := A + xI$ 以及 $B^{(x)} := B + xI$. 对足够大的 x, $A^{(x)}$ 与 $B^{(x)}$ 均是可逆的. 此时

$$\det(A^{(x)} + B^{(x)} + A^{(x)}CB^{(x)}) = \det A^{(x)} \cdot \det B^{(x)} \cdot \det((A^{(x)})^{-1} + (B^{(x)})^{-1} + C), \tag{10}$$

$$\det(A^{(x)} + B^{(x)} + B^{(x)}CA^{(x)}) = \det A^{(x)} \cdot \det B^{(x)} \cdot \det((A^{(x)})^{-1} + (B^{(x)})^{-1} + C). \tag{11}$$

因此 $\det(A^{(x)} + B^{(x)} + A^{(x)}CB^{(x)}) - \det(A^{(x)} + B^{(x)} + B^{(x)}CA^{(x)})$ 是恒零的多项式. 取 $x = 0$ 即可.

此题似乎用 Ex. 2-4 的结论就行了; 但 Ex. 2-4 本质上还是涉及了扰动法.

Ex 4. 求以下矩阵行列式

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_2 \\ & & & 1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

答: 此题过于简单了. 将最后一列提至第一列, 得上三角矩阵. 符号 $(-1)^{n-1} \cdot a_n$.

原题是求解特征多项式 $\det(xI - A)$.

$$\det(xI - A) = -(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1}) + x^n. \tag{13}$$

Ex 5. 以下是三对角矩阵的行列式问题.

> 注: 这是习题课的原题. 证明题的解答从略.

1. 求以下三对角矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}. \tag{14}$$

提示: 使用归纳法, 需讨论 $a^2 = 4bc$ 与否.

> 答: 记 D_n 是 n 阶此形式矩阵的行列式, 则有递推式
>
> $$D_1 = a, \quad D_2 = a^2 - bc, \quad D_{n+2} = aD_{n+1} - bcD_n. \tag{15}$$
>
> 今假定在合适的扩域下, $x^2 - ax + bc = 0$ 的两解是 x_1 与 x_2. 或简单地说, 假定矩阵在数域上, 则方程在 $\mathbb{C}$ 上的根是 x_1 与 x_2.
>
> 若 $a^2 \neq 4bc$, 则 $D_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}$.
> 若 $a^2 = 4bc$, 则 $D_n = (n+1) \cdot (a/2)^n$.

2. 原题有误, 现已删去. 应当是左侧行列式与右侧分子相同.

3. 证明

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_{n-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

> 特别注明: 可以采用此结论证明第一问. $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}^k$ 的计算方式是通常是对角化, 这也回到了高中所学的所谓特征根.

Ex 6. Vandermonde 矩阵的行列式.

1. 记 $V := (x_i^j) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 直接写出 $\det V$.

答: 这与通常的 Vandermonde 矩阵稍有不同, 行列式是 $x_1 \cdots x_n \cdot \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$.

2. 将 V 删去 k 行与 k 列, 得 V'. 求 $\det V'$.

答: 此方法可以用于求解 Vandermonde 矩阵的 Adj-矩阵, 从而求得其逆矩阵.

为表述方便, 我们假定将矩阵删去第 k 列 (所有 k-次幂) 与第 1 行, 并计算新矩阵的行列式.

在原矩阵中记 $t = x_1$ 与 $y_k = x_{k+1}$ $(1 \le k \le n-1)$, 则行列式为

$$(-1)^{n-1}(y_1 \cdots y_{n-1} \cdot t) \prod_{1\le i<j\le n-1}(y_j - y_i) \cdot \prod_{1\le l\le n-1}(t - y_l). \tag{17}$$

新矩阵的行列式即 t^k-项系数的 $(-1)^{k-1}$ 倍.

3. 将 V 的各项 (共 n^2 项) 加上 1, 求新矩阵的行列式.

答: 使用加边技巧 $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & \\ \alpha & A \end{pmatrix}$. 此处取 A 为新矩阵, $\alpha = \mathbf{1}$. 使用初等变换,

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & V \end{pmatrix}. \tag{18}$$

行列式关于第一行向量是线性的, 从而原式是两个 Vandermonde 行列式差.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & V \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \mathbf{1} & V \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & V \end{pmatrix}. \tag{19}$$

计算得

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i) \cdot \left(2\prod_{l=1}^{n} x_l - \prod_{l=1}^{n}(x_l - 1)\right). \tag{20}$$

4. 记 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是整数, 证明 $\prod_{1\le i<j\le n} \frac{x_i - x_j}{i-j}$ 是整数.

提示: 记 $\binom{n}{k} = C_n^k$ 为组合数. 假定所有 x_i 充分大, 考虑 $\det(\binom{x_i}{j})$.

答: $\{\binom{n}{k}\}_{k\ge 0}$ 作为 n 的多项式是线性无关组, 因此可以只看各组合数的最高次项. 使用 Vandermonde 行列式计算得

$$\det\left(\binom{x_i}{j}\right) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{x_i - x_j}{i-j}. \tag{21}$$

由于这是整数矩阵的行列式, 从而是整数.

Ex 7. 令 $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$. 对 $\det(PQ^T)$ 使用 Cauchy-Binet 公式, 并与直接计算行列式所得的结果比较, 得 Lagrange 恒等式 (请验证):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i c_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i d_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i d_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i c_i) + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}(a_{i_1}b_{i_2} - a_{i_2}b_{i_1})(c_{i_1}d_{i_2} - c_{i_2}d_{i_1}). \quad (22)$$

特别地, 对向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 证明

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}(a_{i_1}b_{i_2} - a_{i_2}b_{i_1})^2. \quad (23)$$

若 $n = 3$, 试求 $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$?

答: 一方面, Cauchy-Binet 公式给出

$$\det(PQ^T) = \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\det\begin{pmatrix} a_{i_1} & b_{i_1} \\ a_{i_2} & b_{i_2} \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} c_{i_1} & d_{i_1} \\ c_{i_2} & d_{i_2} \end{pmatrix}; \quad (24)$$

另一方面, 直接计算得

$$\det(PQ^T) = \sum_{i=1}^{n}(a_i c_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i d_i) - \sum_{i=1}^{n}(a_i d_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i c_i). \quad (25)$$

后略.

Ex 8. 取 $(a_i)_{i\geq 1}$ 是周期为 n 的 $\mathbb{F}$ 中的数列, 定义 $n\times n$ 矩阵的第 (i,j) 项为 a_{i+j-1}. 计算这一循环矩阵的行列式.

> 答: 不妨将矩阵翻转 (符号改变方式见 Ex.1-11), 记矩阵 A 的第 (i,j) 项为 $a_{n+1+i-j}$.
>
> 记 Ω 的 (i,j) 项是 $\omega^{(i-1)(j-1)}$, 其中 $\omega=e^{2\pi i/n}$ 是单位根. 记多项式
>
> $$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}. \tag{26}$$
>
> 将 A 左乘在 Ω 的第 k 列上, 相当于数乘 $f(\omega^{k-1})$. 因此
>
> $$\det A\cdot\det\Omega=\det(A\Omega)=f(1)f(\omega)\cdots f(\omega^{n-1})\cdot\det\Omega. \tag{27}$$
>
> 依照 Vandermonde 矩阵可逆, $\det\Omega\neq 0$. 从而 $\det A=\prod_{0\leq l\leq n-1}f(\omega^l)$.

Ex 9. 给定常数 $(c_1, \dots, c_n)$. 试计算 $(c_{\min(i,j)}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式.

> 答: $c_1 \cdot (c_2 - c_1) \cdot (c_3 - c_2) \cdots (c_n - c_{n-1})$.

Ex 10. 计算 Hilbert 矩阵的行列式. 关于 Hilbert 矩阵的定义, 以及此题答案可参考逆矩阵习题.

答: 答案见先前习题:

$$\det\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}=\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i+y_j)}. \tag{28}$$

Ex 11. 计算并总结以下行列式的通式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 & 0 \\ x^3 & hx^2 & hx & h & -1 \\ x^4 & hx^3 & hx^2 & hx & h \end{pmatrix}. \tag{29}$$

> 答: 直接归纳得 $(x+h)^4$.

Ex 12. 记分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 满足 $r(A) = r(A_1)$ 与 $r(B) = r(B_1)$. 此时

$$\det(A+B) \cdot \det(A_1) \cdot \det(B_4) = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ A_3 & B_4 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

答: 若将题设改作 $r(B) = r(B_4)$, 解答会清晰许多.

依题意, 存在矩阵 P, Q, R, S 使得

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1P \\ QA_1 & QA_1P \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} SB_4R & SB_4 \\ B_4R & B_4 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

此时

$$\begin{aligned} \det A_1B_4 \cdot \det(A+B) &= \det A_1B_4 \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 + SB_4R & A_1P + SB_4 \\ QA_1 + B_4R & QA_1P + B_4 \end{pmatrix} \\ &= \det A_1B_4 \cdot \det \begin{pmatrix} I & S \\ Q & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & A_1P \\ B_4R & B_4 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & SB_4 \\ QA_1 & B_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & A_1P \\ B_4R & B_4 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

原题的解答类似, 或将上述 $\{S, R\}$ 扰动作满秩矩阵.

Ex 13. (Ptolemy 定理) 给定矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, 记 $\Delta_{i,j} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$. 证明

$$\Delta_{1,2}\Delta_{3,4} + \Delta_{1,4}\Delta_{2,3} = \Delta_{1,3}\Delta_{2,4}. \tag{36}$$

答: 略.

Ex 14. 通常的正整数矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式. 其中 $a_{i,j} = \gcd(i,j)$ 是最小公倍数.

提示: 证明对任意整数都有 $m = \sum_{k|m} \phi(k)$. 其中 k 取遍 m 的所有因子, ϕ 是通常的 Euler totient 函数. 此时 $a_{i,j} = \sum_{k|i \text{ 且 } k|j} \phi(k)$. 这表明 $A = X^T \cdot D \cdot X$, 其中

- $D = \operatorname{diag}(\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n))$ 是对角矩阵,
- X 是 $\{0,1\}$-下三角矩阵, 其中 $X_{i,j} = 1$ 当且仅当 $j \mid i$.

> 答: 提示已经很详细了. 答案是 $\det D = \prod_{1\le i\le n} \phi(i)$.

Ex 15. (对任意域而言) 若 $A^T = -A$, 则 $\det A$ 是完全平方式. 这称作 Pfaffian.

- 特殊的 Pfaffian (来自 Cauchy 矩阵的基本性质): $\det\left(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right)_{n\times n} = \left(\prod_{i<j}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right)^2$.

答: 假定结论对 n-阶矩阵成立, 往证结论对 $n+2$ 阶反对称矩阵 A 成立. 可以对 A 做相同的行交换与列交换 (不改变行列式), 使得新矩阵的 $(n+1,n+2)$-项不为零. 因此不妨设 A 的 $(n+1,n+2)$-项不为零. 考虑分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ B^T & U \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

依照 Schur 补, $\det A = \det(A' - BU^{-1}B^T)\cdot \det U$. 结合归纳假设, $\det A$ 是完全平方式.

- 可以证明, 完全平方式 $\det A = p^2$ 中, p 是以 $\{a_{i,j}\}$ 为系数的. 将 p 写作 x 的有理函数, 需证明所有 x^{-k} -项系数为 0. 依照行列式的定义, $\det A$ 中不出现 x^{-k} 之类的项.

Ex 16. 记 a, b, c 是常数. 若矩阵 A 的严格下三角部分均为 a, 严格上三角部分均为 b, 对角线上均为 c. 求 $\det A$.

一般地, 记多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{n-1} x^{n-1}$, 考虑 n 阶 $\mathbb{C}$-方阵

$$M := \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ zc_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ zc_{n-2} & zc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ zc_2 & zc_3 & zc_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ zc_1 & zc_2 & zc_3 & \cdots & zc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

则 $\det M = \prod_{k=1}^{n} f(w_k)$, 其中 w_k 是 $w^n = z$ 的 n 个复根.

> 答: 见 Ex. 8.

Ex 17. 记 $(a_i)_{i=1}^n$ 与 $(b_i)_{i=1}^n$ 是给定的常数, 且 $a_ib_j \neq 1$. 记 $m_{i,j} = \frac{1-(a_ib_j)^n}{1-a_ib_j}$, 计算 $\det(m_{i,j})$.

答: 可以直接归纳计算, 或是使用如下技巧:

- 对任意 $t := a_ib_j$ 行列式是关于 t 的 $n-1$ 次多项式;

- 行列式以一切 $a_i - a_j$ 与 $b_i - b_j$ 为因子.

从而行列式只能是 $\prod_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ 的数乘倍. 检验 a_1b_1 的系数, 以上就是行列式的值.

注: 以上行列式是两个 Vandermonde 行列式的乘积, 的确可以使用矩阵乘积来计算 M. 此外, 计算 $m_{i,j} = (a_i + b_j)^n$ 的行列式时, 也会出现类似双 Vandermonde 行列式 (差一个数乘倍).

Ex 18. 假定域的特征不为 2. 证明: 对任意方阵 A, 总存在一个取值 $\{\pm 1\}$ 的对角矩阵 D 使得 $\det(A+D)\neq 0$.

> 答: 使用数学归纳. $n=1$ 显然; 假定 $n=k$ 成立, 下证 $n=k+1$ 成立. 任取 $k+1$-阶矩阵 M, 记分块矩阵
>
> $$M=\begin{pmatrix} A & v \\ u^T & \lambda \end{pmatrix}. \tag{39}$$
>
> 存在 D' 使得 $(D'+A)$ 可逆, 下证 $M+\begin{pmatrix} D' & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 或 $M+\begin{pmatrix} D' & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 可逆即可. 由于行列式关于最后一列线性, 故
>
> $$\det\left(M+\begin{pmatrix} D' & \\ & 1 \end{pmatrix}\right)-\det\left(M+\begin{pmatrix} D' & \\ & -1 \end{pmatrix}\right) \tag{40}$$
>
> $$=\det\begin{pmatrix} A+D' & v \\ u^T & \lambda+1 \end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} A+D' & v \\ u^T & \lambda-1 \end{pmatrix} \tag{41}$$
>
> $$=\det\begin{pmatrix} A+D' & v \\ & 2 \end{pmatrix} \quad \neq 0. \tag{42}$$