关系式,请读者自己给出.

3.3 习题与解答

1. 用 Gauss 消元法解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 6x_1+6x_2+5x_3+18x_4+20x_5=14, \\ 10x_1+9x_2+7x_3+24x_4+30x_5=18, \\ 12x_1+12x_2+13x_3+27x_4+35x_5=32, \\ 8x_1+6x_2+6x_3+15x_4+20x_5=16, \\ 4x_1+5x_2+4x_3+15x_4+15x_5=11. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1, \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3, \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=5. \end{cases}$

解 (1) 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -13 & 28 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故,方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=-2. \end{cases}$

(2) 因为

$$(A\ b) \xrightarrow[\substack{-r_1+r_4\to r_4 \\ -r_5+r_1\to r_1}]{\substack{-r_2+r_3\to r_3 \\ -r_4+r_2\to r_2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 9 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 15 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&1&-3&0&2\\0&3&0&12&10&0\\0&3&5&6&5&12\\0&1&0&6&5&1\\0&3&2&9&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&1&-3&0&2\\0&1&0&6&5&1\\0&0&0&-6&-5&-3\\0&0&5&-12&-10&9\\0&0&2&-9&-10&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&1&-3&0&2\\0&1&0&6&5&1\\0&0&1&6&10&5\\0&0&0&-3&-15&1\\0&0&0&0&25&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&-3&0&-2\\0&0&0&0&5&-1\end{bmatrix}$$

显然 $\det A\neq 0$,故原方程组有唯一解,$x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_2=-2$,$x_3=3$,$x_4=\dfrac{2}{3}$,$x_5=-\dfrac{1}{5}$.

注　当方程组的系数是较大的数字时,直接消元计算较繁,可先做一些初等行变换,再消元,以简化计算.

(3) 对增广矩阵$(A\ b)$做初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}2&7&3&1&5\\1&3&5&-2&3\\1&5&-9&8&1\\5&18&4&5&12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-2&3\\0&1&-7&5&-1\\0&2&-14&10&-2\\0&3&-21&15&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&-2&3\\0&1&-7&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因为 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)$,故 $Ax=b$ 有解,且

$$\dim W_A=4-\mathrm{r}(A)=2.$$

分别令

$$(x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}};(0,1)^{\mathrm{T}};(0,0)^{\mathrm{T}},$$

得 W_A 的基 η_1,η_2 及 $Ax=b$ 的一个特解 η_0:

$$\eta_1=(-26,7,1,0)^{\mathrm{T}};\quad \eta_2=(17,-5,0,1)^{\mathrm{T}};\quad \eta_0=(6,-1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

故全部解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-26\\7\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}17\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\quad 任\ c_1,c_2\in\mathbf{R}.$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因为 $r(A) \neq r(A, b)$,所以无解.

2. a, d 取什么值时,下面方程组有解,并求出它的解.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = d, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3. \end{cases}$$

解 为简化计算,先 $-r_1 + r_2 \to r_2$ 再 $r_1 \leftrightarrow r_3$ 后再消元.对方程组的增广矩阵做初等行变换

$$(A\ b) \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & d-a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-a-2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

由阶梯型矩阵的第 4 行显见,要方程组有解必须 $a=0$,代入第 2 行,知须 $d=2$.分别取

$$(x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = (1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(0,0,0),$$

得 W_A 的基 η_1, η_2, η_3 及非齐次方程组 $Ax=b$ 的一个特解 η_0:

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \eta_2 = (1, -2, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\eta_3 = (5, -6, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \eta_0 = (-2, 3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

则方程组的全部解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}} = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \eta_0,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任实数.

3. 对下列各矩阵,求 λ 的值,使矩阵秩最小.

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad (2)\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 对矩阵做初等行变换,有

(1)

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7\lambda & 17\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$$

所以 $\lambda=0$ 时，$\mathrm{r}(A)$最小，且 $\mathrm{r}(A)=2$（$\lambda\neq0$，$\mathrm{r}(A)=3$）.

(2)

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

故阶梯型矩阵的第2,3行成比例时，$\mathrm{r}(A)$最小，即 λ 满足方程 $\begin{cases} \lambda+2=5, \\ 1+2\lambda=10-\lambda. \end{cases}$

解之，得 $\lambda=3$（$\mathrm{r}(A)=2$）.

4. 证明：如果矩阵包含 m 行并且秩为 r，则它的任何 s 行组成一个秩不小于 $r+s-m$ 的矩阵.

证　记矩阵 A 的行向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，由已知秩$(A)=r$，不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为行向量组的极大线性无关组，于是 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 均可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表出. 任取 A 的 s 行，即使 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 全被取到，则它至少包含 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 中 $s-(m-r)$ 个向量，所以在 s 行中至少有 $s-(m-r)=r+s-m$ 个线性无关，所以其秩不小于 $r+s-m$.

5. 用行的初等变换把下列矩阵化为既约阶梯形并求矩阵的秩.

(1) $\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 25 & 21 & 37 & 75 & -42 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

解

(1) $\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

所以 $\mathrm{r}(A)=3$.

$$(2)\begin{bmatrix}24&19&36&72&-38\\25&21&37&75&-42\\73&59&98&219&-118\\47&36&71&141&-72\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}24&19&36&72&-38\\1&2&1&3&-4\\1&2&-10&3&-4\\-1&-2&-1&-3&4\end{bmatrix},$$

所以 $\mathrm{r}(A)=3$.

$$(3)\begin{bmatrix}1&0&1&0\\3&1&2&1\\1&2&-1&2\\-1&0&-1&0\\0&-1&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&2&-2&2\\0&0&0&0\\0&-1&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $\mathrm{r}(A)=2$.

6. 举出一个无解的线性方程组的例子,并化为阶梯形(要求3个变元以上).

解　利用第5题(3)构造线性方程组如下(即用第5题(3)中的矩阵去掉第4行做系数矩阵 A,再选 b,使 $Ax=b$ 无解)

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\3x_1+x_2+2x_3+x_4=2,\\x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\-x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

因为

$$(A,b)=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\3&1&2&1&2\\1&2&-1&2&1\\0&-1&1&-1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&1\\0&2&-2&2&0\\0&-1&1&-1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

显然 $\mathrm{r}(A,b)\neq\mathrm{r}(A)$,所以无解.

7. 研究下列方程组的相容性并求其通解和一个特解.

$$(1)\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7,\\9x_1+12x_2+3x_2+10x_4=13;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}2x_1+5x_2-8x_3=8,\\4x_1+3x_2-9x_3=9,\\2x_1+3x_2-5x_3=7,\\x_1+8x_2-7x_3=12.\end{cases}$$

解

(1)

$$(A\ b)\to\begin{bmatrix}3&4&1&2&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

分别令

$$(x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}};(0,1)^{\mathrm{T}};(0,0)^{\mathrm{T}},$$

则得 $Ax=0$ 的基础解系和 $Ax=b$ 的一个特解

$$\eta_1=\left(-\frac{4}{3},1,0,0\right)^{\mathrm{T}};\quad \eta_2=\left(-\frac{1}{3},0,1,0\right)^{\mathrm{T}};\quad \eta_0=\left(\frac{1}{3},0,0,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\eta_0,\qquad c_1,c_2\in\mathbf{R}.$$

(2)

$$(A,b)\xrightarrow[-5r_1+r_3]{\substack{-2r_1+r_2\to r_1\\-3r_1+r_2}}\begin{bmatrix}1&6&-3&-5&1\\0&-23&11&19&-1\\0&-23&11&19&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&6&-3&-5&1\\0&-23&11&19&-1\\0&0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

因为 $\mathrm{r}(A,b)\neq\mathrm{r}(A)$,所以无解.

(3)

$$(A,b)\xrightarrow[\substack{-r_3+r_4\\-2r_1+r_3}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\-2r_3+r_2}}\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\0&-3&1&-5\\0&-13&9&-17\\0&2&-3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[2r_2+r_4\to r_3]{\substack{-3r_2+2r_4+r_3\\r_4+r_2}}\begin{bmatrix}1&8&-7&12\\0&-1&-2&-4\\0&0&-7&-7\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以有唯一解 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$.

8. 求方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5,\\4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7,\\6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9,\\\lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11\end{cases}$$

依赖于参数 λ 的通解.

解

$$(A,b)\to\begin{bmatrix}2&-1&3&4&5\\0&0&-1&-2&-3\\\lambda-8&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

对任意 λ 有解.当 $\lambda\neq8$ 时

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm T}=c(0,-2,-2,1)^{\mathrm T}+(0,4,3,0)^{\mathrm T},\qquad c\in\mathbf R.$$

当 $\lambda=8$ 时

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\0\\3\\0\end{bmatrix},\qquad c_1,c_2\in\mathbf R.$$

9. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵,试证:$\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A)$.

证　方法1　首先证明 $A^{\mathrm T}Ax=0$ 与 $Ax=0$ 是同解方程组.显然,由 $Ax=0$,两边左乘 $A^{\mathrm T}$ 得 $A^{\mathrm T}Ax=0$,所以 $W_A\subseteq W_{A^{\mathrm T}A}$;又由 $A^{\mathrm T}Ax=0$,两边左乘 $x^{\mathrm T}$ 得 $x^{\mathrm T}A^{\mathrm T}Ax=(Ax)^{\mathrm T}Ax=0$,设 $Ax=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$,则由

$$(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=y_1^2+\cdots+y_n^2=0,\quad 知\ y_1=\cdots=y_n=0,$$

即 $Ax=0$,所以 $W_{A^{\mathrm T}A}\subseteq W_A$.故 $W_A=W_{A^{\mathrm T}A}$.又因为

$$\dim W_A=n-\mathrm r(A)=\dim W_{A^{\mathrm T}A}=n-\mathrm r(A^{\mathrm T}A),$$

所以

$$\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A).$$

方法2　设 $\mathrm r(A)=r$,则存在可逆阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$,于是有 $A^{\mathrm T}=Q^{\mathrm T}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{\mathrm T}$,则

$$\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r\left(Q^{\mathrm T}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{\mathrm T}P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\right)=\mathrm r\left(\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{\mathrm T}P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\right).$$

记 $P^{\mathrm T}P=\begin{pmatrix}P_{rr}&*\\ *&*\end{pmatrix}$,由2.4节第1题知 $|P_{rr}|>0$,故 $\mathrm r(P_{rr})=r$.所以有

$$\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r\left(\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{rr}&*\\ *&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\mathrm r\begin{pmatrix}P_{rr}&0\\0&0\end{pmatrix}=r.$$

10. 举出矩阵 A,B 的例子,分别使

(1) $\mathrm r(AB)<\min\{\mathrm r(A),\mathrm r(B)\}$,

(2) $\mathrm r(AB)=\min\{\mathrm r(A),\mathrm r(B)\}$.

解　(1) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,则 $\mathrm r(AB)=0$.

(2) $A=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,则 $\mathrm r(AB)=\mathrm r(B)$.

11.判断下列行向量组是否线性相关.

(1) (1,2,3),(4,8,12),(3,0,1),(4,5,8);

(2) (1,2,3,4,5,6),(1,0,1,0,1,0),(−1,1,1,−1,1,1),(−2,3,2,3,4,7);

(3) (1,2,3,4),(1,0,1,0),(−1,1,1,−1),(−2,3,2,3);

(4) (1,0,0,2,3,1),(0,1,0,4,6,2),(0,0,1,−2,−3,−1);

(5) (2,−3,1),(3,−1,5),(1,−4,3);

(6) (4,−5,2,6),(2,−2,1,3),(6,−3,3,9),(4,−1,5,6);

(7) (1,0,0,2,5),(0,1,0,3,4),(0,0,1,4,7),(2,3,4,11,12).

解　(1) 线性相关(因为 F^3 中 4 个向量必定线性相关).

(2) 为了简化计算,把已知向量组的排序改变一个(这不影响它们的线性相(无)关性).于是

$$A=(\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},\alpha_4^{\mathrm{T}},\alpha_1^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}1&-1&-2&1\\0&1&3&2\\1&1&2&3\\0&-1&3&4\\1&1&4&5\\0&1&7&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&1\\0&1&3&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

所以 $\mathrm{r_c}(A)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

(3) 线性相关(这是(2)中向量组的“截短”向量,由上题结果显然其前 4 个分量排成的矩阵列秩也为 3).

(4) 因为这三个向量的“截短”向量(只取前三个分量)是线性无关的,所以这三个向量也线性无关.

(5)

因为 $$\det\begin{bmatrix}2&3&1\\-3&-1&-4\\1&5&3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&-7&-5\\0&7&0\\1&5&3\end{bmatrix}=35\neq0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(6)

因为 $$\det\begin{bmatrix}4&2&6&4\\-5&-2&-3&-1\\2&1&3&5\\6&3&9&6\end{bmatrix}\xlongequal[-r_3+r_4]{-r_1+r_4}\det\begin{bmatrix}4&2&6&4\\-5&-2&-3&-1\\2&1&3&5\\0&0&0&-3\end{bmatrix}=0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关(因左上角三阶主子式为 0).

(7) 考虑各向量只取前 4 个分量的向量组,有

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 11\end{bmatrix} = 11 - 29 = -18 \neq 0$$

故"截短"的向量组线性无关,于是原向量组亦线性无关(**短无关,长亦无关**).

12. 对上题中每组向量,求出一个极大线性无关组.

解 (1) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 4\\ 2 & 8 & 0 & 5\\ 3 & 12 & 1 & 8\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -6 & -3\\ 0 & 0 & -8 & -4\end{bmatrix}$,

所以 α_1,α_3 为极大线性无关组;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;

(4) 自身;

(5) 自身;

(6) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

(7) 自身.

13. 求满足下列等式的行向量 x.

(1) $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4x=0$;其中

$\alpha_1=(5,-8,-1,2)$, $\alpha_2=(2,-1,4,-3)$, $\alpha_3=(-3,2,-5,4)$;

(2) $3(\alpha_1-x)+2(\alpha_2+x)=5(\alpha_3+x)$;其中

$\alpha_1=(2,5,1,3)$, $\alpha_2=(10,1,5,10)$, $\alpha_3=(4,1,-1,1)$.

解 (1) $x=-\frac{1}{4}(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=-\frac{1}{4}(0,-4,-8,8)=(0,1,2,-2)$.

(2) 由已知得 $3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3=6x$, 所以

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)\\&=\frac{1}{6}(6+20-20,15+2-5,3+10+5,9+20-5)\\&=(1,2,3,4).\end{aligned}$$

14. 证明向量组 S 的极大线性无关组可这样选取:先任取 S 中非 0 向量记为 α_1;次取 $\alpha_2\in S$ 使之非 α_1 的线性组合;再取 α_3,使之非 α_1,α_2 的线性组合;如此下去,直到取得了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,而不再能取得 α_{s+1} 非 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合,则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 即为 S 的极大线性无关组.

证 首先 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.否则,必存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$