请参考例题, 研究如下课堂遗留问题, 以及更多思考题. 以下假定 $\mathbb{F}$ 是任意给定的域, 此时我们无法轻易使用 Jordan 标准型等工具; **但依照定义, 相抵标准型依旧是可行的.**

例 求所有 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A^2 = O$.

证明 考虑相抵标准型 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$, 其中 $r = r(A)$, P 与 Q 可逆. 记 $QP = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

由 $O = A^2 = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}$ 可知

$$O = (P^{-1}AP)^2 = \begin{pmatrix} X_{11}^2 & X_{11}X_{12} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

由于 $r\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} = r$, 从而 $X_{11} = O$, 且 $X_{12} \in \mathbb{F}^{r\times(n-r)}$ 行满秩. **此处有 $r \le n - r$.**

继而考虑相抵标准型 $MX_{12}N = \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} M & O \\ O & N^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & X_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ O & N \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} O & MX_{12}N \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} M & O \\ O & N^{-1} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ O & N \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} M & O \\ O & N^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & X_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ O & N \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此存在可逆矩阵 $S = P \cdot \begin{pmatrix} M^{-1} & O \\ O & N \end{pmatrix}$, 使得 $S^{-1}AS$ 形如 $\begin{pmatrix} O & I_r & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

问题 若 $A^2 = A$, 证明, 存在可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}AS$ 形如 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

问题 若 $A^2 = I$, 证明, 存在可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}AS$ 形如 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & -I_s \end{pmatrix}$.

问题 若 $A^3 = A$, 证明, 存在可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}AS$ 形如 $\begin{pmatrix} I_r & O & O \\ O & -I_s & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

问题 若 $A^k = O$, 证明, 存在可逆矩阵 S 使得 $S^{-1}AS$ 是由 J_i 组成的分块对角矩阵, 且每一 J_i 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{未标注处取值均为 } 0).$$

且每一 J_i 的阶数不超过 k.