投影, 正交性, 最小平方法.

推荐教材 LADR 的第六章. 可以暂时跳过复内积空间相关内容.

Problem 1 以下是一些关于 $\mathbb{R}^n$ 中向量内积的小题. 任选两题完成, 其中一题需要是 3. 或 4..

- 依通常定义, 点乘 $\langle u, v\rangle = u^T \cdot v$ 关于两个输入都是线性的.
- 记 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

1. 给定 $\|u\| \leq 1$ 与 $\|v\| \leq 1$, 证明: $\sqrt{1-\|u\|^2} \cdot \sqrt{1-\|v\|^2} \leq 1 - \langle u, v\rangle$.
2. 证明: $\|u+v\| \cdot \|u-v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. 证明: $\langle u, v\rangle = 0$, 当且仅当 $\|u\| \leq \|u + c \cdot v\|$ 对一切 $c \in \mathbb{R}$ 成立.
4. 证明: 任意给定 $u \neq \mathbf{0}$, 则对一切 $\|v\| = 1$ 均有 $\|u - (\|u\|^{-1} \cdot u)\| \leq \|u - v\|$. 换言之, 球面上距 u 最近处恰是 u 的单位化向量.
5. 表述并证明高中所学的极化恒等式.
6. 表述并证明高中所学的平行四边形恒等式.

Problem 2 假定 $n \geq 1$. 称 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个投影矩阵, 当且仅当 $P^2 = P = P^T$.

- 题 2. 与 3. 在补空间意义下等同, 完成其中一题即可; 4. 与 5. 同理; 6. 与 7. 亦同理.

1. 若 P 是投影矩阵, 当且仅当存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}PQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.(如果不清楚正交矩阵, 此题可以略过.)
2. 证明: 投影矩阵和子空间双射对应, 具体的对应方式可以是列空间 $P \overset{1:1}{\longleftrightarrow} C(P)$.
3. 证明: 投影矩阵和子空间双射对应, 具体的对应方式可以是零空间 $P \overset{1:1}{\longleftrightarrow} N(P)$.
4. 任意给定 $v \neq \mathbf{0}$, 找到 P 使得 $C(P) = \mathrm{span}(v)$.
5. 任意给定 $v \neq \mathbf{0}$, 找到 P 使得 $N(P) = \mathrm{span}(v)$.
6. 给定 $\mathbb{R}^5$ 中的列向量 $S = \{(4,3,3,1,1),(6,2,2,2,1)\}$, 找到 $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ 使得 $C(P) = \mathrm{span}(S)$.
7. 给定 $\mathbb{R}^5$ 中的列向量 $S = \{(4,3,3,1,1),(6,2,2,2,1)\}$, 找到 $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ 使得 $N(P) = \mathrm{span}(S)$.

备注: 计算得 $\|(4,3,3,1,1)\| = 6$, 以及 $\|(6,2,2,2,1)\| = 7$.

Challenge 投影矩阵的和与积都不必是投影矩阵 (实际上, 任何不可逆方阵都是有限个投影矩阵的乘积). 能否优雅地定义投影矩阵间的二元运算 $\sqcap$ 与 $\sqcup$, 使得

$$C(P_1 \sqcup P_2) = C(P_1) + C(P_2), \quad C(P_1 \sqcap P_2) = C(P_1) \cap C(P_2).$$

Problem 3 计算示例 (最小平方法).

- 如果你想要一些简单的参考资料, 可以查看这篇笔记.
- 中英日名词对照: 最小平方法, Least Squares Method, 最小二乘法.

1. 给定 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 与 $b = (b_j) \in \mathbb{R}^n$. 记 $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$, 则

$$F = \|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2.$$

任给定指标 $1 \le j_0 \le n$, 假设所有 $x_j\ (j \ne j_0)$ 均是常量, 仅 x_{j_0} 是变量. 通过下式计算二次函数 $F = F(x_{j_0})$ 导数为零的点

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,x_{j_0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x_{j_0}}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2\right] = 0.$$

   - F 何时是二次函数? 我们需要排除一些平凡情形, 请稍作说明.

2. 假设上一问中 $F'(x_{j_0}) = 0$ 的解是 $x_{j_0} = X_{j_0}$. 记解向量 $X = (X_i) \in \mathbb{R}^m$. 证明 $A^TAX = A^Tb$.
3. (自主思考, 这不是一个问题) 上式合并了有唯一解, 有无穷解, 以及无解这三种情况. 请区分, 讨论这些情况.
4. 使用最小平方法找到一条抛物线 $y = a + bx + cx^2$, 使得该抛物线可以尽可能地拟合以下所有点:

$$\{(-2,4), (-1,2), (0,1), (2,1), (3,1)\}.$$

提示: 可以考虑方程

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

请用严谨的数学语言解释这一所谓的拟合 (应当先定义点到抛物线的距离.).

Challenge 先前有一道证明题: $\mathbb{R}^n$ 的任意有限个真子空间之并不是全空间. 此处有一道类似的问题:

- 任取 $\mathbb{R}^n$ 中有限个真子空间 $\{V_i\}_{i=1}^m$, 则必存在补集中的向量组 $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right)^c$, 使得 $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{i,j}$ (单位正交关系).
- 以上 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 有无穷多种取法 (这或许是一句废话.).