Disambiguation 补空间 (也叫直和补) 与正交补的区别.

约定 每处的全空间 V 都是给定域上的线性空间. 默认 $V = \mathbb{F}^{\dim V}$, 换言之, 单位向量 $\{e_i\}$ 是事先确定的.

约定 只谈 $\mathbb{R}$, 不谈 $\mathbb{C}$.

定义/性质 补空间是对一般的线性空间而言的, 无需正交性等限定. 以下给定**一般的域** $\mathbb{F}$. 记 V 是 $\mathbb{F}$-线性空间, $U \subset V$ 是线性子空间.

- 子空间 U 的**补空间**是指另一个子空间 W. 满足 $U + W = V$, 且 $U \cap W = 0$.
- 若 V 与 U 是有限维线性空间. 寻找 W 的一种方式如下:
    - 对 U 找一组基 $\{u_i\}_{i=1}^m$, 并将之扩充为 V 的基 $\{u_i\}_{i=1}^{m+k}$.
    - 此时, $\operatorname{span}(\{u_i\}_{i=m+1}^{m+k})$ 是补空间 W.
- 需要强调: **补空间存在, 但不必唯一**.

记号 $\oplus$ 表示子空间的直和. 记 U_1 与 U_2 是 V 的子空间, 则

- $U_1 \cap U_2 = 0$, 这是使用 $\oplus$ 的前提条件;
- $U_1 \oplus U_2 = U_1 + U_2$, 这是 $\oplus$ 的实际运算结果.

习题 复习记号规范. 解释 $+$ 与 $\oplus$ 在子集运算中的类似物.

定义/性质 给定有限维 $\mathbb{R}$-线性空间 V. 记 $U \subset V$ 是线性子空间. 称 W 是 U 的**正交补**, 若以下条件同时满足:

1. $V = U \oplus W$, 这也是补空间的定义;
2. 对任意 $u \in U$ 与 $w \in W$, 总有

$$u^T \cdot w := \sum_{i=1}^{\dim V} u_i w_i = 0.$$

问题 在定义**正交补**时, 补空间与向量点乘的定义式在一般域上也是合理的. 此处为何特地强调 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$?

习题 给定任意域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间 V 及其子空间 U. 证明线性空间

$$W = \{v \in V \mid \text{对任意 } u \in U \text{ 均有 } u^T \cdot v = 0\}$$

的维度是 $\dim V - \dim U$.

习题 (本题专供有限域爱好者) 给出 $U \cap W \neq 0$ 的例子; 或进一步地, 给出 $U = W$ 的例子.

- 有限域中, $x^T \cdot x = 0$ 是否一定意味着 $x = 0$? 这一结论在 $\mathbb{R}$-线性空间中成立, 并直接定义了向量模长等几何概念.

总结 直和, 补空间, 以及矩阵的四大基本空间对一般的有限维线性空间均适用; 而正交性与正交补是 $\mathbb{R}$-线性空间的特例.

- **所谓的**向量点乘在一般的域上可以定义, 通常用于说明四大基本空间的**所谓的**正交性. 这一点乘结构在一般域上仅是一个式子, 其无法给出模长等几何结构, 甚至无法说明直和补!

教材 Gil 补充注释.

4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

任务 这是一些基本要求.

- 搞懂基本记号. $C(A)=R(A^T)$ 是列空间, $R(A)=C(A^T)$ 是行空间. 通用横行与纵列.
- 复习线性空间习题中提及的参考资料, 可以找并绘一些关于四大基本空间的示意图.
- 明辨直和与正交. 结合上文的 Disambiguation, 向前翻阅教材关于四大基本空间的介绍, 判断作者使用的正交是否可以改作**所谓的**正交?
- 可以选用线性空间习题中提及的**第六版 Gilbert**.

Problem Set 4.1 本节中 non-trivial 的定理: Fredholm 二择.

- 这一定理是对任意域而言的, 本质上和 $\mathbb{R}$ 没有太大关系.
- 数域上的线性空间是能谈论正负号的, 此时有**带符号的 Fredholm 二择**, 通常叫 Farkas lemma.
- Farkas 引理的其他参考资料: 吴耀琨教授去年的授课笔记.
- Fredholm 二择会在今后学习 PDE (或泛函之类的课) 时再次遇到.

习题 (直接做的话, **或许算一个挑战**) 记 V 是有限维实线性空间, $U\subset V$ 是子空间. 若 U 中的任意非零向量同时有正项与负项, 则 U 的正交补中一定有各分量全正的向量.

- 使用 Farkas lemma 会比较快.
- 实线性空间可以进行符号化 (只保留向量各分量的符号 $\{0,+,-\}$, 舍去具体数值). 对给定的子空间, (是本道习题保证) 符号化空间的正交补等于正交补空间的符号化.

定义 正交补的符号选用 $(-)^{\perp}$. 例如 V 是有限维实线性空间, 则子空间 U 的正交补是子空间 $U^{\perp}$.

- 若 $S\subset V$ 是一般的子集, 则 $S^{\perp}:=\{v\in V\mid \text{对任意 } u\in S \text{ 都有 } u^T\cdot v\}$.
- 思考: $\varnothing^{\perp}$ 是什么, 以及 $V^{\perp}$ 是什么? 你可以在下一习题中找到灵感.

任务 (正交补的性质汇总) 以下 U,V,W 都是全空间的子空间. S 是线性空间的子集.

- 线性空间均是有限维的. 以下习题的证明通常是这样的: **由定义证明一侧的包含关系, 另一侧的包含关系由比较维数得到**.

以下是与闭包类似的性质.

1. $(S^\perp)^\perp = \mathrm{span}(S)$.
2. $S^\perp = \mathrm{span}(S)^\perp$.

以下是一些反序性质.

1. $(U^\perp)^\perp = U$.
2. $0^\perp =$ 全空间.
3. 全空间$^\perp = 0$.
4. $U \subset V$ 当且仅当 $V^\perp \subset U^\perp$.
5. $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.
6. $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

任务 几何认识: 点乘 (特殊的双线性形), 模长, 以及各种等式. 见作业.

4.2 Projections

习题 给定 $\mathbb{R}$ 上的方阵 M, 试着举出以下三类问题的反例:

1. $M^2 = M \neq M^T$,
2. $M^T = M^2 \neq M$,
3. $M = M^T \neq M^2$.

- 第二条反例: $M^T = M^2$ 的通解是 $M = Q^T \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$, 其中 S 是正交矩阵.

定义 需要区别两套名词, 请留意.

- 对 $M^2 = M$ 的矩阵, 一作**幂等矩阵**, 另一作投影矩阵.
- 对 $M^2 = M = M^T$ 的矩阵, 一作**投影矩阵**, 另一作正交投影矩阵.

我们倾向使用粗体所示的定义.

习题 对矩阵 P 而言, 规则 $P^2 = P$ 与 $P^T = P$ 对应了如下事实.

1. 若 $M^2 = M$, 则 $C(M) \oplus N(M)$ 是全空间. 在此前提下, $C(M) \perp N(M)$ 当且仅当 $M^T M$.
2. 若 $M = M^T$, 则 $u^T \cdot (Mv) = (Mu)^T \cdot v$. 在此前提下... (同上).

任务 给定投影矩阵 P, 记 $Q = I - P$. 证明 $N(P)$ 与 $N(Q)$ 互为正交补.

任务 熟悉两类特殊的投影矩阵:

1. 找出所有秩为 1 的投影矩阵, 即投影至线上.
2. 找出所有秩为 $n-1$ 的投影矩阵, 即投影至超平面上.

- 遇到相应的习题, 心中有数即可.

习题 (投影矩阵的维度) $\mathrm{tr}(P)$ 是投影矩阵的列空间维度.

- 学习相似标准型后的一个简单的看法: 由相抵标准型知 $P = S^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} S$. 结合相似变换即可.

习题 投影矩阵未必交换. 尝试画出 $P_1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 并用图形说明 $P_1 \cdot P_2 \neq P_2 \cdot P_1$.

例子 课本 P206 给出了一些对角元为 $\{0, 1\}$ 的投影矩阵, 这些矩阵乘积可交换.

- 一般地, 乘积可交换投影矩阵等价于可同时对角化的投影矩阵. 推广等见思考题.

任务 (最近投影问题) 给定子空间 $U \subset V$ 与子空间外的点 $v \in V \setminus U$. 定义最近投影如下:

- (定义一) 存在 $u \in U$, 使得 $\|u - v\|$ 取到最小值.
- (定义二) 存在 $u \in U$ 使得 $(u - v) \perp U$.
- 需证明, 以上 u 唯一.

借由以上, 理解最近投影与误差向量的正交性.

习题 假定 $n \geq 1$. 称 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个投影矩阵, 当且仅当 $P^2 = P = P^T$.

- 题 2. 与 3. 在补空间意义下等同, 完成其中一题即可; 4. 与 5. 同理; 6. 与 7. 亦同理.

1. 证明: 投影矩阵和子空间双射对应, 具体的对应方式可以是列空间 $P \overset{1:1}{\longleftrightarrow} C(P)$.
2. 证明: 投影矩阵和子空间双射对应, 具体的对应方式可以是零空间 $P \overset{1:1}{\longleftrightarrow} N(P)$.
3. 任意给定 $v \neq \mathbf{0}$, 找到 P 使得 $C(P) = \mathrm{span}(v)$.
4. 任意给定 $v \neq \mathbf{0}$, 找到 P 使得 $N(P) = \mathrm{span}(v)$.
5. 给定 $\mathbb{R}^5$ 中的列向量 $S = \{(4,3,3,1,1), (6,2,2,2,1)\}$, 找到 $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ 使得 $C(P) = \mathrm{span}(S)$.
6. 给定 $\mathbb{R}^5$ 中的列向量 $S = \{(4,3,3,1,1), (6,2,2,2,1)\}$, 找到 $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ 使得 $N(P) = \mathrm{span}(S)$.

- 关于子空间的运算如何转化成投影矩阵的运算, 见思考题.

习题 找两个 $\mathbb{R}^2$ 中的投影矩阵 P 与 Q, 使得 $PQ : (2, 0) \mapsto (1, 0)$.

- 一般的结论: 任意不可逆方阵都是有限个投影矩阵的乘积.

Least Squares Approximations

任务 会算.

- 偏导不考.

- 书中仅涉及 $\mathbb{R}^n$ 中点乘, 但教材 LADR 中涉及了一般的实内积空间. 假若数学分析学习了 Fourier 分析等知识, 可以回头看看这些题.

任务 如何给非数学专业的学生讲明白最小平方法?

4.4 Orthonormal Bases and Gram-Schmidt

例子 正交矩阵视作映射 $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto Qx$. 这是一个刚性的线性变换. 换言之, 以下两点等价.

1. 对一切 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 总有 $(Qx)^T\cdot(Qy)=x^T\cdot y$.
2. 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$, 总有 $\|Qx\|=\|x\|$.

定义 相同的映射定义作相同的元素对应. 这意味着

- 矩阵 $A=B$, 当且仅当 $x^TAy=x^TBy$ 恒成立.

此时将正交矩阵的定义抽象作 $QQ^T=I$.

- 此处要求 Q 是方阵. 等价地, $Q^TQ=I$.

任务 给定正交矩阵 P 与 Q, 则 $P\cdot Q$ 与 P^{-1} 均正交

任务 熟悉特殊的正交矩阵 (刚性变换).

1. 置换矩阵.
2. $\mathbb{R}^2$ 中的旋转矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
3. $\mathbb{R}^n$ 中的旋转矩阵即 Given 矩阵.
4. 比较 P235 中 Example 3 给出的反射矩阵, 与先前计算所得的秩为 $n-1$ 的投影矩阵.

例子 (手性坐标系) 依照定义, 计算得 $\det Q=\pm1$.

- 给定反射矩阵 R, 则 $\det R=-1$.
- 给定置换矩阵 P, 则 $\det Q=(-1)^{\text{逆序数}}$, 因为一次逆序无非一次反射.
- 给定旋转矩阵 Θ, 则 $\det\Theta=1$. 可以将旋转看作一个连续的过程, 即, 存在连续函数

  $$Q:[0,1]\to\text{ 正交矩阵},\quad t\mapsto Q(t),\quad Q(0)=I,\quad Q(1)=\Theta.$$

  由于 $\det$ 是连续函数 (本质是多项式), 因此 $\det\Theta=\det I=1$.
- 在往后的学习中, 我们会知道任意 $\det=1$ 的正交矩阵都是若干 (最少几个?) 旋转矩阵的乘积. 因此, 任意正交矩阵是旋转与零次或一次反射的乘积.

记号 $O(n)$ 是正交方阵 (乘法群); $SO(n)$ 是行列式为 1 的正交方阵 (乘法群)

习题 取 $Q\in O(3)$, 记 $\times$ 是矢量积. 则

$$(Qu)\times(Qv)=Q(u\times v).$$

习题 若 $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是反对称实矩阵, 且 $I+S$ 可逆, 则 $(I+S)^{-1}(I-S)$ 是正交矩阵.

- 反之, 如何对应? 这建立了哪两类矩阵的双射?
- 此时, 行列式为 1 的正交矩阵对应哪类反对称矩阵?
- 类似地, 试研究对应 $S \mapsto e^S$.

例子 更多例子: Hadamard 矩阵. 称 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 Hadamard 矩阵, 当且仅当 X 中各分量取值为 $\{\pm 1\}$; 同时, X 是正交矩阵的数乘倍, 即 $XX^T = n \cdot I$.

- 直接的例子是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. 若 H 是 Hadamard 矩阵, 则 $\begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$ 亦然.
- 更多例子见此网页.

任务 (QR 分解) QR 分解的一般步骤见教材. 建议先端详 P239 之式 (9).

- 试给出 RQ 分解. 此时就有 QU, UQ, QL 与 LQ 四种分解.

例子 QR 分解的推论: 对任意实方阵 X, 则存在正交矩阵 Q 与行满秩矩阵 L 使得 $Q \cdot \binom{L}{O} \cdot Q^T$.

- 推论: 对任意秩为 r 的投影矩阵 P, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T \cdot \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot Q$.
- 推论: 奇异值分解.
- 以上 L 可以有更好的形式, 例如 $\{l_{i,j} = 0\}_{i>j+1}$. 见 Hessenberg 形式.