矩阵标准型复习

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Friday 13$^{\text{th}}$ December, 2024

习题 1 (热身前的热身)**.** 若 A 是 n-阶实方阵, $A+A^T$ 是正定的, 证明 $\det(A)>0$.

证明. (法一) 若实矩阵 A 对一切非零向量 x 都有 $x^TAx>0$, 则 A 在 $\mathbb{C}$ 上的特征根有均正的实部.

(法二) 记线性函数 $f(t)=2A+t(A^T-A)$, 则 $\det(f(t))$ 是 t 的多项式, 从而也是连续函数. 今有 $\det(f(1))>0$. 为证明 $\det(f(0))>0$, 只需说明 $\det(f(t))$ 在 $t\in[0,1]$ 上无零点. 依照反对称矩阵的性质, 总有 $x^Tf(t)x=x^Tf(1)x$. 因此 $f(t)$ 的零空间恒为 0. 证毕

习题 2 (课前热身)**.** 若 A 是 n-阶实方矩阵, $A+A^T=\sum_{i\neq j}E_{i,j}$, (也就是对角元为 0, 其余位置全为 1 的矩阵). 证明 $r(A)\geq n-1$.

证明. 记分块矩阵 $B=\begin{pmatrix}\mathbf{1}^T\\ A\end{pmatrix}$, 下证明 $N(B)=0$. 注意到 $Bx=0$ 当且仅当 $Ax=0$ 且 $\mathbf{1}^Tx=0$. 此时

$$0=x^T(A+A^T)x=x^T(\mathbf{1}\mathbf{1}^T-I)x=-x^Tx. \tag{0.1}$$

因此 $x=0$. 从而 $N(A)$ 至多 1 维. 证毕

习题 3 (举例子)**.** A 与 B 可同时对角化, B 和 C 可同时对角化, 且 A 和 C 可同时对角化; 但 A, B 与 C 不能同时对角化.

证明. 其实这个命题是正确的. 需要注意: 可对角化矩阵的特征空间将全空间划分作子空间的直和, 等价地, 不同的特征向量线性无关. 记

$$V = \bigoplus_{\lambda_A \in \sigma(A)} N(\lambda I - A). \tag{0.2}$$

对 B 与 C 做类似的操作, 找到三个直和分解的 "共同加细" 即可. 完证毕明

习题 4 (举反例)**.** 给定两个复方阵 A 与 B. 若对任意 $a, b \in \mathbb{C}$, 方阵 $aA + bB$ 总是幂零的, 试问: $A \cdot B$ 是否是幂零的?

证明. 考虑 $Z := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. 口算知 $\det(\lambda I - Z) = \lambda^3$, 从而 $Z^3 = O$; 但是 $A \cdot B$ 是秩 2 的对角矩阵, 从而不幂零. 完证毕明

1 基变换与标准型: 以相抵变换为例

例子 (线性映射的矩阵表达)**.** 给定有限维线性空间间的线性映射 $\varphi : U \to V$. 如果将 U 与 V 赋予一组的基底 $(u_1 \mid \cdots \mid u_m)$ 与 $(v_1 \mid \cdots \mid v_n)$, 则线性映射通过以下 m 个等式描述:

$$\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \cdot v_j \quad (a_{j,i} \in \mathbb{F}). \tag{1.1}$$

换言之, 每个 $\varphi(u_i)$ 唯一地表示做 v_j-向量的线性组合. 从矩阵的视角看,

$$\underbrace{\varphi(u_1 \mid \cdots \mid u_m)}_{\text{往后记作 } \varphi(u_\bullet)} = \underbrace{(v_1 \mid \cdots \mid v_n)}_{\text{往后记作 } v_\bullet} \cdot A_{n\times m}. \tag{1.2}$$

系数 $a_{j,i}$ 的直白地描述作: $\varphi(u_i)$ 中 v_j 的分量.

例子 (换基)**.** 以下是几类常见的线性映射.

1. $\varphi : U \to V$, 涉及相抵标准型, 奇异值分解, QR 分解等.
2. $\varphi : U \to U$, 涉及相似标准型等共轭变换.
3. $\varphi : U\&V \to \mathbb{F}$, 涉及双线性型 (输入两个线性空间, 输出一个线性空间), [1]
4. $\varphi : U\&U \to \mathbb{F}$, 涉及合同变换等.

定义. 给定 $\varphi : U \to V$ 与矩阵表述 $\varphi(u_\bullet) = v_\bullet \cdot A$. 今考虑

1. 对 $u_\bullet$ 右乘可逆方阵 P, 功效是 U 上的基变换 $u_\bullet \mapsto u\bullet \cdot P = \overline{u}_\bullet$;
2. 对 $v_\bullet$ 右乘可逆方阵 Q, 功效是 V 上的基变换 $v_\bullet \mapsto v_\bullet \cdot Q = \overline{v}_\bullet$.

[1]不建议将 $\varphi : U\&V \to \mathbb{F}$ 表述成 $\varphi : U \times V \to \mathbb{F}$. 前者的类型是 $U \to (V \to \mathbb{F})$, 此类双线性映射构成 $\dim U \cdot \dim V$ 维线性空间; 后者的类型是 $(U \to \mathbb{F}) \wedge (U \to \mathbb{F})$, 此类映射构成 $\dim U + \dim V$ 维线性空间.

此时 $\varphi(\overline{u}_\bullet) = \varphi(u_\bullet)\cdot P = v_\bullet \cdot A \cdot P = \overline{v}_\bullet \cdot Q^{-1}\cdot A\cdot P$. 变换

$$A \mapsto Q^{-1}AP, \quad (P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}), \quad Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})) \tag{1.3}$$

称作相抵变换. 以交换图呈现之:

$$\begin{tikzcd} \overline{u}_\bullet \\ u_\bullet \arrow[u, "()\cdot P"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi(\overline{u}_\bullet) & \overline{v}_\bullet \arrow[l, dashed, "()\cdot(Q^{-1}AP)"'] \\ \varphi(u_\bullet) \arrow[u, "()\cdot P"] & v_\bullet \arrow[l, "()\cdot A"] \arrow[u, "()\cdot Q"'] \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

.

习题 5 (姜皓文之问)**.** 试证明: $\varphi(u_\bullet\cdot C) = \varphi(u_\bullet)\cdot C$.

证明. 这一结论是对以下课堂特例的推广:

$$\varphi(u_\bullet\cdot C) \overset{?}{=\!=\!=\!=} \varphi(u_\bullet)\cdot C$$

$$\begin{tikzcd} \varphi((u_1 \mid u_2)\cdot \binom{\lambda}{1}) \arrow[r, equal, "?"] \arrow[d, equal] & (\varphi(u_1) \mid \varphi(u_2))\cdot \binom{\lambda}{1} \arrow[d, equal] \\ \varphi(\lambda u_1 + u_2) \arrow[r, equal, "线性性"] & \lambda\varphi(u_1) + \varphi(u_2) \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

一般地, $\varphi(u_\bullet\cdot C)$ 的第 i 列是 $\varphi(\sum_i u_i c_{i,j}) = \sum_i \varphi(u_i)c_{i,j}$, 从而就是 $\varphi(u_\bullet)\cdot C$ 的第 i 列. $\boxed{\text{完证毕明}}$

备注. 同一线性映射在不同基下有不同的矩阵表达, **但秩不变**.

命题 (相抵标准型)**.** 选定上述的 $(\varphi, U, u_\bullet, V, v_\bullet, A)$, 以下命题等价.

1. 存在可逆矩阵 P 与 Q 使得 $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix}$;
2. 存在基变换 $u_\bullet \mapsto \overline{u}_\bullet$ 与 $v_\bullet \mapsto \overline{v}_\bullet$, 使得 $\varphi : \overline{u}_\bullet \mapsto \overline{v}_\bullet$ 将 $\overline{u}_\bullet$ 的前 r 向量分别对应作 $\overline{v}_\bullet$ 的前 r 个向量, 将其余向量对应作 0.

定义 (相抵等价)**.** 记 $B = Q^{-1}AP$, 则 A 与 B 是相抵等价. A 到 B 的相抵等价由

1. 来源位置通过右乘 $() \cdot P$-换基,
2. 去向位置通过右乘 $() \cdot Q$-换基

一齐实现.

例子 (相似变换)**.** 相似变换源自 $\varphi : U \to U$ 的基变换. 注意: 我们要求 φ 来源和去向相同, 从而 $P = Q$, 进而 $B = P^{-1}AP$.

命题 (应用: 同时相抵化)**.** 若 $r(A+B) = r(A) + r(B)$, 当且仅当存在可逆的 P 与 Q 使得

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O & O \\ O & O_{r(B)} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} O_{r(A)} & O & O \\ O & I_{r(B)} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

证明. 将右乘矩阵看作线性变换, 此时 $R(A) + R(B) = R(A+B)$. 找一个基变换, 使得 $() \cdot A$

1. 将 $\overline{u}_\bullet$ 的前 $r(A)$ 个向量对应至 $\overline{v}_\bullet$ 的前 $r(A)$ 个向量,
2. 将 $\overline{u}_\bullet$ 的第 $r(A)+1$ 至 $r(A)+r(B)$ 个向量对应值 $\overline{v}_\bullet$ 者.

将基变换复原作相抵标变换即可. 证毕完

命题 (应用: $AB = O_n$, $BA = O_m$)**.** $AB = O_m$ 与 $BA = O$ 成立, 当

且仅当存在可逆的 P 与 Q 使得

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_{r(A)} & O & O \\ O & O_{r(B)} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BQ = \begin{pmatrix} O_{r(A)} & O & O \\ O & I_{r(B)} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

证明. 若 $AB = O$ 且 $BA = O$, 则

1. 右乘 B 将 “右乘 A 所得的像” 映至 0 子空间, 且
2. 右乘 A 将 “右乘 B 所得的像” 映至 0 子空间.

依照 A 的相抵标准型取 U 中线性无关组 S_1, 则

$$S_1 \xrightarrow[\text{双射}]{()\cdot A} T_1 \xrightarrow{()\cdot B} 0. \tag{1.8}$$

同理, 依照 B 的相抵标准型取 U 中线性无关组 T_2, 则

$$T_2 \xrightarrow[\text{双射}]{()\cdot B} S_2 \xrightarrow{()\cdot A} 0. \tag{1.9}$$

今断言 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. 若不然, 则 $v \in S_1$ 被 $() \cdot A$ 映作 $\mathbf{0}$, 矛盾. 同理, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. 此时,

$$(S_1 \quad S_2 \quad O) \cdot A = (T_1 \quad O \quad O), \quad (T_1 \quad T_2 \quad O) \cdot B = (O \quad T_2 \quad O). \tag{1.10}$$

完证毕明

命题 (应用: $A^2 = O$-型矩阵的分类)**.** 仍给定任意域 k. 若 $A^2 = O$, 则存在可逆的 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O & I & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

证明. A 是某个线性映射 $\varphi : V \to V$ 的矩阵表达. 依照题干条件, φ^2 是零映射, 从而有映射链

$$V \xrightarrow[\text{满射}]{\varphi} \varphi(V) \xrightarrow{A} 0. \tag{1.11}$$

在 $\varphi(V)$ 中找一组基 $u_\bullet^1$, 继而取 $u_\bullet^1$ 在 φ 下的一组原像 $u_\bullet^2$, 将 $(u_\bullet^1 \mid u_\bullet^2)$ 扩充至全空间 (取 $u_\bullet^3$ 使得 $\varphi(u_\bullet^3)$ 全零). 考虑矩阵表达

$$\varphi(u_\bullet^1 \mid u_\bullet^2 \mid u_\bullet^3) = (\mathbf{0} \mid u_\bullet^1 \mid \mathbf{0}) = (u_\bullet^1 \mid u_\bullet^2 \mid u_\bullet^3) \cdot \begin{pmatrix} O & I & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

这一矩阵相似于 A. 证明完毕

2 标准型一览

2.1 标准型是轨道的代表元

例子 (等价关系)**.** 称 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 是相抵的, 当且仅当存在 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得 $PAQ = B$. 注意: [2]

1. (自反性) A 与自身相抵;
2. (对称性) A 与 B 相抵, 当且仅当 B 与 A 相抵;
3. (传递性) 若 A 与 B 相抵, 且 B 与 C 相抵, 则 A 与 C 相抵.

今给定矩阵 $M \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 定义 M 的相抵**轨道**是 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 的子集

$$t_M := \{PMQ \mid P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}), Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}. \tag{2.1}$$

换言之, 轨道 t_M 是 M 关于 "左乘可逆矩阵" 与 "右乘可逆矩阵" 这两个 "作用" 生成的最大子集.

命题 (轨道)**.** $N \in t_M$ 当且仅当 $t_M = t_N$, 当且仅当 $r(M) = r(N)$.

- 若固定 $\mathbb{F}^{m\times n}$, 则 t_M 与 $r(M)$ 是相同的指标.

备注. 等价关系定义了轨道. 秩就是相抵这一等价关系的给出的轨道. 依照经验

$$t_M \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\text{轨道的代表元}} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} r(M). \tag{2.2}$$

因此, 可以对映射定义 $\mathrm{rank}(\varphi)$.

[2]若一个集合上的关系满足下述三条, 则称之等价关系. 此处, 相抵等价是一个等价关系.

定义 (相似变换)**.** 给定 U 到自身的线性映射 $\varphi : U \to U$[3]. 对 φ 的来源与去向做相同的换基操作, 也就是在相抵变换中规定 $P = Q$, 对应的矩阵变换是相似变换.

例子 (相似标准型)**.** 相似是集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 上的等价关系. 可以依照相似关系, 将 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 划分作若干轨道. 例如, 可以将 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 划分作

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) = \bigcup_{i=1}^{s} t_i \quad \text{(这是两两无交的并).} \tag{2.3}$$

备注. 为尽量精简地描述每条轨道, 可以在每个轨道中取一个代表元, 即标准型. 例如, 对复矩阵,

$$t_i \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{任意 } M \in t_i \text{ 的 Jordan 标准型} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{初等因子组.} \tag{2.4}$$

备注 (Smith). A 与 B 相似, 当且仅当 $(\lambda I - A)$ 与 $(\lambda I - B)$ 相抵.

定义 (合同标准型)**.** 直白地看, $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 的合同标准型来自 "$A \sim P^T AP$ (P 可逆)" 这一等价关系的轨道划分. 从线性映射的角度看, 先对双线性型做一些技术调整 (Curry 化)

$$U\&V \text{ 至 } \mathbb{F} \text{ 的 “双” 线性映射} \xleftrightarrow{\text{双射}} U \text{ 至 } \underbrace{V \text{ 至 } \mathbb{F} \text{ 的全体线性映射}}_{\text{这是 } \mathbb{F}\text{-线性空间}}. \tag{2.5}$$

简单地说, $U \wedge V \to \mathbb{F}$ 无非 $W \to (V \to \mathbb{F})$.

令 $U = V$, 合同源自对 $\varphi : V \to (V \to \mathbb{F})$ 的换基, V 的基变换与 $(V \to \mathbb{F})$ 的基变换相差 $(\bullet^{-1})^T$.

备注. 也有一个表述粗糙的观点. 记

$$\varphi : u_\bullet \& u_\bullet \to \mathbb{F} \tag{2.6}$$

[3] 称 φ 是 U 上的自同态.

的矩阵表述为 $u_\bullet X u_\bullet^T$. 换基 $u_\bullet \cdot P =: \overline{u}_\bullet$ 对应

$$\varphi(\overline{u}_\bullet \& \overline{u}_\bullet) = \overline{u}_\bullet X \overline{u}_\bullet^T = u_\bullet P X P^T u_\bullet^T. \tag{2.7}$$

新的矩阵即 $P^T X P$.

定义 (酉相似 (对实矩阵而言, 即正交相似))**.** 等价关系是通过酉矩阵相似. 相应地, "正交相似的轨道" 比 "相似的轨道" 更细.

备注. 等距变换 (正交) 同一了相似与合同.

备注 (思考题). 正交相似的轨道是否恰好是合同轨道与相似轨道的加细? 换言之,

- 若两个实方阵既相似, 又合同, 则是否一定正交相似?

备注. 这是一个非常重要的注释: 正交相似是确实一个等价关系, 但**找不到一个好的标准型!** 酉相似也是同理的. 我们至多只能得到 Hessenberg 形式或上三角形式, 之后就没有了.

所谓的实矩阵的正交标准型 ($\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 之类的), 其本质仍是相似标准型, 只不过将最终形式写成 "几何" 的样子.

例子 (不变子空间)**.** 给定 $\varphi: V \to V$. 以下仅考虑相似变换类.

1. (分块上三角化) 若存在子空间 $U \subset V$ 使得 $\varphi(U) \subseteq U$, 则称 U 是 φ 的一个不变子空间. 取一组 U-基 $u_\bullet$, 并将之延拓到 V 基 $(u_\bullet \quad v_\bullet)$, 则 φ 具有矩阵表示

   $$\varphi(u_\bullet \quad v_\bullet) = (u_\bullet \quad v_\bullet) \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

   换言之, 若找到了矩阵 A 的一个不变子空间, 则找到了 A 的分块上三角化.

2. (分块对角化) A 可以分块对角化作 $A_1 \in \mathrm{M}_m$ 与 $A_2 \in \mathrm{M}_n$, 当且仅当存在 $V = U_1 \oplus U_2$ 使得 U_1 与 U_2 均是 $() \cdot A$ 的不变子空间, 且有 $\dim U_1 = m$ 与 $\dim U_2 = n$.
3. (相似上三角化) A 可以上三角化, 当且仅当存在一组基 $u_\bullet$, 使得所有 $\mathrm{span}(\{u_i\}_{1\le i\le k})$ 都是 $() \cdot A$ 的不变子空间.
4. (相似对角化) A 可以对角化, 当且仅当存在一组基 $u_\bullet$, 使得所有 $\mathrm{span}(u_i)$ 都是 $() \cdot A$ 的不变子空间.
5. 将以上每条对多个矩阵同时进行, 例如 "同时对角化" 等等.

备注 (左乘与右乘). 称 $(\lambda, u_{\neq \mathbf{0}})$ 是矩阵 B 的特征组, 当且仅当 $Bu = \lambda u$. 若将 $B \cdot ()$ 看作线性映射, 则在上述记号下,

$$(u \mid \cdots) \cdot A = B \cdot (u \mid \cdots) = (\lambda u \mid \cdots), \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & * \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

记 $P := (\lambda u \mid \cdots)$ 为可逆矩阵, 则 $P^{-1}BP = A$.

定义 (QR 分解)**.** 给定线性映射 $\varphi : U \to V$ 及其矩阵表述 $(u_\bullet, v_\bullet, A)$. 我们希望有 $\varphi(u_\bullet) = (v_\bullet) \cdot QR$ 之类的式子.

1. 若 R 是上三角矩阵, Q 是正交矩阵的一部分, 则...
2. 若 R 是上三角矩阵的一部分, Q 是正交矩阵, 则...
3. RQ 分解的两种.
4. QL 分解 (L 是下三角矩阵).

备注. 正交标准型 ($\mathbb{C}$ 上类似): 对任意方阵 M, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T M Q = \begin{pmatrix} R & S \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 $(R \quad S)$ 是行满秩的.

例子 (正交标准型兼顾相似与合同, 是强大的技巧)**.** 若复矩阵 X 满足 $X^3 = XX^HX$, 证明 $X = X^H$.

证明. 记 $X = U^H \begin{pmatrix} R & S \\ O & O \end{pmatrix} U$. 此时,

$$XX^HXX^H = U^H \begin{pmatrix} (RR^T + SS^T)^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} U = U^H \begin{pmatrix} R^3R^H + R^2SS^H & O \\ O & O \end{pmatrix} U = XXXX^H. \quad (2.10)$$

因此 $\det(RR^H + SS^H)^2 = \det(R)^2 \det(RR^H + SS^H)$. 由于 $L := (R \quad S)$ 行满秩, 故 $LL^H = RR^H + SS^H$ 满秩. 上式化作

$$\det(RR^H + SS^H) = \det(RR^H). \quad (2.11)$$

由 Cauchy-Binet 公式知 $\det(RR^H + SS^H) \geq \det(RR^H)$, 取等当且仅当 $S = O$. 此时 R 可逆且 $R^3 = RR^HR$, 因此 R 是对称矩阵. 故 X 是对称矩阵. 证毕

定义 (奇异值分解)**.** 记 $\varphi : U \to V$ 是有限维实或复线性空间的映射, 记 $e_\bullet$ 与 $f_\bullet$ 是一组标准正交基. 奇异值分解说明了以下事实:

- 存在等距变换 $e_\bullet Q = \overline{e}_\bullet$ 与 $f_\bullet P = \overline{f}_\bullet$, 使得 $\varphi(\overline{e}_\bullet) = \overline{f}_\bullet \cdot \Sigma$ (Σ 的左上分块 $\mathbb{R}_+$-值对角).

换言之, 若 $\varphi(e_\bullet) = f_\bullet \cdot A$, 则

$$f_\bullet \cdot P \cdot \Sigma = \overline{f}_\bullet \cdot \Sigma = \varphi(\overline{e}_\bullet) = \varphi(e_\bullet) \cdot Q. \quad (2.12)$$

因此, $A = P\Sigma Q^{-1}$.

备注. 直观地, 线性变换 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 可拆解作以下三项复合:

$$\varphi = \underbrace{\mathcal{R}}_{\text{去向的旋转, 对极投影}} \circ \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{沿坐标轴正向拉伸, 投影}} \circ \underbrace{\mathcal{S}}_{\text{来源的旋转, 翻转}} \quad (2.13)$$

在统计学中, $\mathcal{L}$ 最大径向拉伸 (Σ 中最大值) 称作主成分.

定义 (MP 逆). 沿用以上记号 $\varphi(e_\bullet) = (f_\bullet) \cdot A$, 对 $A = P\Sigma Q^{-1}$ 蕴含了映射分解

$$\varphi = \underbrace{\mathcal{R}}_{\text{等距变换}} \circ \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{沿坐标轴正向拉伸, 投影}} \circ \underbrace{\mathcal{S}}_{\text{等距变换}} \tag{2.14}$$

A 的 MP 逆 A^+ 由如下映射刻画 (从 $\varphi^+ : V \to U$):

$$\varphi^+ = \underbrace{\mathcal{S}^{-1}}_{\text{等距变换}} \circ \underbrace{\mathcal{L}^+}_{\text{沿坐标轴反向正向拉伸, 投影}} \circ \underbrace{\mathcal{R}^{-1}}_{\text{等距变换}} \tag{2.15}$$

例如, Σ-类型的矩阵的广义逆为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, A 的广义逆为 $Q\Sigma^+ P^{-1}$.

备注. A^+ 与 A^H 比较相似:

$$A^+ = Q\Sigma^+ P^{-1}, \quad A^H = Q\Sigma^H P^{-1}. \tag{2.16}$$

定义 (谱分解). 假定 $S = S^H$ (或更一般地, 正规矩阵), 由 Schur 三角化得 $U^{-1}SU = \Lambda$ 是对角矩阵. 映射层面, $\varphi : V \to V$ 在某组基下表现做沿坐标轴拉伸.

备注. 从线性映射的视角看, AA^+ 与 A^+A 都是正交投影矩阵, 换言之, $\varphi \circ \varphi^+ : V \to V$ 与 $\varphi^+ \circ \varphi : U \to U$ 在某个 "基的等距变换" 下是 $(0, 1)$-对角的. 类似地, $\varphi \circ \varphi^H : V \to V$ 与 $\varphi^H \varphi : U \to U$ 在某个 "基的等距变换" 下是亦是对角矩阵.

求解奇异值分解的关键步骤是找到 $A^H A$ 与 AA^H 的谱分解.