记号说明 约定一切 Λ 是复对角矩阵, $(-)^H$ 是共轭转置, U 是酉矩阵. 以下总结一些常见矩阵的谱分解.

> 注：两个实矩阵正交相似等价于酉相似，见上周作业．因此，以下结果与实情形是统一的．

1. 正规矩阵 (normal matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是对角矩阵．

2. 自伴矩阵 (self-adjoint matrix), Hermite 矩阵 (Hermitian matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实对角矩阵．

3. 半正定 Hermite 矩阵 (Hermitian semi-positive definite matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实半正定对角矩阵．

4. 正定 Hermite 矩阵 (Hermitian positive-definite matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实正定对角矩阵．

自主练习 反对称 Hermite 矩阵, 复投影矩阵, 以及酉矩阵的谱分解如何?

自主练习 对方阵的奇异值分解 $A = U^H \Sigma V$, 定义 A 的谱分解为酉矩阵与半正定厄米矩阵的乘积 $(U^H V) \cdot (V^H \Sigma V)$. 对于上述几类矩阵, 其极分解有无特殊性质?

注 若术语与西文人名相关, 英文或以形容词作定语, 但**中文必然以名词作定语**. 例如

- Abel 群 (Abelian group);
- Bool 代数 (Boolean algebra);
- Hermite 矩阵 (Hermitian matrix);
- Laplace 算符 (Laplacian);
- Pfaff (Pfaffian).

也有一些例外, 例如 Jacobi matrix 和 Jacobian matrix 就是两个名词.

记号说明 每题的相对难度用 $\star$ 的数量描述.

$\emptyset$ 直接推论, 定义默写等.

$\star$ 考试难度的上界.

$\star\star$ 值得思考, 属于不难也不简单的题目.

$\star\star\star$ 可以选择放弃.

Ex 1 复 (半) 正定 Hermite 矩阵是**实对称 (半) 正定矩阵**在 $\mathbb{C}$ 上的推广.

称 M 是复 (半) 正定 Hermite 的, 当且仅当存在酉对角化 $U^H\Lambda U = M$, 其中 Λ 是 (半) 正定的实对角矩阵.

今假定 $M = \begin{pmatrix} S & R \\ R^H & T \end{pmatrix}$ 复半正定 Hermite 矩阵.

1. (⋆) 证明: $Mx = \mathbf{0}$ 当且仅当 $x^H Mx = 0$.

> 答: 若 $Mx = \mathbf{0}$, 则 $x^H Mx = 0$. 反之, 若 $x^H Mx = 0$, 记酉分解 $M = U^H\Lambda U$,其中
>
> $$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \quad \lambda_i > 0.$$
>
> 记 $y := Ux$, 则 $y^H\Lambda y = 0$ 当且仅当 $y_1 = \cdots = y_r = 0$, 即, $\Lambda y = \mathbf{0}$. 此时
>
> $$\mathbf{0} = U^H\Lambda y = Mx.$$
>
> 这是照抄实对称半正定矩阵的解法.

2. (⋆⋆) 证明: $(S \quad R)$ 与 S 有相同的列空间 (等价地, 两个矩阵的秩相同).

> 答: 只需证明两者零空间相同, 即, $y^H S = \mathbf{0}^H$ 当且仅当 $y^H(S \quad R) = \mathbf{0}^H$. 依照上一问:
>
> $$y^H S = \mathbf{0}^H \iff y^H S y = 0 \iff \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^H M \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^H M = \mathbf{0}^H \iff y^H(S \quad R) = \mathbf{0}^H.$$

3. (⋆) 证明: M 合同于某个 $\begin{pmatrix} S & O \\ O & \widetilde{T} \end{pmatrix}$.

> 答: 记 $R = SL$, 则 $R^H = L^H S$. 考虑初等变换 (也就是打洞)
>
> $$\begin{pmatrix} I & O \\ -L^H & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & R \\ R^H & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & -L \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T - L^H SL \end{pmatrix}.$$

Ex 2 取定 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量 v_0. 定义线性变换

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad v\mapsto v-\big(2\cdot v^T\cdot v_0\big)v_0.$$

几何意义: 关于 v_0 的镜面反射.

1. ($\star$) 任取 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基. 记 φ 在这组基下的矩阵表示为 A. 证明 A 是正交矩阵, 且 $A^2=I$.

> 答: 记 $\varphi(e_\bullet)=e_\bullet\cdot A$.
>
> 1. 由定义, $\varphi\circ\varphi$ 是恒等映射, 因此 $A^2=I$.
> 2. 由以上, $\varphi(e_\bullet)$ 是可逆矩阵. 此时 $\varphi(e_\bullet)^T\cdot\varphi(e_\bullet)=A^Te_\bullet^Te_\bullet A=A^TA$. 结合 $\varphi(u)^T\cdot\varphi(v)=u^T\cdot v$, 得 $A^TA=I$. 从而 A 是正交矩阵.

2. ($\star\star\star$) 对任意正交矩阵 Q, 证明 $1\in\sigma(Q)\cup\sigma(AQ)$.

> 答: 假定 α 是正交矩阵 Q 对应的线性映射. 若 1 不是 α 的特征值, 则 $(\alpha-\mathrm{id}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的连续双射.
>
> 重要步骤: 存在 $x\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\alpha(x)-x$ 与 v_0 同向. 此时有垂直关系 $v_0^T\cdot(\alpha(x)+x)=0$.
>
> 因此,
>
> $$\varphi(x)=x-2(x^Tv_0)\cdot v_0=x-(x^Tv_0)\cdot v_0+(\alpha(x)^Tv_0)v_0=\alpha(x).$$
>
> 依照 $\varphi^2=\mathrm{id}$, 记 $x=\varphi(y)$, 则 1 是 $\alpha\circ\varphi$ 的特征值. 矩阵角度看, 1 是 AQ 的特征值.

Ex 3 称 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是正规的, 当且仅当 $AA^H = A^H A$, 此处 A^H 是共轭转置. 以下是正规的等价条件.

- $[A, B] := AB - BA$ 是一个惯常记号.

1. ($\emptyset$) 存在酉相似 $A = U^H \Lambda U$, Λ 是某一对角矩阵.

> 答: 若 A 与 A^H 交换, 记 $A = U^H T H$ (Schur 上三角化). 比较 $\mathrm{tr}(TT^H) = \mathrm{tr}(TT^H)$, T 是对角矩阵.
>
> 若 $A = U^H \Lambda U$, 显然.

2. ($\star$) 存在酉矩阵 U 使得 $AU = A^H$.

> 答: 若 $AU = A^H$, 代入 Schur 上三角化 $A = V^H T V$, 得 $TVU = T^H$. 比较 $\mathrm{tr}(\text{左} \cdot \text{左}^H) = \mathrm{tr}(\text{右} \cdot \text{右}^H)$, 得 $\mathrm{tr}(TT^H) = \mathrm{tr}(TT^H)$, 从而 T 是对角矩阵. 因此 A 是正规矩阵
>
> 若 $A = V^H \Lambda V$ 是正规矩阵, 则存在酉矩阵 U 使得 $\Lambda U = \Lambda^H$. 此时 $A(V^H U V) = A^H$.

3. ($\star$) A 的奇异值恰好是特征值的绝对值.

> 答: 考虑 Schur 上三角化 $A = U^H T U$. 注意到 $\sigma(TT^H)$ 恰为 T 对角元模长的平方, 当且仅当 T 是对角矩阵 (取迹).

4. ($\star\star\star$) A 与 $[A, A^H]$ 可交换.

> 答: 最快捷的方式是计算 $0 = \mathrm{tr}([A, [A, A^H]] \cdot A^H) = \text{下一问}$.
>
> - 一般结论: (假定域的特征是 0.) 若 $[A, [B, A]]$ 是幂零矩阵, 则 $[B, A]$ 是幂零矩阵.
> - 一般结论的证明: 固定 B, 定义 $D(X) := [B, X]$. 此时, 对任意多项式 f 都有
>
> $$D(f(X)) = f'(X) \cdot D(X).$$
>
> 取 f 是 A 的零化多项式, 则 $f'(A) \cdot D(A) = O$. 计算二阶导数
>
> $$D(D(f(A))) = f''(A) \cdot D(A)^2 + f'(A) \cdot D(D(A)).$$
>
> 右侧乘以 $D(A)$, 得 $f''(A) \cdot D(A)^3 = O$. 如此往复归纳, 存在正整数 N 使得 $f^{(\deg f)}(A) \cdot D(A)^N = O$. 由于域的特征是 0, 故 $D(A)$ 幂零.
>
> - 使用一般结论证明此题: $[A, A^H]$ 是幂零矩阵, 但同时可以对角化, 从而只能是零矩阵.

5. ($\star\star$) $\mathrm{tr}(AAA^H A^H) = \mathrm{tr}(AA^H AA^H)$.

> 答: 最快捷的方法是定义内积 (参考 Frobenius 范数):
>
> $$\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \,\&\, \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^H B).$$
>
> 此时有恒等式 $\|AA^H - A^H A\|^2 = 2(\|AA^H\| - \|A^2\|^2)$. 左边取零 (正规) 当且仅当右边取零 (迹条件).

6. ($\star\star$) 存在唯一的分解 $A = A_1 + iA_2$, 使得 $A_1 = A_1^H$, $A_2 = A_2^H$, 且 $[A_1, A_2] = O$.

> 答: 若右侧条件满足, 则 A 与 A^H 交换.
>
> 若 A 正规, 将酉对角分解的 Λ 写作实部与虚部即可 (存在性证毕). 下说明这一分解的唯一性.
>
> - 若 $A_1 + iA_2 = B_1 + iB_2$ 是另一种符合条件的分解, 取共轭转置得 $A_1 - iA_2 = B_1 - iB_2$. 解得 $A_1 = B_1$ 且 $A_2 = B_2$.

Ex 4 ($\star\star\star$) 证明: $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是两个自伴矩阵的乘积, 当且仅当 A 与 A^H 相似.

答: 若 $A = PQ$ 是两个自伴矩阵的乘积, 则对任意相似矩阵 $A \to F^{-1}AF$,

$$F^{-1}PF^{-1,H} \cdot F^HQF = F^{-1}AF$$

也是两个自伴矩阵的乘积. 此时不妨设 $A = \begin{pmatrix} D & O \\ O & N \end{pmatrix}$, D 是所有可逆 Jordan 块, N 是所有幂零 Jordan 块.

代入 $AP = PA^H$, 得 $P = \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}$. 类似地, $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$.

- 先证明 $D \sim D^H$. 这是因为 $D = P_1Q_1 \sim Q_1P_1 \sim D^H$. (相似 $LR \sim RL$ 对可逆矩阵成立).
- $N \sim N^H$ 是显然的. 因为 $N(N)$ 与 $N(N^H)$ 有相同的零空间维数序列.

因此 $A \sim A^H$.

反之, 若 $L^{-1}AL = A^H$, 则 $A \cdot (L + L^H) = (L + L^H) \cdot A^H$. 因此, $(L + L^H)$ 与 $A \cdot (L + L^H)$ 都是自伴矩阵.

$$A = (A \cdot (L + L^H)) \cdot (L + L^H)^{-1}$$

即为所求. (此处可通过 $L \mapsto \lambda I + L$ 之类的换元, 使得 $\sigma(L) \cap \sigma(-L^H) = \emptyset$, 即, $(L + L^H)$ 可逆).

Ex 5 以下 A 与 B 是实对称半正定矩阵.

1. (⋆) 证明: $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$. 若 A 正定, 则取等当且仅当 $B = O$.

> 答: 使用熟知结论: 实对称半正定矩阵有唯一的实对称半正定平方根. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(\sqrt{B}A\sqrt{B}) \geq 0$. 若 A 正定, 则取等当且仅当 $\sqrt{B} = O$, 即 $B = O$.

2. (⋆) 证明: $\operatorname{tr}(A) \cdot \lambda_{\min}(B) \leq \operatorname{tr}(AB) \leq \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda_{\max}(B)$.

> 答: $\operatorname{tr}(\sqrt{A}(\lambda_{\max}(B) - B)\sqrt{A}) \geq 0$. 另一侧同理.

Ex 6 任取实多项式 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 以及 $g(y)=(y-y_1)\cdots(y-y_n)$. 若有

$$x_0 \le y_1 \le x_1 \le y_2 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le y_n \le x_n.$$

则称 f 与 g 的根是交错的.

1. ($\star$) 证明: 任意实线性组合 $af+bg$ 的根都在 $\mathbb{R}$ 内.

> 答: 采用微扰法, 不妨设题设中的不等号都不取等.
>
> 对 $0\le t\le 1$, 记多项式 $tf+(1-t)g$ 在 $\mathbb{C}$ 上的所有根为 $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$, 使得所有
>
> $$x_i:[0,1]\to\mathbb{C},\quad t\mapsto x_i(t)$$
>
> 是连续函数. 直观地, $y_i=x_i(0)$, $x_i=x_i(1)$.
>
> - 先断言对 $t_1\ne t_2$, 总有 $\{x_i(t_1)\}_{i=1}^n\cap\{x_i(t_2)\}_{i=1}^n=\emptyset$; 若不然, f 与 g 有相同的根, 矛盾.
> - 对任意 t, 所有轨迹关于 $\mathbb{R}$ 对称. 这说明对严格单增的 $t:0\nearrow 1$, 必有严格单增的实函数 $x_i(t):y_i\nearrow x_i$.

2. ($\star\star$) 证明逆命题: 若 f 与 g 满足 $\deg f=\deg g+1$, 且任意实线性组合 $af+bg$ 的根全是实数, 则 f 与 g 的根交错.

> 答: 见上一题的解答.

3. ($\emptyset$) 若 n-阶复方阵满足 $A=A^H$, 记 B 是任意 $(n-1)$-阶主子式 (B 有 n 种取法). 证明: A 与 B 的特征根交错.

> 答: 例如取删去 i 行与 i 列的主子式, 在 $xI-A$ 的第 i 行提取出 x-项即可. 注意: Hermite 矩阵的特征多项式是实系数的.

4. ($\star\star$) 这一具有组合性质的结论可以推得 Schur–Horn 定理.

> - (Schur–Horn) 给定 n 阶Hermite 矩阵 $(A=A^H)$. 若 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$ 是 A 的所有对角元, $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$ 是 A 的所有特征值, 则对任意 $1\le k\le n$, 都有
>
> $$d_1+d_2+\cdots+d_k\le\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k.$$
>
>   特别地, $k=n$ 时取等号 (考虑迹).
>
> 答: 不妨设 A 的对角元 $d_i=a_{ii}$ 恰是由大到小排列的. 记 λ_k^t 为 $(n-t)$-阶顺序主子式的第 k 大特征值. 此时
>
> $$d_1+\cdots+d_{n-1}=\lambda_1^1+\cdots\lambda_{n-1}^1\underset{\text{上题结论}}{\le}\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}$$
>
> 类似地,
>
> $$d_1+\cdots+d_{n-2}=\lambda_1^2+\cdots\lambda_{n-2}^2\underset{\text{上题结论}}{\le}\lambda_1^1+\cdots+\lambda_{n-2}^1\underset{\text{上题结论}}{\le}\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-2}.$$
>
> 之后就是照例归纳.

5. ($\star$) (Courant-Fischer) 以下是谱分解的推论, 之前作业证过. Hermite 矩阵 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的第 k 大特征值是

$$\max_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=k}\left(\min_{x\in V,\|x\|=1}x^HAx\right)。$$

第 k 小特征值表述类似.

> 答: 考虑 U^HAU, 用垂直的特征向量 (U 的所有列向量) 的线性组合表示 x 即可.

6. ($\star\star$) 作为推论, 得 Hermite 矩阵的 Weyl 不等式

$$\lambda_{i+j-1}(A+B)\le\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\le\lambda_{i+j-n}(A+B).$$

提示: 将 min, max 转化做 "先 $\forall$ 再 $\exists$"-式的逻辑命题. 若遇到不等号 $\le$, 将不等号左侧的 λ 改述作 $\max\min$, 将不等号右侧的 λ 改述作 $\min\max$. 最后比较子空间维数即可.

答: 例如证明

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \le \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$$

考虑

$$\max_{\dim V=i+j-1}\min_{x\in V,\|x\|=1}(x^HAx + x^HBx) \le \min_{\dim V_A=n-i}\max_{x_A\in V_A,\|x\|=1} x^HAx + \cdots B$$

也就是对任意 $\dim V = i+j-1$, 任意 $\dim V_A = n-i$, 以及任意 $\dim V_B = n-j$, 总存在 $x \in V$, $x_A \in V_A$ 与 $x_B \in V_B$ 使得

$$x^HAx + x^HBx \le x_A^HAx_A + x_B^HBx_B.$$

任取单位向量 $x \in V \cap V_A \cap V_B \neq 0$ 即可.

Ex 7 以下是一些 Cayley 变换的例子.

- 此题就是反复验证, 解答从略.

> 楔: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 上的单位圆周 $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 不是线性空间, 但可以舍弃一个点 $(1,0)$, 使得有双射
>
> $$\mathbb{R} \xrightarrow[\sim]{\text{双射}} (S^1 \setminus \{(0,i)\}), \quad x \mapsto \frac{x-i}{x+i}$$
>
> 这一双射的逆映射也可以直接写出. 以上一对互逆有理映射建立了 $\mathbb{R}$ 与 S^1 的双有理等价.
>
> 类似地, 全体正交矩阵不构成线性空间. 试问: 能否舍弃一些体积为 0 的正交矩阵, 使得剩下的正交矩阵通过某个有理多项式双射对应于线性空间?

1. ($\star$) 若 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是自伴矩阵, 则 $(A - iI) \cdot (A + iI)^{-1}$ 是酉矩阵.
2. ($\star$) 证明以上建立了全体自伴矩阵与不以 1 为特征值的酉矩阵的双射对应. 试求逆映射?
3. ($\star\star$) 正交矩阵 (实矩阵) 也是酉矩阵. 试问: 以上哪类自伴矩阵的像是正交矩阵?

   > 提示: 反对称实矩阵恰好是正规矩阵的 i 倍.
   >
   > 推论: 反对称矩阵与不以 1 为特征值的正交矩阵双射对应. 记 M 是反对称矩阵, 则 $(I+M)(I-M)^{-1}$ 是正交矩阵.
   >
   > 例子: $n = 2$ 时, 得半角公式:
   >
   > $$\begin{pmatrix} 0 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   >
   > 例子: $n = 3$ 时, 得某次作业的行列式计算 $(w = 1)$:
   >
   > $$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{常数} \cdot \begin{pmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2(xy-wz) & 2(wy+xz) \\ 2(xy+wz) & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(wx+yz) & w^2-x^2-y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

4. ($\star\star$) 正交矩阵的行列式是 ± 1. 这表明反对称矩阵也能分作两类, 如何描述这一分类?
5. ($\star\star$) 记 $\mathrm{Sp}(2n) := \{A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$ (($\star\star$) 某次作业证明了 $\det A \neq -1$), 以及 $\mathrm{H}(2n) := \{A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = O\}$ (即考试题的 $\mathrm{sp}(2n)$). 证明:

   $$\{X \in \mathrm{Sp}(2n) \mid 1 \notin \sigma(X)\} \to \mathrm{H}(2n), \quad X \mapsto (I+X)(I-X)^{-1}$$

   是双射对应.

> 另一种将矩阵群拉直成线性空间的方法是考虑单位矩阵处的切平面.
>
> 试考虑以下乘法群与加法群的对应.
>
> - (乘法群) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 为可逆 n-阶实矩阵全体.
> - (加法群) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 为所有 n-阶矩阵全体.
>
> 乘法群的切平面 (导函数空间) 是加法群.
>
> 1. (乘法变加法) 定义较小的变量 t, 则
>
> $$(I + tA) \cdot (I + tB) \sim I + t(A + B).$$
>
>   这给出导数的对应 $A + B = (A + B)$.
>
> 2. (逆元变负元) 类似地, 乘法群的逆元对应加法群
>
> $$(I + tA)^{-1} = I + t(-A).$$
>
> 3. (单位元变零元) 显然 $I = I + t \cdot O$.
>
> ---
>
> (从 SL_n 到 $\mathfrak{sl}_n$) 记单参数变量 $g_t = I + tX$. 将 g_t 左乘在体积形式 (行列式) 上, 得

$$\Omega_t := g_t(e_1) \wedge g_t(e_2) \wedge \cdots \wedge g_t(e_n).$$

考虑 Ω_t 在 $t=0$ 处的导数，则分步求导法则表明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|_{t=0}(\Omega_t) &= \sum_{1\le i\le n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge X(e_i) \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \mathrm{tr}(X) \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).\end{aligned}$$

- 简单地说, 连续的线性变换 φ_t 连续地改变体积 Ω_t, 体积瞬时增长的倍数就是 φ_t 导数的迹. 这解释了线性映射的迹为何与基底的选取无关.

乘法群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 是行列式为 1 的全体 n-阶矩阵. 相应地, 对 $X \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$, 应有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|_{t=0}(\Omega_t) = 0$. 这说明 (请尝试说服自己)

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

(从 O_n 到 $\mathfrak{o}_n$; Sp_{2n} 到 $\mathfrak{sp}_{2n}$) 对双线性型 $\mathfrak{B} : \mathbb{R}^n \,\&\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 称矩阵 A 保持 $\mathfrak{B}$, 当且仅当

$$\mathfrak{B}(Au, Av) = \mathfrak{B}(u, v) \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}^n).$$

例如, 若 $\mathfrak{B}$ 是向量内积, 则 A 必然是正交矩阵. 依照定义, 所有保持 $\mathfrak{B}$ 的矩阵构成乘法群 $\mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$.

- 按照经验, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{B}}$ 定义作 $\mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$ 的某种微分. 分步求导表明 $X \in \mathfrak{o}_B$ 当且仅当

$$\mathfrak{B}(Xu, v) + \mathfrak{B}(u, Xv) = 0 \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}^n).$$

若 $\mathfrak{B}$ 是通常内积, 则 $\mathfrak{B}(u, v) = u^T I v$, 其中 $I \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

1. $A \in \mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$ 满足 $(Au)^T I (Av) = u^T v$, 亦即 $A^T A = I$. 通常记此时的 $\mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$ 为 O_n, 也就是正交矩阵群 (乘法群).
2. $X \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{B}}$ 满足 $(Xu)^T I v + u^T I (Xv) = 0$, 亦即 $X^T + X = O$. 通常记此时的 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{B}}$ 为 $\mathfrak{o}_n$, 也就是反对称矩阵群 (加法群).

若 $\mathfrak{B}$ 是某种反对称的内积, 定义作 $\mathfrak{B}(u, v) = u^T J v$, 其中 $J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. $A \in \mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$ 满足 $(Au)^T J (Av) = u^T J v$, 亦即 $A^T J A = J$. 通常记此时的 $\mathrm{O}_{\mathfrak{B}}$ 为 Sp_{2n}, 也就是辛矩阵群 (乘法群).
2. $X \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{B}}$ 满足 $(Xu)^T J v + u^T J (Xv) = 0$, 亦即 $X^T J + XJ = O$. 通常记此时的 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{B}}$ 为 $\mathfrak{sp}_{2n}$, 也就是 Hamilton 矩阵群 (加法群).

特别说明: SO_n 是 O_n 中行列式为 1 的正交矩阵组成的乘法子群, 同时也是包含 I 的连通分支. 由于切向量是局部性质, 故 $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{o}_n$. 我们证明过 Sp_{2n} 中矩阵的行列式必为 1, 从而定义 SSp_{2n} 是多此一举的.

对以上的群 G, 有一个自然的共轭群同态:

$$\mathrm{Ad} : G \to [G\text{ 的自同构群}], \quad g \mapsto \mathrm{Ad}_g := \begin{bmatrix} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{bmatrix}.$$

相应地, G 的微分给出的线性空间 $\mathfrak{g}$ 上有一个相应的运算

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to [\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}], \quad X \mapsto \mathrm{ad}_X := \begin{bmatrix} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ Y \mapsto [X, Y] = XY - YX \end{bmatrix}.$$

双线性映射 $[-,-] : \mathfrak{g} \,\&\, \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 具有以下两个特点:

1. (反对称) $[X, Y] = -[Y, X]$;
2. (Jacobi 恒等式) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

   - 结合反对称性, Jacobi 恒等式说明 ad 和 $[,]$ 可交换:

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) &= \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= [[X, Y], Z] \\ &= \mathrm{ad}_{[X,Y](Z)}.\end{aligned}$$

(Lie 括号的定义) 若类型是 $V \to V \to V$ 的双线性映射满足以上两条规则, 则称之 Lie 括号. 一个常见的例子是向量的外积

$$(\times) : \mathbb{R}^3 \,\&\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto u \times v.$$

(Lie 群与 Lie 代数) 以上具有群结构的流形 G 称作 Lie 群, 我们往往要求流形与群运算是光滑的. 群单位元附近的切平面是线性空间 $\mathfrak{g}$, 给 $\mathfrak{g}$ 配上 ad 诱导的 Lie 括号 $[-, -]$, 则称 $(\mathfrak{g}, [-, -])$ 是 G 对应的 Lie 代数.

尾记 如果想直观感受数学分析 (微分几何) 和复分析 (代数几何) 的区别, 不妨比对以上两种拉直乘法群的方式. Cayley 变换比较复变, Lie 群的处理方法比较数分.

Ex 8 ($\star\star\star$) 若 $A^2+B^2=2AB$, 证明: A 与 B 的特征多项式相等.

答: 若 $A^2-2AB+B^2=0$, 则

$$(xI-A)^2-2(xI-A)(xI-B)+(xI-B)^2=0.$$

从而只需证明 $\det(A)=\det(B)$. 化原式为 $A(A-B)=(A-B)B$.

1. $n=1$ 时, $\det A=\det B$ 是显然的.

2. 若 $n\leq k-1$ 时成立 ($k\geq 2$), 下证明 $n=k$ 时 $\det A=\det B$.
   a. 若 $A-B$ 可逆, 则显然.
   b. 若 $N(A-B)=:V\neq 0$, 则 $AV=BV\subseteq V$. 注意到 $A|_V=B|_V$, 从而在 $V\oplus V^{\perp}$ 下有矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix}C_V & A_{12}\\ O & A_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}C_V & B_{12}\\ O & B_{22}\end{pmatrix}.$$

   带入原式得 $A_{22}^2-2A_{22}B_{22}+B_{22}^2=0$, 据归纳假设知

$$\det A=\det C_V\cdot\det A_{22}=\det C_V\cdot\det B_{22}=\det B.$$

同样的方法可以证明: 可交换矩阵能同时 Schur 上三角化.