第二次作业(自学任务)

Ex. 0. 自学任务, 依自身情况选择性地完成; 但

★ 所有人必须背诵 Example. 9. 的最后一段话!

概念辨析: 群, 加法群, 群同态, 域, 线性空间, 线性张成. 建议依次地阅读下题.

> *有山先生有个好习惯: 若证明中的 N 依 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ 而定, 则板书上定会写作 $N(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ 而非 N.*
>
> *以下记号未免累赘: 其目的纠谬. 若不适应, 可自行转写, 誊抄之.*
>
> **Example.** *隅举了若干鲜活且初等的例子.* ***供穿插地阅读.***

(1) 请查找资料, 补全群的定义. 称集合 G 是一个群, 若存在一组资料 $(G, e, \cdot)$, 满足:

1. $e \in G$ 是群中固定的元素, 称作单位元;
2. $\cdot : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh$ 是集合的映射, 这里 $G \times G$ 是集合的笛卡尔积;
3. 补全结合律, 单位律, 逆元律.

(2) 请查找资料, 补全交换群 (也叫 Abel 群, 加群, 加法群) 的定义. 称 V 是一个交换群, 若存在一组资料 $(V, 0, +)$, 满足:

1. $(V, 0, +)$ 是群;
2. 补全交换律.

(3) 请查找资料, 学习群同态的定义. 称 $\varphi : (G, e_G, \cdot_G) \to (H, e_H, \cdot_H)$ 是群同态, 若

1. $\varphi : G \to H$ 是集合映射;
2. $\varphi : e_G \mapsto e_H$ 对应了单位元;
3. $\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a_G) \cdot_H \varphi(b_H)$ 恒成立.

(4) 请查找资料, 补全域的定义. 称 $\mathbb{F}$ 是一个域, 若存在一组资料 $(\mathbb{F}, 0, +, 1, \cdot)$, 满足:

1. $(\mathbb{F}, 0, +)$ 是交换群;
2. $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ 是交换群;
3. 补全分配律.

(5) 请查找资料, 学习线性空间的定义. 线性空间是指一组资料
$((\mathbb{F}, 0_{\mathbb{F}}, +_{\mathbb{F}}, 1, \cdot), (V, 0_V, +_V))$, 满足:

1. $(V, 0_V, +_V)$ 是加法群;
2. 集合 $\mathbb{F}$ 是一族由群 $(V, 0_V, +_V)$ 到自身的群同态. 换言之, 任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 对应一个群同态

$$\lambda : V \to V; \quad v \mapsto \lambda v, \quad 0_V \mapsto 0_V, \quad \lambda(v +_V v') = \lambda(v) +_V \lambda(v');$$

3. $(\mathbb{F}, 0_{\mathbb{F}}, +_{\mathbb{F}}, 1, \cdot)$ 是域, 其加法群结构与 $(V, 0_V, +_V)$ 者相匹配. (**这是什么意思?**)

- 在 *Linear Algebra Done Right* 中找出线性空间的八条规则, 与上述比对.

(6) 请查找资料, 学习线性张成的定义. 给定线性空间 $(\mathbb{F}, V)$, 定义函数 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}$ 如下:

1. 函数的定义域 (来源) 是 V 的全体子集 $\mathscr{S}$;
2. 函数的余定义域 (去向) 是 $(\mathbb{F}, V)$ 的全体线性子空间;
3. 输入 $S \in \mathscr{S}$ (也就是 $S \subset V$), 输出一个包含 S 的最小线性子空间 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(S)$.

结合以上定义,

1. 若 $\varnothing_V$ 是 V 的空子集, 则 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(\varnothing_V)$ 是什么?
2. 若 S 是有限集, 请说明以上定义的 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(S)$ 与课堂中的表述一致.
3. 若 S 是无限集, 则 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}$ 是什么?

Example. 鲜活而初等的例子.

1. (群) 取集合 $G = \{f \mid f : [0,1] \to [0,1]\ \text{是连续映射}\}$. 单位元 e_G 为恒等映射, 乘法 $\cdot_G$ 是映射的复合. 该群非交换群.
2. (交换群) $n \times n$ 规格的实矩阵关于矩阵加法与全零矩阵构成交换群.
3. (群) $n \times n$ 规格的**可逆**实矩阵关于矩阵乘法与恒等矩阵构成群. 该群非交换群.
4. (交换群) 例如 $(\mathbb{Z}, 0, +)$ 与 $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$. 对抽象的交换群, **往往将其二元运算写作加法**. 职是之故, 交换群常称作加群.
5. (群同态) G 是全体二阶可逆实矩阵关于矩阵乘法与单位矩阵构成乘法群, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 是非零实数构成的乘法群 (通常意义下). 此时 $\det : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 是群同态, 因为
$$\det(A \cdot_G B) = \det(A) \cdot_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \det(B).$$
6. (域) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 都是域. 二元集 $\{\text{奇数}, \text{偶数}\}$ 关于小学课本的常规运算构成也域.
7. (域) 通常意义下的 $\mathbb{Z}$ 不是域, 因为乘法结构 $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ 不是群. 四元数不是域, 因为其乘法非交换.
8. (线性空间) 若固定来源 $I \subset \mathbb{R}$ 与去向 $J \subset \mathbb{R}$, 则所有函数构成线性空间, 所有连续函数构成线性空间, 所有可微函数构成线性空间, 所有多项式函数构成线性空间.
9. (线性张成) 取以上 $I = J = \mathbb{R}$, 记 V 是全体实函数构成的 $\mathbb{R}$-线性空间. 则
   - $\mathrm{Span}_{(\mathbb{R},V)}(\{1, x\})$ 是所有一次函数,
   - $\mathrm{Span}_{(\mathbb{R},V)}(\{\sin x, \cos x\})$ 包含了周期函数,
   - $\mathrm{Span}_{(\mathbb{R},V)}(\{1, x, x^2, x^3, \ldots\})$ **恰好是所有多项式函数, 形式和** $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ **不在此列!**

Remarque. 列举上一级强基班**频繁出现**的错误.

1. 不知道 Span 是有限和, 甚至光明正大地断言 e^x 是多项式.
2. 在涉及多个域时, 混用复线性空间 V 与实线性空间 V.
3. 在未确认全集的前提下, 对毫无关联的两个集合使用 $\cup, \cap, \subset$, 甚至 $+$ 等运算.
4. (类似上一错误, 分不清等号和同构) 在不加说明的情况下, 自动把 n 维空间视作 $n+k$ 维空间的子空间.
5. 分不清 $\varnothing, 0$, 与 $\{0\}$.
