Jordan 标准型

Problem 0 (线性映射的矩阵表达) 左乘方阵

$$(A\cdot) : V \to V, \quad v \mapsto Av$$

是有限维线性空间到自身的映射. 假定存在一组 V 的基 $\{v_i\}_{i=1}^n$, 满足

$$Av_k = v_{k+1}, \quad (\text{约定 } v_{n+1} = \mathbf{0}).$$

现将列向量排列成可逆矩阵 $X := (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n)$, 则 $X^{-1}v_k = e_k$. 此时有 $AXe_k = Xe_{k+1}$.

类比以上列向量的排列, $\{e_k\}_{k=1}^n$ 排列成可逆矩阵 I. 此时有

$$(X^{-1}AX\cdot) : V \to V, \quad e_k \mapsto e_{k+1}.$$

依照直接的观察,

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} : V \to V, \quad e_k \mapsto e_{k+1}.$$

这说明 $X^{-1}AX$ 等于上述矩阵.

- 请尝试解释如下事实: 矩阵 A 与 B 相似, 当且仅当他们是同一线性映射在不同基下的矩阵表示.

Problem 1 (零空间的增长) 记 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是任意域上的方阵. 约定 $A^0 = I$ 是单位矩阵, 以及 $A^{k+1} = A \cdot A^k$.

1. 证明有子空间的包含列

$$0 = N(A^0) \subset N(A^1) \subset N(A^2) \subset \cdots$$

特别地, 若 $N(A^N) = N(A^{N+1})$, 则 $N(A^{N+1}) = N(A^{N+2}) = \cdots$.

2. 假定存在**最小的**正整数 N 使得 $N(A^N) = N(A^{N+1})$. 证明 $N \leq n$.

3. (Slightly challenging?) 证明: $\dim N(A^{N+2}) - \dim N(A^{N+1}) \leq \dim N(A^{N+1}) - \dim N(A^N)$. 换言之, 散点图 $\left\{(k, \dim N(A^k))\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是上凸函数.

Problem 2 (幂零矩阵的标准型) 仍假定 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是**任意域上**的幂零方阵.

1. 证明: 存在正整数 $N \le n$ 使得 $A^N = O$.

2. (若觉得简单, 可以跳过) 假定 $n = 3$, $A^2 \neq O$, 但 $A^3 = O$. 证明: 存在向量 $\{x, y, z\}$ 使得 $Ax = y$, $Ay = z$, 但 $Az = \mathbf{0}$. 换言之, 存在链

$$\boxed{x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{A} z \xrightarrow{A} \mathbf{0}}.$$

同时, 仿照 **Problem 0** 说明 A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (若觉得简单, 可以跳过) 假定 $n = 3$, $A \neq O$, 但 $A^2 = O$. 证明: 存在向量 $\{x, y, z\}$ 使得 $Ax = y$, $Ay = Az = \mathbf{0}$. 换言之, 存在链

$$\boxed{x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{A} \mathbf{0}}, \quad \boxed{z \xrightarrow{A} \mathbf{0}}.$$

同时, 仿照 **Problem 0** 说明 A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (Slightly challenging) 使用归纳法证明: 存在若干条链

$$\boxed{x_i^1 \xrightarrow{A} x_i^2 \xrightarrow{A} x_i^3 \xrightarrow{A} \cdots x_i^{n_i} \xrightarrow{A} \mathbf{0}}_{i=1}^{s}.$$

且 $\bigcup_{i=1}^s \{x_i^j\}_{1\le j\le n_i}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基. 作为推论, $\sum_{i=1}^s n_i = n$.

5. 不妨设 $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_s$. 证明 $\dim N(A) = s$, 也就是 $\{x_i^1 \mid i \ge 1\}$ 的大小.

6. 证明: 对给定的正整数 k, 集合 $\{x_i^k \mid i \ge 1\}$ 的大小是 $\dim N(A^{k-1}) - \dim N(A^k)$.

7. 证明: A 相似于分块对角矩阵 $\operatorname{diag}(J_{n_1}(0), \ldots, J_{n_s}(0))$. 此处, $J_k(0)$ 是大小为 k, 特征值为 0 的 Jordan 块.

8. 假定 $\lambda \in \mathbb{F}$, 方阵 A 能被形如 $(x-\lambda)^l$ 的多项式零化. 证明: A 相似于分块对角矩阵 $\operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda), \ldots, J_{n_s}(\lambda))$.

Problem 3 假定 A 与 B 是**一般域**上的方阵, 下研究矩阵乘法式 $AX-XB$.

1. 假定 $\mathbb{F}\subset\mathbb{K}$ 是两个包含的域, 例如 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, 或是 $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$). 任取 $\mathbb{F}$ 上的矩阵 M, 记 m 是 $\mathbb{F}$-线性空间 $\{x\in\mathbb{F}^N \mid Mx=0\}$ 的维数; 由于 A 也是 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 记 n 是 $\mathbb{K}$-线性空间 $\{x\in\mathbb{K}^N \mid Mx=0\}$ 的维数. 证明 $m=n$.

2. 假定 $\varphi: V\to V$ 是有限维线性空间到自身的线性映射. 证明: φ 是单射, 当且仅当 φ 是满射, 亦当且仅当 φ 是双射.

3. 证明: $AX-XB=O$ 只有零解, 当且仅当 A 与 B 的特征多项式互素. 提示: 可以使用 Hamilton-Cayley 定理.

4. 给定矩阵 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 和 $B\in\mathbb{F}^{m\times m}$. 证明以下是等价的 (建议灵活使用先前作业中的结论).

   1. 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=O$ 只有零解.
   2. 任意给定矩阵 $C\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=C$ 总有解.
   3. 任意给定矩阵 $C\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 对未知量 $X\in\mathbb{F}^{n\times m}$, 方程 $AX-XB=C$ 有且仅有唯一的解.
   4. 对任意矩阵 C, 总有相似矩阵
   $$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$
   5. A 与 B 的特征多项式互素.

> 一处重要概念辨析.
>
> 1. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 的充要条件: 存在 X 与 Y 使得 $AX+YB=C$.
> 2. $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的充要条件: 存在 X 使得 $AX-XB=C$.

Problem 4 以下是求解 Jordan 标准型的一般步骤.

1. 证明: A 相似于一个分块上三角矩阵,

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & A_s \end{pmatrix},$$

其中, A_i 配有一个不可分解的多项式 f_i, 使得 $f_i(A_i)$ 是幂零矩阵.

> 以下是一种可行的解法: 假定 A 是一般域 $\mathbb{F}$ 上的 n-阶方阵, 则 A 的特征多项式可以分解作 $\mathbb{F}[x]$ 中不可分解多项式的乘积, 记作 $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{n_i}$. 对多项式 f_i, 定义
>
> $$V_i := \{v \mid \text{存在 } N \geq 1, \text{使得 } (f_i(A))^N \cdot v = \mathbf{0}\}.$$
>
> 此时有直和分解 $\mathbb{F}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$. 对于任意 $1 \leq t \leq s$, 子空间 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_t$ 是关于左乘 $(A\cdot)$ 这一线性映射的不变子空间.

2. 使用 **Problem 3** 说明上一小问的分块上三角矩阵可以取作分块对角矩阵. 换言之, 证明存在相似矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & A_s \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_s \end{pmatrix}.$$

3. 这是惟一的需要使用复数域的地方! 如果所有 $f_i(x) = (x - \lambda_i)$ 都是一次多项式, 则所有 $(A_i - \lambda_i I)$ 都是幂零矩阵, 因此相似于 **Problem 2** 中所得的标准型.

4. 假若 f_i 不是一次多项式, 请自行学习有理标准型相关知识.

Problem 4+ 在许多情境下, 不便对实方阵使用有理标准型. 以下给出实方阵的一种标准型.

1. 假定 A 与 B 是实方阵. 若存在可逆复方阵 C 使得 $C^{-1}AC = B$, 则存在可逆实方阵 R 使得 $R^{-1}AR = B$.

   > 这对一般域也成立: 两个矩阵相似, 当且仅当它们在某一扩域上相似. 此处的证明类似 Problem 3.1, 只需将初等因子组写作形如 $Fx = \mathbf{0}$ 的式子即可.

2. 若 A 是实方阵, 其 (视作复方阵) Jordan 形是 $\operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_s)$. 证明: 若存在 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 使得 $J_d(z)$ 是 A 的 Jordan 块, 则 $J_d(\overline{z})$ 也是 A 的 Jordan 块.

   > 提示: $(A - zI)$ 与 $(A - \overline{z}I)$ 有相同的零空间增长序列 (Problem 1.1), 从而共轭的 Jordan 块成对出现.

3. 证明并推广以下相似矩阵的结论:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 & & \\ & e^{i\theta} & & \\ & & e^{-i\theta} & 1 \\ & & & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   由此描述实方阵的标准型.

4. 证明: 任意两个实方阵都是两个**实对称**方阵的乘积.

   > 先前作业 (对称矩阵相关) 出现过类似的构造.

复矩阵特征根的重要工具: Gershgorin 圆盘

Definition 给定 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 对 $1 \le k \le n$, 定义复平面 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的第 i 个闭圆盘如下:

- 圆盘的中心是 $a_{i,i} \in \mathbb{C}$,
- 圆盘的半径是 $\sum_{1\le j\le n,\ \text{且}\ j\ne i} |a_{i,j}|$.

以上定义了第 i 个 Gershgorin 圆盘, 记作

$$D_i = \left\{ z : |z - a_{i,i}| \le \sum_{1\le j\le n,\ \text{且}\ j\ne i} |a_{i,j}| \right\}.$$

Problem 5 (Gershgorin 圆盘定理) 对上述复方阵 A, 任取特征值 λ 和相应特征向量 v, 满足 $Av = \lambda v$.

1. 假定 v 中第 i 个分量模长最大, 证明 $\lambda \in D_i$.
2. 作为推论, $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 中包含了 A 的所有特征值.
3. 记复矩阵 $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 尝试求出 A 的所有特征根, 并画出所有的 Gershgorin 圆盘. 对 A^T 作类似的操作.
4. 假定 A 与 B 是可对角化的 n-阶复方阵. 证明: 对 $t \in [0,1]$, 存在复平面上连续的道路 $\{\lambda_i : [0,1] \to \mathbb{C}\}_{i=1}^n$, 满足
   1. $\{\lambda_i(0)\}_{i=1}^n$ 恰是 A 的所有特征值;
   2. $\{\lambda_i(1)\}_{i=1}^n$ 恰是 B 的所有特征值;
   3. $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^n$ 是 $(1-t)A + tB$ 的特征值.

   思考: 对某些 $t \in (0,1)$, 矩阵 $(1-t)A + tB$ 未必可对角化. 此时的特征道路应作何种调整?
5. 假定 A 可对角化, 且 $\bigcup_{i=1}^n D_i$ 有两个连通分支 $\bigcup_{i=1}^k D_i$ 与 $\bigcup_{i=k+1}^n D_i$. 证明: 则第一个连通分支恰包含 k 个特征值, 第二个连通分支包含 $n-k$ 个特征值.
6. 假定 A 的 n 个圆盘两两不交, 则 A 一定可对角化, 且每一圆盘中恰好包含一个特征值.

Problem 6 以下研究复矩阵的幂方问题.

1. 找出所有 2×2 的复矩阵 A, 使得不存在 $B^2=A$. 使用 Jordan 标准型, 将这个结论推广至 $n\times n$ 阶的复矩阵.

> 提供一个计算矩阵级数的一般方法:
>
> $$f(J_n(\lambda))=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$
>
> 假定 A 是 n 阶矩阵, f 是解析函数 (依照收敛的形式幂级数定义的函数). 那么 $f(A)$ 仅与 f 的前 $(n-1)$ 阶导数相关.

2. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 若对一切 $1\le i\le n$ 都有

$$2|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,$$

则 A 是可逆矩阵.

3. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是有趣的, 当且仅当对一切 $1\le i\le n$, 都有

$$2a_{i,i}>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶有趣矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^2.$$

4. 假定 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 称 A 是奇妙的, 当且仅当对一切 $1\le i\le n$, 都有

$$3|a_{i,i}|>\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

试用圆盘定理证明以下是单射:

$$n\text{-阶奇妙矩阵}\to\mathbb{R}^{n\times n},\quad A\mapsto A^3.$$

5. 称一个复方阵 A 是本质正的, 若 A 的所有特征根都是正实数. 试证明: 若 A 与 B 都是本质正的矩阵, 且 $A^2=B^2$, 则 $A=B$.

> 提示: 对等式 $A(A-B)=(A-B)(-B)$ 使用 Problem 3 中的某些结论.
>
> 特别地, 可以对本质正的条件做一些弱化, 例如本题第 3 小问.

6. 若 A 与 B 是本质正的, 且 $A^3=B^3$, 则 $A=B$.

> 提示: 记 $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ 是三次单位根, 考虑方程组
>
> $$\begin{cases} A(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)=(A^2+\omega_1AB+\omega_1^2B^2)(\omega B); \\ A(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)=(A^2+\omega_2AB+\omega_2^2B^2)(\omega B). \end{cases}$$
>
> 特别地, 可以对本质正的条件做一些弱化, 例如本题第 4 小问.

7. 证明: 本质正的矩阵有唯一的本质正的 n-次方根.

> 作为推论, 对任意本质正的方阵 A, 可以唯一地定义 A 的实数次幂, 使得幂函数是连续函数, 且一切 A^x 都是本质正的.