



高等代数 (荣誉) II 期末测试

试卷内容 + 参考答案 + 评分标准

问题 1 (30 points). Fill-in-the-Blank Questions (No need to write the process)

1. For any vector space V , what is the relation between V^{**} and V .
2. Is $(x-1)^2(x-2)^2 \cdots (x-2024)^2 + 1$ irreducible over \mathbb{Q} ?
3. What is the *Fundamental Theorem of Algebra*?
4. Let V be an n -dimensional Euclidean space and $v_1 \neq v_2 \in V$ with $\|v_1\| = \|v_2\|$. Find a v such that the linear transformation

$$\varphi : V \rightarrow V, \quad u \mapsto u - 2(u, v)v$$

maps v_1 to v_2 .

5. Write down the definition of tensor product of $V \otimes U$ of vector spaces.
6. Give the construction of the tensor product $V \otimes U$.
7. Find $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, that is, the dimension of $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ over \mathbb{C} .
8. Find $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.
9. For matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ and $B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ with $\det(A) = 2$ and $\det(B) = 4$, find $\det(A \otimes B)$.
10. Let $A := \text{diag}(0, 1, 1, 2, 2) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$. Define

$$\varphi : \mathbb{C}^{5 \times 5} \rightarrow \mathbb{C}^{5 \times 5}, \quad X \mapsto AX - XA^T.$$

Find $\dim_{\mathbb{C}}(\ker \varphi)$.

解答 1. 解答如下.

1. 写出不依赖坐标的典范态射

$$\theta_V : V \rightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \{f \mapsto v(f)\}_{f \in V^*}.$$

特别地, $\dim V < \infty$ 时 θ_V 是线性同构.

若 V 是无限维: 在承认公理 “ $\forall v \in V \exists f \in V^*(f(v) \neq 0)$ ” 时 θ_V 是单射, 在承认选择公理时 θ_V 是严格的单射.

2. 不可约. 下采用反证法证明. 若该多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 意义下可约, 则该多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 意义下可约 (Gauss 引理). 因此存在因式 $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 满足 $1 \leq \deg g \leq 2024$. 由于 $\{g(i)\}_{i=1}^{2024} \subset \{\pm 1\}$, 且 g 没有零点, 因此 $g(x) - 1$ 或者 $g(x) + 1$ 有 2024 个相异零点. 遂有

$$g(x) = \lambda \cdot (x-1)(x-2) \cdots (x-2024) \pm 1 \quad (\lambda \in \mathbb{Q}).$$

容易检验, 此时 g 与原多项式互素, 故矛盾.

3. 代数闭域 (或 \mathbb{C}) 上的非常值多项式存在该域上的根.
4. $\|v_1 - v_2\|^{-1} \cdot (v_1 - v_2)$. 几何地, v 是单位反射向量, 其方向是 v_2 指向 v_1 .
5. $V \otimes U$ 即双线性映射 $\iota : V \times U \rightarrow V \otimes U$, 定义作如下普适映射问题的解: 对任意线性空间 W , 所有双线性映射 $F : V \times U \rightarrow W$ 双射对应于所有线性映射 $f : V \otimes U \rightarrow W$, 对应方式是 $F = f \circ \iota$.
6. $V \otimes U$ 是集合的 Cartesian 积 $V \times U$ 在约束 R 下的自由化线性空间. R 取遍如下三类式子:

$$\begin{aligned} & (u_1 + u_2, v_1) - (u_1, v_1) - (u_2, v_1), \quad (u_1, v_1 + v_2) - (u_1, v_1) - (u_1, v_2), \\ & (u_1, \lambda v_1) - (\lambda u_1, v_1) \quad (\forall u_i \in U, v_i \in V, \lambda \in \mathbb{F}). \end{aligned}$$

注: 集合 X 的自由化 k -线性空间 (FX) 的一种定义是 $i(X)$ 的线性张成, 此处

$$i : X \hookrightarrow (\text{Hom}_{\text{Sets}}(X, k))^*, \quad x \mapsto [f \mapsto f(x)]. \quad (1)$$

此时 $V \otimes U := F(V \times U)/N$, 子空间 $N \subset F(V \times U)$ 由以上三类线性组合式张成.

7. 2. 考虑 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i)$. 依照张量积与直和的分配律得 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R})^{\oplus 2} \cong \mathbb{C}^{\oplus 2}$.
8. 4. 将 \mathbb{C} 视作二维 \mathbb{R} -线性空间, 再依照 $\dim(U, V) = (\dim U) \cdot (\dim V)$ 即可.
9. 128. 依照 $\det(A_{m \times m} \otimes B_{n \times n}) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$ 即可.
10. 9. 即, 求 25-阶对角映射 $A \otimes I - I \otimes A$ 的零空间维数. 观察得 $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$.

★ 评分标准: 基准分 10 分, 每题满分两分. 详情如下.

1. 出现以下情形之一则得 2 分: (1) 写明典范态射的元素对应方式, (2) 同时写出“有限维同构”, 以及“无穷维情况不同于有限维”. 出现以下情形之一得 1 分: (1) 仅考虑有限维情形; (2) 将同构写作等号, 或者将单射写作子集的包含. 对上述未提及的作答酌情给分.
2. 依照判断题或简答题标准给 2 分或 0 分.
3. 遗漏代数闭域 (或 \mathbb{C}) 条件扣 1 分, 遗漏多项式非常值扣 1 分, 偏题扣 2 分. 扣完为止.
4. 未化简不扣分. 整体相差一个负号扣 1 分. 其余情形扣 2 分.
5. 遗漏“双线性映射”或者“线性映射”等限定扣 1 分, 采用其他定义酌情给分.
6. 遗漏“有限和”扣 1 分. 误表述“自由化”者扣 1 分. 扣完为之. 其余构造酌情给分.
7. 依照判断题或简答题标准给 2 分或 0 分.
8. 依照判断题或简答题标准给 2 分或 0 分.
9. 依照判断题或简答题标准给 2 分或 0 分.
10. 依照判断题或简答题标准给 2 分或 0 分.

问题 2 (20 points). Suppose $\sigma \in \text{Hom}(V, W)$ and U is a subspace of V . Let π denote the quotient map from V onto V/U . Prove that there exists $\tau \in \text{Hom}(V/U, W)$ such that $\sigma = \tau\pi$ if and only if $U \subseteq \ker \sigma$.

解答 2. 本题考察余核泛性质之刻画. 式“ $\sigma = \tau\pi$ ”意即 $\sigma(v) = \tau(v + U)$ 恒成立. 依照线性性, 上式亦等价于 $\sigma(u) = \sigma(0) (\forall u \in U)$, 即 $U \subseteq \ker(\sigma)$.

★ 评分标准: 指出该题本质是 coker 的泛性质, 商空间的泛性质, 或 $\text{Hom}(-, W)$ 左正合性者得满分. 若分别证明充分性与必要性, 每部分得 10 分. 若作答出现常识性错误, 需适当扣分.

问题 3. Proof or disproof: if an orthogonal transformation \mathcal{A} on an n -dimensional Euclidean space V has two different eigenvalues, then the eigenvectors of \mathcal{A} corresponding to different eigenvalues are orthogonal.

解答 3. 记 $(-, -)$ 为内积, $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i$ 是特征向量 ($i = 1, 2$), 满足 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 由于 $\|\mathcal{A}v_i\| = \|v_i\|$, 从而 $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. 此时

$$(v_1, v_2) = (\mathcal{A}v_1, \mathcal{A}v_2) = \lambda_1 \lambda_2 (v_1, v_2) = -(v_1, v_2).$$

遂有 $(v_1, v_2) = 0$.

★ 评分标准: 若出现“不加说明地采用 \mathcal{A} 的矩阵形式”“混淆 \mathcal{A} 与 \mathcal{A}^* ”等错误, 应适当扣分. 对滥用复化条件, 行文冗余严重的作答扣 1 分.

问题 4. Set $V := \mathbb{R}[x]$ and $V_0 := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = f(1)\}$.

1. Prove that $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x) dx$ is an inner product.
2. Set $\mathcal{D} : V_0 \rightarrow V$, $f(x) \mapsto f'(x)$. Find $\dim \ker(\mathcal{D})$ and $\dim \operatorname{coker}(\mathcal{D})$.
3. Define the inner product restricted on the subspace

$$(\cdot, \cdot)_0 : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Is there any linear map $\mathcal{D}^* : V \rightarrow V_0$ such that for any $h \in V_0$ and $g \in V$,

$$(\mathcal{D}^*g, h)_0 = (g, \mathcal{D}h)?$$

解答 4. 解答如下.

1. 容易验证双线性性, 等式 $(f, g) = (g, f)$, 以及 $(f, f) \geq 0$. 正定性之证明: 若 $(f, f) = 0$, 则 f 是定义区间 $[0, 1]$ 上恒零的多项式, 从而是 $\mathbb{R}[x]$ 中的零元.
2. 记 $D : V \rightarrow V$ 为 V 上导数, $i : V_0 \rightarrow V$ 为子集的包含映射, 故 $Di = \mathcal{D}$.
 - 往证 $\dim \ker(\mathcal{D}) = 1$. 由于 i 是单射, 从而 $\dim \ker(Di) \leq \dim \ker(D) = 1$. 由于常函数属于 $\ker(\mathcal{D})$, 故上式取等.
 - 往证 $\dim \operatorname{coker}(\mathcal{D}) = 1$. 由于 D 是满射, 从而 $\dim \operatorname{coker}(Di) \leq \dim \operatorname{coker}(i) = 1$. 由于常函数不属于 $\operatorname{im}(\mathcal{D})$, 故上式取等.
3. \mathcal{D}^* 不存在. 下采用反证法证明: 若 \mathcal{D}^* 存在, 限定多项式 h 满足 $h(0) = h(1) = 0$, 则

$$(\mathcal{D}^*, h) = (g, \mathcal{D}h) = (-g', h).$$

若能证明 $\mathcal{D}^*g + g'$ 恒零, 则 $g' \in V_0$ 与假设矛盾. 故只需证明

$$V_1 : \{h \in \mathbb{R}[x] \mid h(0) = h(1) = 0\} = \{x(1-x)f(x) \mid f \in \mathbb{R}[x]\}$$

在 V 中的正交补是 0. 对任意 $p(x) \in V_1^\perp$, 考虑

$$0 = (x(1-x)p(x), p(x)) = \int_0^1 x(1-x)p(x)^2 dx$$

从而 $p(x) = 0$. 因此, V_1 在 V 中补空间是 0.

★ 评分标准: 凡遗漏或误答以下者, 每处各扣 2 分: “未证明内积的正定性”“未证明内积的对称性”“ $\dim \ker \mathcal{D}$ ”“ $\dim \operatorname{coker} \mathcal{D}$ ”. 对最后一问酌情扣 0 至 3 分.

问题 5. The vector spaces in this problem are all finite dimensional.

1. Given linear maps $\varphi_i \in \text{Hom}(U_i, V_i)$ ($i = 1, 2$), show that the following map is well-defined.

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : U_1 \otimes U_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad \sum_{\text{finite}} u_1^{(i)} \otimes u_2^{(i)} \mapsto \sum_{\text{finite}} \varphi_1(u_1^{(i)}) \otimes \varphi_2(u_2^{(i)})$$

2. Let $p : U \rightarrow V$ be a surjective linear map. Show that for any linear space W ,

$$p \otimes \text{id}_W : U \otimes W \rightarrow V \otimes W, \quad \sum_{\text{finite}} u^{(i)} \otimes w^{(i)} \mapsto \sum_{\text{finite}} p(u^{(i)}) \otimes w^{(i)}$$

is also surjective.

3. Let $i : U \rightarrow V$ be an injective linear map. Show that for any linear space W ,

$$p \otimes \text{id}_W : U \otimes W \rightarrow V \otimes W, \quad \sum_{\text{finite}} u^{(i)} \otimes w^{(i)} \mapsto \sum_{\text{finite}} i(u^{(i)}) \otimes w^{(i)}$$

is also injective.

解答 5. 解答如下.

1. 张量积 $\iota_V : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ 是良定义的双线性型, 因此, 双线性型的拉回

$$U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad (u_1, u_2) \mapsto \iota_V(\varphi_1(u_1), \varphi_2(u_2))$$

也是良定义的双线性型. 依照泛性质定义 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, 并检验简单张量的像

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : u_1 \otimes u_2 \mapsto \varphi_1(u_1) \otimes \varphi_2(u_2).$$

依照线性性, 如上良定义的 $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ 满足题干条件.

2. 任意 $v^{(i)} \in V$ 有原像 $u^{(i)}$, 从而

$$\sum_{\text{finite}} v^{(i)} \otimes w^{(i)}$$

有 $p \otimes \text{id}_W$ 下的原像

$$\sum_{\text{finite}} u^{(i)} \otimes w^{(i)} \quad (p(u^{(i)}) = v^{(i)}).$$

3. 由于 $i \otimes \text{id}_W$ 的良定义性, 不妨设定义域中的加和项数等于张量的秩, 亦即 $\{u^{(i)}\}$ 与 $\{w^{(i)}\}$ 是线性无关组. 由于单射保持线性无关组, 故 $\{i(u^{(i)})\}$ 也是线性无关的. 最后依照课堂引理或是如下方法证明 0 的原像也是 0. 取一族与 $\{w^{(i)}\}$ 适配的示性对偶映射 $\{f_{(i)} \in W^*\}$, 满足 $f_{(i)}(w^{(j)}) = \delta_{i,j}$. 当 $\sum_{\text{finite}} u^{(i)} \otimes w^{(i)} = 0$ 时, 有

$$\text{id}_V \otimes f_{(j)} : \sum_{\text{finite}} i(u^{(i)}) \otimes w^{(i)} = i(u^{(j)}) = 0.$$

这表明所有 $i(u^{(i)})$ 为零. 依照 i 是单射, 故所有 $u^{(i)}$ 为零. 这表明 $i \otimes \text{id}_W$ 是单的.

★ 评分标准: 每问 4 分. 第 1 小问: 未使用泛性质说理者扣 1 至 4 分. 第 2 小问: 将张量混同作简单张量者扣 2 至 4 分. 第 3 小问: 将张量混同作简单张量者扣 2 至 4 分. 对完成度较低的问题再作适当扣分.

问题 6. Let V be an n -dimensional Euclidean space and the set of vectors $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ satisfy the following condition: if there exists non-negative real numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ such that $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m = 0$, then it must be that $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Prove: there exists a vector $\alpha \in V$ such that $(\alpha, \alpha_i) > 0$ for all $1 \leq i \leq m$.

解答 6. 本题系凸集分离定理的弱化版本. 将向量族 $\{\alpha_i\}$ 的正项系数线性组合单位化成凸组合:

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n \quad \mapsto \quad \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}.$$

定义 $\{\alpha_i\}$ 的凸包为有界闭集 (紧集)

$$S := \{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1\}.$$

显然 $0 \notin S$, 故 S 中存在模长极小元 x_m (紧集上的连续映射取达最值). 下证明 x_m 唯一: 若存在不同于 x_m 的 y_m 使得 $\|x_m\| = \|y_m\|$, 则依照 S 的构造知存在模长更小的元素 $\frac{1}{2}(x_m + y_m) \in S$, 矛盾. 最后断言不存在 $x \in S$ 使得 $(x, x_m) < (x_m, x_m)$; 若不然,

$$\frac{d}{d\lambda} \|\lambda x + (1 - \lambda)x_m\|^2 = 2\lambda(x, x) + 2(1 - 2\lambda)(x, x_m) + 2(\lambda - 1)(x_m, x_m)$$

在 $\lambda = 0$ 处的导数小于 0, 与 x_m 模长最小矛盾. 由于 $\alpha_i \in S$, 故 $\alpha = x_m$ 即为所求.

★ 评分标准: 基准分 4 分. 酌情给分.