Ex 1 (消歧义问题) 假定 U 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间.

(1) 称 $f: U\times U\to\mathbb{F}$ 是双线性的, 当且仅当对任意向量与常数,

$$f(au+v, bx+y) = abf(u,x) + af(u,y) + bf(v,x) + f(v,y). \tag{$\star$}$$

试证明: $\{f \mid f: U\times U\to\mathbb{F} \text{ 是双线性映射}\}$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 其对象是一些二元函数. 求其维度与基.

答: 先验证以上双线性函数构成线性空间. 零映射是双线性的. 定义 $(\lambda f+g)(u,v) = \lambda f(u,v)+g(u,v)$, 对 $(\lambda f+g)$ 检验题干中式子 $(\star)$ 即可.

- 以下证明一个双线性映射对应一个矩阵, 且这一对应是单射. 给定一个双线性映射 f, 则 f 是零映射当且仅当 $(f(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$ 是全 0-矩阵. 这说明: 若 $f\neq g$, 则 $(f(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}\neq(g(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$.
- 以上对应是也是线性映射. 因为

$$\lambda(f(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n} + (g(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n} = ((\lambda f+g)(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}.$$

- 最后证明以上对应是满射. 换言之, 对任一矩阵 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, 构造相应的双线性型. 记 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$, 则

$$f_A: U\times U\to\mathbb{F},\qquad \left(\sum_i c_ie_i, \sum_j d_ie_j\right)\mapsto\sum_{i,j}c_id_ia_{i,j}$$

即为所求. 可以直接验证, f_A 是双线性映射, 且其对应的矩阵就是 A.

以上的线性双射由下表描述:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{M}_n(\mathbb{F}) & \longleftrightarrow & [U\times U\to\mathbb{F}] \\
(f(e_i,e_j))_{n\times n} & \longleftarrow & f \\
A=(a_{i,j})_{n\times n} & \longrightarrow & \underbrace{\{(e_i,e_j)\mapsto a_{i,j}\}_{1\le i,j\le n}}_{\text{生成的双线性映射}}
\end{array}$$

由于 $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ 是 n^2 维空间, 基是 $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$; 依照同构, 全体双线性映射也是 n^2 维空间, 基底 (作为集合) 中的元素恰好是所有 $E_{i,j}$ 在上述线性双射下的像:

$$E_{i,j}\quad\longrightarrow\quad\{(e_i,e_j)\mapsto\delta_{i,j}\}_{1\le i,j\le n}.$$

此处 $\delta_{i,j}=1$ 当且仅当 $i=j$, 反之 $\delta_{i,j}=0$.

(2) 依照集合的 Cartesian 积, 定义新的集合 $U\times U=\{(u_1,u_2)\mid u_1,u_2\in U\}$. 试证明 $U\times U$ 也是线性空间, 并求其维度与基.

答: $U\times U$ 的维度是 $2\cdot\dim U$. 一种合理的看法: 将 $U\times U$ 视作大线性空间, 则 $U_{\text{左}}=\{(u,0)\mid u\in U\}$ 与右 $U_{\text{右}}=\{(0,u)\mid u\in U\}$ 都是 $U\times U$ 的子空间, 此时

$$U\times U = U_{\text{左}}\oplus U_{\text{右}}.$$

只需解决以下问题: 若 V 是 $2n$-维线性空间, 求证:

- 全体 $(V\to\mathbb{F})$-类型的线性映射构成的线性空间, 求其维度和基.

验证以下线性双射对应即可:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{F}^{2n} & \longleftrightarrow & [\mathbb{F}^{2n}\to\mathbb{F}]\ \text{类型的线性映射} \\
\sum_{i=1}^{2n}c_ie_i & \longrightarrow & \underbrace{\{e_i\mapsto c_i\}_{1\le i\le 2n}}_{\text{生成的线性映射}} \\
\sum_{i=1}^{2n}f(e_i)e_i & \longleftarrow & f
\end{array}.$$

(3) 试证明: $\{f \mid f: U\times U\to\mathbb{F} \text{ 是线性映射}\}$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间, 其对象是一些一元函数. 求其维度与基.

为避免记号上的混乱, 往后使用 $f: U \,\&\, U\to\mathbb{F}$ 表示双线性映射.

Ex 2 二次型的最值问题.

> 实对称矩阵的结构定理: A 是实对称矩阵, 当且仅当以下等价命题成立:
>
> - A 可对角化且特征空间两两垂直,
> - 存在正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是对角矩阵.
>
> 默认大家会证明这一命题.

(1) 记 A 是实对称矩阵, 证明 A 的最大特征值是 $\sup_{x\neq\mathbf{0}}\frac{x^TAx}{x^Tx}$, 并考虑取达最大值的充要条件. 同时, 这也说明 $\sup$ 可以改成 $\max$.

> 答: 记 $(v_i,\lambda_i)_{i=1}^n$ 是 A 的所有特征对 (不合并重数), 满足 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$, 以及 $\|v_i\|=1$. 任意 x 都写作标准正交基的线性组合式
>
> $$x=\sum_i c_iv_i.$$
>
> 此时 $\sup_{x\neq\mathbf{0}}\frac{x^TAx}{x^Tx}=\sup_{\mathbf{c}\neq\mathbf{0}}\frac{\sum\lambda_ic_i^2}{\sum c_i^2}=\lambda_1$. 取等当且仅当 $x\in\mathrm{Span}_{\lambda_k=\lambda_1}(v_1,\ldots,v_k)\setminus\{\mathbf{0}\}$.

(2) 记 A 是实对称矩阵, 记最大特征值 λ_1 的重数为 1, 相应的特征向量是 $Av=\lambda_1v$. 证明 A 的第二大特征值是 $\sup_{x\perp x_1,x\neq\mathbf{0}}\frac{x^TAx}{x^Tx}$. 此处, x_1 是使得上一问取达最大值的任意向量.

> 答: 相当于给上一问的 sup-条件中多加上 $k=1$ 与 $c_1=0$ 的两个限制. 答案自然是第二大特征值.

(3) 假定 A 是实对称正定矩阵, 证明 $\inf_{x\neq\mathbf{0}}\frac{x^TA^{-1}x}{x^Tx}$ 和 $\sup_{x\neq\mathbf{0}}\frac{x^TAx}{x^Tx}$ 互为倒数.

> 答: 记 $A=Q^T\Lambda Q$, 则 $A^{-1}=Q^T\Lambda^{-1}Q$. 因此 A 的最大特征值与 A^{-1} 的最小特征值互为倒数.

(4) 记 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是实数, 满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 与 $x_1+\cdots+x_n=0$. 求

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$$

的最大值. 可以使用 **(2)** 的结论.

> 答: 相当于求 $\begin{pmatrix} & 1 & & & 1\\ 1 & & 1 & & \\ & 1 & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1\\ 1 & & & 1 & \end{pmatrix}$ 的第二大特征值 (的一半). 这一矩阵的特征多项式是循环矩阵的行列式, 第二大特征值为 $2\cos\frac{2\pi}{n}$.

Ex 3 中学时有个定理: 记 R 与 S 是两个三维空间的几何体. 定义

$$R + S := \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \mid (x_1, y_1, z_1) \in R, (x_2, y_2, z_2) \in S\}.$$

记 $|\cdot|$ 是体积, 则 $\sqrt[3]{|R|} + \sqrt[3]{|S|} \leq \sqrt[3]{|R+S|}$ (无需证明这一命题).

> 我们可以将实对称正定矩阵 A 看作旋转后的长方体, 作为线性映射, 其功效是沿坐标轴的正向拉伸. 这一长方体的各边长即 $Q^TAQ = \Lambda$ 的对角元, 体积即 $\det A$.

假定 A 与 B 是 n-阶实对称正定矩阵, 试证明:

$$(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leq (\det(A+B))^{1/n}.$$

> Proof. Consider $A = R^TR$. Without the loss of generality, set $A = I$. It suffices to show that
>
> $$1 + \det(R^{T,-1}BR^{-1})^{1/n} \leq \det(I + R^{T,-1}BR^{-1})^{1/n}.$$
>
> Since $R^{T,-1}BR^{-1}$ is positive definite, there exists $Q \in O(n)$ such that $Q^T(R^{T,-1}BR^{-1})Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Hence, it suffices to prove that
>
> $$1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i)^{1/n}.$$
>
> Consider AM-GM inequality, or Holder inequality, ...

Ex 4 正定与减法.

(1) 记 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是实对称正定矩阵, $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 有标准正交的列向量. 证明 $Q^TA^{-1}Q - (Q^TAQ)^{-1}$ 半正定.

> 提示: 不失一般性地, 记 $Q = \begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} S & R \\ R^T & T \end{pmatrix}$, 其中 S 与 T 对称. 右乘 Q 零化最后 $(n-m)$ 列, 左乘 Q^T 零化最后 $(n-m)$ 行, 因此再不妨设 $T = I$. 计算初等变换
>
> $$\begin{pmatrix} S & R & I & O \\ R^T & I & O & I \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} S - RR^T & O & I & -R \\ R^T & I & O & I \end{pmatrix}. \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} S - RR^T & O & I & -R \\ O & I & * & I \end{pmatrix}$$
>
> 因此 $Q^TA^{-1}Q = (S - RR^T)^{-1}$. 故只需证明 $(S-RR^T)^{-1} - S^{-1}$ 半正定. 两侧同乘对称正定矩阵 $(S - RR^T)$, 得
>
> $$S - RR^T - (S - RR^T)S^{-1}(S - RR^T) = R(I - R^TS^{-1}R)R^T.$$
>
> 为证明以上矩阵是半正定的, 只需证明 $I - R^TS^{-1}R$ 正定: 可使用初等变换证明, 或是发现该矩阵是正定阵的 Schur 补.

(2) 记 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵, 的矩阵 $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $A - H^TH$ 正定等价于 $I - HA^{-1}H^T$ 正定.

> 答: 若 $A = R^TR$ 对称正定, 则 $R^TR - H^TH$ 正定等价于 $I - R^{T,-1}H^THR^{-1}$ 正定.
>
> - 回忆依照熟知结论: AB 与 BA 的特征值仅相差若干个 0. 因为 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$.
>
> 因此 $I - (HR^{-1})^T(HR^{-1})$ 与 $I - (HR^{-1})(HR^{-1})^T$ 的特征值相差若干 1, 从而两者正定性相同. 此时
>
> $$I - (HR^{-1})(HR^{-1})^T = I - H(R^TR)^{-1}H^T = I - HA^{-1}H^T.$$
>
> 若 A 亚正定 (不必对称但 $x^TAx > 0$), 试给反例.
>
> $$A - H^TH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{7/8} \\ \sqrt{7/8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7/8} \\ \sqrt{7/8} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
>
> $$I - HA^{-1}H^T = 1 - \begin{pmatrix} \sqrt{7/8} \\ \sqrt{7/8} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{7/8} \\ \sqrt{7/8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}.$$

(3) (谢启鸿白皮书上的亚正定矩阵) 称实矩阵 A 是亚正定的, 当且仅当 $x^TAx > 0$ 对一切 $x \neq \mathbf{0}$ 成立. 简单地看, 亚正定是少了对称约束的正定. 若 A 亚正定, B 对称, 且 $A - B$ 亚正定, 试证明 $B^{-1} - A^{-1}$ 也是亚正定的.

> 答: 使用 $B^{-1} - A^{-1} = (B + B(A - B)^{-1}B)^{-1}$.
>
> 亚正定矩阵 (包括亚半正定矩阵) 的一般结论见谢启鸿博客 2015S12 与 2020S15.
>
> 亚正定矩阵的特征值实部为正, 故有且仅有一个平方根, 其特征根实部为正. 试问: 上述平方根仍是亚正定的吗?

Ex 5 (极分解) 以下仅谈论对称半正定实方阵.

(1) 若 A 是对称半正定矩阵, 则存在唯一的对称半正定矩阵 $\sqrt{A}$ 使得 $\sqrt{A}^2 = A$.

答: 存在性由 $Q^T\sqrt{\Lambda}Q$ 构造地证明. 下证明唯一性. 若 $B^2 = A$, 则

- B 的特征根都是实数, 同时可对角化.
- B 与 A 是可交换的可对角化的矩阵, 因此 A 与 B 可同时对角化.

基于以上, 只需证明半正定对角矩阵有唯一的半正定对角平方根. 这是显然的.

(2) 任何矩阵 A 都是对称半正定矩阵与正交矩阵的乘积 (不妨假设 $A = SQ$). 若 A 对称正定, 则这一分解唯一.

答: 由奇异值分解 $A = U^T\Sigma V = U^T\Sigma U \cdot (U^T V)$, 得存在性. 若 $A = S_1Q_1 = S_2Q_2$ 对称正定, 则

$$S_1^2 = S_1S_1^T = AA^T = S_2S_2^T = S_2^2.$$

由于正定矩阵有唯一的正定平方根, 得 $S_1 = S_2$. 左乘 S_1^{-1} 得 $Q_1 = Q_2$.

(3) 假定 S 实半正定, Q 正交. 若 $\det(xI - SQ) = \det(xI - S)$, 则 $S = SQ$.

答: SQ 的所有特征值在 $\mathbb{R}$ 中, 从而存在正交矩阵使得 $U^TSQU = T$ 是三角的, 其对角元即 S 的特征值. 依照题设, 得 $\operatorname{tr}(TT^T) = \operatorname{tr}(SS^T)$. 故

$$T \text{ 中所有元素平方和} = \operatorname{tr}(TT^T) = \operatorname{tr}(S^2) = \sum \lambda_S^2 = T \text{ 中所有对角元的平方和}.$$

因此 T 是对角矩阵. 由于 $T^2 = TT^T = U^TS^2U$, 依照半定矩阵有唯一的半定平方根, 得 $U^TSU = T = U^TSQU$, 即, $S = SQ$.

(4) 证明两个半正定矩阵的乘积是可对角化的.

答: 假定 A 与 B 是半正定矩阵. 存在可逆矩阵 R, 使得 $R^TAR = \mathbb{I}_r$ 是相抵标准型. 此时

$$R^TABR^{-1,T} = \mathbb{I}_r \cdot R^{-1}BR^{-1,T}.$$

是两个半正定矩阵的乘积. 据此, 不妨假设 $A = \mathbb{I}_r = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 记 $B = \begin{pmatrix} S & R \\ R^T & T \end{pmatrix}$. 计算得 $AB = \begin{pmatrix} S & R \\ O & O \end{pmatrix}$. 依照 $r(S \quad R) = r(S)$ (比较左零空间), AB 相似于分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} S & \\ & O \end{pmatrix}$, 此处 S 可对角化.

Ex 6 (正交相似的判定准则) 称矩阵对 (A, B) 与 (C, D) 同时相似, 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = C, \quad P^{-1}BP = D.$$

(1) 若 (A, A^T) 与 (B, B^T) 同时相似, 当且仅当 A 与 B 正交相似.

> 答: 若 A 与 B 正交相似, 即 $Q^TAQ = B$, 则 $Q^TA^TQ = B^T$. 若存在 P 使得
>
> $$PAP^{-1} = B, \quad PA^TP^{-1} = B^T,$$
>
> 代入过渡矩阵做极分解, $P = QS$, 得
>
> $$QSAS^{-1}Q^T = B, \quad QSA^TS^{-1}Q^T = B^T.$$
>
> 对右式取转置并消 B, 发现 $S^TS = S^2$ 与 A 乘积可交换. 考虑对称半正定矩阵 S 与 S^2 的同时对角化, 可以发现 S 是 S^2 的多项式. 因此 A 与 S 交换.
>
> 这告诉我们, 正交相似的过渡矩阵, 必然是通常相似中过渡矩阵之极分解中的正交矩阵.

(2) 对复矩阵而言, (A, A^H) 与 (B, B^H) 通过复矩阵同时相似, 当且仅当 A 与 B 酉相似.

> 同上.

(3) 证明: 实矩阵 A 与 B 通过酉矩阵相似, 当且仅当 A 与 B 通过正交矩阵相似.

> 类似的问题: A 与 B 相似, 当且仅当他们在某个扩域上相似. 试回忆: $A \sim B$ 当且仅当 $(\lambda I - A)$ 与 $(\lambda I - B)$ 相抵.
>
> 答: 若 $(\lambda I - A, \lambda I - A^T)$ 与 $(\lambda I - B, \lambda I - B^T)$ 在复数域上同时相抵, 则其在实数域上同时相抵. (同时相抵通过零空间刻画, 零空间维数由标准阶梯形决定, 也就是由线性相关性决定; 线性相关性与扩域无关).
>
> 这一处理将复杂的正交相似变成简单的零空间问题.
>
> 思考: 假设两个 2×2 的实矩阵通过行列式为 1 的复矩阵相似, 那么它们一定通过某个行列式为 1 的实矩阵相似吗?
>
> 答: 不是. 反例自寻.

(4) 若 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 正交相似, 证明 A 与 B 正交相似.

> 结论正确. 初等方法不详.
>
> 如果有人学习了近世代数中的 Krull-Schmidt 定理, 并且觉得该定理近乎显然, 则可以想想如何用该定理解决此题.

(5) 若 A 和 B 既相似, 又合同, 则是否一定正交相似?

> Hint: 王子涵会写, 可以问他.

Challenging Problems

(1) Assume $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ are symmetric and positive definite. Prove that

$$\underbrace{A \circ B}_{\text{Hadamard Product}} := (a_{i,j} \cdot b_{i,j})_{n\times n}$$

is also positive definite. ($A \circ B$ is also known as Stupid Matrix Product.)

> Real Challenge: Prove it within 20 words. Hint: Kronecker product.
>
> 详细的解答：若 $A = Q^T \Lambda Q$，且 $B = P^T \mathrm{M} P$，则其 Kronecker 积也是正定的，参考
>
> $$A \otimes B = (Q \otimes P)^T (\Lambda \otimes \mathrm{M})(Q \otimes P).$$
>
> 由于 $A \circ B$ 是 Kronecker 积的某个主子式，故正定.

(2) Find the largest real number C_n for each positive integer n, such that for any real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, the following inequality holds:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n - |j-i|) x_i x_j \geq C_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

> 有同学发现这是 2023 CMO，那可以问之前做过的同学.

(3) Find the largest real number C such that for any real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{2024}}$ with $\sum_{i=1}^{2^{2024}} x_i = 0$, the following inequality holds:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \delta_{(j-i)} \cdot x_i x_j \leq C \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Here $\delta_{2^k} = 1$, otherwise $\delta = 0$.

> 答：记 $(0,1)$-对称矩阵 A_{2024} 是仅保留点与边的 $n = 2^{2024}$-维超立方体图（见第八次作业中的图论部分）. 由于 $\mathbf{1}$ 是最大特征值的特征向量，故此题答案自然是 $1 + \frac{\lambda_2(A_{2024})}{2}$. 计算特征值及其重数：
>
> 1. $\mathrm{eigen}(A_1) = (1^{(1)}, -1^{(1)})$;
> 2. $\mathrm{eigen}(A_2) = (2^{(1)}, 0^{(2)}, -2^{(1)})$;
> 3. $\mathrm{eigen}(A_3) = (3^{(1)}, 1^{(3)}, -1^{(3)}, -3^{(1)})$;
> 4. $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I \\ I & A_n \end{pmatrix}$，不难验证 $\mathrm{eigen}(A_{n+1}) = \{\pm 1\} + \mathrm{eigen}(A_n)$.
>
> 第二大特征值是 2022，故上式最大值是 1012.

(4) Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{(p_i + p_j)^c} \geq 0$$

holds for arbitrary reals $a_1, a_2, \ldots, a_n$, and positive numbers $c, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

> Hint: Let $A(t)$ be symmetric positive definite with variable t, then so is $\int_I A(t)\,\mathrm{d}\,t$.
>
> 答：凑出积分式
>
> $$\begin{aligned}
> &\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-p_i t}\right)^2 t^{c-1}\,\mathrm{d}t \\
> &= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j e^{-(p_i+p_j)t}\right) t^{c-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \int_0^\infty t^{c-1} e^{-(p_i+p_j)t}\,\mathrm{d}t \\
> &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c} \int_0^\infty \left((p_i+p_j)t\right)^{c-1} e^{-(p_i+p_j)t}(p_i+p_j)\,\mathrm{d}t \\
> &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c} \cdot \Gamma(c).
> \end{aligned}$$

也可以置 $a_i = 1$, 使用 Challenge problem 1 的做法.

(5) Let f be continuous in $[0, +\infty)$, such that $\int_0^\infty (f(x))^2 \,\mathrm{d}\, x < \infty$. Suppose

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x) \,\mathrm{d}\, x = 1 \quad (\forall k = 1, 2, \ldots, n).$$

Find $\inf \int_0^\infty (f(x))^2 \,\mathrm{d}\, x$. (Neither ε nor δ appears in the solution.)

Hint: Use $\int_0^\infty fg \leq \sqrt{\int_0^\infty f^2} \cdot \sqrt{\int_0^\infty g^2}$ (CS inequality). Set $g = \sum_{1 \leq k \leq n} c_k e^{-kx}$.

答: 对如上 g, 计算得

$$\sum_{1 \leq k \leq n} c_k = \int_0^\infty fg \,\mathrm{d}\, x \leq \sqrt{\int_0^\infty f^2 \,\mathrm{d}\, x} \cdot \sqrt{\int_0^\infty g^2 \,\mathrm{d}\, x}.$$

计算得

$$\int_0^\infty g^2 \,\mathrm{d}\, x = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{c_i c_j}{i+j}.$$

从而对一切 $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 都有

$$\int_0^\infty f^2 \,\mathrm{d}\, x \geq \frac{\sum_{1 \leq i,j \leq n} c_i c_j}{\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{c_i c_j}{i+j}} = \frac{x^T \cdot J \cdot x}{x^T \cdot H \cdot x}.$$

其中, H 是 Hilbert 矩阵, J 是全 1 矩阵. 记 $H = L^T L$, 则上式为 $\frac{x^T L^{-1,T} J L^{-1} x}{x^T x}$ 的最大值, 即 $L^{-1,T}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T L^{-1}$ 的最大特征值. 依照 Ex 4.2 中的技巧, 只需求 $\mathbf{1}^T H^{-1} \mathbf{1}$ 的最大特征值, 也就是这个常数本身.

- 以下计算 Cauchy 矩阵 $C := (\frac{1}{x_i + y_j})_{n \times n}$ 的逆矩阵的所有元素和. 这个结果可以照 此处 暴算, 也可以观察以下恒等式: 对任意矩阵 D, 总有

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i + y_j) \cdot C_{i,j} \cdot D_{j,i} &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i C_{i,j} D_{j,i} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} y_j D_{j,i} C_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} x_i (CD)_{i,i} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} y_j (DC)_{j,j}.\end{aligned}$$

  代入 $D = D^T = C^{-1}$, 左式即 $\mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1}$, 右式为 $\sum_{1 \leq k \leq n} (x_k + y_k)$.

原答案为 $n(n+1)$. 取等条件略, 因为特征向量的存在性表明等号能取到.

Fun Exercise: 2-Distance Set Problem

以下谈论的距离 (度量) 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的通常距离 (度量), 即, $\|x-y\| = \sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$.

1. 最多能在 $\mathbb{R}^n$ 中找到几个点, 使得这些点是等距的?

> 换言之, 求极大的子集 $\{v_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^n$, 使得对任意 $i \neq j$, 模长 $\|v_i - v_j\|$ 是非零常数.

2. 称有限点集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是巧妙的, 当且仅当存在正数 $p, q > 0$, 使得

$$\|x-y\| \in \{p, q\} \quad (\forall x, y \in S, x \neq y).$$

以下证明 $|S| \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. 在证明之前, 可以先自行尝试.

3. 记 $\mathbb{R}[t_1, t_2 \ldots, t_n]$ 是全体 n 元多项式. 记 $\|t\|^2 = t_1^2 + \cdots + t_n^2$, 试证明以下 $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ 个多项式是 $\mathbb{R}$-线性无关的:

$$\{(\|t\|^2)^2\} \cup \{t_i \cdot \|t\|^2\}_{i=1}^n \cup \{t_i \cdot t_j\}_{1 \leq i < j \leq n} \cup \{t_i\}_{i=1}^n \cup \{1\}.$$

4. 记巧妙集 $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. 定义函数

$$f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (\|x-y\|^2 - p^2) \cdot (\|x-y\|^2 - q^2).$$

写出矩阵 $(f(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$.

5. 给定形如 $g(x,y) = g_1(x) \cdot g_2(y)$ 的函数, 证明 $(g(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq m}$ 的秩是 1.

6. 使用 3., 4., 以及 5. 以证明 2..

Elementary Exercise: The Geometry of Hadamard Matrix

给定实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 及其有限子集 $S=\{v_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$. 定义 Gram 矩阵

$$G(v_1,v_2,\dots,v_k) := (x_i^T \cdot x_j)_{k\times k} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$

Gram 行列式 $\det(G(S))$ 是良定义的，因为交换向量次序不改变行列式的值. 以下采用简便记号 $|S|_G := \det(G(S))$.

1. 证明 $|S|_G = 0$ 当且仅当 S 是线性相关组.

2. 证明向量 v 到子空间 $\mathrm{Span}(S)$ 的距离是 $\sqrt{\frac{|S\cup\{v\}|_G}{|S|_G}}$.

> Hint: 使用唯一分解 $v = v_{平行于\ \mathrm{Span}(S)} + v_{垂直于\ \mathrm{Span}(S)}$.

3. 使用 Gram 行列式定义向量组的模长, 以及子空间之间的夹角.

> 其结果应当与向量的模长，以及方向之间的夹角统一.

4. 定义 $\sin_G(v,S) := \frac{v\ 到\ \mathrm{Span}(S)\ 的距离}{\|v\|} = \sqrt{\frac{|S\cup\{v\}|_G}{|S|_G\cdot|\{v\}|_G}}$. 若 $S_1 \subset S_2$, 试证明

$$\sin_G(v,S_1) \geq \sin_G(v,S_2).$$

5. 记 S 是 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 的 n 个列向量, 记 $S_{\leq i} = \{v_1,v_2,\dots,v_i\}$. 证明,

$$|\det A| = \sqrt{|S|_G} = \underbrace{\|v_1\|\cdot\|v_2\|\cdots\|v_n\|}_{模长} \cdot \underbrace{\sin_G(S_1,v_2)\cdot\sin_G(S_2,v_3)\cdots\sin_G(S_{n-1},v_n)}_{夹角部分}.$$

6. 证明 Hadamard 不等式

$$|\det A| \leq \left(\prod_{i=1}^n \|v_i\|\right)\cdot\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \sin^2(v_i,v_j)\right).$$

并说明取等条件.