整理自课堂笔记.

(1) To prove that any subset of $n+1$ vectors of $\mathbb{F}^n$ is linearly dependent.

- Hint: consider all possible *échelon forms*.

(2) 数域 (无限域) 上, 线性方程组解的个数可能有: 0 个, 1 个, 无限个. 哪种情况概率最大?

- 如何理解: 随机选一个实数? 这需要定义与 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑相容的概率空间, 其表述较繁.
- 本质上需要解决的问题: 证明 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的可逆矩阵构成开集. 也就是证明: 任何可逆矩阵的各项允许在某个小范围内任意微扰, 使得微扰所得矩阵必是可逆的. 公式表述即

  $$\forall M=(m_{i,j})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \exists\delta>0\ \forall N=(n_{i,j})_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\left(\sum_{i,j}|m_{i,j}-n_{i,j}|<\delta\text{ and }\det M\neq 0\neq\det N\right).$$

  可以直接证明. 或是证明多项式函数 $\det$ 是连续函数, 从而开集的原像 $\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ 是开集.

(3) 用 Dedekind 分割证明 $\mathbb{R}$ 满足加法交换律. 这在第一周作业中提及了.

感谢姜皓文, 刘佳霖 (按姓氏拼音排列) 提供的笔记.