专题: 相抵标准型

约定 1 域是任意的.

约定 2 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 代表 $\mathbb{F}$ 上 n-阶可逆矩阵全体 (一般作为乘法群).

约定 3 矩阵的行列不必等长. 方阵的行列等长.

约定 4 记 $r(A)$ 为矩阵 A 的秩.

定理 对任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 存在 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (r = \mathrm{rank}(A)).$$

注: r 唯一确定. P 和 Q 不必唯一.

温馨提示 请不要盲目使用 Jordan 标准型. 在完整地引入域扩张, 初等因子等理论之前, Jordan 标准型仅对 $\mathbb{C}$ 上的矩阵有效. 此处的 $\mathbb{F}$ 是任意域.

Problem 1.1 (同时相抵化) 对相同规格的矩阵 A 与 B. 若

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B),$$

则存在 $P\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_{\operatorname{rank}(A)} & O & O\\ O & O & O\\ O & O & O\end{pmatrix},\quad PBQ=\begin{pmatrix}O & O & O\\ O & O & O\\ O & O & I_{\operatorname{rank}(B)}\end{pmatrix}.$$

Problem 1.2 (分块上三角化) 记矩阵 (各分块不必是方阵)

$$M=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}.$$

证明 $r(M)=r(A)+r(B)$ 的充要条件如下:

- 存在矩阵 X 与 Y 使得 $AX+YB=C$.

Problem 1.3 (何时能砍掉无用的行列空间) 所有矩阵不必是方阵. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=r(A)$$

的充要条件是存在 X 与 Y, 使得以下三个等式同时成立

$$AX=B,\quad YA=C,\quad YAX=D.$$

Problem 2.1 (南开 2022) 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 满足 $r(A) = r(ABA)$. 证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

Problem 2.2 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 满足 $r(B) = r(ABA)$. 证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

Problem 2.3 任取矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得以下条件恒成立

$$r((AB)^d) = r((BA)^d), \quad (\forall d \in \mathbb{N}_+).$$

证明: 存在行满秩或列满秩的矩阵 C 使得 $ABC = CBA$.

- 对 $M = N$ 的特殊情形而言, AB 与 BA 相似.

Problem 3.1 (见例题) 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = O$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} O & I & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Problem 3.2 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = A$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

- 等价地, 存在 $A = BC$ 使得 $BC = I_{\mathrm{rank}(A)}$.

Problem 3.3 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2 = I$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}.$$

- 假定域 $\mathbb{F}$ 的特征为 2, 即 $1+1=0$. 此时结论作何变化?

Problem 3.4 假定存在方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^3 = A$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & -I & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

- 假定域 $\mathbb{F}$ 的特征为 2, 即 $1+1=0$. 此时结论作何变化?

Problem 3.5 假定方阵 A 是幂零的, 即, 存在某一 $n \in \mathbb{N}_+$ 使得 $A^n = O$. 求证:

- 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得 $S^{-1}AS$ 是 $\{0,1\}$-取值的矩阵, 且该矩阵的 1 仅允许分布在 $E_{i,i+1}$ 位置.

Problem 3.6 给定任意方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 证明: 存在 $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} D & O \\ O & N \end{pmatrix}.$$

以上, D 是可逆的, N 是幂零的.