Ex 1. 直接写出以下矩阵的行列式，或简要说明其行列式的求解方式.

> $\lambda \in \mathbb{F}$ 是给定的常数，$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是矩阵.

1. 置换矩阵.
2. 初等变换矩阵 $D_i^\lambda, T_{j,i}^\lambda$, 以及 $S_{i,j}$.
3. 若 A 是对角矩阵, 求 $\det A$.
4. 若 A 是上三角矩阵, 求 $\det A$.
5. 若 $A = \begin{pmatrix} X & O \\ Y & Z \end{pmatrix}$, 其中 X 与 Z 是方阵, 求 $\det A$.
6. A^{-1} (若存在) 的行列式.
7. 方阵乘积的行列式.
8. 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 求 $\det A$.
9. λA 的行列式 (用 $\det A$ 表示).
10. A^T 的行列式 (用 $\det A$ 表示).
11. 将 A 顺时针旋转 $\pi/2$ 后的行列式 (用 $\det A$ 表示).
12. f 是 $\mathbb{F}$ 上的多项式, 求 $\det(f(A))$.
13. 求 $\det e^A$.

Ex 2. 试比较以下.

1.举出 $\det(A-B)=0$ 但 $\det(A^2-B^2)=1$ 的例子.

2.举出 $\det(A-B)=1$ 但 $\det(A^2-B^2)=0$ 的例子.

3.假设 $AB=BA$, 则 $\det(A^2-B^2)=\det(A-B)\det(A+B)$.

记 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 $A,B,C,D\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. 记 $N=DA-CB$.

1.举出 $\det M=0$ 但 $\det N\neq 0$ 的例子.

2.举出 $\det M\neq 0$ 但 $\det N=0$ 的例子.

3.假设 $AB=BA$, 则 $\det M=\det N$. 对称的命题略.

4.计算 $\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Ex 3. 使用矩阵初等变换, 证明对任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 总有

$$\lambda^n \cdot \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \cdot \det(\lambda I_n - BA). \tag{1}$$

推广: 对方阵 A, B 与 C (未必可逆), 总有 $\det(A + B + ACB) = \det(A + B + BCA)$.

Ex 4. 求以下矩阵行列式

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & a_n \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_2 \\ & & & 1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ex 5. 以下是三对角矩阵的行列式问题.

1. 求以下三对角矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

提示: 使用归纳法, 需讨论 $a^2 = 4bc$ 与否.

2. 证明

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{pmatrix} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{4}$$

特别地, 若 $a_i \equiv 1$, 则所得结果是 Fibonacci 数.

3. 证明

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -c_{n-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ -c_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ex 6. Vandermonde 矩阵的行列式.

1. 记 $V := (x_i^j) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 直接写出 $\det V$.

2. 将 V 删去 k 行与 k 列, 得 V'. 求 $\det V'$.

3. 将 V 的各项 (共 n^2 项) 加上 1, 求新矩阵的行列式.

4. 记 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是整数, 证明 $\prod_{1\le i<j\le n} \frac{x_i-x_j}{i-j}$ 是整数.

> 提示: 记 $\binom{n}{k} = C_n^k$ 为组合数. 假定所有 x_i 充分大, 考虑 $\det(\binom{x_i}{j})$.

Ex 7. 令 $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$. 对 $\det(PQ^T)$ 使用 Cauchy-Binet 公式, 并与直接计算行列式所得的结果比较, 得 Lagrange 恒等式 (请验证):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i c_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i d_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i d_i)\sum_{i=1}^{n}(b_i c_i) + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}(a_{i_1}b_{i_2} - a_{i_2}b_{i_1})(c_{i_1}d_{i_2} - c_{i_2}d_{i_1}). \tag{6}$$

特别地, 对向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 证明

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}(a_{i_1}b_{i_2} - a_{i_2}b_{i_1})^2. \tag{7}$$

若 $n = 3$, 试求 $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$?

Ex 8. 取 $(a_i)_{i\geq 1}$ 是周期为 n 的 $\mathbb{F}$ 中的数列, 定义 $n\times n$ 矩阵的第 (i,j) 项为 a_{i+j-1}. 计算这一循环矩阵的行列式.

Ex 9. 给定常数 $(c_1, \dots, c_n)$. 试计算 $\left(c_{\min(i,j)}\right) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式.

Ex 10. 计算 Hilbert 矩阵的行列式. 关于 Hilbert 矩阵的定义, 以及此题答案可参考逆矩阵习题.

Ex 11. 计算并总结以下行列式的通式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 & 0 \\ x^3 & hx^2 & hx & h & -1 \\ x^4 & hx^3 & hx^2 & hx & h \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ex 12. 记分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 满足 $r(A) = r(A_1)$ 与 $r(B) = r(B_1)$. 此时

$$\det(A+B) \cdot \det(A_1) \cdot \det(B_4) = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ A_3 & B_4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ex 13. (Ptolemy 定理) 给定矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, 记 $\Delta_{i,j} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$. 证明

$$\Delta_{1,2}\Delta_{3,4} + \Delta_{1,4}\Delta_{2,3} = \Delta_{1,3}\Delta_{2,4}. \tag{10}$$

Ex 14. 通常的正整数矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的行列式. 其中 $a_{i,j} = \gcd(i,j)$ 是最小公倍数.

提示: 证明对任意整数都有 $m = \sum_{k|m} \phi(k)$. 其中 k 取遍 m 的所有因子, ϕ 是通常的 Euler totient 函数. 此时 $a_{i,j} = \sum_{k|i \text{ 且 } k|j} \phi(k)$. 这表明 $A = X^T \cdot D \cdot X$, 其中

- $D = \operatorname{diag}(\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n))$ 是对角矩阵,
- X 是 $\{0,1\}$-下三角矩阵, 其中 $X_{i,j} = 1$ 当且仅当 $j \mid i$.

Ex 15. (对任意域而言) 若 $A^T=-A$, 则 $\det A$ 是完全平方式. 这称作 Pfaffian.

- 特殊的 Pfaffian (来自 Cauchy 矩阵的基本性质): $\det\left(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right)_{n\times n}=\left(\prod_{i<j}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\right)^2$

Ex 16. 记 a, b, c 是常数. 若矩阵 A 的严格下三角部分均为 a, 严格上三角部分均为 b, 对角线上均为 c. 求 $\det A$.

一般地, 记多项式 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{n-1} x^{n-1}$, 考虑 n 阶 $\mathbb{C}$-方阵

$$M := \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ zc_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ zc_{n-2} & zc_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ zc_2 & zc_3 & zc_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ zc_1 & zc_2 & zc_3 & \cdots & zc_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

则 $\det M = \prod_{k=1}^{n} f(w_k)$, 其中 w_k 是 $w^n = z$ 的 n 个复根.

Ex 17. 记 $(a_i)_{i=1}^n$ 与 $(b_i)_{i=1}^n$ 是给定的常数, 且 $a_ib_j \neq 1$. 记 $m_{i,j} = \frac{1-(a_ib_j)^n}{1-a_ib_j}$, 计算 $\det(m_{i,j})$.

Ex 18. 假定域的特征不为 2. 证明: 对任意方阵 A, 总存在一个取值 $\{\pm 1\}$ 的对角矩阵 D 使得 $\det(A+D) \neq 0$
.