零散的习题: 线性空间

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Saturday 2nd November, 2024

请完成 习题 2^k $(k \in \mathbb{N}_+)$.

1 四大基本空间

我们目前仅学习了单一矩阵的四大基本空间. 以下是一些推荐读物与参考资料:

1. §3.5, Strang 的线性代数 (第六版),
2. 一张清单 (稍微涉及了奇异值分解),
3. 此文第五章 给出 Sage 的计算示例 (可使用临时在线窗格),
4. 此网页给出 mathematica 计算示例 (如果你习惯 mathematica).

假若学习了奇异值分解, 则可以深入研究 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的运算 ($P \in \{C(-), C(-^T), N(-), N(-^T)\}$).

2 示例: 通过 Sage 计算 LU 分解

习题 1 (广义 LU-分解)**.** 假定你证明了 Gauss 消元法存在性. 尽可能简单地证明: 任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 可以分解作 $A = LS\widetilde{I}DU$ 的五元乘积形式, 或是 $A = LD\widetilde{I}SU$ 的五元乘积形式. 此处

1. $L \in \mathbb{F}^{m\times m}$ 是主对角为 1 的下三角方阵, 例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$;
2. $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 是主对角为 1 的上三角方阵, 例如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. S 是置换方阵, 即先前作业提及的 “S-类初等变换方阵”;
4. D 是对角方阵, 即, D 中非对角元都是 0;
5. $\widetilde{I}$ 是相抵标准型的中项.

证明任意一种情形即可, 因为这两种分解仅相差一个转置.

自主思考: 以上分解在 “何种意义下” 是唯一的?

备注. “概率” 地, 假定 A 实数域或复数域上的 “随机” 方阵, 则 $S = I$ 依概率 1 发生.

假定你已经知道了 $PA = LU$ 分解的一般方法, 但疏于计算, 不考虑以下.

例子. 如果想多做一些题目, 可以使用计算软件进行编题与解题.

S0 使用 sage 在线窗格 (或者其他方式) 创建 $\mathbb{Q}$-上的矩阵

```
A = matrix(QQ, [
    [ 1,  1,  4,  5,  1,  4,  0,  0,  1],
    [-1,  9, -1, -9,  8, -1,  0, -7, -7],
    [ 1,  2, -3, -4,  5,  6, -7, -8,  9],
    [ 3,  1,  4,  1,  5,  9,  2,  6,  5],
    [ 2,  7,  1,  8,  2,  8,  1,  8,  3]
]); # Create $A\in \mathbb Q^{m\times n}$.
```

若想查看矩阵 A, 另起新行并键入 `A`, 并点击 `Evaluate` 按钮即可 (快捷键 `Ctrl+Shift+Enter`).

1. 为查看 A 的最简行阶梯形, 键入 `A.rref()` 并运行即可.
2. 广义 LU-分解的形式是 $A = PLU$, 键入 `P, L, U = A.LU();` 即可对 A 的 LU-分解进行赋值.
   - 依照 $P^2 = I$, 以上即是 $PA = LU$ 分解.
3. 若想知道主元的位置, 可键入 `A.pivots()`.
4. 自行探索更多.

3 线性空间, 基的证明题

如果想操练计算题, 可参考 "国庆作业".

习题 **2.** 假定 V 任意域 $\mathbb{F}$ 上的 2024 维线性空间. 试构造子集 $S \subset V$ (向量组), 其同时满足

1. 集合 S 的大小是 2025,
2. S 中任意 2024 个向量线性无关.

习题 **3** (Challenging)**.** 若 $\mathbb{F}$ 是数域, 则上题的条件 1 可以放宽至无限集. (What if $\mathbb{F}$ is finite?)

习题 **4** (必做的证明题)**.** 给定数域上的线性空间 V. 任意给定 V 的有限个真子空间 $\{U_i\}_{i=1}^m$, 总有

$$\left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) \neq V. \tag{3.1}$$

(若 $\mathbb{F}$ 非数域, 试给出 $m = 3$ 的反例?[1])

习题 **5** (Challenging)**.** 在上一习题中置 $m = 2$, 则域 $\mathbb{F}$ 无限制;

习题 **6** (如果先前做错了, 请重试)**.** 若 U, V 与 W 是三个子空间, 证明以下等式的一侧, 并证伪另一侧

1. $(U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$;
2. $(U \cap V) + W = (U + W) \cap (V + W)$.

习题 **7** (如果先前做错了, 请重试)**.** 若 $U \subset V$ 与 W 是三个子空间, 证明 $(U+W) \cap V = U + (W \cap V)$.

习题 **8.** 根据上述习题, 证明以下两个等式. 选定 U, V 与 W 为同一线性空间的三个子空间, 试证明:

1. $((V \cap W) + U) \cap V = \qquad\qquad\qquad\qquad = V \cap (W + (U \cap V))$,
2. $((V + W) \cap U) + V = \qquad\qquad\qquad\qquad = V + (W \cap (U + V))$.

关键步骤是中间白色处.

[1] Might there be a one-line counter-example for those who are familiar with $\mathbb{F}_2$-field?

4 (span : 子集 → 子空间) (dim : 子空间 → ℕ) 与 (rank = dim ∘ span)

记号. 谈及 dim 与 rank, 默认 “参与关键运算” 的线性空间是有限维的.

以下定义, 定理, 以及习题等的表述是更偏类型化的: 这兼顾了严谨性与简易性.

定义 (“rank = dim ∘ span”)**.** 我们形式化地澄清三个记号. 以下谈论的线性空间都附带了域.

span 输入 _1 是线性空间 V, 输入 _2 是 V 的子集 S;

输出 是 V 中一切包含 S 的线性子空间之交.

习题 **9.** 需要证明, 输出 也是线性空间, 并恰是包含 S 的 V-线性子空间中的极小者.

dim 输入 是有限维线性空间 V;

输出 是自然数 n, 即 V 中任一极大线性无关组的大小.

习题 **10.** 需要证明, 任选定 V 中任意两组极大线性无关组, 其作为集合大小相同.

rank 当且仅当 span 输出有限维线性空间, 方可定义 rank = dim ∘ span.

固定 输入 _1, 以下研究 输入 _2 的变化对以上的影响. 最简单的子集关系是包含.

习题 **11** (保序)**.** dim 与 rank 保持特定的序关系. 给定全空间 V 与子集 $S_1, S_2 \subset V$, 考虑下图:

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & c_2 & & c_3 \\ \\ [S_1, V] & \longrightarrow & \mathrm{span}_V(S_1) & \longrightarrow & \mathrm{rank}(S_1) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ [S_2, V] & \longrightarrow & \mathrm{span}_V(S_2) & \longrightarrow & \mathrm{rank}(S_2) \end{array} \quad (4.1)$$

基于对称性, $\subset$ 可以表示子集的包含, 线性子空间的包含, 自然数的小于等于号. “保序” 是说,

- 若 c_i 处的 $\subset$ 成立, 则 c_{i+1} 处的 $\subset$ 亦成立.

习题 **12.** 证明以下问题.

1. 若 c_1 取 $\subset$, 则 c_3 取等当且仅当 c_2 取等.
2. 若 c_i 取等, 则 c_{i+1} 亦然.
3. 若 c_{i+1} 取等, 则 c_i 不必取 $\subset$.

习题 **13.** 思考平凡情况: $S = \emptyset$ (理解作 void) 或 $S = V$ (作为集合, 理解作 $S = V.\mathrm{Set}$).

下一步是建立二元运算. 暂时将 $\subset$ 区分地记作 $\subseteq$ (集合), $\subset$ (子空间), $\leq$ (自然数).

例子. 自然的想法是下述表格 (子空间的交记作 $\wedge$, 以区别于集合的交 $\cap$):

名称	序	极大	极小	所谓 And	所谓 Or
子集	$\subseteq$	V_{Set}	$\emptyset$	$\cap$	$\cup$
子空间	$\subset$	V	$\mathbf{0}$	$\wedge$	$+$
秩	$\leq$	NA	0	min	max

. (4.2)

习题 **14.** 选用 $S_1 \subseteq S_2$, 则有

- $\operatorname{span}(\emptyset) = 0$, $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) = \operatorname{span}(S_1) \cap \operatorname{span}(S_2)$;
- $\operatorname{span}(V) = V$, $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$.

选用 $U_1 \subset U_2$, 则有 (容易补全 rank-方向...)

若所谈论的对象构成全序 (等价地, 只看一条链), 则以上三类偏序关系是逐次的商集.

习题 **15.** 给定子空间 U_1 与 U_2.

1. 证明 $\operatorname{rank}(U_1 \wedge U_2) \leq \min(\operatorname{rank}(U_1), \operatorname{rank}(U_2))$;
2. 证明 $\max(\operatorname{rank}(U_1), \operatorname{rank}(U_2)) \leq \operatorname{rank}(U_1 + U_2)$.

提示: 第一处仅使用逻辑 “或”, 第二处仅使用逻辑 “与”; 无关具像之选取.

备注. 从高维的 “序” 降至低维的 “序”, 自然省略了诸多信息.

习题 **16.** 给定子集 S_1 与 S_2.

1. 证明 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subset \operatorname{span}(S_1) \wedge \operatorname{span}(S_2)$.
2. 证明 $\operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2) = \operatorname{span}(S_1 \cup S_2)$.

备注. 问题出在何出? 此处的问题是下式 “为何取等”, 而非上式为何不等.

命题. 对同一集合的三个子集 G, H 与 U, 总有

1. $G \cup (H \cap U) = (G \cup H) \cap (G \cup U)$, 与
2. $(G \cap H) \cup (G \cap U) = G \cap (H \cup U)$.

证明. 由于 $x \in X$ 是命题, $(\star \in X)\,\text{and}\,(\star \in Y)$ 当且仅当 $\star \in (X \cap Y)$, 以及 $(\star \in X)\,\text{or}\,(\star \in Y)$ 当且仅当 $\star \in X \cup Y$. 鉴于此, 我们可以在不使用 `mathlib` 的情况下用 L∃∀N 进行形式化的证明, 见此篇个人草稿的 212 行与 214 行. 证毕 完明

习题 **17.** 若 U, V 与 W 是三个子空间, 证明以下等式的一侧, 并证伪另一侧

1. $(U + V) \wedge W = (U \wedge W) + (V \wedge W)$;
2. $(U \wedge V) + W = (U + W) \wedge (V + W)$.

例子. 接上题. 尽管等式不必成立, 但式 1 取等号当且仅当式 2 取等.

证明. 仍然给一个形式化的证明, 见此处.

P.S. 笔者没想过其中的逻辑原因, 但还是莫名其妙地证出来了.

完证毕明

备注. 问题出在哪儿?

习题 18. 给定自然数 l, m 与 n, 证明

1. $\max(\min(l,m),\min(l,n)) = \min(l,\max(m,n))$,
2. $\min(\max(l,m),\max(l,n)) = \max(l,\min(m,n))$.

提示: $a = b$ 当且仅当 $(x \le a) \leftrightarrow (x \le b)$, 此时 max 对应 "或", min 对应 "与", ...

例子 (min-max 不等式)**.** (min-max 不等式) 给定任意实数 a_1, b_1, a_2 与 b_2, 总有

$$\max((\min(a_1,b_1)),(\min(a_2,b_2)))\ \min((\max(a_1,a_2)),(\max(b_1,b_2))). \tag{4.3}$$

证明. 形式化证明. 完证毕明

备注. Min-max 不等式是极其广泛的: 假定 $f : X \times X \to P$ 是集合到偏序集合任意映射 (例如 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ 是二元实函数), 则恒有

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in X}\sup_{x\in Y} f(x,y). \tag{4.4}$$

作为特例, 取 $X = Y = \mathbb{N}$, 以数列定义 $a_{m+n} = f(m,n)$, 则上式表示数学分析中何种的结论?

未完待续 (有些待补全的内容可以在上一届习题中找到).

1. 目前引入 span 的方式还是很 "牵强" 的, 之后会有更自然的角度. 等课上提到了 "泛性质" 再话吧.
2. 此处未涉及线性空间的补空间.
3. 将 "两个线性空间" 换作 "一族线性空间"?

5 思考: 无限维线性空间

习题 **19** (无限维的定义). $\mathbb{F}$ 上无限维线性空间的定义如下 (选自教材之一 LADR (第四版)):

> **定义.** 称线性空间 V 是无限维的, 若 V 不是有限维的.

请证明: V 是无限维的, 当且仅当存在无限集 $S \subset V$ 使得 S 是线性无关组.

(若选择证明此题) 书写证明时, 换段地书写 "充分性" 与 "必要性" 是基本要求之一.

- 以上命题存在不显然之处, 请在证明完毕后指出.

备注. 以上习题通常被默认作 "常识"; 此处有一先决条件, 就是 $\mathrm{span}(S)$ 的定义.

习题 **20** (Challenging). 如果你熟悉数学分析中的 Cantor 对角线法, 不妨尝试以下命题:

- 形式幂级数空间 $\mathbb{F}[\![x]\!]$ 不是可数维线性空间;

换言之, 对任意可数集 $S \subset \mathbb{F}[\![x]\!]$, 总有 $\mathrm{span}(S) \neq \mathbb{F}[\![x]\!]$. (以上 $\mathbb{F}$ 是任意域.)