Problem 1 记 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 是有理系数三次多项式 $(b, c, d \in \mathbb{Q})$.

> 视个人情况完成 $\{1, 2\}$. 完成 $\{3, 5, 7\}$ 或 $\{4, 6, 8\}$, 这两组题是对称的.

1. (如果不会, 请写一遍) 数域是什么?

2. (这与先前的某道题目非常类似, 如果做错了, 请重写一遍.) 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 任取多项式的一根 $x_0 \in \mathbb{C}$, 证明 3 维 $\mathbb{Q}$-线性空间

$$V = \{r + sx_0 + tx_0^2 \mid r, s, t \in \mathbb{Q}\} \tag{1}$$

是一个数域.

3. (接上一问) 取定 V 的一组 $\mathbb{Q}$-基 $B = (v_1, v_2, v_3)$. 对任意 $\lambda \in V$, 存在矩阵 $M_\lambda^B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ 使得

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = M_\lambda^B \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

若取另一组基 $B' = (v_1', v_2', v_3')$, 同样可定义 $\lambda \mapsto M_\lambda^{B'}$.
试证明: $\det M_\lambda^B = \det M_\lambda^{B'}$. 换言之, $\det M_\lambda$ 不依赖基的选取.

> 注释: 将等式解释如下:
>
> $$\underbrace{\lambda}_{\text{属于 } V} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\text{属于 } V^{3\times 1}} = \underbrace{M_\lambda^B}_{\text{属于 } \mathbb{Q}^{3\times 3}\text{, 因此属于 } V^{3\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\text{属于 } V^{3\times 1}} \tag{3}$$
>
> 是 V 中的运算. 例如 $f = x^3 - 2$, 取 $B = (1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, $\lambda = 1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$, 则
>
> $$(1 + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{4} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

4. 证明 $\mathrm{tr}(M_\lambda)$ 也不依赖基的选取.

5. 仍假定 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 记 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 是 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根. 证明 $\det M_{x_1} = \det M_{x_2} = \det M_{x_3}$.

6. 仍假定 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 记 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 是 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根. 证明 $\mathrm{tr}(M_{x_1}) = \mathrm{tr}(M_{x_2}) = \mathrm{tr}(M_{x_3})$.

7. 证明: 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的某两个根的比值是非零有理数, 则 $f(x)$ 的三个根都是有理数.

8. 证明: 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的某两个根的差是有理数, 则 $f(x)$ 的三个根都是有理数.

Problem for Fun (图与特征多项式. **本题不涉及特征根与特征向量.**) 图是一个**实对称**矩阵 A, 其主对角线为 0, 所有 $a_{i,j} \in \{0, 1\}$.

1. (定义: 图的几何实现) 假设图 A 是 n-阶矩阵, 以下是将图 A 画在纸上的方式:

   1. 选定互不相同的 n 个点 $\{v_1, \ldots, v_n\}$,

   2. 记 v_i 与 v_j 存在一条连边, 当且仅当 $a_{i,j} = 1$.

   例如, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的几何实现是四边形 (的外周).

2. (一个简单的事实) 反之, 若给定图的几何实现, 则图的矩阵形式不必唯一 (假定可以变更顶点的编号). 实际上, A 与 A' 有相同的几何实现, 当且仅当存在置换矩阵 S 使得 $S^T A S = A'$.

3. (定义: 图的特征多项式) 给定图 A, 记 $\chi_A := \det(xI - A)$ 为图的特征多项式. 例如, 三角形的特征多项式是

$$\det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix} = \cdots (\text{略}). \tag{5}$$

   试计算以下几类特殊图的特征多项式.

   - n-边形. 可选取如下矩阵: $a_{i,j} = 1$ 当且仅当 $(i - j) = \pm 1 \mod n$; 不然 $a_{i,j} = 0$.
   - n 个顶点的路, 也就是 n-边形删去任意一条边. 可选取如下矩阵: $a_{i,j} = 1$ 当且仅当 $(i - j) = \pm 1$.
   - 完全二部图 $K_{m,n}$. 该图的矩阵形式是 $\begin{pmatrix} O & J \\ J^T & O \end{pmatrix}$, 其中 $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是全 1 矩阵.

4. (挑战题) 若 A 与 A' 有相同的几何实现, 则其特征多项式相同; 反之, 未必 (试给出一个不同于附录的构造?).

5. (分块矩阵) 若 A 与 B 是图, 则分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 的几何实现是 A 与 B 几何实现的无交并.

6. (特征多项式的系数) 记 $\chi_A = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n$.

   1. 证明 $c_1 = 0$. 提示: $c_1 = \operatorname{tr}(A)$.

   2. 证明 $c_2 \leq 0$, 且 $|c_2|$ 是图中边的数量. 提示: 使用 A^2 的特征多项式, 或直接计算 $\operatorname{tr}(A^2)$.

   3. 证明 $c_3 \leq 0$, 且 $\frac{|c_3|}{2}$ 是图中三角形数量. 提示: 使用 A^3 的特征多项式, 或直接计算 $\operatorname{tr}(A^3)$.

   4. 特征多项式不能反映图中四边形的数量. 反例见 **Problem 2-4**.

7. (删去顶点) 将图删去第 i 个顶点, 等价于将矩阵 A 同时删去第 i 行与 i 列, 记新的矩阵为 $A_{(i)}$.

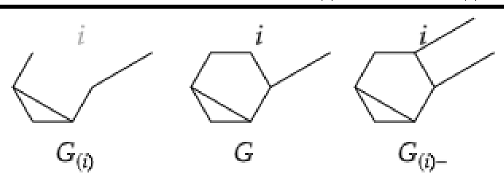
   1. 证明, 若 A 有 n 个顶点, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \chi_A(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \chi_{A_{(i)}}(x). \tag{6}$$

   2. (Ulam 重建猜想) 若给定所有 $A_{(i)}$ 的几何实现 (不含顶点编号), 能否**唯一地**复原 A?

   > 对特殊的图 (例如无环图, 也称树) 而言, Ulam 重建猜想成立. 今假定 Ulam 重建猜想成立, 则 χ_A 的常数项由其他项唯一决定.

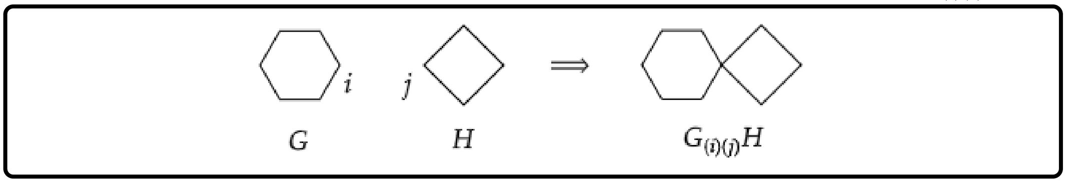
8. (添加一条边) 给定图的几何实现 G. 选定顶点 i, 定义删点图 $G_{(i)}$ 与添边图 $G_{(i)-}$ 如下:



记 G 的矩阵形式为 A, 试描述 $A_{(i)}$ 与 $A_{(i)-}$ 的矩阵形式. 使用行列式的 Laplace 展开证明

$$\chi_{A_{(i)-}}(x) + \chi_{A_{(i)}}(x) = x \cdot \chi_A(x). \tag{7}$$

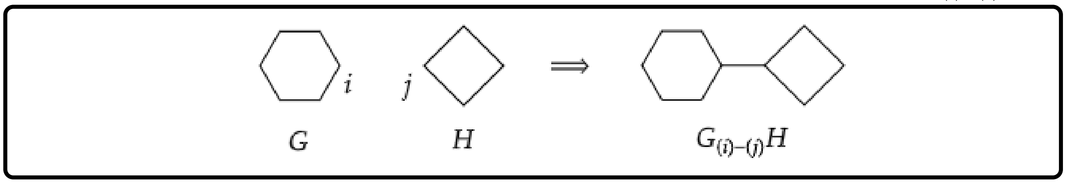
9. (图的对点粘合) 给定图的几何实现 G 与 H, 点 $i \in G$ 与 $j \in H$, 定义 (G, H, i, j) 的对点粘合 $G_{(i)(j)}H$ 为



记 G 的矩阵形式为 A, H 的矩阵形式为 B, 试描述 $A_{(i)(j)}B$. 使用行列式的 Laplace 展开证明

$$\chi_{A_{(i)(j)}B} + x \cdot \chi_{A_{(i)}}\chi_{B_{(j)}} = \chi_A \cdot \chi_{B_{(j)}} + \chi_{A_{(i)}} \cdot \chi_B. \tag{8}$$

10. (图的连边粘合) 给定图的几何实现 G 与 H, 点 $i \in G$ 与 $j \in H$, 定义 (G, H, i, j) 的连边粘合 $G_{(i)-(j)}H$ 为



记 G 的矩阵形式为 A, H 的矩阵形式为 B, 试描述 $A_{(i)-(j)}B$. 使用行列式的 Laplace 展开证明

$$\chi_{A_{(i)-(j)}B} = \chi_A \cdot \chi_B - \chi_{A_{(i)}} \cdot \chi_{B_{(j)}}. \tag{9}$$

11. (自行思考) 设计一个算法, 使用 8-10 的公式降解图的多项式. 如果你觉得特征多项式过于复杂, 可以改用染色多项式或是 Tutte 多项式等.

12. (Laplace 矩阵) 给定图 A. 记 $\mathbf{1}$ 是全 1 列向量, 定义向量 $d := A \cdot \mathbf{1}$. 从几何实现的层面看, d 的第 i 个分量是顶点 i 的连边数. 定义对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d)$, 即, $D_{i,i} = d_i$.

    1. 证明 $\det(D - A) = 0$. 提示: $(D - A) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

    2. 证明完全平方式

    $$x^T \cdot (D - A) \cdot x = \sum_{i<j} a_{i,j} \cdot (x_i - x_j)^2. \tag{10}$$

    3. 当你学完数值分析或是数值代数, 你会发现这一矩阵是离散的 Laplace 算子.

Problem for Fun (Friezes from cluster category) 以下趣题仅供各位熟悉 2-阶矩阵行列式计算.

1. (Cluster-tilting objects in $\mathcal{F}_{2,n}$) 你需要做这样一件事: 若存在图案 $\begin{bmatrix} a & \text{空} \\ c & d \end{bmatrix}$, 则将之补全做行列式为 1 的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 为了排版方便, 将以上矩阵旋转作

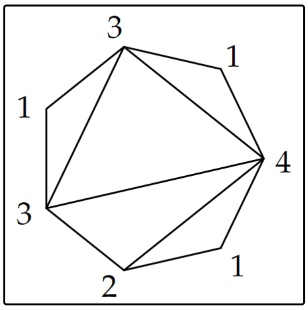
$$\begin{bmatrix} & \text{空} & \\ a & & d \\ & c & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{bmatrix}. \tag{11}$$

请一直向上补全以下横向周期为 7 的无穷图表

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \cdots & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \cdots \\ \cdots & 1 & & 3 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & \cdots \\ \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots, \\ \cdots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \end{array} \tag{12}$$

直至你意识到到可以停止了.

2. ([CC37]) 以上序列来自正七边形的三角剖分



. 可以尝试对一般多边形进行三角分割, 仍有第 1 问的现象. (实际上, 这是充要的.)

3. 若舍去周期性条件. 证明以下无穷图表的补全必为整数表格:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \cdots & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \text{空} & & \cdots \\ \cdots & a & & b & & c & & d & & e & & f & & g & & h & & i & \cdots \\ \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots, \\ \cdots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \end{array} \tag{13}$$

并尝试归纳其通项.

4. 补全以下图案:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \cdots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\ \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\ \cdots & ? & & ? & & c & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & \cdots \\ \cdots & & ? & & b & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & \cdots。 \\ \cdots & ? & & a & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & & ? & \cdots \\ \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\ \cdots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \end{array} \tag{14}$$

试问: 每一项的分母都是 $a^l b^m c^n$ 形式的单项式? 这称作 Laurent 现象 .

> 依照这一现象, 可以证明以下数列是整的:
>
> 1. (Somos 4) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$, 以及 $a_n a_{n+4} = a_{n+1} a_{n+3} + a_{n+2}^2$;
>
> 2. (Somos 5) $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$, 以及 $b_n b_{n+5} = b_{n+1} b_{n+4} + b_{n+2} b_{n+3}$.
>
> 中学的证明方法是构造若干同余式.

5. (自行思考) 尝试将以上区块推广至 3×3 矩阵的行列式?

附录: Problem 2-4 的一个例子

A 是四边形与一个离散点的无交并, A' 是十字图. 以下是使用 Sage 的计算图特征多项式的示例:

```
# 计算 \chi_A.
e = {1:[2,4], 2:[3], 3:[4]}
# 给出连边的关系: 1-2, 1-4, 2-3, 3-4.
H = Graph(e)
# 画出图 (正方形).
H.add_vertices([5])
# 添加离散的顶点 {5}
H.characteristic_polynomial()
```

```
# 计算 \chi_{A^\prime}.
e = {1:[2,3,4,5]}
# 给出连边的关系: 1-其他所有点.
H = Graph(e)
# 画出图 (十字形).
H.characteristic_polynomial()
```

可以发现, 两个不同的图可能会有相同的特征多项式.