第一次作业反馈: 答案, 重要问题详解, 点评等

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Friday 11$^{\text{th}}$ October, 2024

目录

1 LaTeX 排版问题 **1**

1.1 中文写作的标点, 空格等 1

1.2 留白问题 1

1.3 数学符号问题 2

1.4 中英文表述 2

2 参考答案 **3**

2.1 答案一览 3

1 LaTeX 排版问题

1.1 中文写作的标点, 空格等

中文写作没有固定的规范. 以下是三种常见的范例.

1. **(半角标点写作) 继承英文写作的所有规范. 在此之上, 将一个数学公式, 以及一串不带标点的中文字符视作一个英文单词.**
2. (全角标点写作) 常见于早期苏俄教材的中译版本.
3. (全角标点写作, 但将句号换作全角或半角的点号) 常见于中学数学课本.

重要提示: 若使用半角标点写作, 请端详此处所列的例句.

例子 (行间公式)**.** 行间公式的标点通常加在相应数学环境中, 例如

$$a = \left\lfloor \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\rfloor. \tag{1.1}$$

例子 (Cases 环境)**.** 若使用 cases 环境 (单边大括号), 其标点规范如下:

$$f_a(x) = \begin{cases} a+1, & \text{若 } x > 1, \\[6pt] a^2 + \frac{1}{a}, & \text{若 } 0 < x \leq 1, \\[6pt] \sqrt[3]{a}, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

例子 (图表模式)**.** 若句子以图片收尾, 则可以省略句号. 仅从排版结果来看, 行间公式与 tikz 作图并无明确的界限. 此时的标点安排见仁见智.

1.2 留白问题

为阅读方便, 需要给长公式与排比语段等保留必要之留白. 总结下来, 是四 "勤".

1. 勤使用行间公式 (文段间的居中公式). 以经验看, 若公式长度大于行宽的 $\frac{1}{3}$, 则需要置于行间.
2. 勤拓宽多行行间公式的行间距. 若行间公式涉及矩阵等过高的公式, 建议在 `\\` 后接上 `[6pt]`.
3. 勤使用 `\quad` 等分隔行间公式, 常见的使用情境是映射的表述

$$\mathrm{Re}: \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad (a+ib) \mapsto a. \tag{1.3}$$

4. 勤使用 enumerate 环境 (有编号列举) 与 itemize 环境 (无编号列举). 凡涉及复杂的分类讨论, 充要性证明等, "排比的论证语段" 更利于阅读.

备注. 过窄的公式不应置于行间. 例如,

$$\begin{cases} a = 1, \\[6pt] b = 2, \\[6pt] c = 3, \end{cases} \tag{1.4}$$

应当换做

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3. \tag{1.5}$$

相应地, 过高的列矩阵宜写作行矩阵的转置.

1.3 数学符号问题

例子 (Operatorname)**.** 正体函数用 `$\operatorname{ }$` 定义, 例如 `$\operatorname{sin}$` 等效于 `\sin`. 若正体函数后接括号, 则使用 `$\mathrm{ }$` 无区别.

例子 (数学环境的省略号)**.** 请注意 $1+2+\cdots+100$, $x \in \{1,2,\ldots,100\}$ 的省略号位置. 使用数学环境的省略号时, 省略号左右必须是分隔符或运算符 (省略 $\cdot$ 的连乘除外).

例子 (粗体的使用)**.** 假若你能熟练区分向量与标量, 则可以使用通常字体表示向量, 矩阵等, 无需特意加粗. 自行比对 `\boldsymbol{ }` 与 `\mathbf{ }` 的区别 (尝试希腊字母).

1.4 中英文表述

例子 (推荐的列举语句)**.** 凡列举若干对象, 中英文共用的表述如下.

1. (两个对象) 我们有甲与乙.

2. (Two objects) We have A and B.

3. (多个对象) 我们有甲, 乙 (,) 与丙.

4. (Several objects) We have $u=(1,0)$, $v=(0,1)$ (,) and $w=(1,1)$.

5. (两个短句) 我们有 $z=\lfloor x+x^2+\cdots+x^{2024}\rfloor$, 以及 $y=1$.

6. (Two phrases) We have $A+B+C+D=0$, and $E=1$.

7. (可数无穷多个对象) 我们归纳地求出 a_0, a_1, a_2, 等等.

8. (Countably infinite many objects) We systematically find a_0, a_1, a_2, and so on.

例子 (“显然” 的用法)**.** **答题时**不推荐使用 “显然” 一词, 因为省略 “显然” 一词可以让表述更加显然.

例子 (衔接词)**.** 适当使用 however, otherwise, consequently, hence, therefore, whence, thenceforth, subsequently, amid 等词汇, 或是 as a result, for this reason, a priori, in light of, it suffices to, to illustrate, given that, in the sense of 等短语. 不建议千篇一律地使用 because, so, but, then.

无论如何, 禁止使用衔接词缝合多个句子. 一句话中不要出现 20 个以上的单词...

2 参考答案

2.1 答案一览

习题 (来自 Gilbert's textbook)**.** 作业内容: §1.1 (27, 30, 31); §1.2 (30, 31); §1.3 (3, 5, 6).
解答

- (1.1.27) n 维单位正方体的点集为 Cartesian 积 $V_n := \{0,1\}^n = \{$长度为 n 的 $(0,1)$-数列$\}$. 称两点 $(p, q \in V_n)$ 相邻, 当且仅当 $(p-q)$ 是仅一项非零的数列. 简单的组合性质表明, k 维面的数量是 $(2+x)^n$ 中 x^k 的系数. 对 $n=4$,
$$(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4. \tag{2.1}$$
综上, $(|点|, |边|, |面|, |体|) = (16, 32, 24, 8)$.

- (1.1.30) ..., unless $ad = bc$. 不妨设 $b_i = e_i$.

- (1.1.31) 解方程组
$$\begin{cases} +2\ c & -1\ d & +0\ e & = & 1, \\ -1\ c & +2\ d & -1\ e & = & 0, \\ +0\ c & -1\ d & +2\ e & = & 0. \end{cases} \tag{2.2}$$
解得 $(c, d, e) = (3/4, 1/2, 1/4)$.

- (1.2.30) 考虑 $(1,0)$, $(-1,2)$ 以及 $(-1,-2)$.

命题. 3 维空间中不存在单位列向量 $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, 使得 $q_i^T q_j < 0$ 对 $i \neq j$ 均成立.

证明. (反证法) 若存在, 取过原点且与 q_5 垂直的平面 Γ. 记 q_k 在 Γ 上的投射像为 q_k'. 此时 "$\{q_i\}_{i=1}^4$ 两两内积为负" 的必要条件是 "$\{q_i'\}_{i=1}^4$ 两两内积为负". 故数学归纳法有效. 完证毕明

- (1.2.31) 不妨设 $x^2+y^2+z^2 = 1$. 夹角的余弦值是
$$v^T w = xz + yx + zy = \frac{1}{2}((x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2) = -\frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

- (1.3.3) 直接地,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$
记原矩阵为 A, 下证明 A 列线性无关. A 列线性相关的充要条件是存在非零向量 v 使得 $Av = 0$. 由于 A^{-1} 存在, 且 $A^{-1}Av = v \neq 0$, 故 A 列线性无关.

- (1.3.5) 行可逆变换不改变答案. 考虑变换
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto r_3 - 7r_1]{r_2 \mapsto r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto -r_3/6]{r_2 \mapsto -r_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto r_3 - r_2]{r_1 \mapsto r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$
得 $y_3 = -y_1 + 2y_2$. (若经验充足, 可以一眼看出向量组的秩为 2, 从而零空间维数为 1. 因此, 答案是一个形如 $ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$ 的式子.)

- (3.3.6) 一个技巧: 方阵行线性无关当且仅当其可逆, 即行列式非零. 对称地, 行线性无关当且仅当列线性无关.

  1. 作列变换 $c_2 \mapsto c_2 - c_1$, 观察右下角 2×2 方阵的行列式. 线性相关当且仅当 $c=3$.
  2. 作列变换 $c_3 \mapsto c_3 - c\cdot c_1$, 观察右下角 2×2 方阵行列式, 线性相关当且仅当 $c=-1$.
  3. 作列变换
  $$\begin{pmatrix} c & c & c \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \mapsto c_3 - c_1]{c_2 \mapsto c_2 - c_1} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$
  行列式 $-3c$. 线性相关当且仅当 $c=0$.

习题 (来自第一节习题课, Exercise 1)**.**
解答 这是 Strassen 算法. 有同学在几年前帮我们验证过了, 见
外部链接 https://www.luogu.com/article/he12usoo
等价的问题: 证明 $\mathbb{R}^{2\times 2}\otimes\mathbb{R}^{2\times 2}\otimes\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上张量 $\sum_{1\le i,j,k\le 2} E_{i,j}\otimes E_{j,k}\otimes E_{i,k}$ 的秩为 7. 我们将在下一学期利用张量的秩证明如下问题: 复数乘法的一般算法将不可避免地使用 3 次实数乘法.

习题 (来自第一节习题课, Exercise 2)**.** 前两问总结了二维逆矩阵公式.

请务必熟练背诵: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1}\cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

第三问直接计算即可 (结果是特征根). 后半学期的特征空间理论可以帮助我们解决反问题: 如何不经提示地直接找到 S 与 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$? 对角化的好处之一: 对多项式函数 f, 总有
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = S\cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}\cdot T. \tag{2.7}$$
将 f 换做绝对收敛的幂级数 (如 $\sin x$), 类似的等式仍成立.

习题 (来自第一节习题课, Exercise 3)**.**
解答 依次解答如下.

1. 对应关系如下:

矩阵	加法	乘法	转置	行列式	迹
复数	加法	乘法	共轭	长度平方	实部两倍

(2.8)

2. 依照 $e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$, 得熟知的和差化积公式
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$
因此, $e^{2\pi i/2023}$ 对应的矩阵即为所求.

3. 此处, 矩阵的指数就是级数求和, 没有 “节外生枝” 的运算律.

对矩阵而言, 没有 $e^{S+T}=e^S\cdot e^T$: 问题出在交换律 $ST\neq TS$. 若 $ST=TS$, 证明同实数者.

受 $z=r\cdot e^{i\theta}$ 启发, 必然存在 r 与 θ 使得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

此时, 级数的第 k 项是

$$\frac{1}{k!}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k=\frac{r^k}{k!}\cdot\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

证明级数和各项收敛, 即证明

$$\sum_{k\geq 0}\frac{r^k}{k!}\cos k\theta \quad 与 \quad \sum_{k\geq 0}\frac{r^k}{k!}\sin k\theta \tag{2.12}$$

收敛. 依照 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$, 以及收敛数列的差是收敛数列, 只需计算

$$\sum_{k\geq 0}\frac{r^k}{k!}\cdot e^{ik\theta}=\sum_{k\geq 0}\frac{(r\cdot e^{i\theta})^k}{k!}=\exp(re^{i\theta}). \tag{2.13}$$

因此, $\exp\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)$ 的左上角为

$$\frac{1}{2}(\exp(re^{i\theta})+\exp(re^{i\theta}))=\mathrm{Re}(\exp(re^{i\theta}))=\mathrm{Re}(e^{a+bi}). \tag{2.14}$$

类似的计算表明矩阵幂的右上项为 $\mathrm{Im}(e^{a+bi})$. 这表明矩阵的幂对应复数的幂.

- 注: 按照以上方法, 需要使用 ε-δ 语言的地方只有两处: 证明 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 良定义, 以及证明收敛数列的差是收敛数列.

4. 假如你求出一族两两交换的矩阵, 那自然是错的. 这也是学习近世代数时经常出现的误区: 四元数 $\mathbb{H}$ 能借助复矩阵定义, 但 $\mathbb{H}$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的代数!

外部链接 `https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Matrix_representations`