Problem 1 同时上三角化问题. **本题只讨论复矩阵**, 约定 $[A,B]=AB-BA$.

1. (基础问题) 若 $[A,B]=O$, 则 A 与 B 可同时酉上三角化.

> 同时酉上三角化: 存在酉矩阵 U 使得 U^HAU 与 U^HBU 都是上三角矩阵.

2. (基础问题) 称 (λ,v) 是 A 的特征组, 当且仅当 $Av=\lambda v$ 且 $v\neq\mathbf{0}$. 试证明 A 与 B 可同时上三角化的一个充分条件:

   - 若 (λ,v) 是 A 的特征组, 则存在 μ 使得 (μ,v) 是 B 的特征组.

   定义三角指数为 Jordan-Chevalley 分解中幂零矩阵的秩. 以上充分条件说明 A 的三角指数小于 B 者.

3. (拓展问题) 结合奇异值分解以及 Schur 上三角化的过程, 证明: 对任意方阵 A 与 B, 存在酉矩阵 U 与 V 使得 UAV 与 UBV 都是上三角矩阵.

4. (应试问题) 若 $[A,B]=c(A-B)\neq O$, 则 A 与 B 可同时上三角化. (特别地, 三角矩阵的对角元相同).

> 解答示例: 取 B 的特征组 (λ,v), 此时
>
> $$[A-\lambda I,B-\lambda I]=c((A-\lambda I)-(B-\lambda I)).$$
>
> 对上式右乘 v, 得
>
> $$-(B-\lambda I)(A-\lambda I)v=c(A-\lambda I)v.$$
>
> 也就是
>
> $$B\cdot\boxed{(A-\lambda I)v}=(\lambda-c)\cdot\boxed{(A-\lambda I)v}.$$
>
> 由于 $\sigma(B)$ 有限, 从而可以取较好的 λ 使得 $\lambda-c$ 不是 B 的特征值. 此时 (λ,v) 也是 A 的特征组. 因此, 存在第一列为 v (数乘倍) 的的酉矩阵 U, 使得
>
> $$U^HAU=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & A_1\end{pmatrix},\quad U^HBU=\begin{pmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & B_1\end{pmatrix}.$$
>
> 对 A_1 与 B_1 继续归纳即可. 这说明 A 和 B 可同时酉三角化, 使得三角矩阵的对角元相同.

5. (考研名题) 若 $\operatorname{rank}([A,B])=1$, 则 A 与 B 可同时上三角化.

6. (应试问题) 若 $[A,B]=A+B$, 则 A 与 B 可同时上三角化.

7. (应试问题) 若 $[A,B]\cdot A=O=[A,B]\cdot B$, 则 A 与 B 可同时上三角化.

8. (拓展问题) 若 $[A,B]$ 是 A 的多项式, 则 A 与 B 可同时上三角化.

   - 一种解法: 证明 $[A,B]$ 幂零, 再使用 Engel 定理.

9. (An Corollary of Engel's Theorem) 若 $[A,B]$ 幂零, 则 A 与 B 可同时上三角化.

> Friedrich Engels (philosopher); Friedrich Engel (mathematician).

10. (应试问题) 若 $[A,[A,B]]=O$, 则 A 与 B 可同时上三角化.

    - 此题理应需要一些提示; 但往期作业已经给出解答, 故提示略.

11. (脑经急转弯) 若 $[A,B]=xA+yB$, 则 $[A,B]$ 是幂零的 (从而 A 与 B 可同时上三角化).

12. (M. Левицький) 若幂零矩阵构成的集合 S 关于矩阵乘法封闭, 则 S 中矩阵可以同时上三角化 (这也是 Engel 定理的推论).

> 需要注意: 幂零矩阵对乘法, Lie 括号 ($[-,-]$) 等常见运算均不封闭. 只有很少一部分幂零矩阵可以构成带乘法的线性空间. 试回想习题课问题: 即 $zA+wB$ 对一切 $(z,w)\in\mathbb{C}^2$ 都是幂零的, 其乘式 $A\cdot B$ 未必是幂零矩阵.

13. (Lie–Kolchin) 将上一定理的幂零矩阵换做幂幺矩阵. 若矩阵构成的集合 $S=\{I+N\mid N\text{ 幂零}\}$ 关于矩阵乘法封闭, 则 S 中矩阵可以同时上三角化 (这也是 Engel 定理的推论).

14. (应试问题) 若 A 与 B 是 2025 阶矩阵, 且 $AB+BA=A$, 则 A 与 B 存在公共特征向量.

- 相似的基础题: 若 A 与 B 是 2025 阶矩阵, 且 $AB=O$, 则 $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 有至少一者不可逆.
- 相似的基础题: 若 A 与 B 是 2025 阶矩阵, 且 $AB+BA=O$, 则 A 与 B 有至少一者不可逆.
- 相似的基础题: 若 A 与 B 是 2025 阶实正交矩阵, 则 $A-B$ 与 $A+B$ 有至少一者不可逆.

15. (同时上三角化的判定准则) 给定复矩阵 A 与 B, 以下论断等价.

1. (矩阵表述) 存在酉矩阵 U, 使得 U^HAU 与 U^HBU 是上三角矩阵;
2. (线性空间表述) 存在一族逐渐递增的子空间

$$0=V_0\subsetneqq V_1\subsetneqq V_2\subsetneqq\cdots\subsetneqq V_n=\mathbb{C}^n\quad(\dim V_k=k),$$

使得 V_k 是 A 的不变子空间, 同时也是 B 的不变子空间.

> Say $\{V_k\}_{k=0}^n$ is a flag variety of $\{A,B\}$-invariant subspaces.

3. (McCoy 定理) 记 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle$ 是二元非交换多项式环.

> 注: $x+1$, $xy-iyx$, xy 与 yx 是 $\mathbb{C}\langle x,y\rangle$ 中四个不同的元素. 如果加上 $xy=yx$ 这一限定, 得通常的二元多项式环 $\mathbb{C}[x,y]$).

若对一切 $p\in\mathbb{C}\langle x,y\rangle$, 矩阵 $p(A,B)$ 的特征值恰好是 $p(\lambda_i(A),\lambda_i(B))$, 则 A 与 B 可同时上三角化. 逆命题是直接的.

4. (McCoy 性质) 对一切 $p\in\mathbb{C}\langle x,y\rangle$, 矩阵 $p(A,B)\cdot[A,B]$ 都是幂零的.
5. (可解 Lie 代数表述) 记 $\mathfrak{g}$ 是集合 $\{A,B\}$ 连同运算

$$[,]:X\ \&\ Y\mapsto[X,Y]:=XY-YX$$

生成的最大 $\mathbb{C}$ 线性空间. 归纳地定义

$$\mathscr{D}^0\mathfrak{g}:=\mathfrak{g},\quad \mathscr{D}^{k+1}\mathfrak{g}:=[\mathscr{D}^k\mathfrak{g},\mathscr{D}^k\mathfrak{g}]=\{[X,Y]\mid X,Y\in\mathscr{D}^k\mathfrak{g}\}.$$

称 $\mathfrak{g}$ 是可解的, 当且仅当 $\mathscr{D}^n\mathfrak{g}=0$.

Problem 2 可交换矩阵相关问题. 以下假定复数域 $\mathbb{C}$.

> 特别注释: 以下问题的类型是求解线性方程组的零空间, 故扩域不增加解空间 (零空间) 的基. 因此, 以下涉及维数的问题对任意域都成立. 在实际操作中, 一般不对未知的域直接选取代数闭域 (依赖选择公理), 通常的做法是:
>
> 1. 直接使用有理标准型 (许多教材选用有理标准型代替域扩张);
> 2. 用 $\mathbb{F}[x]\pmod{\text{不可约多项式}}$ 进行有限扩张, 使得 $\det(xI-A)$ 能分解成一次因式的乘积.

1. (基础问题) 解方程 $J_m(\lambda)X=XJ_n(\mu)$. 此处 J 就是 Jordan 块.
2. (应试问题) 若 X 是 4-阶实矩阵, 其特征多项式和最小多项式都是 $(x^2+2025)^2$. 求线性空间维数:

$$\dim_{\mathbb{R}}\{Y\mid XY=YX\}.$$

给定 X, 往后使用 $Z(X)$ 表示方程 $X\cdot M-M\cdot X=O$ 的所有解.

3. (基础问题) 记

$$J=\begin{pmatrix}J_2(1)&&\\&J_5(2)&\\&&J_7(1)\end{pmatrix}.$$

试求 $Z(X)$, 并计算其维数.

4. (基础问题) 记 $A_{m\times m}$ 与 $B_{n\times n}$ 是对角矩阵, 且 $\sigma(M)\cap\sigma(N)=\emptyset$. 记 $C_{m\times n}=u\cdot v^T$ 是秩 1 矩阵, 证明

$$AX - XB = C$$

的解唯一 (上周作业), 并求该解 (是 Cauchy 矩阵).

- 关于 Cauchy 矩阵, 我们曾介绍过对称 Cauchy 矩阵及其推广形式的正定性 (使用 $\int_I u(x) \cdot u(x)^T \,\mathrm{d}\, x$ 积分), Cauchy 矩阵的行列式与代数余子式, 以及其逆矩阵的所有元素和 (使用了一个指标求和的技巧).

5. (拓展问题) 结合有理标准型, 或者扩域上的 Jordan 标准型, 试描述矩阵方程 $AX = XB$ 的解空间维数.

6. (基础问题) 证明: $\dim Z(X) \geq n$. 记 $P(X) = \operatorname{span}(\{I, X, X^2, \ldots\})$ 为 X 的多项式空间. 依照 Hamilton-Cayley 定理,

$$P(X) = \operatorname{span}(\{I, X, \ldots, , X^{n-1}\}) \quad (X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})).$$

证明: $P(X)$ 是 $Z(X)$ 的子空间.

7. (应试问题) 证明以下三个命题等价:
   1. X 的初等因子两两互素 (也就是特征多项式等于零化多项式);
   2. 子空间包含式 $P(X) \subseteq Z(X)$ 取等;
   3. 不等式 $Z(X) \geq \dim n$ 取等.

8. (拓展问题) 若 Y 与 $Z(X)$ 中的任一矩阵乘法交换, 则 $Y \in P(X)$. 换言之,

$$Z(X) \subseteq Z(Y) \implies Y \in P(X).$$

这不是什么困难的题目, 只是书写比较麻烦.

9. (拓展问题) Reformuler les questions ci-dessus avec le langage des schémas (géométrie algébrique).

10. (考研名题) 假定 $A - I$ 是幂零矩阵. 若存在 B 使得 $[A^{2025}, B] = O$, 则 $[A, B] = O$.

- 提示: 证明 A 是 A^{2025} 的多项式.
- 类似的问题: 记 M 是半正定矩阵, 则 $(M)^{1/2025}$ 是 M 的多项式.
- 类似的问题: 记 M 是本质正的矩阵 (存在唯一本质正的 2025-次根), 则 $(M)^{1/2025}$ 是 M 的多项式.