习题: 对称矩阵 (LaTeX 重排)

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Wednesday 23rd October, 2024

前言

定理 (相抵标准型)**.** 对任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 存在 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (r = \mathrm{rank}(A)). \tag{0.1}$$

备注. 注: r 唯一确定. P 和 Q 不必唯一.

备注. 域是任意的.

备注. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 代表 $\mathbb{F}$ 上 n-阶可逆矩阵全体 (一般作为乘法群).

备注. 矩阵的行列不必等长. 方阵的行列等长.

备注. 记 $r(A)$ 为矩阵 A 的秩.

请不要盲目使用 Jordan 标准型. 在完整地引入域扩张, 初等因子等理论之前, Jordan 标准型仅对 $\mathbb{C}$ 上的矩阵有效. 此处的 $\mathbb{F}$ 是任意域.

1 第一部分习题

习题 **1** (同时相抵化)**.** 对相同规格的矩阵 A 与 B. 若

$$\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B), \tag{1.1}$$

则存在 $P\in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 与 $Q\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_{\operatorname{rank}(A)} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix},\quad PBQ=\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_{\operatorname{rank}(B)} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

习题 **2** (分块上三角化)**.** 记矩阵 (各分块不必是方阵)

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

证明 $r(M)=r(A)+r(B)$ 的充要条件如下:

- 存在矩阵 X 与 Y 使得 $AX+YB=C$.

习题 **3** (何时能砍掉无用的行列空间)**.** 所有矩阵不必是方阵. 证明:

$$r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)=r(A) \tag{1.4}$$

的充要条件是存在 X 与 Y, 使得以下三个等式同时成立

$$AX=B,\quad YA=C,\quad YAX=D. \tag{1.5}$$

2 第二部分习题