零散的习题: 线性空间

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Tuesday 5^{th} November, 2024

请完成 习题 2^k $(k \in \mathbb{N}_+)$.

1 四大基本空间

我们目前仅学习了单一矩阵的四大基本空间. 以下是一些推荐读物与参考资料:

1. §3.5, Strang 的线性代数 (第六版),
2. 一张清单 (稍微涉及了奇异值分解),
3. 此文第五章 给出 Sage 的计算示例 (可使用临时在线窗格),
4. 此网页给出 mathematica 计算示例 (如果你习惯 mathematica).

假若学习了奇异值分解, 则可以深入研究 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的运算 ($P \in \{C(-), C(-^T), N(-), N(-^T)\}$).

2 示例: 通过 Sage 计算 LU 分解

习题 1 (广义 LU-分解)**.** 假定你证明了 Gauss 消元法存在性. 尽可能简单地证明: 任意矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 可以分解作 $A=LS\widetilde{I}DU$ 的五元乘积形式, 或是 $A=LD\widetilde{I}SU$ 的五元乘积形式. 此处

1. $L\in\mathbb{F}^{m\times m}$ 是主对角为 1 的下三角方阵, 例如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$;
2. $U\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 是主对角为 1 的上三角方阵, 例如 $\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$;
3. S 是置换方阵, 即先前作业提及的 "S-类初等变换方阵";
4. D 是对角方阵, 即, D 中非对角元都是 0;
5. $\widetilde{I}$ 是相抵标准型的中项.

证明任意一种情形即可, 因为这两种分解仅相差一个转置.

证明. 以 $A=LS\widetilde{I}DU$ 为例, 先给出最简列阶梯形 $A=C\cdot X$. 其中可逆上三角矩阵 X 可以分解为 $X=DU$. 最后使用 $S\cdot\widetilde{I}$ 将主元调至对角位置, 得 A. 证毕完明

自主思考: 以上分解在 "何种意义下" 是唯一的?

备注. "概率" 地, 假定 A 实数域或复数域上的 "随机" 方阵, 则 $S=I$ 依概率 1 发生.

假定你已经知道了 $PA=LU$ 分解的一般方法, 但疏于计算, 不考虑以下.

例子. 如果想多做一些题目, 可以使用计算软件进行编题与解题.

S0 使用 sage 在线窗格 (或者其他方式) 创建 $\mathbb{Q}$-上的矩阵

```
A = matrix(QQ, [
    [ 1,  1,  4,  5,  1,  4,  0,  0,  1],
    [-1,  9, -1, -9,  8, -1,  0, -7, -7],
    [ 1,  2, -3, -4,  5,  6, -7, -8,  9],
    [ 3,  1,  4,  1,  5,  9,  2,  6,  5],
    [ 2,  7,  1,  8,  2,  8,  1,  8,  3]
]); # Create $A\in \mathbb Q^{m\times n}$.
```

若想查看矩阵 A, 另起新行并键入 `A`, 并点击 `Evaluate` 按钮即可 (快捷键 `Ctrl+Shift+Enter`).

1. 为查看 A 的最简行阶梯形, 键入 `A.rref()` 并运行即可.
2. 广义 LU-分解的形式是 $A=PLU$, 键入 `P, L, U = A.LU();` 即可对 A 的 LU-分解进行赋值.
   - 依照 $P^2=I$, 以上即是 $PA=LU$ 分解.
3. 若想知道主元的位置, 可键入 `A.pivots()`.
4. 自行探索更多.

3 线性空间, 基的证明题

如果想操练计算题, 可参考 "国庆作业".

习题 2. 假定 V 任意域 $\mathbb{F}$ 上的 2024 维线性空间. 试构造子集 $S \subset V$ (向量组), 其同时满足

1. 集合 S 的大小是 2025,
2. S 中任意 2024 个向量线性无关.

证明. 记 $\{v_i\}_{i=1}^{2024}$ 是一组基, 记 $v_0 := \sum_{i=1}^{2024} v_i$.

1. 依照基的线性无关性, $v_0 \neq 0$.
2. 将 $\{v_i\}_{i=1}^{2024}$ 中某一 v_k 换做 v_0, 今断言新集合仍是线性无关的. 若存在线性组合式:

$$0 = \sum_{(0 \le i \le 2024)\text{ 且 }(i \neq k)} c_i v_i = c_0 v_k + \sum_{(0 \le i \le 2024)\text{ 且 }(i \neq k)} (c_0 + c_i) v_i, \tag{3.1}$$

则依照 $\{v_i\}_{i=1}^{2024}$ 的线性无关性, 得 $c_0 = 0$ 且所有 $c_i + c_0 = 0$. 由于线性组合式的系数只能为 0, 新集合必然是线性无关组.

完证毕明

习题 3 (Challenging)**.** 若 $\mathbb{F}$ 是数域, 则上题的条件 1 可以放宽至无限集. (What if $\mathbb{F}$ is finite?)

证明. 对一切 $x \in \mathbb{F}$, 记 v_x 为列向量 $(1, x^1, x^2, \ldots, x^{2023})$. 任意 2024 个形如 v_x 的相异向量一定是线性无关的: 注意到 Vandermonde 矩阵可逆. 完证毕明

习题 4 (必做的证明题)**.** 给定数域上的线性空间 V. 任意给定 V 的有限个真子空间 $\{U_i\}_{i=1}^m$, 总有

$$\left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) \neq V. \tag{3.2}$$

(若 $\mathbb{F}$ 非数域, 试给出 $m = 3$ 的反例?[1])

证明. (反证法) 假定存在 m 使得等式成立. 若认定 V 是有限维线性空间, 则可以跳过以下粉色块.

以下引理表明, 即便 V 是无穷维线性空间, 该问题仅需放在有限维空间中考虑.
引理: 则存在有限维子空间 V_0, 使得

- 对所有 $1 \le i \le m$, 总有 $(U_i \cap V_0)$ 是 U_i 的真子空间.

引理的证明: 对每个 U_i 配上一个向量 $u_i \in (V \setminus U_i)$, 记 $V_0 = \mathrm{span}(\{u_i\}_{i=1}^m)$ 即可.
对原等式两侧 "取 $(V_0 \cap -)$"; 或更直接地,

[1] Might there be a one-line counter-example for those who are familiar with $\mathbb{F}_2$-field?

不妨假设 V 是有限维的. 定义无限子集

$$S := \{v_x \mid x \in \mathbb{F}\} \quad \text{(取定有限维空间的基, } v_x \text{ 为上一问所定义.).} \tag{3.3}$$

由于 S 中任意 $\dim V$ 个不同的向量都能作为 V 的基底, 故 V 的任意真子空间 U_i 只能包含 S 中有限个向量; 这和 $S \subset V = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ 矛盾.

- (反例) 若 $\mathbb{F}$ 是二元域, 则二维线性空间是四元线性空间, 其非零的线性真子空间只有三个.

完证毕明

习题 5 (Challenging)**.** 在上一习题中置 $m = 2$, 则域 $\mathbb{F}$ 无限制;

证明. 若存在真子空间 U_1 与 U_2 使得 $U_1 \cup U_2 = V$, 则可取 $v_i \in (V \setminus U_i)$. 之后考虑 $v_1 + v_2$ 的归属:

1. 若 $(v_1 + v_2) \in U_1$, 则

   - 依照 $v_1 \in U_2$, 此时 $v_2 = (v_1 + v_2) - v_1$ 亦属于 U_2,

   矛盾;

2. 若 $(v_1 + v_2) \in U_1$, 则

   - 依照 $v_2 \in U_1$, 此时 $v_1 = (v_1 + v_2) - v_2$ 亦属于 U_1,

   矛盾.

完证毕明

习题 6 (如果先前做错了, 请重试)**.** 若 U, V 与 W 是三个子空间, 证明以下等式的一侧, 并证伪另一侧

1. $(U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$;
2. $(U \cap V) + W = (U + W) \cap (V + W)$.

证明. `by admit`. 完证毕明

习题 7 (如果先前做错了, 请重试)**.** 若 $U \subset V$ 与 W 是三个子空间, 证明 $(U + W) \cap V = U + (W \cap V)$.

证明. `by admit`. 完证毕明

习题 8. 根据上述习题, 证明以下两个等式. 选定 U, V 与 W 为同一线性空间的三个子空间, 试证明:

1. $((V \cap W) + U) \cap V = \qquad\qquad = V \cap (W + (U \cap V))$,
2. $((V + W) \cap U) + V = \qquad\qquad = V + (W \cap (U + V))$.

关键步骤是中间白色处.

证明. Apply modular identity (Ex. 7) for 2×2 times:

1. $((V \cap W) + U) \cap V = (V \cap W) + (U \cap V) = V \cap (W + (U \cap V))$,
2. $((V + W) \cap U) + V = (V + W) \cap (U + V) = V + (W \cap (U + V))$.

完证毕明

4 (span : 子集 → 子空间) (dim : 子空间 → $\mathbb{N}$) 与 (rank = dim ∘ span)

记号. 谈及 dim 与 rank, 默认 “参与关键运算” 的线性空间是有限维的.

> 以下定义, 定理, 以及习题等的表述是更偏类型化的: 这兼顾了严谨性与简易性.

定义 (“rank = dim ∘ span”)**.** 我们形式化地澄清三个记号. 以下谈论的线性空间都附带了域.

span 输入_1 是线性空间 V, 输入_2 是 V 的子集 S;

输出 是 V 中一切包含 S 的线性子空间之交.

习题 9. 需要证明, 输出 也是线性空间, 并恰是包含 S 的 V-线性子空间中的极小者.

证明. 无聊地验证公理; 或使用定理 “遗忘函子 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Sets}$ 生一切极限”. 证明完毕

dim 输入 是有限维线性空间 V;

输出 是自然数 n, 即 V 中任一极大线性无关组的大小.

习题 10. 需要证明, 任选定 V 中任意两组极大线性无关组, 其作为集合大小相同.

证明. 提示: 记极大线性无关组 (必然是有限集) S 与 T 的大小为 $|S| = m$ 且 $|T| = n$.

- 将 S 中向量以行向量的形式排列成矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times\star}$,
- 将 T 中向量以行向量的形式排列成矩阵 $Y \in \mathbb{F}^{n\times\star}$.

极大线性无关组可以互相表出; 不然, 加入不可表出的向量能得到更大的线性无关组. 故存在矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 使得

$$BX = Y \quad \text{且} \quad AY = X. \tag{4.1}$$

“右乘行满秩矩阵” 这一操作可以消去, 因此 $BA = I_n$ 且 $AB = I_m$. 后略.

- 把线性空间的秩 (未知) 转化成矩阵的秩 (已知).

证明完毕

rank 当且仅当 span 输出有限维线性空间, 方可定义 rank = dim ∘ span.

> 固定 输入_1, 以下研究 输入_2 的变化对以上的影响. 最简单的子集关系是包含.

习题 11 (保序)**.** dim 与 rank 保持特定的序关系. 给定全空间 V 与子集 $S_1, S_2 \subset V$, 考虑下图:

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & c_2 & & c_3 \\ [S_1, V] & \longrightarrow & \mathrm{span}_V(S_1) & \longrightarrow & \mathrm{rank}(S_1) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ [S_2, V] & \longrightarrow & \mathrm{span}_V(S_2) & \longrightarrow & \mathrm{rank}(S_2) \end{array} . \tag{4.2}$$

基于对称性, $\subset$ 可以表示子集的包含, 线性子空间的包含, 自然数的小于等于号. “保序” 是说,

- 若 c_i 处的 $\subset$ 成立, 则 c_{i+1} 处的 $\subset$ 亦成立.

证明. (span 保序) 假定 $S_1 \subset S_2$. S_1 线性表出的向量可以被 S_2 线性表出.
(dim 保序) 假定 $U_1 \subset U_2$. 将 U_1 的基扩充至 U_2 即可. 上一题表明 dim 不依赖扩充的具体过程. 完证毕明

习题 12. 证明以下问题.

1. 若 c_1 取 $\subset$, 则 c_3 取等当且仅当 c_2 取等.

   证明. 若 c_1 取 $\subset$, 则 c_2 与 c_3 也取 $\subset$. $\mathrm{rank}(S_1) - \mathrm{rank}(S_2)$ 恰是 $\mathrm{span}(S_2)$ 至 $\mathrm{span}(S_1)$ 需扩充的向量数目. 依照这一等价表述 (转写), 充分性与必要性都是直接的. 完证毕明

2. 若 c_i 取等, 则 c_{i+1} 亦然.

   证明. 这是因为 span 与 dim 可以视作映射, 即, 一个输入对应唯一的输出. 完证毕明

3. 若 c_{i+1} 取等, 则 c_i 不必取 $\subset$.

   证明. ($c_3 \to c_2$ 反例) 一维子空间不必唯一; ($c_2 \to c_1$ 反例) 基底不必互相包含. 完证毕明

习题 13. 思考平凡情况: $S = \emptyset$ (理解作 void) 或 $S = V$ (作为集合, 理解作 $S = V.\mathrm{Set}$).

证明. $\emptyset \xrightarrow{\text{span}} \mathbf{0} \xrightarrow{\dim} 0$, 以及 $V_{\text{Set}} \xrightarrow{\text{span}} \mathbf{V} \xrightarrow{\dim} \dim V$. 完证毕明

下一步是建立二元运算. 暂时将 $\subset$ 区分地记作 $\subseteq$ (集合), $\subset$ (子空间), $\leq$ (自然数).

例子. 自然的想法是下述表格 (子空间的交记作 $\wedge$, 以区别于集合的交 $\cap$):

名称	序	极大	极小	所谓 And	所谓 Or
子集	$\subseteq$	V_{Set}	$\emptyset$	$\cap$	$\cup$
子空间	$\subset$	V	$\mathbf{0}$	$\wedge$	$+$
秩	$\leq$	NA	0	min	max

. (4.3)

习题 14. 选用 $S_1 \subseteq S_2$, 则有

- $\mathrm{span}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{span}(S_1 \cap S_2) = \mathrm{span}(S_1) \cap \mathrm{span}(S_2)$;
- $\mathrm{span}(V) = V$, $\mathrm{span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{span}(S_1) + \mathrm{span}(S_2)$.

选用 $U_1 \subset U_2$, 则有 (容易补全 rank-方向...)

证明. `by admit`. 完证毕明

若所谈论的对象构成全序 (等价地, 只看一条链), 则以上三类偏序关系是逐次的商集.

习题 15. 给定子空间 U_1 与 U_2.

1. 证明 $\operatorname{rank}(U_1 \wedge U_2) \leq \min(\operatorname{rank}(U_1), \operatorname{rank}(U_2))$;
2. 证明 $\max(\operatorname{rank}(U_1), \operatorname{rank}(U_2)) \leq \operatorname{rank}(U_1 + U_2)$.

提示: 第一处仅使用逻辑 “或”, 第二处仅使用逻辑 “与”; 无关具像之选取.

证明. $\operatorname{rank}(U_1 \wedge U_2) \leq \min(\operatorname{rank}(U_1), \operatorname{rank}(U_2))$ 当且仅当

$$\operatorname{rank}(U_1 \wedge U_2) \leq \operatorname{rank}(U_1) \quad 且 \quad \operatorname{rank}(U_1 \wedge U_2) \leq \operatorname{rank}(U_2). \tag{4.4}$$

之后略. 完证毕明

备注. 从高维的 “序” 降至低维的 “序”, 自然省略了诸多信息.

习题 16. 给定子集 S_1 与 S_2.

1. 证明 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subset \operatorname{span}(S_1) \wedge \operatorname{span}(S_2)$.
2. 证明 $\operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2) = \operatorname{span}(S_1 \cup S_2)$.

证明. 将第一问抽象化: 若子空间 $U \subset V$ 且 $U \subset W$, 则 $U \subset V \wedge W$. 结论由以下两点确保:

1. 作为子集, $U \subseteq (V \cap W)$.
2. U 和 $V \cap W$ 是线性空间.

第二问是重点, 先将等号拆成 $\subset$ (Case 1) 和 $\supset$ (Case 2).

Case 1 将问题抽象化: 若子空间 $U \subset W$ 且 $V \subset W$, 则 $(U + V) \subset W$. 写至此处可以使用 “显然”.

Case 2 任意 $x \in \operatorname{span}(S_1 \cup S_2)$ 形如 $\sum_{\text{有限和}} c_i \cdot v_i$, 其中对每一 i 均有 $v_i \in S_1$ 或 $v_i \in S_2$. 于是,

$$x = \left(\sum_{v_i \in S_1} c_i \cdot v_i \right) + \left(\sum_{v_i \in (S_1 \cup S_2) \setminus S_1} c_i \cdot v_i \right) \in \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2). \tag{4.5}$$

由于 x 是任取的, 故 $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) \subset \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$.

完证毕明

备注. 问题出在何出? 此处的问题是下式 “为何取等”, 而非上式为何不等.

命题. 对同一集合的三个子集 G, H 与 U, 总有

1. $G \cup (H \cap U) = (G \cup H) \cap (G \cup U)$, 与
2. $(G \cap H) \cup (G \cap U) = G \cap (H \cup U)$.

证明. 由于 $x \in X$ 是命题, $(\star \in X)\,\mathrm{and}\,(\star \in Y)$ 当且仅当 $\star \in (X \cap Y)$, 以及 $(\star \in X)\,\mathrm{or}\,(\star \in Y)$ 当且仅当 $\star \in X \cup Y$. 鉴于此, 我们可以在不使用 `mathlib` 的情况下用 L∃∀N 进行形式化的证明, 见此篇个人草稿的 212 行与 214 行. 完证毕明

习题 17. 若 U, V 与 W 是三个子空间, 证明以下等式的一侧, 并证伪另一侧

1. $(U+V) \wedge W = (U \wedge W) + (V \wedge W)$;
2. $(U \wedge V) + W = (U + W) \wedge (V + W)$.

例子. 接上题. 尽管等式不必成立, 但式 1 取等号当且仅当式 2 取等.

证明. 仍然给一个形式化的证明, 见此处.

P.S. 笔者没想过其中的逻辑原因, 但还是莫名其妙地证出来了.

完证毕明

备注. 问题出在哪儿?

习题 18. 给定自然数 l, m 与 n, 证明

1. $\max(\min(l,m), \min(l,n)) = \min(l, \max(m,n))$,
2. $\min(\max(l,m), \max(l,n)) = \max(l, \min(m,n))$.

提示: $a = b$ 当且仅当 $(x \le a) \leftrightarrow (x \le b)$, 此时 max 对应 "或", min 对应 "与", ...

例子 (min-max 不等式)**.** (min-max 不等式) 给定任意实数 a_1, b_1, a_2 与 b_2, 总有

$$\max((\min(a_1,b_1)), (\min(a_2,b_2))) \le \min((\max(a_1,a_2)), (\max(b_1,b_2))). \tag{4.6}$$

证明. 形式化证明. 完证毕明

备注. Min-max 不等式是极其广泛的: 假定 $f : X \times X \to P$ 是集合到偏序集合任意映射 (例如 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ 是二元实函数), 则恒有

$$\sup_{x\in X} \inf_{y \in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y). \tag{4.7}$$

证明. 对任意选定的 $(x_0, y_0) \in X \times Y$, 总有下式:

$$\inf_{y\in Y} f(x_0, y) \le f(x_0,y_0) \le \sup_{x\in X} f(x, y_0). \tag{4.8}$$

由于 (x_0, y_0) 是任意的, 我们得到一族由 $(x', y') \in X \times Y$ 标记的不等式 $\{I(x',y')\}$:

$$I(x',y') := [L(x') \le R(y')] := \left[\inf_{y\in Y} f(x', y) \le \sup_{x\in X} f(x, y')\right]. \tag{4.9}$$

由于 $L(x') \le R(y')$ 恒成立, 故 $\sup_{x'\in X} L(x') \le \inf_{y'\in Y} R(y')$. 完证毕明

作为特例, 取 $X = Y = \mathbb{N}$, 以数列定义 $a_{m+n} = f(m,n)$, 则上式表示数学分析中何种的结论?

未完待续 (有些待补全的内容可以在上一届习题中找到).

1. 目前引入 span 的方式还是很 “牵强” 的, 之后会有更自然的角度. 等课上提到了 “泛性质” 再话吧.
2. 此处未涉及线性空间的补空间.
3. 将 “两个线性空间” 换作 “一族线性空间”?

5 思考: 无限维线性空间

习题 19 (无限维的定义)**.** $\mathbb{F}$ 上无限维线性空间的定义如下 (选自教材之一 LADR (第四版)):

> **定义.** 称线性空间 V 是无限维的, 若 V 不是有限维的.

请证明: V 是无限维的, 当且仅当存在无限集 $S \subset V$ 使得 S 是线性无关组.

(若选择证明此题) 书写证明时, 换段地书写 "充分性" 与 "必要性" 是基本要求之一.

- 以上命题存在不显然之处, 请在证明完毕后指出.

证明. 以下只证明 $\to$ 方向 ($\leftarrow$ 方向用逆否命题即可). 回忆定义: V 是有限维线性空间, 当且仅当

- 存在某个 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得任意线性无关子集 $S \subset V$ 的大小不超过 N_0.

依照 LADR 的定义, V 是无限维空间 (即, 非有限维空间), 以上定义变作 (via `push_neg`)

- 对任意 $N \in \mathbb{N}$, 总存在不小于 N 的线性无关子集 $S \subset V$.

值得注意的是, 以上没有出现 "无限集" 的概念. 试比较以下语句:

1. 存在任意有限大的子集 S,
2. 存在无限大的子集 S.

这两句话不能轻易等价, 所幸 "span 是有限和" 这一条件为这两类命题建立了等号.
接以上, 我们证明 "存在无限集 $S \subset V$ 使得 S 是线性无关组".

1. (构造 S: 数学归纳的第一步) 取 $S_0 = \emptyset$. 由反证法知 $\mathrm{span}(S_0)$ 是 V 的真子空间, 从而存在 $v_1 \in (\mathrm{span}(S_0))^c$ 使得 $S_1 := S_0 \cup \{v_1\}$ 是线性无关组.
2. (构造 S: 数学归纳的第二步) 假定构造了 k 元集 S_k. 由反证法知 $\mathrm{span}(S_k)$ 是 V 的真子空间, 从而存在 $v_{k+1} \in (\mathrm{span}(S_k))^c$ 使得 $S_{k+1} := S_k \cup \{v_{k+1}\}$ 是线性无关组.
3. (构造 S) 取向上包含的集合的并 $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$.
4. (说明 S 是线性无关组) 任取 S 中线性组合式 $\sum_{\text{有限和}} c_i v_i = 0$. 由于这是有限和, 从而全体 v_i 属于某一 S_n. 换言之, 这是 $\mathrm{span}(S_n)$ 中的线性组合式. 由于 S_n 是线性无关集, 故一切 c_i 为零.

以上没有使用令人畏惧的 "选择公理", 其等价表述是 "无穷维线性空间存在一组基", 或者 "有限维线性子空间都有补空间". 这里只用了 ZF 公理, 以及数学分析中承认的 DC 公理. 证毕 完明

这些困难的公理有一些 "妙用", 例如检查自己是否伪证了某一命题. 以 "有限域" 为例, 如果习题 4 的证明过程对有限域适用 (例如没用到数域的条件), 则这个证明百分百错误.

备注. 以上习题通常被默认作 "常识"; 此处有一先决条件, 就是 $\mathrm{span}(S)$ 的定义.

习题 20 (Challenging)**.** 如果你熟悉数学分析中的 Cantor 对角线法, 不妨尝试以下命题:

- 形式幂级数空间 $\mathbb{F}[\![x]\!]$ 不是可数维线性空间;

换言之, 对任意可数集 $S \subset \mathbb{F}[\![x]\!]$, 总有 $\operatorname{span}(S) \neq \mathbb{F}[\![x]\!]$. (以上 $\mathbb{F}$ 是任意域.)

证明. $\mathbb{F}[\![x]\!]$ 就是全体 $\mathbb{F}$ 中取值的数列, 亦即 "$\mathbb{N}$ 至 $\mathbb{F}$ 的全体映射构成的线性空间". 往后将 $\mathbb{F}[\![x]\!]$ 中的元素写作数列形式.

假设存在可数集 $S = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\operatorname{span}(S) = \mathbb{F}[\![x]\!]$, 将 s_n 排列如下:

$$\begin{array}{ccccccc} s_0 & : & (s_0)_1 & (s_0)_2 & (s_0)_3 & (s_0)_4 & \cdots \\ s_1 & : & (s_1)_1 & (s_1)_2 & (s_1)_3 & (s_1)_4 & \cdots \\ s_2 & : & (s_2)_1 & (s_2)_2 & (s_2)_3 & (s_2)_4 & \cdots . \\ s_3 & : & (s_3)_1 & (s_3)_2 & (s_3)_3 & (s_3)_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{5.1}$$

由反证法, 第一纵列存在非零项. 将这一非零项移至首行, 逐项消元得

$$\begin{array}{ccccccc} s_0' & | & (s_0')_1 & (s_0')_2 & (s_0')_3 & (s_0')_4 & \cdots \\ s_1' & | & 0 & (s_1')_2 & (s_1')_3 & (s_1')_4 & \cdots \\ s_2' & | & 0 & (s_2')_2 & (s_2')_3 & (s_2')_4 & \cdots . \\ s_3' & | & 0 & (s_3')_2 & (s_3')_3 & (s_3')_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{5.2}$$

最后得到无穷上三角矩阵.

$$\begin{array}{ccccccc} s_0^* & | & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & a_{0,4} & \cdots \\ s_1^* & | & 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots \\ s_2^* & | & 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots . \\ s_3^* & | & 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{5.3}$$

由于该三角阵的每一纵列都仅有有限项非零, 从而可以将所有横行相加, 得

$$v = \left(\sum_{i<1} a_{i,1}, \sum_{i<2} a_{i,2}, \sum_{i<3} a_{i,3}, \ldots \right). \tag{5.4}$$

容易发现, v 不能由有限和表示.

- 此处需要说明一件事情: 无穷阵 $a_{i,j}$ 的任意一项均能在有限步之内得到, 从而 v 的每一项可以在有限步内构造出.

同 Cantor 对角线法, 以上使用了数学分析的 DC 公理, 没有选择公理. 证毕