记号说明 约定一切 Λ 是复对角矩阵, $(-)^H$ 是共轭转置, U 是酉矩阵. 以下总结一些常见矩阵的谱分解.

> 注：两个实矩阵正交相似等价于酉相似，见上周作业．因此，以下结果与实情形是统一的．

1. 正规矩阵 (normal matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是对角矩阵．

2. 自伴矩阵 (self-adjoint matrix), Hermite 矩阵 (Hermitian matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实对角矩阵．

3. 半正定 Hermite 矩阵 (Hermitian semi-positive definite matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实半正定对角矩阵．

4. 正定 Hermite 矩阵 (Hermitian positive-definite matrix)

   > $A = U^H \Lambda U$，Λ 是实正定对角矩阵．

自主练习 反对称 Hermite 矩阵, 复投影矩阵, 以及酉矩阵的谱分解如何?

自主练习 对方阵的奇异值分解 $A = U^H \Sigma V$, 定义 A 的谱分解为酉矩阵与半正定厄米矩阵的乘积 $(U^H V) \cdot (V^H \Sigma V)$. 对于上述几类矩阵, 其极分解有无特殊性质?

注 若术语与西文人名相关, 英文或以形容词作定语, 但**中文必然以名词作定语**. 例如

- Abel 群 (Abelian group);
- Bool 代数 (Boolean algebra);
- Hermite 矩阵 (Hermitian matrix);
- Laplace 算符 (Laplacian);
- Pfaff (Pfaffian).

也有一些例外, 例如 Jacobi matrix 和 Jacobian matrix 就是两个名词.

记号说明 每题的相对难度用 $\star$ 的数量描述.

$\emptyset$ 直接推论, 定义默写等.

$\star$ 考试难度的上界.

$\star\star$ 值得思考, 属于不难也不简单的题目.

$\star\star\star$ 可以选择放弃.

Ex 1 复 (半) 正定 Hermite 矩阵是**实对称 (半) 正定矩阵**在 $\mathbb{C}$ 上的推广.

称 M 是复 (半) 正定 Hermite 的, 当且仅当存在酉对角化 $U^H \Lambda U = M$, 其中 Λ 是 (半) 正定的实对角矩阵.

今假定 $M = \begin{pmatrix} S & R \\ R^H & T \end{pmatrix}$ 复半正定 Hermite 矩阵.

1. (⋆) 证明: $Mx = \mathbf{0}$ 当且仅当 $x^H M x = 0$.
2. (⋆⋆) 证明: $(S \quad R)$ 与 S 有相同的列空间 (等价地, 两个矩阵的秩相同).
3. (⋆) 证明: M 合同于某个 $\begin{pmatrix} S & O \\ O & \widetilde{T} \end{pmatrix}$.
4. (⋆⋆) 反复利用上述打洞, 归纳地证明惯性指数公式 $\mathrm{I}(M) = \mathrm{I}(S) + \mathrm{I}(\widetilde{T})$.
5. (⋆⋆) 检查上述每步, 证明: 两个实对称正定矩阵 A 与 B 通过某个复可逆方阵 P 合同, 当且仅当它们通过某个实可逆方阵 Q 合同. 即,

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A = P^T B P \iff \exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ A = Q^H B Q.$$

Ex 2 取定 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量 v_0. 定义线性变换

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto v - \big(2 \cdot v^T \cdot v_0\big) v_0.$$

几何意义: 关于 v_0 的镜面反射.

1. $(\star)$ 任取 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基. 记 φ 在这组基下的矩阵表示为 A. 证明 A 是正交矩阵, 且 $A^2 = I$.

2. $(\star\star\star)$ 对任意正交矩阵 Q, 证明 $1 \in \sigma(Q) \cup \sigma(AQ)$.

> 提示: 可以用不动点理解此题, 尽管这对解题没有太大帮助.

Ex 3 称 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是正规的, 当且仅当 $AA^H = A^H A$, 此处 A^H 是共轭转置. 以下是正规的等价条件.

1. ($\emptyset$) 存在酉相似 $A = U^H \Lambda U, \Lambda$ 是某一对角矩阵.

2. ($\star$) 存在酉矩阵 U 使得 $AU = A^H$.

3. ($\star$) A 的奇异值恰好是特征值的绝对值.

4. ($\star\star\star$) A 与 $[A, A^H]$ 可交换.

> $[A, B] := AB - BA$ 是一个惯常记号.

5. ($\star\star$) $\mathrm{tr}(AAA^H A^H) = \mathrm{tr}(AA^H AA^H)$.

> 对任意 $k \geq 2$, $\mathrm{tr}(A^k (A^H)^k) = \mathrm{tr}((AA^H)^k)$ 均是等价条件. 证明似乎较复杂.

6. ($\star\star$) 存在唯一的分解 $A = A_1 + iA_2$, 使得 $A_1 = A_1^H, A_2 = A_2^H$, 且 $[A_1, A_2] = O$.

> 作为类比, 若一个实矩阵可以正交对角化, 当且仅当...

Ex 4 ($\star\star\star$) 证明: $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是两个自伴矩阵的乘积, 当且仅当 A 与 A^H 相似.

Ex 5 以下 A 与 B 是实对称半正定矩阵.

1. ($\star$) 证明: $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$. 若 A 正定, 则取等当且仅当 $B = O$.

2. ($\star$) 证明: $\operatorname{tr}(A) \cdot \lambda_{\min}(B) \leq \operatorname{tr}(AB) \leq \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda_{\max}(B)$.

Ex 6 任取实多项式 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, 以及 $g(y)=(y-y_1)\cdots(y-y_n)$. 若有

$$x_0 \le y_1 \le x_1 \le y_2 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le y_n \le x_n.$$

则称 f 与 g 的根是交错的.

1. ($\star$) 证明: 任意实线性组合 $af+bg$ 的根都在 $\mathbb{R}$ 内.

2. ($\star\star$) 证明逆命题: 若 f 与 g 满足 $\deg f=\deg g+1$, 且任意实线性组合 $af+bg$ 的根全是实数, 则 f 与 g 的根交错.

> 提示: 对 $t\in[0,1]$, $tf+(1-t)g$ 的所有实根在 $\mathbb{C}$ 上的轨迹如何?

3. ($\emptyset$) 若 n-阶复方阵满足 $A=A^H$, 记 B 是任意 $(n-1)$-阶主子式 (B 有 n 种取法). 证明: A 与 B 的特征根交错.

4. ($\star\star$) 这一具有组合性质的结论可以推得 Schur–Horn 定理.

> - (Schur–Horn) 给定 n 阶 Hermite 矩阵 ($A=A^H$). 若 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$ 是 A 的所有对角元, $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$ 是 A 的所有特征值, 则对任意 $1\le k\le n$, 都有
>
> $$d_1+d_2+\cdots+d_k \le \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k.$$
>
> 特别地, $k=n$ 时取等号 (考虑迹).
>
> 通常的证明方法是将之视作 Atiyah 凸性定理 (一个来自辛几何的定理) 的推论.

5. ($\star$) (Courant-Fischer) 以下是谱分解的推论, 之前作业证过. Hermite 矩阵 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 的第 k 大特征值是

$$\max_{V\subset\mathbb{R}^n,\dim V=k}\left(\min_{x\in V,\|x\|=1} x^HAx\right)。$$

第 k 小特征值表述类似.

6. ($\star\star$) 作为推论, 得 Hermite 矩阵的 Weyl 不等式

$$\lambda_{i+j-1}(A+B)\le\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\le\lambda_{i+j-n}(A+B).$$

> 提示: 将 $\min$, $\max$ 转化做 “先 $\forall$ 再 $\exists$”-式的逻辑命题. 若遇到不等号 $\le$, 将不等号左侧的 λ 改述作 $\max\min$, 将不等号右侧的 λ 改述作 $\min\max$. 最后比较子空间维数即可.

Ex 7 以下是一些 Cayley 变换的例子.

> 楔: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ 上的单位圆周 $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 不是线性空间, 但可以舍弃一个点 $(1,0)$, 使得有双射
>
> $$\mathbb{R} \xrightarrow[\sim]{\text{双射}} (S^1 \setminus \{(0,i)\}), \quad x \mapsto \frac{x-i}{x+i}$$
>
> 这一双射的逆映射也可以直接写出. 以上一对互逆有理映射建立了 $\mathbb{R}$ 与 S^1 的双有理等价.
>
> 类似地, 全体正交矩阵不构成线性空间. 试问: 能否舍弃一些体积为 0 的正交矩阵, 使得剩下的正交矩阵通过某个有理多项式双射对应于线性空间?

1. ($\star$) 若 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 是自伴矩阵, 则 $(A - iI) \cdot (A + iI)^{-1}$ 是酉矩阵.

2. ($\star$) 证明以上建立了全体自伴矩阵与不以 1 为特征值的酉矩阵的双射对应. 试求逆映射?

3. ($\star\star$) 正交矩阵 (实矩阵) 也是酉矩阵. 试问: 以上哪类自伴矩阵的像是正交矩阵?

   > 提示: 反对称实矩阵恰好是正规矩阵的 i 倍.
   >
   > 推论: 反对称矩阵与不以 1 为特征值的正交矩阵双射对应. 记 M 是反对称矩阵, 则 $(I+M)(I-M)^{-1}$ 是正交矩阵.
   >
   > 例子: $n = 2$ 时, 得半角公式:
   >
   > $$\begin{pmatrix} 0 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   >
   > 例子: $n = 3$ 时, 得某次作业的行列式计算 ($w = 1$):
   >
   > $$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{常数} \cdot \begin{pmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2(xy-wz) & 2(wy+xz) \\ 2(xy+wz) & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2(yz-wx) \\ 2(xz-wy) & 2(wx+yz) & w^2-x^2-y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

4. ($\star\star$) 正交矩阵的行列式是 ± 1. 这表明反对称矩阵也能分作两类, 如何描述这一分类?

5. ($\star\star$) 记 $\mathrm{Sp}(2n) := \{A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$ (($\star\star$) 某次作业证明了 $\det A \neq -1$), 以及 $\mathrm{H}(2n) := \{A \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = O\}$ (即考试题的 $\mathrm{sp}(2n)$). 证明:

   $$\{X \in \mathrm{Sp}(2n) \mid 1 \notin \sigma(X)\} \to \mathrm{H}(2n), \quad X \mapsto (I+X)(I-X)^{-1}$$

   是双射对应.

Ex 8 ($\star\star\star$) 若 $A^2 + B^2 = 2AB$, 证明: A 与 B 的特征多项式相等.

> 这和本节作业没有关系，但还是留做习题.