线性子空间

- 以下的证明对任意域上的任意线性空间均成立.
- 所有反例可以在有限维线性空间 (不超过三维) 中找到.

重要定义 (线性子空间) 该定义在不同教材中未必统一.

- 线性子空间 (等号意义下, 高等代数 I) 线性子空间两项限定: **子集, 相同域上的线性空间.**
- 线性子空间 (同构意义下, 高等代数 II) 一个线性单射 $i: U \to V$ 定义作一个线性子空间.

在深入学习泛性质后, 我们会理解后一定义的深刻性. 参考 Grothendieck's relative point of view.

子空间的运算

给定全空间 V, 以下所有 $U_{\text{下角标}}$ 均是 V 的线性子空间 (同时也是子集).

(1) 证明以下两个句子描述了相同的子集.

1. 既包含 U_1, 又包含 U_2 的最小线性子空间.
   - 需要说明存在性和唯一性.
2. 集合 $\{\sum u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$.
   - 无需顾虑空集, 因为线性空间必含有元素 0.

这一子集是线性空间, 记作 $U_1 + U_2$.

(2) 类似地, 请以两种观点定义 $U_1 \cap U_2$ (直接写出).

(3) 自行验证运算律: $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$, $U_1 + 0 = U_1$, 以及 $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$ (无需作答).

(4) 直接写出 $\cap$ 满足的运算律.

(5) 写出分配律 $(U_1 + U_2) \cap U_3 \overset{?}{=} (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ 的反例. 此处 $\overset{?}{=}$ 应换作 $\subset$ 还是 $\supset$?

(6) 直接写出并作答 **(5)** 的对偶命题.

(7) 证明线性子空间的 modular lattice 结构. 具体而言, 若 U_- 是 U_+ 的子空间, 则

$$(U_- + U_0) \cap U_+ = U_- + (U_0 \cap U_+).$$