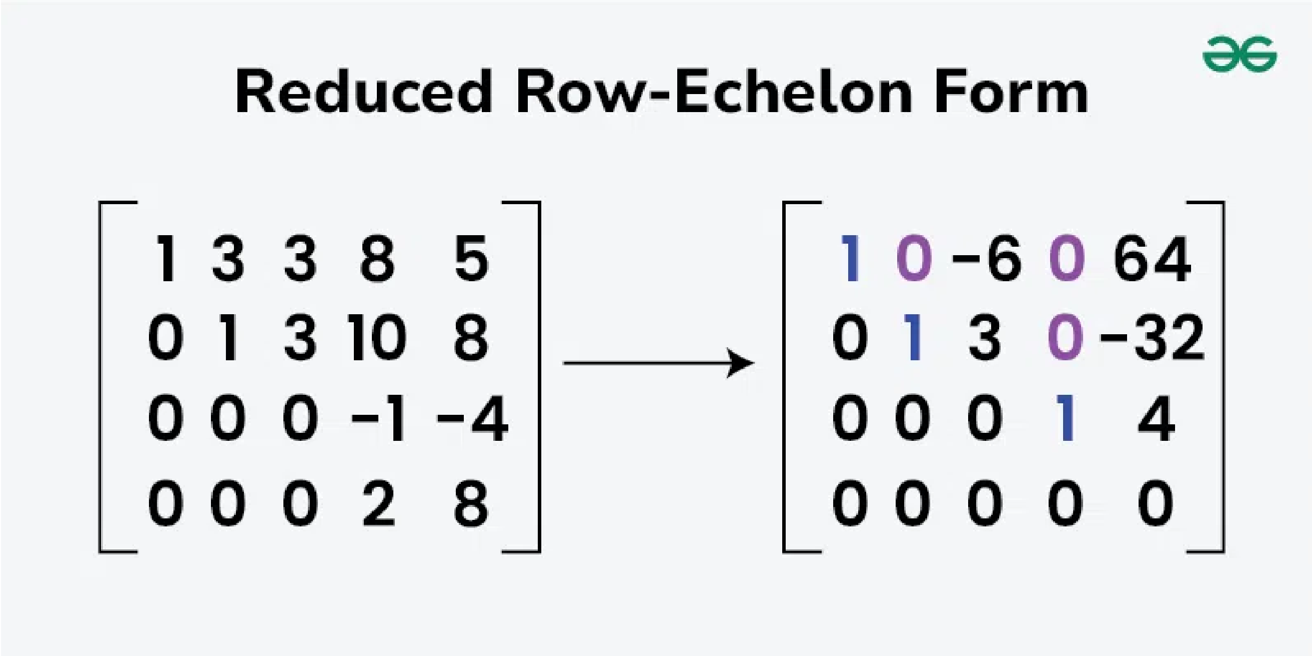
第三周习题



图片地址

注 **1:** 最简行阶梯形: 拐角处是 1; 拐角的上, 左, 下方均是 0.

注 **2:** 所有习题与域的选取无关. 切勿做出 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 之类的假定.

Problem 1 (基础巩固-矩阵的初等变换) 约定一切行是横行 (row). 给定 n 行的矩阵 A.

1. 交换 A 的 $[i,j]$ 两行, 等价于左乘一个矩阵 $S_{i,j}$. 写出该矩阵.
2. 将 A 第 k 行的各项同时乘上一个非零常数 λ, 等价于左乘一个矩阵 D_k^λ. 写出该矩阵.
3. 向 A 的第 j 行加上其第 i 行的 λ 倍 (这一过程仅改变第 j 行, 其他行不变), 等价于左乘一个矩阵 $T_{i,j}^\lambda$. 写出该矩阵.
4. 求逆变换 (逆矩阵) $S_{i,j}^{-1}$, $(D_k^\lambda)^{-1}$, 以及 $(T_{i,j}^\lambda)^{-1}$.
5. 使用自然语言描述这三类逆变换.
6. 求 $S_{i,j}S_{k,l} = S_{k,l}S_{i,j}$ 的充要条件.
7. 求 $T_{i,j}^\lambda T_{k,l}^\mu = T_{k,l}^\mu T_{i,j}^\lambda$ 的充要条件.
8. 以上给出了三类矩阵. 能否通过某两类矩阵得到第三类? 请讨论这三种情况 (构造或给出反例).
9. 假定 A 是方阵. 将以上 $S_{i,j}, T_{i,j}$ 与 D_k 乘在 A 的右侧, 效果如何?

Problem 2 (温故知新–相抵标准型) 矩阵的最简行阶梯形 (*reduced row échelon form*).

1. 给定矩阵 A, 其最简行阶梯形 R 为何唯一?
2. (接上一小问) 尝试给出一个不用计算的证明 (无字证明).
    - 提示: 行变换不改变各列的线性相关性.
3. 转置矩阵 R^T 的最简行阶梯形是什么?
4. 证明相抵标准型的存在性: 对任意矩阵 A, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

   以上, I_r 是 r 阶单位矩阵, O 表示数字 0 出现的位置.

   注意: 中间的 $(0,1)$-矩阵兼并了以下三类退化矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r \end{pmatrix}.$$

5. 证明以上的 r 由 A 唯一决定. 作为推论, 矩阵的行秩等于列秩. 往后统一称作秩.

Challenging Problem 1 若整数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足 $ad - bc = 1$, 则 A 是以下几类矩阵的有限乘积

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$