习题: 特殊矩阵 (1): 逆矩阵计算

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Sunday 27th October, 2024

前言

特殊矩阵是线性代数中最接地气的内容, 其来源往往是分析, 计算, 或是物理学等学科.

特殊矩阵的相关习题分作两部分: 逆矩阵的计算与行列式的计算. 本节习题系第一部分.

请完成至少 4 道习题

1 基础习题

选定基域为 $\mathbb{C}$. 部分结论在一般数域上 (甚至是有限域上) 成立, 此处就不必考究了.

习题 **1.** 将 M 顺时针旋转 $90°$, 得 $\widetilde{M}$. 试描述由 M^{-1} 至 $\left(\widetilde{M}\right)^{-1}$ 的 "运动过程".

习题 **2.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

备注. M 并非 "高度对称" 的, 其严格表述是

$$M=2I-E_{1,1}-\sum_{1\le i\ne j\le n}E_{i,j}. \tag{1.2}$$

习题 **3.** 计算以下矩阵的逆矩阵.

$$M=\begin{pmatrix} \xi^{1\cdot1} & \xi^{1\cdot2} & \xi^{1\cdot3} & \cdots & \xi^{1\cdot(n-1)} & \xi^{1\cdot n} \\ \xi^{2\cdot1} & \xi^{2\cdot2} & \xi^{2\cdot3} & \cdots & \xi^{2\cdot(n-1)} & \xi^{2\cdot n} \\ \xi^{3\cdot1} & \xi^{3\cdot2} & \xi^{3\cdot3} & \cdots & \xi^{3\cdot(n-1)} & \xi^{3\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi^{(n-1)\cdot1} & \xi^{(n-1)\cdot2} & \xi^{(n-1)\cdot3} & \cdots & \xi^{(n-1)\cdot(n-1)} & \xi^{(n-1)\cdot n} \\ \xi^{n\cdot1} & \xi^{n\cdot2} & \xi^{n\cdot3} & \cdots & \xi^{n\cdot(n-1)} & \xi^{n\cdot n} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

以上 $\xi=e^{2\pi i/n}$ 是 n-次单位根. n 即 M 的阶数.

备注. 以上矩阵在 Fourier 分析中常见. 若无思路, 不妨先计算 M^2.

习题 **4.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 0&1&1&\cdots&1&1&1&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ 1&0&1&\cdots&1&1&1&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ 1&1&0&\cdots&1&1&1&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 1&1&1&\cdots&0&1&1&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ 1&1&1&\cdots&1&0&1&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ 1&1&1&\cdots&1&1&0&a&a&a&\cdots&a&a&a\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&0&1&1&\cdots&1&1&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&1&0&1&\cdots&1&1&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&0&\cdots&1&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&1&\cdots&0&1&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&1&\cdots&1&0&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0&0&1&1&1&\cdots&1&1&0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

备注. 证明应当适当地借助引理, 例如分块上三角矩阵的逆, $I+uv^T$ 的逆等等.

习题 **5.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

备注. 以上矩阵称作循环矩阵. 循环矩阵有一重要特性: 将 M 中一切非 2 的数字改作 0, 得矩阵 $2\cdot Z$, 此时 M 是 Z 的多项式. Now M^{-1} is around the corner.

习题 **6.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

备注. 更规范的表述: $m_{i,j}=\min(i,j)$.

习题 **7.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M=\begin{pmatrix} k^0\cdot C_0^0 & & & & & & \\ k^1\cdot C_1^0 & k^0\cdot C_1^1 & & & & & \\ k^2\cdot C_2^0 & k^1\cdot C_2^1 & k^0\cdot C_2^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ k^{n-2}\cdot C_{n-2}^0 & k^{n-3}\cdot C_{n-2}^1 & k^{n-4}\cdot C_{n-2}^2 & \cdots & k^0\cdot C_{n-2}^{n-2} & & \\ k^{n-1}\cdot C_{n-1}^0 & k^{n-2}\cdot C_{n-1}^1 & k^{n-3}\cdot C_{n-1}^2 & \cdots & k^1\cdot C_{n-1}^{n-2} & k^0\cdot C_{n-1}^{n-1} & \\ k^n\cdot C_n^0 & k^{n-1}\cdot C_n^1 & k^{n-2}\cdot C_n^2 & \cdots & k^2\cdot C_n^{n-2} & k^1\cdot C_n^{n-1} & k^0\cdot C_n^n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

备注. 以上 $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是组合数[1].
提示: 矩阵 $A=B$ 的充要条件是 $Av=Bv$ 对一切试验向量 v 成立. 这个观点[2]类似电学中的 "试验电荷". 此处的试验向量 v 可以取作特殊的列向量 $(1,t,t^2,\dots,t^n)$ (为什么?).

[1]约定: 若 $n\cdot k=0$, 则 $C_n^k=0$. 更惯用且国际化的记号是 $\binom{n}{k}$.

[2]换言之, $A=B$ 当且仅当 A 与 B 描述了同一基底下的相同线性映射. 从类型论的观点看, 假定 $\mathtt{A}$ 与 $\mathtt{B}$ 有相同的类型 $\mathbb{F}^{\mathtt{m}}\to\mathbb{F}^{\mathtt{n}}$, 则试验向量是所谓的 $\lambda(\mathtt{v}:\mathbb{F}^{\mathtt{m}})$. 从范畴论的观点看, 这是 "极弱化版的" 米田引理.

2 困难习题

习题 **8.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 2\cos x & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos x & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos x & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos x \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

备注. 提示: 考虑切比雪夫多项式[3]. 此文总结了部分三对角矩阵的逆, 也可按图索骥地搜寻更多文献.

习题 **9.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} (1+1)^{-1} & (1+2)^{-1} & (1+3)^{-1} & \cdots & (1+n-1)^{-1} & (1+n)^{-1} \\ (2+1)^{-1} & (2+2)^{-1} & (2+3)^{-1} & \cdots & (2+n-1)^{-1} & (2+n)^{-1} \\ (3+1)^{-1} & (3+2)^{-1} & (3+3)^{-1} & \cdots & (3+n-1)^{-1} & (3+n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1+1)^{-1} & (n-1+2)^{-1} & (n-1+3)^{-1} & \cdots & (n-1+n-1)^{-1} & (n-1+n)^{-1} \\ (n+1)^{-1} & (n+2)^{-1} & (n+3)^{-1} & \cdots & (n+n-1)^{-1} & (n+n)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

备注. 答案见此文. 若矩阵通过两个数列和的倒数表达 (即, $m_{i,j} = (a_i + b_j)^{-1}$), 则称之 Hilbert 矩阵. Hilbert 矩阵虽然不是 $u^T v$ 形式的秩 1 矩阵, 但

$$M = \int_0^1 \begin{pmatrix} t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} t & t^2 & \cdots & t^n \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t. \tag{2.3}$$

上式也是 Hilbert 引入 (1890s) 此类矩阵的动机之一; 熟悉 Hilbert 空间的读者或频繁遇见此式.

习题 **10.** 计算以下矩阵的逆矩阵

$$M = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & x_{n-1}^3 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

备注. 答案见此文. 以上矩阵称作 Vandermonde 矩阵, 其主要用途是构造可逆矩阵或是线性无关组. Vandermonde 矩阵的种种性质不依赖基的选取, 有限域上的 Vandermonde 矩阵与编码理论紧密关联.

---

[3]该俄文名存在 Chebyshev, Tchebichef, Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyschev, Tschebyschef, Tschebyscheff, Čebyčev, Čebyšev, Chebysheff, Chebychov 或 Chebyshov 等形式的英文转写; 中文翻译统一作 "切比雪夫". 类似地, 拓扑常用的 "吉洪诺夫定理" 也存在多种英文表述, 需稍作留意.