Ex 0 复习一些行列式的计算技巧.

1. (扰动法) 本质: 若**数域**上的多项式 f 有 $> \deg f$ 个零点, 则 $f = 0$. 该方法的主要应用情形如下.

> 许多时候，我们需要从 $\det(AB) = \det(AC)$ 推导 $\det B = \det C$，但有时出现 $\det A = 0$. 此时记 $A^{(x)} := xI + A$，则通常能从题设推出恒等式 $\det(A^{(x)}B) = \det(A^{(x)}C)$. 多项式
>
> $$\det(A^{(x)}B) - \det(A^{(x)}C) \in \mathbb{F}[x]$$
>
> 存在足够多的零点，从而是恒零多项式. 代入 $x = 0$ 即可.
>
> 不建议使用 $x \to 0$ 这类表述. 一方面, 需要额外说明连续性; 另一方面, 这无法兼容扰动法在有限域上的推广.

2. (初等变换法) 使用矩阵的初等变换技巧.

3. (添边法) 即, 等式 $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & \\ v & A \end{pmatrix}$. 这一方法也可用在分块矩阵上.

4. (逆矩阵法) 有时计算逆矩阵比计算行列式简单很多, 尤其是套用 $(A + u^T v)^{-1}$ 之类的公式时.

5. (Laplace 展开) 由于 $\det$ 关于第 k 列线性, 从而会出现 $\det A = \det A_1 + \det A_2$ 之类的式子.

6. (数学归纳法)

7. (特征根法)

8. ...

Ex 1 以下给出一个函数线性无关的判别法则. 所有线性空间是 $\mathbb{R}$ 上的.

1. 记 V 是一切 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数构成的集合. 试说明 V 是线性空间.

> 答: V 是一个加法交换群. 定义 V 的 $\mathbb{R}$-线性结构如下:
>
> 1. $(f+g):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)+g(x)$;
> 2. $\lambda f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \lambda(f(x))$.

2. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 证明以下由 x 决定的映射 δ_x 是线性映射

$$\delta_x: V\to\mathbb{R},\quad f\mapsto f(x).$$

> 答: 验证 $\delta_x(f+\lambda g)=(f+\lambda g)(x)=f(x)+\lambda(g(x))=\delta_x(f)+\lambda\delta_x(g)$.

3. 给定 V 中的函数 $(f_i)_{i=1}^n$. 证明: 若存在实数 $(x_j)_{j=1}^n$ 使得 $(f_i(x_j))_{n\times n}$ 是可逆矩阵, 则 $(f_i)_{i=1}^n$ 是线性无关组.

> 答: 考虑逆否命题. 若非平凡的线性组合式 $\sum c_i f_j$ 是零, 则 $\sum c_i(f_j(x))=0$ 恒成立. 此时, 向量 c 在矩阵的左零空间中. 因此矩阵不可逆.

4. 反之, 若给定 V 中的线性无关组 $(f_i)_{i=1}^n$, 则存在实数 $(x_j)_{j=1}^n$ 使得 $(f_i(x_j))_{n\times n}$ 是可逆矩阵.

> 答: 对一切 $x\in\mathbb{R}$, 记 V 的线性子空间 $U_x:=\{f\mid\delta_x(f)=f(x)=0\}$.
>
> 我们断言 $\bigcap_{x\in\mathbb{R}}U_x=0$. 因为 $f=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立.
>
> 记 V 的 n-维子空间 $W:=\operatorname{span}(\{f_i\}_{i=1}^n)$. 定义 $W_x:=W\cap U_x$. 此时 $\bigcap_{x\in\mathbb{R}}W_x=0$, 且 $\dim W_x\in\{n,n-1\}$. 以下给出 x_i's 的构造.
>
> 1. 取 $x_1\in\mathbb{R}$ 使得 $\dim W_{x_1}=n-1$.
> 2. 由于 $\bigcap_{x\in\mathbb{R}}(W_{x_1}\cap W_x)=0$, 因此存在 $x_2\in\mathbb{R}$ 使得 $\dim(W_{x_2}\cap W_{x_1})=n-2$.
> 3. 依照上述步骤. 对任意 k, 可以找到 $(x_i)_{i=1}^n$ 使得 $\dim(W_{x_k}\cap\cdots\cap W_{x_1})=n-k$.

Ex 2 (On positivity of real matrices) Throughout, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Show that $\det(A^2+I) \geq 0$.

答: 依照 $\mathbb{C}$ 中的初等变换:

$$\begin{pmatrix} A & I \\ -I & A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & I+iA \\ -I & A-iI \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A+iI & O \\ -I & A-iI \end{pmatrix}$$

此时 $\det(A^2+I) = \det(A+iI)\cdot\overline{\det(A+iI)} \geq 0$.

2. Suppose $A = -A^T$. Show that $\det(-A^2+I) > 0$.

答: 只需证明 $\det(I+A^TA) > 0$. 记 $S = \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}$, 则 $S^T\cdot S = I + A^TA$. 考虑零空间等式 $N(S^T\cdot S) = N(S) = 0$, 得 $\det(I+A^TA) > 0$. 也可以对 S^TS 使用 Cauchy-Binet 公式.

3. Suppose that $AB = BA$, $BC = CB$, $AC = CA$, and $ABC = O$. Show that

$$\det(A+B+C)\cdot\det(A^3+B^3+C^3) \geq 0.$$

Hint: set $\xi = \sqrt[3]{1}$, and consider $(x+y+z)(x+\xi y+\xi^2 z)(x+\xi^2 y+\xi z) = ?$.

答: 由于 A, B 与 C 两两可交换, 则

$$(A+B+C)^3 - 3ABC = (A+B+C)\underbrace{(A+\xi B+\xi^2 C)(A+\xi^2 B+\xi C)}_{\text{共轭矩阵相乘}}.$$

代入 $ABC = 0$. 此时

$$\det(A+B+C)\cdot\det(A^3+B^3+C^3) = \det(A+B+C)^2\cdot\left|\det(A+\xi B+\xi^2 C)\right|^2$$

非负.

4. Suppose $AB = BA$. Show that if $\det(A+B) \geq 0$, then $\det(A^m+B^m) \geq 0$ for any $m \in \mathbb{N}_+$.

答: 依 $A^{2m} = (A^2)^m$, 只需证明 m 为奇数与 $m=2$ 的情形.

1. 若 $m = 2$, 则 $\det(A^2+B^2) = \det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)} \geq 0$.

2. 记 ξ 是 m-次单位根, 则

$$(A^m+B^m) = (A+B)\cdot\prod_{l=1}^{(m-1)/2}\Big((A+\xi^l B)\cdot\overline{(A+\xi^l B)}\Big).$$

   两侧取 $\det$, 左式非负.

Ex 3 (Adj 矩阵的基本性质) 记 u 与 v 是同阶的列向量. 必要时假设数域.

1. 写出 $\mathrm{Adj}(A+B)$, $\mathrm{Adj}(A\cdot B)$, $\mathrm{Adj}(A^T)$, $\mathrm{Adj}(\lambda A)$, 以及 $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}(A))$.

> 答: 真有人写 $\mathrm{Adj}(A+B)=\mathrm{Adj}(A)+\mathrm{Adj}(B)$, 这是意料之中而情理之外的. 以下是后四个常用式子的表达:
>
> 1. $\mathrm{Adj}(A\cdot B)=\mathrm{Adj}(B)\cdot\mathrm{Adj}(A)$;
> 2. $\mathrm{Adj}(A^T)=\mathrm{Adj}(A)^T$;
> 3. $\mathrm{Adj}(\lambda A)=\lambda^{n-1}\cdot\mathrm{Adj}(\lambda A)$;
> 4. $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}(A))=(\det A)^{n-2}\cdot A$;

2. 通过 A 的秩讨论 $\mathrm{Adj}(A)$ 的秩.

> 答: 使用相抵标准型 $A=P\mathbb{I}Q$, 则 $\mathrm{Adj}(A)=\mathrm{Adj}(Q)\cdot\mathrm{Adj}(\mathbb{I})\cdot\mathrm{Adj}(P)$. 从而 $\mathrm{rank}(\mathrm{Adj}(A))=\mathrm{rank}(\mathrm{Adj}(\mathbb{I}))$.
>
> 1. 若 A 满秩, 则 $\mathrm{Adj}(A)$ 亦然;
> 2. 若 A 秩为 $n-1$, 则 $\mathrm{Adj}(A)$ 的秩为 1;
> 3. 若 A 秩 $\le n-2$, 则 $\mathrm{Adj}(A)=O$.

3. 证明: $\mathrm{Adj}(I-u\cdot v^T)$ 是一个数量矩阵与一个秩 1 矩阵的和, 并写出相应的表达式.

> 答: (省略关于扰动法的说明) 不妨假定矩阵可逆, 则
>
> $$(\det(I-uv^T))\cdot(I-uv^T)^{-1}=(1-v^Tu)\cdot\left(I+\frac{uv^T}{1-v^Tu}\right)=(1-v^Tu)\cdot I+uv^T.$$

4. 证明: $\det\begin{pmatrix}A & u\\ v^T & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\cdot\det A-v^T\cdot\mathrm{Adj}(A)\cdot u$.

> 答: 对最后一行或最右一列使用 Laplace 展开.
>
> 也可以使用扰动法, 假设 A 可逆, 考虑初等变换
>
> $$\begin{pmatrix}A & u\\ v^T & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A & 0\\ v^T & \lambda-v^TA^{-1}u\end{pmatrix}$$
>
> 代入 $A^{-1}=(\det(A))^{-1}\cdot\mathrm{Adj}(A)$, 后略.

5. 证明: $\det(A+uv^T)=|A|+v^T\cdot\mathrm{Adj}(A)\cdot u$.

> 答: 使用 $\det K=\det\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ u & K\end{pmatrix}$ 化作上一题.
>
> 也可以直接使用 Laplace 展开: 记 α_i 是 A 的第 i 列, β_i 是秩 1 矩阵 uv^T 的第 i 列. 依照 $\det(-)$ 关于各列线性, 得
>
> $$\det(A+uv^T)=\sum_{\gamma\in\{\alpha,\beta\}}\det(\gamma_1\mid\gamma_2\mid\cdots\mid\gamma_n).$$
>
> 右式是 2^n 个数的和. 假若 $\det(-\gamma-)$ 中出现两个 β, 则行列式为 0, 从而右式可化作是 $n+1$ 个数的和. 对出现 β 的 n 个式子, 对 β 所在的列进行 Laplace 展开即可.

6. 记 S_A 是所有代数余子式的和, 即, $\mathrm{Adj}(A)$ 中所有元素的和. 假定 A 是 n 阶的.

   1. 若 A 的某一列向量 (或某一行向量) 是常数向量 $c\cdot\mathbf{1}$, 求 S_A 与 $\det A$ 的比值.

   > 答: 若 A 的第 k 列是 $c\mathbf{1}$, 则 $Ae_k=c\mathbf{1}$. 那么
   >
   > $$cS_A=\mathbf{1}^T\mathrm{Adj}(A)(c\mathbf{1})=\mathbf{1}^T\mathrm{Adj}(A)Ae_k=\det A.$$

   2. 若 A 的每一列向量 (或每一行向量) 中各项元素的和是常数 c, 求 S_A 与 $\det A$ 的比值.

答: 解答题干取行的情形. 此时 $A\mathbf{1}=c\mathbf{1}$.

$$cS_A=\mathbf{1}^T\operatorname{Adj}(A)(c\mathbf{1})=\mathbf{1}^T\operatorname{Adj}(A)A\mathbf{1}=n\det A.$$

3. 若 A 的行空间与 $\mathbf{1}$ 垂直 (即, 所有行向量的各项元素和为 0), 则 $\operatorname{Adj}(A)$ 的所有行向量相同.

答: 只需证明 $\dim N(A)=1$ 的情况 (不然, $\operatorname{Adj}(A)=O$). 此时, 有更一般的结论

$$\ker A:=\underbrace{N(A)}_{\{x\mid Ax=\mathbf{0}\}}=\underbrace{C(\operatorname{Adj}(A))}_{\{\operatorname{Adj}(A)\cdot y\}}=:\operatorname{im}\operatorname{Adj}(A).$$

由 $A\cdot\operatorname{Adj}(A)=O$ 知右式含于左式, 比较维数知两侧相等.

4. 若 A 的行空间与列空间均与 $\mathbf{1}$ 垂直, 则 $\operatorname{Adj}(A)$ 是全 1 矩阵 J 的数乘倍, 即,

$$\det(A+n^{-2}J)\cdot J=\operatorname{Adj}(A).$$

答: 由 $\operatorname{Adj}(A^T)=\operatorname{Adj}(A)^T$, 以及上一问结论, $\operatorname{Adj}(A)$ 必然是 J 的数乘倍. 下验证 $\det(A+n^{-2}J)$ 是这个常数. 记

$$\begin{aligned}
B:=&\begin{pmatrix} a_{1,1}+\frac{1}{n^2} & a_{1,2}+\frac{1}{n^2} & \cdots & a_{1,n}+\frac{1}{n^2}\\ a_{2,1}+\frac{1}{n^2} & a_{2,2}+\frac{1}{n^2} & \cdots & a_{2,n}+\frac{1}{n^2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1}+\frac{1}{n^2} & a_{n,2}+\frac{1}{n^2} & \cdots & a_{n,n}+\frac{1}{n^2}\end{pmatrix}\\
\xrightarrow{r_1\mapsto(r_1+\cdots+r_n)}&\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ a_{2,1}+\frac{1}{n^2} & a_{2,2}+\frac{1}{n^2} & \cdots & a_{2,n}+\frac{1}{n^2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1}+\frac{1}{n^2} & a_{n,2}+\frac{1}{n^2} & \cdots & a_{n,n}+\frac{1}{n^2}\end{pmatrix}\\
\xrightarrow{\text{行变换, 细节略}}&\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}\\
\xrightarrow{c_1\mapsto(c_1+\cdots+c_n)}&\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

从而 $\det B=(\operatorname{Adj}(A))_{1,1}$.

Ex 4 关于 Adj 矩阵.

1. 记 $A \in \mathbb{F}^{n\times(n-1)}$, 简要说明以下是线性映射:

$$\varphi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}, \quad v \mapsto \det(A \mid v).$$

请找到 $a \in \mathbb{F}^n$, 使得 $\varphi_A(v) = a^T \cdot v$.

> 答: 按最后一行进行 Laplace 展开.

2. 试证明, $\mathrm{Adj}(xI - A)$ 形如

$$A_0 + x \cdot A_1 + x^2 \cdot A_2 + \cdots + x^{n-1} \cdot A_{n-1} \quad A_k \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

> 答: 矩阵 $\mathrm{Adj}(xI - A)$ 的每一项都是 $(xI - A)$ 中某一 $(n-1)$-阶子式的行列式, 因此是次数不超过 $n-1$ 的多项式.

3. 沿用上一题记号, 证明 $A_k \cdot A - A_{k-1}$ 是数量矩阵 (也就是形如 $c \cdot I$ 的矩阵).

> 答: $\mathrm{Adj}(xI - A) \cdot (xI - A)$ 是数量矩阵, 递推即可.

Ex 5 求

$$\sqrt[3]{\det\begin{pmatrix} a^2+d^2-b^2-c^2 & 2(ab+cd) & 2(ac-bd) \\ 2(ab-cd) & b^2+d^2-a^2-c^2 & 2(bc+ad) \\ 2(ac+bd) & 2(bc-ad) & c^2+d^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}}.$$

答: 记原式为 $\sqrt[3]{\det A}$. 以下是三种常见的做法.

1. 对第一行做初等变换 $r_1 \mapsto r_1+\frac{b}{a}r_2+\frac{c}{a}r_3$, 提取公因式 $(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

2. 依照学习四元数或正交矩阵时的经验, 可以发现 AA^T 是数量矩阵. 比较符号即得答案.

3. 直接展开 (不推荐).

注: 对技巧类的问题, 算出类似的答案即可. 不必纠结三次单位根的问题.

Ex 6 记 $J=\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$. 所有矩阵是实的.

1. 证明 $\det(AJ+JA)\geq 0$.

> 答: 记 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 则
>
> $$AJ+JA=\begin{pmatrix} A_3-A_2 & A_1+A_4 \\ -A_1-A_4 & A_3-A_2 \end{pmatrix}.$$
>
> 依照矩阵初等变换,
>
> $$\det=\begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}=\det(C+iD)\cdot\overline{\det(C+iD)}\geq 0.$$

2. 若 $A^TJA=J$, 则称 A 是好玩的. 证明 $\det A=1$.

> 答: 对 $(I+A^TA)J=A^T(AJ+JA)$ 取行列式, 得
>
> $$\underbrace{\det(I+A^TA)}_{>0}\cdot\underbrace{\det J}_{=1}=\underbrace{\det A^T}_{=\det A}\cdot\underbrace{\det(AJ+JA)}_{\geq 0}$$
>
> 从而 $\det A$ 只能是正数.
>
> 第一处 >0 说明如下: 对 $I+A^TA=\binom{I}{A}^T\cdot\binom{I}{A}$ 使用 Cauchy-Binet 公式计算行列式, 其和式中所有数非负, 且至少有一个正数.

3. 证明以下三类矩阵是好玩的:
   1. ($\mathfrak{A}$-类矩阵) $\begin{pmatrix} I & S \\ & I \end{pmatrix}$, 其中 S 是对称矩阵;
   2. ($\mathfrak{B}$-类矩阵) $\begin{pmatrix} X^T & \\ & X^{-1} \end{pmatrix}$, 其中 X 是可逆矩阵;
   3. ($\mathfrak{C}$-类矩阵) 满足特定条件的形如 $\begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}$ 的矩阵, 所谓的特定条件就是 $A^TJA=J$ 对应的分块矩阵等式.

4. 证明好玩矩阵构成乘法群 $\mathfrak{S}$. 试问: 对上述 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{C}$ 这三个集合, 哪些集合可以视作 $\mathfrak{S}$ 的子群?

5. 证明岩澤分解 $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}=\mathfrak{S}$. 换言之, 任何好矩阵形如乘积

$$\begin{pmatrix} I & S \\ & I \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X^T & \\ & X^{-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}.$$

> 答: 乘法群 $\mathfrak{S}$ 中满足 $M^TM=I$ 的矩阵必属于 $\mathfrak{C}$. 因此只需证明, 对任意 $G\in\mathfrak{S}$ 总有分解 $GG^T=ABB^TA^T$, 其中 $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$.
>
> 之后就是待定系数, 进行构造与验证.

6. 证明 $\mathfrak{C}$ 就是酉矩阵群 $U_n(\mathbb{C})$. 对应方式是

$$\begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}\mapsto C+\sqrt{-1}\cdot B.$$

7. 在熟悉酉矩阵后, 我们将借用 Siegel 上半平面模型 介绍一类特殊的矩阵变换: Cayley 变换.

Challenges

1. 选定数域. 将 Vandermonde 行列式修改如下: 记 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ 是正实数, $(a_i)_{i=1}^n$ 是两两不等的正实数. 证明 $\det((a_i^{\lambda_j})) \neq 0$.

> 答: 若这一行列式为 0, 则存在一个非零指数函数
>
> $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot a_i^x \quad (k_i \in \mathbb{R}),$$
>
> 使得 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上有 n 个零点. 依照数学归纳法, f 的零点数量至多为

2. 若实矩阵 A 各项非负, A^{-1} 各项亦非负, 试求 A?

> 答: 这是一个脑筋急转弯. 今断言: 所有符合条件的 A 必然是置换矩阵与对角矩阵的乘积, 也就是每行每列恰有一项非负, 其余项为 0 的矩阵.
>
> - 若 A 形如此, 则 A 与 A^{-1} 均是各项非负的.
> - 若 A 不形如此, 不妨设 $a_{1,1}a_{1,2} \neq 0$. 此时必然有
>
> $$A^{-1} = \begin{pmatrix} * & \mathbf{0}^T \\ * & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$
>
> 这与 A^{-1} 可逆矛盾.