第二次作业反馈: **四元数不是域!**

(2024-2025-1)-MATH1405H-02

Tuesday 15th October, 2024

目录

1 符号说明

以下是几点符号说明.

1. 向量直接写作 v, 不必使用粗体或上加箭头.
2. 我们不区分以下记号 $\subset, \subseteq, \subseteqq$ 与 $\sqsubset$, 但推荐使用前两者; 若想表示真包含, 请用 $\subsetneq$ 或 $\subsetneqq$.
3. 禁止使用 $\because$ 与 $\therefore$ (这是某种简便记号, 不应出现在正式写作中), 请直接用 "因为" 与 "所以".
4. 禁止使用 $\div$, 请使用分数或 $(-)^{-1}$.
5. 禁止使用 C_n^p 表示组合数, 统一写作 $\binom{n}{p}$.
6. 禁止使用 $\times$ 表示矩阵乘法, 请使用 $\cdot$ 或直接省略.
7. 禁止使用 0 表示零矩阵 O; 但 0 可以表示常数, 零向量, 以及零线性空间.

2 第二次作业 (自学任务)

2.1 第一个自学任务

习题. 结合以上定义,

1. 若 $\varnothing_V$ 是 V 的空子集, 则 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(\varnothing_V)$ 是什么?
2. 若 S 是有限集, 请说明以上定义的 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(S)$ 与课堂中的表述一致.
3. 若 S 是无限集, 则 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}$ 是什么?

证明. 如下.

1. $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(\varnothing_V)$ 是包含 $\varnothing$ 的最小的 V-线性子空间. 线性空间有 0, 容易检查 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(\varnothing_V) = 0$.
2. 不妨设 $S = \{v_i\}_{i=1}^k$. 需要证明: 包含 S 的最小线性子空间是
$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i v_i \mid c_i \in \mathbb{F} \right\}. \tag{2.1}$$
以上集合是线性子空间 (关于线性运算封闭), 且与 $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(\varnothing_V)$ 互相包含.
3. 作为集合, $\mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(S) = \bigcup_{S_0 \subset S} \mathrm{Span}_{(\mathbb{F},V)}(S_0)$, 其中 S_0 取遍所有 S 的有限子集.

   注意: 线性空间没有 $\cup$ 这类运算, 但以上集合确实 "自动是线性空间". 由于检验线性空间 "八条公理" 的每一步骤都是对有限个对象进行的, 从而是在某一有限维线性子空间中进行的, 因此成立.

   此处的普适性原理: $\mathbb{F}$-线性空间向集合范畴的遗忘函子生 (create) 一切极限 (inverse limit) 与滤过余极限 (filtered co-limit), 类似的结论不胜列举. 简单地说,

   (SLOGAN) 对线性空间考虑零点集, 无穷交, 以及建立等价关系等操作时, 只需在集合层面上操作, 得到的东西 (若存在) 自动是线性空间 (且唯一). 不需额外地进行验证.

   若无法理解, 那就认真写证明过程吧. 可以把这个 SLOGAN 看成 coincidence 而非 theorem.

完证
毕明

2.2 习题课相关

习题 (1)**.** State the definition of a number field, and prove that number fields are $\mathbb{Q}$-linear spaces.

证明. 实际上, 但凡一个域包含 $\mathbb{Q}$ (严谨地说, 存在一个同构于 $\mathbb{Q}$ 的子域), 则该域是 $\mathbb{Q}$-线性空间. 直接验证即可. 借由此题, 我们将数域的定义统一如下:

定义 (数域)**.** 称 K 是数域, 当且仅当 K 是有限维 $\mathbb{Q}$-线性空间, 且 K 是域.

完证
毕明

备注. 按照惯例, 今后作业 (或试题) 会在必要时标注

Throughout, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{C}$.

以下是今后不多考虑的两类域. 二元域 (有限域) 必不是数域, 因为数域中 $(x \neq 0) \to (x + x \neq 0)$. 有理函数域 $\mathbb{C}(x) = \{p(x)/q(x)\}$ 看似比 $\mathbb{C}$ "严格大", 但在承认选择公理时仍能视作 $\mathbb{C}$ 的子域.

习题 (2)**.** Prove that the 3-dimensional $\mathbb{Q}$-linear space

$$V = \{a + b \cdot 2^{1/3} + c \cdot 2^{2/3} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \tag{2.2}$$

is a number field.

证明. 不平凡的地方是构造分母有理化, 从而证明 $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^{-1} \in V$. 似乎可以在 "谢书" 上找到本题的原题 (解法也是暴力的分母有理化). "聪明" 的解法是证明有理化的存在性, 而非直接构造.

引理. 取 $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, 存在一个次数不超过 3 的非零多项式 f, 使得 $f(x) = 0$.

证明. 题中的记号 V 引导我们将 x 视作有理数的向量 $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$. 此时, $x^2 \in V$ 也有对应的有理数的向量形式. 由于 V 是三维的, 从而四元集 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 关于域 $\mathbb{Q}$ 线性相关. 考虑 "表出其线性相关性" 的系数, 得 f 的系数.

完证
毕明

不妨设 f 无法分解成真因子的乘积. 对 $x \neq 0$, 总有 $f(0) \neq 0$. 记 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, 那么

$$x^{-1} = \frac{a_1 + a_2 x^1 + a_3 x^2}{-a_0} \in V. \tag{2.3}$$

完证
毕明

备注. Challenge: generalise & prove. 依照以上解法, 显然.

习题 (3)**.** Find a field K such that $\mathbb{C}$ is a proper subfield of K.

证明. 找到 $\mathbb{C}(x)$ 就足够了. **特别注意: 四元数不是域, 因为域的乘法需要交换!**

- 如果要求 "K 无法以任何形式视作 $\mathbb{C}$ 的子域", 那就构造一个比 $\mathbb{C}$ 还大的集合 S (例如 $\mathbb{C}$ 的幂集, 由理发师悖论). 最后构造 $\mathbb{C}$ 关于 S 的自由扩张 (所有有限扩张的并集, 依照此文档 2.1.3 的 "注意", 这是一个域).

完证
毕明

习题 (4)**.** Prove that $(1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{2024x})$ are linearly independent real-valued functions.

证明. (实值函数的) 积分和求导都是 (域 $\mathbb{R}$ 上的) 线性映射, 试在高中课本上寻找并补全相关定义.

对给定的线性映射 T, 则 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 线性无关是 $\{T(v_i)\}_{i=1}^n$ 线性无关的必要条件.

依逆否命题, 若存在非零系数的组合式使得 $\sum c_k e^{kx} = 0$, 则对任意阶求导都有 $\sum c_k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n} e^{kx} = 0$. 换言之, 对 $n = 0, 1, 2, \ldots, 2024$ 都有

$$\sum_{k=0}^{2024} k^n c_k e^{kx} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, 2024). \tag{2.4}$$

采用矩阵表示, 即

$$\begin{pmatrix} 0^0 & 1^0 & 2^0 & \cdots & 2024^0 \\ 0^1 & 1^1 & 2^1 & \cdots & 2024^1 \\ 0^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & 2024^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^{2024} & 1^{2024} & 2^{2024} & \cdots & 2024^{2024} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 e^{0x} \\ c_1 e^{1x} \\ c_2 e^{2x} \\ \vdots \\ c_{2024} e^{2024x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

记上式为 $A \cdot b = 0$. 依照 Vandermonde matrix, A 可逆. 从而 $b = 0$. 完证毕明

习题 (5)**.** Find n such that $\left(\sin \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{2\pi}{2n}, \ldots, \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$ are linearly dependent (over $\mathbb{Q}$).

证明. 反例可以由 "和差化积" 公式以及 $2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$ 轻易给出. 完证毕明

2.3 线性子空间

例子 (例题)**.** 证明以下两个句子描述了相同的子集.

1. 既包含 U_1, 又包含 U_2 的最小线性子空间.
   - 需要说明存在性和唯一性.
2. 集合 $\{\sum u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$.
   - 无需顾虑空集, 因为线性空间必含有元素 0.

   这一子集是线性空间, 记作 $U_1 + U_2$.

证明. 先证明存在包含 U_1 且包含 U_2 的最小线性子空间.

- (存在性) 取子空间的集合 $\mathscr{F} = \{W \text{ 是全空间的子空间} \mid U_1 \subset W, U_2 \subset W\}$. 由于全空间属于 $\mathscr{F}$, 故 $\mathscr{F}$ 非空. 取以上所有子空间的交

$$W_0 := \bigcap_{W \in \mathscr{F}} W. \tag{2.6}$$

  我们断言 W_0 是线性空间 (从而是子空间).

  A 对任意 $w, w' \in W_0$ 与常数 λ, 线性组合 $\lambda w + w'$ 属于所有 $W \in \mathscr{F}$, 从而属于 W_0.

再断言 W_0 是包含 U_1 与 U_2 的线性子空间. 证明类似上一断言.

B 选定任意 $u_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$. 由于 u_i 属于一切 $W \in \mathscr{F}$, 则 u_i 属于 W_0.

最后断言 W_0 是最小的线性子空间.

C 一切满足断言 A 与 B 的线性空间 W' 必然属于 $\mathscr{F}$, 从而 $W_0 \subset W'$.

由 A, B 与 C, 存在性证毕 (即, 以上构造的 W_0 是一解).

- (唯一性) 若 W_0' 也是 "包含 U_1 与 U_2 的最小线性子空间", 则 $W_0' \in \mathscr{F}$. 若同时再有 $W_0' \neq W_0$, 则必有 $W_0 \subsetneq W_0'$. 这表明
  - 若存在与 W_0 不等的最小元 W_0', 则 $W_0 \subsetneq W_0'$ 是真包含关系. 矛盾.

数学中区分 "极小" 与 "最小". 证明 "最小元" 的良定义性, 即证明 "极小元" 的唯一性.

- (W_0 构造的集合一致) 由于 U_1 与 U_2 已经是线性空间了, 从而以上由有限和构造的集合就是

$$U_3 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}. \tag{2.7}$$

往后证明 $W_0 = U_3$.

  - ($W_0 \subset U_3$) 依照定义, $U_3 \in \mathscr{F}$, 从而 $W_0 \subset U_3$.
  - ($U_3 \subset W_0$) 只需证明对任意 $W \in \mathscr{F}$ 都有 $U_3 \subset W$. 由 $U_1 \subset W$ 且 $U_2 \subset W$, 则有 $(U_1 \cup U_2) \subset W$. 由于 W 对线性组合式封闭, 此时有

$$U_1 + U_2 = \mathrm{span}(U_1 \cup U_2) \subset W. \tag{2.8}$$

证明完毕

例子 (线性空间的 "分配律"). 观察子空间的式子 $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap U_3$.

- (包含关系成立) 原理: 若 $A \subset B$ 与 $C \subset B$, 则有 $(A + C) \subset B$.
- (不必取等) 以下所有 U_i 都是 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间. 取

$$U_1 = \mathrm{Span}(\{(1,0)\}), \quad U_2 = \mathrm{Span}(\{(0,1)\}), \quad U_3 = \mathrm{Span}(\{(1,1)\}). \tag{2.9}$$

例子 (线性空间的 "分配律"). 观察子空间的式子 $(U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3) \supset (U_1 \cap U_2) + U_3$.

- (反包含关系成立) 原理: 若 $A \supset B$ 与 $C \supset B$, 则有 $(A \cap C) \supset B$.
- (不必取等) 以下所有 U_i 都是 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间. 取

$$U_1 = \mathrm{Span}(\{(1,0)\}), \quad U_2 = \mathrm{Span}(\{(0,1)\}), \quad U_3 = \mathrm{Span}(\{(1,1)\}). \tag{2.10}$$

备注. 线性空间的全体子空间具有某种 "前所未见的代数结构": 对选定的 $\star \in \{\cap, +\}$, 总有 "零元", 结合律, 以及交换律等; 但令人惊奇的是分配律不再成立. 刻画此类代数结构的 "普适性框架" 可以是格.

命题 (子空间的模恒等式). 对 $U_- \subset U_+$, 证明 $(U_- + V) \cap U_+ \subset U_- + (V \cap U_+)$.

证明. 一侧包含关系不依赖线性结构, 因此是普遍的. 下式中, 任意字母 > 任意数字:

$$\underbrace{(U_- + V)}_{A} \quad \cap \quad \underbrace{U_+}_{B} \quad \supset \quad \underbrace{U_-}_{1} \quad + \quad \underbrace{(V \cap U_+)}_{2}. \tag{2.11}$$

另一侧包含关系证明如下. 任取 $x \in (U_- + V) \cap U_+$, 则存在 $a \in U_-$ 与 $b \in V$ 使得 $x = a + b$.

- 断言 $(x - a) \in V$, 因为 $(x - a) = b \in V$.
- 断言 $(x - a) \in U_+$, 因为 $x \in U_+$ 且 $a \in U_+$.

因此 $x = a + (x - a) \in U_- + (V \cap U_+)$. 完证毕明

备注. 线性空间具有模格结构, 即某种二维的保守场. 今后的线性同态基本定理, 子空间对应定理, Noether 同构定理, Zassenhaus 引理, 以及谱序列的计算均基于此. 这一性质对全体加群, 模等 (良幂的) Abel 范畴均成立.

备注. 本次思考题比较宽泛, 就不统一给出 “答案” 了. 感兴趣的同学可以自行询问.

3 重要: 四元数不是域!

重要: 四元数不是域! 域的乘法需要是交换的!