投影, 正交性, 最小平方法.

推荐教材 LADR 的第六章. 可以暂时跳过复内积空间相关内容.

Problem 1 以下是一些关于 $\mathbb{R}^n$ 中向量内积的小题. 任选两题完成, 其中一题需要是 3. 或 4..

- 依通常定义, 点乘 $\langle u, v\rangle = u^T \cdot v$ 关于两个输入都是线性的.
- 记 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

1. 给定 $\|u\| \leq 1$ 与 $\|v\| \leq 1$, 证明: $\sqrt{1-\|u\|^2} \cdot \sqrt{1-\|v\|^2} \leq 1 - \langle u, v\rangle$.
2. 证明: $\|u+v\| \cdot \|u-v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$.
3. 证明: $\langle u, v\rangle = 0$, 当且仅当 $\|u\| \leq \|u + c \cdot v\|$ 对一切 $c \in \mathbb{R}$ 成立.
4. 证明: 任意给定 $u \neq \mathbf{0}$, 则对一切 $\|v\| = 1$ 均有 $\|u - (\|u\|^{-1} \cdot u)\| \leq \|u - v\|$. 换言之, 球面上距 u 最近处恰是 u 的单位化向量.
5. 表述并证明高中所学的极化恒等式.
6. 表述并证明高中所学的平行四边形恒等式.

Challenge 投影矩阵的和与积都不必是投影矩阵 (实际上, 任何不可逆方阵都是有限个投影矩阵的乘积). 能否优雅地定义投影矩阵间的二元运算 $\sqcap$ 与 $\sqcup$, 使得

$$C(P_1 \sqcup P_2) = C(P_1) + C(P_2), \quad C(P_1 \sqcap P_2) = C(P_1) \cap C(P_2).$$

Problem 2 计算示例 (最小平方法).

- 如果你想要一些简单的参考资料, 可以查看这篇笔记.
- 中英日名词对照: 最小平方法, Least Squares Method, 最小二乘法.

1. 使用最小平方法找到一条抛物线 $y = a + bx + cx^2$, 使得该抛物线可以尽可能地拟合以下所有点:

$$\{(-2,4),(-1,2),(0,1),(2,1),(3,1)\}.$$

   提示: 可以考虑方程

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

   请用严谨的数学语言解释这一所谓的拟合 (应当先定义点到抛物线的距离.).

Challenge 先前有一道证明题: $\mathbb{R}^n$ 的任意有限个真子空间之并不是全空间. 此处有一道类似的问题:

- 任取 $\mathbb{R}^n$ 中有限个真子空间 $\{V_i\}_{i=1}^m$, 则必存在补集中的向量组 $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right)^c$, 使得 $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{i,j}$ (单位正交关系).
- 以上 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 有无穷多种取法 (这或许是一句废话.).