Problem 1 记 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 是有理系数三次多项式 $(b,c,d\in\mathbb{Q})$.

> 视个人情况完成 $\{1,2\}$. 完成 $\{3,5,7\}$ 或 $\{4,6,8\}$, 这两组题是对称的.

1. (如果不会, 请写一遍) 数域是什么?

2. (这与先前的某道题目非常类似, 如果做错了, 请重写一遍.) 假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 任取多项式的一根 $x_0\in\mathbb{C}$, 证明 3 维 $\mathbb{Q}$-线性空间

$$V=\{r+sx_0+tx_0^2 \mid r,s,t\in\mathbb{Q}\} \tag{1}$$

是一个数域.

3. (接上一问) 取定 V 的一组 $\mathbb{Q}$-基 $B=(v_1,v_2,v_3)$. 对任意 $\lambda\in V$, 存在矩阵 $M_\lambda^B\in\mathbb{Q}^{3\times 3}$ 使得

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=M_\lambda^B\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}; \tag{2}$$

若取另一组基 $B'=(v_1',v_2',v_3')$, 同样可定义 $\lambda\mapsto M_\lambda^{B'}$.
试证明: $\det M_\lambda^B=\det M_\lambda^{B'}$. 换言之, $\det M_\lambda$ 不依赖基的选取.

> 注释: 将等式解释如下:
>
> $$\underbrace{\lambda}_{\text{属于 }V}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}}_{\text{属于 }V^{3\times 1}}=\underbrace{M_\lambda^B}_{\text{属于 }\mathbb{Q}^{3\times 3}\text{, 因此属于 }V^{3\times 3}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}}_{\text{属于 }V^{3\times 1}} \tag{3}$$
>
> 是 V 中的运算. 例如 $f=x^3-2$, 取 $B=(1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$, $\lambda=1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$, 则
>
> $$(1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4})\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt[3]{2}\\\sqrt[3]{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&1&2\\4&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt[3]{2}\\\sqrt[3]{4}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

4. 证明 $\operatorname{tr}(M_\lambda)$ 也不依赖基的选取.

5. 仍假定 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 记 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根. 证明 $\det M_{x_1}=\det M_{x_2}=\det M_{x_3}$.

6. 仍假定 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上无法因式分解. 记 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 是 f 在 $\mathbb{C}$ 上的根. 证明 $\operatorname{tr}(M_{x_1})=\operatorname{tr}(M_{x_2})=\operatorname{tr}(M_{x_3})$.

原题 7 与 8 仅用高中知识就能解出, 就不必做了. 同时 7 存在问题 (如 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x$).