Table des matières

I Théorie des distributions 3

1 L'espace $\mathcal{D}$ 3
- 1.1 L'ensemble $\mathcal{D}$ . . . 3
- 1.2 La structure topologique sur $\mathcal{D}$ . . . 3

2 Les distributions 3
- 2.1 Definition . . . 3
- 2.2 La structure topologique sur $\mathcal{D}$' . . . 4
- 2.3 Les grands principes . . . 4
- 2.4 Les fonctions localement intégrables : distributions régulières . . . 4

3 La dérivation des distributions 5
- 3.1 Définition . . . 5
- 3.2 Applications aux séries . . . 5
  - 3.2.1 Dérivation dans quelques cas particulier . . . 6
  - 3.2.2 Dérivation des fonctions absolument continues . . . 7
  - 3.2.3 CNS de convergence . . . 8

II Equations différentielles et intégrales - Produit de convolution - Calcul symbolique 9

1 Préliminaires 9

2 Produit de convolution 10
- 2.1 Support d'une fonction : . . . 11
- 2.2 Support d'une distribution . . . 11
- 2.3 Element neutre : la dirac . . . 11
  - 2.3.1 Dérivation : . . . 11

3 Formulaire : Calcul symbolique 12

III Transformation de Fourier 14

1 Rappel : Tranformation de Fourier des fonctions 14

2 Espace $\mathcal{S}$ de Schwarz 16

3 Transformée des distributions 16
- 3.1 Recherche d'une définition . . . 16
- 3.2 Espace des distributions tempérées . . . 17
- 3.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées . . . 17

4 Propriétés de la TF 17
- 4.1 Continuité . . . 17
- 4.2 Translation . . . 18
- 4.3 Quelques calculs importants . . . 18
- 4.4 Formule de réciprocité de Fourier . . . 19

5 Transformée de Fourier et convolution 20

IV Distributions périodiques - Série de Fourier 22

1 Transformée de Fourier d'une ditribution périodique **23**

2 Série de Fourier d'une distribution périodique **24**

3 Propriétés des coefficients de Fourier **24**

Première partie

Théorie des distributions

1 L'espace $\mathcal{D}$

1.1 L'ensemble $\mathcal{D}$

Définition: L'ensemble $\mathcal{D}$

C'est l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont :
- $\mathcal{C}^{\infty}$
- A support compact :

$$\forall \phi \in \mathcal{D},\ \exists [a,b],\ \phi(x) = 0\ \forall x \notin [a,b]$$

Les fonctions de $\mathcal{D}$ s'appellent les "fonctions tests". Elles servent à définir chaque distribution, à faire des calculs avec.

1.2 La structure topologique sur $\mathcal{D}$

Définition: Convergence sur $\mathcal{D}$

On dit que ϕ_n converge vers ϕ dans $\mathcal{D}$ et on note

$$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$$

si et seulement si :
- $\exists [a,b], \forall n,\ \phi_n = 0$ hors de $[a,b]$ et $\phi = 0$ hors de $[a,b]$
- $\forall k, \phi_n^{(k)} \xrightarrow{CU} \phi^{(k)}$

C'est une notion de convergence très forte.

Ceci constitue "l'espace $\mathcal{D}$", espace des fonctions tests. C'est un espace vectoriel.

2 Les distributions

2.1 Definition

Définition: Distribution

On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$, ie :

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ \phi & \mapsto & T(\phi) \end{array}$$

que l'on note (T,ϕ)
- lineaire : $(T, \alpha\phi_1 + \phi_2) = \alpha(T, \phi_1) + (T, \phi_2)$
- continue : Si $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi$ alors $(T, \phi_n) \to (T, \phi)$

On note $\mathcal{D}$' l'ensemble des distributions.

C'est un espace vectoriel :

$$(T_1 + \lambda T_2, \phi) = (T_1, \phi) + \lambda(T_2, \phi)$$

2.2 La structure topologique sur $\mathcal{D}$'

Définition: Convergence sur $\mathcal{D}$'

On dit que "T_n converge vers T au sens des distrubtions" et on note $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ si et seulement si :

$$\forall \phi \in \mathcal{D},\ (T_n, \phi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (T, \phi)$$

On définit ainsi "l'espace $\mathcal{D}$'", espace des distributions.

2.3 Les grands principes

Distribution de Dirac au point a :

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathcal{D} &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto (\delta_a, \phi) = \phi(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_a^{(n)} : \mathcal{D} &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto (-1)^n \phi^{(n)}(a) \end{aligned}$$

La mesure de Radon sur $\mathbb{R}$: μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ tel que $\mu([a,b]) < +\infty$, $\forall a \leq b \in \mathbb{R}$

$$\mu \in \mathcal{D} \mapsto (\mu, \phi) = \int_\mathbb{R} \phi d\mu$$

2.4 Les fonctions localement intégrables : distributions régulières

Définition: Espace des fonctions localement intégrables

Noté L^1_{loc}, c'est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall a \leq b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$$

dans lequel on identifie deux fonctions égales presque partout.

Soit $f \in L^1_{loc}$, on peut lui faire correspondre la distribution définie par :

$$\phi \in \mathcal{D} \to \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$$

Notons-la provisioirement T_f :

$$(T_f, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$$

tel que :
- $\phi = 0$ hors de [a,b].

– ∃ C tel que $|\phi| \leq C$ sur [a,b] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)f(x)|dx \leq c \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

On vérifie aisément la continuité de T_F sur $\mathcal{D}$. On a alors le théorème :

Théorème: Egalité des distributions

$\forall f, g \in L^1_{loc}$,

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \text{ dans } L^1_{loc}$$

Ceci permet d'identifier $f \in L^1_{loc}$ et T_f. On notera encore f la distribution T_f.
Distributions régulières ?

3 La dérivation des distributions

3.1 Définition

Définition: Dérivée d'une distribution

Soit T une distribution. On appelle dérivée de T (au sens des distriutions) la distribution T' définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, (T', \phi) = -(T, \phi')$$

Remarque :
Toute distribution est encore dérivable.

$$(T^{(k)}, \phi) = (-1)^k (T, \phi^{(k)})$$

Théorème: Suites des dérivées

Si $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ alors $T'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

Démonstration :
Soit $\phi \in \mathcal{D}$

$$(T'_n, \phi) = -(T_n, \phi') \to -(T, \phi') = (T', \phi)$$

3.2 Applications aux séries

Si $(U_n)_n$ est une suite de distributions, soit $S_n = \sum_{k \leq n} U_k$.
On dit que la série des U_n converge vers S (au sens des distributions) ssi

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S \in \mathcal{D}', \text{i.e. :}$$

$$\forall \phi, \text{la série } \sum_n (U_n, \phi) \text{est convergente et on a } \sum_n (U_n, \phi) = (S, \phi)$$

On écrit $S = \sum_n U_n$ (ou $S \overset{\mathcal{D}'}{=} \sum U_n$)

⥈ Théorème: Dérivation des séries

Si $S = \sum_n U_n$ alors $S' = \sum_n U'_n$

Démonstration :
La somme des dérivées est la dérivée de la somme (facile à démontrer).
D'après le théorème précédent, on a directement

$$S'_n = \sum_{k \leq n} U'_k \to S'$$

3.2.1 Dérivation dans quelques cas particulier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, constamment dérivable par morceaux, ayant en tout point des limites à droite et à gauche, n'ayant qu'un nombre fini de discontinuité sur tout intervalle borné.
Soient ... $< x_i < x_{i+1} <$ ...
On suppose que sur $]x_i, x_{i+1}[$, f est $\mathcal{C}^1$

⥈ Théorème: Dérivées généralisées

Avec les hypothèses et notations précédentes, la dérivée de f au sens des distributions vaut

$$f' = \{f\}' + \sum_i \Delta f(x_i)\delta_{x_i}$$

où $\{f\}'$ est la fonction définie pp égale à la dérivée de f au sens des fonctions, et $\Delta f(x_i) = f(x_i^+) - f(x_i^-)$ (saut de f au point x_i)

Démonstration :
Il est clair que $f \in L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$
Soit $\phi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
(f', \phi) &= -(f, \phi') \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \\
&= -\sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\phi'(x)dx
\end{aligned}$$

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on prolonge f par continuité aux points x_i et x_{i+1} par $f(x_i^+)$ et $f(x_{i+1}^-)$

$$\begin{aligned}
(f', \phi) &= -\sum_{i \in \mathbb{Z}} [f(x)\phi(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{f\}'(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \{f\}'(x)\phi(x)dx - \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_{i+1}^-)\phi(x_{i+1}) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_i^+)\phi(x_i) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \{f\}'(x)\phi(x)dx - \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_i^-)\phi(x_i) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_i^+)\phi(x_i) \\
&= (\{f\}', \phi) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i^+) - f(x_i^-))\phi(x_{i+1}) \\
&= (\{f\}', \phi) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\Delta f(x_i)\delta_{x_i}, \phi)
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum \Delta f(x_i)\delta_{x_i}$ converge et on a :

$$f' = \{f\}' + \sum_i \Delta f(x_i)\delta_{x_i}$$

Remarque :
Si au point x_i, f n'est pas dérivable, mais est continue, alors $\Delta f(x_i) = 0$. Il n'y a donc par de Dirac au point x_i. En particulier, si f est $\mathcal{C}^0$, dérivable par morceaux, f'={f}'

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} x & \text{si} & x < 0 \\ -x & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{si} & x < 0 \\ -1 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} x & \text{si} & x < 0 \\ 1-x & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \delta(x) + \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{si} & x < 0 \\ -1 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

3.2.2 Dérivation des fonctions absolument continues

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
On dit que f est absoluement continue ssi il existe une fonctions $g \in L^1_{loc}$ tel que

$$\forall a \leq b, f(b) - f(a) = \int_a^b g(x)dx$$

On a f absolument continue $\Rightarrow$ f continue, mais cela n'implique pas f dérivable (sauf si g est $\mathcal{C}^0$).

Théorème: Dérivabilité au sens des distributions

Sous les mêmes hypothèses et les mêmes notations, on a f dérivable (au sens des distributions) et

$$f' = g$$

Lemme: Intégration sur un rectangle

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : [a,b]^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

intégrable sur $[a,b]^2$, alors

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)dydx = \int_a^b \int_y^b f(x,y)dxdy = I$$

Démonstration (du lemme) :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \int_a^b f(x,y) 1_{\{a \leq y \leq x \leq b\}} dydx \\ &= \int_a^b \int_a^b f(x,y) 1_{\{a \leq y \leq x \leq b\}} dxdy (\text{Théorème de Fubini}) \\ &= \int_a^b \int_y^b f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Démonstration (du théorème) :
Soit $\phi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} (f', \phi) &= -(f, \phi') \\ &= - \in_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \end{aligned}$$

Soit [a,b] tel que $\phi(x) = 0$ pour $x \neq\in [a, b]$.
Par continuité, on a $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

$$(f', \phi) = -\int_a^b f(x)\phi'(x)dx$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy$$

donc :

$$\begin{aligned} (f', \phi) &= \int_a^b f(a)\phi'(x)dx - \int_a^b \int_a^x g(y)\phi'(x)dydx \\ &= -f(a)\underbrace{[\phi(b) - \phi(a)]}_{=0} - \int_a^b \int_y^b g(y)\phi'(x)dxdy \\ &= -\int_a^b g(y) \int_y^b \phi'(x)dxdy \\ &= -\int_a^b g(y)(\phi(b) - \phi(y))dy \\ &= \int_a^b g(y)\phi(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\phi(y)dy \\ &= (g, \phi) \end{aligned}$$

donc f'=g au sens des distributions.

3.2.3 CNS de convergence

Théorème: CNS pour qu'une suite (resp série) de distribution converge : (admis)

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions.

$$\begin{aligned} (T_n)_n \text{ converge} &\Leftrightarrow \forall\phi \in \mathcal{D}, (T_n, \phi) \text{ converge} \\ \sum_n (T_n)_n \text{ converge} &\Leftrightarrow \forall\phi \in \mathcal{D}, \sum_n (T_n, \phi) \text{ converge} \end{aligned}$$

Deuxième partie

Equations différentielles et intégrales - Produit de convolution - Calcul symbolique

1 Préliminaires

Rappel :
Si $T \in \mathcal{D}'$, T' est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, (T', \phi) = -(T, \phi')$$

Théorème: Dérivée nulle

$T' = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C}; T = c$

Démonstration :
Si T=c, $\forall \phi \in \mathcal{D}$:

$$(T', \phi) = (0, \phi) = 0$$

donc T'=0
Si T'=0 :
Si $\phi \in \mathcal{D}$ et si $\phi = \psi'$ avec $\psi \in \mathcal{D}$:

$$(T, \phi) = (T, \psi') = -(T', \psi) = -(0, \psi) = 0$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}$ Soit $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)dx = 1$.
Considérons $\phi(x) - \theta(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)du = \alpha(x),\ \alpha \in \mathcal{D}$
Soit $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \alpha(u)du$.

$$\psi'(x) = \alpha(x),\ \mathcal{C}^\infty,\ \text{donc } \psi\mathcal{C}^\infty$$

Soit [a,b] tel que $\alpha = 0$ hors de [a,b]
Si x<a, $\psi(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Si x>b, } \psi(x) &= \int_{-\infty}^{b} \alpha(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v)dv - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(v) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v)dv - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(v)dv}_{=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)du \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc ψ est nulle hors de [a,b], donc $\psi \in \mathcal{D}$ et $\psi' = \alpha$. $Donc (T, \alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } (T, \alpha) &= (T, \phi - \theta \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)du) \\
&= (T, \phi) - \underbrace{(T, \theta)}_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u)du \\
&= (T, \phi) - (c, \phi) \\
&= 0 \\
&\Leftrightarrow (T, \phi) = (c, \phi)
\end{aligned}$$

i.e T=c

2 Produit de convolution

Rappel :
Soient 2 fonctions f et g mesurables.
On dit que f et g sont convolables ssi

$$h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|g(x-u)|du < \infty \text{ pour presque tout } x$$

et alors, on définit $f * g$ comme la fonction définie pp par :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du$$

On a vu que si $f, g \in L^1$, alors $f * g$ existe et $\in L^1$
Cherchons une généralisation de la définition de la convolution aux distributions.
Prenons par exemple $f, g \in L^1 \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$
Soit $\phi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} (f * g, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\phi(x)dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)g(x-u)\phi(x)dudx \end{aligned}$$

Fubini ? ϕ est bornée, $\leq$ c.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)||g(x-u)||\phi(x)|dudx &\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \int_{-\infty}^{+\infty} \subset |g(x-u)|dx_{y=x-u}du \\ &\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|du \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy < \infty \end{aligned}$$

On peut donc inverser l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned} (f * g, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\underbrace{g(x-u)}_{v=x-u}\phi(x)dx\right] du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\phi(v+u)dv\right] du \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\phi(u+v)dudv(*) \end{aligned}$$

On se retrouve sur $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$: ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$: ensemble des fonctions linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Produit tensoriel de 2 distributions
Si S et T sont 2 distributions sur $\mathbb{R}$, on définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$, $S \otimes T$, par :

$$\forall\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), (S \otimes T, \psi) = (S_x, (T_y, \psi(x,y))) = (T_y, (S_x, \psi(x,y)))$$

L'idée :
Si S et T sont 2 distributions (sur $\mathbb{R}$), on souhaite définir S*T par :

$$\forall\phi \in \mathcal{D}, (S * T, \phi) = S_x \otimes T_y, \phi(x+y)) = (S_x, (T_y, \phi(x+y)))$$

Problème :
$\psi(x,y)=\phi(x+y)$ n'est pas à support compact. $(T_y,\phi(x+y))$ est bien définie. C'est une fonction qui dépend de x : $\psi(x)=(T_y,\phi(x+y))$
ψ est $\mathcal{C}^\infty$, mais elle n'est en général pas à support borné. D'où le problème.

Chaque distribution a un domaine de définition qui est propre, et dans lequel $\mathcal{D}$ est inclu.
Il suffit donc que $\psi\in\mathcal{D}(S)$
Il nous faut donc bien redéfinir la notion de support.

2.1 Support d'une fonction :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
Le support de f est l'adhérence de l'ensemble :

$$\{x|f(x)\neq 0\}$$

$$\begin{array}{rcl} y\in \mathrm{Supp}(f) & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists x;\ |x-y|<\varepsilon \text{ et } f(x)\neq 0 \\ y\notin \mathrm{Supp}(f) & \Leftrightarrow & \exists\varepsilon>0;\forall x,\ |x-y|<\varepsilon\Rightarrow f(x)=0 \end{array}$$

2.2 Support d'une distribution

Soit $T\in\mathcal{D}'$

$$\begin{array}{rcl} y\in \mathrm{Supp}(T) & \Leftrightarrow & \forall\varepsilon>0,\exists\phi\in\mathcal{D};\ \mathrm{Supp}(\phi)\subset]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\text{ et } (T,\phi)\neq 0 \\ y\notin \mathrm{Supp}(T) & \Leftrightarrow & \exists\varepsilon>0;\forall\phi\in\mathcal{D},\mathrm{Supp}(\phi)\subset]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\Rightarrow f(x)=0 \end{array}$$

Théorème: Théorème de prolongement

Soient $T\in\mathcal{D}'$ et $\psi\mathcal{C}^\infty$.
Si Supp(T)∩Supp(ψ) est bornée alors (T,ψ) est bien défini.

On note ε' l'ensemble des distributions à support compact.
Si S ou T∈ ε' alors S*T est bien défini et S*T=T*S.

2.3 Element neutre : la dirac

$$\begin{array}{rcl} (\delta*T,\phi) & = & (\delta_x,(T_y,\phi(x+y))) \\ & = & (T_y,\phi(0+y)) \\ & = & (T,\phi) \end{array}$$

D'où $T*\delta=\delta*T=T$.

2.3.1 Dérivation :

$\delta'*T=T'$

$$\begin{array}{rcl} (T*\delta',\phi) & = & (T_y,(\delta'_x,\phi(x+y))) \\ & = & (T_y,-(\delta_x,\phi'(x+y))) \\ & = & (T_y,-\phi'(y)) \\ & = & (T',\phi) \end{array}$$

Par généralisation : $\delta^{(k)} * T = T^{(k)}$
D'où les opérateurs différentiels :

$$a_n T^{(n)} + ... + a_1 T' + a_0 T = (a_n \delta^{(n)} + ... + a_0 \delta) * T$$

Définition: Distributions à support borné à gauche

Notons $\mathcal{D}'_g$ l'ensemble des distributions dont le support est borné à gauche.

$$T \in \mathcal{D}'_g \Leftrightarrow \exists a; \mathrm{Supp}(T) \subset [a, +\infty[$$

et $\mathcal{D}'_+$ le sous-ensemble des distributions à support dans $[0, +\infty[$.

Théorème: Convolution sur $\mathcal{D}'_g$

La convolution est bien définie sur $\mathcal{D}'_g$ et :

$$S, T \in \mathcal{D}'_g \Rightarrow S * T \text{ est bien définie}$$

* est une loi interne :
- Elle est associative
- Elle a un élément neutre
- Elle est commutative
- Elle est distributive

On dit que $(\mathcal{D}'_g, +, \cdot, *)$ est une algèbre unitaire, associative et commutative.
Ceci permet de définir le calcul symbolique.

Remarque :
* n'est pas forcément associative (mais elle l'est par théorème sur $\mathcal{D}'_g$)

3 Formulaire : Calcul symbolique

Formule: On change de notation :

- * se note comme la multiplication
- δ ne note 1
- δ' se note p

Si T se note F(p), alors T^{*-1} se note $\frac{1}{F(p)}$.
On peut alors appliquer les règles de calcul habituelles.

$\frac{1}{p-\lambda}$	$He^{\lambda t}$
$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$H\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$H\cos(\omega t)$
$\frac{1}{p^2-\omega^2}$	$H\frac{\sinh(\omega t)}{\omega}$
$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$H\cosh(\omega t)$
$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$H\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
$\frac{1}{(p-\lambda)^n}$	$H\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}$
$\frac{1}{p^n}$	$H\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

– On transforme l'équation pour qu'elle soit dans $\mathcal{D}'_+$. On obtient X.
– On replace X dans l'équation du début. On factorise par les dérivés de Dirac avec la convoluée.
– On résout l'équation égal à Dirac pour trouver l'inverse.
– On revient à l'équation de départ. On peut résoudre le problème.

Pensez à :

$$Hf * Hg(t) = H(t)\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

Exemple : Formule de Taylor

Retrouvez la formule de Taylor avec reste intégral, en dérivant n fois Hf et en applicquant le calcul symbolique

$$\begin{aligned}(Hf)^{(n)} &= f(0)\delta^{(n-1)} + f'(0)\delta^{(n-2)} + ... + f^{(n-1)}(0)\delta + Hf^{(n)} \\ &= \delta^{(n)} * Hf\end{aligned}$$

Ecriture symbolique :

$$\begin{aligned}p^n Hf &= f(0)p^{n-1} + f'(0)p^{n-2} + ... + f^{(n-2)}(0)p + f^{(n-1)}(0) + Hf^{(n)} \\ \Rightarrow Hf &= f(0)\frac{1}{p} + f'(0)\frac{1}{p^2} + ... + f^{(n-1)}(0)\frac{1}{p^n} + Hf^{(n)}\frac{1}{p^n}\end{aligned}$$

Traduction pour $t \geq 0$:
$\frac{1}{(p-\lambda)^k} \leftrightarrow H\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}$

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + ... + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^t f^n(u)\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}du$$

Troisième partie

Transformation de Fourier

1 Rappel : Tranformation de Fourier des fonctions

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
La transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$$

La transformée de Fourier est l'application :

$$f \in L^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

Propriété: De la transformée de Fourier

- $\mathcal{F}$ est linéaire : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
- $\forall f \in L^1$, $\hat{f}$ est continue
- Si f $\mathcal{C}^k$ et $f', f'', ..., f^{(k)} \in L^1$, alors :

$$\exists c_k;\ |\hat{f}(\nu)| \leq \frac{c_k}{(1+|\nu|)^k}$$

- Si f et $x^k f \in L^1$ alors $\mathcal{F}(f)$ est $\mathcal{C}^k$

Lemme: Limite à zéro

Si f et $f' \in L^1$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Démonstration :
Si on prend $f > 0$.

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

Or, $f' \in L^1$, donc :

$$\int_0^x f'(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f'(t)dt < +\infty$$

Donc $\exists l \in \mathbb{C};\ f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$. Montrons que $l = 0$ $|f(x)| \to l$. $\exists a; \forall u \geq a,\ |f(u)| \geq \frac{|l|}{2}$. Donc :

$$\int_0^{+\infty} |f(u)|du \geq \int_a^{+\infty} |f(u)|du \geq \int_a^{+\infty} \frac{|l|}{2}du = \frac{|l|}{2} \times \infty$$

Or, $\int_0^{+\infty} |f(u)|du < \infty$, donc $|l| = 0$.
(de même quand $x \to -\infty$)

Démonstration (de la propriété 1) :
Si f et f' $\in L^1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\ &= \left[\underbrace{f(x)}_{\to 0}\underbrace{e^{-2i\pi\nu x}}_{\text{module 1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu x}dx \\ &= 2i\pi\nu\mathcal{F}(f)(\nu)\end{aligned}$$

$$|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = ||f||_1$$

$$|2i\pi\nu||\mathcal{F}(f)(\nu) = |\mathcal{F}(f')(\nu)| \leq ||f'||_1$$

D'où $(1+|\nu|)|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq \underbrace{||f||_1 + \frac{||f'||_1}{2\pi}}_{=c_1}$ ce qui nous donne :

$$|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq \frac{c_1}{1+|\nu|}$$

Donc vrai pour $k=1$.
Pour k quelconque : $f, f', ..., f^{(k)} \in L^1$. Par récurrence, on a :

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\nu) = (2i\pi\nu)^k\mathcal{F}(f)(\nu)$$

$$(2\pi)^k|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq (2\pi)^k||f||_1$$
$$|2i\pi\nu|^k|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq ||f^{(k)}||_1$$

D'où :

$$|\mathcal{F}(f)(\nu)| \leq \frac{||f||_1 + \frac{||f^{(k)}||_1}{(2\pi)^k}}{1+|\nu|^k}$$

Formule:

Si f et $f' \in L^1$

$$\mathcal{F}(f')(\nu) = 2i\pi\nu\mathcal{F}(f)(\nu)$$

Démonstration (de la démonstration 2) :
On utilise le théorème de dérivation :
- $\nu \mapsto f(x)e^{-2i\pi\nu x}$ est dérivable
- $\frac{\partial}{\partial\nu}(f(x)e^{-2i\pi\nu x}) = -2i\pi x f(x)e^{2i\pi\nu x}$
  Or, $\left|\frac{\partial}{\partial\nu}(f(x)e^{-2i\pi\nu x})\right| = 2\pi|xf(x)| \in L^1$

Donc $\mathcal{F}(f)$ est dérivable, et :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(f)(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi x f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\ &= \mathcal{F}(-2i\pi\nu x f)(\nu) \text{ qui est } \mathcal{C}^0\end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x^j f(x)| dx &= \int_{-1}^{1} |x^j f(x)| dx + \int_{|x|>1} |x^j f(x)| dx \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x)| dx + \int_{|x|>1|} |x^k f(x)| dx < \infty\end{aligned}$$

donc $x^j f \in L^1$ $\forall 1 \leq j \leq k$
Le résultat s'ensuit par récurrence.

2 Espace $\mathcal{S}$ de Schwarz

C'est l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant :
- ϕ est $\mathcal{C}^\infty$
- $\forall k,\ \phi^{(k)}$ décroit à l'infini plus vite que toute puissance de $\frac{1}{x}$, ie :

$$\forall k, \forall l, x^l \phi^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Espace topologique :
$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi$ si et seulement si :

$$\forall k, l,\ |x^l||\phi_n^{(k)} - \phi^{(k)}| \xrightarrow{CU} 0$$

Remarque : $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ et $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi \Rightarrow \phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi$

Théorème: Stabilité par la transformation de Fourier

L'une des propriété essentielle de $\mathcal{S}$ est qu'il est stable par la transformation de Fourier, ie :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S} &\to \mathcal{S} \\ \phi \in \mathcal{S} &\mapsto \mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

(Résulte des deux résultats précédents)

3 Transformée des distributions

3.1 Recherche d'une définition

Soit $f \in L^1$ alors $\mathcal{F}(f)(\nu)$ est $\mathcal{C}^0$, bornée, donc $\mathcal{F}(f)(\nu) \in L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$ Soit $\phi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f), \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\nu)\phi(\nu) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x}\phi(\nu) dx d\nu\end{aligned}$$

Par Fubini (on peut le vérifier) :

$$\begin{aligned}&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2i\pi\nu x}\phi(\nu) d\nu dx \\ &= (f, \mathcal{F}(\phi))\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall f \in L^1, \forall \phi \in \mathcal{D}, (\mathcal{F}(f), \phi) = (f, \mathcal{F}(\phi))$$

On a envie de le définir pour tout $T \in \mathcal{D}'$. On peut montrer que ϕ et $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \phi = 0$
Il faut montrer que le domaine de définition de T contient $\mathcal{S}$. Ceci amène aux distributions tempérées.

3.2 Espace des distributions tempérées

C'est l'espace $\mathcal{S}'$ des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S} &\to \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto (T,\phi) \end{aligned}$$

Linéaire : $(T, \alpha\phi + \beta\psi) = \alpha(T,\phi) + \beta(T,\psi)$
Continue : $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi \Rightarrow (T,\phi_n) \to (T,\phi)$
Avec la notion de convergence :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{S}} T \Leftrightarrow \forall\phi \in \mathcal{S},\ (T_n,\phi) \to (T,\phi)$$

On a $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ (car $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$)

3.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Soit $T \in \mathcal{S}'$ alors $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'$ et :

$$\forall\phi \in \mathcal{S}, (\mathcal{F}(T),\phi) = (T,\mathcal{F}(\phi))$$

4 Propriétés de la TF

4.1 Continuité

Propriété: Continuité de la TF

$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est continue

Démonstration :
Soit T et T_n deux distributions de $\mathcal{S}'$ tel que $T_n \to T$

$$\phi \in \mathcal{S},\ (\mathcal{F}(T_n),\phi) = (T_n,\mathcal{F}(\phi)) \to (T,\mathcal{F}(\phi)) = (\mathcal{F}(T),\phi)$$

Définition: Distribution produit

Si $T \in \mathcal{D}'$, $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^\infty$, on définit ρT par :

$$\forall\phi \in \mathcal{D}, (\rho T,\phi) = (T,\rho\phi)$$

Propriété: Transformée de la dérivée

Si $T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(T')(\nu) = 2i\pi\nu\mathcal{F}(T)(\nu)$

Démonstration :
Soit $\phi \in \mathcal{S}$.

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{F}(T')_\nu, \phi(\nu)) & = & (T'_x, \mathcal{F}(\phi)(x)) \\ & = & -(T_x, \mathcal{F}'(\phi)(x)) \\ \text{On a vu que } \mathcal{F}'(\phi)(x) = \mathcal{F}(-2i\pi\nu\phi)(x) & & \\ & = & -(T_x, \mathcal{F}(-2i\pi\nu\phi)(x)) \\ & = & (\mathcal{F}(T)_\nu, \underbrace{2i\pi\nu}_{\mathcal{C}^\infty}\phi(\nu)) \\ & = & (2i\pi\nu\mathcal{F}(T)_\nu, \phi(\nu)) \end{array}$$

4.2 Translation

Définition: Translation d'une distribution

$$(T_{x-a}, \phi(x)) = (T_x, \phi(x+a))$$

Théorème: Transformée d'une distribution translatée

$$\mathcal{F}(T_{x-a})_\nu = e^{-2i\pi\nu a}\mathcal{F}(T_x)_\nu$$

Démonstration :

$$(\mathcal{F}(T_{x-a})_\nu, \phi(\nu)) = (T_{x-a}, \mathcal{F}(\phi)(x)) = (T_x, \mathcal{F}(\phi)(x+a))$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Or, } \mathcal{F}(\phi)(x+a) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-2i\pi\nu(x+a)}dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu a}\phi(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\ & = & \mathcal{F}[e^{-2i\pi\nu a}\phi](x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{D'où : } (\mathcal{F}(T_{x-a})_\nu), \phi(\nu)) & = & (\mathcal{F}(T)_\nu, \underbrace{e^{-2i\pi\nu a}}_{\mathcal{C}^\infty}\phi(\nu)) \\ & = & (e^{-2i\pi\nu a}\mathcal{F}(T)_\nu, \phi(\nu)) \end{array}$$

4.3 Quelques calculs importants

Théorème: f_α

Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{S}$. Alors :

$$\mathcal{F}(f_\alpha)(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\nu^2}$$

En particulier, $\mathcal{F}(f_\pi) = f_\pi$

Rappel :
$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi\nu a}$

(Démonstration assez simple)

Théorème: Transformée de 1

$$\mathcal{F}[1] = \delta$$

Démonstration :

$$\mathcal{F}[1'] = \mathcal{F}[0] = 0 = 2i\pi\nu\mathcal{F}[1]$$

Posons $T = \mathcal{F}[1] \in \mathcal{S}'$. On a $\nu T = 0$. Ceci équivaut à $\exists x \in \mathbb{C},\ T = c\delta$. Reste à calculer c.
Considérons $\phi = f_\pi$.

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{F}[1], f_\pi) & = & (1, \mathcal{F}(f_\pi)) \\ & = & (1, f_\pi) \\ & = & (\mathcal{F}(\delta), f_\pi) \\ & = & (\delta, \mathcal{F}(f_\pi)) \\ & = & (\delta, f_\pi) \\ & = & f_\pi(0) \\ & = & 1 \end{array}$$

Or,

$$(\mathcal{F}(1), f_\pi) = (c\delta, f_\pi) = cf_\pi(0) = c$$

D'où $c = 1$

4.4 Formule de réciprocité de Fourier

On définit $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ par :

$$\mathcal{F}^*(T)_\nu = \mathcal{F}(T)_{-\nu}$$

Si $f \in L^1$,

$$\mathcal{F}^*(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2i\pi\nu x}dx = \mathcal{F}(f)(-\nu)$$

Si T est une distribution :

$$T_{-x}, \phi(x)) = (T_x, \phi(-x))$$

Et plus généralement :

$$\lambda \neq 0, (T_{\lambda x}, \phi(x)) = \frac{1}{|\lambda|}\left(T_x, \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Théorème: Transformée de Fourier inverse

$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est bijective et $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ ie :

$$T = \mathcal{F}^*[\mathcal{F}[T]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^*[T]]$$

Démonstration :
Soit $\phi \in \mathcal{S}$. On pose $\hat{\phi}(x) = \mathcal{F}(\phi)(x) \in \mathcal{S}$ $(\subset L^1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\hat{\phi}](a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\nu) e^{2i\pi\nu a} d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu a} \mathcal{F}[\phi](\nu) d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times \mathcal{F}[\phi_{x+a}](\nu) d\nu \\
&= (1, \mathcal{F}(\phi_{x+a})) \\
&= (\mathcal{F}(1), \phi(x+a)) \\
&= (\delta, \phi(x+a)) \\
&= \phi(a)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}^*[\mathcal{F}[\phi]] = \phi$

Soit $T \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^*[\mathcal{F}[T]], \phi) &= (\mathcal{F}[T], \mathcal{F}^*[\phi]) \\
&= (T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^*[\phi]]) \\
&= (T, \phi)
\end{aligned}$$

5 Transformée de Fourier et convolution

On a vu : $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g$ existe $\in L^1$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

De même que $f * g$ n'existe pas nécessairement lorsque $f, g \in L^1_{loc}$, S*T n'existe pas nécessairement losque $S, T \in \mathcal{S}'$
Problème : Si S*T existe et $\in \mathcal{S}'$, que dire de $\mathcal{F}(S * T)$? On aimerait avoir :

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(T)$$

En général, on ne peut pas définir le produit de deux distributions. On sait le faire, par exemple, lorsque S et T sont des fonctions de L^1_{loc} ou lorsque S ou T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
Par contre, tout marche très bien lorsque S ou T est une distribution à support compact.

Théorème:

Si S est une distribution à support compact, alors $\mathcal{F}(S)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ donnée par :

$$\mathcal{F}(S)(\nu) = (S_x, e^{-2i\pi\nu x})$$

Théorème: Transformation de la convolution de distribution

Si S est une distribution à support compact et $T \in \mathcal{S}'$ alors :

1. S*T$\in \mathcal{S}'$
2. $\mathcal{F}(S * T) = \underbrace{\mathcal{F}(S)}_{\mathcal{C}^\infty} \underbrace{\mathcal{F}(T)}_{\in \mathcal{S}'}$

Démonstration :
1) admis 2)

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(S*T),\phi(\nu)) &= (S*T,\mathcal{F}(\phi)) \\ &= (S_x,(T_y,\mathcal{F}(\phi(x+y))))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } \mathcal{F}(\phi(x+y)) &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\nu)e^{-2i\pi\nu(x+y)}d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu x}\phi(\nu)e^{-2i\pi\nu y}d\nu \\ &= \mathcal{F}\left[e^{2i\pi\nu x}\phi(\nu)\right](y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } (\mathcal{F}(S*T),\phi(\nu)) &= (S_x,(T_y,\mathcal{F}\left[e^{2i\pi\nu x}\phi(\nu)\right](y))) \\ &= (S_x,(\mathcal{F}[T]_\nu,e^{2i\pi\nu x}\phi(\nu))) \\ &= (S_x\otimes\mathcal{F}(T)_\nu,e^{2i\pi\nu x}\phi(\nu)) \\ &= (\mathcal{F}[T]_\nu,(S_x,e^{2i\pi\nu x})\phi(\nu)) \\ &= (\mathcal{F}[T]_\nu,\underbrace{\mathcal{F}[S]_\nu}_{\mathcal{C}^\infty}\phi(\nu)) \\ &= (\mathcal{F}[S]_\nu\mathcal{F}[T]_\nu,\phi(\nu))\end{aligned}$$

Quatrième partie

Distributions périodiques - Série de Fourier

Définition: Distribution périodique

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On dit que T est périodique, de période τ, si et seulement si

$$T_{x+\tau} = T_x$$

ie :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, (T_{x+\tau}, \phi(x)) = (T_x, \phi(x-\tau)) = (T_x, \phi(x))$$

Définition: Peigne de Dirac

$$a > 0, \Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$$

Théorème: Distribution périodique

Soit T une distribution périodique de période τ, alors il existe K distribution à support compact ($K \in \varepsilon'$) tel que :

$$T = K * \Delta_\tau$$

Démonstration :
Longue et chiante

Soit $T \in \mathcal{D}'$ de période τ. Comme $K \in \epsilon'$ et $\Delta_\tau \in \mathcal{S}'$ donc $T \in \mathcal{S}'$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T]_\nu &= \mathcal{F}[K * \Delta_\tau]_\nu \\ &= \hat{K}(\nu) \times \mathcal{F}[\Delta_\tau]_\nu \end{aligned}$$

$\hat{K}$ est connue (dépend de T). Il reste à calculer $\mathcal{F}[\Delta_\tau]$

Théorème:

$$\mathcal{F}[\Delta_a] = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$$

Démonstration :
$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$, donc $\delta_a * \Delta_a = \Delta_a$.
Donc
$$\mathcal{F}[\delta_a * \Delta_a] = \mathcal{F}[\delta_a]\mathcal{F}[\Delta_a] = e^{-2i\pi\nu a}\mathcal{F}[\Delta_a] = \mathcal{F}[\Delta_a]$$
D'où
$$\underbrace{(1 - e^{-2i\pi\nu a})}_{g(\nu)}\mathcal{F}[\Delta_a]_\nu = 0$$
Or, on peut montrer que si $g(x)$ $\mathcal{C}^\infty$, avec $g(a) \neq 0$, $g'(a) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ $\forall x \neq a$ alors :
$$g(x)T = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{C};\ T = c\delta$$
Ici, la fonction $g(\nu)$ a pour racines les nombres $\frac{k}{a},\ k \in \mathbb{Z}$ et $g'\left(\frac{k}{a}\right) \neq 0$ On fait le même raisonnement autour de chaque point $\frac{k}{a}$ et on a :
$$g(\nu)T = 0 \Leftrightarrow \exists (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_k a$$
Donc $\mathcal{F}[\Delta_a] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{\frac{k}{a}}$
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\Delta_a]_\nu &= \mathcal{F}[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_{ka}]_\nu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[\delta_{ka}]_\nu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2i\pi\nu ka} : \text{de période } \frac{1}{a}
\end{aligned}$$
Donc $\mathcal{F}[\Delta_a] * \delta_{\frac{1}{a}} = \mathcal{F}[\Delta_a] = \sum c_k \delta_{\frac{k+1}{a}}$
D'où $\forall k, c_k = c_{k+1}$, donc $\mathcal{F}[\Delta_a] = c\Delta_{\frac{1}{a}}$

Pour calculer c, on utilise f_α en prenant $\alpha = \pi a^2$.
$$\begin{aligned}
\hat{f}_{\pi a^2}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{\pi a^2}} e^{-\frac{\pi^2}{\pi a^2}x^2} \\
&= \frac{1}{a} e^{-\frac{\pi}{a^2}x^2}
\end{aligned}$$
$$(\mathcal{F}[\Delta_a], f_{\pi a^2}) = (\Delta_a, \hat{f}_{\pi a^2}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a} e^{-\pi k^2}$$
$$(c\Delta_{\frac{1}{a}}, f_{\pi a^2}) = c \underbrace{\sum e^{-\pi a^2}}_{\neq 0}$$
D'où $c = \frac{1}{a}$

1 Transformée de Fourier d'une ditribution périodique

Soit T de période τ. On a vu que si ρ est $\mathcal{C}^\infty$:
$$\rho\delta_a = \rho(a)\delta_a$$
Donc :
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[T] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\tau} \underbrace{\hat{K}(\nu)}_{\mathcal{C}^\infty} \delta_{\frac{k}{\tau}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\tau} \hat{K}\left(\frac{k}{\tau}\right) \delta_{\frac{k}{\tau}}
\end{aligned}$$

Posons $c_k = \frac{1}{\tau}\hat{K}\left(\frac{k}{\tau}\right)$

Théorème:

Ces coefficients c_k sont les seuls coefficients α_k tels que $\mathcal{F}[T] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \delta_{\frac{k}{\tau}}$

Ce sont les coefficient de Fourier de T. Ils ne dépendent pas du $K \in \epsilon'$ choisi dans la décomposition $T = K * \Delta_\tau$.

Remarque : Comme $\mathcal{F}[T]$ est exprimé par des Dirac, on dit que T est à spectre discret.

Démonstration :
$\mathcal{F}[T] = \sum \alpha_k \delta_{\frac{k}{\tau}} = \sum c_k \delta_{\frac{k}{\tau}}$.
Soit k fixé. Soit $\phi \in \mathcal{D}$ tel que $\phi\left(\frac{k}{\tau}\right) = 1$ et $\phi = 0$ hors de $\left[\frac{k-\frac{1}{2}}{\tau}, \frac{k+\frac{1}{2}}{\tau}\right]$.
Alors $(\mathcal{F}[T], \phi) = \alpha_k = c_k$

Remarque : Si $T = f \in L^1_{loc}$, de période τ :
On a vu qu'on pouvait prendre $k = f1_{[0,\tau[}$, d'où $\hat{K}(\nu) = \int_0^\tau f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

$$c_k(f) = \frac{1}{\tau}\hat{K}\left(\frac{k}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(x)e^{-2i\pi\frac{k}{\tau}x}dx$$

2 Série de Fourier d'une distribution périodique

Soit T de période τ. On a :

$$\mathcal{F}[T] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T)\delta_{frack\tau}$$

D'après la formule (linéaire !) de réciprocité :

$$\begin{aligned} T &= \mathcal{F}^*\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T)\delta_{frack\tau}\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T)\mathcal{F}^*\left[\delta_{\frac{k}{\tau}}\right]_\nu \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(T)e^{-\frac{2i\pi kx}{\tau}} \end{aligned}$$

Théorème:

1. Toute distribution périodique est la somme (dans $\mathcal{S}'$ de sa série de Fourier.
2. Les $c_k(T)$ sont les seuls coefficients α_k tels que $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-\frac{2i\pi kx}{\tau}}$

Démonstration :

$$\mathcal{F}[T] = \sum \alpha_k \mathcal{F}[e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}] = \sum \alpha_k \delta_{\frac{k}{\tau}}$$

On a donc $\alpha_k = c_k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

3 Propriétés des coefficients de Fourier

Propriété:

Soit T de période τ. Alors
$$c_k(T') = \frac{2i\pi k}{\tau} c_k(T)$$

Démonstration :
$T = \sum c_k(T) e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}$

$$\begin{aligned} T' &= \left(\sum c_k(T) e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}\right)' \\ &= \sum c_k(T) \left(e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}\right)' \\ &= \sum c_k(T) \frac{2i\pi k}{\tau} e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}} \\ &= \sum c_k(T') e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}} \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients :
$$c_k(T') = \frac{2i\pi k}{\tau} c_k(T)$$

Propriété:

Si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(T)| < \infty$ alors la série $\sum c_k(T) e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}$ est normalement convergente donc définit une fonction $\mathcal{C}^0$, et donc T est une fonction $\mathcal{C}^0$ de période τ (ou égale presque partout à une telle fonction)

Notons $L^p(\tau) = \{f \in L^p_{loc}$ de période $\tau\}$ dans lequel on identifie deux fonctions égales presque partout.

La "théorique classique" n'utilise que $L^2(\tau)$. On a $L^2(\tau) \subset L^1(\tau)$.
Si $f \in L^1(\tau)$,
$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}}$$
avec
$$c_k(f) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(x) e^{-\frac{-2i\pi kx}{\tau}} dx$$