1 Signal déterministe

1.1 Définitions

Echelon :

$$u(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t \geq 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Signal rectangulaire :

$$Rect_T(t) = \begin{cases} 1 \ si \ |t| \leq T \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Sinus cardinal :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

Energie :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{x(t)} dt$$

Puissance :

$$P_X = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

1.2 Représentation en fréquence des signaux d'énergie finis

Transformée de Fourier :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

Si x(t)=$Rect_T(t)$,

$$X(f) = 2T\text{sinc}(2Tf)$$

$$\overline{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} e^{2\pi j f t} dt$$

1.2.1 Propriétés des transformées

1. Addition : $\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{TF} \alpha X(f) + \beta X(f)$
2. Dérivée : $-2\pi j t x(t) \xrightarrow{TF} \frac{dX(f)}{df}$
3. Symétrie de correspondance : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \Leftrightarrow X(t) \xrightarrow{TF} x(f)$
4. Identité de Parseval : $\int x(t)y(t)dt = \int X(f)Y(f)df$
   En particulier, $\int x(t)^2 dt = \int X(f)^2 df$: pas de perte d'énergie.
5. Convolution : h(t)=x(t)*y(t) = $\int x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
   $x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(f)Y(f)$
6. Décalage temporel : $x(t-\theta) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f \theta} X(f)$ et $e^{-2\pi j f_0 t} x(t) \xrightarrow{TF} X(f+f_0)$

1.3 Représentation fréquentielle de signaux x-périodique et de signaux limités en temps

Notion de distribution

δ(t) : distribution de Dirac.

$$\forall \phi(t), \forall a, \int \delta(t-a)\phi(t) = \phi(a)$$

1.3.1 Développement de Fourier

Développement en série de Fourier d'un signal limité en temps

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

où T est la période ou la durée du signal, et X_k le coefficient de Fourier, qui vaut :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right)$$

1.3.2 TF de la Dirac

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{TF} 1 \\ e^{2\pi j \frac{k}{T} t} &\xrightarrow{TF} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t} &\xrightarrow{TF} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

Donc quand on a un signal de période T, on obtient un spectre en fréquence échantilloné en $\frac{1}{T}$

1.3.3 Fonction d'inter et d'autocorrélation

Fonction d'intercorrélation :

$$R_{XY}(t) = x(t) * \overline{y(-t)} = \int x(\tau) \overline{y(\tau - t)} d\tau$$

Fonction d'autocorrélation :

$$R_X(t) = x(t) * \overline{x(-t)} = \int x(\tau) \overline{x(\tau - t)} d\tau$$

2 Signaux à temps discret

Introduction

Jusqu'à présent, nous n'avions qu des signaux continus. On s'intéresse à présent à des signaux à temps discret.

$$x_k, k \in \mathbb{Z}, temps\ discret\ TD$$

Par rapport à un signal continu, on peut poser un pas d'échantillonnage T qui nous permettra de discrétiser notre signal.

$$x_k = x(kT)$$

x_k sera l'échantillon. On a donc besoin d'un infinité d'échantillon pour retrouver le signal continu.

De même, on peut redéfinir plusieurs notions du cas continu dans le cas discret :

Cas continu	Cas discret
$E_x = \int \|x(t)\|^2 dt$	$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|x_k\|^2$
$x(t) * y(t) = \int x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$x_k * y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m y_{k-m}$
$u(t) = \begin{cases} 1\ pour\ t \geq 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$	$u_k = \begin{cases} 1\ pour\ k \geq 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$
$\delta(t) = \begin{cases} 1\ si\ t = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$	$\delta_k = \begin{cases} 1\ si\ k = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$

2.1 Transformée en z, $z \in \mathbb{C}$

$\{x_k\} \xrightarrow{TZ} \mathrm{X(z)} = \underset{|r_1|<|z|<|r_2|}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k}}$: on précise toujours un domaine de convergence au sens du critère de Cauchy.

Critère de Cauchy : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge ssi $\lim_{k\to+\infty}(u_k)^{\frac{1}{k}} < 1$

$$X^+(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} |u_k z^{-k}|^{\frac{1}{k}} &< 1 \\ \lim_{k\to+\infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} |z^{-1}| &< 1 \\ r_1 |z^{-1}| &< 1 \\ r_1 &< |z| \end{aligned}$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$: bilatérale. Si $\sum_{k=0}^{+\infty}$: monolatérale.

Quelques définitions

- Un signal x_k est <u>causal</u> s'il est nul pour k<0. Dans ce cas, X(z) est monolatéral et la région de convergence est supérieure à r_1
- Un signal x_k est <u>anticausal</u> s'il est nul pour $k \geq 0$. Dans ce cas, X(z) est monolatéral et la région de convergence est inférieure à r_2
- Un signal x_k est <u>bilateral</u> s'il est défini non nul pour tout k. Le domaine de convergence est compris entre r_1 et r_2.

Attention ! :

$$\begin{aligned} a^k u_k &\xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}} pour |z| > |a| \\ -a^k u_{-k-1} &\xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}} pour |a| > |z| \end{aligned}$$

Propriétés

- $\delta_k \xrightarrow{TZ} 1$
- $x_k \xrightarrow{TZ} X(Z)$, on pose $y_k = x_{k-m}$

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k z^{-k} \sum_k x_{k-m} z^{-k}$$

On pose l = k-m.

$$Y(z) = \sum_l x_l z^{-l-m} = z^{-m} X(z)$$

- $x_k * y_k \xrightarrow{TZ} X(z)Y(z)$
On a vu en TD que $x_k * z^k = z^k X(z)$. On pose $y_k = x_k * h_k$. On a $y_k * z^k = Y(z)$

$$(x_k * h_k) * z^k = x_k * (h_k * z^k) = x_k * (H(z)z^k) = (x_k * z^k)H(z) = z^k X(z)H(z)$$

Par identification, $Y(z) = X(z)Y(z)$.
- $kx_k \xrightarrow{TZ} -z\frac{dX(z)}{dz}$
On prend x_k et sa TZ $X(Z) = \sum_k x_k z^{-k}$. On pose $y_k = kx_k$. Ainsi, $Y(z) = \sum_k kx_k z^{-k}$. Or,

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_k kx_k z^{-k-1} = -z^{-1}Y(z)$$

D'où le résultat.
On peut même aller jusqu'à la dérivée seconde.

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2} = \sum_k k(k+1)x_k z^{-k-2} = -z^{-2}\left(\sum_k k^2 x_k z^{-k} + \sum_k kx_k z^{-k}\right)$$

Si on pose $w_k = k^2 x_k$ on a :

$$W(z) = z^2\ \frac{d^2X(z)}{dz^2} + z\ \frac{dX(z)}{dz}$$

2.2 Transformée inverse

Commençons par un exemple :

$$X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Les pôles sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

$$p_1 = \frac{1}{2}\ et\ p_2 = \frac{1}{3}$$

$\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ correspondra au signal $\frac{1}{2}^k u_k$ si $|z| > \frac{1}{2}$ et à $-\frac{1}{2}^k u_{-k-1}$ si $|z| < \frac{1}{2}$.
$\frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ correspondra au signal $\frac{1}{3}^k u_k$ si $|z| > \frac{1}{3}$ et à $-\frac{1}{3}^k u_{-k-1}$ si $|z| < \frac{1}{3}$.
Ainsi, pour avoir un signal causal, on prend $|z| > \frac{1}{2}$ et ainsi, $x_k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k u_k - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k u_k$
Pour avoir un signal anticausal, on prend $|z| < \frac{1}{3}$ et ainsi, $x_k = -2\left(\frac{1}{2}\right)^k u_{-k-1} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^k u_{-k-1}$
Pour avoir un signal bilatéral, on prend $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ et ainsi, $x_k = -2\left(\frac{1}{2}\right)^k u_{-k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k u_k$
Ainsi, on voit que le nombre de pôle entraîne le nombre de régions de convergence.

2.3 Transformée de Fourier des signaux à temps discret

Pour les signaux discret, on définit la transformée de Fourier par :

$$(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{-2\pi jkf}$$

X(f) est une fonction péridoique de fréquence 1. On étudie donc X(f) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ou sur $[0, 1]$ On remarque que si le cercle unité appartient à la région de convergence de la tranformée en z, $X(f) = X(z)|_{z=e^{2\pi jf}}$

3 Systèmes linéaires-Filtres

3.1 Définition d'un SL

$x(t) \xrightarrow{S} y(t)$ avec $x(t)$ et $y(t)$ signal de sortie. On a une relation entrée/sortie.
$\forall x(t)$, en supposant connaître S, on sait déterminer la sortie.
$\mathcal{L}\{x(t)\} = y(t)$: L'opérateur du système appliqué au signal d'entrée donne l'observation.

Ensemble des propriétés :

- Linéaire :
$$\forall \alpha\beta,\ \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{S} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$
- Invariance temporelle (ou par translation) :
$$x(t-\theta) \xrightarrow{S} y(t-\theta)$$
- Instantané ou sans mémoire $y(t_1)$ ne dépend que de $x(t_1)$, et pas de son passé.

3.2 Filtre linéaire

Définition :
Un filtre linéaire (FL) est un système linéaire invariant par translation (SLIT)

Définition :
Un FL est un convoluteur.

On note h(t) la fonction qui caractérise le système, appelée réponse impulsionnelle (RI).

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Définition :
Les signaux exponentiels sont les signaux propres du SL.

On caractériseles FL par leur réponse impulsionnelle. Si on ne connaît pas la RI, on met la Dirac en entrée. Ainsi :

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

Définition :
On pose la réponse en fréquence du filtre :

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\phi(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2\pi jft}dt$$

3.3 Filtre en parallèle/En série

3.3.1 En série :

Filtre équivalent : $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$
Réponse en fréquence : $H(f) = H_1(f) \times H_2(f)$

3.3.2 En parallèle :

Filtre équivalent : $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$
Réponse en fréquence : $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

3.4 Filtre réalisable physiquement

Définition :
Un FL est réalisable physiquement s'il est stable et causal.

Causal : La sortie ne peut précéder l'entrée.

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{k} x_m h_{k-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} h_m x_{k-m}$$

On a donc $\begin{cases} h_k \neq 0 & \text{pour } k \geq 0 \\ h_k = 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$

3.4.1 Stabilité BIBO / EBSB

BIBO : Bounded Input - Bounded Output
EBSB : Entrée Bornée - Sortie Bornée.

$$M = \sum |x_k| < \infty$$

$$\sum h_k x_{k-m} < M \sum |h_k|$$

Théorème :

$$\sum h_k < \infty \Leftrightarrow \{|z| = 1\} \in \text{ région de convergence}$$

Pour avoir un filtre physiquement réalisable, on doit avoir tous les pôles à l'intérieur du cercle unité. (Logique, la région de convergence pour les signaux causaux sont à l'extérieur du cercle défini par les pôles, et on doit avoir le cercle unité dans la région de convergence)

3.5 Filtre Passe-bas / Passe-haut / Passe-bande

Voir cours et dessins.
Penser que les filtres sont toujours symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

3.6 Filtres RIF / RII

On pose :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} \text{ avec } a_0 = 1$$

3.6.1 RIF : Réponse Impulsionnelle Finie

$\underbrace{D(z)}_{\text{Dénominateur}} = 1 \Rightarrow$ Filtre stable

Ici, on a :

$$y_k = b_0 x_k + \underbrace{b_1 x_{k-1} + ... + b_N x_{k-N}}_{\text{Passé}}$$

Dans les RIF, la sortie ne dépend que du passé de l'entrée.

3.6.2 RII : Réponse impulsionnelle infinie :

Premier cas :

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}$$

$$Y(z) \times \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} = X(Z) \xrightarrow{TZ^{-1}} \quad \sum_{i=0}^{M} a_i y_{k-i} = x_k$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{M} a_i y_{k-i}$$

Filtre purement récursif : la sortie dépend de son propre passé, et de celui-ci uniquement.

Deuxieme cas :

$$\begin{aligned} Y(z) \times \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} &= X(Z) \sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i} \\ \xrightarrow{TZ^{-1}} \sum_{i=0}^{M} a_i y_{k-i} &= \sum_{l=0}^{N} b_l x_{k-l} \\ y_k = \sum_{l=0}^{N} b_l x_{k-l} &- \sum_{i=1}^{M} a_i y_{k-i} \end{aligned}$$

⇒ Dépend du passé de l'entrée et de la sortie.
Filtre récursif (mais pas purement).