Première partie

Mesures

1 Définitions générales

Définition :
Soit E un ensemble. On appelle tribu de parties de E toute famille B de parties de E vérifiant :

1. $\emptyset$ et E $\in$ B
2. B est stable par union dénombrable : $\forall (A_n)_n \subset B,$ *suite de parties de* $B, \bigcup_n A_n \in B$
3. B est stable par complémentaire : $A \in B \Rightarrow A^c \in B$

Définition :
Soit ε une famille des parties de E. On note $\sigma(\varepsilon)$ plus petite tribu des parties de E qui contient ε, ie

1. $\sigma(\varepsilon)$ est une tribu
2. $\varepsilon \subset \sigma(\varepsilon); \forall A \in \varepsilon, A \in \sigma(\varepsilon)$
3. $\forall \mathcal{B}$, tribu des parties de E, $\varepsilon \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\varepsilon) \subset \mathcal{B}$

On dit que $\sigma(\varepsilon)$ est la tribu engendrée par ε On démontre par ailleurs que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq P(\mathbb{R})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$).

Propriété 1.1 :
Une tribu est stable par intersection dénombrable

Démonstration :
Soit $(A_n)_n \in B$.

$$\bigcap_n A_n = \left(\bigcup_n A_n^c \right)^c$$

Et comme une tribu est stable par union et complémentaire, on a le résultat attendu.

Théorème 1.1 :

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(F) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \varepsilon \subset \sigma(F) \\ F \subset \sigma(\varepsilon) \end{array}$$

Définition :
On appelle tribu borelienne de E (notée $\mathcal{B}_E$) la tribu engendrée par la famille des ouverts de E.

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par la famille des ouverts de $\mathbb{R}$.

Propriété 1.2 :
On suppose que $\mathcal{B} = \sigma(\varepsilon)$ et que ε vérifie :

- ε est stable par intersection finie
- $\exists (\varepsilon_n)_n \subset \varepsilon; \varepsilon = \bigcup_n \varepsilon_n$

On a alors : si $\forall A \in \varepsilon, \mu(A) = \nu(A) < +\infty$ alors $\mu = \nu$

Définition :
On appelle espace mesurable tout couple (E,B) où E est un ensemble et B une tribu des parties de E. Les éléments de B s'appellent les parties mesurables de E.

2 Mesure et proriétés

Définition :
Soit (E,B) un espace mesurable. On appelle mesure sur (E,B) toute application $\mu : B \to [0, +\infty]$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. La σ-additivité : $\forall (A_n)_n$, famille dénombrable $\subset B$ tel que $\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$, on a

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

Définition :
On appelle espace mesuré tout triplet (E,B,μ) où (E,B) est un espace mesurable et μ une mesure sur (E,B)

Définition :
On appelle mesure de Lebesgue :

$$\lambda_n\left([a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]\right) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

Théorème 2.1 :
Soit F : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue à droite.

$$\exists! \mu_F ; \mu_F([a, b]) = F(b) - F(a)$$

F est la fonction de répartition de μ

Propriété 2.1 :
Il existe plusieurs propriétés pour les mesures. Entre autres :

1. Si $\mu(A \cap B) < +\infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(A) - \mu(A \cap B)$
2. Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$
3. De plus, si $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$
4. Si $(A_n)_n$ suite croissante, alors $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n)$
5. Si $(A_n)_n$ suite décroissante et $\exists n; \mu(B_n) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n)$

3 Applications mesurables

Soient (E,$\mathcal{B}$) et (F,$\mathcal{C}$) deux espaces mesurables et f :E→F une application.

Définition :
On dit que f est mesurable ssi $\forall C \in \mathcal{C}, f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$

Théorème 3.1 :
Supposons que $\mathcal{C} = \sigma(\varepsilon)$ (ε famille quelconque des parties de F). On a équivalence entre :
- f est mesurable
- $\forall C \in \varepsilon,\ f^{-1}(C) \in B$

Corollaire 3.1 :
E et F sont des espaces métriques munis de leur tribu bolérienne.
Si f continue, alors f mesurable.

Démonstration :
$\varepsilon = O_F$
f continu $\Leftrightarrow \forall C \in O_F, f^{-1}(C) \in \mathcal{B}_E$

Propriété 3.1 :
La composée de 2 applications mesurables est mesurable.

4 Cas des applications à valeurs réelles

On entend par là les applications à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$

Corollaire 4.1 :
Soit f :(E,$\mathcal{B}$) $\rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, B_{\bar{\mathbb{R}}})$. f est mesurable ssi $\forall [c,d[, f^{-1}([c,d[) \in \mathcal{B}$

Corollaire 4.2 :

$$\begin{array}{rcl} f \ est \ mesurable & \Leftrightarrow & \forall a \in \mathbb{R}, \{x|f(x) \leq a\} \in \mathcal{B} \\ & \Leftrightarrow & \forall a \in \mathbb{R}, \{x|f(x) \geq a\} \in \mathcal{B} \\ & \Leftrightarrow & \forall a \leq b, \{x|a < f(x) \leq b\} \in \mathcal{B} \end{array}$$

Théorème fondamental :

Soit $(f_n)_n$ une suite d'application mesurables à valeurs réelles.
- $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables
- Si $f_n \xrightarrow{CS} f$ alors f est mesurable

$\overline{\lim} x_n = \lim_k(\sup_{n\geq k} x_n) = \inf_k(\sup_{n\geq k} x_n)$
$\underline{\lim} x_n = \lim_k(\inf_{n\geq k} x_n) = \sup_k(\inf_{n\geq k} x_n)$

Fonctions simples :

Soit (E,$\mathcal{B}$) un espace mesurable. On appelle fonction simple (sous-entendu mesurable) tout application mesurable à valeurs réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Fonction indicatrice

Elles ne prennent que 2 valeurs : 0 ou 1

Si $A = \{x|f(x) = 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; sinon \end{cases}$

1_A mesurable $\Leftrightarrow$ A mesurable.

Ecriture canonique d'une fonction simple

Soit f une fonction simple. Soient $x_1, ..., x_n$ les valeurs qu'elle peut prendre. Soit $A_i = \{x|f(x) = x_i\}$ qu'on note $\{f = x_i\}$

- $A_i = f^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{B}$
- Les $(A_i)_{i=1..n}$ forment une partition de E
- $f = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{\{f=x_i\}}$ s'appelle l'écriture canonique

Théorème 4.1 :
Tout fonction mesurable (à valeur dans $[0, +\infty]$) est limite simple d'une suite croissante de fonctions simples positives.

Deuxième partie

Intégration

1 Intégrations de fonctions simples positives

Rappel :
Soit ϕ une telle fonction. $\phi : E \to [0, +\infty]$.
Soient $X_1, ..., X_n$ les valeurs distinctes qu'elle peut prendre.

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} X_k 1_{\{\phi = X_k\}}$$

Sachant que $\{\phi = X_k\} = \{x \in E | \phi(x) = X_k\} = \phi^{-1}(X_k)$

Définition :
On appelle intégrale de ϕ par rapport à μ le nombre positif (fini ou non) noté $\int \phi d\mu$ égal à

$$\int \phi d\mu = \sum_{k=1}^{n} X_k \mu(\{\phi = X_k\})$$

Propriété 1.1 :

1. $\int \phi d\mu \geq 0$
2. $\int \alpha\phi d\mu = \alpha \int \phi d\mu$
3. $\int (\phi + \psi) d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu$
4. $\phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu$

Démonstration (du 3 et du 4) :
3) Si ψ prend les valeurs $y_1, ..., y_m$, alors $\phi + \psi$ prend les valeurs $(X_k + y_l)_{\substack{k=1..n \\ l=1..m}}$

$$\phi + \psi = \sum_{k,l} (X_k + y_l) 1_{\{\phi = X_k, \psi = y_l\}}$$

$$\begin{aligned}
\int (\phi + \psi) d\mu &= \sum_{k,l} (X_k + y_l) \mu(\phi = X_k, \psi = y_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k \left(\sum_{l=1}^{m} \mu(\phi = X_k, \psi = y_l) \right) + \sum_{l=1}^{m} y_l \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(\phi = X_k, \psi = y_l) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k \mu(\phi = X_k) + \sum_{l=1}^{m} y_l \mu(\psi = y_l) \\
&= \int \phi d\mu + \int \psi d\mu
\end{aligned}$$

Remarque : Cela permet de donner une autre définition de l'intégrale :
Si $\phi = \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{A_i}$ $(A_i \in \mathcal{B})$ alors $\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i \mu(A_i)$

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i \int 1_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{n} X_i \mu(A_i)$$

4) $\psi = \phi + (\psi - \phi)$

$$\int \psi d\mu = \int \psi d\mu + \int (\psi - \phi) d\mu \geq \int \psi d\mu$$

Définition :
Si $B \in \mathcal{B}$ on pose

$$\int_B \phi d\mu = \int \phi 1_B d\mu$$

Théorème 1.1 :
L'application $\nu : B \in \mathcal{B} \to \nu(B) \in [0, +\infty]$ définie par $\nu(B) = \int_B \phi d\mu$ est une mesure.

2 Intégrations des fonctions mesurables positives

Soit $f : E \to [0, +\infty]$ mesurable.

Définition :
On pose

$$\int f d\mu = \sup_{\substack{\phi \text{ simple positive} \\ \phi \leq f}} \int \phi d\mu$$

Propriété 2.1 : – $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$
– $\forall c \geq 0,\ \int c\ f d\mu = c \int f d\mu$

Théorème fondamental, ou théorème de la convergence monotone de Lebesgue, ou de Beppo-Levi
Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives et f sa limite. Alors f est mesurable et

$$\int f_n d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f d\mu$$

Corollaire de B-L
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives, alors :

$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

Corollaire 2.1 :
Soit f mesurable positive. L'application

$$\begin{array}{rcl} \nu : \mathcal{B} & \to & [0, +\infty] \\ B & \mapsto & \displaystyle\int_B f d\mu = \int f 1_B d\mu \end{array}$$

est une mesure. On l'appelle la mesure de densité f par rapport à μ

Démonstration :
$\nu(B) \geq 0$
$\nu(\emptyset) = \int f 1_\emptyset d\mu = 0$

Si $B = \bigcup_n B_n$ avec $\forall n, B_n \in \mathcal{B}$ et $\forall n \neq m, B_n \cap B_m = \emptyset$, alors $1_B = \sum_n 1_{B_n}$.
Donc

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \int f(\sum_n 1_{B_n}) d\mu \\ &= \int \sum_n f 1_{B_n} d\mu \\ &= \sum_n \int f 1_{B_n} d\mu \\ &= \sum_n \nu(B_n) \end{aligned}$$

Théorème de Fatou
Soit $(f_n)_n$ une suite (quelconque) de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int \lim_n \inf f_n d\mu \leq \lim_n \inf \int f_n d\mu$$

Propriété vraie μ-preque partout
Soit P(x) une propriété relative aux éléments $x \in E$. On dit qu'elle est vraie μ-pp ssi

$$\mu(\{x \in E / P(x)\ est\ fausse\}) = 0$$

Théorème 2.1 :
S μ(B)=0, alors $\forall f$ mesurable,

$$\int_B f d\mu = 0$$

Conséquence : On peut remplacer le théorème de B-L par :
Si $0 \leq f_n \nearrow f$ μ-pp alors

$$\int f_n d\mu \nearrow \int f d\mu$$

3 Extension aux fonctions à valeurs réelles ou complexes :

Définition :
Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est μ-intégrable si

$$\int |f| d\mu < +\infty$$

On note $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurable. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
Si f,g $\in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\int |f+g| d\mu \leq \int |f| + |g| d\mu < +\infty$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu < +\infty$$

Intégration de fonctions intégrables :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Si f réelle, on a f=$f^+ - f^-$ avec $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = -\inf(f,0)$. |f| = $f^+ + f^-$. On pose

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

De même, si f complexe, f=Re(f) +i Im(f), on a |Re(f)|≤ |f| et |Im(f)| ≤ |f| et

$$\int f d\mu = \int Re(f) d\mu + i \int Im(f) d\mu$$

On voit facilement que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^1(\mu) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int f d\mu \end{array}$$

est linéaire.

Théorème 3.1 :
Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Démonstration :

$$\int f d\mu = e^{i\theta} \left| \int f d\mu \right|$$

$$\begin{array}{rcl} \left| \int f d\mu \right| & = & e^{-i\theta} \int f d\mu \\ & = & \int e^{-i\theta} f d\mu \in \mathbb{R}^+ \\ & = & \int Re(e^{-i\theta} f) d\mu + i \int \underbrace{Im(e^{-i\theta} f)}_{=0} d\mu \\ & \leq & \int |e^{-i\theta} f| d\mu \\ & \leq & \int |f| d\mu \end{array}$$

Théorème 3.2 (de la convergence dominée de Lebesgue) :
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes. Si
- $f_n \xrightarrow{\mu pp} f$
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu); \forall n, |f_n| \leq g \ \mu pp$

alors f_n et f $\in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int f_n d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f d\mu$$

Corollaire 3.1 (pour les séries) :
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes, tel que $\sum_n f_n(x)$ converge

pour μ-presque tout x.
S'il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que $\forall n, |\sum_{k \leq n} f_n| \leq g \ \mu pp$, alors on a $\sum_n f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

Démonstration :

$$h_n = \sum_{k \leq n} f_k$$

$$|h_n| \leq g \ \mu pp, h_n \to h = \sum f_n \ \mu pp$$

donc $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et :

$$\int f_n d\mu \to \int h d\mu = \int \sum_n f_n d\mu$$

Mais

$$\int h_n d\mu = \sum_{k \leq n} \int f_k d\mu \to \sum_n \int f_n d\mu$$

D'où le corollaire.

Lemme :
Soit $f \geq 0$ mesurable. Si $\int f d\mu < +\infty$ alors $f(x) < +\infty \ \mu pp$

Démonstration :

$$\begin{aligned} +\infty\mu(\{f = +\infty\}) = \int_{\{f=+\infty\}} +\infty d\mu \\ &= \int_{\{f=+\infty\}} f d\mu \\ &< \int f d\mu \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$

Corollaire 3.2 :
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes.
Si $\sum_n \int |f_n| d\mu < +\infty$ alors

1. $\sum_n f_n(x)$ est absoluement convergente pour μ-presque tout x
2. $$\sum f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$$
3. $$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

4 L'espace L^p

On remarque bien vite que pour des fonctions égales μpp, leurs intégrales sont toujours égales. On appelle $L^1(\mu)$ l'ensemble $\mathcal{L}^1(\mu)$ mais dans lequel on identifie deux fonctions égales μpp.

$L^1(\mu)$ est un espace vectoriel, il admet une mesure :

$$||f||_1 = \int |f| d\mu$$

$f_n \xrightarrow{L_1} f \Leftrightarrow ||f_n - f||_1 \to 0$ ie $\int |f_n - f| d\mu \to 0$

$\forall 1 \leq p < +\infty$

On définit $L^p(\mu)$ par l'ensemble des fonctions mesurables (à valeurs dans $\mathbb{C}$) tel que $\int |f|^p d\mu < +\infty$ (dans lequel on identifie 2 fonctions égales μpp).

On a une norme sur L^p tel que

$$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Espace $L^\infty(\mu)$

C'est l'ensemble des fonctions mesurables μpp bornées dans lequel on identifie 2 fonctions égales μpp.

$$\exists c < +\infty \ tq \ \mu(\{|f| > c\}) = 0$$

On définit

$$||f||_\infty = \inf\{c | \mu(\{|f| > c\}) = 0\}$$

qui est une norme sur L^∞

Théorème 4.1 (Inégalité de Hölder) :
Soient p et q$\geq$1 avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q est l'exposant conjugué de p).
On a alors $\forall f, g$ mesurables à valeurs réelles ou complexes.

$$\int |fg| d\mu < ||f||_p ||g||_q$$

Corollaire 4.1 :
Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ alors fg est intégrable ($\in L^1(\mu)$)

Si $f, g \in L^2(\mu)$

$$< f, g >= \int f\bar{g} d\mu \left(= \int_E f(x)\overline{g(x)} d\mu(x) \right)$$

Propriétés

1. $f \to < f, g >$ est linéaire $\forall g$
2. $< g, f >=< f, g >$
3. $\forall f, < f, f > \geq 0$
4. $< f, f >= 0 \Rightarrow f = 0 \mu pp \Rightarrow f = 0$ dans $L^2(\mu)$

La norme associée à ce produit scalaire

$$||f|| = \sqrt{< f, f >} = \left(\int |f| d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

est la norme de $L^2(\mu)$

Troisième partie
Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit Y un ensemble de paramètres. Soit $f : E \times Y \to \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall y \in Y, x \to f(x, y)$$

soit μ-intégrable.
On peut donc définir pour tout $y \in Y$

$$F(y) = \int_E f(x, y) d\mu(x)$$

On dit que c'est une intégrale dépendant du paramètre $y \in Y$

Théorème 0.2 (de continuité) :
Supposons que Y est un espace métrique. Si

1. Si pour μ presque tout x, $y \to f(x, y)$ est continue au point $y_0 \in Y$
2. $\exists V$ ouvert de Y ; $y_0 \in V$ et une fonction $g \in L^1(\mu)$ tel que

$$\forall y \in V, |f(x, y)| \leq g(x) \mu pp$$

alors F est continue au point y_0

Démonstration :
Soit $y_n \to y_0$ et à partir d'un certain rang n_0, $y_n \in V$
- $f(x, y_n) \to f(x, y_0)$ μpp
- $|f(x, y_n)| \leq g(x)$ μpp.

On applique le TCD, on trouve le résultat.

Corollaire 0.2 :
Si :

1. Si pour μ presque tout x, $y \to f(x, y)$ est continue.
2. $\forall y \in Y$, $\exists V$ ouvert de Y ; $y \in V$ et une fonction $g \in L^1(\mu)$ tel que

$$\forall y \in V, |f(x, y)| \leq g(x) \mu pp$$

alors F est continue en y

Théorème 0.3 (de dérivabilité) :
Supposons que Y est un espace ouvert de $\mathbb{R}$. Si

1. Si pour μ presque tout x, $\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}$ existe
2. $\exists V$ ouvert de Y ; $y_0 \in V$ et une fonction $g \in L^1(\mu)$ tel que

$$\forall y \in V, y \neq y_0, \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} \right| \leq g(x) \mu pp$$

alors F est dérivable au point y_0 et

$$F'(y_0) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) d\mu(x)$$

Démonstration :
Montrons que si $h_n \to 0$, $\frac{F(y_0+h_n)-F(y_0)}{h_n}$ converge vers la limite décrite.
Pour n assez grand, $y_0 + h_n \in V$

$$\frac{F(y_0+h_n)-F(y_0)}{h_n} = \int \frac{f(y_0+h_n)-f(y_0)}{h_n} d\mu(x)$$

1. $\frac{f(y_0+h_n)-f(y_0)}{h_n} \xrightarrow{\mu pp} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$
2. $\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right| \leq g(x) \mu pp$

Conclusion vient du TCP.

Corollaire 0.3 :

1. Si pour μ presque tout x, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ existe
2. Si $\forall y \in Y$, $\exists V$ ouvert de Y ; $y_0 \in V$ et une fonction $g \in L^1(\mu)$ tel que

$$\forall z \in V, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, z)\right| \leq g(x) \mu pp$$

alors F est dérivable et

$$F'(y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$$

Quatrième partie

Mesures ayant une densité

Soit (E,$\mathcal{B}, \mu$) un espace mesuré.

Définition :
Soit ν une mesure sur (E,$\mathcal{B}$) et f mesurable $\geq$0. On dit que ν admet la densité f par rapport à μ ssi :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \nu(B) = \int_B f d\mu$$

Rappel :
On dit qu'une mesure est σ-finie ssi $\exists (B_n)_n$ de parties mesurables tel que

1. $\forall$n, $\mu(B_n) < +\infty$
2. $E = \bigcup_n B_n$

Théorème 0.4 (d'unicité de la densité) :
Supposons μ σ-finie.

1. Soient f et g deux fonctions mesurables réelles, intégrables ou positives, alors

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B f d\mu \leq \int_b g d\mu \Leftrightarrow f \leq g \ \mu pp$$

2. Si ν admet une densité par rapport à μ (σ-finie) alors celle-ci est unique à une égalité μpp près.

Démonstration : 1. Supposons

$$\forall B \in \mathcal{B} n \int_B f d\mu \leq \int_B g d\mu$$

Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{B}$ tel que $\mu(A_n) < +\infty$ et $A_n \nearrow E = \bigcap_n A_n$ Soit $C_n = A_n \cap (g \leq n) \cap (f > g)$

$$C_n \nearrow E \cap (g \leq n) \cap (f > g) = (f > g)$$

On a

$$\int_{C_n} f d\mu \leq \int_{C_n} g d\mu \leq n\mu(C_n) < +\infty$$

On donc soustraire :

$$\int_{C_n} (f - g) d\mu \leq 0$$

Or, sur C_n, f-g>0, donc $\int_{C_n} (f - g) d\mu = 0$ et f-g>0 sur C_n.
Donc $\mu(C_n) = 0 \ \forall n$.
$C_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (f < g)$ donc $\mu(f > g) = \lim \mu(C_n) = 0$

2. Si ν admet pour densité f et g alors

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B f d\mu = \nu(B) = \int_B g d\mu$$

Donc $f \leq g$ μpp et $g \leq f$ μpp

Théorème 0.5 (de Radon Nikodynn (admis)) :
Supposons μ σ-finie. Soit ν une mesure sur (E,$\mathcal{B}$). On a équivalence entre les deux propositions :

1. ν admet une densité à μ

2. $\forall B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$

On dit alors que ν est absolument continue par rapport à μ. On note $\nu << \mu$

On dit que ν équivaut à μ (et on note $\nu \sim \mu$) ssi $\mu << \nu$ et $\nu << \mu$.

Théorème 0.6 (d'intégration par rapport à une mesure ayant une densité) :
Si ν admet la densité f par rapport à μ alors :

1. $\forall g$ mesurable >0, $\int d\nu = \int gfd\mu$
2. $\forall g$ mesurable à valeurs réelles ou complexes : g est ν intégrable $\Leftrightarrow$ gf est μ intégrable

et alors

$$\int gd\nu = \int gfd\mu$$

Démonstration :
A FAIRE

Cinquième partie

Mesures image et théorème de transfert

Soient (E,$\mathcal{B},\mu$) un espace mesuré, (F,$\mathcal{C}$) un espace mesurable et $\phi : E \to F$ mesurable.

Définition :
On appelle mesure image de μ par ϕ et on note μ_ϕ la mesure sur (F,$\mathcal{C}$) définie par :

$$\forall C \in \mathcal{C}, \mu_\phi(C) = \mu(\phi^{-1}(C))$$

On vérifie aisément que μ_ϕ est une mesure.
- $\mu(\emptyset) = \mu(\phi^{-1}(\emptyset)) = 0$
- Si $C = \bigcap_n C_n$ disjoints 2 à 2, $\phi^{-1}(C) = \bigcap_n \phi^{-1}(C_n)$ disjoints 2 à 2.

$$\mu_\phi(C) = \mu(\bigcap_n \phi^{-1}(C_n)) = \sum_n \mu(\phi^{-1}(C_n)) = \sum_n \mu_\phi(C_n)$$

En théorie des probabilités, on utilise constamment cette notion, avec les notations et définitions suivantes :
Soit $(\Omega, a, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(\Upsilon, \mathcal{B})$ un espace mesurable.
Soit $X : \Omega \to \Upsilon$ une v.a. (ie une appl. mesurable).
La mesure image sur $\mathbb{P}$ par X, $\mathbb{P}_X$, s'appelle la loi de probabilité de X. Elle est définie sur $(\Upsilon, \mathcal{B})$.

$$\begin{aligned}\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{P}(B) &= \text{"}\textit{Probabilité que } X \textit{ appartienne à } B\text{"}\\ &= \mathbb{P}(X \in B)\\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\})\\ &= \mathbb{P}(X^{-1}(B))\end{aligned}$$

Théorème 0.7 (de transfert : intégration par rapport à une mesure image) :
Soit $\phi : E \to F$ mesurable, et μ_ϕ la mesure image de μ par rapport à ϕ.
Soit $g : F \to \mathbb{C}$ mesurable.

1. Si g est positive :
$$\int_F g d\mu_\phi = \int_E g \circ \phi d\mu$$
2. Si g est quelconque : g est $\mu_\phi$èintégrable $\Leftrightarrow$ g$\circ\phi$ est μ-intégrable et alors
$$\int_F g d\mu_\phi = \int_E g \circ \phi d\mu$$

Sixième partie

Espace mesuré produit - Théorème de Fubini

Soient $(E_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$,...,$(E_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$ n espaces mesurés.

1 Espace mesurable produit

1. $E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in E_i, i \in \{1, ..., n\}\}$
2. La tribu produit, notée $\mathcal{B} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est définie ainsi :
   On appelle pavé mesurable toute partie B de E de la forme $B = B_1 \times ... \times B_n,\ B_i \in \mathcal{B}_i$

   On appelle ε l'ensemble des pavés mesurables.
   – ε est stable par $\cap_f$
   – $E \in \varepsilon$
   La trbu produit $\mathcal{B} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ est la tribu engendrée par ε :
   $$\mathcal{B} = \sigma(\varepsilon)$$
3. La mesure produit :

   Théorème 1.1 (admis) :
   Il existe sur $(\prod_{i=1}^{n} E_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i)$ une et une seule mesure μ qui vérifie :
   $$\forall B = B_1 \times ... \times B_n \in \varepsilon, \mu(B) = \mu_1(B_1) \times ... \times \mu_n(B_n)$$
   On dit que μ est la mesure produit des mesures μ_i et on a note
   $$\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$$

Théorème 1.2 (de Fubini) :
Considérons l'espace produit $(E, \mathbb{B}, \mu) = (\prod_{i=1}^{n} E_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i)$. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable.

1. Si f est positive :
   $$\int f d\mu = \int_{E_n} \left[\int_{E_n n-1} \left[... \left[\int_{E_1} f(x_1, ..., x_n) d\mu_1(x_1) \right] ... \right] d\mu_{n-1}(x_{n-1}) \right] d\mu_n(x_n)$$
   et de plus, l'ordre d'untégration n'intervient pas, i.e. on peut remplacer dans la formule i par $\sigma(i)$ où σ est n'importe quelle bijection de $\{1, .., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$
2. Si f est quelconque, alors la formule et la remarque précédentes sont encore vraies dès que f est μ-intégrable, qui se calcule grace à 1).