

1 Méthodes itératives

Pour les méthodes directes, on a théoriquement la solution exacte \bar{x} .
Avec les méthodes itératives, on construit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$.

Ce qui nous intéresse avant tout, c'est

1. convergence de la méthode
2. Vitesse de convergence
3. Coût de la méthode

1.1 Critère d'arrêt

On définit le vecteur résidu :

$$\begin{aligned} r(x) &= B - Ax \\ r(x_k) &= B - Ax_k = r^{(k)} \end{aligned}$$

Comme on l'a vu dans l'exercice 3.1 :

$$\frac{\|\bar{x} - x_k\|}{\|\bar{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|B\|}$$

Ainsi, si A est bien conditionné, le critère d'arrêt peut être :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|B\|} < \varepsilon$$

avec ε posé (en général, assez petit).

1.2 Avant-propos sur les méthodes itératives

On prend un système qu'on écrit sous la forme $Ax=b$.

On pose $A = M - N$, avec $\det(M) \neq 0$. Ainsi :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

En posant $M^{-1}N = B$ et $c = M^{-1}b$, on a :

$$x^{(k+1)} = Bx^k + c \tag{1}$$

Définition :

Soit \mathcal{M} un espace métrique (associé à ρ). L'application $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est contractante si :

$$\exists 0 < \alpha < 1; \forall (x, y) \in \mathcal{M}^2, \rho(f(x), f(y)) < \alpha \rho(x, y)$$

Théorème (du point fixe) :

Si \mathcal{M} est complet et f contractante :

$$\exists ! x^*; f(x^*) = x^*$$

De plus, si on pose $x_{n+1} = f(x_n)$, alors

$$x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

Corollaire :

Si $\|B\| < 1$, la méthode (1) converge.

Démonstration :

On prend $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Soit $f(x) = Bx + c$.

$$\begin{aligned} \forall (x, x'), \|f(x) - f(x')\| &= \|B(x - x')\| \\ &\leq \|B\| \|x - x'\| \end{aligned}$$

$$\|B\| < 1 \Rightarrow f \text{ contractante} \Rightarrow \exists ! x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

1.3 Méthode de Jacobi

$A = L + D + U$, $L \in LT$ à diagonale nulle, $U \in UT$ à diagonale nulle, $D = \text{diag}(A)$.

On suppose que $\det(D) \neq 0$ (sinon, pivotage).

$$\begin{aligned} Dx &= -(L + U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Si on pose $B = -D^{-1}(L + U)$ et $c = D^{-1}b$ on retrouve l'égalité (1). D'où la méthode de Jacobi :

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Définition :

A est à diagonale strictement dominante s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq \alpha |a_{ii}|$$

pour tout i de 1 à n , ou ce qui est équivalent à dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Théorème :

Si A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Jacobi converge.

Démonstration :

Si $B = -D^{-1}(L + U)$, comme montré dans l'exercice 3.4, $\|B\| < 1$. Donc la méthode converge d'après le théorème cité au-dessus.

1.4 Méthode de Gauss-Seidel

Dans la méthode de Jacobi

$$\|\bar{x} - x^{(k+1)}\| \leq \|\bar{x} - x^{(k)}\|$$

Dans cette méthode, on recalcule entièrement le vecteur x^k à chaque fois.

Au lieu de cela, on peut aussi ne calculer qu'une seule composante, et la réutiliser tout de suite après pour le calcul de la composante suivante.

On a donc la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} Dx^{(k+1)} &= -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \\ (D + L)x^{(k+1)} &= -Ux^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} &= -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b \end{aligned}$$

En posant $B = -(D + L)^{-1}U$ et $c = (D + L)^{-1}b$, on retrouve (1)

Théorème :

Si A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Gauss-Seidel converge.

1.5 Méthode de relaxation

La méthode de relaxation permet de faire converger les méthodes itératives que l'on connaît déjà. Par exemple, si x_{GS}^k est calculé par la méthode de Gauss-Seidel, la méthode de relaxation associée sera, pour $\omega > 0$:

$$x^{k+1} - x^k = \omega(x_{GS}^{k+1} - x_{GS}^k)$$

Théorème :

La méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$. On appelle la méthode :

- Sur-relaxation si $\omega > 1$
- Sous-relaxation si $0 < \omega < 1$

1.6 Méthode de descente

On prend le système $Ax=b$, avec A symétrique défini positive.

Théorème :

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ solution de } Ax = b &\Leftrightarrow \bar{x} \text{ minimum de } J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \\ &\Leftrightarrow \bar{x} \text{ minimum de } E(x) = (Ae(x), e(x)) \text{ avec } e(x) = x - \bar{x} \end{aligned}$$

Démonstration :

On pose $\langle u, v \rangle = (Au, v)$. «.,.» est un produit scalaire, car A est symétrique définie positive.

Alors $\langle x - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x} \Leftrightarrow e(x) = 0$

1 \Leftrightarrow 3 car :

$$\begin{aligned} e(x) = 0 &\Leftrightarrow E(x) \text{ atteint son minimum} \\ &\Leftrightarrow E(x) = 0 \end{aligned}$$

2 \Leftrightarrow 3 car :

$$\begin{aligned} E(x) &= (A(\bar{x} - x), \bar{x} - x) \\ &= (A\bar{x}, \bar{x}) - (Ax, \bar{x}) - (A\bar{x}, x) + (Ax, x) \\ &= (b, \bar{x}) - (x, A\bar{x}) - (b, x) + (Ax, x) \quad (b = A\bar{x} \text{ et car } A \text{ symétrique}) \\ &= (b, \bar{x}) - (x, b) - (b, x) + (Ax, x) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)\right) + (b, \bar{x}) \end{aligned}$$

$$\bar{x} \text{ minimise } E(x) \Leftrightarrow \bar{x} \text{ minimise } \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

Principe de la méthode

On cherche $E(X)=0$.

On veut donc $E(x^{(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ avec $E(x^{(k+1)}) < E(x^{(k)})$

On pose $A = V^T D V$.

D a les valeurs propres de A sur la diagonale et est diagonale.

On pose $z=e(x)$.

$$E(x) = (Az, z) = z^T A z = z^T V^T D V z$$

On pose $\omega = Vz$.

$$E(x) = \omega^T D \omega$$

Si on cherche $E(x)=k$ constante :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \omega_j^2 = k$$

On retrouve une équation d'ellipsoïde. Pour $n=2$, vu que A est définie positive, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, donc on peut poser $\lambda_1 = \frac{1}{c_1^2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{c_2^2}$. Si $k > 0$, on a

$$\frac{\omega_1^2}{kc_1^2} + \frac{\omega_2^2}{kc_2^2} = 1$$

ce qui est bien une équation d'ellipsoïde. La méthode consiste donc à prendre des équations d'ellipsoïdes centrés en \bar{x} qui deviennent de plus en plus petits.

On peut poser $x_{k+1} - x_k = \alpha_k p_k$. Quels p_k doit-on éviter ?
Si on prend un vecteur sur la tangente de l'ellipse, on l'éloigne de la solution. On évite donc de prendre un vecteur de la sorte.

Mise en place

Supposons qu'on a choisi p_k en direction de la descente.

Quel est le choix optimal de α_k ?

On cherche à minimiser $J(x^{(k+1)})$ en tant que fonction de α_k .

A REPREDRE

Donc

$$\alpha_k = \frac{(r_k, p_k)}{(Ap_k, p_k)}$$

On suppose $(p_k, r_k) \neq 0$ (Sinon, on ne converge jamais)

$$\begin{aligned} \text{grad}(J(x)) &= \text{grad} \left(\frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x) \right) \\ &= \text{grad} \left(\frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right) \\ &= Ax - b = -r(x) \end{aligned}$$

Notamment, $\text{grad}(J(x^k)) = -r^k$

Méthode de gradient à paramètre optimal

$$\begin{aligned} p^k &= r^k \\ X^{k+1} &= X^k + \frac{\|r^k\|^2}{\langle r^k, Ar^k \rangle} r^k \end{aligned}$$

Si $\text{cond}_2(A) = 1$, la méthode de gradient converge en une itération.

Sous-Espace de Krylov

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_k(r, A) &= \text{span}\{C, Ac, \dots, A^{k-1}c\} \\ &= \{y = \lambda_1 c + \dots + \lambda_k A^{k-1}c \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k\} \end{aligned}$$