Table des matières

Première partie
Automatique

1 Introduction

Objet du cours : Analyser et faire une synthèse d'un système physique (soumis aux lois de la dynamique, et suivant des équations).
En automatique, *un système* (S) est caractérisé par deux grandeurs :
- Les entrées, qui s'appliquent à S et agissent sur son état. Il y en a de 2 types :
  - Sur lesquels on peut agir (les forces)
  - Sur lesquels on ne peut pas agir (frottements, perturbations...)
- Les sorties, qui sont des grandeurs élaborées par S sous l'action des entrées.

Le but est de déterminer les entrées qu'il faut pour avoir les résultats désirés.

Exemple :

Pour un avion, quelles entrées (vitesse, altitude...) faut-il appliquer pour suivre une trajectoire donnée ?

On identifie spécialement deux classes :
- Les systèmes linéaires ou non linéaires
- Les systèmes variants ou invariants (sous-entendu : dans le temps)

Définition:

Soit S un système. S est dit linéaire si l'application entrée/sortie est linéaire, ie :

$$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda u(t) + \mu v(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \lambda y(t) + \mu z(t)$$

$$v(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow z(t)$$

S est dit invariant si :
y(t) est la sortie (ou la réponse) du système S par l'action de l'entrée u(t), pour $t \in$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad u_\tau(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y_\tau(t)$$

$[t_0, T[$.
Avec $\tau > 0$ et $u_\tau : t \mapsto u(t - \tau)$

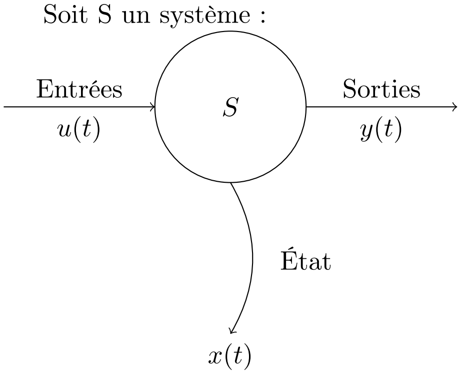
Exemple :

Soit S donné par :
— $y'(t) = u(t)$: linéaire invariant
— $y^2(t) + y''(t) = u(t)$: non linéaire invariant
— $ty'(t) + ky''(t) = u(t) + u'(t)$: linéaire variant

Il y a deux types d'études :
— l'étude externe : elle n'est basée que sur les entrées et les sorties
— l'étude interne : elle utilise l'état de S chaque instant t
<u>Le but du cours sera donc d'étudier :</u>
— La contrôlabilité : aller d'un point initial à un point final
— L'observabilité : mesurer entrées et sorties pour trouver l'état $x(t_0)$ de S
— La stabilité : le système est-il stable ? Est-il possible de le stabiliser ?

2 Représentation d'état

Soit S un système :



— $u(t)$: les entrées (commandes ou contrôles) avec m entrées : $u(t) \in \mathbb{R}^m$
— $y(t)$: les sorties, avec p sorties : $y(t) \in \mathbb{R}^p$
— $x(t)$: vecteur d'état : n variables indépendantes pour définir l'état de S à chaque instant $t \in [t_0, T[$.
L'équation d'état est de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

L'équation de sortie :

$$y(t) = h(x(t))$$

Exemple :

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t),\ \ x(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = 5x(t),\ \ y(t) \in \mathbb{R}$$

m=n=p=1

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) + u_1(t)x_2^2(t) \\ x_1(t)x_2(t) + u_2^2(t) \end{pmatrix}$$
$$y(t) = e^{x_1(t)x_2(t)}$$

Remarque : Si $u(t) = cst = k$, l'équation d'état est de la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), k)$.
Si $u(t) = \alpha x(t)$ une fonction de l'état, alors $\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha x(t)$. On obtient donc un système dynamique de la forme :

$$\dot{z}(t) = F(z(t))$$

Pour une entrée donnée $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ et $x(t_0)$ une condition initiale, on note $x_u(t, x(t_0))$ la solution à l'instant t de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)$ de condition initale $x(t_0)$.
Pour simplifier, on marque en général

$$x(t) = x_u(t, x(t_0))$$

Définition:

- Un état z est dit accessible à partir d'un état inital $x(t_0)$ sous l'entrée $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ si $z = x_u(t, x(t_0))$ pour un certain $t \in [t_0, T]$.
- On appelle *ensemble d'accessibilité à partir de $x(t_0)$ sous l'action de u* l'ensemble :

$$\mathcal{A}_u(x(t_0), u) = \{x_u(t, x(t_0)),\ t \in [t_0, T]$$

- S est dit contrôlable à partir de $x(t_0)$ sur l'espace d'état $E \subset \mathbb{R}^n$ si :

$$\forall z \in E;\ \exists u : [t_0, T] \mid z = x_u(t, x(t_0))$$

- S est dit complètement contrôlable sur E si $\forall z_1, z_2 \in E$, il existe $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$ qui permet de transformer S de l'état z_1 à z_2, c'est-à-dire :

$$\exists t \in [t_0, T];\ z_2 = x_u(t, z_1)$$

Exemple :

$S : \dot{x}(t) = (x(t) + u(t))^2$, avec $x(t_0)$ donné, $x(t) \in E \subset \mathbb{R}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.
S est-il complètement contrôlable sur $\mathbb{R}$?

$\dot{x}(t) \geq 0$, donc $x(t)$ ne peut que croître depuis $x(t_0)$.
Par exemple, l'état $z_2 = x(t_0) - 1$ n'est jamais accessible à partir de $x(t_0)$, $\forall u$. S n'est donc pas complètement controlable.

Rappel :

- La solution à l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, A matrice (n, n) et B matrice (n, m), toutes deux constantes, est :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}Bu(s)ds$$

- Pour calculer e^A :
  - On utilise la définition :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

- Si $MN = NM$, alors $e^{M+N} = e^M e^N$
- Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ et donc $e^A = Pe^D P^{-1}$
- On utilise la tranformée de Laplace :

$$\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-} stf(t)dt$$

— Propriétés de la transformée de Laplace :

- $\mathcal{L}$ est linéaire.
- Elle permet de passer d'une équation différentielle à une équation algébrique :

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

- Si $f(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$:

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f)(s)$$

- À savoir :

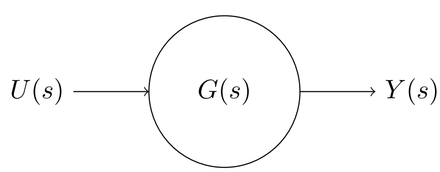
$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$
$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$
$$\mathcal{L}(e^{kt}) = \frac{1}{s - k}$$

2.1 Fonction (ou matrice) de transfert

Définition:

La fonction (ou matrice) de transfert d'un système S est une relation Entrée / Sortie donné en variable de Laplace :

$$Y(s) = G(s)U(s) \Leftrightarrow$$



Propriété:

Si $S : y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + A_0 y(t) = u(t)$, avec $y(t) \in \mathbb{R}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$, a_i constante réelle, $i = 0, ..., n-1$. On suppose que $y^{(n-1)}(0) = ... = y(0) = 0$. Alors :

$$G(s) = \frac{1}{s^n + ... + a_1 s + a_0}$$

Les pôles de $G(s)$ sont les zéros du dénomniateur.

Exemple :

S est un système donné par sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ s^2Y(s) - Y(s) &= U(s) \\ y''(t) - y(t) &= u(t) \end{aligned}$$

2.2 Observabilité - Observateur

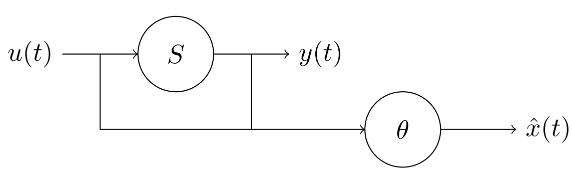
Définition: Observable

Soit S un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, $t \in [t_0, T]$.
S est dit observable à l'instant t_0 si connaissant toutes les entrées et les sorties sur $[t_0, T]$, on peut déterminer l'état initial $x(t_0)$ de façon unique.

Définition:

Un observateur pour S est un système auxiliaire qui a pour entrée $u(t)$ et $y(t)$ et pour sortie $\hat{x}(t)$ un état estimé de S.

Remarque : L'idéal est que $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ (erreur entre l'état réel et l'état estimé) tende vers 0.



2.3 Points d'équilibre - Stabilité

Définition: Stabilité

Soit S donné par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

L'état $x(t_0)$ est stable si, $\forall x_1$, état proche de x_0, la trajectoire $x_u(t, x_1)$ reste proche de $x_u(t, x_0)$ $\forall t$.

Définition: Point d'équilibre

On dit que (x_0, u_0) est point d'équilibre si $f(x_0, u_0) = 0$.

Deuxième partie

Systèmes linéaires invariants

Soit S donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \\ x(t_0) & & \text{donné} \end{cases}$$

A,B,C matrices à coefficients constants.
Notation : S donné par (A,B,C).

1 Critère de Kalman - Controlabilité

Soit S d'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^n$.
On sait résoudre explicitement cette équation, mais les calculs sont longs.

✑ *Lemme:*

Pour toute matrice (n, n) à coefficients constants, il existe des fonctions salaires non nulles $\gamma_i(t)$ vérifiant :

$$e^{At} = \gamma_0(t)I + \gamma_1(t)A + ... + \gamma_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Démonstration :
On sait que toute matrice annule son polynôme caractéristique (Théorème de Cayley-Hamilton).

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$
$$\Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I = 0$$

$\Rightarrow$ A^n peut s'exprimer en fonction de $I, A, ..., A^{n-1}$.

Or, $A^{n+1} = A^n$, donc $\forall j \geq n$, A^j s'exprime en fonction de $I, A, ..., A^{n-1}$.
D'où :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \gamma_0(t)I + ... + \gamma_{n-1}(t)A^{n-1}$$

✑ *Théorème: de Kalman*

$S : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est complètement contrôlable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\text{rang}(B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B) = n$$

Démonstration :
On cherche à partir d'un état initial $x(t_0)$ à atteindre un état final z_2.

$$z_2 = x_u(t, x(t_0)) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}Bu(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
e^{-At}\left(z_2 - e^{A(t-t_0)}x(t_0)\right) &= \int_{t_0}^{t} e^{-As}Bu(s)ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\gamma_0(-s)I + ... + \gamma_{n-1}(-s)A^{n-1}\right)Bu(s)ds \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} B & AB & ... & A^{n-1}B \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} \gamma_0(-s)u(s)ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} \gamma_{n-1}(-s)u(s)ds \end{pmatrix}}_{v(t)}
\end{aligned}
$$

$\forall \tilde{x}(t)$, si rang$\phi = n$, alors $\exists! v(t) | e^{-At}\tilde{x}(t) = \phi v(t)$. La réciproque est vraie.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{rg}(B \ AB) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Donc complètement contrôlable.

Propriété:

Il y a équivalence entre les trois propositions :

1. S complètement contrôlable sur $\mathbb{R}^n$
2. $\text{rang}(B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B) = n$
3. S est contrôlable depuis l'origine.

2 Critère de Kalman - Observabilité

2.1 Théorème

Définition: Complètement observable

S est dut complètement observable si S est observable $\forall t_0 > 0$.

Théorème: de Kalman

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$$

S est complètement observable si et seulement si $\text{rang}(C \ CA \ ... \ CA^{n-1}) = n$

☕Exemple :

$$S : \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & ax(t) + bu(t) \\ y(t) & = & cx(t) \end{array}\right.$$

$a, b, c, x(t), y(t), u(t) \in \mathbb{R}$.
S complètement contrôlable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{rang}(b) = 1 \Leftrightarrow b \neq 0$
S complètement observable $\Leftrightarrow \text{rang}(c) = 1 \Leftrightarrow c \neq 0$

2.2 Observateur de Luenberger

Soit S un système linéaire invariant (A,B,C), $x(t_0)$ donné.

θ observateur donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & (A - LC)\hat{x}(t) + (B \ \ L)\begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}v(t) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) \end{array}\right.$$

On voudrait $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'approche le plus possible de 0.

$$\begin{array}{rcl} \dot{e}(t) & = & \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ & = & A(x(t) - \hat{x}(t)) - Ly(t) + LC\hat{x}(t) \\ & = & Ae(t) - LCx(t) + LC\hat{x}(t) \\ & = & \underbrace{(A - LC)}_{M} e(t) \end{array}$$

On sait que $\dot{e}(t) = Me(t)$ est asymptotiquement stable en O si et seulement si M est diagonalisable et

$$\max_{\lambda \in Sp(M)} \Re(\lambda) < 0$$

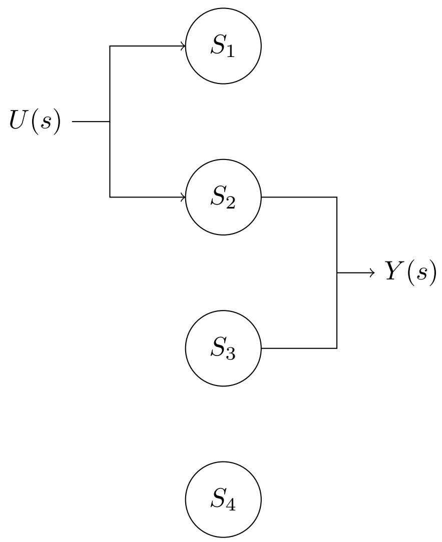
🛈Propriété:

Si S est complètement obersable, alors L existe.

2.3 Critère des valeurs propres

On s'intéresse au système suivant, défini par bloc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{pmatrix} A_1 & \times & \times & \times \\ 0 & A_2 & \times & \times \\ 0 & 0 & A_3 & \times \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} 0 & C_2 & C_3 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{array}\right.$$



S_1 est controlable non observable
S_2 est controlable observable
S_1 est non controlable observable
S_1 est non controlable non observable

Propriété:

La matrice de transfert de S est égale à la marice de transfert de S_2, controlable et observable.

Remarque : Dans $G(s)$, on peut perdre de l'information sur les observations qui ne sont pas contrôlable ou observable

3 Stabilisation

Rappel :

$\dot{x} = Ax$ stable en 0 : $\max_{\lambda \in Sp(A)} \Re(\lambda) \leq 0$
Asymtotiquement stable : $\max_{\lambda \in Sp(A)} \Re(\lambda) < 0$

Lemme: de Lyapounov

$\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable en 0 si et seulement si l'équation $AX - {}^tXA = P$, avec P symétrique définie positive, admet une solution symétrique définie négative.

Exercice : Montrez que $X = \int_0^{+\infty} e^{As} P e^{{}^tAs} ds$ résoud l'équation

On aimerait trouver $u(t) = Kx(t)$, fonnction linéaire de $x(t)$ avec K matrice à coefficients constants tel que S soit asymptotiquement stable en 0.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Ax(t) + BKx(t) \\ &= (A + BK)x(t) \\ &= Mx(t) \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver K tel que :

$$\max_{\lambda \in Sp(A+BK)} \Re(\lambda) < 0$$

Propriété:

Si S est complètement controlable sur $\mathbb{R}^n$, alors $\exists K = (k_1, ..., k_n)$ tek que $u = Kx$ stabilise asymptotiquement S à l'origine.

4 Linéarisation d'un système non linéaire

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t)) \end{cases}$$

Définition:

$(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un point d'équilibre pour S si $f(x_0, u_0) = 0$

On note

$$\varepsilon = \{(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m ; f(x_0, u_0) = 0\}$$

On fait un DL d'ordre 1 (en supposant f et h de classe $\mathcal{C}^1$) :

Définition:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = & Az(t) + Bu(t) \\ \tilde{y}(t) & = & Cz(t) \end{cases}$$

est le linéarisé de Z en $(x_0, u_0) \in \varepsilon$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0), \ B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0), \ C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0)$$

$$z(t) = x(t) - x_0, \ v(t) = u(t) - u_0, \ \tilde{y} = y(t) - h(x_0)$$

Définition:

S non linéaire, est dit pseudo-linéaire si les matrices A, B et C ne dépendent pas de $(x_0, u_0) \in \varepsilon$.

Définition:

(x_0, u_0) point d'équilibre de S est dit critique si la matrice $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)$ admet au moins une valeur propre imaginaire pure

➾ *Théorème: de Hartman*

La stabilité du linéairisé est conservé pour le système complet dans le voisinage du point considéré

Troisième partie

Systèmes affines

1 Définition et notation

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & F(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i(x(t)) \\ y(t) & = & h(x(t)) \end{array} \right.$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \; u(t) \in \mathbb{R}^m, \; y(t) \in \mathbb{R}^p$$

On note $S : (F, G, h)$

2 Condition nécessaire de controlabilité

Définition: Crochets

Soient $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note :

$$[F, G](x) = G^*(x)F(x) - F^*(x)G(x)$$

où $F^*(x)$ est la matrice jacobienne de F en x (de même pour $G^*(x)$).

Définition: Δ

Soit $S : (F, G, h)$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\Delta(z) = \text{Vect}(F(z), G_i(z), i = 1, ..., m, \text{ tous les crochets de } F \text{ et } G_i \text{ en } z)$$

Proposition:

Une condition nécessaire pour que S soit controlable à partir de $z \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\dim \Delta(z) = n$$

Proposition:

Soit $S : (F, G, h)$. Si S vérifie la condition du rang en $z \in E$ (ie, $\dim \Delta(z) = n$), alors l'ensemble d'accessibilité depuis z (noté $Acc(z)$) est d'intérieur non vide.

3 Quelques théorèmes de controlabilité pour un système non linéaire (admis)

Théorème: Pour les systèmes affines sur un compact

Soit S un système linéaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i(x(t))$$

$$x(t) \in E \subset \mathbb{R}^n$$

Si E est compact, la condition du rang est nécessaire et suffisante pour la controlabilité du système sur E.

Théorème: Pour les systèmes symétriques

Soit S un système de la forme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i(x(t))$$

$$u_i(t) \in \mathbb{R},\ x(t) \in E \subset \mathbb{R}^n$$

Si la condition du rang est véirfiée en tout point $z \in \mathbb{R}^n$, alors S est complètement controlable sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème:

Soit S un système affine. S est complètement contrôlable sur $E \subset \mathbb{R}^n$ si :

1. La condition du rang est vérifiée en tout $z \in E$
2. Les trajectoires de $\dot{x}(t) = F(x)$ sont périodiques.

Quatrième partie
Systèmes affines conservatifs (ou dissipatifs)

1 Définitions

Soit S un système affine (F, G, h).

Définition: Fonction d'énergie

Une fonction d'énergie de S

$$E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

est une fonction minorée qui vérifie :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}^n | E(x) \leq c\} = \text{est un fermé borné de } \mathbb{R}^n$$

Définition:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite propre si l'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}$

Définition:

Un système affine $S : (F, G, h)$ est dit conservatif (respectivement dissipatif) s'il existe une fonction $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n | v(x) \leq c\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$
2. $\text{grad}(v(x)).F(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
   (Respectivement, $\text{grad}(v(x)).F(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$)

2 Stabilitation

Théorème:

Soit un système affine conservatif (ou dissipatif). Toutes les commandes feedback :

$$u(t) = -r(x)\frac{dv}{dt}(x(t))G(x)$$

où $r(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ stabilisent le système en x_0, état d'équilibre.

Théorème:

On considère :

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \frac{\partial v}{\partial x} G(x) = 0 \right\} \setminus \{x_0\}$$

et S un système affine conservatif. Si :

$$\forall z \in W,\ \dim\left(\text{vect}\{F(z), G(z), [F,G](z), [F,[F,G]](z), ...\}\right) = n$$

alors la commande $u(t) = -\frac{\partial v}{\partial x} G(x)$ stabilise asymptotiquement S en x_0