Table des matières

I Éléments finis 2

1 Formulation variationnelle 2

1.1 Choix de l'espace . . . 2
1.2 Recherche de solution . . . 2
1.3 Existence-unicité d'une solution de (PV) . . . 2

2 Approximation numérique du problème variationnel 3

2.1 Choix de V_h . . . 3
2.2 Fonctions de base . . . 3
2.3 Problème discrétisé . . . 3
2.4 Détermination des inconnues $(\xi_j)_{j=1,\dots,n-1}$ . . . 3

II Petits rappels d'analyse fonctionnelle 4

1 Rappels sur les distributions 4

2 Espaces de Sobolev 4

2.1 Liens entre $\mathcal{D}(\omega)$, $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ . . . 4

3 Théorèmes de trace 7

4 Généralisation de Sobolev 7

5 Quelques résultats essentiels en analyse hilbertienne 8

6 Théorème de Lax-Milgram et problème variationnel abstrait 8

6.1 Ecriture sous forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie . . . 9

Première partie
Éléments finis

Problème modèle : On va considérer une EDP elliptique (basée sur le laplacien Δ, somme des dérivées secondes)

$$(P)\left\{\begin{array}{ccc} -u''(x) & = & f(x) \\ u(0) & = & u(1)=0 \end{array}\right. \quad \forall x \in \Omega =]0,1[$$

1 Formulation variationnelle

Cette formulation permet de "baisser" l'ordre de dérivation (via la formule de Stroke ou une IPP).

1.1 Choix de l'espace

On va définir l'espace V :

$$V = \{u \in L^2(\Omega),\ u' \in L^2(\Omega),\quad \underbrace{u(0)=u(1)=0}_{\text{Conditions de Dirichlet}}\ \}$$

Remarque : On a intégré les conditions de Dirichlet homogènes dans la définition de V.

On notera $V = H_0^1(\Omega)$ un espace de Sobolev, qui est un espace de Hilbert.
On définit :

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uvdX + \int_\Omega u'v'dX$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

1.2 Recherche de solution

On cherche la solution $u(x)$ dans V. $\forall v \in V$ (appelée fonction test) :

$$-u'' = f$$

$$-vu'' = vf$$

$$-\int_\Omega u''vdx = \int_\Omega fvdx$$

On a de plus :

$$-\underbrace{[u'v]_0^1}_{=0 \text{ car } v\in V} + \int_0^1 u'v'dx = \int_\Omega fvdx$$

On se ramène donc au problème suivant ; trouver $u \in V$; $\forall v \in V$:

$$(P.V.)\left\{\begin{array}{ll} a(u,v) = L(v) & \\ \text{avec} & a(u,v) = \int_0^1 u'v'x \\ & L(v) = \int_0^1 fvdx \end{array}\right.$$

La solution de PV est appelée solution faible
La solution de P est appelée solution forte.

1.3 Existence-unicité d'une solution de (PV)

Théorème: de Lax-Milgram

$a(\bullet, \bullet)$ est :

— une forme bilinéaire (symétrique ?)
— V-elliptique : $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_v^2,\ \alpha \geq 0$
— continue : $|a(u,v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V,\ C \geq 0$

$L(\bullet)$ est linéaire continue.
Sous ces conditions, (PV) admet une solution unique $u \in V$.

2 Approximation numérique du problème variationnel

C'est dans cette partie que l'on va utiliser la méthode des élements finis en exprimant la solution discrétisée u_h dans une base d'un espace V_h de dimension finie.

2.1 Choix de V_h

Choix le plus simple :

$$V_h = \{v_n \in V; v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \forall i = 0, ..., n-1;\ v_{h[\tau_i,\tau_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1[X]\}$$

V_h est un espace vectoriel de dimension $n-1$.

Remarque : Cela correspond à des β-splines.

$$\tau = (\tau_i)_{i=0..n},\ \dim \mathbb{P}_{k,\tau,r} = (k+1)n - \sum_{i=1}^{n-1} r_i$$

$\mathbb{P}_{k,\tau,r}$ est l'espace des fonctions polynomiales par morceaux de degré inférieur ou égal à k avec un raccord $\mathcal{C}^{r_i-1}$ en τ_i.

En particulier, $\dim V_h = n-1$.

2.2 Fonctions de base

Ce sont les $(\phi_i)_{i=1,...,n-1}$, ils vérifient une condition lagrangienne :

$$\begin{cases} \phi_i(z_i) &= 1 \\ \phi_i(z_j) &= 0 \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

2.3 Problème discrétisé

Le problème discrétisé (PV_h) est maintenant la recherche de $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_i \phi_i(x) \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h, a(u_n, v_n) = L(v_n)$.

2.4 Détermination des inconnues $(\xi_j)_{j=1,...,n-1}$

On a :

$$u_h(\tau_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \phi_j(\tau_i) = \xi_i$$

(PV_h) est équivalent à :
Trouver $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \phi_j(x) \in V_h$ tel que $\forall i = 1, ..., n-1$, $a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i)$.
On a fonc :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \underbrace{a(\phi_j, \phi_i)}_{\text{Matrices de rigidité}} = L(\phi_i),\ \forall i = 1, ..., n-1$$

On se ramène donc à un système linéaire :

$$R\xi = F$$

Propriété:

R est définie positive.

Démonstration :
On l'obtient grâce à la V-ellipticité de $a(\bullet, \bullet)$.
Soit $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. On cherche à voir si $v^T R v > 0$.

$$(v^T R)_j = \sum_{i=1}^{n-1} v_i R_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i a(\phi_j, \phi_i) = a(\phi_j, \sum_{i=1}^{n-1} v_i \phi_i)$$

$$(v^T R) v = \sum_{j=1}^{n} v_j (v^T R)_j = a\left(\sum_j v_j \phi_j, \sum_i v_i \phi_i\right)$$

Posons $w = \sum_i v_i \phi_i$, $a(w, w) \geq 0$ car $a(\bullet, \bullet)$ V elliptique.

Deuxième partie
Petits rappels d'analyse fonctionnelle

1 Rappels sur les distributions

Notation : $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Propriété:

- $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (toute fonction de $L^2(\Omega)$ est limite d'une suite de fonctions incluse dans $\mathcal{D}(\Omega)$).
- L'application identité de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelée injection canonique. Elle est continue.
- $f_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} f \Rightarrow T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T_f$

2 Espaces de Sobolev

Ces espaces nous permettent de résoudre les problèmes variationnels. Les espaces de Sobolev se construisent à partir des espaces L^p (on va d'abord s'intéresser aux espaces $H^m(\Omega)$ construits sur $L^2(\Omega)$).

2.1 Liens entre $\mathcal{D}(\omega)$, $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

On rappelle la notion de dérivation faible :

$$u \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \to \omega_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Définition: Espaces des Sobolev

Les dérivées qui vont intervenir dans les espaces de Sobolev sont prises au sens des distributions.

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
On définit un produit scalaire :

$$\begin{aligned} ((u,v))_{1,\Omega} &= \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(uv + (\nabla u)^t\, \nabla v \right) dx \end{aligned}$$

et on note $\| \bullet \|_{1,\Omega}$ sa norme associée.

Propriété:

- $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert
- $H^1(\Omega)$ est séparable (il existe une partie dénombrable et dense dans $H^1(\Omega)$).

Démonstration :
On va montrer que $H^1(\Omega)$ est complet.
Soit $(v_p)_p$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. On a : $\forall p,\ v_p \in H^1(\Omega)$ et :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, p \geq N, \|v_n - v_p\| < \varepsilon$$

Par définition de $H^1(\Omega)$, $(v_p)_p$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $\forall i = 1, ..., n$, $\left(\frac{\partial v_p}{\partial x_i}\right)_p$ est également une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

$$\exists v \in L^2(\Omega); v_p \xrightarrow{L^2} v$$
$$\exists w_i \in L^2(\Omega); \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2} w_i$$

car $L^2(\Omega)$ est complet.

On rappelle que la convergence dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (car les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont L^2 et le produit scalaire de L^2 coincide avec le crochet de dualité au sens des distributions).

La convergence se fait donc au sens des distributions. Or, les opérations de dérivation sont continues dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par conséquent :

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et de plus, il y a unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc $\omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Propriété: Rellich

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière "suffisament régulière", alors de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.
(L'injection canonique de H^1 dans L^2 est compacte)

Définition:

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega), \|\bullet\|_{1,\Omega})$

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{f \in H^1(\Omega); \exists \phi_n \in \mathcal{D}(\Omega); \phi_n \to f\} \\ &= \left\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); u\,(\Gamma) = \{0\}\right\} \end{aligned}$$

Propriété:

— $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$
— $(H_0^1(\Omega), \|\bullet\|_{1,\Omega})$ est un Hilbert.

Formule: de Poincaré

Si Ω est borné au moins dans une direction, alors $\exists C(\Omega) > 0; \forall v \in H_0^1(\Omega)$;

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration :
A reprendre

Il existe d'autres formules de ce type, comme la formule de Poincaré-Wirtinger.

Remarque : On munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme induite par $H^1(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$ est fermé dans $H^1(\Omega) \Rightarrow H_0^1(\Omega)$ est de Hilbert.

Propriété:

Si Ω est borné, alors sur $H_0^1(\Omega)$, la semi-norme

$$\left(\int_\Omega (\nabla u)^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme équivalente à $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$

Démonstration :
D'après l'inégalité de Poincaré : Ω borné, $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla v)^2 dx &\geq C(\Omega) \int_\Omega v^2 dx \\ 2\int_\Omega (\nabla v)^2 dx &\geq C(\Omega) \int_\Omega v^2 dx + \int_\Omega (\nabla v)^2 dx \\ \|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega (\nabla v)^2 dx &\geq \frac{1}{2} \min(1, C(\Omega)) \|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

3 Théorèmes de trace

On suppose Ω "régulier", alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est denste dans $H^1(\Omega)$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \\ v & \mapsto & \gamma_0 v = v_{|\Gamma} \end{array}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

$L^2(\Gamma)$: classe de fonctions de carré sommable avec la mesure $d\sigma$ (qui est la mesure superficielle sur $\partial\Omega = \Gamma$, associé à la mesure classique de Lebesgue).

Remarque : γ_0 n'est pas surjective (preuve dans la littérature : Allaire, Brégis...)

4 Généralisation de Sobolev

Ω : ouvert non vide e $\mathbb{R}^n$.

Définition:

On note $W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ l'espace des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, les dérivées partielles $\partial^\alpha v$ de longueur $|\alpha|$ soient $\mathcal{C}^p(\Omega)$.

$$\|v\|^2_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha v)^2 dx \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

On a aussi une semi norme :

$$|v|^2_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega (\partial^\alpha v)^2 dx$$

Remarque : Lorsque $p = 2$, on retombe sur $H^m(\Omega)$

Définition: Fonction μ-holderiennes

On note $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions v de $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ qui sont μ-holderiennes sur $\overline{\Omega}$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre $|\alpha| \leq m$, ie :

$$\exists C > 0;\ \forall x, y \in \overline{\Omega}, \forall |\alpha| \leq m, |\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)| \leq C \langle x - y \rangle^\mu_{\mathbb{R}^n}$$

avec $\langle \bullet \rangle$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Nous allons maintenant donner quelques résultats de compacité dans les espaces de Sobolev :

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^s(\Omega) \text{ si } m > s + \frac{n}{2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne.
$\hookrightarrow$: injection canonique.

5 Quelques résultats essentiels en analyse hilbertienne

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\bullet, \bullet)_H$. On note H' le dual de H.

$$\|l\|_{H'} = \sup_{v \in H} \frac{|l(v)|}{\|v\|_H}$$

Théorème: de projection

Soit K un espace convexe, fermé et non vide de H. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique élément de K, noté $P_K f$ tel que :

$$\|f - p_k f\|_H = \min_{v \in K} \|f - v\|_H$$

Remarque : P_k est une contraction

Théorème: de représentation de Riesz-Fréchet

Soit $l \in H'$, il existe un unique élément $f \in H$ tel que

$$\forall v \in H,\ l(v) = (l, v)_{H',H} = (f, v)_{H'}$$

et on a $\|f\|_H = \|l\|_{H'}$.

6 Théorème de Lax-Milgram et problème variationnel abstrait

On considère un espace de Hilbert V et V' son dual. Soit $a(\bullet, \bullet)$ une fonctionnelle :
— bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$
— continue ($\exists M; \forall u, v \in V, |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$)
— V-elliptique ($\exists \alpha > 0; a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$)
Soit $L \in V'$. Le problème variationnel est alors défini comme suit :

$$(PV) \left\{ \begin{array}{c} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V \\ a(u,v) = L(v) \end{array} \right.$$

Lemme: de Lax-Milgram

Sous les hypothèses précédentes sur $a(\bullet, \bullet)$, et $L(\bullet)$, on a :

1. (PV) admet une unique solution
2. On étudie l'existence et l'unicité d'une solution du problème transformé

Démonstration :
Distribuée sur feuille.

Remarque:

Si $a(\bullet, \bullet)$ est de plus symétrique, alors combiné avec la V-ellpticité, on a $a(\bullet, \bullet)$ défini positif. Donc $a(\bullet, \bullet)$ définit un produit scalaire sur V.
On peut donc lui associer une norme $(a(v,v))^{\frac{1}{2}}$ qui est équivalente à $\| \bullet \|_V$ (grâce à l'ellpticité et à la continuité)

6.1 Ecriture sous forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie

On définit

$$J : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \end{array}$$

On cherche v minimisant J

Théorème: de Stanpacchia

Il existe un unique élément v minimisant J, et cet élément est aussi l'unique solution de (PV)

Démonstration :
Soient $u, w \in V$

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= J(u) + J(w) + a(u,w) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \underbrace{-L(w) + a(u,w)}_{(*)} \end{aligned}$$

Si v solution de (PV), alors $(*) = 0$.
De plus, si $w \in V\backslash\{0\}$, $a(w,w) \geq \alpha\|w\|_V^2 > 0$. Donc $J(u+w) \geq J(u)$.
$\forall t \in V$, $\exists u, w \in V$, $u + w = t$

$$J(t) \geq J(u)$$

D'où

$$J(u) = \min_{u \in V} J(t)$$