Table des matières

Rappels sur les courbes paramétrées

Définition: Espace affine

Ensemble non vide ε associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et qui est une muni d'une loi interne $\tilde{+} : \varepsilon \times E \to \varepsilon$ vérifiant :

— $\forall P, Q \in \varepsilon,\ \exists! u \in E;\ Q = P \tilde{+} u$ (qu'on note en général $u = \overrightarrow{PQ}$).
— Pour tout $P \in \varepsilon$ et $u, v \in \varepsilon$, $P \tilde{+} (u+v) = (P \tilde{+} u) \tilde{+} v$.

Définition: Longueur d'arc

Valeur de $L = \int_I \|f'(t)\| dt$

Définition: Arcs paramétrés équivalents

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et $J, g)$ définis dans l'espace affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ et s'il existe une application bijective $\phi : J \to I$ vérifiant :

$$\begin{cases} g & = & f \circ g \\ \phi & \text{et } \phi^{-1} & \text{sont de classe } \mathcal{C}^k \end{cases}$$

Première partie
Approximation de courbes

1 Fonctions polynômiales par morceaux (dans le plan)

1.1 Position du problème et notation

Soit un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On se donne une suite τ telle que :

$$a < \tau_1 < ... < \tau_{l-1} < b$$

Par commodité, on pose $\tau_0 = a$ et $\tau_l = b$.
Sur tout intervale $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, on a une représentation polynomiale.
On définit une suite $r = \{r_i\}_{i=1}^{l-1}$ telle que

$$0 \leq r_i \leq k$$

Chaque r_i est associé à τ_i. Par convention, on prendra $r_0 = 0$.
On veut qu'en τ_i, la courbe représentative admette un raccord de classe $\mathcal{C}^{r_i - 1}$. On prend comme notation le fait que $\mathcal{C}^{-1}$ n'implique aucune condition.

Définition:

On définit désormais $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$ comme l'ensemble des fonctions polynomiales par morceaux de degré inférieur ou égal à k ayant des raccords de classe $\mathcal{C}^{r_i-1}$ en τ_i.

Théorème:

$$\dim \mathcal{P}^{k,\tau,r} = (k+1)l - \sum_{i=1}^{l-1} r_i$$

De plus, une base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$ est :

$$\{(X-\tau_i)_+^j\},\ i \in \{0,...,n-1\},\ j \in \{r_i,...,k\}$$

avec $(X-\tau_i)_+ = (X-\tau_i)\mathbb{1}_{\{X \geq \tau_i\}}$

Démonstration :
Sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, on a un polynôme P_i de degré k. Posons $f_{ij} = (X-\tau_i)^j \mathbb{1}_{\{X \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\}}$, $j \in \{0,...,k\}$.
Sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, nous avons un espace de dimension $k+1$. Si on on n'a pas de conditions en τ_i, on a un espace de dimension $(k+1)l$.
On a :

$$P_j = \sum_{j=0}^{k} a_{ij} f_{ij}$$

On doit calculer les a_{ij} pour $i \in \{0,...,l\}$ et pour $j \in \{0,...,k\}$.
De plus, en τ_i, on veut un raccord de classe $\mathcal{C}^{r_i-1}$.

$$\text{Sur } [\tau_{i-1}, \tau_i],\ P_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} a_{i-1,j} f_{i-1,j}$$

$$\text{Sur } [\tau_i, \tau_{i+1}],\ P_i = \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} f_{i,j}$$

On veut donc $P_{i-1}^{(q)}(\tau_i) = P_i^{(q)}(\tau_i)$, $q \in \{0,...,r_{i-1}\}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Pour } q=0,\ a_{i0} & = & \phi_0(a_{i-1,0},...,a_{i-1,k}) \\
\text{Pour } q=1,\ a_{i1} & = & \phi_1(a_{i-1,1},...,a_{i-1,k}) \\
 & \vdots & \\
\text{Pour } q=r_{i-1}, a_{ir_{i-1}} & = & \phi_{r_{i-1}}(a_{i-1,r_{i-1}},...,a_{i-1,k})
\end{array}$$

Avec ϕ_i linéaire.
Ainsi, $\forall j \in \{0,...,r_{i-1}\}$,

$$a_{ij} = \phi_j(a_{i-1,j},...,a_{i-1,k})$$

En conclusion, le nombre total de relations est :

$$\sum_{i=0}^{l-1} r_i$$

d'où

$$\dim \mathcal{P}^{k,\tau,r} = (k+1)l - \sum_{i=0}^{l-1} r_i$$

Vérifions à présent que

$$A = \{(X-\tau_i)_+^j\}_{\substack{i \in \{0,...,l-1\} \\ j \in \{r_i,...,k\}}}$$

est bien une base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$.

— $\text{card}(A) = \sum_{i=0}^{l-1}(k+1-r_i) = l(k+1) - \sum_{i=0}^{l-1} r_i = \dim \mathcal{P}^{k,\tau,r}$

— Vérifions que $(X-\tau_i)_+^j \in \mathcal{P}^{k,\tau,r}$.

En effet, pour $j \leq k$:

— Si $X \to \tau_i^-$, $(X-\tau_i)_+^j \to 0$.

— Si $X \to \tau_i^+$, $(X-\tau_i)_+^j \to 0$.

Pour $X > \tau_i$,

$$\frac{\partial^l}{\partial X^l}(X-\tau_i)_+^j = j(j-1)...(j-l)(X-\tau_i)_+^{j-l}$$

Pour $X = \tau_i$, on a 0 tant que $j - l > 0$, donc $l \leq r_i - 1$ (car $j \in \{r_i,...,k\}$)

— Posons $F(X) = \sum_{i,j} a_{ij}(X-\tau_i)_+^j = 0$ pour montrer que la famille est bien libre.

$$\begin{aligned}
F(\tau_0) = a_{00} \quad &\Rightarrow \quad a_{00} = 0 \\
F'(\tau_0) = a_{01} \quad &\Rightarrow \quad a_{01} = 0 \\
F''(\tau_0) = 2a_{02} \quad &\Rightarrow \quad a_{02} = 0 \\
&\vdots \\
F^{(k)}(\tau_0) = k!a_{0k} \quad &\Rightarrow \quad a_{0k} = 0
\end{aligned}$$

De la même manière, on a $F^{(r_i)}(\tau_i) = r_i!a_{i,r_i} = 0$.

1.2 Fonctions splines

On se donne la suite $\tau = (\tau_i)_{i=0,...,p}$ et la suite $r = (r_i)_{i=0,...,l-1}$ avec $r_i = k \ \forall i \in \{1,...,l-1\}$. On note alors $\mathcal{P}^{k,\tau,r} = S^{k,\tau}$ espace des fonctions splines.

$$\dim S^{k,\tau} = (k+1)l - k(l-1) = l + k$$

Pour $k = 3$, on a l'espace des splines cubiques.
On cherche des fonctions f telles que $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ avec :

$$(C) \left| \begin{array}{rcll} f(\tau_i) & = & y_i & \forall i \in \{0,...,l\} \\ f'(a) & = & \alpha & \text{donné} \\ f'(b) & = & \beta & \text{donné} \end{array} \right.$$

On note E l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$ avec ϕ vérifiant les conditions (C).

Théorème:

Il existe une unique fonction $\phi \in S^{3,\tau}$ vérifiant les conditions (C).

Démonstration :
Voir polycopié

Remarque : Si $k_i = \tau_{i+1} - \tau_i = k = cste$, alors

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lemme:

On prend $\phi \in S^{3,\tau}$ vérifiant les conditions (C). On prend $f \in E$. On pose $e = f - \phi$, erreur dans l'aproximation de f par ϕ. Alors :

$$\int_a^b e''(x)g(x)dx = 0 \ \forall g \in S^{1,\tau}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_a^b e''(x)g(x)dx &= \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e''(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} [e'(x)g(x)]_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} - \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-1} [e'(x)g(x)]_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &= e'(\tau_l)g(\tau_l) - e'(\tau_0)g(\tau_0) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$g \in S^{1,\tau}$, donc sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $g'(x) = \lambda_i$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e''(x)g(x)dx &= -\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)dx \\ &= -\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i (e(\tau_{i+1}) - e(\tau_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $e(\tau_i) = f(\tau_i) - \phi(\tau_i) = 0$.

Théorème:

Si $\phi \in S^{3,\tau} \cap E$ (ϕ unique), on a :

$$\int_a^b (\phi''(t))^2 dt = \min_{f \in E} \int_a^b f''(t)^2 dt$$

ϕ est l'unique élément de E satisfaisant le minimum.

Démonstration :
On pose $e = f - \phi$.

$$\int_a^b f''(t)^2 dt = \int_a^b \phi''(t)^2 dt + 2\int_a^b \phi''(t)e''(t)dt + \int_a^b e''(t)^2 dt$$

$\phi \in S^{3,\tau}$, donc $\phi'' \in S^{1,\tau}$. D'après le lemme précédent :

$$\int_a^b \phi''(t)e''(t)dt = 0$$

Par conséquent :

$$\int_a^b f''(t)^2 dt \geq \int_a^b \phi''(t)^2 dt$$

avec égalité si et seulement si :

$$\int_a^b e''(t)^2 dt = 0$$

Comme e'' est continue, on en conclut que $e'' = 0$
Or, $e'(a) = e'(b) = 0$ et $\forall i \in \{1, ..., l-1\}$, $e(\tau_i) = 0$, donc e est identiquement nulle.
En conclusion, il existe donc une unique fonction f de E donnant le minimum : c'est $\phi \in S^{3,\tau}$.

1.3 Fonctions B-splines

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$.
- k est quelconque
- les fonctions amettent des raccords de classe $\mathcal{C}^{r_i - 1}$ en les τ_i avec $r_i \leq k$, $\forall i \in \{1, ..., l-1\}$.

1.3.1 Notations

On considère dans $\mathbb{R}$ une suite de points $t_0, ..., t_m$ tels que $t_i \leq t_{i+1}$ $\forall i \in \{0, ..., m-1\}$, appelés nœuds.

> ***Définition: multiplicité***
>
> Si s nœuds consécutifs t_i sont confondus ($t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+s-1}$), on dit que le nœud est de multiplicité s.

D'autre part, on pose

$$w_{ij}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+j} - t_i} \mathbb{1}_{\{t_i < t_{i+1}\}}$$

Par convention, à chaque fois que nous écrivons une fraction dont le dénominateur est nul, il faudra l'interpréter comme étant nulle.

1.3.2 Définition des B-splines

Posons $t = (t_0, ..., t_m)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq m - k - 1$, les fonctions $B_{i,k,t}$ notées aussi $B_{i,k}$ lorsque la suite t est fixée, sont définies via la relation de récurrence sur k suivante :

$$B_{i,0}(x) = \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(x)$$

Pour $k \geq 1$:

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x)$$

Remarque : Si pour un indice i, $t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+k+1}$ (donc t_i est un nœud de multiplicité $\geq k+2$), alors on a $B_{i,k} \equiv 0$.

Propriété:

Si t_i est de multiplicité $k+2$, alors $B_{i,k}(x) = 0$

Démonstration :

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Or, $t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+k+1}$, donc on a $w_{i,k}(x) = 0$ et $w_{i+1,k}(x) = 0$. Par conséquent :

$$B_{i,k}(x) = B_{i+1,k-1}(x)$$

et par une récurrence simple, on montre finalement que :

$$B_{i,k}(x) = ... = B_{i+k,0}(x) = \mathbb{1}_{[t_{i+k},t_{i+k+1}[}(x)$$

On écarte dans toute la suite la possibilité d'avoir un nœud de multiplicité $k+2$.

Théorème:

1. $B_{i,k}$ est polynomiale par morceaux de degré k (par récurrence)
2. $B_{i,k}(x) = 0$ si $x \notin [t_i, t_{i+k+1}[$. On appelle $[t_i, t_{i+k+1}[$ le support de $B_{i,k}$ (récurrence)
3. $B_{i,k}(x) > 0$ si $x \in]t_i, t_{i+k+1}[$ (récurrence)
   $B_{i,k}(t_i) = 0$ sauf si t_i de multiplicité $k+1$, car alors $B_{i,k}(t_i) = 1$
4. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $t_0, ..., t_k < a$ et $t_{m-k}, ..., t_m \geq b$.
   $$\forall x \in [a,b[, \quad \sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(x) = 1$$
5. Soit $x \in]t_i, t_{i+k+1}[$, alors :
   $$B_{i,k}(x) = 1 \Leftrightarrow x = t_{i+1} = ... = t_{i+k}$$
6. $B_{i,k}$ est continue à droite et même indéfiniment dérivable à droite.

Démonstration : 3. Montrons que si t_i est de multiplicité $k+1$, alors $B_{i,k}(t_i) = 1$.

La relation de récurrence donne :

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Comme $t_i = ... = t_{i+k}$, on a :

$$w_{i,k}(t_i) = 0 \text{ et } w_{i+1,k}(t_i) = 0$$

Par conséquent :

$$B_{i,k}(t_i) = B_{i+1,k-1}(t_i) = B_{i+1,k-1}(t_{i+1})$$

et t_{i+1} est de multiplicité k, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $B_{i+1,k-1}(t_{i+1}) = B_{i,k}(t_i) = 1$

On traite désormais le cas où t_i est de multiplicité $< k+1$.

— Si $t_i < t_{i+1}$, de la relation de récurrence :

$$B_{i,k}(t_i) = \underbrace{w_{i,k}(t_i)}_{=0} B_{i,k-1}(t) + (1 - w_{i+1,k}(t_i)) \underbrace{B_{i+1,k-1}(t_i)}_{=0}$$

car $t_i \notin [t_{i+1}, t_{i+k+1}[$.

— Dans le cas général, t_i est de multiplicité k. Donc t_{i+1} est de multiplicité $k-1$. Dans ce cas critique :

$$B_{i,k}(t_i) = (1 - w_{i+1,k}(t_i))B_{i+1,k-1}(t_i) = (1 - w_{i+1,k}(t_i))\underbrace{B_{i+1,k-1}(t_{i+1})}_{=0}$$

d'après l'hypothèse de récurrence puisque t_{i+1} est de multiplicité au plus $k-1$.

4. On procède par récurrence sur k. On sait que :

$$B_{i,0}(x) = \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x)$$

On en déduit donc que

$$\sum_{i=0}^{m-1} B_{i,0}(x) = 1 \text{ si } x \in [t_0, t_m[$$

Or, par hypothèse, $t_0 \leq a$ et $t_m \geq b$. En conclusion, $\forall x \in [a,b[$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} B_{i,0}(x) = 1$$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $k-1$ et démontrons alors que la propriété reste vraie au rang k.
Soit $x \in [a,b]$. Il existe donc j, $k \leq j \leq m-k-1$ tel que $x \in [t_j, t_{j+1}[$.
Le support de $B_{i,k}$ est $[t_i, t_{i+k+1}[$. Comment avoir $[t_i, t_{i+k+1}[\cap[t_j, t_{j+1}[\neq \emptyset$?

$$\left\{\begin{array}{ccc} j & < & i+k+1 \\ i & < & j+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} j & \leq & i+k \\ i & \leq & j \end{array}\right.$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(x) = \sum_{i=j-k}^{j} B_{i,k}(x)$$

En utilisant la relation de récurrence définissant $B_{i,k}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j-k}^{j} B_{i,k}(x) &= \sum_{i=j-k}^{j} w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + \sum_{i=j-k}^{j} (1 - w_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + \sum_{I=j-k+1}^{j+1} (1 - w_{I,k}(x))B_{I,k-1}(x) \\
&= \sum_{I=j-k+1}^{j+1} B_{i,k-1}(x) + w_{j-k,k}(x)B_{j-k,k-1}(x) + w_{j+1,k}(x)B_{j+1,k-1}(x)
\end{aligned}$$

Or, $B_{j-k,k-1}(x) = 0$ car son support est $[t_{j-k}, t_j[$ et $x \in [t_j, t_{j+1}[$. Pour la même raison, $B_{j+1,k-1}(x) = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j-k}^{j} B_{i,k}(x) &= \sum_{I=j-k+1}^{j} B_{I,k-1}(x) + \underbrace{B_{j+1,k-1}(x)}_{=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.
D'après l'axiome de récurrence, on a pour tout k :

$$\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(x) = 1$$

Remarque:

Dans le cas où $t_{m-k} = ... = t_m = b$, la formule 4 n'est valable que sur $[a, b[$. En effet, pour tout $i \in \{0, ..., m-k-1\}$, on a $B_{i,k}(b) = 0$. Pour avoir une formule valable sur $[a, b]$, on est amené par abus de langage à poser $B_{m-k-1,k}(b) = 1$, ce qui rend la B-spline $B_{m-k-1,k}$ continue à gauche en b. On fera systématiquement cet abus.

Proposition:

Pour tout $k \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_{i,k}$ est dérivable à droite et l'on a :

$$B'_{i,k}(x) = k\left[\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right]$$

avec la convention que l'on remplace par 0 un expression dont le dénominateur est nul.

1.4 Les B-Splines comme base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$

Voir papier distribué.

Définition:

Soit t_i, $0 \leq i \leq m$ une suite de points de $\mathbb{R}$ telle que $t_i \leq t_{i+1}$, k un entier positif ou nul, $[a, b]$ un intervalle tel que $t_k \leq a$ et $t_{m-k} \geq b$. On note $\mathcal{P}^{k,t}([a, b])$ ou simplement $\mathcal{P}^{k,t}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales par morceaux sur $[a, b]$ de degré $\leq k$, avec raccords de classe $\mathcal{C}^{k-p_j}$ en t_j, si t_j est nœud de multiplicité p_j.
Par convention, un racord de classe $\mathcal{C}^{k-p_j}$ avec $k - p_j < 0$ n'impose aucune condition en t_j.

Théorème:

Supposons que tous les nœuds soient de multiplicité $\leq k + 1$, alors $\{B_{i,k,t}\}_{i=0}^{m-k-1=n-1}$ est une base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r} = \mathcal{P}^{k,t}$.

1.5 Algorithmes de base pour les B-splines

Soit

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,k}(x)$$

un élément de $\mathcal{P}^{k,t}$.
On dira que S est une fonction spline.
Les B-splines sont calculées à l'aide d'une suite de nœuds $t_0, ..., t_m$ et définies sur $\mathbb{R}$.

Nous allons étudier 3 algorithmes :
— L'algorithme dit "De Boor-Cox" ou de "De Casteljan" permettant d'évaluer S en un point donné $\hat{x}$ de $[a, b]$
— L'algorithme permettant de calculer les coefficients de la déviée S' par rapport aux $B_{i,k-1}$
— L'algorithme d'insertion d'un nœud.

1.5.1 Algorithme d'évaluation

Proposition:

Soit $\hat{x} \in [a,b]$ (donc $\hat{x} \geq t_k$). On a :

$$\begin{aligned} S(\hat{x}) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(0)} B_{i,k}(\hat{x}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(1)}(\hat{x}) B_{i,k-1}(\hat{x}) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(k)}(\hat{x}) B_{i,0}(\hat{x}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_i^{(0)} &= a_i, & \forall i \in \{0, ..., n-1\} \\ a_i^{(r+1)}(\hat{x}) = &= w_{i,k-r}(\hat{x}) a_i^{(r)}(\hat{x}) + (1 - w_{i,k-r}(\hat{x})) a_{i-1}^{(r)}(\hat{x}) \end{aligned}$$

Démonstration :

$$S(\hat{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(0)} B_{i,k}(\hat{x})$$

$$B_{i,k}(\hat{x}) = w_{i,k}(\hat{x}) B_{i,k-1}(\hat{x}) + (1 - w_{i+1,k}(\hat{x}) B_{i+1,k}(\hat{x})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} S(\hat{x}) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(0)} w_{i,k}(\hat{x}) B_{i,k-1}(\hat{x}) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(0)} (1 - w_{i+1,k}(\hat{x}) B_{i+1,k-1}(\hat{x}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(0)} w_{i,k}(\hat{x}) B_{i,k-1}(\hat{x}) + \sum_{I=0}^{n} a_{I-1}^{(0)} (1 - w_{I,k}(\hat{x}) B_{I,k-1}(\hat{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(a_i^{(0)} w_{i,k}(\hat{x}) + a_{i-1}^{(0)} (1 - w_{i,k}(\hat{x})))}_{=a_i^{(1)}} B_{i,k-1}(\hat{x}) + a_0^{(0)} w_{0,k}(\hat{x}) \quad \underbrace{B_{0,k-1}(\hat{x})}_{=0 \text{ à cause du support}} \quad + a_{n-1}^{(0)} (1 - w_{n,k}(\hat{x})) \underbrace{B_{n,k}(\hat{x})}_{=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(1)} B_{i,k-1}(\hat{x}) \end{aligned}$$

La démonstration se termine par une récurrence immédiate, analogue à ce calcul.

Si on veut évaluer $S(\hat{x})$ pour $x \in [t_j, t_{j+1}[$, on a donc :

$$S(\hat{x}) = a_j^{(k)}(\hat{x})$$

puis $B_{j,0}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}[$.

Pour calculer $a_j^{(k)}(\hat{x})$, il suffit d'évaluer les $a_i^{(k)}$ pour $i \in \{j-k+r+1, ..., j\}$, les autres $B_{i,k-r}(\hat{x})$ étant nuls puisque :

$$\begin{aligned}
S(\hat{x}) &= \sum_{i=j-k}^{j} a_i^{(0)} B_{i,k}(\hat{x}) \\
&= \sum_{i=j-k+1}^{j} a_i^{(1)}(\hat{x}) B_{i,k-1}(\hat{x}) \\
&\vdots \\
&= a_j^{(k)}(\hat{x})
\end{aligned}$$

L'algorithme se présente donc sous forme triangulaire, chaque élément s'obtenant par combinaire convexe des deux éléments de la ligne supérieure qui sont au-dessus de lui.

$$\begin{tikzcd}
a_{j-k} \arrow[dr] & & a_{j-k+1} \arrow[dl] & & \cdots & & a_{j-1} \arrow[dr] & & a_j \arrow[dl] \\
& a_{j-k+1}^{(1)} \arrow[drr] & & & \cdots & & & a_j^{(1)} \arrow[dll] & \\
& & & a_{j-1}^{(k-1)} \arrow[dr] & & a_j^{(k-1)} \arrow[dl] & & & \\
& & & & a_j^{(k)} & & & &
\end{tikzcd}$$

Remarque :

1. Cet algorithme est couteux en nombre d'opérations : il nécesite le calcul de $\frac{k(k+1)}{2}$ combinaisons convexes, et pour chaque combinaison, il faut :
   — 2 multiplications
   — 1 division
   — 4 soustractions
   soit un algorithme en $\sim 3k^2$ opérations.
2. Il a néanmoins plusieurs avantages :
   (a) Il est stable numériquement
   (b) Le calcul des $w_{i,k-r}(\hat{x})$ est souvent très simple en pratique en particulier lorsque $\hat{x}$ et les nœuds t_i sont entiers.

Si on veut calculer la fonction S en plusieurs points de $[t_j, t_{j+1}[$, on procède, en général, différemment. On calcule une fois pour toute l'expression polynômiale de S entre t_j et t_{j+1} :

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{D^i S(t_j)}{i!}(x - t_j)^i$$

Avec $D^i S(t_j)$ les dérivées à droite évaluées formellement avec l'algorithme des dérivées ci-dessous. On évale $S(x)$ par la règle de Hörner ($\sim 2k$ opérations).

1.5.2 Algorithme des dérivées

Proposition:

Soit $S(x)$ défini précédemment. Alors la dérivée à droite $DS(x)$ est donnée par :

$$DS(x) = \sum_{i=1}^{n-1} b_i B_{i,k-1}(x)$$

avec

$$b_i = \left| \begin{array}{ccc} k\frac{a_i - a_{i-1}}{t_{i+k} - t_i} & \text{si} & t_i < t_{i+k} \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
DS(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i k \left[\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i-k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k+1}(x)}{t_{i+1+k}-t_{i+1}}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i k \frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i-k}-t_i} - \sum_{I=1}^{n} a_{I-1} k \frac{B_{I,k+1}(x)}{t_{I+k}-t_I} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} k \underbrace{\frac{a_i - a_{i-1}}{t_{i+k}-t_i}}_{=b} B_{i,k-1}(x) + k a_0 \underbrace{\frac{B_{0,k-1}(x)}{t_k - t_0}}_{=0} - k a_{n-1} \underbrace{\frac{B_{n,k-1}(x)}{t_{n-k}-t_n}}_{=0}
\end{aligned}$$

1.5.3 Algorithme d'insertion d'un nœud

Considérons $\{t_i\}$, $i \in \{0, ..., m = n+k\}$. On obtient ainsi $B_{i,k,t}$, avec $i \in \{0, ..., n-1\}$.
On ajoute $\hat{t} \leq t_{n-1}$ à cette suite. On considère donc une nouvelle suite t' avec $t' = t \cup \{\hat{t}\}$ et $\{t'_i\},\ u \in \{0, ..., n\}$.

$$\Rightarrow \hat{B}_{i,k,t'}, i \in \{0, ..., n\}$$

Proposition:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_{i,k,t}(x) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i B_{i,k,t'}(x)$$

avec

$$\hat{a}_i = \left| \begin{array}{ccc} a_i & \text{si} & t_{i+k} < \hat{t} \\ w_{i,k}(\hat{t}) a_i + (1 - w_{i,k}(\hat{t})) a_{i-1} & \text{si} & t_i < \hat{t} < t_{i+k} \\ a_{i-1} & \text{si} & \hat{t} \leq t_i \end{array} \right.$$

2 Courbes B-Splines - Courbes de Bézier dans $\mathbb{R}^s$

2.1 Polynômes de Bernstein

Les courbes de Bezier apparaîtront comme un cas particulier de B-Splines.
Fixons k et prenons [a,b]=[0,1]. Nous allons considérer les B-Splines $B_{i,k,t}$, la suite de nœuds $t = (t_i)_i$ étant définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} t_0 = ... = t_k = 0 \\ t_{k+1} = ... = t_{2k+1} = 1 \end{cases}$$

Ainsi, les $w_{i+1,k}(X) = X$ si $t_{i+1} < t_{i+k+1}$, $i \leq k-1$ et les polynômes $B_{i,k}$ sont les polynômes de degré k sur [0,1] vérifiant :

$$B_{i,k,t}(X) = XB_{i,k-1,t}(X) + (1-X)B_{i+1,k-1,t}(X)$$

Les $B_{i,k}$ forment une base de l'espace des polynômes sur [0,1] de degré $\leq k$ appelée base de Bernstein.
Notation : Les polynômes de Bernstein se notent B_i^k, ce qui les distinguent des B-Splines classiques.

Propriété:

$B_i^k(X) = \binom{k}{i} X^i (1-X)^{k-i}$

Démonstration :
La relation de récurrence entre B-Splines s'écrit :

$$B_{i,k,t}(X) = XB_{i,k-1,t}(X) + (1-X)B_{i+1,k-1,t}(X)$$

où $B_{i,k}$ est la B-Spline de degré k définie à l'aide de la suite de nœuds :

$$\begin{cases} t_0 = ... = t_k = 0 \\ t_{k+1} = ... = t_{2k+1} = 1 \end{cases}$$

D'autre part, le polynôme de Bernstein B_j^{k-1} est par définition égal) $B_{j,k-1,t'}$ avec t' la suite de nœuds telle que :

$$\begin{cases} t'_0 = ... = t'_{k-1} = 0 \\ t'_k = ... = t'_{2k-1} = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$B_{j,k-1,t} = B_{j-1,k-1,t'} = B_{j-1}^{k-1}$$

La relation de récurrence devient alors :

$$B_i^k(X) = XB_{i-1}^{k-1}(X) + (1-X)B_i^{k-1}(X)$$

On procède par récurrence. La propriété est vraie pour k=0.
Supposons la propriété vraie au rang $k-1$ et démontrons que l'implication $(\mathcal{P}(k-1) \Rightarrow \mathcal{P}(k))$ est vraie.
D'après la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} B_i^k(X) &= XB_{i-1}^{k-1}(X) + (1-X)B_i^{k-1}(X) \\ &= X\binom{k-1}{i-1}X^{i-1}(1-X)^{k-i} + (1-X)\binom{k-i}{i}X^i(1-X)^{k-1-i} \\ &= \binom{i}{k}X^i(1-X)^{k-i} \end{aligned}$$

Proposition:

1. B_i^k est un polynôme de degré k. Les $\{B_i^k\}$ forment une base des polynômes de degré $\leq k$.
2. $B_i^k(X) \geq 0$ pour $X \in [0,1]$
3. $\sum_{i=0}^k B_i^k(X) = 1 \; \forall X \in [0,1]$
4. $B_i^k(X) = B_{k-i}^k(1-X)$
5. $B_i^k(0) = 1$ si t_i est de multiplicité $k+1$, c'est-à-dire si $i = 0$. Sinon, $B_i^k(0) = 0$

2.2 Les courbes B-Splines

Dans la suite, on note t la variable d'une courbe paramétrée.
Soit n points $P_0, ..., P_{n-1}$ de $\mathbb{R}^s$ tels que :

$$\forall i \in \{0, ..., n-1\}, P_i = (X_{1,i}, ..., X_{s,i})$$

Définition:

On appelle courbe B-Spline associée au polygone $P_0, ..., P_{n-1}$ la courbe paramétrée γ définie par : $\forall t \in [a,b]$,

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,k}(t) P_i = (X_1(t), ..., X_s(t))$$

avec $\forall j \in \{1, ..., s\}$, $X_j(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,k}(t) X_{j,i}$.
Les P_i sont appelés les points de contrôle de la courbe B-Spline.
Le polygone $\{P_0, ..., P_{n-1}\}$ est appelé polygone de contrôle.

Théorème:

On se onne $\{P_i\}_{i=0}^{n-1}$ points de contrôle, $\{t_i\}_{i=0}^{n=m+k}$, $t_0, ..., t_k \leq a$, $t_n, ..., t_{n-k} \geq b$.

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,k}(t) P_i$$

1. γ ne passe en général pas par les points P_i. On a cependant $S(a) = P_0$ et $S'(a)$ dans la direction $\overrightarrow{P_0P_1}$ si $t_0 = ... = t_k = a$ et $S(b) = P_{n-1}$ et $S'(b)$ dans la direction $\overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}}$ si $t_n = ... = t_{n+k} = b$
2. γ est dans l'enveloppe convexe fermée des points $P_0, ..., P_{n-1}$ (plus petit ensemble convexe fermé contenant le polygone $P_0, ..., P_{n-1}$)
   En fait, si $t \in [t_j, t_{j+1}[$, la courbe γ est dans l'enveloppe convexe de $P_{j-k}, ..., P_j$
3. Si les nœds t_i, $k+1 \leq i \leq n-1$ sont simples, alors γ est une courbe de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et est formée de n arcs paramétrés polynomiaux de degré $\leq k$.

Démonstration :
A reprendre.

(Revoir exemple)

2.3 Algorithme pour les courbes splines

2.3.1 Algorithme d'évaluation en un point

Proposition:

Soit $S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,k}(t)$ et supposons $\tau \in [t_j, t_{j+1}[$.

— $P_i^{(0)} = P_i \ \forall i \in \{j-k, ..., j\}$

— Pour $0 \leq r \leq k-1$,
$$P_i^{(r+1)}(\tau) = w_{i,k-r}(\tau) P_i^{(r)}(\tau) + (1 - w_{i,k-r}(\tau)) P_{i-1}^{(r)}(\tau)$$
pour $j-k+r+1 \leq i \leq j$

— $S(\tau) = P_j^{(k)}(\tau)$

(Exemple)

Remarque:

Das le cas d'une courbe de Bézier, l'algorithme st plus simple car les $w_{i,k}(t)$ ne dépendant pas de k.
Si $B(t) = \sum_{i=0}^{k} P_i B_i^k(t)$ est une courbe de Bézier de degré k ayant pour points de contrôle $P_i \in \mathbb{R}^s$, l'algorithme d'évaluation prend la forme suivante :

— $P_i^{(0)} = P_i \ \forall i \in \{0, ..., k\}$

— Pour $0 \leq r \leq k-1$, $r+1 \leq i \leq k$:
$$P_i^{(r+1)}(\tau) = \tau P_i^{(r)}(\tau) + (1-\tau) P_{i-1}^{(r)}(\tau)$$

— $B(\tau) = P_k^{(k)}(\tau)$

2.4 Algorithme de calcul des dérivées

Proposition:

Soit $S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{ik}(t)$ une courbe B-Spline. On a alors :
$$D^r S(t) = \sum_{i=r}^{n-1} P_i^r B_{i,k-r}(t)$$
avec
$$P_i^0 = P_i \ \forall i \in \{0, ..., n-1\}$$
$$P_i^r = (k-r+1) \frac{P_i^{r-1} - P_{i-1}^{r-1}}{t_{i+k-r+1} - t_i}$$

On explicite à présent l'algorithme dans le cas particulier des courbes de Béier, soit :
$$B(t) = \sum_{i=0}^{k} P_i B_i^k(t)$$

une courbe de Bézier de degré k. Posons $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$.

$$\Delta^2 P_i = \Delta(\Delta P_i) = P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i$$

$$\Delta^k P_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} P_{i+j}$$

On a

$$D^r B(t) = \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^r P_i B_i^{k-r}(t)$$

Si on veut maintenant évaluer $D^r B$ en $t = \tau_0$, on utilise l'algorithme de De Casterljau. L4algorithme se déroule de la manière suivante :

1. On évalue $B(\tau_0)$ à l'aide de l'algorithme de De Casteljau ce qui donne un tableau triangulaire $T^{(0)}$ de points $P_i^{(r)}$, $0 \le r \le k$, $r \le i \le k$.
2. On passe du tableau $T^{(p)}$ au tableau $T^{(p+1)}$ par application de l'opérteur Δ
3. $D^r B(\tau_0)$ est donné par le dernier élément du tableau $T^{(r)}$.

(Revoir exemple dans le cas $k = 3$)

2.5 Interpolation

cf TD5

2.6 Raccords entre courbes

Considérons deux courbes splines de degré k dans $\mathbb{R}^s$.

$$S_1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{ik}(t),\ a \le t \le b$$

$(t_i)_{i=0}^{m=n+k}$, $t_0 = ... = t_k \le a$ et $t_n, ..., t_{n+k} \ge b$
et

$$S_2(t) = \sum_{i=0}^{n'-1} \hat{P}_i \hat{B}_{i,k}(t),\ \hat{a} \le t \le \hat{b}$$

$(\hat{t}_i)_{i=0}^{m'=n'+k}$, $\hat{t}_0 = ... = \hat{t}_k \le a$ et $\hat{t}_{n'}, ..., \hat{t}_{n'+k} \ge b$

Si on veut raccorder S_1 et S_2, il faut alors supposer $\hat{t}_0 = t_n$,...,$\hat{t}_k = t_{n+k}$. Si on pose :

$$Q_i = P_i,\ 0 \le i \le n-1,\ \tilde{B}_{ik} = B_{ik}$$

$$Q_{i+n} = \hat{P}_i,\ 0 \le i \le n'-1,\ \tilde{B}_{i+n,k} = \hat{B}_{ik}$$

alors la courbe

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n+n'-1} Q_i \tilde{B}_{ik}(t)$$

est une courbe spline qui coïncide avec$S_1(t)$ pour $t \in [a, b]$ et avec $S_2(t)$ pour $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Nous allons traîter le cas de raccord différentiable dans le cas de courbe de Bézier. Considérons :

$$B_1(t) = \sum_{i=0}^{k} P_i B_i^k(t),\ 0 \le t \le 1$$

$$B_2(t) = \sum_{i=0}^{k} \hat{P}_i \hat{B}_i^k(t-1),\ 1 \le t \le 2$$

Choix du raccord entre B_1 et B_2 au point $t = 1$:
On a :

$$D^r B_1(t) = \frac{k!}{(k-r)!} \Delta^r P_{k-r}$$

$$D^r B_2(1) = \frac{k!}{(k-r)!} \Delta^r \hat{P}_0$$

Proposition:

Raccord de classe $\mathcal{C}^p$: $\Delta^r P_{k-r} = \Delta^r \hat{P}_0$ pour $r = 0, ..., p$.
Si $r = 0$, $P_k = \hat{P}_0$.

Deuxième partie

Approximation de surfaces