Table des matières

Rappels sur les courbes paramétrées

Définition: Espace affine

Ensemble non vide ε associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et qui est une muni d'une loi interne $\tilde{+} : \varepsilon \times E \to \varepsilon$ vérifiant :

— $\forall P, Q \in \varepsilon,\ \exists! u \in E;\ Q = P \tilde{+} u$ (qu'on note en général $u = \overrightarrow{PQ}$).
— Pour tout $P \in \varepsilon$ et $u, v \in \varepsilon$, $P \tilde{+} (u + v) = (P \tilde{+} u) \tilde{+} v$.

Définition: Longueur d'arc

Valeur de $L = \int_I \|f'(t)\| dt$

Définition: Arcs paramétrés équivalents

On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et $J, g)$ définis dans l'espace affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ et s'il existe une application bijective $\phi : J \to I$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g & = & f \circ g \\ \phi & \text{et } \phi^{-1} & \text{sont de classe } \mathcal{C}^k \end{array} \right.$$

Première partie
B-splines

1 Fonctions polynômiales par morceaux (dans le plan)

1.1 Position du problème et notation

Soit un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On se donne une suite τ telle que :

$$a < \tau_1 < ... < \tau_{l-1} < b$$

Par commodité, on pose $\tau_0 = a$ et $\tau_l = b$.
Sur tout intervale $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, on a une représentation polynomiale.
On définit une suite $r = \{r_i\}_{i=1}^{l-1}$ telle que

$$0 \leq r_i \leq k$$

Chaque r_i est associé à τ_i. Par convention, on prendra $r_0 = 0$.
On veut qu'en τ_i, la courbe représentative admette un raccord de classe $\mathcal{C}^{r_i - 1}$. On prend comme notation le fait que $\mathcal{C}^{r_i - 1}$ n'implique qucune condition.

Définition:

On définit désormais $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$ comme l'ensemble des fonctions polynomiales par morceaux de degré inférieur ou égal à k ayant des raccords de classe $\mathcal{C}^{r_i-1}$ en τ_i.

Théorème:

$$\dim \mathcal{P}^{k,\tau,r} = (k+1)l - \sum_{i=1}^{l-1} r_i$$

De plus, une base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$ est :

$$\{(X-\tau_i)_+^j\},\ i \in \{0,...,n-1\},\ j \in \{r_i,...,k\}$$

avec $(X-\tau_i)_+ = (X-\tau_i)\mathbb{1}_{\{X \geq \tau_i\}}$

Démonstration :
Sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, on a un polynôme P_i de degré k. Posons $f_{ij} = (X-\tau_i)^j \mathbb{1}_{\{X \in [\tau_i,\tau_{i+1}]\}}$, $j \in \{0,...,k\}$.
Sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, nous avons un espace de dimension $k+1$. Si on on n'a pas de confitions en τ_i, n a un espace de dimension $(k+1)l$.
On a :

$$P_j = \sum_{j=0}^{k} a_{ij} f_{ij}$$

On doit calculer les a_{ij} pour $i \in \{0,...,l\}$ et pour $j \in \{0,...,k\}$.
De plus, en τ_i, on veut un raccord de classe $\mathcal{C}^{r_i-1}$.

$$\text{Sur } [\tau_{i-1}, \tau_i],\ P_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} a_{i-1,j} f_{i-1,j}$$

$$\text{Sur } [\tau_i, \tau_{i+1}],\ P_i = \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} f_{i,j}$$

On veut donc $P_{i-1}^{(q)}(\tau_i) = P_i^{(q)}(\tau_i)$, $q \in \{0,...,r_{i-1}\}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Pour } q=0,\ a_{i0} & = & \phi_0(a_{i-1,0},...,a_{i-1,k}) \\
\text{Pour } q=1,\ a_{i1} & = & \phi_1(a_{i-1,1},...,a_{i-1,k}) \\
& \vdots & \\
\text{Pour } q=r_{i-1}, a_{ir_{i-1}} & = & \phi_{r_{i-1}}(a_{i-1,r_{i-1}},...,a_{i-1,k})
\end{array}$$

Avec ϕ_i linéaire.
Ainsi, $\forall j \in \{0,...,r_{i-1}\}$,

$$a_{ij} = \phi_j(a_{i-1,j},...,a_{i-1,k})$$

En conclusion, le nombre total de relations est :

$$\sum_{i=0}^{l-1} r_i$$

d'où

$$\dim \mathcal{P}^{k,\tau,r} = (k+1)l - \sum_{i=0}^{l-1} r_i$$

Vérifions à présent que

$$A = \{(X-\tau_i)_+^j\}_{\substack{i \in \{0,...,l-1\} \\ j \in \{r_i,...,k\}}}$$

est bien une base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$.

— $\text{card}(A) = \sum_{i=0}^{l-1}(k+1-r_i) = l(k+1) - \sum_{i=0}^{l-1} r_i = \dim \mathcal{P}^{k,\tau,r}$

— Vérifions que $(X-\tau_i)_+^j \in \mathcal{P}^{k,\tau,r}$.

En effet, pour $j \leq k$:

— Si $X \to \tau_i^-$, $(X-\tau_i)_+^j \to 0$.

— Si $X \to \tau_i^+$, $(X-\tau_i)_+^j \to 0$.

Pour $X > \tau_i$,

$$\frac{\partial^l}{\partial X^l}(X-\tau_i)_+^j = j(j-1)...(j-l)(X-\tau_i)_+^{j-l}$$

Pour $X = \tau_i$, on a 0 tant que $j-l > 0$, donc $l \leq r_i - 1$ (car $j \in \{r_i,...,k\}$)

— Posons $F(X) = \sum_{i,j} a_{ij}(X-\tau_i)_+^j = 0$ pour montrer que la famille est bien libre.

$$\begin{aligned}
F(\tau_0) = a_{00} &\quad \Rightarrow \quad a_{00} = 0 \\
F'(\tau_0) = a_{01} &\quad \Rightarrow \quad a_{01} = 0 \\
F''(\tau_0) = 2a_{02} &\quad \Rightarrow \quad a_{02} = 0 \\
&\vdots \\
F^{(k)}(\tau_0) = k!a_{0k} &\quad \Rightarrow \quad a_{0k} = 0
\end{aligned}$$

De la même manière, on a $F^{(r_i)}(\tau_i) = r_i!a_{i,r_i} = 0$.

1.2 Fonctions splines

On se donne la suite $\tau = (\tau_i)_{i=0,...,p}$ et la suite $r = (r_i)_{i=0,...,l-1}$ avec $r_i = k\ \forall i \in \{1,...,l-1\}$.
On note alors $\mathcal{P}^{k,\tau,r} = S^{k,\tau}$ espace des fonctions splines.

$$\dim S^{k,\tau} = (k+1)l - k(l-1) = l+k$$

Pour $k=3$, on a l'espace des splines cubiques.
On cherche des fonctions f telles que $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ avec :

$$(C) \left| \begin{array}{lcll} f(\tau_i) & = & y_i & \forall i \in \{0,...,l\} \\ f'(a) & = & \alpha & \text{donné} \\ f'(b) & = & \beta & \text{donné} \end{array} \right.$$

On note E l'ensemble des fonctions $\phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$ avec ϕ vérifiant les conditions (C).

Théorème:

Il existe une unique fonction $\phi \in S^{3,\tau}$ vérifiant les conditions (C).

Remarque : Si $k_i = \tau_{i+1} - \tau_i = k = cste$, alors

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lemme:

On prend $\phi \in S^{3,\tau}$ vérifiant les conditions (C). On prend $f \in E$. On pose $e = f - \phi$, erreur dans l'aproximation de f par ϕ. Alors :

$$\int_a^b e''(x)g(x)dx = 0 \ \forall g \in S^{1,\tau}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \int_a^b e''(x)g(x)dx &= \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e''(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} [e'(x)g(x)]_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} - \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-1} [e'(x)g(x)]_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &= e'(\tau_l)g(\tau_l) - e'(\tau_0)g(\tau_0) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$g \in S^{1,\tau}$, donc sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $g'(x) = \lambda_i$.

$$\begin{aligned} \int_a^b e''(x)g(x)dx &= -\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e'(x)dx \\ &= -\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i (e(\tau_{i+1}) - e(\tau_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $e(\tau_i) = f(\tau_i) - \phi(\tau_i) = 0$.

Théorème:

Si $\phi \in S^{3,\tau} \cap E$ (ϕ unique), on a :

$$\int_a^b (\phi''(t))^2 dt = \min_{f \in E} \int_a^b f''(t)^2 dt$$

ϕ est l'unique élément de E satisfaisant le minimum.

Démonstration :
On pose $e = f - \phi$.

$$\int_a^b f''(t)^2 dt = \int_a^b \phi''(t)^2 dt + 2\int_a^b \phi''(t)e''(t)dt + \int_a^b e''(t)^2 dt$$

$\phi \in S^{3,\tau}$, donc $\phi'' \in S^{1,\tau}$. D'après le lemme précédent :

$$\int_a^b \phi''(t)e''(t)dt = 0$$

Par conséquent :

$$\int_a^b f''(t)^2 dt \geq \int_a^b \phi''(t)^2 dt$$

avec égalité si et seulement si :

$$\int_a^b e''(t)^2 dt = 0$$

Somme e'' est continue, on en conclut que $e'' = 0$
Pr, $e'(a) = e'(b) = 0$ et $\forall i \in \{1, ..., l-1\}$, $e(\tau_i) = 0$, donc e est identiquement nulle.
En conclusion, il existe donc une unique fonction f de E donnant le minimum : c'est $\phi \in S^{3,\tau}$.

1.3 Fonctions β-splines

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$.
— k est quelconque
— les fonctions amettent des raccords de classe $\mathcal{C}^{r_i - 1}$ en les τ_i avec $r_i \leq k$, $\forall i \in \{1, ..., l-1\}$.

1.3.1 Notations

On considère dans $\mathbb{R}$ une suite de points $t_0, ..., t_m$ tels que $t_i \leq t_{i+1}$ $\forall i \in \{0, ..., m-1\}$, appelés nœuds.

Définition: multiplicité

Si s nœuds consécutifs t_i sont confondus ($t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+s-1}$), on dit que le nœud est de multiplicité s.

D'autre part, on pose

$$w_{ij}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+j} - t_i} \mathbb{1}_{\{t_i < t_{i+1}\}}$$

Par convention, à chaque fois que nous écrivons une fraction dont le dénominateur est nul, il faudra l'interpréter comme étant nulle.

1.3.2 Définition des β-splines

Posons $t = (t_0, ..., t_m)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq m - k - 1$, les fonctions $\S B_{i,k,t}$ notées aussi $B_{i,k}$ lorsque la suite t est dixée, sont définies via la relation de récurrence sur k suivante :

$$B_i, 0(x) = \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(x)$$

Pour $k \geq 1$:

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x) B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x)) B_{i+1,k-1}(x)$$

Remarque : Si pour un indice i, $t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+k+1}$ (donc t_i est un nœud de multiplicité $\geq k+2$), alors on a $B_{i,k} \equiv 0$.

Propriété:

Si t_i est de multiplicité $k+1$, alors $B_{i,k}(x) = 0$

Démonstration :

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Or, $t_i = t_{i+1} = ... = t_{i+k+1}$, donc on a $w_{i,k}(x) = 0$ et $w_{i+1,k}(x) = 0$. Par conséquent :

$$B_{i,k}(x) = B_{i+1,k-1}(x)$$

et par une récurrence simple, on montre finalement que :

$$B_{i,k}(x) = ... = B_{i+k,0}(x) = \mathbb{1}_{[t_{i+k}, t_{i+k+1}}(x)$$

On écarte dans toute la suite la possibilité d'avoir un nœud de multiplicité $k+2$.

Théorème:

1. $B_{i,k}$ est polynomiale par morceaux de degré k (par récurrence)
2. $B_{i,k}(x) = 0$ si $x \notin [t_i, t_{i+k+1}[$. On appelle $[t_i, t_[i + k + 1[$ le support de $B_{i,k}$ (récurrence)
3. $B_{i,k}(x) > 0$ si $x \in]t_i, t_{i+k+1}[$ (récurrence)
   $B_{i,k}(t_i) = 0$ sauf si t_i de multiplicité $k+1$, car alors $B_{i,k}(t_i) = 1$
4. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $t_0, ..., t_k < a$ et $t_{m-k}, ..., t_m \geq b$.
   $$\forall x \in [a, b[, \quad \sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}(x) = 1$$
5. Soit $x \in]t_i, t_{i+k+1}[$, alors :
   $$B_{i,k}(x) = 1 \Leftrightarrow x = t_{i+1} = ... = t_{i+k}$$
6. $B_{i,k}$ est continue à droite et même indéfiniment dérivable à droite.

Démonstration : 3. Montrons que si t_i est de multiplicité $k+1$, alors $B_{i,k}(t_i) = 1$.

La relation de récurrence donne :

$$B_{i,k}(x) = w_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - w_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Comme $t_i = ... = t_{i+k}$, on a :

$$w_{i,k}(t_i) = 0 \text{ et } w_{i+1,k}(t_i) = 0$$

Par conséquent :

$$B_{i,k}(t_i) = B_{i+1,k-1}(t_i) = B_{i+1,k-1}(t_{i+1})$$

et t_{i+1} est de multiplicité k, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $B_{i+1,k-1}(t_{i+1}) = B_{i,k}(t_i) = 1$

On traite désormais le cas où t_i est de multiplicité $< k+1$.

— Si $t_i < t_{i+1}$, de la relation de récurrence :

$$B_{i,k}(t_i) = \underbrace{w_{i,k}(t_i)}_{=0} B_{i,k-1}(t) + (1 - w_{i+1,k}(t_i)) \underbrace{B_{i+1,k-1}(t_i)}_{=0}$$

car $t_i \notin [t_{i+1}, t_{i+k+1}[$.

— Dans le cas général, t_i est de multiplicité k. Donc t_{i+1} est de multiplicité $k-1$. Dans ce cas critique :

$$B_{i,k}(t_i) = (1 - w_{i+1,k}(t_i))B_{i+1,k-1}(t_i) = (1 - w_{i+1,k}(t_i))\underbrace{B_{i+1,k-1}(t_{i+1})}_{=0}$$

d'après l'hypothèse de récurrence puisque t_{i+1} est de multiplicité au plus $k-1$.