

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Automatique</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Éléments finis</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>Béziars-Splines</b>	<b>3</b>
1	Courbes paramétrées	3
2	Splines	3
3	B-Splines	3
4	Algorithme	4
<b>IV</b>	<b>Optimisation linéaire</b>	<b>4</b>
<b>V</b>	<b>Processus de Markov</b>	<b>4</b>
<b>VI</b>	<b>Statistiques</b>	<b>5</b>

## Première partie

# Automatique

1. Définition linéaire, invariant.
2. Définition accessible, ensemble d'accessibilité, contrôlable, complètement contrôlable.
3. Solution de l'équation  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
4. Définition transformée de Laplace. Transformée de  $f'$ . Transformée de cos, sin et exponentielle.
5. Fonction de transfert

## Deuxième partie

# Éléments finis

1. Intégration par parties
2. Formule de Stokes
3. Formule d'Ostrogradsky
4. Première et deuxième identité de Green
5. Conditions de Dirichlet
6. Théorème de Lax-Milgram  $\sim$  Démonstration...
7. Choix de  $V_h$ , dimension ?
8. Fonctions de base, problème discrétisé
9. Matrice de rigidité
10. **R est définie positive**
11. Espace de Hilbert (TOUT définir)
12. Définition de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Quid que  $\Omega$  ?
13. Pseudo-topologie sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  et sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$
14. Dérivation des distributions. Continuité ?
15. Définition de  $\partial^\alpha$
16. Définition de  $L^p(\Omega)$ . Produit scalaire et norme sur  $L^2(\Omega)$ .
17. Lien entre  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ .
18. Densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .
19. Injection canonique
20. Lien entre la convergence dans  $L^2(\Omega)$  et celle dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$
21. Définition de  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$
22. Produit scalaire et norme sur  $H^1(\Omega)$
23.  $H^1(\Omega)$  : 3 propriétés. **Il est complet**
24. Propriété de Rellich. Application compacte
25.  $H_0^1(\Omega)$  : Propriété.
26. **Formule de Poincaré**
27. **Semi norme sur  $H_0^1(\Omega)$  et lien avec  $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$**
28. Définition de  $\gamma_0$
29. Définition de  $W^{m,p}(\Omega)$ . Norme sur cet espace.
30. Fonctions  $\mu$ -Holderienne
31. Condition d'injection canonique entre  $H^m(\Omega)$  et  $\mathcal{C}^s(\Omega)$
32. Norme sur un dual

33. Théorème de projection
34. Théorème de représentation de Riesz-Fréchet
35. **Théorème de Stanpaccia**
36. **Lemme de Cea**
37. Qu'est-ce qu'un élément fini ?
38. Définition d'unisolvance. Comment la démontrer ?

## Troisième partie

# Béziers-Splines

## 1 Courbes paramétrées

1. Régularité, p-régulier
2. Arc admet un vecteur limite tangent
3. Suivant p et q pairs et impairs
4. Branches infinies dans le cas des courbes planes
5. Revoir réduction d'intervalle
6. Longueur de l'arc
7. Arcs équivalents
8. Courbes gauche : tangente, plan normal, plan osculateur, normale principale
9. Paramétrisation normale, abscisse curviligne
10. Exemple de paramètre admissible
11. Courbure algébrique, rayon de courbure, centre de courbure, cercle osculateur, développée
12. Formules de Frénet
13. Trouver un plan tangent

## 2 Splines

14. Définition de la suite  $\tau, r, \mathcal{P}^{k,\tau,r}$
15. Dimension et base de  $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$
16. Particularité des fonctions splines, dimension de l'espace des fonctions splines
17. Conditions (C) pour splines cubiques
18. Unicité ?
19. Problème de minimisation vérifié par une fonction spline cubique

## 3 B-Splines

20. Définition de nœuds, multiplicité k
21. Définition de  $w_{ij}(x)$
22. Relation de récurrence pour les  $B_{i,k}$
23. Quelle multiplicité pour avoir  $B_{i,k}$  nul ?
24. 6 propriétés des  $B_{i,k}$
25. Formule de dérivée à droite
26. Définition de  $\mathcal{P}^{k,\tau}$
27. Lien entre n, m et k. Condition pour une base.

## 4 Algorithme

28. Définition de  $S$
29. Algorithme de De Casteljau dévaluation en un point
30. Algorithme des dérivées
31. Algorithme d'insertion d'un nœud

## Quatrième partie

# Optimisation linéaire

1. Définition infimum, minimum
2. Définition coercive
3. Deux exemples fonctions coercives
4. **Exemple de  $J$  coercive**
5. **Condition pour que  $J$  atteigne son minimum**
6. **Rapport frontière et minimum**
7. Définition dérivée directionnelle, Gâteaux-différentiable, gradient
8. Définition de Fréchet-différentiable
9. **Fréchet  $\Rightarrow$  Gâteaux**
10. Définition espace convexe, épigraphe.
11. **Équivalence fonction convexe**
12. Définition strictement convexe,  $\alpha$ -convexe.
13. Équivalence à  $f$  convexe
14. **Équivalence à  $\alpha$ -convexe**
15. **Condition d'optimalité dans un ouvert**
16. **Condition nécessaire puis condition suffisante pour un minimum**
17. **Théorème de Kuhn et Tucker**
18. Contraintes qualifiées
19. **Théorème dans le cas des contraintes qualifiées**
20. **Condition nécessaire de qualification**
21. **Lemme : équivalence à un minimum**
22. **Équivalent à minimum avec  $\lambda$**
23. Point selle
24. **Propriété des points selles : système vérifié**
25. **Lemme : inégalité sup et inf**
26. **Problème dual**
27. Problème d'optimisation linéaire, passage du problème sous forme canonique à la forme standard
28. Ensemble des solutions réalisables, sommets
29. Définition de  $\Gamma$ ,  $A_\gamma$  et  $\mathcal{B}$ .

## Cinquième partie

# Processus de Markov

1. Définition de processus

2. Propriété de Markov, homogénéité
3. Mesure de probabilité,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  : représentation vectorielle
4. Matrice stochastique
5. **Relations de Kolmogorov**
6. Définition " $i$  conduit à  $j$ ", conduit ) un préordre. Notation.
7.  $i$  et  $j$  communiquent, relation d'équivalence, notation.
8. Définition transitive, finale, ergodiques.
9. Existence de classes finales dans le cas fini
10. Forme canonique matrice de transition, puissance  $n$
11. **Si  $E$  fini, alors le processus finira presque sûrement dans une des classes finales**
12. **A quoi correspond  $(I - Q)^{-1}$  ?**
13.  **$B = NR$  ?**
14. Ensemble des entiers avec un chemin
15. Propriété fondamentale
16.  **$\text{PGCD}(N_{ii})$**
17. Période d'une classe, classe apériodique.
18. **Forme de  $N_{ii}$  et de  $N_{ij}$**
19. Définition de  $i \sim j$
20. Nombre de sous-classes cycliques
21. Chaîne régulière
22. **Équivalence à chaîne régulière**
23. **Théorème fondamental des chaînes régulières**
24. **Théorème ergodique**

## Sixième partie

# Statistiques

1. Définition suite chronologique
2. Deux modèles de décomposition : quelle combinaison ? Dans quels cas va-t-on choisir l'un ou l'autre ?
3. Moindres carrés : expression de  $a$  et  $b$ .
4. Mise en place de la méthode des deux points
5. Expression de  $r$
6. Moindre carré polynomial : expression de  $\theta^{MC}$
7. Formule des moyennes mobiles
8. Définition MMC
9. Étape dans la décomposition d'une série chronologique
10. Loi du  $\chi^2$  : espérance et variance
11. Loi de Student, de Fisher, carré d'une Student
12. Définition MLG
13. Définition des estimateurs  $A$ ,  $B$  et  $\sigma^2$ . Lois de chacun.
14.  $d_x^2$  ?
15. Statistiques pour avoir les intervalles de confiance pour  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma^2$
16. IC de chacun d'entre eux
17. Test significatif du lien linéaire : Stat et zone de rejet

18. Test d'un modèle linéaire spécifique
19. IC pour  $\mathbb{E}(Y_0)$  et pour une observation  $Y_0$
20. Test du caractère significatif de la liaison linéaire par comparaison de modèle
21. ANOVA 1 : Gueule des données et du modèle
22. Définition dimension
23. Définition de  $M_1$  et  $M_p$
24. Estimation des paramètres dans chacun des modèles
25. Statistique de test
26. Définition contraste
27. Statistique de test pour les contrastes
28. Estimateur des  $\mu_i$  et des  $\sigma_i^2$
29. IC pour  $\mu_i$