Table des matières

Première partie
Processus de Markov à temps discret

1 Définitions

Définition: Processus

Un processus est un phénomène aléatoire qui se déroule au cours du temps.

Si on a un processus, son état à la date t est donné par une variable aléatoire notée par exemple X_t
$X_t(\omega) =$ l'état du processus à la date t si le hasard est $\omega \in \Omega$.

L'ensemble des temps peut être :
— discret : $\{0, ..., n\}$ ou $\mathbb{N}$
  Ce ne sont pas forcément des dates, mais par exemple des numéros d'épreuves.
— continu : $[0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$

Dans ce cours, les processus auront leurs états dans un ensemble fini ou parfois dénombrable E, appelé l'espace d'états. Ainsi, on note :

$$X = (X_t)_{t \in T}$$

Définition: Propriété de Markov

On dit qu'un processus décrit par $X = (X_t)_{t \in T}$ a la propriété de Markov si :

$$\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n < t,\ \mathcal{L}(X_t | X_{t_n}, ..., X_{t_0}) = \mathcal{L}(X_t | X_{t_n})$$

Définition: Homogène

On dit que le processus a la propriété de Markov homogène s'il a la propriété de Markov et, $\forall s < t$:

$$\mathcal{L}(X_t | X_s = x) = \mathcal{L}(X_{t-s} | X_0 = x)$$

1.1 Formalisme matriciel

E est ici considéré comme fini (ou dénombrable), $E = \{i, j, ..., k, ...\}$

Définition: Différents vecteurs

— Une mesure de probabilité μ sur E va être représenté par un vecteur ligne, et qu'on notera μ :

$$\mu = (\mu_j)_{j \in E} \text{ où } \mu_j = \mu(\{j\})$$

— Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sera représenté par un vecteur colonne qui sera noté f :

$$f = (f^i)_{i \in E} \text{ où } f^i = f(i)$$

Définition: Matrices stochastiques

L'ensemble des lois $\mathcal{L}(X_t|X_0 = i)$, $i \in E$ qu'on note $\mathcal{L}(X_t|X_0)$ sera une matrice carrée, notée Π_t, appelée matrice stochastique.

— la ligne i correspondant à la mesure de probabilité

$$\mathcal{L}(X_t, X_0 = i) = (P_j^i(t))_{j\in E} = (\mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i))_{j\in E}$$

— la colonne j représente la fonction :

$$i \in E \mapsto P_j^i(t) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)$$

Π_t est une matrice à termes positifs dont la somme de chaque ligne vaut 1.

Exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = i) &= \sum_j f(j)\mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i) \\ &= \sum_j P_j^i(t) f^j \\ &= (\Pi_t f)^i \end{aligned}$$

Si $\mu_0 = \mathcal{L}(X_0)$, $\mu_{0j} = \mathbb{P}(X_0 = j)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_0}[f(X_t)] &= \sum_i \mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = i]\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_i \mu_{0i}(\Pi_t f)^i \\ &= \mu_0 \Pi_t f \end{aligned}$$

et alors si $\mu_t = \mathcal{L}(X_t)$, on a $\mu_t = \mu_0 \Pi_t$ (formule de probabilité totale, μ_0 représentant la loi de X_0)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = j) &= \sum_i \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_i \mu_{0,i} P_j^i(t) \\ &= (\mu_0 \Pi_t)_j \end{aligned}$$

Dans la suite du cours, nous considérerons que nos processus ont toujours la propriété de Markov homogène.

Théorème: Relations de Kolmogorov

$$\forall s, t \geq 0, \Pi_t \Pi_s = \Pi_s \Pi_t = \Pi_{s+t}$$

$$\Pi_0 = I$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\forall i,j,\ \mathbb{P}[X_{t+S}=j|X_0=i] &= \sum_{k\in E}\mathbb{P}(X_{t+s}=j|X_s=k,X_0=i)\mathbb{P}(X_s=k|X_0=i)\\
&= \sum_{k\in E}\mathbb{P}(X_{t+s}=j|X_s=k)\mathbb{P}(X_s=k|X_0=i) \text{ Par la propriété de Markov}\\
&= \sum_{k\in E}\mathbb{P}(X_t=j|X_0=k)\mathbb{P}(X_j=k|X_0=i) \text{ propriété homogène}\\
P^i_j(t+s) &= \sum_{k\in E}P^i_k(s)P^k_j(t)\\
(\Pi_{t+s})^i_j &= (\Pi_s\Pi_t)^i_j
\end{aligned}$$

Donc $\Pi_{t+s}=\Pi_s\Pi_t=\Pi_{s+t}=\Pi_t\Pi_s$.

$$(\Pi_0)^i_j=\mathbb{P}(X_0=i|X_0=j)=\delta_{ij}\Rightarrow\Pi_0=I$$

2 Processus de Markov (sous entendu homogène) en temps discret (T=$\mathbb{N}$)

D'après la relation de Kolmogorov :

$$\Pi_n=(\Pi_1)^n=\Pi^n$$

On note Π_1 par Π la matrice de transition de la chaîne de Markov.
On note $P^i_j=\mathbb{P}(X_1=j|X_0=i)$ Ainsi :

$$\Pi=[P^i_j]_{i,j\in E}$$

La ligne i de $\Pi_n=\Pi^n=\mathcal{L}(X_n|X_0=i)$
Si $\mu_0=\mathcal{L}(X_0)$, alors $\mathcal{L}(X_n)=\mu_0\Pi^n$

$$\mathcal{L}(X_0)=(\mathbb{P}(X_0=j))_{j\in E}$$

$$\mathcal{L}(X_n)=(\mathbb{P}(X_n=j))_{j\in E}=\left(\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(X_n=j|X_0=i)\mathbb{P}(X_0=i)\right)_{j\in E}=\mu_0\Pi^n$$

2.1 Diagramme de la chaîne de Markov

C'est un graph orienté dont tous les sommets sont les éléments i de E, et les arêtes (orientées) sont définies ainsi :

$i \longrightarrow j$ si et seulement si $p^i_j>0$ ($\mathbb{P}(X_1=j|X_0=i)>0$), ie si et seulement si on peut passer de i à j en une étape.

2.2 Classification des états

Définition: Conduire, communiquer et classe d'équivalence

i peut conduire à j si et seulement si $i=j$ ou s'il existe un chemin allant de i à j (qu'on note $i\rightsquigarrow j$), ie :

$$\exists n\geq 0;\ p^i_j(n)>0\ (\mathbb{P}[X_n=j|X_0=i]>0)$$

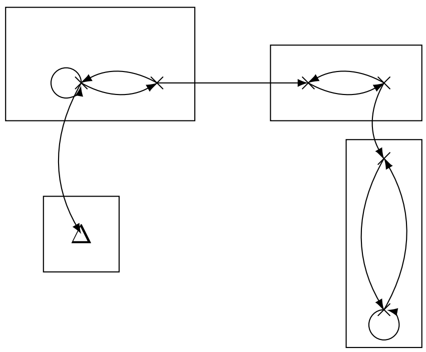
Cette relation est un préordre.
— réflexive
— transitive

A l'aide de ce préordre, on construit une relation d'équivalence.
"i et j communiquent" (noté $i \leftrightarrow j$) si et seulement si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$.

— Réflexive
— Symétrique
— Transitive

L'espace d'état est alors partitionné en classes d'équivalence.

Exemple :



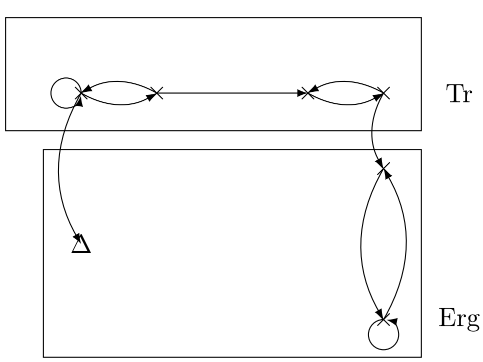
Le préordre induit une relation d'ordre sur les classes : $C \rightsquigarrow D \Leftrightarrow \exists i \in C;\ \exists j \in D;\ i \rightsquigarrow j$.
Ceci ne dépend pas des i et j choisis.

Si $C \rightsquigarrow D$ et $D \rightsquigarrow C$ alors $C = D$

Définition: Transitoire, finale, ergodique

— Une classe est dite transitive si et seulement si elle peut conduire à une autre classe. Ses éléments sont dits transitoires.
Tr = Ensemble des états transitoires.
— Si une classe n'est pas transitoire, on dit qu'elle est finale (elle ne peut conduire qu'à elle-même). Ses éléments sont dits ergodiques.
Erg=ensemble des états ergodiques.
— Si la classe finale n'est composée que d'un élément, on dit qu'il est absorbant ($\Leftrightarrow p_i^i = 1$)
On le note Δ

Exemple :



Théorème:

Si E est fini, il existe toujours des classes finales, et toute classe transitoire peut conduire à au moins une classe finale (évident)

Remarque : Si E est infini, c'est faux. Prendre par exemple $E = \mathbb{N}$, où chaque $n \in \mathbb{N}$ forme une classe $\{n\}$, elles sont toutes transitoires.

Définition: Forme canonique de la matrice de transition

On regroupe les états par classe, en mettant d'abord les classes finales. Par exemple, si on considère C_1 et C_2 $\in$Erg et C_3, C_4 et C_5 $\in$Tr :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \left(\begin{array}{cc|ccc} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ & R & & Q & \\ & & & & \end{array}\right) \end{array} = \Pi$$

$$\Pi^n = \left(\begin{array}{cc|ccc} A_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ & R_n & & Q^n & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Q s'appelle la matrice de passage des transitoires aux transitoires.
R la matrice de passage des transitoires aux ergodiques.

Théorème:

Si E est fini, alors presque sûrement le processus finira dans une des classes finales.

Démonstration :
On suppose $X_0 = i$.
Si i est ergodique, X_n reste dans la classe finale de i.
Si i est transitoire :

$$\mathbb{P}(X_n \in Tr | X_0 = i) = \sum_{j \in Tr} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = p_n(i) = \sum_j Q^n_{ji}$$

Il est clair que $X_{n+1} \in Tr \Rightarrow X_n \in Tr$, donc $p_{n+1}(i) \leq p_n(i)$. Donc $(p_n(i))_n$ est une suite décroissante.
E étant fini, $\exists n;\ \mathbb{P}(X_n \in Tr | X_0 = i) < 1$ (car $\exists j \in Erg$ tel que $in \to j$).

$\forall i$, soit n_i tel que $p_{n_i}(i) < 1$. Alors $p_n(i) < 1\ \forall n \geq n_i$.

Soit $N = \max_{i \in Tr} n_i < +\infty$ (Tr fini)

$$\forall i \in Tr, \forall n \geq N, p_N(i) < 1$$

Soit $p^* = \max_{i \in Tr} p_N(i) < 1$.
$\forall i,\ p_n(i)$ décroit, et $p_n(i) > 0$, donc $p_n(i)$ converge vers l_i. Montrons que $l_i = 0$, en considérant la sous-suite $(p_{kN}(i))_k$ qui converge vers l_i.

$$\begin{aligned}
p_{kN}(i) &= \mathbb{P}(X_{kN} \in Tr | X_0 = i) \\
&= \sum_{h \in Tr} \mathbb{P}(X_{kN} \in Tr | X_{(k-1)N} = h, X_0 = 1)\mathbb{P}(X_{(k-1)N} = h | X_0 = i) \\
&= \sum_{h \in Tr} \mathbb{P}(X_n \in Tr | X_0 = h)\mathbb{P}(X_{(k-1)N} = h | X_0 = i) \\
&\leq \sum_{k \in Tr} p^* \mathbb{P}(X_{(k-1)N} = h | X_0 = i) \\
&\leq p^* p_{(k-1)N}(i)
\end{aligned}$$

$$p_{kN}(i) \leq (p^*)^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $l_i = 0$.

De plus, $(X_n \in Tr)_n \to \cap_n (X_n \in Tr)$, donc, par propriété des mesures finies due à la σ-additivité :

$$\mathbb{P}(\cap_n (X_n \in Tr) | X_0 = i) = 0$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\cup_n (X_n \in Tr) | X_0 = i) = 1$$

$\forall i$ point de départ, $\exists n$ presque sûrement, $X_n \in Erg$.

Remarque : Le théorème précédent équivaut à dire que :

$$Q^n \to 0$$

car :

$$\mathbb{P}(X_n \in Tr | X_0 = i) = \sum_j Q^n_{ji} \to 0$$

Ceci permettra de calculer :
- le temps moyen passé dans Tr
- la probabilité de finir dans telle ou telle classe finale

Soit une chaîne de Markov de matrice de transition Π écrite sous forme canonique :

$$\Pi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

$$R = [p^i_j]_{i \in Tr,\ j \in Erg} \ Q = [p^i_j]_{i,j \in Tr}$$

Lemme:

$I - Q$ est inversible.

Démonstration :

$$(I - Q)(I + Q + ... + Q^n) = I - Q^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} I$$

$$\Rightarrow \det(I - Q) \det\left(\sum_{i=0}^{n} Q^k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \det(I) = 1$$

Dont $\det(I-Q) \neq 0$ donc $I-Q$ inversible.
En multipliant par $(I-Q)^{-1}$ à gauche :

$$I+Q+...+Q^n = (I-Q)^{-1}(I-Q^{n-1}) = (I-Q)^{-1} - (I-Q)^{-1}Q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (I-Q)^{-1}$$

Donc la série des Q^k converge et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k = (I-Q)^{-1}$$

Théorème:

Soit $N = (I-Q)^{-1} = [N_j^i]_{i,j\in Tr}$. Alors N_j^i=le nombre moyen de fois où le processus est passé par j sachant qu'il est parti de i.

Démonstration :
Soient $i \in Tr$ et $j \in Tr$. Soit Y_j le nombre de fois où le processus par par j.

$$Y_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{j\}}(X_n)$$

Calculons $\mathbb{E}(Y_j|X_0=i)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_j|X_0=i) &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{j\}}(X_n)|X_0=i\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(1_{\{j\}}(X_n)|X_0=i) \text{ (Corollaire de Bepo-Levi)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n=j|X_0=i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_j^i(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\Pi_n]_j^i \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [Q^n]_j^i
\end{aligned}$$

Donc :

$$(\mathbb{E}(Y_j|X_0=i)) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n = (I-Q)^{-1}$$

Corollaire:

Le nombre moyen de fois où le processus passe par les états transitoires, sachant qu'il est parti de i transitoire, vaut $N^i = \sum_{j\in Tr} N_j^i$.

Théorème:

Soit $B = NR$ ($B = [B^i_j]_i \in Tr,\ j \in Erg$)
alors B^i_j est la probabilité que le premier état ergodique j sachant que le processus est parti de i, transitoire.

Démonstration :
Soi B^i_j la probabilité que le premier état ergodique atteint soit j sachant qu'on est parti de i.
Pour que le premier état ergodique atteint soit j, deux possibilités :

- On va de i à j en 1 coup : probabilité p^i_j
- On va de i à j en au moins deux coups :
  - au premier coup, on va à $k \in Tr$, probabilité p^i_k
  - partant de k, le premier état ergodique atteint est j : probabilité B^k_j.

Donc $\forall i \in Tr$, $\forall j \in Erg$:

$$B^i_j = p^i_j + \sum_{k \in Tr} p^i_k B^k_j = [R]^i_j + [QB]^i_j$$

Donc :

$$\begin{aligned} & B = R + QB \\ \Rightarrow\ & (I - Q)B = R \\ \Rightarrow\ & B = (I - Q)^{-1} R = NR \end{aligned}$$

Corollaire:

- Si j est absorbant, $B^i_j = \mathbb{P}(\text{finir en } j | X_0 = i)$
- Si C est une classe finale :
$$B^i_C = \mathbb{P}(\text{finir en } C | X_0 = i) = \sum_{j \in C} B^i_j$$

Deuxième partie

Etudes des séjours dans une classe

1 Période de classe

1.1 Définition

Soit C une classe d'équivalence pour $i \leftrightarrow j$.

$$C = cl\{i\} = cl\{j\},\ \forall i, j \in C$$

$\forall i, j \in C$, il existe un chemin (orienté) allant de i à j. On appelera :

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \{n > 0;\ \text{il existe un chemin allant de } i \text{ à } j \text{ de longueur } n\} \\ &= \{n > 0;\ p_j^i(n) > 0\} \end{aligned}$$

Propriété: fondamentale

$i, j, k \in C$
Si $a \in N_{ij}$ et $b \in N_{jk}$ alors $a + b \in N_{ik}$, ie $N_{ij} + N_{jk} \subset N_{ik}$.

Théorème:

Soit $d_i = PGCD(N_{ii})$ pour $i \in C$.

$$\forall i, j \in C, d_i = d_j$$

Démonstration :
Soient $a \in N_{jj}$, $b \in N_{ji}$ et $c \in N_{ij}$.

$$a + b + c = c + a + b \in N_{ii}$$

Or, $b + c = c + b \in N_{ii}$, donc :

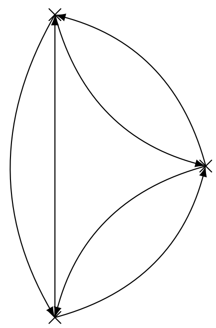
$$a + b + c \equiv 0[d_i] \text{ et } b + c \equiv 0[d_i] \Rightarrow a \equiv 0[d_i]\ \forall a \in N_{jj}$$

donc $d_j \equiv 0[d_i]$ et de même, $d_i \equiv 0[d_j]$, donc $d_i = d_j$.

Définition: Période d'une classe

Notons d cet entier commun à tous les $i \in C$. d est appelé la *période de la classe C*.
Si $d = 1$, la classe est dite *apériodique*.

Exemple :



Ici, on revient au même point en 2 ou 3 coups. On peut faire ça avec n'importe quel point, comme on l'a vu avec le théorème précédent.
$d = PGCD(2,3) = 1$

1.2 Caractérisation

Théorème:

$\forall i \in C,\ N_{ii} = \{kd,\ k \in \mathbb{N} \backslash A_i\},\ A_i$ fini.

Démonstration :
Quitte à diviser tous les éléments de N_{ii} par d, on peut supposer que $PGCD(N_{ii}) = 1$ (pour simplifier).
N_{ii} est un semi-groupe pour $+$:

$$a, b \in N_{ii} \Rightarrow a + b \in N_{ii}$$

$N_{ii} \subset \mathbb{N}^*$
Donc $N_{ii} = \mathbb{N} \backslash A_i$, A_i ensemble fini, ie $\exists k_i$ tel que $\forall n \geq k_i,\ n \in N_{ii}$. (rien compris)

$N_{ii} \subset \mathbb{Z}$ et $PGCD(N_{ii}) = 1$, ce qui signifie que le module sur $\mathbb{Z}$ engendré par N_{ii} est celui engendré par 1 qui est $\mathbb{Z}$.
(Après quelques recherches, il ne s'agirait pas d'un module mais plutôt d'un idéal)o

$$(N_{ii}) = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \alpha_k n_k,\ \ \alpha_k \in \mathbb{Z}, n_k \in N_{ii} \right\}$$

$1 \in (N_{ii})$
$\Rightarrow$ Identité de Bézout, i.e. $\exists n_1, ..., n_r \in N_{ii}$, $a_1, ..., a_r \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1 n_1 + ... + a_r n_r = 1$.
On peut sopposer que $a_1, ..., a_p > 0$ et $a_{p+1}, ..., a_r \leq 0$.

$$a_1 n_1 + ... + a_p n_p = n \in N_{ii}$$

$$m = -(a_{p+1} n_{p+1} + ... + a_r n_r) \in N_{ii} \cup \{0\}$$

N_{ii} étant un semi-groupe pour $+$:

$$\exists n \in N_{ii}, m \in N_{ii} \cup \{0\};\ n - m = 1$$

Si $m \neq 0$:
Soit $k_i = m^2$. Si $k \geq m^2$

$$k = m\alpha + \beta,\ \ \alpha \geq m,\ \ 0 \leq \beta < m$$

$$\begin{aligned} k &= m\alpha + \beta(n - m) \\ &= \beta n + \underbrace{(\alpha - \beta)}_{>0} m \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, $k = \alpha m \in N_{ii}$
Si $\beta > 0$, $\beta n \in N_{ii}$ et $(\alpha - \beta)n \in N_{ii}$, donc $k \in N_{ii}$ ie

$$N_{ii} = \{\mathbb{N} \backslash \{0, ..., m^2\}\}$$

Théorème:

$\forall i, j \in C$, $\exists r_{i,j}$, $0 \leq r_{i,j} < d$ et

$$N_{ij} = \{kd + r_{ij},\ k \in \mathbb{N} \backslash A_{ij}$$

avec A_{ij} un ensemble fini dépendant de i et j.

Démonstration :
Montrons d'abord que deux éléments $a, b \in N_{ij}$ ont même reste dans la division par d.
Soient $a, b \in N_{ij}$, $c \in N_{ji}$.
$a + c$ et $b + c \in N_{ii}$ donc $a + c \equiv 0[d_i]$ et $c + b \equiv 0[d_i]$, donc $a + c - (b + c) = a - b \equiv 0[d_i]$. Donc a et b ont même reste dans la division par d.

Notons r_{ij} ce reste commun à tous les éléments de N_{ij}. Tout élément a de N_{ij} s'écrit $a = kd + r_{ij}$.
Soit k_i tel que $\forall l \geq k_i$, $ld \in N_{jj}$
Soit $a_0 = k_0 d + r_{ij}$, alors $\forall k \geq k_i$, $a_0 + ld \in N_{ij}$

$$\forall l \geq k_i, (k_0 + l)d + r_{ij} \in N_{ij}$$

1.3 Relation d'équivalence dans la classe C et sous-classes périodiques

Définition:

Si $i, j \in C$, on dit que $i \sim j$ si et seulement s'il existe un chemin de longueur multiple de la période d joignant i à j
Cela se traduit par $i \sim j \Leftrightarrow r_{ij} = 0$

Cette relation est évidemment (hum) réflexive et transitive.
Pour la symétrie : si $r_{ij} = 0$, soient $a \in N_{ji}$ et $b \in N_{ij}$. $a + b \in N_{jj}$ donc $a + b \equiv 0[d]$.
Or $b \equiv 0[d]$ car $r_{ij} = 0$ donc $a \equiv 0[d]$: $r_{ji} = 0$.
Donc C se partitionne en classes d'équivalences pour $\sim$. On les appelle les sous-classes cycliques.

Théorème:

Si d est la période de C alors C possède exactement d sous-classes cycliques.
Celles-ci sont atteintes successivement toujours dans le même ordre tant que l'état du processus reste dans C.

2 Chaînes régulières

Définition:

On dit que la chaîne de Markov est régulière si et seulement si :

1. Elle ne possède qu'une seule classe
2. Elle est apériodique (d=1)

Théorème:

Les trois points suivants sont équivalents.

1. La classe est régulière
2. $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall i, j \in E,\ \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0$
3. $\exists n_0,\ \forall i, j \in E, \mathbb{P}(X_{n_0} = j | X_0 = i) > 0$

Démonstration :
Il est clair que $2 \Rightarrow 3$.
$3 \Rightarrow 1$ car $\forall i, j \in N_{ij} = \mathbb{N} \backslash$ ens. fini. Donc $i \rightsquigarrow j$ et $r_{ij} = 0$
$1 \Rightarrow 2$:

$$\forall i, j \in N_{ij} \supset \{n > 0,\ n \geq n_i\}$$

$(r_{ij} = 0$ et $N_{ij} \neq \emptyset)$
Soit $n_0 = \max_{i \in E}(n_i) < +\infty$ (car E fini).
$\forall i, j \in E, \exists n_0;\ \forall n \geq n_0, n \in N_{ij}$, ie $\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) > 0$.

Lemme:

Soit $A = (a^i_j)_{i,j}$ une matrice "stochastique".
Soit $a^* = \min_{i,j} a^i_j > 0$
Soit $X_0 = (x^i_0)_i$ un vecteur colonne.
On pose $X_n = AX_{n-1} = A^n X_0$. Soit $M_n = \max_i x^i_n$ et $m_n = \min_i x^i_n$.
On a m_n croissante, M_n décroissante et $(M_n - m_n) \leq (1 - 2a^*)(M_0 - m_0)$.

Démonstration :

$$x^i_{n+1} = \sum_j a^i_j x^j_n \geq \underbrace{\sum_j a^i_j}_{=1} m_n = m_n$$

Donc $m_{n+1} \geq m_n$, donc m_n est croissante.
De même, M_n est décroissante.

A présent, soit j_0 tel que $x^{j_0}_n = m_n$.

$$\begin{aligned} x_n n + 1^i &= a^i_{j_0} m_n + \sum_{j \neq j_0} a^i_j x^j_n \\ &\leq a^i_{j_0} m_n + \underbrace{\left(\sum_{j \neq j_0} a^i_j \right)}_{=1 - a^i_{j_0}} M_n \\ &\leq M_n - a^i_{j_0}(M_n - m_n) \end{aligned}$$

Donc

$$M_{n+1} \leq M_n - a^*(M_n - m_n) \tag{1}$$

En appliquant le résultat à $-X_n$ et à $-X_{n+1}$:

$$-m_{n+1} \leq -m_n - a^*(-m_n - (-M_n))$$
$$-m_{n+1} \leq -m_n - a^*(M_n - m_n) \tag{2}$$

$$\begin{array}{rcl} (1)+(2) : M_{n+1} - m_{n+1} & \leq & M_n - m_n - 2a^*(M_n - m_n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} & \leq & (1-2a^*)(M_n - m_n) \end{array}$$

Par récurrence, on obtient le résultat.

Théorème: fondamental

On considère une chaîne de Markov régulière et E fini.
Dans ce cas, il existe une et une seule loi de probabilité invariante sur E. Notons la μ. Celle-ci vérifie :

1. $\forall i \in E$, $\mu_i > 0$
2. $\forall \mathcal{L}(X_0), \mathcal{L}(X_n) \to \mu$ exponentiellement vite
3. μ est l'unique solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \nu\Pi & = & \nu \\ \sum_{i\in E} \nu_i & = & 1 \end{array} \right.$$

Démonstration :
Considérons la colonne j de Π^n : C_j^n.
Que devient-elle lorsque $n \to +\infty$?

$$C_j^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{jième ligne} \qquad \begin{array}{rcl} C_j^n & = & \Pi^n C_j^0 \\ & = & \Pi C_j^{n-1} \end{array}$$

Soit $M_j^n = \max_i (C_j^n)_i$ et $m_j^n = \min_i (C_j^n)_i$.
On a M_j^n décroissante, m_j^n croissante et $m_j^n \leq M_j^n$.
Comme $M_j^n \geq m_j^0$, M_j^n converge. De même, m_j^n converge également.

Montrons que $M_j^n - m_j^n \to l_j = 0$.
Soit n_0 tel que $A = \Pi^{n_0}$ soit à termes positifs (cela signifie que la chaîne est régulière, d'après le premier théorème de cette section).
Soit $p^* = \min_{i,j}(p_j^i(n_0)) > 0$. On a :

$$M_j^{kn_0} - m_j^{kn_0} \leq (1-2p^*)^k \underbrace{(M_j^0 - m_j^0)}_{=1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Donc la sous-suite $(M_j^{kn_0} - m_j^{kn_0})_k$ de $(M_j^n - m_j^n)_n)$ converge vers 0. Or, la suite est convergente vers l_j, donc $l_j = 0$.
Donc M_j^n et m_j^n ont même limitE. Notons la μ_j.

$$C_j^n = (p_j^i(n))_i \to \begin{pmatrix} \mu_j \\ \vdots \\ \mu_j \end{pmatrix}$$

$$\Pi^n \to \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\mu_j \geq m_j^{n_0} \geq p^* > 0$$

$$\forall j,\ \mu_j > 0$$

$$m_j^n \leq \mu_j \leq M_j^n$$

$$\begin{aligned} |\mu_j - p_j^i(n)| &\leq M_j^n - m_j^n \\ &\leq M_j^{kn_0+r} - m_j^{kn_0+r} \\ &\leq (1-2p^*)^k (M_j^r - m_j^r) \\ &\leq \left((1-2p^*)^{\frac{1}{n_0}}\right)^{kn_0} (1-2p^*)^{\frac{r}{n}} \underbrace{\max_{r<n_0,j} \frac{M_j^r - m_j^r}{(1-2p^*)^{\frac{r}{n_0}}}}_{=a} \\ &\leq a\left[(1-2p^*)^{\frac{1}{n_0}}\right]^n \end{aligned}$$

Si $b = (1-2p^*)^{\frac{1}{n_0}}$, $0 \leq b < 1$

$$\forall j,\ |\mu_j - p_j^i(n)| \leq ab^n$$

On a donc une convergence exponentielle de $\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$ vers μ_j

Soit ν^0 loi de X_0.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_i \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_i \nu_i^0 p_j^i(n) \end{aligned}$$

Comme $\sum_i \nu_i^0 = 1$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = j) - \mu_j| &= \left| \sum_i \nu_i^0 (p_j^i(n) - \mu_j) \right| \\ &\leq \sum_i \nu_i^0 |p_j^i(n) - \mu_j| \\ &\leq \sum_i \nu_i^0 ab^n \\ &\leq ab^n \end{aligned}$$

$\forall \mathcal{L}(X_0)$, $\mathcal{L}(X_n) \to \mu$ exponentiellement vite, ie

$$|\mathbb{P}(X_n = j) - \mu_j| \leq ab^n$$

μ est une loi de probabilité :

$$1 = \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \to \sum_{j \in E} \mu_j = 1$$

Donc $\forall j,\ \mu_j \geq p^* > 0$ et $\sum_i \mu_j = 1$.

Soit ν un vecteur ligne.

$$\nu \Pi^n \to \nu \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} = \left(\sum_i \mu_i \nu_1 \ \cdots \ \sum_i \nu_i \mu_n \right) = \left(\sum_i \nu_i \right) \mu$$

$$\forall \nu,\ \nu \Pi^n \to \left(\sum_i \nu_i \right) \mu$$

Donc $\mu\Pi^n \to \mu$, donc $(\mu\Pi^n)\,\Pi \to \mu\Pi$, donc

$$\mu\Pi = \mu$$

μ est donc une loi e probabilité invariante. C'est la seule loi de probabilité invariante :
Si ν est une loi de probabilité invariante, alors $\nu\Pi = \nu$. Donc $\forall n\ \nu\Pi^n = \nu$. Or, $\nu\Pi^n \to \mu$ donc $\nu = \mu$

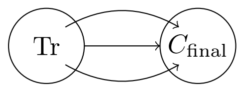
μ vérifie $\mu\Pi = \mu$, $\sum_i \mu_i = 1$. Soit ν solution de $\nu\Pi = \nu$, $\sum_i \nu_i = 1$. Aors :

$$\nu\Pi^n = \nu \to \left(\sum_i \nu_i \right) \mu = \mu$$

Donc $\mu = \nu$.

2.1 Conséquences

1. Supposons que sur E, il n'y ait qu'une seule classe finale et que celle-ci soit apérioique (d=1). Que devient $\mathcal{L}(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

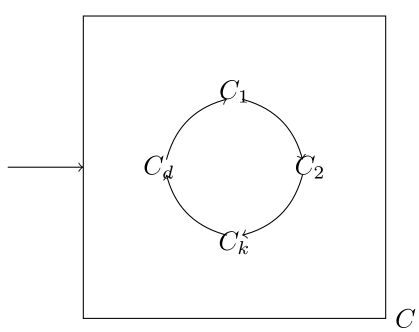


   $\mathcal{L}(X_n) \to \mu_C$, où $\mu_C(j) = 0\ \forall j \in Tr$.
   $\mu_{C_{|C}}$ = loi de probabilité invariante de la chaîne quand elle début dans C.
   Sur C, X_n est une chaîne régulière.
   $\mu = \mu_{C_{|C}}$ vérifie $\mu A = \mu$, $\sum_i \mu_i = 1$, dont elle est l'unique solution.

> ***Théorème: ergodique (admis)***
>
> Supposons que la chaîne n'ait qu'une seule classe finale C et que celle-ci est apériodique.
> Soit μ la mesure invariante sur C décrite précédemment. Alors :
>
> $$\forall f : E \to \mathbb{R},\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[\forall \mathcal{L}(X_0)]{p.s.} \int_C f d\mu = \sum_{j \in C} f(j)\mu(j)$$

2.2 Etude d'une classe finale périodique

Soit d la période d'une classe C, finale. Elle possède d sous-classes cycliques, parcourues successivement, toujours dans le même ordre. Numérotons les de A à d de façon qu'on les parcourt ainsi :



Π s'écrit alors :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{d-1} \\ A_d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^d = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_d \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & A_1 \cdots A_d \\ B_2 & = & A_2 \cdots A_d A_1 \\ \vdots & & \\ B_k & = & A_k \cdots A_d A_1 \cdots A_{k-1} \\ \vdots & & \\ B_d & = & A_d A_1 \cdots A_{d-1} \end{array}$$

Si on considère C_k, B_k est la matrice de transition sur C_k. C'est une chaîne de Markov régulière. Elle admet une unique loi de probabilité invariante μ_k concentrée sur C_k.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_k B_k & = & \mu_k \\ \sum_{i \in C_k} \mu_k(i) & = & 1 \end{array} \right.$$

Théorème:

Il existe une unique mesure de probabilité invariante sur C. Notons la μ. On a :

$$\mu = \frac{1}{d}(\mu_1, ..., \mu_d)$$

μ_k : vecteur ligne indéxée par C_k.

Démonstration :
Montrons que $\mu = \frac{1}{d}(\mu_1, ..., \mu_d)$ est une mesure de probabilité invariante.

$$\mu\Pi = \frac{1}{d}(\mu_d A_d, \mu_1 A_1, ..., \mu_{d-1} A_{d-1}$$

$\mu_k A_k$ est une mesure de probabilité sur C_{k+1}.

$$\begin{array}{rcl} \mu_k A_k B_{k+1} & = & \mu_k A_k A_{k+1} ... A_d A_1 ... A_k \\ & = & \mu_k B_k A_k \\ & = & \mu_k A_k \end{array}$$

Donc $\mu_k A_k = \mu_{k+1}$ par unicité de la loi de probabilité invariante concentrée sur C_{k+1}. Donc $\mu\Pi = \mu$.
μ est donc une loi de probabilité invariante.

Prouvons à présent son unicité.
Soit ν une mesure de probabilité invariante.

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_k, ..., \nu_d), \nu_k = (\nu_i)_{i \in C_k}$$

$$\sum_{i\in C_k} \nu_k(i) = \nu(C_k)$$

On a $\nu\Pi = \nu$ donc $\nu\Pi^d = \nu$. donc $\forall k, \nu_k B_k = \nu_k$. Donc :

$$\frac{\nu_k}{\nu(C_k)} = \mu_k \text{ (par unicité)}$$

Donc $\nu_k = \nu(C_k)\mu_k$.

Il reste à montrer que $\forall k$, $\nu(C_k) = \frac{1}{d}$, ie

$$\forall k, l, \nu(C_k) = \nu(C_l)$$

car

$$\sum_{k=1}^{d} \nu(C_k) = 1$$

On a $\nu\Pi = \nu$, donc : :

$$\begin{aligned} \nu_d A_d &= \nu_1 \\ \nu_1 A_1 &= \nu_2 \\ &\vdots \\ \nu_k A_k &= \nu_{k+1} \end{aligned}$$

$$(\nu_k A_k)_j = \sum_{i\in C_k} \nu_k(i) a_j^i$$

$$\sum_{j\in C_{k+1}} (\nu_k A_k)_j = \sum_{i\in C_k} \nu_k(i) \sum_{j\in C_{k+1}} a_j^i = \sum_{i\in C_k} \nu_k(i) = \nu(C_k)$$

Or, $\nu_k A_k = \nu_{k+1}$ et $\sum_{i\in C_{k+1}} \nu_{k+1}(i) = \nu(C_{k+1})$, donc

$$\forall k, \nu(C_k) = \nu(C_{k+1})$$

Ils sont donc tous égaux à $\frac{1}{d}$.

ℹ *Remarque:*

- Pour cette loi invariante μ, chaque classe C_k a même probabilité $\mu(C_k) = \frac{1}{d}$
- Pour trouver μ, 2 méthodes :
  - μ solution de $\mu\Pi = \mu$ et $\sum_{i\in C} \mu_i = 1$
  - On calcule $\Pi^d = diag(B_1, ..., B_d)$ et on résout $\mu_k B_k = \mu_k$, $\sum_{i\in C_k} \mu_k(i) = 1$. Puis $\mu = \frac{1}{d}(\mu_1, ..., \mu_d)$.
- Dans la démonstration, au lieu de supposer ν probabilité invariante, on aurait pu supposer

$$\begin{cases} \nu \text{ solution de } \nu\Pi = \nu \\ \sum \nu_i = 1 \end{cases}$$

Le reste est inchangé.

Théorème: ergodique

Supposons que la chaîne ne possède qu'une seule classe finale C. Soit μ_C la mesure invariante associée à cette classe. $\forall f : E \to \mathbb{R}$ (E fini) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[\forall \mathcal{L}(X_0)]{p.s.} \int_C f d\mu_C = \sum_{i\in C} f(i)\mu_C(i)$$

Troisième partie

Processus de Markov à temps continu

1 Générateur infinitésimal

1.1 Générateur et équations backward - forward

X_t : l'état du système à t.
On admettra que Π_t est dérivable en 0, ie

$$\forall i, j,\ p^i_j(t) \text{ dérivale en } t = 0$$

Définition:

On notera $A = \Pi'_0 = [(p^i_j)'(0)]$. On appelle A le générateur infinitésimal de la chaîne.
On notera $a^i_j = (p^i_j)'(0)$, $A = [a^i_j]$ et $a_i = -a^i_i$.

Remarque :
— A n'est pas une matrice à termes positifs (elle n'est pas stochastique)
— L'analogue en temps discret est

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_0}{1 - 0} = \Pi - I$$

Propriété: des a^i_j

$\forall i \neq j$, $a^i_j \geq 0$, $a^i_i \leq 0$, et

$$\sum_j a^i_j = 0$$

$$\Rightarrow a_i = \sum_{j \neq i} a^i_j$$

Démonstration :

$$i \neq j,\ \frac{p^i_j(t) - p^i_j(0)}{t} = p^i_j(t) \geq 0 \to a^i_j \geq 0$$

$$\forall t,\ \sum_j p^i_j(t) = 1 \Rightarrow \sum_j (p^i_j)'(0) = 0 = \sum_j a^i_j$$

donc $a_i = -a^i_i = \sum_{j \neq i} a^i_j$.

Théorème: Backward et Forward

Π_t est dérivable pour tout t et on a :

$$\Pi'_t = \Pi_t A \qquad \text{(forward)}$$

$$\Pi'_t = A\Pi_t \qquad \text{(backward)}$$

et comme $\Pi_0 = I$, on a $\Pi_t = e^{tA}$ (donc la connaissance de A entraine la connaissance des $p^i_j(t)$, $\forall i, j, t$, et inversement).

Démonstration :

$$\frac{1}{h}(\Pi_{t+h} - \Pi_t) = \frac{1}{h}(\Pi_t\Pi_h - \Pi_t I) = \Pi_t \left(\frac{\Pi_h - \Pi_0}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \Pi_t A$$

Donc Π_t dérivable en t et $\Pi_t' = \Pi_t A$. De même :

$$\frac{1}{h}(\Pi_{t+h} - \Pi_t) = \left(\frac{\Pi_h - \Pi_0}{h}\right)\Pi_t \xrightarrow[h\to 0]{} A\Pi_t$$

e^{tA} est inversible.

$$\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

donc solution de Backwar et Forward, avec $\Pi_0 = I$, donc par unicité des solutions, $e^{tA} = \Pi_t$.

<u>Backward :</u> $(p_j^i)'(t) = \sum_k a_k^i p_j^k(t)$: c'est le point d'arrivée qui est fixe pour p_j^k
<u>Forward :</u> $(p_j^i)'(t) = \sum_k p_k^i(t) a_j^k$: c'est le point de départ qui est fixe dans les p_k^i.

1.2 Significations probabilistes des coefficients a_j^i du générateur infinitésimal

Définition:

$i \in E$ est absorbant si :

$$\forall t,\ p_j^i(t) = 1$$

Théorème:

i est absorbant si et seulement si :

$$\forall j, a_j^i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0$$

Démonstration :
Si i est absorbant, alors $p_i^i(t) = 1\ \forall t$.
Donc $(p_i^i)'(0) = 0 = -a_i$. Or :

$$\begin{aligned} a_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i\neq j} a_j^i = 0 \text{ et } a_j^i \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall j, a_j^i = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, si $a_i = 0$, $\forall j$, $a_j^i = 0$.

$$(p_i^i)'(t) = \sum_j a_k^i p_i^k = 0$$

Donc $p_i^i(t) = cste = p_i^i(0) = 1\ \forall t$.

Définition: Instants de transitions

On dit qu'il y a transition s'il y a changement d'état.

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & \inf\{t>0,\ X_t \neq X_0\} \\ T_2 & = & \inf\{t>0,\ X_t \neq X_{T_1}\} \\ & \vdots & \\ T_n & = & \inf\{t>0,\ X_t \neq X_{T_{n-1}}\} \\ & \vdots & \end{array}$$

Les T_i sont appelés instants de transition. (On pose $T_0 = 0$)

ℹ *Propriété: admise*

$$\forall i, \mathbb{P}(T_n \leq h | X_0 = i) = o(h)$$

Théorème: fondamental

Si i non abosrbant, alors :

1. $\mathcal{L}(T_1 | X_0 = i) = \mathcal{E}(a_i)$
2. $\forall j \neq i$, $\mathbb{P}(X_{T_1} = j | X_0 = i) = \frac{a_j^i}{a_i} = \hat{p}_j^i$
3. T_1 et X_{T_1} sont indépendants sachant que $X_0 = i$.

Démonstration :
i non absorbant.
On va modifir la chaîne de la façon suivante : on rend tous les états $i \neq j$ absorbants. On ne touche pas à la façon d'être en i ni d'en ressortir.
On note X_t^* la nouvelle chaîne, et Π_t^* et A^* les matrices correspondantes.
$(a^*)_j^k = 0,\ \forall k \neq i,\ \forall j$ car ils sont absorbants.

Prouvons que $(a^*)_j^i = a_j^i\ \forall j$.
On a, si on part de i $X_t(\omega) = X_t^*(\omega)\ \forall t \leq T_2(\omega)$.

$$\mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \underbrace{\mathbb{P}(X_t = j, t < T_2 | X_0 = i)}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{P}(X_t = j, t \geq T_2 | X_0 = i)}_{(2)}$$

$(1) = \mathbb{P}(X_t^* = j | X_0 = i)$
$0 \leq (2) \leq \mathbb{P}(T_2 \leq t | X_0 = i) = o(t)$
Donc $p_j^i(t) = (p^*)_j^i(t) + o(t)$, donc :

$$a_j^i = (p_j^i)'(0) = ({p^*}_j^i)'(0) = (a^*)_j^i,\ \forall j \neq i$$

$$a_i = a_i^* = \sum_{j \neq i} a_j^i$$

Ainsi :

$$(p^*)^i_i(t) = \mathbb{P}(X^*_t = i | X^*_0 = i) = \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ({p^*}^i_i)'(t) & = & \sum_k {p^*}^i_k(t) a^k_i = -a_i {p^*}^i_i(t) \\ {p^*}^i_i(0) = 1 & & \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow {p^*}^i_i(t) = \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i) = e^{-a_1 t}$$

ie $\mathcal{L}(T | X_0 = i) = \mathcal{E}(a_i)$.

$j \neq i$.

$$\begin{aligned} ({p^*}^i_j)'(t) &= \sum_k {p^*}^i_k(t) a^k_j \\ &= p^* i^i(t) a^i_j \\ &= a^i_j e^{-a_i t} \end{aligned}$$

${p^*}^i_j(0) = 0$
Donc :

$$\begin{aligned} {p^*}^i_j(t) &= \int_0^t a^i_j e^{-a_i t} dt \\ &= \frac{a^i_j}{a_i}(1 - e^{-a_i t}) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} {p^*}^j_i(t) &= \mathbb{P}(X^*_t = j | X_0 = i) \\ &\leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, X_T = j | X_0 = i) \\ &\leq \frac{a^i_j}{a_i}(1 - e^{-a_i t}) \end{aligned}$$

Si on prend $t \to +\infty$:

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = j | X_0 = i) = \frac{a^i_j}{a_i}$$

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t, X_{T_1} = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_1 \leq t | X_0 = i) \mathbb{P}(X_{T_1} = j | X_0 = i)$$

d'où l'indépendance de X_{T_1} et T_1 sachant $X_0 = i$.

1.3 Chaîne discrète de transition associée

$\hat{X}_n = X_{T_n}$.
Elle a pour matrice de transition

$$\hat{\Pi}_1 = \hat{\Pi} = (\hat{p}^i_j)$$

où si i est absorbant :

$$\hat{p}^i_i = 1, \hat{p}^i_j = 0, \ \forall j \neq i$$

Si i n'est pas absorbant :

$$\hat{p}^i_j = \frac{a^i_j}{a_i}, \ j \neq i, \ \hat{p}^i_i = 0$$

On représnte le diagramme de la chaîne initiale par celui de la chaîne discrète associée.

$$j \neq i, \ i \to j \text{ si } \hat{p}^i_j > 0 \text{ ie } a^i_j > 0$$

Il n'y a pas de boucles (sauf pour les états absorbants, mais ceux-ci sont indiqués par Δ).
Ceci donne la classification habitulle des états : Erg, Tr, etc.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \begin{pmatrix} A_1 & 0 & |0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & |0 & 0 & 0 \\ — & — & |— & — & — \\ & \rho & | & \chi & \\ & & | & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\hat{\Pi} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_1 & 0 & |0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Pi}_2 & |0 & 0 & 0 \\ — & — & |— & — & — \\ & \hat{R} & | & \hat{Q} & \\ & & | & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$t^n A^n = \begin{pmatrix} t^n A^n & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & t^n A_k^n & \\ & \rho_n & & t^n \chi^n \end{pmatrix}$$

$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n A^n}{n!} = \Pi_t$

$$\Pi_t = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & e^{tA_k} & \\ & R_t & & e^{t\chi} \end{pmatrix}$$

Théorème:

$$Q = e^{t\chi} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Démonstration :
On prend i transitoire.

$$\mathbb{P}(X_t \in Tr | X_0 = i) = \sum_{j \in Tr} \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$$

C'est décroissant en t.
Or on sait que, par exemple, $Q_n = (Q_1)^n \to 0$ (en considérant la chaîne discrète X_n).
Donc $\mathbb{P}(X_t \in Tr | X_0 = i) \to 0$. Donc

$$Q_t = e^{t\chi} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

1.4 Temps moyen passé dans les états transitoires

Soit s_j^i le temps moyen passé par j sachant qu'on est parti de i, i et j transitoire, et $D = [d_j^i]_{i,j \in Tr}$.

Théorème:

χ est inversible et $D = -\chi^{-1}$.

Démonstration :
Soit D_j le temps passé en j.

$$D_j = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_t=j\}} dt$$

$$\begin{aligned}
d_i^j &= \mathbb{E}(D_j | X_0 = i) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_t=j\}} dt | X_0 = i) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_t=j\}} | X_0 = i) dt \text{ (Fubini)} \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) dt \\
&= \int_0^{+\infty} p_j^i(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^{+\infty} e^{t\chi} dt \\
\chi D &= \int_0^{+\infty} \chi e^{t\chi} dt \\
&= [e^{t\chi}]_0^{+\infty} \\
&= -I
\end{aligned}$$

Donc χ est inversible et $-\chi^{-1} = D$.

Théorème:

$$\forall i, j \in Tr,\ d_j^i = \hat{N}_j^i \times \frac{1}{a_j}$$

où $\hat{N} = (I - \hat{Q})^{-1}$.

$\hat{N}_j^i$: nombre de fois où l'on est passé par j sachant que l'on est parti de i.
$\frac{1}{a_j}$: le temps moyen passé en j à chaque séjour (espérance de la loi exponentielle).

1.5 Probabilité de finir dans une classe finale donnée

iSoit b_j^i la probabilité que le premier état ergodique atteint soit j sachant que $X_0 = i$, et $B = [b_j^i]_{i,j}$ ($i \in Tr$, $j \in Erg$).
On sait déjà que (considérant la chaîne associée $\hat{X}_n$) :

$$B = NR$$

donc

$$\begin{aligned}
b_j^i &= \sum_{k \in Tr} \hat{N}_k^i p_j^k \\
&= \sum_{k \in Tr} \hat{N}_k^i \frac{a_j^k}{a_k} \\
&= \sum_{k \in Tr} d_k^i a_j^k \\
&= (D\rho)_j^i
\end{aligned}$$

Théorème:

$$B = \hat{N}\hat{R} = D\rho = -\chi^{-1}\rho$$

Théorème:

Soit C une classe finale.
La probabilité de finir en C sachant $X_0 = i$ est :

$$b_C^i = \sum_{j \in C} b_j^i$$

1.6 Classification de la chaîne

$$i \to j \Rightarrow \hat{p}_j^i > 0 \Leftrightarrow \frac{a_j^i}{a_i} > 0 \Leftrightarrow a_j^i > 0$$

i peut conduire à j s'il existe un chemin orienté allant de i) j :

$$\exists n;\ \mathbb{P}(X_{T_n} = j | X_0 = i) > 0$$

Théorème:

Soient $i, j \in E$. On a équivalence entre les trois points suivants :

1. $i \rightsquigarrow j$
2. $\exists t > 0;\ p_j^i(t) > 0$
3. $\forall t > 0;\ p_j^i(t) > 0$

Démonstration :
Il est évident que $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Prouvons que $1 \Rightarrow 3$.
Supposons d'abord que $i \to j$ $(a_j^i > 0)$. Montrons que $\forall t > 0$, $p_j^i(t) > 0$.

$$\begin{aligned} (p_i^i)'(t) &= \sum_k p_k^i(t) a_i^k \\ &= p_i^i(t) a_i^i + \underbrace{\sum_{k \neq i} p_k^i(t) a_i^k}_{R_i(t) \geq 0} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (p_i^i)'(t) &=& -a_i p_i^i(t) + R_i(t) \\ p_i^i(0) = 1 && \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow p_i^i(t) = \underbrace{e^{-a_i t}}_{>0} + \underbrace{\int_0^t e^{-a_i(t-s}R_i(s)ds}_{\geq 0}$$

Donc $\forall i,\ \forall t \geq 0, p_i^i(t) > 0$.

Maintenant, $\forall j \neq i$,

$$\begin{aligned}(p_j^i)'(t) &= \sum_k p_k^i(t) a_j^k \\ &= p_j^i(t) a_j^j + \underbrace{a_i^j p_i^i(t)}_{>0} + \underbrace{\sum_{k \neq i,j} p_k^i(t) a_j^k}_{R_i(t) \geq 0}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (p_i^j)'(t) &= -a_j p_j^i(t) + R_i(t) \\ p_i^i(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_i^j(t) = \int_0^t e^{-a_i(t-s} \underbrace{R_i(s)}_{\geq 0} ds$$

Donc $\forall i,\ \forall t \geq 0, p_j^i(t) > 0$.

Si $i \rightsquigarrow j$ en n transitions :

$$i_0 \to ... \to i_{n-1} \to i_n = j$$

un tel chemin permet d'aller de i à j.

$$\begin{aligned}p_j^i(t) &= \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) \\ &\geq \mathbb{P}(X_t = i_n, X_{\frac{(n-1)t}{n}} = i_{n-1}, ..., X_{\frac{t}{n}} = i_1 | X = i_0 = i) \\ &\geq \mathbb{P}(X_t = i_n | X_{\frac{(n-1)t}{n}} = i_{n-1}) \times ... \times \mathbb{P}(X_{\frac{t}{n}} = i_1 | X = i_0 = i) \text{ d'après la propriété de Markov homogène} \\ &\geq \mathbb{P}(X_{\frac{t}{n}} = i_n | X_0 = i_{n-1}) \times ... \times \mathbb{P}(X_{\frac{t}{n}} = i_1 | X = i_0 = i) \\ &> 0\end{aligned}$$

D'où $p_j^i(t) > 0$

Donc $i \rightsquigarrow j \Leftrightarrow \forall t > 0,\ p_j^i(t) > 0$ (car encore vrai si i absorbant ou si i=j).
Remarque : Il n'y a donc pas de phénomène cycliques en temps continu.

2 Chaîne régulière

Définition:

En temps continu, une chaîne est dite régulière si elle n'a qu'une seule classe (donc finale), ie $\forall i, j \in E, i \rightsquigarrow j$

Théorème:

La chaîne est régulière si et seulement si :

$$\forall t > 0,\ \forall i, j,\ p_j^i(t) > 0$$

2.1 Loi de probabilité invariante

μ est invariante $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{L}(X_0) = \mu \Rightarrow \forall t > 0,\ \mathcal{L}(X_t) = \mu$), ie

$$\forall t, \mu \Pi_t = \mu$$

Théorème:

Soit μ une loi de probabilité sur E.

$$\mu \text{ est invariante } \Leftrightarrow \mu A = 0$$

Démonstration :

$$\forall t,\ \mu \Pi_t = \mu \Rightarrow (\mu \Pi_t)' = \mu \Pi_t' = 0$$

En particulier, pour $t = 0$, $\mu A = 0$

Réciproquement, si $\mu A = 0$, alors $\mu \Pi_t' = (\mu \Pi_t)' = \mu A \Pi_t = 0$, ie

$$\forall t, \mu \Pi_t = \mu \Leftrightarrow \mu A = 0$$

Donc μ est une loi de probabilité invariante

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu A & = & 0 \\ \forall i, \mu_i & \geq & 0 \\ \sum_i \mu_i & = & 1 \end{array} \right.$$

Théorème: fondamental pour les chaînes régulières (E fini)

Si la chaîne est régulière, alors elle possède une et une seule loi de probabilité invariante. Notons la μ. Celle-ci vérifie :

1. $\forall i, \mu_i > 0$
2. $\forall \mathcal{L}(X_0)$, $\mathcal{L}(X_t) \to \mu$ exponentiellement vite
3. μ est l'unique solution de $\left\{ \begin{array}{rcl} \mu A & = & 0 \\ \sum_i \mu_i & = & 1 \end{array} \right.$

Rappel : Lemme en temps discret

Π matrice stochastique, $p^* = \inf_{i,j} p^i_j$.
X : vecteur colonne : $(X^i)_i$.

$$Y = \Pi X$$

$M_1 = \sup_i Y^i$, $M_0 = \sup_i X^i$,
$m_1 = \inf Y^i$, $m_0 = \inf X^i$. On a alors :

$$(M_1 - m_1) \leq (1 - 2p^*)(M_0 - m_0)$$

Démonstration :
Considérons la colonne j de Π_t :

$$C_{t,j} = [p^i_j(t)]_i$$

j sera fixé, on omettra donc l'indice j pour $C_{t,j}$.

$$C_t = \Pi_t C_0,\ \ C_0 = [\delta^i_j]_i$$

$$C_{t+s} = \Pi_t \pi_s C_0 = \Pi_t C_s$$

$M_t = \sup_i p^i_j(t)$, $m_t = \inf_i p^i_j(t)$, $p^*(t) = \inf_{i,j} p^i_j(t)$.

$$\forall t > 0, p^*(t) > 0 \text{ (car la chaîne est régulière)}$$

Choisissons un $t_0 > 0$.

$$t = kt_0 + r,\ \ 0 \le r \le t_0$$

$$\Pi_{kt_0+r} = \Pi_{kt_0}\Pi_r \Rightarrow C_{kt_0+r} = \Pi_{t_0} C_{(k-1)t_0+r}$$

$$\begin{aligned} M_{kt_0+r} - m_{kt_0+r} &\le (1-2p^*(t_0))(M_{(k-1)t_0+r} - m_{(k-1)t_0+r}) \\ &\le (1-2p^*(t_0))^k \underbrace{(M_r - m_r)}_{\le 1} \\ &\le \left[(1-2p^*(t_0))^{\frac{1}{t_0}}\right]^{kt_0} \\ &\le \left[(1-2p^*(t_0))^{\frac{1}{t_0}}\right]^{kt_0+r} \times \frac{1}{(1-2p^*(t_0))^{\frac{r}{t_0}}} \end{aligned}$$

Soit :

$$a = \sup_{0 \le r < t_0} \frac{1}{(1-2p^*(t_0))^{\frac{r}{t_0}}}$$

$$e^{-b} = (1-2p^*(t_0))^{\frac{1}{t_0}}$$

On a :

$$M_t - m_t = ae^{-bt}$$

Cela valant pour toute colonne j (implicite depuis le début).

On a m_t croissante et M_t décroissante, avec $0 < m_t \le M_t$. Donc m_t et M_t convergent vers une même limite. Notons μ_j cette limite.

$$\forall t,\ ^\circ < m_t \le \mu_j \le M_t$$

donc $\forall j,\ \mu_j > 0$.
De plus, $0 < m_t \le p^i_j(t) \le M_t$

$$\Rightarrow \forall i, j, |\mu_j - p^i_j(t)| \le M_{t,j} - m_{t,j} \le ae^{-bt}$$

donc $p^i_j(t) \to \mu_j$ exponentiellement vite.

Soit $\mu_0 = (\mathbb{P}(X_0 = j))_j$ la loi initiale, alors $\mu_t = (\mathbb{P}(X_t = j))_j$.

$$\mathbb{P}(X_t = j) = \sum_i \mu_0(i) p^i_j(t)$$

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_t = j) - \mu_j| &\le \sum_i \mu_0(i) |p^i_j(t) - \mu_j| \\ &\le \underbrace{\sum_i \mu_0(i)}_{=1} ae^{-bt} \end{aligned}$$

$\forall \mathcal{L}(X_0)$, $\mathcal{L}(X_t) \to \mu$ exponenitellement vite.

Montrons pour finir que μ est une loi de probabilité invariante.

$$\mu = (\mu_j)_j \text{ vecteur ligne}$$

$\forall j,\ \mu_j > 0.$

$$1 = \sum_j p_j^i(t) \to \sum_j \mu_j \Rightarrow \sum_j \mu_j = 1$$

$$\mu\Pi_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mu$$

$$\mu\Pi_{t+s} \to \mu$$

$$\mu\Pi_t\Pi_s \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mu\Pi_s$$

Donc $\forall s,\ \mu\Pi_s = \mu$.

Soit ν tel que $\begin{array}{rcl} \nu A & = & 0 \\ \sum_i \nu_i & = & 1 \end{array}$.

$$(\nu\Pi_t)' = \nu A\Pi_t = 0$$

$$\nu\Pi_t = \nu\Pi_0 = \nu\ \forall t$$

$$(\nu\Pi_t)_j = \sum_i \nu_i p_j^i(t) \to \sum_i \nu_i\mu_j = \mu_j$$

donc :

$$\nu = \nu\Pi_t \to \mu$$

donc $\nu = \mu$.
Soit ν une loi de probabilité invariante. Alors $\nu A = 0$ et $\sum_i \nu_i = 1 \Rightarrow \nu = \mu$.
μ est donc l'unique loi de probabilité invariante sur E.

Théorème: ergodique

Si E n'a qu'une classe finale qu'on notera X, et μ_C la loi de probabilité invariante associée à C, alors $\forall f : E \to \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X_s)fs \xrightarrow[\forall\mathcal{L}(X_0)]{p.s.} \int_C f d\mu_C = \sum_{j\in C} f(j)\mu_C(j)$$

Quatrième partie

Processus d'entrée-sortie

On considère un système dans lequel des "objets" rentrent, y restent un certain temps aléatoire et en repartent. X_t : le nombre d'objets présents à t dans le système.

1 Cadre général

1.1 Hypothèses et paramètres, générateur infinitésimal

On peut distinguer deux cas :
— Capacité limité : $X_t \leq N$: espace d'états fini
— Capacité illimité : $X_t \in \mathbb{N}$

S : instant d'arrivée du premier objet après $t = 0$
T : instant de départ du premier objet après $t = 0$

Si $0 < k < N$ (ou $k > 0$ si illimité) : S et T sont indépendantes sachant que $X_0 = k$.

$$\mathcal{L}(S|X_0 = k) = \mathcal{E}(\alpha_k) \qquad \mathcal{L}(T|X_0 = k) = \mathcal{E}(\beta_k)$$

Les α_k et les β_k sont les paramètres du modèle.

$$\mathbb{P}(S = T|X_0 = k) = 0$$

$U = S \cap T$: instant de première transition.

$$\mathcal{L}(Y|X_0 = k) = \mathcal{E}(\alpha_k + \beta_k)$$

donc $a_k = -a_k^k = \alpha_k + \beta_k$.

$$\hat{p}_{k+1}^k = \mathbb{P}(S < T|X_0 = k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_k + \beta_k} = \frac{a_{k+1}^k}{a_k}$$

donc $a_{k+1}^k = \alpha_k$ et de même, $a_{k-1}^k = \beta_k$

Si $k = 0$: $S = U$

$$\mathcal{L}(S|X_0 = 0) = \mathcal{E}(\alpha_0)$$

$$a_0 = \alpha_0$$

$$\hat{p}_1^0 = 1 \Rightarrow a_1^0 = \alpha_0$$

Si $k = N$ (capacité limitée) : $T = U$

$$\mathcal{L}(T|X_0 = 0) = \mathcal{E}(\beta_N)$$

$$a_N = \beta_N$$

$$\hat{p}_{N-1}^N = 1 \Rightarrow a_{N-1}^N = \beta_N$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & -(\alpha_1 + \beta_1) & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_N & -\beta_N \end{pmatrix}$$

1.2 Classification, recherche de lois de probabilité invariante

On constate que $\forall k, l,\ k \rightsquigarrow l$. On a donc une seule classe.
On a une chaîne régulière (en temps continu).

- Si capacité limitée : chaîne régulière, espace d'état fini
- Si capacité illimitée, on a une chaîne régulière dans un espace d'état inifini dénombrable.

La loi de probabilité invariante existe et est unique dans le cas fini.

$$\mu \text{ doit vérifier } \left\{ \begin{array}{lcl} \mu A & = & 0 \\ \sum_i \mu_i & = & 1 \end{array} \right.$$

$\mu = (x_0 .... x_N)$

$$-\alpha_0 x_0 + \beta_1 x_1 = 0$$

$$\alpha_0 x_0 - (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + \beta_2 x_2 = 0$$

$$\alpha_1 x_1 - (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \beta_3 x_3 = 0$$

$$...$$

$$x_1 = \frac{\alpha_0}{\beta_1} x_0$$

$$x_2 = \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\beta_1 \beta_2} x_0$$

$$...$$

$$x_k = \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\beta_1 ... \beta_k} x_0$$

$E = \{0, ..., N\}$ ou $E = \mathbb{N}$.
Soit $C = 1 + \sum_{k \in E} \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\beta_1 ... \beta_k}$. On doit avoir $x_0 C = 1$.

- Si E fini, alors $C < +\infty$ et $x_0 = \frac{1}{C}$.

$$x_k = \mu_k = \frac{1}{C} \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\beta_1 ... \beta_k}$$

  et $\mathcal{L}(X_0)$, $\mathcal{L}(X_t) \to \mu$ exponentiellement vite.
- Si $E = \mathbb{N}$,
  - Si $C = +\infty$, il n'existe pas de loi de probabilité invariante. Par contre, il existe une unique mesure (σ-finie) invariante (à une constante multiplicative près) μ donnée par $\mu_k = \frac{\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}}{\beta_1, ..., \beta_k}$. On a ici un phénomène d'explosion.
  - Si $C < +\infty$,, alors il existe une et une seule loi de probabilité invariante μ donnée par $\mu_k = \frac{1}{C} \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\beta_1 ... \beta_k}$. On montre qu'alors $\mathcal{L}(X_t) \to \mu$ et le théorème ergodique reste vrai dans ce cas.

2 Processus de Poisson

On considère une suite de phénomènes survenant à des instants aléatoires $T_0 = 0 < T_1 < ... < T_n < ...$ avec $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Définition: Processus de comptage associé

N_t : le nombre de phénomène survenus dans l'intervalle de temps $]0, t]$ ($N_0 = 0$)
On suppose que N_t ne croit que par sauts de 1 (ie 2 phénomènes ne peuvent être simultanés).

Les lois de N_t et de T_k sont liées.

$$\mathbb{P} = (N_t \leq k) = \mathbb{P}(T_k \geq t)$$

2.1 Hypothèse des processus de Poisson

On suppose que N_t (processus de comptage) :

1. est à accroissements indépendants : $N_t - N_s \perp\!\!\!\perp (N_u,\ u \leq s)$ (ie le nombre d'évènements surevnus entre s et t est indépendant de ce qui s'est passé avant s)
2. est à avancement stationnaire : $\mathcal{L}(N_t - N_s)$ ne dépend que de la durée $t - s$.

$$\mathcal{L}(N_t - N_s) = \mathcal{L}(N_{t-s} - N_0) = \mathcal{L}(N_{t-s})$$

Théorème:

Sous les hypothèses précédentes, il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall t,\ \mathcal{L}(N_t) = \mathcal{P}(\lambda t) \text{ (Loi de Poisson de paramètre } \lambda t)$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$: nombre moyen d'évènements surevnus dans un intervalle de temps de longueur t

Démonstration :
Posons $p_k(t) = \mathbb{P}(N_t = k)$. • Calcul de $p_0(t)$:

$$\mathbb{P}(N_{t+h} = 0) = \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0, N_t = 0)$$

Par indépendance :

$$\mathbb{P}(N_{t+h} = 0) = \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0)\mathbb{P}(N_t = 0)$$

Donc $\forall s, t > 0$:

$$\begin{matrix} p_0(t+s) = p_0(t)p_0(s) \\ p_0(t) \text{ décroit} \end{matrix} \Leftrightarrow \exists \lambda > 0; p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

• Calcul de $p_k(t),\ k \geq 1$: On admettra que $\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$
$p_k(t+h) = \mathbb{P}(N_{t+h} = k)$ (avec h petit).

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= \mathbb{P}(N_t = k, N_{t+h} - N_t = 0) + \mathbb{P}(N_t = k-1, N_{t+h} - N_t = 1) + \sum_{k \leq k-2} \mathbb{P}(N_t = j, N_{t+h} - N_t = k - j) \\ &= \mathbb{P}(N_t = k)\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) + \mathbb{P}(N_t = k-1)\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) + o(h) \\ &= p_0(h)p_k(t) + p_1(h)p_{k-1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

Or, $p_0(h) + p_1(h) + \mathbb{P}(N_h \geq 2) = 1$
$e^{-\lambda h} + p_A(h) + o(h) = 1$
$1 - \lambda h + o(h) + p_1(h) + o(h) = 1$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} p_1(h) &=& \lambda h + o(h) \\ p_0(h) &=& 1 - \lambda h + o(h) \end{array} \right.$$

$$p_k(t+h) = (1 - \lambda h)p_k(t) + \lambda h p_{k-1}(t) + o(h)$$

$$\frac{1}{h}\left(p_k(t+h) - p_k(t)\right) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + o(1)$$

$$\begin{matrix} p_k'(t) = \lambda(-p_k(t) + p_{k-1}(t),\ k \geq 1 \\ p_0(t) = e^{-\lambda t} \end{matrix}$$

Variation de la constante : posons $p_k(t) = q_k(t)e^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} p'_k &= q'_k e^{-\lambda t} - \lambda q_k e^{-\lambda t} \\ &= q'_k e^{-\lambda t} - \lambda p_k \\ &= -\lambda p_k + \lambda q_{k-1} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q'_k = \lambda q_{k-1},\ q_k(0) = 0 \\ q_0 = 1 \end{cases}$$

$q_1(t) = \lambda t$ $q_k(t) = \int_0^t q_{k-1}(s)ds = \frac{(\lambda t)^k}{k!}$
D'où $\mathbb{P}(N_t = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, $\mathcal{L}(N_t) = \mathcal{P}(\lambda t)$.
Donc le nombre moyen d'évenements survenant pendant une durée t est $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$

Théorème:

$\forall n$, $\mathcal{L}(T_n) = \gamma(\lambda, n)$: loi de la somme de n variables aléaoitres suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendantes.

$$\text{Densité : } f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{n}{\lambda}$$

Démonstration :

$$\mathbb{P}(T_1 > t\mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

Donc $\gamma(\lambda, 1) = \mathcal{E}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n > t) &= \mathbb{P}(N_t < n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= 1 - F_n(t) \end{aligned}$$

En dérivant, on trouve $f_n = F'_n$

Théorème:

Soit $U_n = T_n - T_{n-1}$ ($T_0 = 0$) la durée entre deux arrivées. Alors les $(U_n)_n$ sont indépendants et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration :
Pour simplifier, on ne le fait que pour U_1 et U_2. $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $h > 0$, $k > 0$ (petits).

A reprendre.

3 Répartition poissonnienne

On considère un espace mesure $(E, \mathcal{B}, \mu)$ et une répartition aléatoire de points sur cet ensemble.
Hypothèses : Soit $A \in \mathcal{B}$
N_A : nombre de points dans A. On suppose :

— les accroissements indépendants : Si $A, B \in \mathcal{B}$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $N_A \perp\!\!\!\perp N_B$.
— les accroissements stationnaires : la loi de N_A ne dépendant que de la mesure de A $\mu(A)$

Théorème:

$\exists \lambda > 0$, $\forall A \in \mathcal{B}$, si $\mu(A) < \infty$:

$$\mathcal{L}(N_1) = \mathcal{P}(\lambda \mu(A))$$

Démonstration :
$A_0 = \emptyset$. Considérons une famille $(A_r)_r$ de parties mesurables emboitées.

$$r < s \Rightarrow A_r \subset A_s$$

avec $\mu(A_r) = r$.
N_r : nombre de points de A_r, $N_0 = 0$.
Si $r < s$, $N_s - N_r$ est le nombre de points de $A_s \backslash A_r$, indépendant de N_r.

La loi de $N_r - N_s$ dépendant de la mesure de $A_s \backslash A_r$, donc de $r - s$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(N_r) = \mathcal{P}(\lambda r)$$

Si A a pour mesure $\mu(A)$:

$$\mathcal{L}(N_A) = \mathcal{L}(N_{A_r}) = \mathcal{P}(\lambda r) = \mathcal{P}(\lambda \mu(A))$$