

Table des matières

I	Automatique	2
II	Éléments finis	2
III	Béziers-Splines	3
1	Approximation de courbes dans \mathbb{R}	3
1.1	Courbes paramétrées	3
1.2	Splines	4
1.3	B-Splines	4
1.4	Algorithme	4
2	Approximation de courbes dans \mathbb{R}^s	4
2.1	Courbes B-Splines	4
2.2	Algorithmes	5
3	Approximation de surfaces	5
IV	Optimisation linéaire	5
V	Processus de Markov	6
VI	Statistiques	7
1	Série chronologique	7
2	Modèle Linéaire Gaussien	8
3	ANOVA 1	8
4	MLG multiple	8
5	ANOVA 2	8

Première partie

Automatique

1. Définition linéaire, invariant.
2. Définition accessible, ensemble d'accessibilité, contrôlable, complètement contrôlable.
3. Solution de l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
4. Définition transformée de Laplace. Transformée de f' . Transformée de cos, sin et exponentielle.
5. Fonction de transfert
6. Effet d'un changement de base
7. Définition observable, observateur
8. Définition stabilité, point d'équilibre
9. Lemme : expression de l'exponentielle de At
10. Théorème de Kalman sur la contrôlabilité
11. Propriété sur la contrôlabilité
12. Définition complètement observable
13. Théorème de Kalman sur l'observabilité
14. Observateur de Luenberger
15. Critère des valeurs propres : matrice définie par bloc, matrice de transfert
16. Stabilité avec valeur propre
17. Lemme de Lyapounov
18. Trouver l'entrée pour stabiliser asymptotiquement S à l'origine
19. Système non linéaire : définition du linéarisé, de ε
20. Définition de pseudo-linéaire
21. Définition de point d'équilibre critique
22. Théorème de Hartman
23. Définition système affine
24. Définition du crochet, de $\Delta(z)$
25. Condition nécessaire pour qu'un système affine soit contrôlable à partir de $z \in \mathbb{R}^n$
26. Ensemble d'accessibilité depuis z
27. Proposition avec la condition du rang
28. Théorème sur E compact avec un système affine
29. Si aucune fonction F , que dire pour la contrôlabilité ?
30. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité complète d'un système affine complet.
31. Définition d'une fonction d'énergie de S
32. Définition d'une fonction propre
33. Définition système conservatif ou dissipatif
34. Commande feedback qui stabilise un système
35. Théorème sur la stabilisation asymptotique d'un système affine conservatif
36. Définition découplé

Deuxième partie

Éléments finis

1. Intégration par parties

2. Formule de Stokes
3. Formule d'Ostrogradsky
4. Première et deuxième identité de Green
5. Conditions de Dirichlet
6. Théorème de Lax-Milgram ~ Démonstration...
7. Choix de V_h , dimension ?
8. Fonctions de base, problème discrétisé
9. Matrice de rigidité
10. **R est définie positive**
11. Espace de Hilbert (TOUT définir)
12. Définition de $\mathcal{D}(\Omega)$ et de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quid que Ω ?
13. Pseudo-topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et sur $\mathcal{D}'(\Omega)$
14. Dérivation des distributions. Continuité ?
15. Définition de ∂^α
16. Définition de $L^p(\Omega)$. Produit scalaire et norme sur $L^2(\Omega)$.
17. Lien entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$.
18. Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$.
19. Injection canonique
20. Lien entre la convergence dans $L^2(\Omega)$ et celle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$
21. Définition de $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$
22. Produit scalaire et norme sur $H^1(\Omega)$
23. $H^1(\Omega)$: 3 propriétés. **Il est complet**
24. Propriété de Rellich. Application compacte
25. $H_0^1(\Omega)$: Propriété.
26. **Formule de Poincaré**
27. **Semi norme sur $H_0^1(\Omega)$ et lien avec $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$**
28. Définition de γ_0
29. Définition de $W^{m,p}(\Omega)$. Norme sur cet espace.
30. Fonctions μ -Holderienne
31. Condition d'injection canonique entre $H^m(\Omega)$ et $\mathcal{C}^s(\Omega)$
32. Norme sur un dual
33. Théorème de projection
34. Théorème de représentation de Riesz-Fréchet
35. **Théorème de Stampacchia**
36. **Lemme de Céa**
37. Qu'est-ce qu'un élément fini ?
38. Définition d'unisolvance. Comment la démontrer ?

Troisième partie

Béziers-Splines

1 Approximation de courbes dans \mathbb{R}

1.1 Courbes paramétrées

1. Régularité, p-régulier

2. Arc admet un vecteur limite tangent
3. Suivant p et q pairs et impairs
4. Branches infinies dans le cas des courbes planes
5. Revoir réduction d'intervalle
6. Longueur de l'arc
7. Arcs équivalents
8. Courbes gauche : tangente, plan normal, plan osculateur, normale principale
9. Paramétrisation normale, abscisse curviligne
10. Exemple de paramètre admissible
11. Courbure algébrique, rayon de courbure, centre de courbure, cercle osculateur, développée
12. Formules de Frénet
13. Trouver un plan tangent

1.2 Splines

14. Définition de la suite $\tau, r, \mathcal{P}^{k,\tau,r}$
15. Dimension et base de $\mathcal{P}^{k,\tau,r}$
16. Particularité des fonctions splines, dimension de l'espace des fonctions splines
17. Conditions (C) pour splines cubiques
18. Unicité?
19. Problème de minimisation vérifié par une fonction spline cubique

1.3 B-Splines

20. Définition de nœuds, multiplicité k
21. Définition de $w_{ij}(x)$
22. Relation de récurrence pour les $B_{i,k}$
23. Quelle multiplicité pour avoir $B_{i,k}$ nul?
24. 6 propriétés des $B_{i,k}$
25. Formule de dérivée à droite
26. Définition de $\mathcal{P}^{k,\tau}$
27. Lien entre n, m et k . Condition pour une base.

1.4 Algorithme

28. Définition de S
29. Algorithme de De Casteljau d'évaluation en un point
30. Algorithme des dérivées
31. Algorithme d'insertion d'un nœud

2 Approximation de courbes dans \mathbb{R}^s

2.1 Courbes B-Splines

32. Définition des polynômes de Bernstein, expression explicite
33. 5 propositions
34. Définition d'une courbe B-Spline, point de contrôle, polygone
35. 3 propriétés des courbes B-Spline

2.2 Algorithmes

- 36. Algorithme d'évaluation. Cas d'une courbe de Bézier.
- 37. Algorithme de calcul de dérivées.
- 38. Raccord entre deux courbes

3 Approximation de surfaces

- 39. Espace de Sobolev + norme
- 40. Injections canoniques, convergence faible
- 41. Injection canonique dans le cas des espaces de Sobolev
- 42. Injections compacts
- 43. Théorème de Stanpaccia
- 44. Théorème de Necas

Quatrième partie

Optimisation linéaire

- 1. Définition infimum, minimum
- 2. Définition coercive
- 3. Deux exemples fonctions coercives
- 4. **Exemple de J coercive**
- 5. **Condition pour que J atteigne son minimum**
- 6. **Rapport frontière et minimum**
- 7. Définition dérivée directionnelle, Gâteaux-différentiable, gradient
- 8. Définition de Fréchet-différentiable
- 9. **Fréchet \Rightarrow Gâteaux**
- 10. Définition espace convexe, épigraphe.
- 11. **Équivalence fonction convexe**
- 12. Définition strictement convexe, α -convexe.
- 13. Équivalence à f convexe
- 14. **Équivalence à α -convexe**
- 15. **Condition d'optimalité dans un ouvert**
- 16. **Condition nécessaire puis condition suffisante pour un minimum**
- 17. **Théorème de Kuhn et Tucker**
- 18. Contraintes qualifiées
- 19. **Théorème dans le cas des contraintes qualifiées**
- 20. **Condition nécessaire de qualification**
- 21. **Lemme : équivalence à un minimum**
- 22. **Équivalent à minimum avec λ**
- 23. Point selle
- 24. **Propriété des points selles : système vérifié**
- 25. **Lemme : inégalité sup et inf**
- 26. **Problème dual**
- 27. Problème d'optimisation linéaire, passage du problème sous forme canonique à la forme standard

28. Ensemble des solutions réalisables, sommets
29. Définition de Γ , A_γ et \mathcal{B} , composantes de/hors base.
30. Définition de x_X , x_N , B , N . Redéfinition de Ax .
31. Définition d'une solution de base associé à la base γ
32. Définition d'une solution de base réalisable, base réalisable. Solution non dégénéré.
33. **Les sommets de X_{ad} sont exactement les solutions de base réalisable**
34. **S'il existe une solution optimale de (P_L) alors il existe une solution optimale de base réalisable**
35. **Lemme sur $c^T x$ et vecteur des prix marginaux**
36. **Lien vecteur des prix marginaux et solution optimale**
37. Définition de E_γ et de S_{γ,j^*}
38. **Si S_{γ,j^*} non vide ?**
39. **Redéfinition de δ , comme quoi il appartient à B**
40. **Critère de Dantzig**
41. Définition des vraibles entrantes et sortantes selon le critère naturel et le critère de Bland
42. Problème de première ou deuxième espèce
43. **Comment construire une base réalisable dans le cas d'un problème de première espèce**
44. Bien connaître les problèmes de deuxième espèce
45. Définition du problème dual (et comment on y arrive)
46. **Inégalité entre primal et dual**
47. Corollaire
48. **Équivalence des solutions**
49. Définition de base primale ou duale réalisable.

Cinquième partie

Processus de Markov

1. Définition de processus
2. Propriété de Markov, homogénéité
3. Mesure de probabilité, $f : E \rightarrow \mathbb{C}$: représentation vectorielle
4. Matrice stochastique
5. **Relations de Kolmogorov**
6. Définition " i conduit à j ", conduit) un préordre. Notation.
7. i et j communiquent, relation d'équivalence, notation.
8. Définition transitive, finale, ergodiques.
9. Existence de classes finales dans le cas fini
10. Forme canonique matrice de transition, puissance n
11. **Si E fini, alors le processus finira presque surement dans une des classes finales**
12. **A quoi correspond $(I - Q)^{-1}$?**
13. **$B=NR$?**
14. Ensemble des entiers avec un chemin
15. Propriété fondamentale
16. **$\text{PGCD}(N_{ii})$**
17. Période d'une classe, classe apériodique.
18. **Forme de N_{ii} et de N_{ij}**

19. Définition de $i \sim j$
20. Nombre de sous-classes cycliques
21. Chaîne régulière
22. **Équivalence à chaîne régulière**
23. **Théorème fondamental des chaînes régulières**
24. **Théorème ergodique**
25. Générateur infinitésimal
26. Propriété des a_j^i
27. Théorème Backward et Forward
28. Définition d'absorbant, équivalence avec le générateur infinitésimal
29. Définition des instants de transition
30. Théorème fondamental
31. Chaîne discrète associée, classification, écriture du générateur infinitésimal
32. Limite e^{tX} ?
33. Temps moyen passé par j sachant qu'on est parti de i , transitoires
34. Autre moyen de l'avoir
35. Probabilité de finir dans une classe finale donnée
36. Équivalence à $i \rightsquigarrow j$
37. Chaîne régulière en temps continu. Équivalence
38. Définition de loi de probabilité invariante. Équivalence avec générateur infinitésimal.
39. Théorème fondamental pour les chaînes régulières
40. Théorème ergodique en temps continu
41. Processus d'entrée-Sortie : définition de S et T
42. Lois de S et de T
43. Loi de l'instant de première transition
44. Savoir retrouver le générateur infinitésimal
45. Processus de Poisson, processus de comptage
46. Hypothèses des processus de comptage
47. Théorème sur la loi de ces processus
48. Théorème sur la loi des processus de Poisson
49. Loi de la durée entre deux arrivées
50. Truc sur un espace mesurable

Sixième partie

Statistiques

1 Série chronologique

1. Définition suite chronologique
2. Deux modèles de décomposition : quelle combinaison ? Dans quels cas va-t-on choisir l'un ou l'autre ?
3. Moindres carrés : expression de a et b .
4. Mise en place de la méthode des deux points
5. Expression de r
6. Moindre carré polynomial : expression de θ^{MC}
7. Formule des moyennes mobiles
8. Définition MMC
9. Étape dans la décomposition d'une série chronologique

2 Modèle Linéaire Gaussien

10. Loi du chi2 : espérance et variance
11. Loi de Student, de Fisher, carré d'une Student
12. Définition MLG
13. Définition des estimateurs A, B et σ^2 . Lois de chacun.
14. d_x^2 ?
15. Statistiques pour avoir les intervalles de confiance pour α , β et σ^2
16. IC de chacun d'entre eux
17. Test significatif du lien linéaire : Stat et zone de rejet
18. Test d'un modèle linéaire spécifique
19. IC pour $\mathbb{E}(Y_0)$ et pour une observation Y_0
20. Test du caractère significatif de la liaison linéaire par comparaison de modèle
21. ANOVA 1 : Gueule des données et du modèle
22. Définition dimension
23. Définition de M_1 et M_p
24. Estimation des paramètres dans chacun des modèles
25. Statistique de test
26. Définition contraste
27. Statistique de test pour les contrastes
28. Estimateur des μ_i et des σ_i^2
29. IC pour μ_i

3 ANOVA 1

30. Facteur, niveau
31. Modèle de l'ANOVA 1 : modèle avec μ_i et avec les α_i (sans oublier les hypothèses)
32. Dimension du modèle
33. Approche comparaison de modèle : deux hypothèses testées. 5 étapes d'estimation dans modèle complet ou non
34. Statistique de test, sa loi sous H_0
35. Définition d'un contraste.
36. Pour un contraste donné : hypothèses de test, statistique de test et loi
37. Estimations des paramètres μ_i : intervalle de confiance
38. Comment pourrait-on construire un IC pour les α_i ?

4 MLG multiple

39. Variance d'un vecteur aléatoire. Propriétés de l'espérance et de la variance.
40. Écriture vectorielle du MLG multiple
41. Estimateur de θ . Loi de T, d'une fonction de S^2
42. Construction d'un intervalle de confiance pour les θ_k .
43. Lien entre loi de Student et combinaison linéaire de composantes de θ
44. Revoir construction d'un IC pour une valeur inconnue y_0

5 ANOVA 2

45. Plan complet équilibré => Orthogonal
46. Modèle final d'ANOVA 2. Contrainte d'identifiabilité