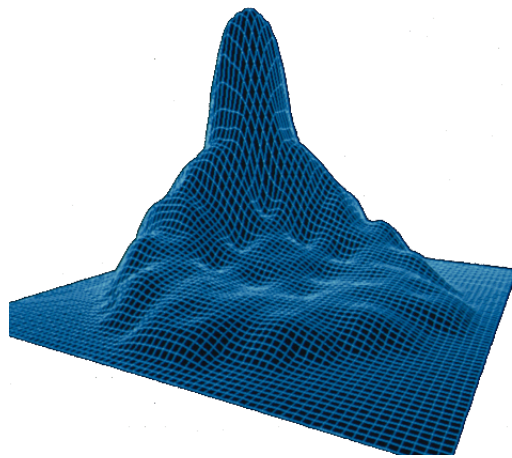


Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la méthode des éléments finis

Gabrielle Collette, Alexandre Vieira & Conrad Hillairet



Rapport

Professeur référent : Christian Goût

7 mai 2014

Remerciements

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Présentation des équations de Saint-Venant	3
2.1	Un peu d'hydrodynamique	3
2.2	Les équations de Navier-Stokes	3
2.2.1	Équation de continuité	3
2.2.2	Equation de quantité de mouvement	4
2.2.3	Système d'équations	5
2.3	Moyenne des équations de Navier-Stokes	5
2.4	Les équations de Saint-Venant	10
2.4.1	Les équations linéarisées	11
3	Simulations numériques	12
3.1	Présentation de la méthode	12
3.1.1	La théorie des éléments finis	12
3.1.2	Exemple de la méthode des éléments finis	15
3.2	Implémentation des éléments finis	17
4	Saint-Venant sous FreeFem++	18
4.1	Méthode des volumes finis	18
4.1.1	Présentation	18
4.1.2	Exemple : équation de Poisson	19
4.2	Implémentation de cette méthode sous FreeFem++ pour l'équation de Saint-Venant	20

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Présentation des équations de Saint-Venant

2.1 Un peu d'hydrodynamique

2.2 Les équations de Navier-Stokes

Équations de Navier-Stokes : deux équations :

- Une équation de continuité (conservation de la masse)
- Équation de quantité de mouvement

Dans la suite, nous noterons :

- $\vec{U}(U, V, W)$ le vecteur vitesse de composantes U, V et W
- ρ la densité
- p la pression
- Ω le volume de contrôle

On note $M(t)$ la masse de fluide dans le volume Ω à l'instant t . On l'exprime par :

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2.1)$$

2.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

On transforme l'expression de 2.2 :

$$\begin{aligned}
\frac{dM(t)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma}_{\text{Flux net à travers la surface } \partial\Omega} \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) \right] d\Omega \quad (\text{Ostrogradski}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Or, on raisonne pour Ω quelconque, d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (2.3)$$

2.2.2 Equation de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M \vec{U}) = \sum \vec{F} \quad (2.4)$$

On va réécrire chacun des membres de l'équation de 2.4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (M \vec{U}) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) d\sigma
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} (M \vec{U}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) \right] d\Omega \quad (2.5)$$

On s'occupe à présent de l'autre membre : que vaut le bilan des forces ? On prend comme hypothèse que le bilan des forces est égal à la somme d'une force massique \vec{F}_M et d'une force surfacique \vec{F}_S . Chacune de ces forces s'expriment ainsi :

$$\vec{F}_M = \int_{\Omega} \rho \underbrace{\left(g - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} \right)}_{=f} d\Omega \quad (2.6)$$

avec :

- ρ la densité
- g la force de pesanteur
- $\vec{\Omega}$ vecteur de rotation terrestre
- f la résultante des forces massiques

$$\vec{F}_S = \int_{\Omega} \text{div} \left(-pI + \underbrace{2\rho\nu D}_{=\tau} \right) d\Omega \quad (2.7)$$

avec :

- p la pression
- I la matrice identité
- ρ la densité
- ν coefficient de viscosité cinématique
- D le tenseur des taux de déformation
- τ le tenseur des contraintes visqueuses

On tire donc de 2.6 et 2.7 :

$$\sum \vec{F} = \int_{\Omega} (\rho f + \text{div}(-pI + \tau)) d\Omega \quad (2.8)$$

Or, on a égalité pour tout Ω entre 2.5 et 2.8, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho f - \nabla p + \text{div}(\tau) \quad (2.9)$$

2.2.3 Système d'équations

Les équations de Navier-Stokes se résument donc par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) &= \rho f - \nabla p + \text{div}(\tau) \end{cases}$$

En introduisant le vecteur vitesse dans le repère cartésien $\vec{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ et

$f = (fV, -fU, f_z)^T$, on arrive au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta(\nu U) + fV \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial(VW)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \Delta(\nu V) - fU \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(UW)}{\partial x} + \frac{\partial(VW)}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \Delta(\nu W) + f_z \end{cases}$$

2.3 Moyenne des équations de Navier-Stokes

Afin d'obtenir les équations de Saint-Venant, nous commençons par faire quelques hypothèses :

Hypothèses de Boussinesq On considère ici la densité ρ comme constante par rapport au temps et à l'espace. Cela permet de simplifier le système d'équations de Navier-Stokes, les termes tels que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ devenant nuls.

Hypothèse de pression hydrostatique On considère également que l'accélération du mouvement sur la verticale est négligeable devant l'accélération due à la gravité. Cela permet de négliger les termes $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial W}{\partial y}$. Cela débouche, dans les équations de quantité de mouvement, à l'égalité :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Vitesse moyenne On considère u la vitesse moyenne suivant x sur la verticale et v la vitesse moyenne suivant y sur la verticale :

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz$$

$$v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz$$

avec Z_s la hauteur de la surface et Z_f la hauteur du fond, et $h = Z_s - Z_f$.

Transformation de l'équation de continuité On va chercher à réexprimer l'équation de continuité $div(\vec{U}) = 0$ grâce à ces variables. On utilise pour cela la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} div(\vec{U}) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz + W(Z_s) - W(Z_f) + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \\ &\quad - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} - V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.10)$$

On fait à présent des hypothèses d'imperméabilité de la surface libre et du fond, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun transfert de masse à travers le fond et la surface. Ces hypothèses s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} &= W(Z_s) - \frac{\partial Z_s}{\partial t} \\ U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} &= W(Z_f) - \frac{\partial Z_f}{\partial t} \end{aligned}$$

L'équation 2.10 devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz + \frac{\partial}{\partial t} (Z_s - Z_f) &= 0 \\ div(h \vec{u}) + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $\vec{u} = (u, v)^T$

Equation de quantité de mouvement : membre de gauche On va maintenant tenir le même raisonnement sur les équations de quantité de mouvement. On s'intéressera principalement à la première des deux équations, la deuxième étant faite de façon analogue. On repart de l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta(\nu U) + f_x$$

On s'intéresse uniquement au membre de droite, et on en calcule l'intégrale sur la verticale. On utilise la formule de Leibniz dans la plupart de ces égalités :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t}(hu) + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial t} \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial UW}{\partial z} dz &= U(x, y, Z_s)W(x, y, Z_s) - U(x, y, Z_f)W(x, y, Z_f) \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U^2}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz + U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} - U^2(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial UV}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz + U(x, y, Z_f)V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} - U(x, y, Z_s)V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{aligned}$$

Dans les deux dernières équations, on retrouve des termes qu'on peut encore simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (u + U - u)(v + V - v) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (uV + vU - 2uv) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{[uhv + vhu - 2uvh]}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz \end{aligned}$$

De même, on va avoir :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz = \frac{\partial}{\partial t}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)^2 dz$$

Après simplification, on obtient le résultat suivant :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \right) dz = \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} (U-u)^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U-u)(V-v) dz$$

On peut démontrer les deux égalités suivantes :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} (U-u)^2 dz = \nu_d \frac{\partial}{\partial x}(hu)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} (U-u)(V-v) dz = \nu_d \frac{\partial}{\partial y}(hu)$$

avec ν_d le coefficient de dispersion.

L'équation 2.12 devient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \Delta(\nu_d hu) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Equation de quantité de mouvement : membre de droite On s'intéresse maintenant au membre de gauche. On commence par le terme de pression. En réutilisant l'hypothèse de pression hydrostatique énoncé précédemment :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

On en déduit que :

$$p(x, y, z) = -\rho g(Z_s - z)$$

Ainsi, on obtient avec la première équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(\rho g(Z_s - z)) dz &= \int_{Z_f}^{Z_s} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(gz)}_{=0} - \frac{\partial g Z_s}{\partial x} \right] dz \\ 4 &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} dz \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(\rho g(Z_s - z)) dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (2.14)$$

De même, on obtient pour la deuxième équation :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(\rho g(Z_s - z)) dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad (2.15)$$

Pour les termes de Coriolis, l'intégration se fait très facilement :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} fV dz = fhv \quad (2.16)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} fU dz = fhu \quad (2.17)$$

Il reste maintenant le terme utilisant le lagrangien. Une fois encore, on utilise la formule de Leibniz :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \Delta(U) dz = \text{div} \left(\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \nabla U dz \right) - \nu \nabla U \cdot \nabla Z_s + \nu \nabla U \cdot \nabla Z_f$$

Les deux derniers termes de cette équation représentent les contraintes de cisaillement au fond et à la surface dû au vent. Ces forces sont en fait superficielles, mais apparaissent dans les équations de Saint-Venant comme des termes sources appliquées à toute la masse de l'eau, puisque les équations représentent une moyenne sur la verticale. On pose ces deux contraintes comme étant $-\frac{1}{\rho h} \vec{\tau}_f$ pour le fond et $\frac{1}{\rho} \vec{\tau}_s$ pour la surface.

On s'intéresse plus spécialement au terme τ_f . On peut l'exprimer sous la forme :

$$\vec{\tau}_f = \begin{pmatrix} \tau_{fx} \\ \tau_{fy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u}$$

C_f étant un coefficient de frottement, souvent déterminé par une des formules suivantes :

— la formule de Chézy

$$C_f = \frac{2g}{C_h^2}$$

— la formule de Manning

$$C_f = \frac{2gn^2}{R_h^{1/3}}$$

où C_h est le coefficient de Chézy et R_h le rayon hydraulique.

En conclusion, on arrive à l'équation suivante :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \Delta(U) dz = \text{div}(\nu \nabla(hu)) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2.18)$$

Conclusion En combinant les équations 2.13, 2.14, 2.16 et 2.18, on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + \text{div}((\nu - \nu_d)(\nabla(hu))) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho}$$

En posant $A_H = \nu - \nu_d$, appelé coefficient de diffusion, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (2.19)$$

De la même façon, l'équation de mouvement dans la direction y nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} - fhu + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (2.20)$$

2.4 Les équations de Saint-Venant

Système d'équations Les considérations de la sous-section précédente nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) &= -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} - fhu + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \end{cases}$$

Ces équations peuvent par ailleurs encore se simplifier. Pour cela, on va utiliser la première équation et l'intégrer dans les deux suivantes.

Tout d'abord, remarquons l'égalité suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial Z_f}{\partial t}}_{=0} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} \quad (2.21)$$

Ensuite, intéressons nous aux membres de gauche des équations de quantité de mouvement. On va ici séparer les produits dans les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial hu}{\partial x} + u \frac{\partial hv}{\partial y} + hv \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} \right)}_{(\star)} \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse, on a $(\star) = 0$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

On démontre de la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = h \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

On arrive donc à la formulation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} + F_y \end{cases} \quad (2.22)$$

où F_x et F_y désigneront toutes les forces extérieures normalisées par la hauteur.

shallow water en anglais

leurs spécificités d'utilisation

2.4.1 Les équations linéarisées

On considère que u et v sont petits, et que la hauteur Z_s vaut $Z_s = Z_{s0} + \eta$ où Z_{s0} serait une hauteur moyenne et η une fluctuation autour de la moyenne supposée petite. De même, on néglige les forces extérieures. On pose également $h_0 = Z_{s0} - Z_f$

Sous ces hypothèses, les deux équations de quantité de mouvement se simplifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

Pour l'équation de conservation de la masse, on sépare les produits dans les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= \underbrace{\frac{\partial Z_{s0}}{\partial t} - \frac{\partial Z_f}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}}_{\text{négligés}} + h \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (Z_{s0} + \underbrace{\eta}_{\text{négligé}} - Z_f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le système d'équations de Saint-Venant linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.23)$$

Chapitre 3

Simulations numériques

3.1 Présentation de la méthode

3.1.1 La théorie des éléments finis

La formulation variationnelle

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Afin d'appliquer la méthode des éléments finis nous devons tout d'abord changer la formulation de notre problème. Pour cela, nous allons utiliser la formulation variationnelle. Elle a pour but de diminuer le degré de dérivation de notre expression. On ne veut pas calculer explicitement notre expression. Son principe est simple. Nous allons remplacer notre équation de départ par elle-même multipliée par une fonction test que nous noterons v . Nous intégrons ensuite cette expression sur Ω . Grâce aux formules d'intégration par parties et de Green nous obtenons alors un nouveau système d'équation :

$$\forall v \in V \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Notre problème revient alors trouver u solution de :

$$\forall v \in V a(u, v) = L(v)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

$$V = H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

grâce au théorème de Lax-Milgram nous savons que ce problème admet une solution si et seulement si :

- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue
- $a(.,.)$ est V -elliptique, c'est-à-dire que $\exists \alpha > 0$ tel que $|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V$
- $L(.)$ est une forme linéaire continue

La formulation variationnelle peut, au départ, sembler étrange. Cependant, grâce au théorème de Lachs-Milgram, nous pouvons déterminer qu'il existe une unique solution à notre problème, ce qui nous permet de conclure sur la solution de notre problème de départ.

La méthode des éléments finis

Le principe des éléments finis est basé sur cette approche variationnelle. En effet, nous allons discrétiser notre espace V de dimension infinie par un sous-espace V_h de dimension finie. Nous avons donc désormais une approximation interne que nous pouvons exprimer ainsi : trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = L(v_h) \forall v_h \in V_h$.

Le choix de notre espace V_h est donc important. Cependant il n'est pas évident car il a des propriétés cachées.

La méthode des éléments finis se base sur le maillage du domaine Ω . Nous appelons maillage un pavage de l'espace en volumes élémentaires tels que les triangles, les carrés... Un maillage est constitué d'une collection de points que nous appellerons sommets ou noeuds du maillage. Un exemple de maillage est montré figure 3.1.

Pour tout entier $k \geq 1$, on appelle treillis d'ordre k l'ensemble :

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}$$

Avec λ_j les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$ définies par :

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \quad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

Avec les $a_{i,j}$ les sommets de notre maillage.

Nous définissons l'ensemble \mathbb{P}_k comme les polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k . L'intérêt de ces notions est qu'un treillis Σ_k d'un maillage K permet de caractériser tous les polynômes de \mathbb{P}_k . On dit alors que Σ_k est \mathbb{P}_k unisolvant. On note les points du treillis Σ_k $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Il existe donc une base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ de \mathbb{P}_k telle que $\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq n_k$.

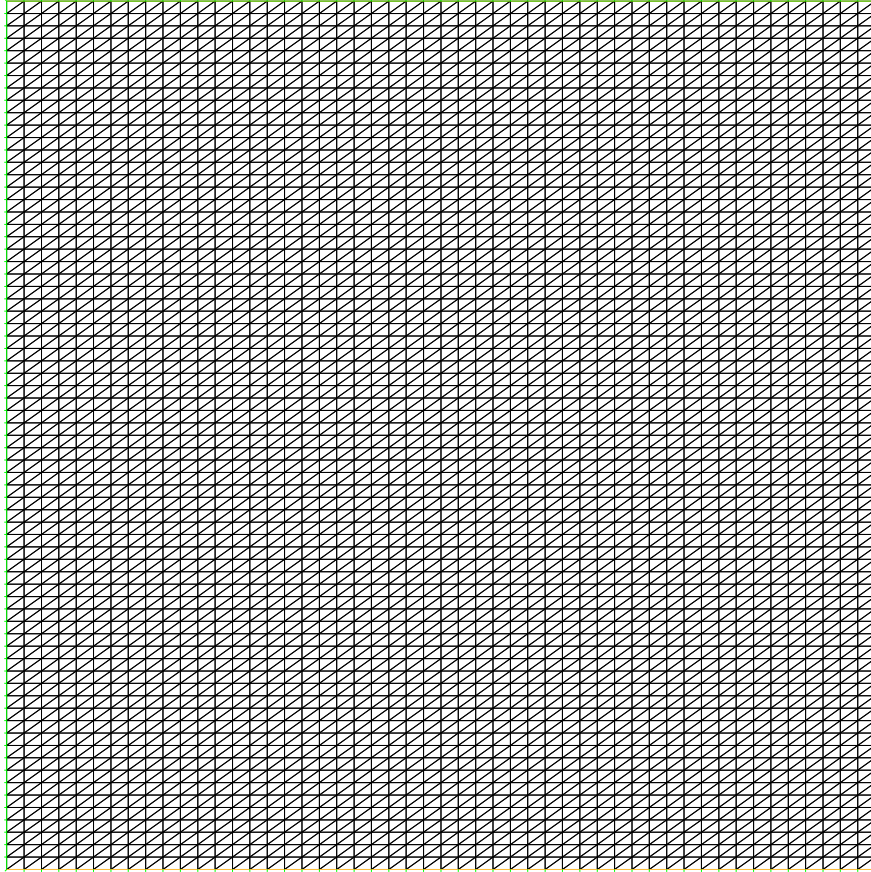


FIGURE 3.1 – Maillage triangulaire d'un carré

On définit les noeuds de liberté comme l'ensemble des points $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$ des treillis d'ordre k . On ne compte qu'une seule fois les points qui se trouvent dans plusieurs de nos treillis. n_{d_l} est le nombre de degrés de liberté de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k . On définit le sous-espace V_{0h} comme ci-dessous :

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

L'espace V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension vaut le nombre de degrés de liberté et est donc finie. Il existe une base de V_h qu'on nommera $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$ qu'on définit de la manière suivante : $\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq n_{d_l}$

telle qu'on ait :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{d_l}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x)$$

Revenons à notre exemple. Résoudre ce système par la méthode des éléments finis revient à trouver $u_h \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

Ce qui équivaut à l'expression ci-dessous après avoir décomposé u_h dans notre base et en prenant $v_h = \phi_i$

$$\sum_{j=1}^{n_{d_l}} u_h(\hat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx$$

On introduit la matrice de rigidité \mathcal{K}_h définie par :

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{d_l}}$$

On obtient alors le système linéaire : $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ avec

$$U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{d_l}} \quad b_h = \left(\int_{\Omega} f \phi_i dx \right)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$$

3.1.2 Exemple de la méthode des éléments finis

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Formulation variationnelle de notre problème

Comme nous avons vu ce problème peut se mettre sous la forme suivante :

$$\forall v \in V a(u, v) = L(v)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v$$

$$V = H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Montrons que le théorème de Lax-Milgram s'applique. Est-ce que notre $a(u, v)$ est bien continu ?

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Or

$$\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_V$$

D'où :

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

Donc $a(., .)$ est bien une forme bilinéaire continue. Maintenant démontrons qu'elle est V -elliptique.

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v = \int_{\Omega} (\nabla v)^2 \geq C \times \|v\|_V^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré. Donc notre forme est bien V -elliptique. Montrons désormais que $L(v)$ est continue.

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \int_{\Omega} |f v| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_V$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc nous pouvons appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Méthode des éléments finis

Nous allons désormais approximer notre solution par la méthode des éléments finis. Pour cela nous choisissons de faire notre maillage sur le carré unité avec des triangles \mathbb{P}_1 .

Notre treillis Σ_k est l'ensemble des coordonnées barycentriques de notre maillage. Prouvons qu'il est $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ -unisolvant.

Nous allons travailler sur un des triangles de notre maillage. Nous rappelons ici que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2) = \text{vect}\{1, x, y\}$. Pour prouver l'unisolvance nous allons tout d'abord montrer que la dimension de \mathbb{P}_1 est égal au cardinal de notre treillis. Puis nous allons tenter de démontrer qu'il n'existe qu'une unique fonction telle que $\forall a \in \Sigma_k \ p(a) = 0 \Rightarrow p = 0$

$$\dim_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{R}^2) = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Or $\text{card}\Sigma_k = 3$ puisque nous avons dans un seul triangle trois points barycentriques. La première partie est donc vérifiée.

Soit a_1, a_2, a_3 les trois sommets de notre triangle. On sait que toute fonction p peut s'écrire sous la forme $p(v) = a + bx + cy, v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$.

On pose $a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p(a_1) = a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ p(a_2) = a + bx_2 + cy_2 = 0 \\ p(a_3) = a + bx_3 + cy_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ b(x_3 - x_1) + c(y_3 - y_1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ (x_2 - x_1)(b(x_3 - x_1) + c(y_3 - y_1)) - (x_3 - x_1)(b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ c[(x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1)] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or $(x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) \neq 0$. En effet, cela représente le double de l'aire de notre triangle. Elle ne peut pas être nulle car sinon nos trois points seraient alignés. Donc $c = 0$

De plus nous avons le système suivant en soustrayant nos équations de départ :

$$\begin{cases} b(x_1 - x_2) = 0 \\ b(x_2 - x_1) = 0 \\ b(x_3 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Or il est impossible que $x_1 = x_2 = x_3$ donc obligatoirement $b = 0$ On déduit alors aisément que $a = 0$. Nous avons donc prouvé que notre treillis était $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ -unisolvant.

3.2 Implémentation des éléments finis

Chapitre 4

Saint-Venant sous FreeFem++

4.1 Méthode des volumes finis

4.1.1 Présentation

La méthode des éléments finis ne semble pas appropriée aux équations de Saint-Venant. Obtenir une formulation exploitable par cette méthode nécessite des techniques assez poussées qui n'entrent pas dans le cadre de ce projet. Une autre méthode d'approximation d'EDP paraît par contre plus appropriée : la méthode des volumes finis. En effet, les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation, ce qui rentre idéalement dans notre problème.

Dans un cadre général, les lois de conservation s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = f \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

où :

- ρ est la densité inconnue
- J est le flux associé (dépendant aussi de ρ)
- f est le terme source

On se donne également un maillage de Ω défini comme pour les éléments finis, mais la notation est ici différente. Prenons un exemple en dimension 1 et notons nos mailles $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$.

- On note $K_i|K_j$ l'interface entre les mailles K_i et K_j , $1 \leq i, j \leq N$:

$$K_i|K_j = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$$

En dimension 1, cette interface est non vide si $j = i \pm 1$ et se résume à un point, qu'on note $x_{i \pm \frac{1}{2}}$. Les mailles se résument donc à des intervalles

de la forme

$$K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$$

On appelle ces mailles les volumes de contrôle.

- On prend un point à l'intérieur de chaque volume de contrôle, notés $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ (auxquels on peut ajouter x_0 et x_{n+1} sur les bords du domaine Ω). On les appelle points de contrôle.

Ces notions se généralisent facilement aux dimensions supérieures (les volumes de contrôles passant d'intervalles à des surfaces, des volumes, des hyper-volumes... Et de même pour les interfaces).

Afin d'approximer la solution, on va ici supposer que la solution est constante dans chaque maille, et juxtaposer chacune des solutions sur le domaine. En clair, la solution approchée ρ_h de notre problème sera de la forme :

$$\rho_h(x) = \sum_K \rho_K \mathbb{1}_K(x)$$

où K est une maille de notre domaine. Le but sera donc de chercher les inconnues ρ_K .

4.1.2 Exemple : équation de Poisson

Afin de mieux comprendre l'intérêt de cette méthode, on va essayer d'obtenir le schéma Volume Fini obtenu sur l'exemple donné auparavant pour les éléments finis. Pour rappel, nous nous donnons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Comme pour les volumes finis, on intègre de chaque côté de la première équation sur une maille K . On obtient ainsi :

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot n d\sigma = \int_K f d\Omega \quad (4.2)$$

où n est le vecteur normal extérieur à K .

Avec les notations précédentes, on note $\sigma = K|L$ une arête du polyèdre K . Ainsi, l'équation 4.2 devient :

$$-\sum_{\sigma \text{ arête de } K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot n d\sigma = \int_K f d\Omega \quad (4.3)$$

On va commencer par donner une première approximation de la première intégrale. On notant x_K et x_L les points de contrôle choisis dans les volumes K et L , on a l'approximation suivante :

$$\int_{\sigma} -\nabla u \cdot n d\sigma \approx |\sigma| \frac{u(x_K) - u(x_L)}{d(x_K, x_L)}$$

On note $F_{K,\sigma}$ l'approximation discrète suivante :

$$F_{K,\sigma} = |\sigma| \frac{u_K - u_L}{d(x_K, x_L)} \approx \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n d\sigma \quad (4.4)$$

Le problème devient donc le suivant : trouver une famille $(u_K)_K$ telle que :

$$\forall K, \sum_{\sigma \text{ arête de } K} F_{K,\sigma} = \int_K f d\Omega$$

Bien entendu, l'intégrale à droite de l'égalité précédente peut également être approximée.

4.2 Implémentation de cette méthode sous FreeFem++ pour l'équation de Saint-Venant

Nous nous appuyons, pour cette partie, sur le papier de Georges SADAHA nommé *Solving Shallow Water flows in 2D with FreeFem++ on structured mesh*. Dans cet article, il expose une manière stable de résoudre numériquement les équations de Saint-Venant en utilisant le logiciel FreeFem++, logiciel spécialisé dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Tout d'abord, on commence par exprimer le système d'équation de Saint-Venant sous forme d'une loi de conservation pour pouvoir ensuite trouver une formulation de type Volume Fini. Ainsi, le système devient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial y} = S(\mathbf{U}) \quad (4.5)$$

Avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Les tests ont été réalisés sur une grille $[-10, 10] \times [-5, 5]$ maillés par des triangles P1. On initialise la solution par une fonction pouvant ressembler à une vague avec des vitesses initiales nulles :

$$h(x, y, 0) = \frac{4}{\cosh^2(3(x+2))}$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$$

Chapitre 5

Conclusion