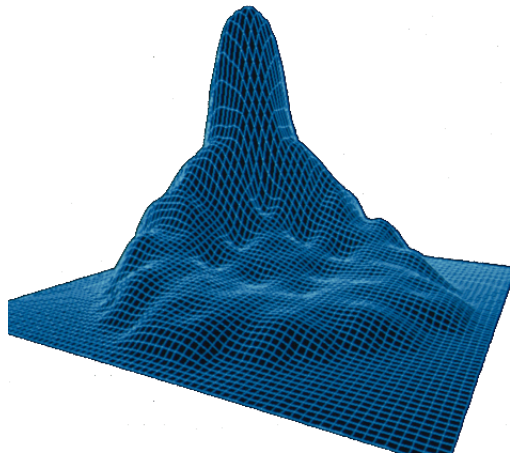


Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la méthode des éléments finis

Projet semestriel
Gabrielle Collette, Alexandre Vieira & Conrad Hillairet



Rapport

Professeur référent : Christian Goût

21 mai 2014

Remerciements

"Les petits ruisseaux font les grandes rivières."

Notre première pensée va bien évidemment vers Adhémar Saint Venant, sans qui l'idée même de ce projet n'aurait jamais vu le jour. Il coule de source que nous tenons à lui faire part de nos plus sincères remerciements.

La seconde vers Christian Goût, notre guide et capitaine dans les méandres de ce long fleuve pas si fluide que sont les méthodes numériques.

Enfin, nous remercions Marc Beveraggi pour ses conseils avisés : la vie est un long fleuve tranquille...

Table des matières

1	Présentation des équations de Saint-Venant	2
1.1	Un peu d'hydrodynamique.....	2
1.2	Les équations de Navier-Stokes.....	2
1.3	Moyenne des équations de Navier-Stokes.....	4
1.4	Les équations de Saint-Venant.....	9
2	Simulations numériques	11
2.1	Présentation de la méthode.....	11
2.2	Implémentation des éléments finis.....	16
3	Saint-Venant sous FreeFem++	26
3.1	Méthode des volumes finis.....	26
3.2	Implémentation de cette méthode sous FreeFem++ pour l'équation de Saint-Venant....	28

Introduction

Les équations différentielles modélisent un grand nombre de phénomènes (entre autres) physiques, biologiques ou financiers. Ils gagnent donc par ce biais un grand intérêt pour leur étude théorique et numérique.

Les exemples sont en effet nombreux.

— L'équation du pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

— Les modèles de Lotka Volterra :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) (\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -y(t) (\gamma - \delta x(t)) \end{cases}$$

— L'équation des circuits RC :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = E$$

— L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \Delta u = f$$

— L'équation de Klein-Gordon :

$$-h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -h^2 c^2 \Delta \psi + m^2 x^4 \psi$$

Le problème des équations différentielles (ordinaires ou aux dérivées partielles) est que bien souvent, on ne sait pas les résoudre. On utilise pour cela plusieurs méthodes numériques pour arriver à donner une solution approchée à ces équations.

Dans le cadre de ce projet, nous nous intéresserons à des équations différentielles utilisées en mécanique des fluides. Les modèles sont variés et s'appliquent avec plus ou moins de précision. Dans ce projet, nous nous intéresserons plus précisément aux équations de Saint-Venant, utilisés pour décrire les écoulements en milieu peu profond.

Le projet s'est donc organisé en 3 parties :

1. Après une brève introduction aux équations de Saint-Venant, celles-ci sont retrouvées à partir des équations de Navier-Stokes
2. La méthode des éléments finis sera présentée et implémentée sur un exemple
3. Une première approche de la solution numérique des équations de Saint-Venant grâce aux volumes finis cloturera ce rapport

Chapitre 1

Présentation des équations de Saint-Venant

1.1 Un peu d'hydrodynamique

Les équations de Saint-Venant sont utilisées lorsque la longueur sur laquelle nous travaillons est bien plus grande que sa hauteur. C'est par exemple le cas des océans, des tsunamis. Elles sont utilisées dans de nombreux domaines tels que la météorologie, la modélisation des océans. On peut aussi les utiliser pour modéliser des vagues rebondissantes contre le bord dans une baignoire remplie d'eau ou le comportement d'un liquide après que l'on ait lancé une pierre dedans. Par exemple dans le manuel d'utilisation de Phoenix [1] sur les équations de Saint-Venant, elles sont utilisées pour modéliser le comportement d'un flot dans un canal ouvert lorsque celui-ci forme un virage.

1.2 Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont en réalité constituées de deux équations :

- Une équation de continuité (conservation de la masse)
- Équation de quantité de mouvement

Dans la suite, nous noterons :

- $\vec{U}(U, V, W)$ le vecteur vitesse de composantes U, V et W
- ρ la densité
- p la pression
- Ω le volume de contrôle

On note $M(t)$ la masse de fluide dans le volume Ω à l'instant t . On l'exprime par :

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (1.1)$$

1.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0 \quad (1.2)$$

On transforme l'expression de 1.2 :

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma}_{\text{Flux net à travers la surface } \partial\Omega} \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) \right] d\Omega \quad (\text{Ostrogradski}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or, on raisonne pour Ω quelconque, d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (1.3)$$

1.2.2 Equation de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M \vec{U}) = \sum \vec{F} \quad (1.4)$$

On va réécrire chacun des membres de l'équation de 1.4.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M \vec{U}) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) d\sigma \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} (M \vec{U}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) \right] d\Omega \quad (1.5)$$

On s'occupe à présent de l'autre membre : que vaut le bilan des forces? On prend comme hypothèse que le bilan des forces est égal à la somme d'une force massique \vec{F}_M et d'une force surfacique \vec{F}_S . Chacune de ces forces s'expriment ainsi :

$$\vec{F}_M = \int_{\Omega} \rho \underbrace{(g - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U})}_{=f} d\Omega \quad (1.6)$$

avec :

— ρ la densité

- g la force de pesanteur
- $\vec{\Omega}$ vecteur de rotation terrestre
- f la résultante des forces massiques

$$\vec{F}_S = \int_{\Omega} \text{div} \left(-pI + \underbrace{2\rho\nu D}_{=\tau} \right) d\Omega \quad (1.7)$$

avec :

- p la pression
- I la matrice identité
- ρ la densité
- ν coefficient de viscosité cinématique
- D le tenseur des taux de déformation
- τ le tenseur des contraintes visqueuses

On tire donc de 1.6 et 1.7 :

$$\sum \vec{F} = \int_{\Omega} (\rho f + \text{div}(-pI + \tau)) d\Omega \quad (1.8)$$

Or, on a égalité pour tout Ω entre 1.5 et 1.8, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho f - \nabla p + \text{div}(\tau) \quad (1.9)$$

1.2.3 Système d'équations

Les équations de Navier-Stokes se résument donc par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) + \text{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) &= \rho f - \nabla p + \text{div}(\tau) \end{cases}$$

En introduisant le vecteur vitesse dans le repère cartésien $\vec{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ et $f = (fV, -fU, f_z)^T$,

on arrive au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta(\nu U) + fV \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial(VW)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \Delta(\nu V) - fU \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial(UW)}{\partial x} + \frac{\partial(VW)}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \Delta(\nu W) + f_z \end{cases}$$

1.3 Moyenne des équations de Navier-Stokes

Afin d'obtenir les équations de Saint-Venant, nous commençons par faire quelques hypothèses :

Hypothèses de Boussinesq On considère ici la densité ρ comme constante par rapport au temps et à l'espace. Cela permet de simplifier le système d'équations de Navier-Stokes, les termes tels que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ devenant nuls.

Hypothèse de pression hydrostatique On considère également que l'accélération du mouvement sur la verticale est négligeable devant l'accélération due à la gravité. Cela permet de négliger les termes $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial W}{\partial y}$. Cela débouche, dans les équations de quantité de mouvement, à l'égalité :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Vitesse moyenne On considère u la vitesse moyenne suivant x sur la verticale et v la vitesse moyenne suivant y sur la verticale :

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz$$

$$v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz$$

avec Z_s la hauteur de la surface et Z_f la hauteur du fond, et $h = Z_s - Z_f$.

Transformation de l'équation de continuité On va chercher à réexprimer l'équation de continuité $\text{div}(\vec{U}) = 0$ grâce à ces variables. On utilise pour cela la formule de Leibniz :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \text{div}(\vec{U}) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz + W(Z_s) - W(Z_f) + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$- U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} - V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_s}{\partial y}$$

On fait à présent des hypothèses d'imperméabilité de la surface libre et du fond, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun transfert de masse à travers le fond et la surface. Ces hypothèses s'expriment ainsi :

$$U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} = W(Z_s) - \frac{\partial Z_s}{\partial t}$$

$$U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} = W(Z_f) - \frac{\partial Z_f}{\partial t}$$

L'équation 1.10 devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz + \frac{\partial}{\partial t} (Z_s - Z_f) = 0$$

$$\text{div}(h \vec{u}) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

avec $\vec{u} = (u, v)^T$

Equation de quantité de mouvement : membre de gauche On va maintenant tenir le même raisonnement sur les équations de quantité de mouvement. On s'intéressera principalement à la première des deux équations, la deuxième étant faite de façon analogue. On repart de l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta(\nu U) + f_x$$

On s'intéresse uniquement au membre de droite, et on en calcule l'intégrale sur la verticale. On utilise la formule de Leibniz dans la plupart de ces égalités :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t}(hu) + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial t} \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial UW}{\partial z} dz &= U(x, y, Z_s)W(x, y, Z_s) - U(x, y, Z_f)W(x, y, Z_f) \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U^2}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz + U^2(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} - U^2(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial UV}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz + U(x, y, Z_f)V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} - U(x, y, Z_s)V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{aligned}$$

Dans les deux dernières équations, on retrouve des termes qu'on peut encore simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (u + U - u)(v + V - v) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (uV + vU - 2uv) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{[uhv + vhu - 2uvh]}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz \end{aligned}$$

De même, on va avoir :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz = \frac{\partial}{\partial t}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)^2 dz$$

Après simplification, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \right) dz &= \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz & \end{aligned} \quad (1.12)$$

On peut démontrer les deux égalités suivantes :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)^2 dz = \nu_d \frac{\partial}{\partial x} (hu)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz = \nu_d \frac{\partial}{\partial y} (hu)$$

avec ν_d le coefficient de dispersion.

L'équation 1.12 devient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \Delta(\nu_d hu) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Equation de quantité de mouvement : membre de droite On s'intéresse maintenant au membre de gauche. On commence par le terme de pression. En réutilisant l'hypothèse de pression hydrostatique énoncé précédemment :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

On en déduit que :

$$p(x, y, z) = -\rho g (Z_s - z)$$

Ainsi, on obtient avec la première équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g (Z_s - z)) dz &= \int_{Z_f}^{Z_s} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (gz)}_{=0} - \frac{\partial g Z_s}{\partial x} \right] dz \\ 4 &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} dz \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g (Z_s - z)) dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (1.14)$$

De même, on obtient pour la deuxième équation :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g (Z_s - z)) dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad (1.15)$$

Pour les termes de Coriolis, l'intégration se fait très facilement :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} fV dz = fhv \quad (1.16)$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} fU dz = fhu \quad (1.17)$$

Il reste maintenant le terme utilisant le lagrangien. Une fois encore, on utilise la formule de Leibniz :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \Delta(U) dz = \text{div} \left(\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \nabla U dz \right) - \nu \nabla U \cdot \nabla Z_s + \nu \nabla U \cdot \nabla Z_f$$

Les deux derniers termes de cette équation représentent les contraintes de cisaillement au fond et à la surface dû au vent. Ces forces sont en fait superficielles, mais apparaissent dans les équations de Saint-Venant comme des termes sources appliquées à toute la masse de l'eau, puisque les équations représentent une moyenne sur la verticale. On pose ces deux contraintes comme étant $-\frac{1}{\rho h} \vec{\tau}_f$ pour le fond et $\frac{1}{\rho} \vec{\tau}_s$ pour la surface.

On s'intéresse plus spécialement au terme τ_f . On peut l'exprimer sous la forme :

$$\vec{\tau}_f = \begin{pmatrix} \tau_{fx} \\ \tau_{fy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho C_f \sqrt{u^2 + v^2} \vec{u}$$

C_f étant un coefficient de frottement, souvent déterminé par une des formules suivantes :

— la formule de Chézy

$$C_f = \frac{2g}{C_h^2}$$

— la formule de Manning

$$C_f = \frac{2gn^2}{R_h^{1/3}}$$

où C_h est le coefficient de Chézy et R_h le rayon hydraulique.

En conclusion, on arrive à l'équation suivante :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \nu \Delta(U) dz = \text{div}(\nu \nabla(hu)) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (1.18)$$

Conclusion En combinant les équations 1.13, 1.14, 1.16 et 1.18, on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + \text{div}((\nu - \nu_d)(\nabla(hu))) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho}$$

En posant $A_H = \nu - \nu_d$, appelé coefficient de diffusion, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \quad (1.19)$$

De la même façon, l'équation de mouvement dans la direction y nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} - fhu + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \quad (1.20)$$

1.4 Les équations de Saint-Venant

Système d'équations Les considérations de la sous-section précédente nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x} + fhv + A_H \Delta(hu) + \frac{\tau_{sx}}{\rho} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) &= -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y} - fhu + A_H \Delta(hv) + \frac{\tau_{sy}}{\rho} - \frac{\tau_{fy}}{\rho} \end{cases}$$

Ces équations peuvent par ailleurs encore se simplifier. Pour cela, on va utiliser la première équation et l'intégrer dans les deux suivantes.

Tout d'abord, remarquons l'égalité suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial Z_f}{\partial t}}_{=0} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} \quad (1.21)$$

Ensuite, intéressons nous aux membres de gauche des équations de quantité de mouvement. On va ici séparer les produits dans les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) &= h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial hu}{\partial x} + u \frac{\partial hv}{\partial y} + hv \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} \right)}_{(\star)} \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse, on a $(\star) = 0$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

On démontre de la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2) = h \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

On arrive donc à la formulation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} + F_y \end{cases} \quad (1.22)$$

où F_x et F_y désigneront toutes les forces extérieures normalisées par la hauteur.

1.4.1 Les équations linéarisées

On considère que u et v sont petits, et que la hauteur Z_s vaut $Z_s = Z_{s0} + \eta$ où Z_{s0} serait une hauteur moyenne et η une fluctuation autour de la moyenne supposée petite. De même, on néglige les forces extérieures. On pose également $h_0 = Z_{s0} - Z_f$

Sous ces hypothèses, les deux équations de quantité de mouvement se simplifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

Pour l'équation de conservation de la masse, on sépare les produits dans les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= \underbrace{\frac{\partial Z_{s0}}{\partial t} - \frac{\partial Z_f}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}}_{\text{négligés}} + h \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + (Z_{s0} + \underbrace{\eta}_{\text{négligé}} - Z_f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le système d'équations de Saint-Venant linéarisé :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (1.23)$$

Chapitre 2

Simulations numériques

2.1 Présentation de la méthode

2.1.1 La théorie des éléments finis

La formulation variationnelle

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Afin d'appliquer la méthode des éléments finis nous devons tout d'abord changer la formulation de notre problème. Pour cela, nous allons utiliser la formulation variationnelle. Elle a pour but de diminuer le degré de dérivation de notre expression. On ne veut pas calculer explicitement notre expression. Son principe est simple. Nous allons remplacer notre équation de départ par elle-même multipliée par une fonction test que nous noterons v . Nous intégrons ensuite cette expression sur Ω . Grâce aux formules d'intégration par parties et de Green nous obtenons alors un nouveau système d'équation :

$$\forall v \in V \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Notre problème revient alors trouver u solution de :

$$\forall v \in V a(u, v) = L(v)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

$$V = H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

grâce au théorème de Lax-Milgram nous savons que ce problème admet une solution si et seulement si :

- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue
- $a(.,.)$ est V -elliptique, c'est-à-dire que $\exists \alpha > 0$ tel que $|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V$
- $L(.)$ est une forme linéaire continue

La formulation variationnelle peut, au départ, sembler étrange. Cependant, grâce au théorème de Lachs-Milgram, nous pouvons déterminer qu'il existe une unique solution à notre problème, ce qui nous permet de conclure sur la solution de notre problème de départ.

La méthode des éléments finis

Le principe des éléments finis est basé sur cette approche variationnelle. En effet, nous allons discrétiser notre espace V de dimension infinie par un sous-espace V_h de dimension finie. Nous avons donc désormais une approximation interne que nous pouvons exprimer ainsi : trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = L(v_h) \forall v_h \in V_h$.

Le choix de notre espace V_h est donc important. Cependant il n'est pas évident car il a des propriétés cachées.

La méthode des éléments finis se base sur le maillage du domaine Ω . Nous appelons maillage un pavage de l'espace en volumes élémentaires tels que les triangles, les carrés... Un maillage est constitué d'une collection de points que nous appellerons sommets ou noeuds du maillage. Un exemple de maillage est montré figure 2.1.

Pour tout entier $k \geq 1$, on appelle treillis d'ordre k l'ensemble :

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}$$

Avec λ_j les coordonnées barycentriques de $x \in \mathbb{R}^N$ définies par :

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \quad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

Avec les $a_{i,j}$ les sommets de notre maillage.

Nous définissons l'ensemble \mathbb{P}_k comme les polynômes à coefficients réels de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} de degré inférieur ou égal à k . L'intérêt de ces notions est qu'un treillis Σ_k d'un maillage K permet de caractériser tous les polynômes de \mathbb{P}_k . On dit alors que Σ_k est \mathbb{P}_k unisolvant. On note les points du treillis Σ_k $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$. Il existe donc une base $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ de \mathbb{P}_k telle que $\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq n_k$

On définit les noeuds de liberté comme l'ensemble des points $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$ des treillis d'ordre k . On ne compte qu'une seule fois les points qui se trouvent dans plusieurs de nos treillis. n_{d_l} est le nombre de degrés de liberté de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_k . On définit le sous-espace V_{0h}

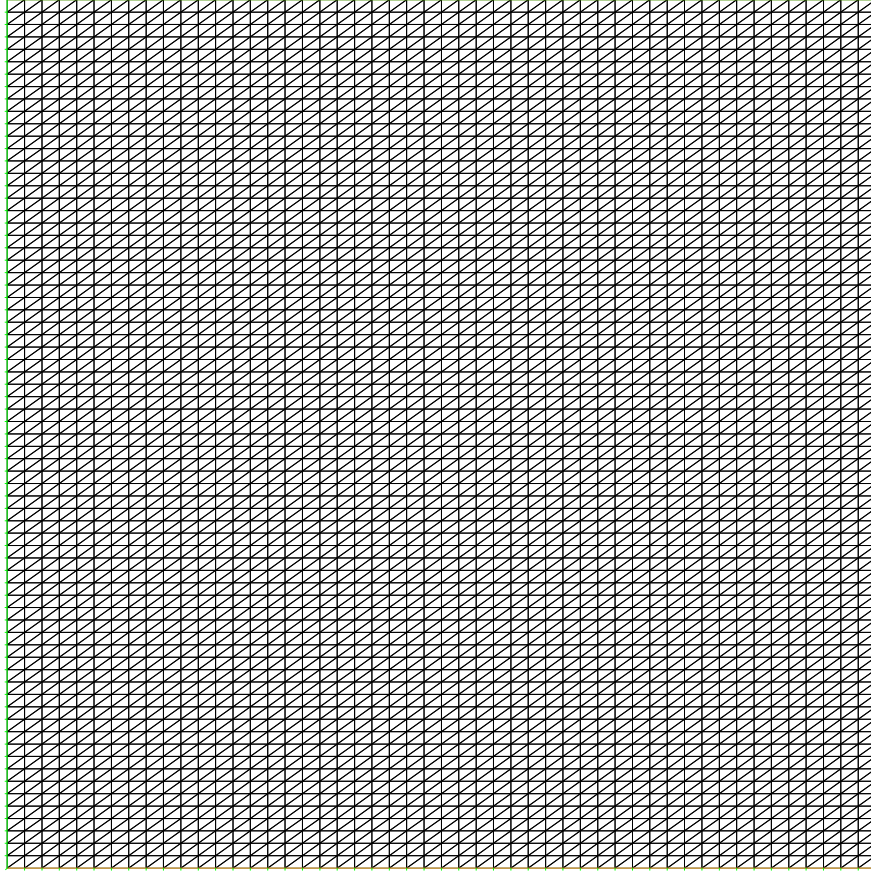


FIGURE 2.1 – Maillage triangulaire d'un carré

comme ci-dessous :

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

L'espace V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension vaut le nombre de degrés de liberté et est donc finie. Il existe une base de V_h qu'on nommera $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$ qu'on définit de la manière suivante : $\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq n_{d_l}$ telle qu'on ait :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{d_l}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x)$$

Revenons à notre exemple. Résoudre ce système par la méthode des éléments finis revient à trouver $u_h \in V_{0h}$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

Ce qui équivaut à l'expression ci-dessous après avoir décomposé u_h dans notre base et en prenant $v_h = \phi_i$

$$\sum_{j=1}^{n_{d_l}} u_h(\hat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx$$

On introduit la matrice de rigidité \mathcal{K}_h définie par :

$$\mathcal{K}_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{d_l}}$$

On obtient alors le système linéaire : $\mathcal{K}_h U_h = b_h$ avec

$$U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{d_l}} \quad b_h = \left(\int_{\Omega} f \phi_i dx \right)_{1 \leq i \leq n_{d_l}}$$

2.1.2 Exemple de la méthode des éléments finis

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Formulation variationnelle de notre problème

Comme nous avons vu ce problème peut se mettre sous la forme suivante :

$$\forall v \in V \quad a(u, v) = L(v)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v$$

$$V = H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Montrons que le théorème de Lax-Milgram s'applique. Est-ce que notre $a(u, v)$ est bien continu ?

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

Or

$$\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_V$$

D'où :

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est bien une forme bilinéaire continue. Maintenant démontrons qu'elle est V -elliptique.

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v = \int_{\Omega} (\nabla v)^2 \geq C \times \|v\|_V^2$$

D'après l'inégalité de Poincaré. Donc notre forme est bien V -elliptique. Montrons désormais que $L(v)$ est continue.

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \int_{\Omega} |f v| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_V$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc nous pouvons appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Méthode des éléments finis

Nous allons désormais approximer notre solution par la méthode des éléments finis. Pour cela nous choisissons de faire notre maillage sur le carré unité avec des triangles \mathbb{P}_1 .

Notre treillis Σ_k est l'ensemble des coordonnées cartésiennes de notre maillage. Prouvons qu'il est $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ -unisolvant.

Nous allons travailler sur un des triangles de notre maillage. Nous rappelons ici que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2) = \text{vect}\{1, x, y\}$. Pour prouver l'unisolvance nous allons tout d'abord montrer que la dimension de \mathbb{P}_1 est égal au cardinal de notre treillis. Puis nous allons tenter de démontrer qu'il n'existe qu'une unique fonction telle que $\forall a \in \Sigma_k \ p(a) = 0 \Rightarrow p = 0$

$$\dim_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{R}^2) = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Or $\text{card}\Sigma_k = 3$ puisque nous avons dans un seul triangle trois sommets. La première partie est donc vérifiée.

Soit a_1, a_2, a_3 les trois sommets de notre triangle. On sait que toute fonction p peut s'écrire sous la forme $p(v) = a + bx + cy, v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$.

On pose $a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p(a_1) = a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ p(a_2) = a + bx_2 + cy_2 = 0 \\ p(a_3) = a + bx_3 + cy_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ b(x_3 - x_1) + c(y_3 - y_1) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ (x_2 - x_1)(b(x_3 - x_1) + c(y_3 - y_1)) - (x_3 - x_1)(b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = 0 \\ b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) = 0 \\ c[(x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1)] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or $(x_2 - x_1) \times (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \times (y_2 - y_1) \neq 0$. En effet, cela représente le double de l'aire de notre triangle. Elle ne peut pas être nulle car sinon nos trois points seraient alignés. Donc $c = 0$. De plus nous avons le système suivant en soustrayant nos équations de départ :

$$\begin{cases} b(x_1 - x_2) = 0 \\ b(x_2 - x_1) = 0 \\ b(x_3 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Or il est impossible que $x_1 = x_2 = x_3$ donc obligatoirement $b = 0$. On déduit alors aisément que $a = 0$. Nous avons donc prouvé que notre treillis était $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ -unisolvant.

Comme nous avons vu précédemment, il est alors possible de mettre notre équation sous la forme d'un système linéaire : $\mathcal{K}_h U_h = b_h$. Par exemple, si on prend f égal à 0.001, on obtient :

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b_h = \begin{pmatrix} 6.25 \times 10^{-5} \\ \vdots \\ 6.25 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors résoudre notre système.

2.2 Implémentation des éléments finis

A présent que les éléments finis ont été définis de manière théorique, on va chercher à l'implémenter informatiquement. Cependant, plutôt que de faire un programme de manière à résoudre l'exemple de l'équation de Poisson ci-dessus (ce qui serait relativement simple car on a déjà la forme de la matrice qu'il faut -juste- inverser), nous allons faire un programme le plus extensible possible. Pour cela, nous allons écrire un programme en C++. En effet, ce programme présente plusieurs avantages :

- Un langage à objets, ce qui permet d'étendre facilement ce qui a été déjà fait grâce à l'héritage
- Une exécution rapide, ce qui est un bon argument lors de calculs pour l'analyse numérique
- L'accès à d'énormes bibliothèques, qu'elles viennent du C ou purement du C++

Cependant, afin que ce code soit bien le plus extensible possible, nous devrons bien définir les différentes classes créées. La suite de ce rapport explique comment ce programme a été pensé.

2.2.1 Sommet - SommetR2

Les géométries que l'on maille, et donc les maillages, ont besoin de la notion de point, de sommet. Nous avons décidé qu'un Sommet aurait un numéro qui lui est propre. Cela nous permettra d'identifier les fonctions de la base de V_h , puisque nous sommes sur des éléments finis lagrangiens.

Ils ont une liste de coordonnées et une dimension, celle-ci correspondant au nombre de coordonnées. Un SommetR2 possède deux coordonnées, puisqu'il s'agit d'un Sommet de \mathbb{R}^2 . Les méthodes définies ne sont que des méthodes de manipulations : geteurs, seteurs. Une méthode d'affichage console a aussi été implémentée afin de s'assurer des résultats obtenus.

2.2.2 Geometrie - GeometrieR2 - Carre - Triangle

Une Geometrie possède deux intérêts dans l'implémentation qui a été mise en place :

1. C'est ce que l'on maille ;
2. Certaines géométries constituent le domaine physique d'un élément fini et donc le support des restrictions des fonctions de base de V_h , c'est à dire des polynômes lagrangiens de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ ici.

Une Geometrie doit connaître la dimension de l'espace dans lequel elle existe afin de connaître le nombre de composantes des sommets qu'elle comporte. Elle doit donc aussi disposer du nombre de ces sommets. La liste des points est celle des sommets composant l'enveloppe convexe ici. On dispose pour une Geometrie générale uniquement des accesseurs. Une GeometrieR2 est un cas particulier dans le cadre de \mathbb{R}^2 . Les sommets sont alors des SommetR2.

Dans le cadre de ce projet, nous nous intéressons à un domaine carré, c'est pour cela que l'on dispose d'une classe Carré. Celui-ci est une GeometrieR2 par procédé d'héritage. Nous avons besoin de la longueur du côté et des quatre sommets le composant. c'est le Carré qui génère par la méthode `mailler(float pas)` son maillage. Cependant, afin de ne pas nous compliquer la tâche ici, nous ne nous sommes intéressé à la génération de maillage d'un carré que dans le cas où ses côtés sont parallèles aux axes du repère orthonormal cartésien.

Les triangles sont nécessaires puisque l'on utilise ici des éléments finis $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$. Nous avons défini une méthode de calcul d'aire à l'aide du déterminant, puisque nous aurons besoin de l'aire de ceux-ci dans le cadre des formules d'intégration numériques.

2.2.3 RestFctBaseR2P1

Comme nous venons de le dire, nous avons des éléments finis $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$, cette classe est une implémentation des polynômes de la forme $a \times x + b \times y + c$. On a donc trois paramètres à retenir. Nous disposons bien entendu d'une méthode de calcul pour une abscisse et une ordonnée données.

2.2.4 ElementFini - ElementFiniR2

Il est bien entendu normal d'avoir une telle classe, puisque nous implémentons ici une méthode d'éléments finis. Un élément fini possède un numéro pour pouvoir être identifié. Il possède aussi un domaine qui est une Géométrie. Ici ce domaine sera à chaque fois un Triangle puisque nous sommes dans le cas $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ sur l'ensemble de notre maillage. Enfin, un tel élément fini possède un triplet de RestFctBaseR2P1 afin de pouvoir calculer la matrice de rigidité à partir des sommets du domaine. A ces fins, l'ordre de stockage de ces RestFctBaseR2P1 est le même que celui des sommets du domaine et dépend donc de la parité du numéro de l'élément fini (c.f. explications sur la méthode de maillage).

Nous avons aussi défini une méthode d'affichage afin de vérifier les résultats de la génération du maillage.

2.2.5 Maillage - MaillageR2

Nous implémentons une méthode d'éléments finis, on s'attend bien sûr à trouver une telle classe. Elle comprend plusieurs listes : une comprenant tous les sommets, une autres uniquement les sommets du bord, une les sommets intérieurs au domaine, et la dernière, celle des éléments finis, ainsi que leur taille respective.

C'est à l'aide de cette classe et par itérations sur ses listes que nous calculerons la matrice de rigidité et le second membre.

2.2.6 fonctionsMath

Cette classe contient une méthode d'inversion de matrice : la méthode du gradient conjugué pour les moindres carrés (Introduction aux méthodes numériques, Franck Jedrzejewski), dont nous nous servons pour inverser le système.

2.2.7 FormBilinR2P1

Il s'agit de la classe qui implémente la forme bilinéaire obtenue dans la formulation variationnelle. Elle possède une méthode de calcul sur un élément fini donné, à partir de deux restrictions des fonctions de base de V_h , à savoir des polynômes de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ à son domaine. On effectue ce calcul sur un élément fini, car comme nous le verrons, pour calculer la matrice de rigidité, nous parcourons la liste des éléments finis. La formule de calcul utilise directement les paramètres des RestFctBaseR2P1, car les gradients sont constants ici, et on peut donc sortir leur produit scalaire de l'intégrale définissant notre équation dans sa forme variationnelle :

$$\begin{aligned}\int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy &= \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \times \int_K dx dy \\ \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy &= \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \times mes(K) \\ \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy &= \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \times mes(K)\end{aligned}$$

$$\int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy = ((\phi_i \rightarrow a) \times (\phi_j \rightarrow a) + (\phi_i \rightarrow b) \times (\phi_j \rightarrow b)) \times mes(K)$$

2.2.8 Fonction - FormLinR2P1

Dans notre équation de départ, nous avons une fonction f pour second membre. La classe implémentant cette fonction est la classe homonyme. Elle possède une méthode permettant de calculer la valeur qu'elle prend pour un point $(x; y)$ donné. Si on souhaite changer de fonction, il suffit d'aller changer cette méthode.

Mais dans la méthode des éléments finis, nous travaillons avec une formulation variationnelle, cette fonction n'intervient donc qu'indirectement par l'intermédiaire d'une forme linéaire, d'où la classe FormLinR2P1. Celle-ci possède une méthode pour pouvoir évaluer numériquement l'intégrale la définissant pour une restriction d'une fonction de base de V_h à un élément fini donnée.

$$\int_K \phi_i f dx dy = \frac{mes(K)}{3} \times ((\phi_i f)(a_{12}) + (\phi_i f)(a_{13}) + (\phi_i f)(a_{23}))$$

2.2.9 Probleme

C'est en quelque sorte une classe qui gère un peu tout. En effet, on y trouve le domaine sur lequel est défini l'équation et à partir duquel on va générer le maillage : un Carré ici. Un Problème possède aussi une FormBilinR2P1 et une FormLinR2P1 puisque celles-ci sont caractéristiques d'un problème donné. Il a aussi pour attribut un maillage, les matrices de rigidité de Neumann homogène et Dirichlet homogène, et les second membres associés, ainsi que les vecteurs solutions associés.

C'est la classe qui gère la méthode, car c'est sur cette classe que l'on va lancer les méthodes dans le main. En effet, elle possède :

1. Une méthode **genererMaillage()** qui affecte à son attribut maillage le résultat de la méthode de maillage de son domaine (Carré ici) ;
2. Une méthode **calculerMatrices()** qui calcule les matrices de rigidité et les second membres des systèmes linéaires ;
3. Une méthode **resoudreProbleme()** qui résout le système linéaire associé au problème de Dirichlet homogène ici ;
4. Une méthode **calculerSolutionPoints()** qui calcule pour différents points la valeur prise par la solution numérique et les écrit dans un fichier pour pouvoir ensuite afficher à l'aide de Gnuplot la solution.
5. Une méthode pour visionner la matrice de rigidité afin de s'assurer des résultats.

2.2.10 Main

C'est ni plus ni moins le programme que l'on lance après compilation. Dans la version actuelle, la fonction du second membre est à modifier dans le fichier fonction.cpp, la forme linéaire dans

formlinr2p1.cpp et la forme bilinéaire dans formbilinr2p1.cpp. Nous n'avons modifié pour notre part que le fichier fonction.cpp pour implémenter les cas d'un second membre constant, polynomial ou exponentiel, puisque nous ne nous sommes intéressés dans le cadre de ce projet qu'à l'équation de Poisson.

On commence par instancier une Fonction, une FormLinR2P1, une FormBilinR2P1, puis un Carré afin d'instancier à son tour à partir de ceux-ci un Problème. Puis on génère le maillage en passant un flottant en paramètre de la méthode `genererMaillage(float pas)` dont nous avons parlé précédemment. Dans ce projet, le carré ayant pour côté 1, il est plus prudent de prendre ce pas de maillage comme étant une puissance négative de 2 à cause de la représentation flottante : sinon le maillage ne tombe pas juste. On lance ensuite toujours sur l'instance de Problème les méthodes `calculerMatrices()` puis `resoudreProbleme()`. Enfin, dans le but d'afficher ensuite la solution sous Gnuplot, on lance la procédure `calculerSolutionPoints()`.

2.2.11 Méthode de génération du maillage

Expliquons quelque peu notre méthode de maillage de la classe Carré à l'aide de la figure 2.2. Nous avons distingué deux cas : les éléments finis au numéro pairs d'une part, impairs de l'autre. Cette distinction est importante puisque les restrictions des polynômes lagrangiens ne sont pas les mêmes puisqu'il faut effectuer une rotation. Dans le cas présent, nous n'avons pas voulu nous charger en calculant le déterminant de la transformation comme il est courant de le faire dans les méthodes. Nous nous contentons de rentrer mes paramètres a, b et c ($a \times x + b \times y + c$) en fonction de la parité. Tous les éléments pairs auront les mêmes paramètres de rentrés, idem pour les impairs. Il sera donc nécessaire lors du calcul de ces polynômes sur un élément fini de recourir à un changement de repère. Notons sur les éléments finis 1 et 2 en blanc, l'ordre dans lequel sont stockés les sommets suivant la parité de l'élément. C'est cette ordre qui fait que l'on crée les sommets dans un certain ordre.

On commence bien évidemment par générer le premier élément fini du maillage et donc les points 1, 2 et 3. On génère ensuite la suite de la première ligne du maillage : les éléments 2 avec la création du point 4, puis les éléments 3, 4, 5 et 6, produisant à chaque fois un point supplémentaire. C'est ensuite le tour des lignes supérieures, où les sommets créés sont cette fois tous ceux du dessus. Notons qu'afin de disposer d'une liste des sommets du bord ou intérieurs au domaine, nous avons besoin d'effectuer des tests sur leur abscisse et leur ordonnée.

Cette génération en ligne est possible puisque nous connaissons le nombre d'éléments finis par "ligne" : $\frac{2 \times \text{cote}}{h}$ et le nombre total : $\frac{2 \times \text{cote}^2}{h^2}$.

A la fin de la méthode, un maillage est créé et retourné.

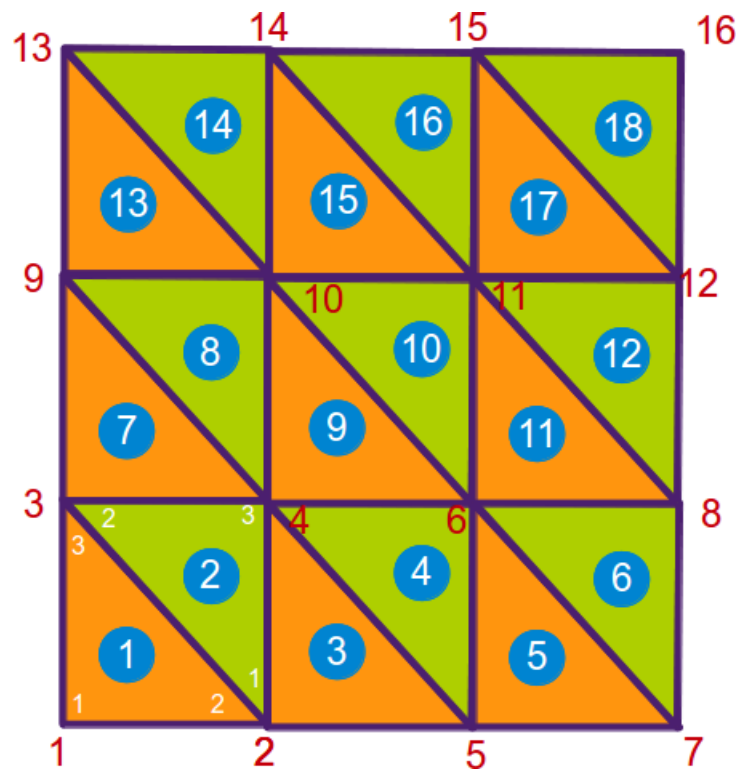


FIGURE 2.2 – Illustration du procédé de maillage

2.2.12 Méthode de calcul de la matrice de rigidité

On va calculer la matrice dans le cas de conditions de Neumann homogène et son second membre, et on va en extraire la matrice et le second membre pour des conditions de Dirichlet homogène.

1. On commence bien évidemment par initialiser la matrice et le second membre à 0.
2. On met dans une matrice 9×9 les valeurs de la forme bilinéaire pour le premier élément fini qui est impair. Cette matrice est 9×9 car on fait une double boucle sur les sommets du domaine qui est un triangle. Et à chaque couple de sommet (s_i, s_j) , on associe la restriction des fonctions de base de V_h à cet élément fini (ϕ_i^K, ϕ_j^K) ; couple pour lequel on calcule la forme bilinéaire.
3. On procède de même pour l'élément fini 2 qui est pair. Nous avons donc deux matrices de référence.
4. On parcourt ensuite la liste des éléments finis que nous procure le maillage. Et pour chacun de ces éléments, on fait une double boucle sur les sommets de son domaine (un triangle ici). A chaque itération, pour chaque couple de sommets (s_i, s_j) , on associe leurs identifiants (id_i, id_j) . On peut choisir de manière naturelle le numéro du sommet comme étant aussi le numéro de la fonction de la base de V_h valant 1 en ce sommet et 0 pour les autres. Or, les indices d'un élément de la matrice de rigidité correspondent justement à ces numéros de fonction de base de part sa définition. On a donc : `matRigNeum[ind_i][ind_j] += valRef[i][j]`. En fait il faut soustraire 1 à ind_k car on a fait partir les numéros des sommets à 1 en générant le maillage.
A la sortie de la boucle la plus interne (celle sur le second sommet), on calcule le second membre.
Il est important de remarquer que l'on n'affecte pas, mais que l'on ajoute les valeurs de références. C'est normal : un sommet appartient à plusieurs domaines du maillage, et donc à plusieurs éléments finis, il faut donc à chaque fois sommer l'intégrale que l'on obtient sur l'élément fini. Cela est dû au fait que le support des fonctions de V_h est composé de plusieurs éléments finis, et qu'alors l'intersection des supports de deux fonctions de base de V_h peut composer plusieurs éléments finis.
5. On extrait ensuite la matrice de rigidité pour des conditions de Dirichlet. Pour cela, on fait une double boucle sur les éléments de cette matrice. On a donc le couple d'indices (i, j) . On va chercher dans la liste des sommets intérieurs que nous fournit le maillage les sommets s_i et s_j . On extrait leur identifiant et on obtient le couple (id_i, id_j) , et on va utiliser l'élément `matRigNeum[ind_i][ind_j]`. On a donc : `matRigDir[i][j] = matRigNeum[ind_i][ind_j]`. Sauf qu'une nouvelle fois il faudra décaler de 1 pour les indices dans la matrice de rigidité pour des conditions de Neumann homogènes.
En sortie de boucle interne, on fait de même avec le second membre.

2.2.13 Amélioration envisageables

Il y a plusieurs types d'améliorations. Le premier concerne la méthode des éléments finis implémentée. En effet, nous stockons ici entièrement la matrice, étant creuse, il serait plus judicieux

d'implémenter une méthode permettant de gagner de la place. Une autre concerne l'implémentation : il serait commode de définir des classes plus générales et virtuelles pour qu'à partir de relations d'héritage, on puisse instancier un problème plus proprement qu'en modifiant directement les fichiers. Il serait aussi intéressant de regarder si une API C++ de gnuplot existe afin de se passer du script et qu'à partir d'une méthode on puisse afficher directement la solution. Il serait aussi préférable d'essayer de lire des maillages générés par d'autres logiciels. Enfin, une petite interface console avec un pourcentage d'avancement permettrait de mieux manipuler la méthode.

2.2.14 Résultats

Nous avons implémenté la méthode pour différents seconds membres. Nous avons d'abord regardé la solution obtenue pour une fonction constante : $f(x) = 2$. Nous avons commencé avec un pas de 0.125, nous avons donc 36 fonctions de base pour V_h . Comme on peut le voir sur la Figure 2.3 la solution est grossière, mais on voit déjà une forme de cloche qui s'applatit sur les côtés et vérifie donc les conditions de Dirichlet homogènes imposées. Afin d'étudier la convergence de la solution, nous avons diminué le pas à 0.03125 afin de bénéficier de 900 fonctions de base. Les calculs sont bien entendus plus longs. Mais la solution plus lisse comme on peut le voir sur la Figure 2.4. La solution semble donc bien converger. Nous avons tout de même tenu à comparer nos résultats avec ceux de FreeFM++, dont la solution fournie est celle de la Figure 2.5. Nous observons la même courbe en cloche et les mêmes valeurs, nous pouvons donc être assez satisfaits de ces premiers résultats.

Nous avons aussi voulu tester ces solutions fournies. Pour cela, nous savions que dans le cas d'un second membre nul dans l'équation de Poisson, la fonction solution serait harmonique et aurait donc son minimum et son maximum sur son bord. Or ici, nous avons des conditions de Dirichlet homogènes, ce qui impliquait qu'une telle solution serait la fonction identiquement nulle. Nous avons donc diminué le second membre : $f(x) = 0.1$ puis $f(x) = 0.001$. Et effectivement, la solution possède toujours une allure de surface en cloche, mais les valeurs prises par celle-ci sont alors de l'ordre de 10^{-5} , nous tendons donc bien vers la fonction nulle.

Nous avons ensuite voulu implémenter cette méthode dans le cas d'un second membre polynomial : $f(x) = 17x^3 - 16.2x^2 + 2x + 1$. Nous pouvons voir sur les figures 2.6 et 2.7 que la solution numérique semble une nouvelle fois converger. Nous avons voulu comparer nos résultats à ceux de FreeFem++ que nous retrouvons sur la figure 2.8. Nous retrouvons bien les deux "bosses" que nous avons sur nos résultats, une étant un peu plus haute que l'autre.

Soulignons tout de même que FreeFem++ est beaucoup plus rapide que le programme que nous avons implémenté. C'est sur la méthode d'inversion que nous prenons beaucoup de temps. Peut-être celle-ci n'est pas adaptée au cas des matrices creuses.

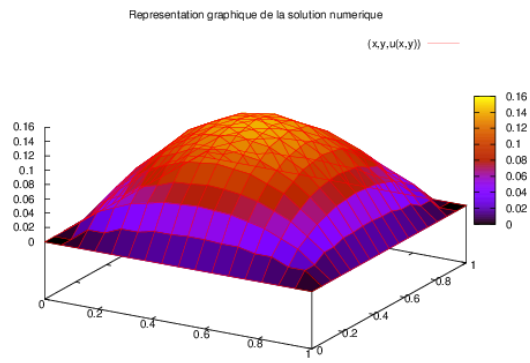


FIGURE 2.3 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 2$ avec un pas de 0.125

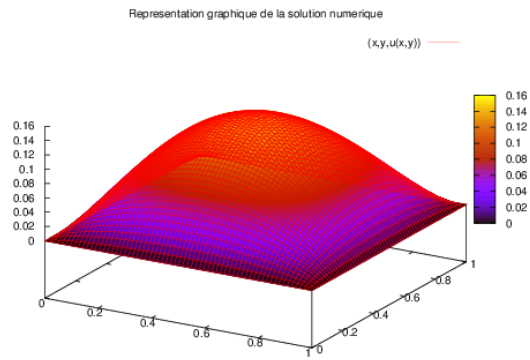


FIGURE 2.4 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 2$ avec un pas de 0.03125

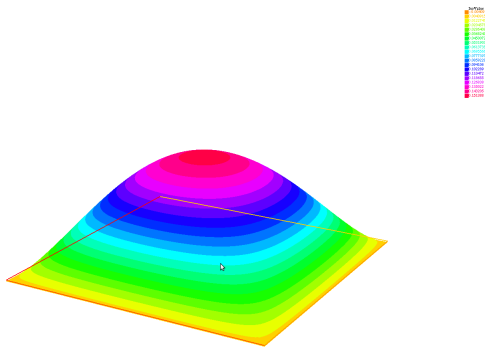


FIGURE 2.5 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 2$ sous FreeFem++

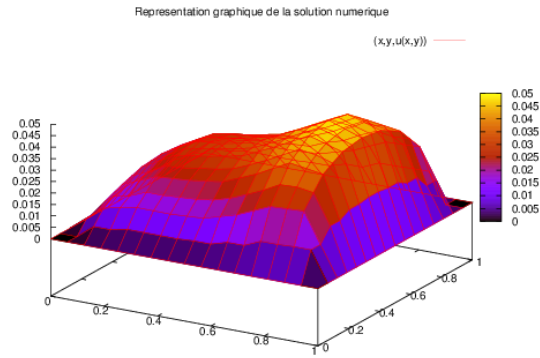


FIGURE 2.6 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 17x^3 - 16.2x^2 + 2x + 1$ avec un pas de 0.125

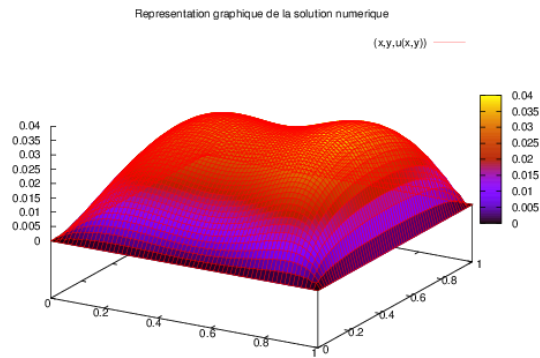


FIGURE 2.7 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 17x^3 - 16.2x^2 + 2x + 1$ avec un pas de 0.03125

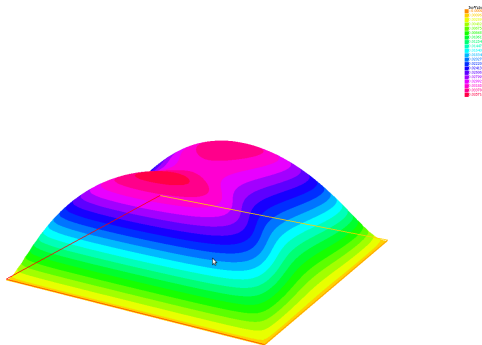


FIGURE 2.8 – Solution numérique obtenue pour $f(x) = 17x^3 - 16.2x^2 + 2x + 1$ sous FreeFem++

Chapitre 3

Saint-Venant sous FreeFem++

3.1 Méthode des volumes finis

3.1.1 Présentation

La méthode des éléments finis ne semble pas appropriée aux équations de Saint-Venant. Obtenir une formulation exploitable par cette méthode nécessite des techniques assez poussées qui n'entrent pas dans le cadre de ce projet.

Une autre méthode d'approximation d'EDP paraît par contre plus appropriée : la méthode des volumes finis. En effet, les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation, ce qui rentre idéalement dans notre problème.

Dans un cadre général, les lois de conservation s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = f \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

où :

- ρ est la densité inconnue
- J est le flux associé (dépendant aussi de ρ)
- f est le terme source

On se donne également un maillage de Ω défini comme pour les éléments finis, mais la notation est ici différente. Prenons un exemple en dimension 1 et notons nos mailles $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$.

- On note $K_i | K_j$ l'interface entre les mailles K_i et K_j , $1 \leq i, j \leq N$:

$$K_i | K_j = \overline{K_i} \cap \overline{K_j}$$

En dimension 1, cette interface est non vide si $j = i \pm 1$ et se résume à un point, qu'on note $x_{i \pm \frac{1}{2}}$. Les mailles se résument donc à des intervalles de la forme

$$K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$$

On appelle ces mailles les volumes de contrôle.

- On prend un point à l'intérieur de chaque volume de contrôle, notés $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ (auxquels on peut ajouter x_0 et x_{n+1} sur les bords du domaine Ω). On les appelle points de contrôle.

Ces notions se généralisent facilement aux dimensions supérieures (les volumes de contrôles passant d'intervalles à des surfaces, des volumes, des hypervolumes... Et de même pour les interfaces).

Afin d'approximer la solution, on va ici supposer que la solution est constante dans chaque maille, et juxtaposer chacune des solutions sur le domaine. En clair, la solution approchée ρ_h de notre problème sera de la forme :

$$\rho_h(x) = \sum_K \rho_K \mathbb{1}_K(x)$$

où K est une maille de notre domaine. Le but sera donc de chercher les inconnues ρ_K .

3.1.2 Exemple : équation de Poisson

Afin de mieux comprendre l'intérêt de cette méthode, on va essayer d'obtenir le schéma Volume Fini obtenu sur l'exemple donné auparavant pour les éléments finis. Pour rappel, nous nous donnions le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{sur } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Comme pour les volumes finis, on intègre de chaque côté de la première équation sur une maille K . On obtient ainsi :

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot n d\sigma = \int_K f d\Omega \quad (3.2)$$

où n est le vecteur normal extérieur à K .

Avec les notations précédentes, on note $\sigma = K|L$ une arête du polyèdre K . Ainsi, l'équation 3.2 devient :

$$-\sum_{\sigma \text{ arête de } K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot n d\sigma = \int_K f d\Omega \quad (3.3)$$

On va commencer par donner une première approximation de la première intégrale. On notant x_K et x_L les points de contrôle choisis dans les volumes K et L , on a l'approximation suivante :

$$\int_{\sigma} -\nabla u \cdot n d\sigma \approx |\sigma| \frac{u(x_K) - u(x_L)}{d(x_K, x_L)}$$

On note $F_{K,\sigma}$ l'approximation discrète suivante :

$$F_{K,\sigma} = |\sigma| \frac{u_K - u_L}{d(x_K, x_L)} \approx \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n d\sigma \quad (3.4)$$

Le problème devient donc le suivant : trouver une famille $(u_K)_K$ telle que :

$$\forall K, \sum_{\sigma \text{ arête de } K} F_{K,\sigma} = \int_K f d\Omega$$

Bien entendu, l'intégrale à droite de l'égalité précédente peut également être approximée.

3.2 Implémentation de cette méthode sous FreeFem++ pour l'équation de Saint-Venant

Nous nous appuyons, pour cette partie, sur le papier de Georges SADAKA nommé *Solving Shallow Water flows in 2D with FreeFem++ on structured mesh*.

Dans cet article, il expose une manière stable de résoudre numériquement les équations de Saint-Venant en utilisant le logiciel FreeFem++, logiciel spécialisé dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Tout d'abord, on commence par exprimer le système d'équation de Saint-Venant sous forme d'une loi de conservation pour pouvoir ensuite trouver une formulation de type Volume Fini. Ainsi, le système devient :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial y} = S(\mathbf{U}) \quad (3.5)$$

Avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix},$$

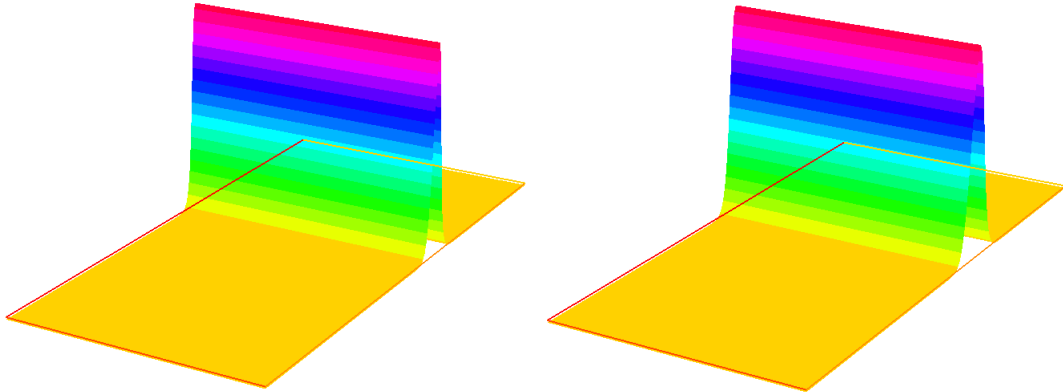
$$G(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Les tests ont été réalisés sur une grille $[-10, 10] \times [-5, 5]$ maillés par des triangles P1. On initialise la solution par une fonction pouvant ressembler à une vague avec des vitesses initiales nulles :

$$h(x, y, 0) = \frac{4}{\cosh^2(3(x+2))}$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$$

Cependant, les différents tests essayés ne donnent pas des résultats convaincants. En effet, si la vague semble satisfaisante au début, on a jamais deux fronts distincts se démarquant. Le code doit encore être passé en revue pour arriver à le faire tourner parfaitement. La figure 3.1 présente les résultats obtenus.



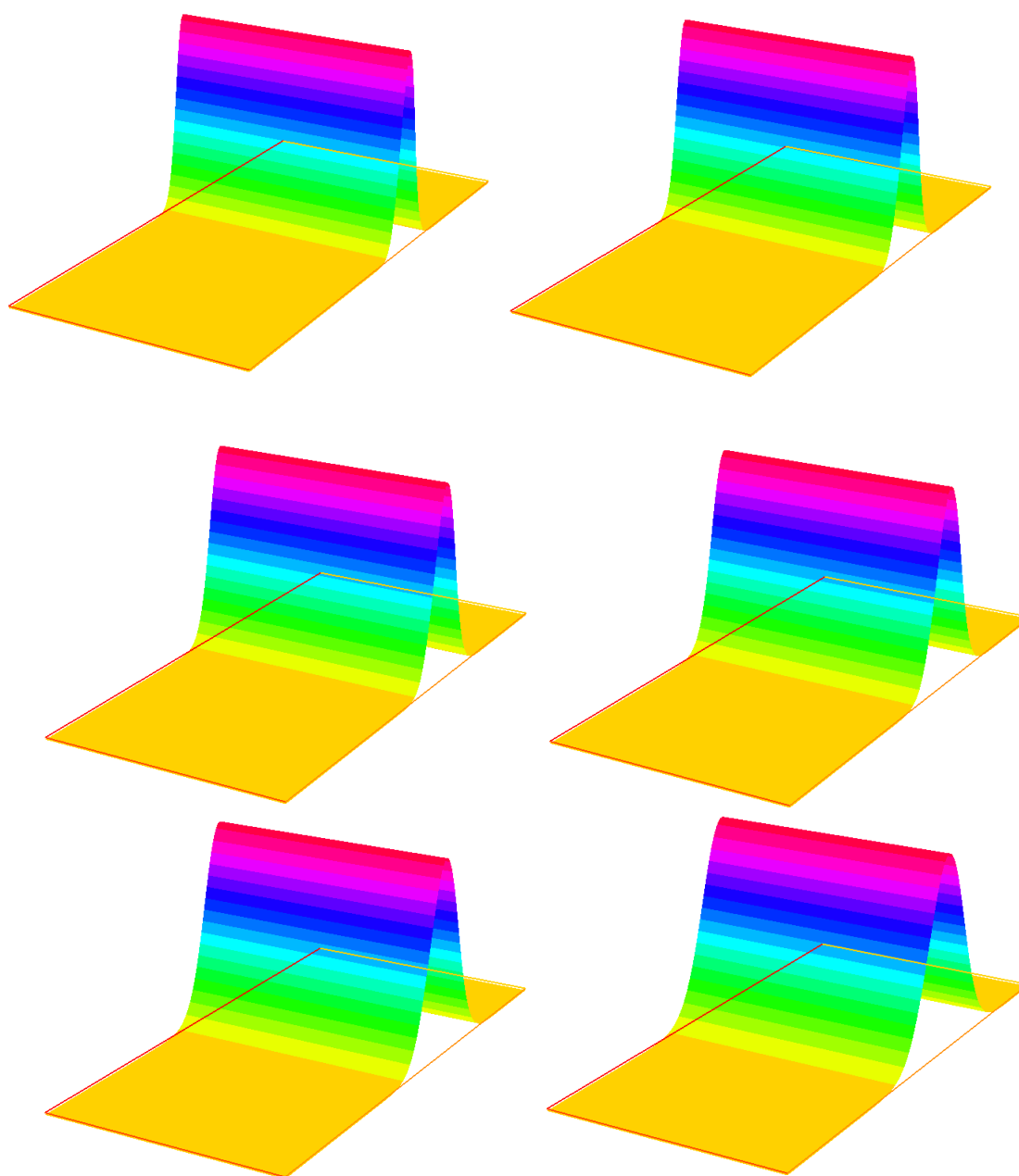


FIGURE 3.1 – Captures d'écran obtenus par le logiciel FreeFem++ à différents moments

Conclusion

Ce projet a été l'occasion pour nous de découvrir les équations de Saint-Venant. Ces équations étant très utilisées, notamment en mécanique des fluides, comprendre comment elles sont obtenues et quand les utiliser était très formateur. Nous avons déjà étudié la méthode des éléments finis au cours de notre formation mais nos recherches nous ont permis de mieux appréhender leur fonctionnement. Nous avons ainsi pu réviser notre théorie et l'implémenter en C++. Enfin nous avons découvert le logiciel FreeFem++ et commencé à le manipuler. Ce projet nous a donc permis d'approfondir nos connaissances dans divers domaines ainsi que de découvrir de nouvelles applications des mathématiques dans le quotidien. En conclusion ce projet a été l'occasion de mettre en application plusieurs matières qu'on nous avait enseignées de manière distincte.

Références

1. Cham, Phoenix Encyclopedia, Disponible sur : http://www.cham.co.uk/phoenics/d_polis/d_lecs/shallwat/shallwat.htm#References (consulté le 21 mai)
2. SHI Yu-e, Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré, Thèse en Mécanique des milieux fluides, Lieu de soutenance : Université de Caen, 2006, 254 p.
3. LAGRÉE P.-Y., Equations de Saint Venant et application aux mouvements de fonds erodables. Ecoulements en milieux naturels, Cours MSF12, M1 UPMC Disponible sur : (consulté le 14 mai)
4. SADAKA Georges, Solving Shallow Water flows in 2D with FreeFem++ on structured mesh, Rapport de recherche n°00715301, Amiens, LAMFA, 16p. Disponible sur : <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/71/53/01/PDF/SW2DFreeFem.pdf> (consulté le 14 mai)
5. CATHALA Mathieu, Méthode de volumes finis pour l'équation de Poisson : construction et analyse fonctionnelle discrète, Université Montpellier 2, Disponible sur : http://mcathala.perso.math.cnrs.fr/recherche/exposes/presentation_semdoc.pdf
6. VOVELLE J., Cours sur les volumes finis, Disponible sur : <http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/coursM2Rennes.html>
7. JEDRZEJEWSKI Franck Introduction aux méthodes numériques, Springer, 2005 , 284p.