

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Présentation projet : les équations de Saint-Venant et la méthode des éléments finis

Gabrielle Collette, Conrad Hillairet & Alexandre Vieira

INSA de Rouen

30 mai 2014

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- 1 Les équations de Saint-Venant
 - Un peu d'hydrodynamique
 - Présentation des équations
- 2 Méthode des éléments finis
 - Présentation rapide de la méthode
 - Simulation sur un exemple
- 3 Saint-Venant avec FreeFem++
 - La méthode des volumes finis
 - Simulations avec FreeFem++

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- 1 Les équations de Saint-Venant
 - Un peu d'hydrodynamique
 - Présentation des équations
- 2 Méthode des éléments finis
- 3 Saint-Venant avec FreeFem++

Cas d'utilisation des équations de Saint-Venant

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Valables lorsque la hauteur du liquide est négligeable par rapport à sa largeur. Exemple : une baignoire
Utilisées en météorologie, modélisation des océans.

Démonstration : grandes idées

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

$$\left. \begin{array}{l} \text{Équation de continuité} \\ \text{Équation de quantité de mouvement} \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Équations de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) + \operatorname{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) & = & \rho f - \nabla p + \operatorname{div}(\tau) \end{array} \right.$$

Équations de Saint-Venant complètes

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- Moyenne des équations sur la hauteur, eau peu profonde.
- Transformation des équations de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} & = & -g\frac{\partial Z_s}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} & = & -g\frac{\partial Z_s}{\partial y} + F_y \end{array} \right.$$

Équations de Saint-Venant linéarisées

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Hypothèses encore plus simplificatrices (variation d'hauteur et de vitesse faibles)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = -h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

1 Les équations de Saint-Venant

2 Méthode des éléments finis

- Présentation rapide de la méthode
- Simulation sur un exemple

3 Saint-Venant avec FreeFem++

Equation de départ

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

On part de l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Théorème de Lax-Milgram

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

On transforme ce problème en : trouver u solution de
$$a(u, v) = L(v)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, si $a(., .)$ est une forme bilinéaire continue et V -elliptique et si $L(v)$ est une forme linéaire continue, alors notre problème admet une solution et elle est unique.

Bouah

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

1 Les équations de Saint-Venant

2 Méthode des éléments finis

- 3 Saint-Venant avec FreeFem++
- La méthode des volumes finis
 - Simulations avec FreeFem++

Présentation de la méthode

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

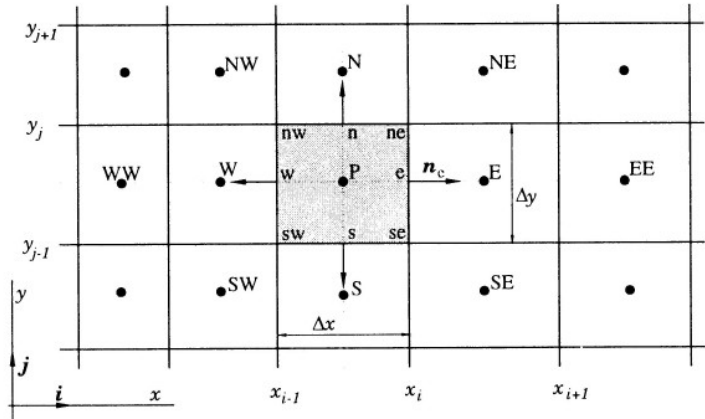
Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion



Source : Cours Introduction à la Mécanique des Fluides Numériques : Méthode "Volumes Finis" -

1A HY - Alexeï Stoukov

Résultats

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

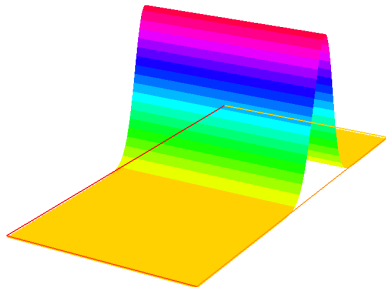
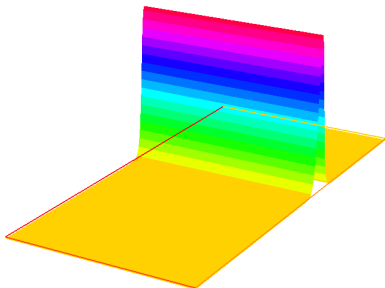
Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion



Conclusion

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion