

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Présentation projet : les équations de Saint-Venant et la méthode des éléments finis

Gabrielle Collette, Conrad Hillairet & Alexandre Vieira

INSA de Rouen

30 mai 2014

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- 1 Les équations de Saint-Venant
 - Un peu d'hydrodynamique
 - Présentation des équations
- 2 Méthode des éléments finis
 - Présentation rapide de la méthode
 - Simulation sur un exemple
 - Implémentation de la méthode
- 3 Saint-Venant avec FreeFem++
 - La méthode des volumes finis
 - Simulations avec FreeFem++

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- 1 Les équations de Saint-Venant
 - Un peu d'hydrodynamique
 - Présentation des équations
- 2 Méthode des éléments finis
- 3 Saint-Venant avec FreeFem++

Cas d'utilisation des équations de Saint-Venant

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Valables lorsque la hauteur du liquide est négligeable par rapport à sa largeur. Exemple : une baignoire
Utilisées en météorologie, modélisation des océans.

Démonstration : grandes idées

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

$$\left. \begin{array}{l} \text{Équation de continuité} \\ \text{Équation de quantité de mouvement} \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Équations de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) & = & 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{U}) + \operatorname{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) & = & \rho f - \nabla p + \operatorname{div}(\tau) \end{array} \right.$$

Équations de Saint-Venant complètes

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- Moyenne des équations sur la hauteur, eau peu profonde.
- Transformation des équations de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial h}{\partial t} & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} & = & -g\frac{\partial Z_s}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} & = & -g\frac{\partial Z_s}{\partial y} + F_y \end{array} \right.$$

Équations de Saint-Venant linéarisées

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Hypothèses encore plus simplificatrices (variation d'hauteur et de vitesse faibles)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & = & -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} & = & -h_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

- 1 Les équations de Saint-Venant
- 2 Méthode des éléments finis
 - Présentation rapide de la méthode
 - Simulation sur un exemple
 - Implémentation de la méthode
- 3 Saint-Venant avec FreeFem++

Equation de départ

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

On part de l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, u \in \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Théorème de Lax-Milgram

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

On transforme ce problème en : trouver u solution de

$$a(u, v) = L(v)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, si $a(., .)$ est une forme bilinéaire continue et V -elliptique et si $L(v)$ est une forme linéaire continue, alors notre problème admet une solution et elle est unique.

Méthode des éléments finis : Définitions

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Maillage : pavage de l'espace en volumes élémentaires. Un maillage est constitué d'une suite de points que l'on appellera noeuds

Pour tout entier $k \geq 1$, on appelle treillis d'ordre k l'ensemble :

$$\Sigma_k =$$

$$\left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}$$

ϕ_j : base de V_h

Méthode des éléments finis

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{d_I}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x)$$

$$\text{Matrice de rigidité : } \mathcal{K}_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{d_I}}$$

$$\text{On obtient le système linéaire : } \mathcal{K}_h U_h = b_h$$

Formulation variationnelle

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f, & u \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On a alors : $\forall v \in V a(u, v) = L(v)$ avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v$$

$$V = H_0^1 = \{v \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Lax-Migram s'applique.

Méthode des éléments finis

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Maillage sur le carré unité avec des triangles \mathbb{P}_1 . Unisolvance vérifiée.

équation sous la forme d'un système linéaire : $\mathcal{K}_h U_h = b_h$. Par exemple, si on prend f égal à 0.001, on obtient :

Méthode des éléments finis

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

$$\mathcal{K}_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b_h = \begin{pmatrix} 6.25 \times 10^{-5} \\ \vdots \\ 6.25 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors résoudre notre système.

Bouah

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

Sommaire

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion

1 Les équations de Saint-Venant

2 Méthode des éléments finis

3 Saint-Venant avec FreeFem++

- La méthode des volumes finis
- Simulations avec FreeFem++

Présentation de la méthode

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

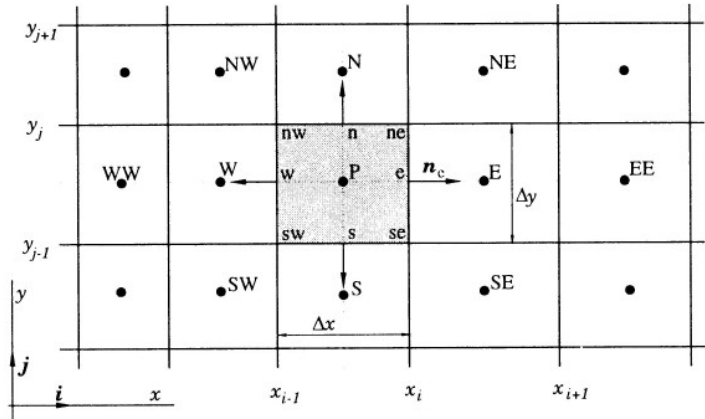
Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion



Source : Cours Introduction à la Mécanique des Fluides Numériques : Méthode "Volumes Finis" -

1A HY - Alexeï Stoukov

Résultats

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

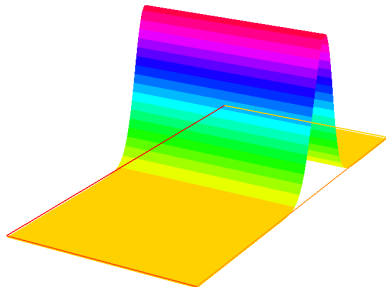
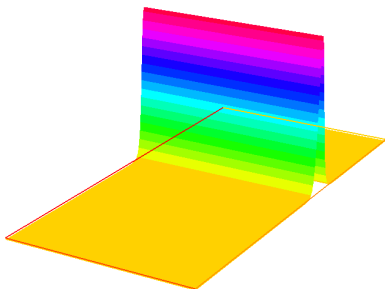
Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion



Conclusion

Saint-Venant

Gabrielle
Collette,
Conrad
Hillairet &
Alexandre
Vieira

Les
équations de
Saint-Venant
Hydrodynam.
Équations

Méthode des
éléments
finis

Présentation
Simulation
Implém.

FreeFem++
Volumes finis
Simulation
FF++

Conclusion