

# Espaces de Sobolev

19 octobre 2014

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Rappels divers</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Les espaces <math>L^p</math></b>	<b>3</b>
1.1	Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	3
1.2	Les espaces $L^p$ . . . . .	4
1.3	2 rappels de mesure . . . . .	6
1.4	Supportabilité . . . . .	7
1.5	Caractérisation du dual . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Densité dans <math>L^p</math></b>	<b>8</b>
2.1	Notion de support . . . . .	8
2.2	Convolution . . . . .	9
2.2.1	Suites régularisantes . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Distributions</b>	<b>10</b>
<b>II</b>	<b>Espaces de Sobolev</b>	<b>13</b>

# Introduction

On s'intéresse aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné ouvert} \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

## ✚ Définition: Hölderienne

$f$  hölderienne d'exposant  $\alpha$  si :

$$\exists c > 0; \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, 0 < \alpha < 1$$

## ∞ Théorème: Unicité et existence

Soit  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $L$  uniformément elliptique :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

On suppose  $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$  (continue et hölderienne),  $\alpha \in ]0, 1[, c \geq 0$ .  
 $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ .

Alors  $\exists ! u$  solution de (P) tel que  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ .

## ∞ Théorème: estimation de Schender

Si de plus,  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ ,  $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , alors  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c (\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)})$$

## Première partie

# Rappels divers

## 1 Les espaces $L^p$

### 1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

#### ✧ Définition: Dual

Soit  $X$  un evn. On appelle dual de  $X$  l'espace

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

Si  $\phi \in X'$  et  $x \in X$ , on note souvent :

$$\phi(x) = \langle \phi, x \rangle_{X'X}$$

appelé crochet de dualité.

#### ✧ Définition: Bidual

Soit  $X$  un evn. On appelle bidual de  $X$  l'espace

$$X'' = (X')'$$

qui est un Banach.

**Remarque :** On peut identifier  $X$  avec un sous-espace de  $X''$  à travers une isométrie, de la manière suivante :  $\forall x \in X$ , on définit :

$$f_x : x' \in X' \mapsto \langle x', x \rangle_{X'X} \in \mathbb{R}$$

$f_x$  est dans  $X''$  car linéaire, et  $|\langle x', x \rangle| \leq \|x\|_X \|x'\|_{X'}$  donc  $f_x$  est borné.

On peut montrer que :

$$\mathcal{F} : x \in X \mapsto f_x \in X''$$

est une isométrie, ie  $\|x\|_X = \|f_x\|_{X''}$ ,  $\forall x \in X$ . Donc on identifie  $x$  avec  $f_x$  et on écrit  $X \subset X''$ .  
Question : a-t-on  $X = X''$ ? autrement dit,  $\mathcal{F}$  est-elle surjective? En général, non.

#### ✧ Définition: Reflexif

Si  $\mathcal{F}$  est surjective, on dit que  $C$  est réflexif.

### ☞ Théorème: représentation de Riesz-Fréchet

Soit  $H$  de Hilbert.

$$\forall F \in H', \exists! \tau(F) \in H; \forall x \in H, \langle F, x \rangle_{H'H} = (\tau(F), x)_H$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : H' &\rightarrow H \\ F &\mapsto \tau(F) \end{aligned}$$

est une isométrie.

## 1.2 Les espaces $L^p$

Dans la suite,  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$   
 $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$   
 $dx$  la mesure de Lebesgue

### ✎ Définition:

Soit  $1 \leq p < +\infty$ .

$$L^p(O) = \{f : O \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int |f|^p dx < \infty\}$$

$$L^p(O) = \{f : O \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } |f| < \infty \text{ p.p. dans } O\}$$

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty, L^p_{loc}(O) = \{f \in L^p(\omega), \forall \omega \text{ ouvert borné, } \bar{\omega} \subset O\}$$

### 📌 Propriété:

$L^p(O)$  est de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(O)} = \begin{cases} (\int_O |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty \\ \inf\{C; |f| \leq C \text{ pp}\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

**Remarque:**

Si  $p = 2$ ,  $L^2(O)$  est un Hilbert par rapport au produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(O)} = \int_O f(x)g(x)dx$$

**Propriété: inégalité de Holder**

Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . On pose

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{si } p = +\infty \\ +\infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

appelé le conjugué.

$$\forall f \in L^p(O), \forall g \in L^{p'}(O), \int_O |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(O)} \|g\|_{L^{p'}(O)}$$

**Corollaire:**

$1 \leq p \leq +\infty$ ,  $p'$  son conjugué.

Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(O)$  et  $g \in L^{p'}(O)$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_O f_n g dx = \int_O f g dx$$

**Corollaire:**

$1 \leq p < q \leq +\infty$ ,  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Alors  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  et  $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^q(\Omega)}$  où  $c = c(|\Omega|, p, q)$ .

⇒ *Lemme: inégalité de Young*

Soient  $a, b \geq 0$  et  $1 < p < +\infty$ . Alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

avec  $p'$  le conjugué de  $p$ .

⇒ *Théorème: inégalité d'interpolation*

Soit  $1 \leq p \leq r < +\infty$ .

Si  $f \in L^p(O) \cap L^r(O)$  alors  $f \in L^q(O)$ ,  $\forall p \leq q \leq r$ .

De plus,

$$\|f\|_{L^q(O)} \leq \|f\|_{L^p(O)}^\alpha \|f\|_{L^r(O)}^{1-\alpha}$$

avec  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $\frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r} = \frac{1}{q}$

## 1.3 2 rappels de mesure

⇒ *Lemme: de Fatou*

Soit  $\{f_n\} \subset L^1(O)$  positives bornées dans  $L^1(O)$ . On pose

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \text{ p.p. dans } O$$

Alors  $f \in L^1(O)$  et

$$\|f\|_{L^1(O)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^1(O)}$$

⇒ *Théorème: convergence dominée de Lebesgue*

$\{f_n\} \subset L^1(O)$  telle que :

1.  $f_n \rightarrow f$  presque partout dans  $O$
2.  $\exists h \in L^1(O)$  telle que  $|f_n(x)| \leq h(x)$  presque partout dans  $O$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

alors  $f_n \xrightarrow{L^1(O)} f$ .

### *Propriété:*

$1 \leq p \leq +\infty$  tel que  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ .  
Alors  $\exists \{f_{n_k}\}$  une sous-suite telle que  $f_{n_k} \rightarrow f$  presque partout dans  $O$ .

## 1.4 Supportabilité

### *Définition: Séparable*

Soit  $B$  un espace de Banach.  
 $B$  est dit séparable s'il existe  $A \subset B$  avec  $A$  au plus dénombrable tel que  $\overline{A} = B$ .

### *Propriété:*

$L^p(O)$  est séparable si  $1 \leq p < +\infty$ .

## 1.5 Caractérisation du dual

### *Théorème: représentation de Green*

$1 \leq p < +\infty$ ,  $p'$  son conjugué.  
Si  $f \in (L^p(O))'$ , alors  $\exists ! g_f \in L^p(O)$  tel que

$$\forall v \in L^{p'}(O), \langle f, v \rangle_{(L^p(O))' L^p(O)} = \int_O g_f(x) v(x) dx$$

De plus,

$$\begin{array}{ccc} \Phi : (L^p(O))' & \rightarrow & L^p(O) \\ f & \mapsto & g_f \end{array}$$

est une isométrie.

**Remarque :** On peut donc identifier  $f$  avec  $g_f$ .

De plus,  $\Phi$  est surjective. On identifie donc  $(L^p)'$  avec  $L^{p'}$  si  $1 \leq p \leq +\infty$ .

- $1 < p < +\infty$ ,  $(L^p)' = L^{p'}$
- $p = 1$ ,  $(L^1)' = L^\infty$
- $p = +\infty$ ,  $L^1 \subset (L^\infty)'$

Ceci implique en particulier que  $L^p(O)$  réflexif si  $1 < p < +\infty$ . Mais  $L^1$  et  $L^\infty$  non réflexifs.

## 2 Densité dans $L^p$

### 2.1 Notion de support

✚ Définition:

$\phi : O \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

$$\text{supp}(\phi) = \{x \in O; \phi(x) \neq 0\}$$

(fermé de  $O$ )

✚ Définition:

$\mathcal{D}(O) = \{v : O \rightarrow \mathbb{R}; v \in \mathcal{C}^\infty(O) \text{ et } \text{supp}(v) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenu dans } O\}$

$\mathcal{C}_c^0(O) = \{v : O \rightarrow \mathbb{R}; v \in \mathcal{C}^0(O) \text{ et } \text{supp}(v) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenu dans } O\}$

📖 Propriété:

$1 \leq p \leq +\infty, f \in L^p(O).$

On pose

$$\mathcal{A} = \{A \text{ ouvert de } O; f = 0 \text{ p.p. dans } A\}$$

Alors si  $w = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ , on a  $f = 0$  p.p. dans  $A$ .

✚ Définition:

On pose alors  $\text{supp}(f) = O \setminus w$ .

✚ Définition:

$$L_c^p(O) = \{f \in L^p(O); \text{supp}(f) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ inclu de } O\}$$



## 2.2 Convolution

### ✚ Définition:

$1 \leq p \leq +\infty$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . On définit le produit de convolution par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \text{ p.p.}$$

### 📖 Propriété:

1.  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .  
 $f * g$  est bien définie et  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , et :

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

2.  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $f * g = g * f$
3. Si  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , alors  $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$  (mais pas nécessairement à support compact).

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$$

Si de plus,  $g \in L_c^p(\mathbb{R}^N)$ , alors  $f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  et  $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ .

### 2.2.1 Suites régularisantes

### ✚ Définition:

$B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ . Soit  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ ,  $\text{supp}(\rho) \subset \overline{B(0,1)}$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ .  $\{\rho_n\}_n$  s'appelle une suite régularisante.

### ⇒ Théorème:

$1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .  $\forall \{\rho\}_n$  suite régularisante :

$$\underbrace{\rho_n * f}_{\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N)$$

⇒ *Théorème:*

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $\forall 1 \leq p < +\infty$ . (Faux pour  $L^\infty$ !)

⇒ *Lemme: de Urysohn*

$O$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $K$  compact de  $\mathbb{R}^N$ ,  $K \subset O$ .  
Alors  $\exists \psi \in \mathcal{D}(O)$  telle que  $\psi \equiv 1$  sur  $K$  et  $0 \leq \psi < 1$ .

⇒ *Corollaire:*

$\forall O \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\exists \{\psi_n\} \subset \mathcal{D}(O)$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \psi_n \leq 1, \psi_n \rightarrow 1 \text{ p.p. dans } O$$

⇒ *Théorème:*

$1 \leq p < \infty$ .  
Soit  $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . On prolonge  $v$  par zéro :

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{dans } O \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc  $\tilde{v} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

⇒ *Théorème:*

$f \in L^1_{loc}(O)$  tel que

$$\int_O f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(O)$$

alors  $f = 0$  presque partout dans  $O$ .

### 3 Distributions

✦ *Définition: Convergence des suites dans  $\mathcal{D}(O)$*

$\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(O)$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(O)$   
 $\phi_n \rightarrow \phi$  dans  $\mathcal{D}(O)$  si :

1.  $\exists K$  compact,  $K \subset O$ ;

$$\forall n, \text{supp}(\phi_n) \subset K$$

$$\text{supp}(\phi) \subset K$$

2.  $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial^\alpha \phi_n \rightarrow \partial^\alpha \phi$  uniformément dans  $K$

**Remarque :**  $\mathcal{D}(O)$  n'est pas métrisable, cela ne définit pas une topologie mais on peut en définir une telle que la convergence des suites dans cette topologie soit celle-ci.

✦ *Définition:*

Une application  $T : \mathcal{D}(O) \rightarrow \mathbb{R}$  est une distribution si :

1.  $T$  linéaire

2. Si  $\phi_n \rightarrow \phi$  dans  $\mathcal{D}(O)$ , alors  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$

L'ensemble des distributions sur  $O$  est noté  $\mathcal{D}'(O)$ . On notera :

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)} = T(\phi)$$

**Remarque :** L'application  $\Phi : f \in L^1_{loc}(O) \rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(O)$  est injective et linéaire car si  $T_f(\phi) = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}(O)$  alors  $f = 0$

Donc on identifie  $f$  et  $T_f$  et on écrit :

$$L^1_{loc}(O) \subset \mathcal{D}'(O)$$

✦ *Définition: Distribution régulière*

$T \in \mathcal{D}'(O)$  est une régulière si :

$$\exists f \in L^1_{loc}(O); T = T_f$$

**Remarque :** On peut montrer qu'il existe des distributions non régulières.

✦ *Définition: Dérivée d'une distribution*

Soit  $T \in \mathcal{D}'(O)$ . On appelle dérivée de  $T$  (au sens des distributions) par rapport à la  $i$ ème variable et on la note  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  la distribution définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(O), \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)} = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)}$$

## Deuxième partie

# Espaces de Sobolev

### ✚ Définition:

$1 \leq p \leq +\infty$ . On définit, pour  $O$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$  :

$$W^{1,p}(O) = \{v \in L^p(O); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(O), \forall i = 1, \dots, N\}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est donnée au sens des distributions.

On munit cet espace de la norme :

$$\|w\|_{W^{1,p}(O)} = \|w\|_{L^p(O)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^p(O)}$$

Pour  $p = 2$ , on note  $W^{1,p}(O) = H^1(O)$ .

### 📖 Propriété:

$1 \leq p < +\infty$ . La norme  $\|\bullet\|_{W^{1,p}(O)}$  est équivalente à la norme :

$$\|u\| = \left( \|u\|_{L^p(O)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(O)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où

$$\|\nabla u\|_{L^p(O)}^p = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(O)}^p$$

**Remarque :** Puisque les constantes de l'inégalité sont indépendantes de l'ouvert et ne dépend que de  $W$  et  $p$ , on utilisera l'une des deux indifféremment.

### 📖 Propriété:

- $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $W^{1,p}(O)$  est un espace de Banach avec la norme associée
- $H^1(O)$  est un Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(O)} = (u, v)_{L^2(O)} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(O)}$$

**Propriété:**

$W^{1,p}(O)$  séparable si  $1 \leq p < +\infty$ , réflexif si  $1 < p < +\infty$

**Propriété:**

- $1 \leq p < +\infty$ ,  $\forall O_1 \subset O$ ,  $u \in W^{1,p}(O) \Rightarrow u \in W^{1,p}(O_1)$
- $\psi \in \mathcal{D}(O)$ ,  $u \in W^{1,p}(O)$ , alors  $\psi u \in W^{1,p}(O)$  et

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_i} = u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

**Lemme:**

$1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ,  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ .

$$\phi * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi * u) = \phi * \frac{\partial u}{\partial x_i}$$