Espaces de Sobolev

6 décembre 2014

Table des matières

Introduction

On s'intéresse aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné ouvert} \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

Définition: Hölderienne

f hölderienne d'exposant α si :

$$\exists c > 0; \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha, 0 < \alpha < 1$$

Théorème: Unicité et existence

Soit $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$, L uniformément elliptique :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$$

On suppose $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ (continue et hölderienne), $\alpha \in]0,1[, c \geq 0$.
$f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$.
Alors $\exists! u$ solution de (P) tel que $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Théorème: estimation de Schender

Si de plus, $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\right)$$

Première partie
Rappels divers

1 Les espaces L^p

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition: Dual

Soit X un evn. On appelle dual de X l'espace

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

Si $\phi \in X'$ et $x \in X$, on note souvent :

$$\phi(x) = \langle \phi, x \rangle_{X'X}$$

appelé crochet de dualité.

Définition: Bidual

Soit X un evn. On appelle bidual de X l'espace

$$X'' = (X')'$$

qui est un Banach.

Remarque : On peut identifier X avec un sous-espace de X'' à travers une isométrie, de la manière suiva,te : $\forall x \in X$, on définit :

$$f_x : x' \in X' \mapsto \langle x', x \rangle_{X'X} \in \mathbb{R}$$

f_x est dans X'' car linéaire, et $|\langle x', x \rangle| \leq \|x\|_X \|x'\|_{X'}$ donc f_x est borné.

On peut montrer que :

$$\mathcal{F} : x \in X \mapsto f_x \in X''$$

est une isométrie, ie $\|x\|_X = \|f_x\|_{X''}$, $\forall x \in X$. Donc on identifie x avec f_x et on écrit $X \subset X''$.
Question : a-t-on $X = X''$? autrement dit, $\mathcal{F}$ est-elle surjective ? En général, non.

Définition: Reflexif

Si $\mathcal{F}$ est surjective, on dit que C est reflexif.

Théorème: représentation de Riesz-Fréchet

Soit H de Hilbert.

$$\forall F \in H', \exists! \tau(F) \in H; \forall x \in H, \langle F, x \rangle_{H'H} = (\tau(F), x)_H$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H' & \rightarrow & H \\ F & \mapsto & \tau(F) \end{array}$$

est une isométrie.

1.2 Les espaces L^p

Dans la suite, O est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$
Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
dx la mesure de Lebesgue

Définition:

Soit $1 \leq p < +\infty$.

$$L^p(O) = \{f : O \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \int |f|^p dx < \infty\}$$

$$L^\infty(O) = \{f : O \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; |f| < \infty \text{ p.p. dans } O\}$$

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty, L^p_{loc}(O) = \{f \in L^p(\omega), \forall \omega \text{ ouvert borné}, \bar{\omega} \subset O\}$$

Propriété:

$L^p(O)$ est de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(O)} = \left| \begin{array}{ccc} \left(\int_O |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} & p < \infty \\ \inf\{C; |f| \leq C \text{ pp}\} & \text{si} & p = \infty \end{array} \right.$$

Remarque:

Si $p = 2$, $L^2(O)$ est un Hilbert par rapport au produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(O)} = \int_O f(x)g(x)dx$$

Propriété: inégalité de Holder

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On pose

$$p' = \left| \begin{array}{ccc} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{si} & p = +\infty \\ +\infty & \text{si} & p = 1 \end{array} \right.$$

appelé le conjugué.

$$\forall f \in L^p(O), \forall g \in L^{p'}(O), \int_O |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(O)} \|g\|_{L^{p'}(O)}$$

Corollaire:

$1 \leq p \leq +\infty$, p' son conjugué.
Si $f_n \to f$ dans $L^p(O)$ et $g \in L^{p'}(O)$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_O f_n g dx = \int_O f g dx$$

Corollaire:

$1 \leq p < q \leq +\infty$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^q(\Omega)}$ où $c = c(|\Omega|, p, q)$.

Lemme: inégalité de Young

Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p < +\infty$. Alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

avec p' le conjugué de p.

Théorème: inégalité d'interpolation

Soit $1 \leq p \leq r < +\infty$.
Si $f \in L^p(O) \cap L^r(O)$ alors $f \in L^q(O)$, $\forall p \leq q \leq r$.
De plus,

$$\|f\|_{L^q(O)} \leq \|f\|_{L^p(O)}^{\alpha} \|f\|_{L^r(O)}^{1-\alpha}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r} = \frac{1}{q}$

1.3 2 rappels de mesure

Lemme: de Fatou

Soit $\{f_n\} \subset L^1(O)$ positives bornées dans $L^1(O)$. On pose

$$f(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ p.p. dans } O$$

Alors $f \in L^1(O)$ et

$$\|f\|_{L^1(O)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_{L^1(O)}$$

Théorème: convergence dominée de Lebesgue

$\{f_n\} \subset L^1(O)$ telle que :

1. $f_n \to f$ presque partout dans O
2. $\exists h \in L^1(O)$ telle que $|f_n(x)| \leq h(x)$ presque partout dans O, $\forall n \in \mathbb{N}$.

alors $f_n \xrightarrow{L^1(O)} f$.

Propriété:

$1 \leq p \leq +\infty$ tel que $f_n \xrightarrow{L^p} f$.
Alors $\exists \{f_{n_k}\}$ une sous-suite telle que $f_{n_k} \to f$ presque partout dans O.

1.4 Supportabilité

Définition: Séparable

Soit B un espace de Banach.
B est dit séparable s'il existse $A \subset B$ avec A au plus dénombrable tel que $\overline{A} = B$.

Propriété:

$L^p(O)$ est séparable si $1 \leq p < +\infty$.

1.5 Caractérisation du dual

Théorème: représentation de Green

$1 \leq p < +\infty$, p' son conjugué.
Si $f \in (L^p(O))'$, alors $\exists! g_f \in L^p(O)$ tel que

$$\forall v \in L^{p'}(O), \langle f, v \rangle_{(L^p(O))' L^p(O)} = \int_O g_f(x) v(x) dx$$

De plus,

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (L^p(O))' & \to & L^p(O) \\ & f & \mapsto & g_f \end{array}$$

est une isométrie.

Remarque : On peut donc identifier f avec g_f.
De plus, Φ est surjective. On identifie donc $(L^p)'$ avec $L^{p'}$ si $1 \leq p \leq +\infty$.

— $1 < p < +\infty$, $(L^p)' = L^{p'}$
— $p = 1$, $(L^1)' = L^\infty$
— $p = +\infty$, $L^1 \subset (L^\infty)'$

Ceci implique en particulier que $L^p(O)$ reflexif si $1 < p < +\infty$. Mais L^1 et L^∞ non reflexifs.

2 Densité dans L^p

2.1 Notion de support

Définition:

$\phi : O \to \mathbb{R}$ continue.

$$supp(\phi) = \{x \in O ; \phi(x) \neq 0\}$$

(fermé de O)

Définition:

$$\mathcal{D}(O) = \{v : O \to \mathbb{R} ; v \in \mathcal{C}^{\infty}(O) \text{ et } supp(v) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenu dans } O\}$$
$$\mathcal{C}_C^0(O) = \{v : O \to \mathbb{R} ; v \in \mathcal{C}^{0}(O) \text{ et } supp(v) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenu dans } O\}$$

Propriété:

$1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^p(O)$.
On pose

$$\mathcal{A} = \{A \text{ ouvert de } O ; f = 0 \text{ p.p. dans } A\}$$

Alors si $w = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, on a $f = 0$ p.p. dans A.

Définition:

On pose alors $supp(f) = O \backslash w$.

Définition:

$$L_c^p(O) = \{f \in L^p(O) ; supp(f) \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n \text{ inclu dans } O\}$$

2.2 Convolution

Définition:

$1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit de convolution par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \text{ p.p.}$$

Propriété:

1. $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
   $f * g$ est bien définie et $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, et :
   $$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
2. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f * g = g * f$
3. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ (mais pas nécessairement à support compact).
   $$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g$$
   Si de plus, $g \in L^p_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g)$.

2.2.1 Suites régularisantes

Définition:

$B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$, $supp(\rho) \subset \overline{B(0,1)}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. $\{\rho_n\}_n$ s'appelle une suite régularisante.

Théorème:

$1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. $\forall \{\rho_n\}_n$ suite régularisante :

$$\underbrace{\rho_n * f}_{\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)} \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N)$$

Théorème:

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall 1 \leq p < +\infty$. (Faux pour L^∞ !)

Lemme: de Urysohn

O ouvert de $\mathbb{R}^N$, K compact de $\mathbb{R}^N$, $K \subset O$.
Alors $\exists \psi \in \mathcal{D}(O)$ telle que $\psi \equiv 1$ sur K et $0 \leq \psi < 1$.

Corollaire:

$\forall O \subset \mathbb{R}^N$, $\exists \{\psi_n\} \subset \mathcal{D}(O)$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \psi_n \leq 1, \psi_n \to 1 \text{ p.p. dans } O$$

Théorème:

$1 \leq p < \infty$.
Soit $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. On prolonge v par zéro :

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{dans} \quad O \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\tilde{v} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

Théorème:

$f \in L^1_{loc}(O)$ tel que

$$\int_O f(x)\phi(x)dx = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(O)$$

alors $f = 0$ presque partout dans O.

3 Distributions

Définition: Convergence des suites dans $\mathcal{D}(O)$

$\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}(O)$, $\phi \in \mathcal{D}(O)$
$\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}(O)$ si :

1. $\exists K$ compact, $K \subset O$;

$$\forall n, supp(\phi_n) \subset K$$

$$supp(\phi) \subset K$$

2. $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \phi_n \to \partial^\alpha \phi$ uniformément dans K

Remarque : $\mathcal{D}(O)$ n'est pas métrisable, cela ne définit pas une topologie mais on peut en définir une telle que la convergence des suites dans cette topologie soit celle-ci.

Définition:

Une application $T : \mathcal{D}(O) \to \mathbb{R}$ est une distribution si :

1. T linéaire
2. Si $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}(O)$, alors $T(\phi_n) \to T(\phi)$

L'ensemble des distributions sur O est noté $\mathcal{D}'(O)$. On notera :

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)} = T(\phi)$$

Remarque : L'application $\Phi : f \in L^1_{loc}(O) \to T_f \in \mathcal{D}'(O)$ est injective et linéaire car si $T_f(\phi) = O \forall \phi \in \mathcal{D}(O)$ alors $f = 0$
Donc on identifie f et T_f et on écrit :

$$L^1_{loc}(O) \subset \mathcal{D}'(O)$$

Définition: Distribution régulière

$T \in \mathcal{D}'(O)$ est une régulière si :

$$\exists f \in L^1_{loc}(O); T = T_f$$

Remarque : On peut montrer qu'il existe des distributions non régulières.

Définition: Dérivée d'une distribution

Soit $T \in \mathcal{D}'(O)$. On appelle dérivée de T (au sens des distributions) par rapport à la ième variable et on la note $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ la distribution définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(O), \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)} = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}'(O)\mathcal{D}(O)}$$

Deuxième partie
Espaces de Sobolev

Définition:

$1 \leq p \leq +\infty$. On définit, pour O ouvert de $\mathbb{R}^N$:

$$W^{1,p}(O) = \{v \in L^p(O); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(O), \forall i = 1, ..., N\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est donnée au sens des distributions.
On munit cet espace de la norme :

$$\|w\|_{W^{1,p}(O)} = \|w\|_{L^p(O)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L^p(O)}$$

Pour $p = 2$, on note $W^{1,p}(O) = H^1(O)$.

Propriété:

$1 \leq p < +\infty$. La norme $\| \bullet \|_{W^{1,p}(O)}$ est équivalente à la norme :

$$\|u\| = \left(\|u\|^p_{L^p(O)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(O)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

où

$$\|\nabla u\|^p_{L^p(O)} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(O)}$$

Remarque : Puisque les constantes de l'inégalité sont indépendantes de l'ouvert et ne dépend que de W et p, on utilisera l'une des deux indifférement.

Propriété:

- $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{1,P}(O)$ est un espace de Banach avec la norme associée
- $H^1(O)$ est un Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(O)} = (u, v)_{L^2(O)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(O)}$$

Propriété:

$W^{1,p}(O)$ séparable si $1 \leq p < +\infty$, réflexif si $1 < p < +\infty$

Propriété:

- $1 \leq p < +\infty$, $\forall O_1 \subset O$, $u \in W^{1,p}(O) \Rightarrow u \in W^{1,p}(O_1)$
- $\psi \in \mathcal{D}(O)$, $u \in W^{1,p}(O)$, alors $\psi u \in W^{1,p}(O)$ et

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_i} = u\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Lemme:

$1 \leq p \leq +\infty$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$$\phi * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi * u) = \phi * \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Théorème:

$1 \leq p < +\infty$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

1 Restriction à un ouvert

Définition: ouvert à frontière lipschitzienne

Soit $N \geq 2$, Ω ouvert borné.
On définit un système de coordonnées locales de la manière suivante :
On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et m fonctions

$$\psi_i : Q =]-1,1[^{N-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

et $\exists r > 0$ tel que :

$$\begin{array}{llcl} \psi_i : & U = Q \times]-r, r[& \to & \psi_i(U) \\ & (y', y_N) & \mapsto & (y', y_N + \psi_i(y')) \end{array}$$

alors ψ_i est un homéomorphisme entre U et $\psi_i(U)$ et $\forall i$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_i & = & \psi_i(Q \times \{0\}) \subset \partial\Omega \\ U_i^+ & = & \psi_i(Q \times]0, r[) \subset \Omega \\ U_i^- & = & \psi_i(Q \times]-r, 0[) \subset \Omega \end{array}$$

et

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i$$

On dit que $\partial\Omega$ est lipschitienne (resp. $\mathcal{C}^k$) s'il existe un système de coordonnées locales tel que $\forall i$, ψ_i est lipschitzienne (resp. $\mathcal{C}^k$)

✑ *Théorème: de prolongement*

$1 \leq p \leq +\infty$
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et on suppose 3 cas :

- $N = 1$: Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (borné ou non)
- $N \geq 2$:
  - Ω est le demi-espace $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$
  - Ω ouvert borné avec $\partial\Omega$ lipschitzienne

Alors il existe un opérateur de prolongement p linéaire et continu

$$p : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tel que :

1. $Pu = u$ sur Ω
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{L^p(\Omega)}$
   $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$
   où $c = c(\Omega, p)$.

✎ *Définition:*

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement.
On note $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (resp. $\mathcal{C}_c^1(\overline{\Omega})$) l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (resp. $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$).
Si $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_*^+$, on note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^+)$

Remarque : $\mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ car les fonctions de $\mathcal{D}'\overline{\Omega})$ ne s'annulent pas forcément sur $\partial\Omega$.

✑ *Théorème:*

Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement, $1 \leq p < +\infty$.
Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

✑ *Théorème: chain rule*

$1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement.
Soit $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $G(0) = 0$ et $\forall s$, $|G'(s)| \leq M$
Alors $\forall u \in W^{A,p}(\Omega)$, $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et on a (au sens des distributions) :

$$\nabla G(u) = G'(u)\nabla u$$

✑ *Théorème: Stampacchia*

$1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement.
$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, on pose

$$u_+ = \max\{u, 0\},\ u_- = \min\{u, 0\},\ {}_= u_- + u_+$$

Alors u_+, u_- et $|u|$ appartiennent) $W^{1,p}(\Omega)$ et on a presque partout :

$$\nabla u_+ = \left| \begin{array}{ccc} \nabla u & \text{où} & u > 0 \\ 0 & \text{où} & u \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla u_- = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{où} & u \geq 0 \\ \nabla u & \text{où} & u < 0 \end{array} \right.$$

$$\nabla |u| = \left| \begin{array}{ccc} \nabla u & \text{où} & u > 0 \\ 0 & \text{où} & u = 0 \\ -\nabla u & \text{où} & u < 0 \end{array} \right.$$

Corollaire:

$1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement.
$w \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \nabla u = 0$ p.p. sur les lignes de niveau, ie $\forall \alpha$, $\nabla u = 0$ p.p. sur $\{u = \alpha\}$

Théorème:

$1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ comme dans le théorème de prolongement, connexe.
Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$; $\nabla u = 0$ dans Ω, alors u est constante.

2 Amélioration de la régularité

Est-ce que la condition $\nabla u \in (L^p(\Omega))^n$ "améliore" vraiment la régularité ou juste la sommabilité de u ?
Le théorème suivant repond pour $N = 1$ où on gagne beaucoup. Pour $N \geq 2$, la réponse est donnée par les théorèmes d'inclusion de Sobolec où on "gagne moins".

Théorème:

$1 \leq p < +\infty$. On a :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \left(= \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})\right)$$

et

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}),\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c(p) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$$

De plus, si $p > 1$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

ie u est hölderienne d'exposant $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{p'}$

Remarques :

1. $\forall I \in \mathbb{R}$, $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I}) \cap L^\infty(I)$. En particulier, si $u \in W^{1,p}(]a,b[)$, on a $u(a)$ et $u(b)$ bien définis. Cela donne un sens aux conditions de Dirichlet.
2. $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$ même pour $p = +\infty$
3. Pour $N \geq 2$, l'inclusion montrée n'est pas vraie en général $\forall p$

2.1 Notion de trace

Théorème: de Rademacher

$f : a \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, A ouvert, f lipschitzienne sur A.
f est alors différentiable presque partout et ∇f est égal à son gradient au sens des distributions presque partout. De plus, $\nabla f \in (L^\infty(A))^N$.

Théorème: partition de l'unité

$F \subset \mathbb{R}^N$, ≥ 2, F compact.
A_1, ..., A_m m ouverts de $\mathbb{R}^N$ tel que $F \subset \cup_{i=1}^m A_i$
Donc $\forall i = 1, ..., m$, $\exists \gamma_i \in \mathcal{D}(A_i)$ avec $0 \leq \gamma_i \leq 1$ et

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i(x) = 1 \ \forall x \in F$$

Définition:

$N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné, $\partial\Omega$ lipschitzienne.
Soit $\gamma_1, ..., \gamma_n$ donnés par le théorème précédent correspondant à $F = \partial\Omega$ et $A_i = V_i$ dans la définition de Nečas.
Soit u mesurable sur $\partial\Omega$. On dit que u est intégrable sur $\partial\Omega$ si $\forall i = 1...m$, les fonctions

$$u(y', \psi_i(y'))\gamma_i(y', \psi_i(y'))\sqrt{1 + |\nabla\psi_i(y')|^2}$$

est intégrable sur Q.
On pose ensuite

$$\int_{\partial\Omega} u(x)ds = \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} u(x)\gamma_i(x)ds$$

où

$$\int_{\Gamma_i} u(x)\gamma_i(x)ds = \int_Q u(y', \psi_i(y'))\gamma_i(y', \psi_i(y'))\sqrt{1 + |\nabla\psi_i(y')|^2}dy'$$

Remarque : On peut montrer que la définition est indépendant des coordonnées locales et des γ_i

Définition:

Ω borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ lipschitzienne, $N \geq 2$.
On définit $L^p(\partial\Omega, 1 \leq < +\infty$ par :

$$L^p(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurables égales p.p tel que } \int_{\partial\Omega} |u|^p ds < +\infty\}$$

et

$$L^\infty(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \to \mathbb{R}; \exists c > 0; |f| \leq c \text{ p.p sur } \partial\Omega\}$$

On munit ces espaces des normes :

$$p < +\infty \ : \ \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p = +\infty \ : \ \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \inf\{c; |f| < c \text{ p.p. sur } \partial\Omega\}$$

Propriété:

$L^p(\partial\Omega)$ est de Banach $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, Hilbert pour $p = 2$.

Pour la suite, on prend $p = 2$.

Théorème: de trace

$N \geq 2$.

1. $\exists! \gamma : H^1(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*) \to L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ linéaire continue appelée trace, tel que

$$\gamma(u) = u_{|\mathbb{R}^{N-1}} \ \forall u \in H^1\left(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_*^+\right) \cap \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+\right)$$

2. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ lipschitzienne, alors $\exists! \gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ linéaire continue, tel que

$$\gamma(u) = u_{|\partial\Omega} \ \forall u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$$

Problème : On peut montrer que γ n'est pas surjective sur $L^2(\partial\Omega)$.

Définition:

On pose

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma\left(H^1(\Omega)\right) \subset L^2(\partial\Omega)$$

Théorème:

Ω borné, $\partial\Omega$ lipschitzienne (ou $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$). Alors :

1. $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est un Banach par rapport à :

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |u|^2 ds + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N-1}} ds_x ds_y$$

2. $\{u_{|\partial\Omega}, u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$
3. $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est linéaire continue, ie

$$\|\gamma(u)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

4. Il existe un relevement continue de la trace, ie $\exists g$ linéaire continue tel que

$$g : \begin{array}{ccc} H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) & \to & H^1(\Omega) \\ u & \mapsto & U \end{array}$$

avec $\gamma(U) = u$.

Théorème:

Ω borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\partial\Omega$ lipschitzienne. On note $n(x)$ le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$.
Alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v)n_i ds - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i} dx,\ \ i = 1..n$$

Dans la suite, on noter $\gamma(u)$ simplement u, en retenant que c'est la trace.

Définition:

$1 \leq p \leq +\infty$.
$W_0^{1,p}(O)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(O)$ dans la norme $W^{1,p}(O)$.

Remarque:

— $W_0^{1,p}(O)$ est un espace fermé de $W^{1,p}(O)$
— $H_0^1(O)$ de Hilbert
— D'après le théorème de densité dans $\mathbb{R}^N$, on a

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Propriété:

$1 \leq p \leq +\infty$. Si $u \in W_0^{1,p}(O)$, alors son prolongement par 0 :

$$\tilde{u} = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } O \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

vérifie $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(O_1)$, $\forall O \subset O_1$.
De plus,

$$\|u\|_{W^{1,p}(O)} = \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(O_1)} = \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Propriété:

$1 \leq p \leq +\infty$, Ω intervalle de $\mathbb{R}$ si $N = 1$ ou Ω borné, $\partial\Omega$ lipschitzienne si $N \geq 2$.
Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, u à support compact inclu dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque : On peut remarquer que l'hypothèse $\partial\Omega$ lipschitzienne n'est pas nécessaire.

Théorème:

1. $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$
$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u(a) = u(b) = 0\}$$
2. $N \geq 2$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné, $\partial\Omega$ lipschitzienne
$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \gamma(u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Remarque : Si $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \Rightarrow u_{|\partial\Omega} = 0$
Si $u \in H^1(\Omega)$, $\partial\Omega$ lipschitzienne $\Rightarrow \gamma(u) = 0$
Si $\partial\Omega$ non lipschitzienne, on ne peut rien dire de spécial.

Propriété: Inégalité de Poincaré

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné.
$\exists c_\Omega$ de l'ordre du diamètre de Ω tel que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Corollaire:

Sous les hypothèses précédentes, si on pose

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

on définit une norme équivalente (pour Ω fixé) à la norme sur H^1 :

$$\| \bullet \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \| \bullet \|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + c_\Omega) \| \bullet \|_{H_0^1(\Omega)}$$

2.1.1 Dual

On pose $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ muni de la norme :

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\langle F, u\rangle|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

Théorème:

Soit $F \in H^{-1}(\Omega)$.
Alors

$$\exists (f_n)_{n=0}^N \subset L^2(\Omega); F = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \ (*)$$

De plus :

$$\|F\|_{H^1(\Omega)} = \inf \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

où l'inf est pris sur toutes les fonctions $(f_n)_n$ vérifiant $(*)$.
Réciproquement si $f_0, ..., f_N$ sont dans $L^2(\Omega)$, alors

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

définit un élément F dans $H^{-1}(\Omega)$, et

$$\|F\|_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

En particulier, pour $f_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq N$, on en déduit que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ et

$$\|f_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f_0\|_{L^2(\Omega)}$$

2.1.2 Caractérisation de $H^1(\Omega)$ par Fourier (dans $\mathbb{R}$)

Définition:

$u \in L^1(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier $\hat{u}$ de u et l'antitransformée $\check{u}$ sont définies par :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \xi, x\rangle} u(x) dx \text{ définie p.p. dans } \mathbb{R}^N$$

$$\check{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x\rangle} u(x) dx \text{ définie p.p. dans } \mathbb{R}^N$$

Théorème: de Plancherel

$u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.
Alors $\hat{u}$ et $\check{u}$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Propriété:

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
Si $\{u_n\} \subset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ est telle que $u_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^N)} u$, alors $\{\hat{u}_n\}$ et $\{\check{u}_n\}$ convergent dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers $\hat{u}$ et $\check{u}$.
De plus, $\hat{u}$ et $\check{u}$ sont indépendants de la suite choisie.
On définit ainsi la transformée de Fourier pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N$.

Propriété: dans L^2

1. Plancherel reste vrai dans $L^2(\mathbb{R}^N)$
2. $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
$$\int_{\mathbb{R}^N} uv dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\bar{\hat{v}} d\xi$$
3. $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $u = \check{\hat{u}} = \hat{\check{u}}$
4. Si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\widehat{\nabla u}(\xi) = \xi \hat{u}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

Théorème:

$u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$$u \in H^1(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow (1 + |\xi|)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$$
De plus :
$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|(1 + |\xi|)\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

2.2 Inclusions continues de Sobolev

Définition: Inclusion continue

X, Y de Banach
On dit que l'inclusion $X \subset_c Y$ est continue si $X \subset Y$ et $i_X : x \in X \mapsto x \in Y$ est continue (ie $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y$)

Remarque : On a vu que $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ est continue.

Lemme:

$N \geq 2$, $f_i \geq 0$, $f_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$, $i = 1, ..., N$
$\forall x = (x_1, ..., x_n)$, on pose $\hat{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Alors :
$$\int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N} f_i(\hat{x}_i) dx \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}$$

Théorème: Inclusions de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$

$N \geq 2$

1. $1 \leq p < N$: On pose $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Alors :
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$
et $\exists c = c(p, N)$ tel que
$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
Corollaire :
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset_c L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [p, p^*]$$
2. $p = N$:
$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset_c L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [N, +\infty[$$
3. $p > N$:
   — Si $1 < N < p < +\infty$, alors $\exists c = c(p, N)$ tel que
$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \text{ p.p}$$
   — Si $1 < N < p \leq +\infty$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset_c L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Remarques :

1. On voit que u est continue presque partout. Il existe donc un représentant de u continue.
2. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^N)$ dans le sens que tout élément de $W^{1,p}$ admet un représentant dans $\mathcal{C}_b^0$.
3. L'inclusion dans $\mathcal{C}^0$ (montré pour $p < +\infty$) est aussi vraie pour $p = +\infty$ en raisonnant par troncature.

Théorème: Inclusions de Sobolev dans Ω

$N \geq 2$, Ω ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ lipschitzienne, ou $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_*^+$.

1. $1 \leq p < N$: On pose $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
$$W^{1,p}(\Omega) \subset_c L^q(\Omega) \ \forall q \in [p, p^*]$$
2. $p = N$:
$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset_c L^q(\Omega) \ \forall q \in [N, +\infty[$$
3. $p > N$:
$$W^{1,p}(\Omega) \subset_c L^\infty(\Omega) \text{ et } W^{1,p}(\Omega) \subset_c \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

Théorème:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, intervalle si $N = 1$, ouvert borné à frontière lipschitzienne sinon.
Alors $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u$ lipschitizienne.

Théorème: Inclusions de Sobolev dans O

$N \geq 2$, $O \subset \mathbb{R}^N$ quelconque.

1. $1 \leq p < N$: On pose $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
$$W^{1,p}(O) \subset_c L^q(O) \; \forall q \in [p, p^*]$$
2. $p = N$:
$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset_c L^q(O) \; \forall q \in [N, +\infty[$$
3. $p > N$:
$$W^{1,p}(O) \subset_c L^\infty(O) \text{ et } W^{1,p}(O) \subset_c \mathcal{C}^0(\overline{O})$$

2.2.1 Inclusions compactes de Sobolev

Définition: Application compacte

X, Y de Banach, $h : X \to Y$ est compact si l'image d'un borné est relativement compacte.

Définition: Inclusion compacte

X, Y de Banach. On dit que l'inclusion $X \overline{\subset} Y$ est compacte si $X \subset Y$ et $i_x : x \in X \mapsto x \in Y$ compacte.

Remarque : Si h linéaire, h compact $\Rightarrow$ h continue.

Théorème: Ascoli-Arzela

Soit $\{f_n\}$ bornée dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^N)$ équicontinue, ie
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ (indépendant de n)}; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$
Alors $\{f_n\}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact $K \subset \mathbb{R}^N$

Remarque : Si $\{f_n\} \subset \mathcal{C}_b^1$, alors d'après le théorème des accroissements finis, $\{f_n\}$ est équicontinue. En particulier, l'inclusion
$$\forall K, \; \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^N) \overline{\subset} \mathcal{C}^0(K)$$

Théorème:

Si $N = 1$, $1 < p < +\infty$, I intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors $W^{1,p}(I) \overline{\subset} \mathcal{C}^0(I)$

Théorème:

Si $N \geq 2$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ lipschitzienne. Si $N < p \leq +\infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) \overline{\subset} \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

Théorème: de Rellich-Komdrochov

$N \geq 2$, Ω borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ lipschitzienne. Si $1 \leq p < N$, en posant $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

$$\forall q \in [1, p^*[,\ W^p(\Omega) \overline{\subset} L^q(\Omega)$$

Remarque : Pour $p = p^*$, on avait l'inclusion, mais elle n'est pas compacte. p^* s'appelle l'exposant critique des inclusions de Sobolev.

Théorème:

Si $N \geq 2$, $p = N$, Ω borné, $\partial\Omega$ lipschitzienne.

$$\forall q \in [1, +\infty[,\ W^{1,N}(\Omega) \overline{\subset} L^q(\Omega)$$

Remarque :

1. En général, faux si Ω non borné
2. De même si $\partial\Omega$ non lipschitzienne
3. Pour H_0^1, Ω borné sans frontière lipschitzienne suffit.
   On peut trouver $\Omega_1 \supset \Omega$, $\partial\Omega_1$ lipschitzienne et on regarde $\{Pu_n\}$ sur Ω_1
4. On a aussi

$$L^2(\Omega) \overline{\subset} H^{-1}(\Omega)$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \overline{\subset} L^2(\partial\Omega)$$

$$L^2(\partial\Omega) \overline{\subset} H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$