Présentation d'un article : Classification of existence and non-existence of running fronts in case of fast diffusion

Messoud Efendiev & Johannes Müller

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

4 novembre 2014

Sommaire

Sommaire

Équation étudiée

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u) \tag{1}$$

$$D(u) = \frac{u^a}{(1-u)^b}\bar{D}(u) \in \mathcal{C}^2[0,1[$$

$$f(u) = u(1-u)^\alpha \bar{f}(u) \in \mathcal{C}^2[0,1[$$

$$a > 1, \quad b > 0 \quad \alpha \geq 0$$

On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = w(ct - x)$$

Théorème

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u)$$

Théorème :

Si $\alpha - b \leq -1$, il n'y a aucun front.
Si $\alpha - b > -1$, il existe une vitesse minimale c^* telle que :

- Pour $c < c^*$, il n'y a pas de solution de la forme $u(x,t) = w(ct - x)$ non négative
- Pour $c = c^*$, un unique front d'onde solution existe, qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$
- Pour $c > c^*$, il y a une infinité de fronts d'ondes solutions, ordonnés. La solution minimal tend elle aussi vers 0 quand $x \to -\infty$, les autres sont strictement positives.

Sommaire

Transformation du système

Soit $u(x,t) = w(ct - x)$. En reprenant l'équation (1) et en y introduisant w, on obtient :

$$cw' = (D(w)w')' + f(w) \tag{2}$$

On définit à présent v tel que :

$$v = \frac{D(w)w'}{w}$$

En multipliant (2) par $\frac{D(w)}{w}$, on obtient :

$$cv = v'D(w) + v\frac{w'D(w)}{w} + \frac{D(w)f(w)}{w}$$

Transformation du système

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} D(w)w' &= vw \\ D(w)v' &= v(c-v) - \frac{D(w)f(w)}{w} \end{cases} \tag{3}$$

En faisant le changement de variable suivant (rescaling time) :

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w(t(\tau)))$$

$$\tilde{w}(\tau) = w(t(\tau))$$

$$\tilde{v}(\tau) = v(t(\tau))$$

Transformation du système

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{w}' & = & \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' & = & \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{array} \right. \tag{4}$$

où

$$g(\tilde{w}) = \frac{D(\tilde{w})f(\tilde{w})}{\tilde{w}}$$

Problème dans la transformation

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w) = \frac{w^a}{(1-w)^b}\bar{D}(w)$$

La transformation devient singulière pour $w \to 0$ et $w \to 1$

Pour $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on doit avoir :

$$0 \leq w(t) \leq 1$$

et

$$\lim_{t \to t_0^+} w(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} w(t) = 1$$

$\Rightarrow$ Problème !

Analyse du linéarisé

On prend $w = 0 \Rightarrow$ Analyse peut être faite avec le temps rééchelonné, on utilise donc le système (3) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{w}' & = & \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' & = & \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{array} \right.$$

On a deux points d'équilibre :

$$(0, 0) \text{ et } (0, c)$$

Analyse de (0,c)

Jacobien du système en $(0, c)$:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ -g'(0) & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $g'(0) = 0$.

$$\lambda_1 = c \text{ et } \lambda_2 = -c$$

Dans l'espace des phases : point selle. Axe v invariant, stable.
On a approximativement : $\tilde{w}' \approx \lambda_1 \tilde{w} = c\tilde{w}$, d'où :

$$w' \approx \frac{cw}{D(w)} \approx cw^{-(a-1)} \text{ pour } w \text{ petit}$$

Comme $a - 1 > 0$, la trajectoire atteint le point stationnaire en un temps négatif fini.

Analyse de (0,0)

Jacobien du système en $(0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g'(0) & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = c$$

On a directement que l'axe v sera instable.
Deuxième direction : nécessite plus de discussion.

Variété centrale pour (0,0)

Propriété

Le champ de vecteur étant $\mathcal{C}^2$ près de $(0,0)$, il existe une variété centrale tangente au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $\{v = h(w)\}$ une paramétrisation locale de cette variété. On a $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ et $v' = h'(w)w'$. En multipliant cette dernière égalité par $D(w)$:

$$v(c - v) - g(w) = h'(w)vw$$

$$h'(w) = \frac{c - h(w)}{w} - \frac{g(w)}{wh(w)}$$

Variété centrale pour (0,0)

En écrivant $h(w) = c_1 w^\beta + o(w^{\beta+1})$, on obtient :

$$c_1 \beta w^{\beta-1} = \frac{c}{w} - c_1 w^{\beta-1} - \frac{\bar{g}(0)}{c_1} w^{a-\beta-1} + o(w^{\beta+1})$$

où $\bar{g}(0) = \bar{D}(0)\bar{f}(0) > 0$.