

Première partie

Automatique non linéaire

1 Outils mathématiques

1. Définition \mathcal{C}^∞ , difféomorphisme, difféomorphisme local.
2. Théorème sur difféomorphisme local
3. Définition vecteur tangent, espace tangent, champ de vecteurs
4. Lemme : $(\phi_* f)(p) = ?$
5. Proposition : diagramme qui commute
6. Proposition : Lien entre flot original et flot transformé ?
7. Définition de $V^\infty(X)$
8. Définition du crochet de Lie, autre formulation

2 Controlabilité

9. Proposition : à quelle condition revient-on au point de départ ?
10. 7 points équivalents sur la controlabilité (critère de Kalman)
11. Définition d'accessible, fortement accessible.
12. Proposition sur le linéarisé et l'accessibilité locale
13. Définition d'une l'algèbre de Lie de Π
14. Expression de \mathcal{L} avec les contrôles
15. Propriété des crochets
16. Définition de sous-variété plongée de dimension n
17. Lemme sur vecteurs tangents et leur crochets
18. Théorème de Sussman-Jevdjovic (Dim de $\mathcal{L}(x_0)$)
19. Définition d'une distribution, de rang constant, \mathcal{C}^∞ , intégrale, involutive
20. Définition : Opérateur associé à un champ de vecteur
21. Théorème de Frobenius
22. Définition d'Orbite
23. Lemme : relation d'équivalence pour l'orbite, propriété en résultant
24. Définition de sous-variété immergée
25. Théorème sur orbite, sous-variété immergée, distribution, algèbre de Lie de Π
26. Définition : Idéal de Lie
27. Théorème sur l'accessibilité forte et l'idéal de Lie
28. Propriété : rapport entre \mathcal{L} et \mathcal{L}_0
29. 3 formes normale d'accessibilité

3 Controlabilité complète

30. Définition : Complètement controlable, réversible
31. Propriété si réversible entre orbite et R
32. Définition : Connexe
33. Théorème si réversible et connexe avec controlabilité complète
34. Définition : Stable à la Poisson
35. Théorème : Bonnard-Crouch sur systèmes affines

4 Linéarisation

- 36. Définition de S-équivalent, localement S-équivalent, S-linéarisable
- 37. Définition de $ad_j^j g$
- 38. Théorème : linéarisable autour d'un point d'équilibre
- 39. Théorème S-linéarisable
- 40. Définition de F-équivalence
- 41. Théorème de Jakuleczyk-Respondek sur la F-linéarisation
- 42. Définition : Forme de Brunovsky

5 Observabilité

- 43. Définition indistinguable, observable, localement observable, espace d'observation
- 44. Définition Codistribution
- 45. Théorème de Hermann-Kremer : implication pour localement observable
- 46. Théorème : 4 points avec dimension de la codistribution constante
- 47. Définition découplable, matrice de découplage
- 48. Théorème sur découplage avec matrice de découplage

Deuxième partie

Calcul différentiel

1 Calcul variationnel

1.1 Euler-Lagrange

- 1. Théorème d'Euler-Lagrange
- 2. Définition d'une intégrale première
- 3. Propriété si $L(x, y')$ et si $L(y, y')$.
- 4. Définition : Topologie dans $\mathcal{C}([x_1, x_2])$
- 5. Définition de minimum faible/fort
- 6. Définition de champ d'extremales
- 7. Théorème : Jacobi-Weierstrass

1.2 Hamiltonien

- 8. Définition de l'Hamiltonien, système hamiltonien (SH)
- 9. Proposition : équivalence à I intégrale première
- 10. H intégrale première ?
- 11. Définition du crochet de Poisson
- 12. Dans 2 cas : I intégrale première de (SH)
- 13. Si L invariant par rapport aux translations spatiales ? (avec L puis I)
- 14. I invariant par rapport à une transformation
- 15. Théorème d'Emmy Noether

2 EDP d'ordre 1

16. Définition : problème de Cauchy
17. Condition pour que le système (EH) admette des solutions / une solution unique
18. De même pour (ENH)
19. Théorème des fonctions implicites
20. Si EQL, que faire ?
21. Système d'EDP : définition de \mathcal{D} , involutive ? Si oui, comment exprimer tous les crochets ?
22. Équivalence à (S) possède des solutions, une solution unique pour le problème de Cauchy.

Troisième partie

Sobolev

1 Rappels

1. Définition : Hölderienne
2. Théorème : Unicité et existence
3. Théorème : estimation de Schender

1.1 L^p

4. Définition Dual, Bidual, reflexif
5. Théorème : représentation de Riesz-Fréchet
6. Inégalité de Holder
7. Corollaire : convergence entre L^p et $L^{p'}$
8. $1 \leq p < q \leq +\infty$, inclusion, inégalité des normes
9. Théorème : inégalité d'interpolation
10. Lemme de Fatou, convergence dominée de Lebesgue
11. Convergence dans L^p et dans O
12. Définition : Séparable, L^p ?
13. Théorème : représentation de Green (un p à remplacer par p')
14. 3 propriétés de la convolution
15. Définition : suite régularisante, convergence avec convolution
16. Densité de L^p
17. Lemme : de Urysohn, corollaire
18. Théorème : prolongement d'une fonction L^p en dehors de O

1.2 Distributions

19. Convergence dans les fonctions tests, définition distribution
20. Distribution régulière, dérivée d'une distribution

2 Espaces de Sobolev

21. Définition d'un espace de Sobolev, notation pour $p = 2$
22. Équivalence à la norme dans un espace de Sobolev
23. Banach, Hilbert ?
24. Séparable, réflexif ?
25. Restriction à un sous-ouvert, dérivé d'un produit
26. Lemme : dérivé d'un produit de convolution avec $W^{1,p}$
27. Densité de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
28. Définition : ouvert à frontière lipschitzienne
29. Théorème : de prolongement
30. Définition : $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$
31. Densité de $W^{1,p}(\Omega)$
32. Théorème : chain rule, Stampacchia
33. Corollaire sur valeur du gradient sur les lignes de niveau
34. Theo : si gradient nul sur tout un domaine ?
35. Théorème : inclusion de $W^{1,p}(\mathbb{R})$, continue ? Hölderienne ?
36. Théorème : de Rademacher
37. Théorème : de trace
38. Définition de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.
39. Banach ? Densité ? Linéaire continue ?
40. Théorème : intégration par partie
41. Définition : $W_0^{1,p}(O)$
42. Propriété avec le prolongement par 0
43. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ à support compact inclu dans Ω ?
44. Inégalité de Poincaré, corollaire avec norme équivalente sur H_0^1
45. Définition de H^{-1} . Décomposition dans L^2 , décomposition de la norme. Conséquence : inclusion de L^2

2.1 Inclusion continue

46. Définition inclusion continue
47. Théorème : Inclusions continues de Sobolev dans \mathbb{R}^N , dans Ω
48. Rapport entre $W^{1,p}(\Omega)$ et lipschitzienne
49. Inclusions continues de Sobolev dans O

2.2 Inclusion compacte

50. Définition : application compacte, inclusion compacte
51. Théorème : Ascoli-Arzelà
52. Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N , inclusion compact de Sobolev
53. Théorème : de Rellich-Komdrochov ($1 \leq p < N$), exposant critique des inclusions
54. $p = N$, autres inclusions compactes

3 Pblm variationnel

- 55. Définition $M(\alpha, \beta, \Omega)$, forme bilinéaire bornée, elliptique
- 56. Théorème de Lax-Milgram
- 57. Propriété : équivalence des solutions entre problème et variationnel
- 58. Théorème : solution unique, estimations

Quatrième partie

Opérateurs & Mesure

1 Opérateur

1.1 Premiers résultats

- 1. Théorème du graphe fermé
- 2. Lemme de Baire
- 3. Définition : orthogonal d'un ev
- 4. Propriété : orthogonal de l'orthogonal, avec Banach et son dual
- 5. Proposition : Orthogonal d'une somme
- 6. Équivalence avec $G + L$ fermé

1.2 Opérateurs non bornés

- 7. Définition : Opérateur, Graphe, Image, Noyau, opérateur fermé
- 8. Rq : comment prouver A fermé ? Lien avec $N(A)$?
- 9. Définition Adjoint. Idée de son existence.
- 10. Proposition : Condition nécessaire à A^* fermé
- 11. Corollaire : Liens entre N , R , A et A^*
- 12. Théorème : équivalence à $R(A)$ fermé
- 13. Théorème : équivalence à A borné
- 14. Définition : topologie faible
- 15. Proposition : 4 points sur la convergence faible
- 16. Proposition : convergence faible en dimension finie

1.3 Opérateur compact

- 17. Définition : Opérateur compact, définition de $\mathcal{H}(E, F)$
- 18. Théorème : caractérisation $\mathcal{H}(E, F)$
- 19. Corollaire : limite d'une suite d'opérateurs compacts
- 20. Définition : opérateur de rang fini
- 21. Proposition : composition d'opérateurs compacts
- 22. Théorème : opérateur compact et adjoint
- 23. Lemme de Riesz : $M \subset E$ et $u \in E$ normé
- 24. Théorème de Riesz : B_E compact et dimension de E
- 25. Théorème : alternative de Fredholm.
- 26. Définition : Ensemble résolvant, spectre, espace propre
- 27. Proposition : compacité et $\sigma(T)$

- 28. Théorème : opérateur compact dans un espace de dimension infinie, spectre et valeurs propres
- 29. Définition : autoadjoint
- 30. Proposition : borne inf et sup de $\sigma(T)$
- 31. Corollaire : T si $\sigma(T) = \{0\}$
- 32. Théorème : base de vecteurs propres

1.4 Théorème de Hille-Yosida

- 33. Définition : Maximal et monotone
- 34. Proposition : Pour opérateur maximal monotone, 3 propriétés
- 35. Définition résolvante et régularisée
- 36. Proposition : 7 propriétés d'un opérateur maximal monotone
- 37. Théorème : Hille-Yosida
- 38. Définition : m-accrétif
- 39. Théorème : Hille-Yosida pour les espaces de Banach
- 40. Expression de la solution sous forme exponentielle

2 Mesures

2.1 1ères propriétés

- 41. Définition : Tribu, espace mesurable, tribu engendrée
- 42. Définition : fonction additive, σ -additive
- 43. Proposition : monotonie, sous-additivité
- 44. Proposition : continuité à gauche et à droite
- 45. Définition : mesure réelle, positive, σ -finie
- 46. Définition : ensemble négligeable, mesure complète
- 47. Définition : mesure extérieure
- 48. 2 propriétés de la mesure extérieure
- 49. Définition : μ -mesurable
- 50. 2 autres trucs... Bon
- 51. Théorème : décomposition de Hahn
- 52. Définition : mesure positive et négative, variation totale, norme en variation

2.2 Fonctions mesurables

- 53. Définition fonction mesurable,
- 54. 5 propriétés
- 55. Définition : fonction indicatrice, fonction étagée, intégrale de Lebesgue, intégrable
- 56. Convergence pour suite croissante de fonctions positives
- 57. Lemme de Fatou, convergence dominée
- 58. Différentes inégalités