Calcul différentiel

18 novembre 2014

Table des matières

Première partie

Calcul variationnel

1 Cas scalaire

Ici : recherche d'optimum non plus dans un espace de réels, mais dans un espace de fonctions. On cherche y^* tel que :

$$I(y^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} I(y)$$

Considérons $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Parmis tous les y, dérivable et tel que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$, trouver la courbe minimisant :

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x))dx \tag{P}$$

Théorème: Euler-Lagrange

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Idée de la démonstration : On prend y minimisant I, et on pose $Y = y + \varepsilon\eta$, avec $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, puis on reprend I dépendant de ε. I est minimal pour $\varepsilon = 0$, on dérive, on trouve ce qu'il faut !

Définition:

g est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange si g est contante le long des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange.

Propriété:

1. Si $L = L(x, y')$, alors $\frac{\partial L}{\partial y'} = C$
2. Si $L = L(y, y')$ alors $L - y'\frac{\partial L}{\partial y} = C$.

Définition: Topologie dans $\mathcal{C}([x_1, x_2])$

On définit une topologie dans $\mathcal{C}^0([x_1, x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^0; \|y\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^0([x_1, x_2]),\ V_\varepsilon^0(y) = \left\{\tilde{y} \in \mathcal{C}^0\left([x_1, x_2]\right); \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^0} < \varepsilon\right\}$$

On fait de même dans $\mathcal{C}^1([x_1,x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^1; \|y\|_{\mathcal{C}^1} = \max_{x\in[x_1,x_2]} \|y(x)\|_2 + \max_{x\in[x_1,x_2]} \|y'(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^1([x_1,x_2]),\ V_\varepsilon^1(y) = \left\{\tilde{y} \in \mathcal{C}^1\left([x_1,x_2]\right); \|y-\tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon\right\}$$

Définition:

On considère que le problème P admet comme solution y^*.
y^* est un minimum fort strict s'il existe un voisinage dans $\mathcal{C}^0([x_1,x_2])$ (ie $V_\varepsilon^0(y^*)$) tel que :

$$I(y^*) < I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

C'est un maximum fort strict si :

$$I(y^*) > I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

$$\exists V_\varepsilon^1(y^*);\ I(y^*) < I(y) \Rightarrow y* \text{ minimum faible strict}$$
$$\exists V_\varepsilon^1(y^*);\ I(y^*) > I(y) \Rightarrow y* \text{ maximum faible strict}$$

Définition:

Soit $D = [x_1,x_2] \times \mathbb{R}$.
$y(x,C), C \in \mathbb{R}$ est un champ d'extrémales, si :

1. $(x, y(x,C)) \in D,\ \forall C \in \mathbb{R}$
2. $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x)$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange.

Ce champ est dit propre si $\forall (x_0,y_0) \in D,\ \exists! y(x,C)$ extrémale.
Ce champ est dit central si $y(x_1,C) = y_1,\ \forall C \in \mathbb{R}$ et $y(x,C) \neq y(x,\tilde{C})$, $\forall C \neq \tilde{C}$, $\forall x \neq x_1$.

Théorème: Jacobi-Weierstrass

Supposons $L \in \mathcal{C}^3$. Considérons toujours le même problème de minimisation P.
Si y^* satisfait :

1. $y^*(x_1) = y_1$ et $y^*(x_2) = y_2$
2. y^* peut être plongé dans un champ d'extrémale soit propre soit central
3. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y^*, (y^*)') > 0$ (resp < 0)
   Alors y^* est un minimum (resp. maximum) faible
4. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0$ (resp < 0) $\forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$
   Alors y^* est un minimum (resp. maximum) fort.

2 Courbes paramétrées

On prend à présent $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$

$$L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

On veut minimiser $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x))dx$

Théorème: Euler-Lagrange

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_i'} = 0,\ 1 \leq i \leq n$$

3 Hamiltonien

On pose à présent :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial y_i} \\ H &= -L + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i \end{aligned}$$

En calculant dH, on arrive au système suivant :

$$\begin{cases} y_i' &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i' &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases} \tag{SH}$$

ce qui est un système hamiltonnien.

Proposition:

$I : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une intégrale première de $\dot{z} = f(z)$ si et seulement si

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial I}{\partial z_i} f_i \equiv 0$$

Corollaire:

Si $I = I(z)$, alors la condition devient :

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial I}{\partial z_i} f_i = L_f I \equiv 0$$

Proposition:

Si $L = L(y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n)$ alors H est une intégrale première.

Proposition:

1. $I = I(y,p)$ est une intégrale première de (SH) si :

$$L_f I = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial I}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}}_{=\{I,H\} \text{ crochet de Poisson de I et H}} = 0$$

2. $I = I(x,y,p)$ est une intégrale première de (SH) si et seulement si

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \{I, H\} \equiv 0$$

Proposition:

H est une intégrale première si et seulement si L est invariant par rapport à $x \mapsto x + \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire:

H est est une intégrale première si et seulement si $I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ est invariant par rapport à $x \mapsto x+\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la transformation

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \phi_0(x, y_1, ..., y_n)\\ \tilde{y}_i &= \phi_i(x, y_1, ..., y_n)\end{aligned}$$

Définition:

$I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ est invariant par rapport à ϕ si

$$I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx = \int_{x_1}^{x_2} L(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}')d\tilde{x}$$

On considère à présent une famille de transformation paramétré par α :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \phi_0(x, y_1, ..., y_n, \alpha),\ \ \phi_0(x, y_1, ..., y_n, 0) = x\\ \tilde{y}_i &= \phi_i(x, y_1, ..., y_n, \alpha),\ \ \phi_i(x, y_1, ..., y_n, 0) = y_i\end{aligned}$$

Théorème: Emmy Noether

Si ϕ préserve

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$$

alors le système d'Euler-Lagrange (ou de façon équivalente, (SH)) possède une intégrale première.

Deuxième partie

Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

1 Équations homogènes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = 0 \tag{EH}$$

$(f_1, ..., f_n)^T$, $f_i = f_i(x)$: champ de vecteur donné. h cherché :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) \end{array}$$

Définition: Problème de Cauchy

Soit M une hypersurface dans $\mathbb{R}^n$, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\} \text{ où } \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ rg\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1,\ \forall x \in M$$

Fixons M une hypersurface et $B : M \to \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy est :
Trouver une solution de (EH) tel que

$$h_{|M} = b$$

On remarque que h est une intégrale première de l'équation $\dot{x} = f(x)$
De même, en posant $y = \sigma(x)$, avec $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme, on remarque que pour la fonction $\tilde{h}$ définit par :

$$h(x) = \tilde{h}(y)$$

on a $\tilde{h}$ une intégrale première de $\dot{y} = \tilde{f}(y)$ définit par :

$$\tilde{f}(y(t)) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(\sigma^{-1}(y(t))\right) f\left(\sigma^{-1}(y(t))\right)$$

Lemme:

Si $f(x_0) \neq 0$, $\exists y = \sigma(x)$ un difféomorphisme local, tel que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(\sigma^{-1}(y)\right) f\left(\sigma^{-1}(y)\right) = \tilde{f}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

Lemme:

Étant donné (M, f) tels que $f(x_0) \notin T_{x_0}M$, $\exists y = \sigma(x)$ un difféomorphisme local, tel que :

$$M = \{y_1 = 0\} \text{ et } \frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(\sigma^{-1}(y)\right) f\left(\sigma^{-1}(y)\right) = \tilde{f}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

> **Théorème:**
>
> 1. Si $f(x_0) \neq 0$ alors (EH) possède des solutions dans un voisinage de x_0
> 2. Si $f(x_0) \notin T_{x_0}M$ alors dans un voisinage de x_0, le problème de Cauchy possède une solution unique.

2 Équations non homogènes

On s'intéresse maintenant aux équations non homogènes :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = \eta(x) \tag{ENH}$$

> **Théorème:**
>
> 1. Si $f(p) \neq 0$, alors il existe localement, autour de p, des solutions.
> 2. Fixons M une hypersurface et $b : M \to \mathbb{R}$. Si $f(p) \notin T_pM$, alors autour de p, il existe une solution du problème de Cauchy (ENH)$\oplus$ $h_{|M} = b$
>   En plus,
> $$h(\gamma_t(p)) = b(p) + \int_0^t \eta(\gamma_\tau(p)) d\tau$$

3 Équations quasi-linéaires

$$\nabla h.f(x,h) = \eta(x,h) \tag{EQL}$$

On va chercher la solution sous une forme implicite, ie

$$\psi(x,h) = 0 \tag{Impl}$$

Si on veut $h(x_0) = h_0$:

> **Théorème: des fonctions implicites**
>
> Si $\frac{\partial \psi}{\partial h}(x_0, h_0) \neq 0$, alors (Impl) possède une solution unique $h(x)$ satisfaisant cette dernière, ie $\psi(x, h(x)) = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} h(x, h(x)) = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial h}}$$

On réintroduit ça dans (EQL) et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \psi}{\partial h} \eta = 0 \tag{EHIm}$$

On obtient donc une équation homogène dans l'espace (x, h) de dimension $n+1$!