Espaces de Sobolev

4 octobre 2014

Table des matières

Introduction

On s'intéresse aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné ouvert} \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

Définition: Hölderienne

f hölderienne d'exposant α si :

$$\exists c > 0; \forall x, y, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, 0 < \alpha < 1$$

Théorème: Unicité et existence

Soit $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$, L uniformément elliptique :

$$\exists \alpha > 0; \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$$

On suppose $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ (continue et hölderienne), $\alpha \in]0, 1[, c \geq 0$.
$f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$.
Alors $\exists! u$ solution de (P) tel que $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Théorème: estimation de Schender

Si de plus, $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $g \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\right)$$

1 Les espaces L^p

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition: Dual

Soit X un evn. On appelle dual de X l'espace

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

Si $\phi \in X'$ et $x \in X$, on note souvent :

$$\phi(x) = \langle \phi, x \rangle_{X'X}$$

appelé crochet de dualité.

➴ *Définition: Bidual*

Soit X un evn. On appelle bidual de X l'espace

$$X'' = (X')'$$

qui est un Banach.

Remarque : On peut identifier X avec un sous-espace de X'' à travers une isométrie, de la manière suiva,te : $\forall x \in X$, on définit :

$$f_x : x' \in X' \mapsto \langle x', x \rangle_{X'X} \in \mathbb{R}$$

f_x est dans X'' car linéaire, et $|\langle x', x \rangle| \leq \|x\|_X \|x'\|_{X'}$ donc f_x est borné.

On peut montrer que :

$$\mathcal{F} : x \in X \mapsto f_x \in X''$$

est une isométrie, ie $\|x\|_X = \|f_x\|_{X''}$, $\forall x \in X$. Donc on identifie x avec f_x et on écrit $X \subset X''$.
Question : a-t-on $X = X''$? autrement dit, $\mathcal{F}$ est-elle surjective ? En général, non.

➴ *Définition: Reflexif*

Si $\mathcal{F}$ est surjective, on dit que C est reflexif.

⥈ *Théorème: représentation de Riesz-Fréchet*

Soit H de Hilbert.

$$\forall F \in H', \exists ! \tau(F) \in H ; \forall x \in H, \langle F, x \rangle_{H'H} = (\tau(F), x)_H$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H' & \to & H \\ F & \mapsto & \tau(F) \end{array}$$

est une isométrie.

1.2 Les espaces L^p

Dans la suite, O est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$
Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
dx la mesure de Lebesgue

➴ *Définition:*

Soit $1 \leq p < +\infty$.

$$L^p(O) = \{f : O \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \int |f|^p dx < \infty\}$$

$$L^p(O) = \{f : O \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; |f| < \infty \text{ p.p. dans } O\}$$

$$\forall 1 \leq p \leq +\infty, L^p_{loc}(O) = \{f \in L^p(\omega), \forall \omega \text{ ouvert borné}, \bar{\omega} \subset O\}$$

Propriété:

$L^p(O)$ est de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(O)} = \left| \begin{array}{ccc} \left(\int_O |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} & p < \infty \\ \inf\{C; |f| \leq C \text{ pp}\} & \text{si} & p = \infty \end{array} \right.$$

Remarque:

Si $p = 2$, $L^2(O)$ est un Hilbert par rapport au produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(O)} = \int_O f(x)g(x)dx$$

Propriété: inégalité de Holder

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On pose

$$p' = \left| \begin{array}{ccc} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{si} & p = +\infty \\ +\infty & \text{si} & p = 1 \end{array} \right.$$

appelé le conjugué.

$$\forall f \in L^p(O), \forall g \in L^{p'}(O), \int_O |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(O)}\|g\|_{L^{p'}(O)}$$

Corollaire:

$1 \leq p \leq +\infty$, p' son conjugué.
Si $f_n \to f$ dans $L^p(O)$ et $g \in L^{p'}(O)$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_O f_n g dx = \int_O f g dx$$

Corollaire:

$1 \leq p < q \leq +\infty$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^q(\Omega)}$ où $c = c(|\Omega|, p, q)$.