Application aux perturbations

17 septembre 2014

Table des matières

Première partie

Points fixes, systèmes différentiels

On va travailler avec des systèmes de la forme

$$\frac{dX}{dt} = f(X),\ X \in \mathbb{R}^n,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1}$$

C'est une équation autonome : $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ $\mathbb{R}^n$: espace des phases
f : champ de vecteurs

Définition:

On appelle orbite, trajectoire ou orbite solution issue de X_0 :

$$\{X(t), t \geq 0 \text{ avec } X(0) = X_0\}$$

Théorème: d'existence locale et d'unicité de la solution

$U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ cpntinument différentiable. Soit $X_0 \in U$.
Alors $\exists C > 0$ et une solution unique $\phi_0(X_0, \bullet) : [-C, C] \to U$ qui satisfait $\dot{X} = f(X)$ avec $X(0) = X_0$.

Définition: Point fixe

x^* est un point fixe si et seulement si $f(x^*) = 0$

Définition: Stabilité

Stabilité simple : toute orbite issue d'un voisinage de X^* ranste dans le voisinage de X^* pour $t > 0$.
Stabilité asymptotique : X^* stable et $\lim_{t \to +\infty} X(t) = X^*$

Théorème: de Lyapounov

Si X^* est un point fixe de (1) et si on peut définir une fonction $V : W \to \mathbb{R}$, $W \subset V_{X^*}$, et si :

1. $V(X^*) = 0$ et $V(X) > 0$ pour $X \neq X^*$.
2. $\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x_j} = \nabla V.f \leq 0$ dans $W \backslash \{X^*\}$
   alors X^* est stable.
   Et si :
3. $\frac{dV}{dt} < 0$, alors X^* est asymptotiquement stable.

V difficile à trouver sauf quand on a une formulation variationnelle (Mécanique, éléctromagnétisme).

ℹ *Propriété: Exponentielle de matrice*

1. Si $\exists T$, inversible, telle que $B = TAT^{-1}$, alors $e^B = Te^AT^{-1}$
2. Si $AB = BA$ alors $e^{A+B} = e^Ae^B$
3. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
4. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ alors $e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$