Mesures et Opérateurs

19 décembre 2014

Table des matières

Première partie
Opérateurs

1 Définitions et résultats préliminaires

Théorème: du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T est fermé dans $E \times F$. Alors T est continue.

Lemme: de Baire

Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés. On suppose que

$$\forall n \geq 1,\ \overset{\circ}{\widehat{X_n}} = \emptyset$$

Alors

$$\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}} = \emptyset$$

Démonstration :
On pose $O_n = X_n^C$ le complémentaire de X_n, de sorte que O_n est un ouvert dense. Il s'agit de montrer que $G = \cap_{i=1}^{\infty} O_i$ est dense dans X.
Soit ω un ouvert non vide de X. On va prouver que $\omega \cap G \neq \emptyset$.
On choisit $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ arbitraires tels que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Ceci est possible car O_1 est ouvert et dense. Ainsi de sute, on construit par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) telles que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $x_n \to l$. Comme $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pour tous $n, p \geq 0$, on obtient à la limite (quand $p \to +\infty$) :

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)}\ \forall n \geq 0$$

En particulier, $l \in \omega \cap G$.

Définition: Orthogonal d'un ev

Soit X un espace de Banach.
Si $M \subset X$ est un sev, on pose

$$M^{\perp} = f \in X'; \langle f, x \rangle = 0 \forall x \in M\}$$

Si $N \subset X'$ est un sev, on pose

$$N^{\perp} = x \in X; \langle f, x \rangle = 0 \forall f \in N\}$$

$M^{\perp}$ (resp. $N^{\perp}$) est l'orthogonal de M (resp. N), qui est un sev fermé de X' (resp. X).

Proposition:

Soit $M \subset X$ un sev. On a alors

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M} \tag{1}$$

Soit $N \subset X'$ un sev. On a alors

$$\left(N^{\perp}\right)^{\perp} \supset \overline{N} \tag{2}$$

Proposition:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. On a :

$$G \cap L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{3}$$

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp} \tag{4}$$

Théorème:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$G + L \text{ est fermé dans X} \tag{5}$$

$$G^{\perp} + L^{\perp} \text{ est fermé dans X} \tag{6}$$

$$G + L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{7}$$

$$G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp} \tag{8}$$

2 Opérateurs non-bornés

2.1 Définitions et propositions

Définition: Opérateur

Soient E et F deux espaces de banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire

$$A : D(A) \subset E \to F$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F. $D(A)$ est le domaine de A.
On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq c\|u\| \ \forall u \in D(A)$$

(Oui, avec cette définition, un opérateur non borné peut être... Borné)

Définition: Graphe, Image et Noyau

On appelle Graphe de A l'ensemble

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$$

On appelle Image de A l'ensemble

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

On appelle Noyau de A l'ensemble

$$N(A) = \{u \in D(A);\ Au = 0\} \subset E$$

Définition: fermé

On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Remarque:

1. Pour prouver qu'un opérateur A est femré, on procède en général de la manière suivante : on prend une suite (u_n) dans $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to f$ dans F. Il s'agit ensuite de vérifier que
   (a) $u \in D(A)$
   (b) $f = Au$
2. Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé.

Définition: Adjoint

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire à domaine dense.
L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$, appelé adjoint de A, est l'unique opérateur vérifiant :

$$\langle v, Au\rangle_{F'F} = \langle A^* v, u\rangle_{E'E} \qquad \forall u \in D(A),\ v \in D(A^*)$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur vient principalement du théorème de Hahn-Banach dans sa forme analytique. On pose :

$$D(A^*) = \{v \in F';\ \exists c \geq 0; |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|\ \forall u \in D(A)\}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F'. On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. On considère l'application $g : D(A) \to \mathbb{R}$ définie pour $v \in D(A^*)$ par

$$g(u) = \langle v, Au\rangle_{F'F}$$

On a

$$|g(u)| \leq c\|u\| \forall u \in E$$

On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach : on sait que g peut être prolongée en une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$|f(u)| \leq c\|u\|\ \forall u \in E$$

Par suite, $f \in E'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense. On pose enfin :

$$A^*v = f$$

Proposition:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.

Démonstration :
Soit $(v_n) \subset D(A^*)$ telle que $v_n \to v$ dans F' et $A^*v_n \to f$ dans E'. Il s'agit de prouver que $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Or :

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle\ \forall u \in D(A)$$

D'où à la limite, il vient :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle$$

Par conséquent, $v \in D(A^*)$ par définition du domaine et $A^*v = f$.

Corollaire:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ (dense). Alors on a :

1. $N(A) = R(A^*)^\perp$
2. $N(A^*) = R(A)^\perp$
3. $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$
4. $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$

Démonstration :
On peut très facilement vérifier les égalités suivantes :

$$N(A) \times \{0\} = G(A) \cap (E \times \{0\}) \tag{9}$$

$$E \times R(A) = G(A) + (E \times \{0\}) \tag{10}$$

$$\{0\} \times N(A^*) = G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \tag{11}$$

$$R(A^*) \times F' = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp \tag{12}$$

En utilisant (3), on a donc directement :

$$\begin{aligned} R(A^*)^\perp \times \{0\} &= (R(A^*) \times F')^\perp \\ &= \left(G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp \\ &= G(A) \cap (E \times \{0\} \\ &= N(A) \times \{0\} \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.
Pour le deuxième, on fait de même :

$$\begin{aligned} \{0\} \times R(A)^\perp &= (G(A) + (E \times \{0\}))^\perp \\ &= G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \\ &= \{0\} \times N(A^*) \end{aligned}$$

Pour les deux derniers résultats, on utilise les deux premiers avec (1) et (2).

2.2 Opérateurs bornés

2.2.1 Opérateurs à image fermée

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec le support de A dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A)$ est fermé
2. $R(A^*)$ est fermé
3. $R(A) = N(A^*)^\perp$
4. $R(A^*) = N(A)^\perp$

Démonstration :
(1) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\})$ fermé dans X (10)
(2) $\Leftrightarrow G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ fermé dans X' (12)
(3) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\}) = \left(G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp$ (10) et (11)
(4) $\Leftrightarrow (G(A) \cap (E \times \{0\})^\perp = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ (9) et (12)

La conclusion nous vient directement du théorème (5)-(8).

2.2.2 Opérateurs bornés

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec son domaine dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $D(A) = E$
2. A est borné
3. $D(A^*) = F'$
4. A^* est borné

Dans ces conditions, on a :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$$

Démonstration :
(1) $\Rightarrow$ (2) : il suffit d'applquer le théorème du graphe fermé.
(2) $\Rightarrow$ (3) : par définition de $D(A^*)$ donnée après la définition de A^*
(3) $\Rightarrow$ (4) : On applique la proposition précédente sur une caractérisation de A^* fermée et à l'aide du théorème du graphe fermé.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Plus délicat. Notons d'abord que$D(A^*)$ est fermé. En effet, soit $(v_n) \subset D(A^*)$ avec $v_n \to v$ dans F'. On a :

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\|$$

Par conséquent, (A^*v_n) converge vers une limite f. Comme A^* est fermé, $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Dans l'espace $X = E \times F$, on considère les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que

$$G + L = D(A) \times F \text{ et } G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^*)$$

Par conséquent, $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X'. Le théorème (5)-(8) permet de conclure que $G + L$ est fermé, donc que $D(A)$ est fermé. Comme $\overline{D(A)} = E$, on en déduite que $D(A) = E$.

Prouvons maintenant que $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. On a :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle \ \forall u \in E, \ \forall v \in F'$$

Donc

$$|\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|v\|\|u\|$$

et

$$\|Au\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|u\|$$

Par suite, $\|A\| \leq \|A^*\|$. Inversement, on a :

$$\|A^*v\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle A^*v, u\rangle| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A\|\|v\|$$

Par conséquent, $\|A^*\| \leq \|A\|$.

3 Topologie faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual. Pour $f \in E'$, on définit $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$. On définit ainsi une famille $(\phi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition: Topologie faible

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\phi_f)_{f\in E'}$ continues, ie la topologie sur E avec un nombre minimal d'ouvert rendant les ϕ_f continues.
On note par $\rightharpoonup$ la convergence pour la topologie faible.

Proposition:

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a :

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in E', \ \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$
2. Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration :

1. Admis
2. Résulte de (1), puisque $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x_n - x\|$
3. On utilise pour cela le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus suivant :
   Corollaire : Soit G un espace de Banach et soit B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup_{x \in B} \langle f, x\rangle$ est borné. Alors B est borné. Il suffit donc de vérifier que pour chaque $f \in E'$, l'ensemble $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est borné. Or, pour chaque $f \in E'$, la suite $\langle f, x_n\rangle$ converge vers $\langle f, x\rangle$ (en particulier, elle est bornée). Soit $f \in E'$, on a :
   $$|\langle f, x_n\rangle \leq \|f\|\|x_n\|$$
   et à la limite :
   $$|\langle f, x\rangle \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$
   Par conséquent :
   $$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf \|x_n\|$$
4. On a :
   $$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f_n - f\|\|x\| + |\langle f, x_n - x\rangle|$$
   On conclut grâce à (1) et (3).

Proposition:

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle conïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.