Mesures et Opérateurs

22 décembre 2014

Table des matières

Première partie

Opérateurs

1 Définitions et résultats préliminaires

Théorème: du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T est fermé dans $E \times F$. Alors T est continue.

Lemme: de Baire

Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés. On suppose que

$$\forall n \geq 1,\ \overset{\circ}{\widehat{X_n}} = \emptyset$$

Alors

$$\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}} = \emptyset$$

Démonstration :
On pose $O_n = X_n^C$ le complémentaire de X_n, de sorte que O_n est un ouvert dense. Il s'agit de montrer que $G = \cap_{i=1}^{\infty} O_i$ est dense dans X.
Soit ω un ouvert non vide de X. On va prouver que $\omega \cap G \neq \emptyset$.
On choisit $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ arbitraires tels que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Ceci est possible car O_1 est ouvert et dense. Ainsi de sute, on construit par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) telles que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $x_n \to l$. Comme $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pour tous $n, p \geq 0$, on obtient à la limite (quand $p \to +\infty$) :

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)}\ \forall n \geq 0$$

En particulier, $l \in \omega \cap G$.

Définition: Orthogonal d'un ev

Soit X un espace de Banach.
Si $M \subset X$ est un sev, on pose

$$M^{\perp} = f \in X'; \langle f, x \rangle = 0 \forall x \in M\}$$

Si $N \subset X'$ est un sev, on pose

$$N^{\perp} = x \in X; \langle f, x \rangle = 0 \forall f \in N\}$$

$M^{\perp}$ (resp. $N^{\perp}$) est l'orthogonal de M (resp. N), qui est un sev fermé de X' (resp. X).

Proposition:

Soit $M \subset X$ un sev. On a alors

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M} \tag{1}$$

Soit $N \subset X'$ un sev. On a alors

$$\left(N^{\perp}\right)^{\perp} \supset \overline{N} \tag{2}$$

Proposition:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. On a :

$$G \cap L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{3}$$

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp} \tag{4}$$

Théorème:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$G + L \text{ est fermé dans X} \tag{5}$$

$$G^{\perp} + L^{\perp} \text{ est fermé dans X} \tag{6}$$

$$G + L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{7}$$

$$G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp} \tag{8}$$

2 Opérateurs non-bornés

2.1 Définitions et propositions

Définition: Opérateur

Soient E et F deux espaces de banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire

$$A : D(A) \subset E \to F$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F. $D(A)$ est le domaine de A.
On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq c\|u\| \; \forall u \in D(A)$$

(Oui, avec cette définition, un opérateur non borné peut être... Borné)

Définition: Graphe, Image et Noyau

On appelle Graphe de A l'ensemble

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$$

On appelle Image de A l'ensemble

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

On appelle Noyau de A l'ensemble

$$N(A) = \{u \in D(A); \; Au = 0\} \subset E$$

Définition: fermé

On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Remarque:

1. Pour prouver qu'un opérateur A est femré, on procède en général de la manière suivante : on prend une suite (u_n) dans $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to f$ dans F. Il s'agit ensuite de vérifier que
   (a) $u \in D(A)$
   (b) $f = Au$
2. Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé.

Définition: Adjoint

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire à domaine dense.
L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$, appelé adjoint de A, est l'unique opérateur vérifiant :

$$\langle v, Au \rangle_{F'F} = \langle A^* v, u \rangle_{E'E} \qquad \forall u \in D(A), \; v \in D(A^*)$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur vient principalement du théorème de Hahn-Banach dans sa forme analytique. On pose :

$$D(A^*) = \{v \in F';\ \exists c \geq 0; |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|\ \forall u \in D(A)\}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F'. On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. On considère l'application $g : D(A) \to \mathbb{R}$ définie pour $v \in D(A^*)$ par

$$g(u) = \langle v, Au\rangle_{F'F}$$

On a

$$|g(u)| \leq c\|u\| \forall u \in E$$

On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach : on sait que g peut être prolongée en une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$|f(u)| \leq c\|u\|\ \forall u \in E$$

Par suite, $f \in E'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense. On pose enfin :

$$A^*v = f$$

Proposition:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.

Démonstration :
Soit $(v_n) \subset D(A^*)$ telle que $v_n \to v$ dans F' et $A^*v_n \to f$ dans E'. Il s'agit de prouver que $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Or :

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle\ \forall u \in D(A)$$

D'où à la limite, il vient :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle$$

Par conséquent, $v \in D(A^*)$ par définition du domaine et $A^*v = f$.

Corollaire:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ (dense). Alors on a :

1. $N(A) = R(A^*)^\perp$
2. $N(A^*) = R(A)^\perp$
3. $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$
4. $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$

Démonstration :
On peut très facilement vérifier les égalités suivantes :

$$N(A) \times \{0\} = G(A) \cap (E \times \{0\}) \tag{9}$$

$$E \times R(A) = G(A) + (E \times \{0\}) \tag{10}$$

$$\{0\} \times N(A^*) = G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \tag{11}$$

$$R(A^*) \times F' = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp \tag{12}$$

En utilisant (3), on a donc directement :

$$\begin{aligned} R(A^*)^\perp \times \{0\} &= (R(A^*) \times F')^\perp \\ &= \left(G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp \\ &= G(A) \cap (E \times \{0\} \\ &= N(A) \times \{0\} \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.
Pour le deuxième, on fait de même :

$$\begin{aligned} \{0\} \times R(A)^\perp &= (G(A) + (E \times \{0\}))^\perp \\ &= G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \\ &= \{0\} \times N(A^*) \end{aligned}$$

Pour les deux derniers résultats, on utilise les deux premiers avec (1) et (2).

2.2 Opérateurs bornés

2.2.1 Opérateurs à image fermée

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec le support de A dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A)$ est fermé
2. $R(A^*)$ est fermé
3. $R(A) = N(A^*)^\perp$
4. $R(A^*) = N(A)^\perp$

Démonstration :
(1) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\})$ fermé dans X (10)
(2) $\Leftrightarrow G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ fermé dans X' (12)
(3) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\}) = \left(G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp$ (10) et (11)
(4) $\Leftrightarrow (G(A) \cap (E \times \{0\})^\perp = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ (9) et (12)

La conclusion nous vient directement du théorème (5)-(8).

2.2.2 Opérateurs bornés

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec son domaine dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $D(A) = E$
2. A est borné
3. $D(A^*) = F'$
4. A^* est borné

Dans ces conditions, on a :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$$

Démonstration :
(1) $\Rightarrow$ (2) : il suffit d'applquer le théorème du graphe fermé.
(2) $\Rightarrow$ (3) : par définition de $D(A^*)$ donnée après la définition de A^*
(3) $\Rightarrow$ (4) : On applique la proposition précédente sur une caractérisation de A^* fermée et à l'aide du théorème du graphe fermé.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Plus délicat. Notons d'abord que$D(A^*)$ est fermé. En effet, soit $(v_n) \subset D(A^*)$ avec $v_n \to v$ dans F'. On a :

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\|$$

Par conséquent, (A^*v_n) converge vers une limite f. Comme A^* est fermé, $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Dans l'espace $X = E \times F$, on considère les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que

$$G + L = D(A) \times F \text{ et } G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^*)$$

Par conséquent, $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X'. Le théorème (5)-(8) permet de conclure que $G + L$ est fermé, donc que $D(A)$ est fermé. Comme $\overline{D(A)} = E$, on en déduite que $D(A) = E$.

Prouvons maintenant que $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. On a :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle \;\forall u \in E,\; \forall v \in F'$$

Donc

$$|\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|v\|\|u\|$$

et

$$\|Au\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|u\|$$

Par suite, $\|A\| \leq \|A^*\|$. Inversement, on a :

$$\|A^*v\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle A^*v, u\rangle| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A\|\|v\|$$

Par conséquent, $\|A^*\| \leq \|A\|$.

3 Topologie faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual. Pour $f \in E'$, on définit $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$. On définit ainsi une famille $(\phi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition: Topologie faible

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\phi_f)_{f\in E'}$ continues, ie la topologie sur E avec un nombre minimal d'ouvert rendant les ϕ_f continues.
On note par $\rightharpoonup$ la convergence pour la topologie faible.

Proposition:

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a :

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in E',\; \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$
2. Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration : 1. Admis

2. Résulte de (1), puisque $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x_n - x\|$
3. On utilise pour cela le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus suivant :
   Corollaire : Soit G un espace de Banach et soit B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup_{x \in B} \langle f, x\rangle$ est borné. Alors B est borné. Il suffit donc de vérifier que pour chaque $f \in E'$, l'ensemble $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est borné. Or, pour chaque $f \in E'$, la suite $\langle f, x_n\rangle$ converge vers $\langle f, x\rangle$ (en particulier, elle est bornée). Soit $f \in E'$, on a :
   $$|\langle f, x_n\rangle \leq \|f\|\|x_n\|$$
   et à la limite :
   $$|\langle f, x\rangle \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$
   Par conséquent :
   $$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf \|x_n\|$$
4. On a :
   $$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f_n - f\|\|x\| + |\langle f, x_n - x\rangle|$$
   On conclut grâce à (1) et (3).

Proposition:

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

4 Opérateurs compacts

4.1 Définitions

Soient E et F deux espaces de Banach.
On désigne par B_E la boule unité centrée à l'origine, ie

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

et par $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \|f\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Définition: Opérateur compact

On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est compact si l'image de la boule unité par T est relativement compact pour la topologie forte, ie :

$$\overline{T\left(\{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}\right)} \subset F \text{ compact}$$

On désigne par $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F, et $\mathscr{K}(E) = \mathscr{K}(E,E)$.

Théorème:

$\mathscr{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$ (pour la norme $\| \bullet \|_{\mathscr{L}(E,F)}$).

Démonstration :
Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.
Supposons que $(T_n) \subset \mathscr{K}(E,F)$, $T \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \to 0$. Montrons que $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Comme F est complet, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$ dans F.
Pour n assez grand, on a $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $T_n(B_E)$ est relativement compact, on a pour I fini

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Donc par force,

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$$

Définition: Rang fini

On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang fini si $R(T) < \infty$

Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact (car les compacts dans un espace de dimension finie sont les sous-espaces fermés bornés).

Corollaire:

Soit (T_n) une suite d'opérateurs de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathscr{L}(E,F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \to 0$. Alors $T \in \mathscr{K}(E,F)$.

Proposition:

Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ et $S \in \mathscr{K}(F,G)$ (ou $T \in \mathscr{K}(E,F)$ et $S \in \mathscr{L}(F,G)$), alors $S \circ T \in \mathscr{K}(E,G)$.

Théorème: Schauder

Si $T \in \mathscr{K}(E,F)$, alors $T^* \in \mathscr{K}(F',E')$, et réciproquement.

Démonstration :
On aura pour cela besoin du théorème d'Ascoli :
Théorème : Soit K un espace métrique compact et soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$, l'ensemble des fonctions continues sur K.
On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ \forall f \in \mathcal{H}$$

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$.

Montrons que $T^*(B_{F'})$ est relativement compact dans E'. Soit (v_n) une suite de $B_{F'}$. Montrons que l'on peut extraire une sous-suite telle que $T^*(v_{n_k})$ converge. Soit $K = \overline{T(B_E)}$ (métrique compact) et soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K)$ défini par :

$$\mathcal{H} = \{\phi_n : x \in K \to \langle v_n, x\rangle;\ n = 1,2,...\}$$

Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite notée ϕ_{n_k} qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}(K)$. En particulier :

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \phi(Tu)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Donc

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \langle v_{n_l}, Tu\rangle| \xrightarrow[k,l \to +\infty]{} 0$$

ie

$$\|T^* v_{n_k} - T^* v_{n_l}\|_{E'} \xrightarrow[k,l \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, $T^* v_{n_k}$ converge dans E'.

Réciproquement, supposons que $T^* \in \mathscr{K}(F',E')$. D'après ce qui précède, $T^{**} \in \mathscr{K}(E'',F'')$ et en particulier, $T^{**}(B_E)$ est relativement compact dans F''. Or, $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ et F fermé dans F''. Par conséquent, $T(B_E)$ est relativement compact dans F.

4.2 Théorie de Riesz-Fredholm

✑ *Lemme: de Riesz*

Soit E un e.v.n. et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé tel que $M \neq E$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists u \in E; \; \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration :
Soit $v \in E \backslash M$. Comme M est fermé, alors $d = d(v, M) > 0$. On choisit $m_0 \in M$ tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Alors

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

répond à la question. En effet, si $m \in M$, on a :

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \varepsilon$$

puisque

$$m_0 + \|v - m_0\| m \in M$$

✑ *Théorème: Riesz*

Soit E un e.v.n. tel que B_E soit compact. Alors E est de dimension finie.

Démonstration :
Raisonnons par l'absurde. Si E est de dimension infinie, il existe une suite (E_n) de sous-espaces de dimension finie tels que $E_{n-1} \subsetneq E_n$. Grâce au lemme ptécédent, on peut construire une suite (u_n) avec $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. En particulier, $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour $m < n$. Donc la suite (u_n) n'admet aucune sous-suite convergente - ce qui est contraire à l'hypothèse B_E compact.

✑ *Théorème: Alternative de Fredholm*

Soit $T \in \mathscr{K}(E)$. Alors :

1. $N(I - T)$ est de dimension finie
2. $R(I - T)$ est fermé, et plus précisément

$$R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$$

3. $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$
4. dim $N(I - T)$ =dim $N(I - T^*)$

Démonstration :

1. Soit $E_1 = N(I - T)$. Alors $B_{E_1} \subset T(B_E)$ et donc B_{E_1} est compact. D'après le théorème de Riesz précédent, E_1 est de dimension finie.

2. Soit $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Il faut montrer que $f \in R(I-T)$. Posons $d_n = d(u_n, N(I-T))$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie, il existe $(v_n) \subset N(I-T)$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$. On a :

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{13}$$

Montrons que $\|u_n - v_n\|$ reste borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite telle que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. En posant

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$$

on aurait grâce à (13) $w_{n_k} - T(w_{n_k}) \to 0$. En extrayant une sous-sous-suite (encore notée (w_{n_k}) pour simplifier) on peut supposer que $Tw_{n_k} \to z$. Donc $w_{n_k} \to z$ et $z \in N(I-T)$. D'autre part :

$$d(w_n, N(I-T)) = \frac{d(u_n, N(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

puisque $v_n \in N(I-T)$. À la limite on obtient $d(z, N(I-T)) = 1$ - ce qui est absurde, vu que $z \in N(I-T)$. Par conséquent, $\|u_n - v_n\|$ reste borné et comme T est compact, on peut extraire une sous-suite telle que $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$.
On déduit de (13) que $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + l$; posant $g = f + l$, on a $g - Tg = f$, ie $f \in R(I-T)$. On a donc montré que l'opérateur $I - T$ est à image fermée. On peut alors appliquer un théorème précédent sur la fermeture de l'ensemble image, et en conclure :

$$R(I-T) = N(I-T^*)^\perp \text{ et } R(I-T^*) = N(I-T)^\perp$$

3. Prouvons d'abord l'implication $\Rightarrow$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$E_1 = R(I-T) \neq E$$

E_1 est un espace de Banach et $T(E_1) \subset E_1$. Donc $T|_{E_1} \in \mathscr{K}(E_1)$ et $E_2 = (I-T)(E_1)$ est un sous-espace fermé de E_1. De plus, $E_2 \neq E_1$ (puisque (I-T) injectif). En posant $E_n = (I-T)^n(E)$, on obtient ainsi une suite strictement décroissant de sous-espaces fermés. D'après le lemme de Riesz, il existe une suite (u_n) telle que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. On a :

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Notons que si $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ et par conséquent :

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Donc $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$ - ce qui est absurde puisque T est compact. Donc $R(I-T) = E$.

Inversement, supposons que $R(I-T) = E$. Alors par corollaire précédent, $N(I-T^*) = R(I-T)^\perp = \{0\}$. Puisque $T^* \in \mathscr{K}(E')$, on peut appliquer ce qui précède à T^* et conclure que $R(I-T^*) = E'$. Or, par le même corollaire, $N(I-T) = R(I-T^*)^\perp = \{0\}$.

4. Soit d =dim $N(I-T)$ et d^* =dim $N(I-T^*)$. On va d'abord montrer que $d^* \leq d$. Raisons par l'absurde et supposons que $d < d^*$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique dans E ; il exuste donc un projecteur continue P de E sur $N(I-T)$.
D'autre part, $R(I-T) = N(I-T)^\perp$ est de codomension finie d^* et par conséquent, $R(I-T)$ admet dans E un supplémentaire topologique, noté F de dimension d^*. Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\Lambda : N(I-T) \to F$ qui est injective et non surjective. POsons $S = T + (\Lambda \circ P)$; alors $R \in \mathscr{K}(E)$ puisque $\Lambda \circ P$ est de rang fini.
Montrons que $N(I-S) = \{0\}$. En effet, si

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu)$$

alors

$$u - Tu = 0 \text{ et } \Lambda \circ Pu = 0$$

ie $u \in N(I-T)$ et $\Lambda u = 0$, donc $u = 0$
En appliquant (3) à l'opérateur S, on voit que $R(I-S) = E$. Ceci est absurde puisqu'uk existe $f \in F$, $f \notin R(\Lambda)$; l'équation $u - Su = f$ n'admet pas de solution.
Par conséquent, on a prouvé que $d^* \leq d$. En appliquant ce résultat à T^*, on voit que

$$\dim\, N(I-T^{**}) \leq \dim\, N(I-T^*) \leq \dim\, N(I-T)$$

Or, $N(I-T^{**}) \supset N(I-T)$ - ce qui permet de conclure que $d = d^*$.

Remarque:

1. L'Alternative de Fredholm concerne la résulution de l'équation $u - Tu = f$. Elle exprime que :
   — **Ou bien** pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une solution unique
   — **Ou bien** l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité (i.e. $f \in N(I-T^*)^\perp$).
2. La propriété (3) est familière en dimension finie. Si dim $E < \infty$, un opérateur linéaire de E dans lui-même est injectif si et seulement s'il est surjectif.

4.3 Spectre d'un opérateur - Décomposition spéctrale

4.3.1 Spectre d'un opérateur compact

Définition: Ensemble résolvant, spectre, espace propre

Soit $T \in \mathscr{L}(E)$
L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ dans } E\}$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$$

On dit que λ est valeur propre - et on note $\lambda \in VP(T)$ - si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

$N(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ.

Remarque : Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. En général, l'inclusion est stricte (sauf bien sûr en dimension finie). Il peut exister λ tel que

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(T - \lambda I) \neq E$$

(un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).
Par exemple, prenons dans $E = l^2$, $Tu = (0, u_1, u_2, ...)$ où $u = (u_1, u_2, ...)$ (T est appelé le shift à droite). Alors $0 \in \sigma(T)$ et $0 \notin VP(T)$.

Proposition:

Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$$

Démonstration :