Mesures et Opérateurs

4 janvier 2015

Table des matières

Première partie
Opérateurs

1 Définitions et résultats préliminaires

Théorème: du graphe fermé

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T est fermé dans $E \times F$. Alors T est continue.

Lemme: de Baire

Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés. On suppose que

$$\forall n \geq 1,\ \overset{\circ}{\widehat{X_n}} = \emptyset$$

Alors

$$\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}} = \emptyset$$

Démonstration :
On pose $O_n = X_n^C$ le complémentaire de X_n, de sorte que O_n est un ouvert dense. Il s'agit de montrer que $G = \cap_{i=1}^{\infty} O_i$ est dense dans X.
Soit ω un ouvert non vide de X. On va prouver que $\omega \cap G \neq \emptyset$.
On choisit $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ arbitraires tels que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Ceci est possible car O_1 est ouvert et dense. Ainsi de sute, on construit par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) telles que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $x_n \to l$. Comme $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pour tous $n, p \geq 0$, on obtient à la limite (quand $p \to +\infty$) :

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)}\ \forall n \geq 0$$

En particulier, $l \in \omega \cap G$.

Définition: Orthogonal d'un ev

Soit X un espace de Banach.
Si $M \subset X$ est un sev, on pose
$$M^{\perp} = \{f \in X'; \langle f, x\rangle = 0 \ \forall x \in M\}$$
Si $N \subset X'$ est un sev, on pose
$$N^{\perp} = \{x \in X; \langle f, x\rangle = 0 \ \forall f \in N\}$$
$M^{\perp}$ (resp. $N^{\perp}$) est l'orthogonal de M (resp. N), qui est un sev fermé de X' (resp. X).

Proposition:

Soit $M \subset X$ un sev. On a alors
$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M} \tag{1}$$
Soit $N \subset X'$ un sev. On a alors
$$\left(N^{\perp}\right)^{\perp} \supset \overline{N} \tag{2}$$

Proposition:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. On a :
$$G \cap L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{3}$$
$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp} \tag{4}$$

Théorème:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
$$G + L \text{ est fermé dans X} \tag{5}$$
$$G^{\perp} + L^{\perp} \text{ est fermé dans X} \tag{6}$$
$$G + L = \left(G^{\perp} + L^{\perp}\right)^{\perp} \tag{7}$$
$$G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp} \tag{8}$$

2 Opérateurs non-bornés

2.1 Définitions et propositions

Définition: Opérateur

Soient E et F deux espaces de banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire

$$A : D(A) \subset E \to F$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F. $D(A)$ est le domaine de A.
On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq c\|u\| \ \forall u \in D(A)$$

(Oui, avec cette définition, un opérateur non borné peut être... Borné)

✎ *Définition: Graphe, Image et Noyau*

On appelle Graphe de A l'ensemble

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$$

On appelle Image de A l'ensemble

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

On appelle Noyau de A l'ensemble

$$N(A) = \{u \in D(A);\ Au = 0\} \subset E$$

✎ *Définition: fermé*

On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

ℹ *Remarque:*

1. Pour prouver qu'un opérateur A est fermé, on procède en général de la manière suivante : on prend une suite (u_n) dans $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to f$ dans F. Il s'agit ensuite de vérifier que
   (a) $u \in D(A)$
   (b) $f = Au$
2. Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé.

✎ *Définition: Adjoint*

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire à domaine dense.
L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$, appelé adjoint de A, est l'unique opérateur vérifiant :

$$\langle v, Au \rangle_{F'F} = \langle A^* v, u \rangle_{E'E} \qquad \forall u \in D(A),\ v \in D(A^*)$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur vient principalement du théorème de Hahn-Banach dans sa forme analytique. On pose :

$$D(A^*) = \{v \in F';\ \exists c \geq 0; |\langle v, Au\rangle| \leq c\|u\|\ \forall u \in D(A)\}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F'. On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. On considère l'application $g : D(A) \to \mathbb{R}$ définie pour $v \in D(A^*)$ par

$$g(u) = \langle v, Au\rangle_{F'F}$$

On a

$$|g(u)| \leq c\|u\|\forall u \in E$$

On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach : on sait que g peut être prolongée en une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$|f(u)| \leq c\|u\|\ \forall u \in E$$

Par suite, $f \in E'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense. On pose enfin :

$$A^*v = f$$

Proposition:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.

Démonstration :
Soit $(v_n) \subset D(A^*)$ telle que $v_n \to v$ dans F' et $A^*v_n \to f$ dans E'. Il s'agit de prouver que $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Or :

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle\ \forall u \in D(A)$$

D'où à la limite, il vient :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle$$

Par conséquent, $v \in D(A^*)$ par définition du domaine et $A^*v = f$.

Corollaire:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ (dense). Alors on a :

1. $N(A) = R(A^*)^\perp$
2. $N(A^*) = R(A)^\perp$
3. $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$
4. $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$

Démonstration :
On peut très facilement vérifier les égalités suivantes :

$$N(A) \times \{0\} = G(A) \cap (E \times \{0\}) \tag{9}$$

$$E \times R(A) = G(A) + (E \times \{0\}) \tag{10}$$

$$\{0\} \times N(A^*) = G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \tag{11}$$

$$R(A^*) \times F' = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp \tag{12}$$

En utilisant (3), on a donc directement :

$$\begin{aligned} R(A^*)^\perp \times \{0\} &= (R(A^*) \times F')^\perp \\ &= \left(G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp \\ &= G(A) \cap (E \times \{0\} \\ &= N(A) \times \{0\} \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.
Pour le deuxième, on fait de même :

$$\begin{aligned} \{0\} \times R(A)^\perp &= (G(A) + (E \times \{0\}))^\perp \\ &= G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \\ &= \{0\} \times N(A^*) \end{aligned}$$

Pour les deux derniers résultats, on utilise les deux premiers avec (1) et (2).

2.2 Opérateurs bornés

2.2.1 Opérateurs à image fermée

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec le support de A dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A)$ est fermé
2. $R(A^*)$ est fermé
3. $R(A) = N(A^*)^\perp$
4. $R(A^*) = N(A)^\perp$

Démonstration :
(1) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\})$ fermé dans X (10)
(2) $\Leftrightarrow G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ fermé dans X' (12)
(3) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\}) = \left(G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp\right)^\perp$ (10) et (11)
(4) $\Leftrightarrow (G(A) \cap (E \times \{0\})^\perp = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ (9) et (12)

La conclusion nous vient directement du théorème (5)-(8).

2.2.2 Opérateurs bornés

Théorème:

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné, fermé, avec son domaine dense dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $D(A) = E$
2. A est borné
3. $D(A^*) = F'$
4. A^* est borné

Dans ces conditions, on a :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$$

Démonstration :
(1) $\Rightarrow$ (2) : il suffit d'applquer le théorème du graphe fermé.
(2) $\Rightarrow$ (3) : par définition de $D(A^*)$ donnée après la définition de A^*
(3) $\Rightarrow$ (4) : On applique la proposition précédente sur une caractérisation de A^* fermée et à l'aide du théorème du graphe fermé.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Plus délicat. Notons d'abord que$D(A^*)$ est fermé. En effet, soit $(v_n) \subset D(A^*)$ avec $v_n \to v$ dans F'. On a :

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\|$$

Par conséquent, (A^*v_n) converge vers une limite f. Comme A^* est fermé, $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Dans l'espace $X = E \times F$, on considère les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que

$$G + L = D(A) \times F \text{ et } G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^*)$$

Par conséquent, $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X'. Le théorème (5)-(8) permet de conclure que $G + L$ est fermé, donc que $D(A)$ est fermé. Comme $\overline{D(A)} = E$, on en déduite que $D(A) = E$.

Prouvons maintenant que $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. On a :

$$\langle v, Au\rangle = \langle A^*v, u\rangle \ \forall u \in E, \ \forall v \in F'$$

Donc

$$|\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|v\|\|u\|$$

et

$$\|Au\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A^*\|\|u\|$$

Par suite, $\|A\| \leq \|A^*\|$. Inversement, on a :

$$\|A^*v\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle A^*v, u\rangle| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A\|\|v\|$$

Par conséquent, $\|A^*\| \leq \|A\|$.

3 Topologie faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual. Pour $f \in E'$, on définit $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ tel que $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$. On définit ainsi une famille $(\phi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition: Topologie faible

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\phi_f)_{f\in E'}$ continues, ie la topologie sur E avec un nombre minimal d'ouvert rendant les ϕ_f continues.
On note par $\rightharpoonup$ la convergence pour la topologie faible.

Proposition:

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a :

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in E', \ \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$
2. Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration : 1. Admis

2. Résulte de (1), puisque $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\|$
3. On utilise pour cela le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus suivant :
   Corollaire : Soit G un espace de Banach et soit B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup_{x \in B} \langle f, x \rangle$ est borné. Alors B est borné.
   Il suffit donc de vérifier que pour chaque $f \in E'$, l'ensemble $(\langle f, x_n \rangle)_n$ est borné. Or, pour chaque $f \in E'$, la suite $\langle f, x_n \rangle$ converge vers $\langle f, x \rangle$ (en particulier, elle est bornée). Soit $f \in E'$, on a :
   $$|\langle f, x_n \rangle \leq \|f\| \|x_n\|$$
   et à la limite :
   $$|\langle f, x \rangle \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$
   Par conséquent :
   $$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf \|x_n\|$$
4. On a :
   $$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n - f\| \|x\| + |\langle f, x_n - x \rangle|$$
   On conclut grâce à (1) et (3).

ℹ *Proposition:*

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

4 Opérateurs compacts

4.1 Définitions

Soient E et F deux espaces de Banach.
On désigne par B_E la boule unité centrée à l'origine, ie

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

et par $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F),\ \|f\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Définition: Opérateur compact

On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est compact si l'image de la boule unité par T est relativement compact pour la topologie forte, ie :

$$\overline{T\left(\{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}\right)} \subset F \text{ compact}$$

On désigne par $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F, et $\mathscr{K}(E) = \mathscr{K}(E,E)$.

Théorème:

$\mathscr{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$ (pour la norme $\| \bullet \|_{\mathscr{L}(E,F)}$).

Démonstration :
Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.
Supposons que $(T_n) \subset \mathscr{K}(E,F)$, $T \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \to 0$. Montrons que $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Comme F est complet, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$ dans F.
Pour n assez grand, on a $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $T_n(B_E)$ est relativement compact, on a pour I fini

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Donc par force,

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i\in I} B(f_i, \varepsilon)$$

Définition: Rang fini

On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang fini si $R(T) < \infty$

Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact (car les compacts dans un espace de dimension finie sont les sous-espaces fermés bornés).

Corollaire:

Soit (T_n) une suite d'opérateurs de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathscr{L}(E,F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \to 0$. Alors $T \in \mathscr{K}(E,F)$.

Proposition:

Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ et $S \in \mathscr{K}(F,G)$ (ou $T \in \mathscr{K}(E,F)$ et $S \in \mathscr{L}(F,G)$), alors $S \circ T \in \mathscr{K}(E,G)$.

Théorème: Schauder

Si $T \in \mathscr{K}(E,F)$, alors $T^* \in \mathscr{K}(F',E')$, et réciproquement.

Démonstration :
On aura pour cela besoin du théorème d'Ascoli :
Théorème : Soit K un espace métrique compact et soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$, l'ensemble des fonctions continues sur K.
On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ \forall f \in \mathcal{H}$$

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$.

Montrons que $T^*(B_{F'})$ est relativement compact dans E'. Soit (v_n) une suite de $B_{F'}$. Montrons que l'on peut extraire une sous-suite telle que $T^*(v_{n_k})$ converge. Soit $K = \overline{T(B_E)}$ (métrique compact) et soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K)$ défini par :

$$\mathcal{H} = \{\phi_n : x \in K \to \langle v_n, x\rangle;\ n = 1,2,...\}$$

Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite notée ϕ_{n_k} qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}(K)$. En particulier :

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \phi(Tu)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Donc

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu\rangle - \langle v_{n_l}, Tu\rangle| \xrightarrow[k,l \to +\infty]{} 0$$

ie

$$\|T^* v_{n_k} - T^* v_{n_l}\|_{E'} \xrightarrow[k,l \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, $T^* v_{n_k}$ converge dans E'.

Réciproquement, supposons que $T^* \in \mathscr{K}(F',E')$. D'après ce qui précède, $T^{**} \in \mathscr{K}(E'',F'')$ et en particulier, $T^{**}(B_E)$ est relativement compact dans F''. Or, $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ et F fermé dans F''. Par conséquent, $T(B_E)$ est relativement compact dans F.

4.2 Théorie de Riesz-Fredholm

✑ *Lemme: de Riesz*

Soit E un e.v.n. et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé tel que $M \neq E$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists u \in E;\ \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration :
Soit $v \in E \backslash M$. Comme M est fermé, alors $d = d(v, M) > 0$. On choisit $m_0 \in M$ tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Alors

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

répond à la question. En effet, si $m \in M$, on a :

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \varepsilon$$

puisque

$$m_0 + \|v - m_0\| m \in M$$

✑ *Théorème: Riesz*

Soit E un e.v.n. tel que B_E soit compact. Alors E est de dimension finie.

Démonstration :
Raisonnons par l'absurde. Si E est de dimension infinie, il existe une suite (E_n) de sous-espaces de dimension finie tels que $E_{n-1} \subsetneq E_n$. Grâce au lemme ptécédent, on peut construire une suite (u_n) avec $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. En particulier, $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour $m < n$. Donc la suite (u_n) n'admet aucune sous-suite convergente - ce qui est contraire à l'hypothèse B_E compact.

✑ *Théorème: Alternative de Fredholm*

Soit $T \in \mathscr{K}(E)$. Alors :

1. $N(I - T)$ est de dimension finie
2. $R(I - T)$ est fermé, et plus précisément

$$R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$$

3. $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$
4. dim $N(I - T)$ =dim $N(I - T^*)$

Démonstration :

1. Soit $E_1 = N(I - T)$. Alors $B_{E_1} \subset T(B_E)$ et donc B_{E_1} est compact. D'après le théorème de Riesz précédent, E_1 est de dimension finie.

2. Soit $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Il faut montrer que $f \in R(I-T)$. Posons $d_n = d(u_n, N(I-T))$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie, il existe $(v_n) \subset N(I-T)$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$. On a :

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{13}$$

Montrons que $\|u_n - v_n\|$ reste borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite telle que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. En posant

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$$

on aurait grâce à (13) $w_{n_k} - T(w_{n_k}) \to 0$. En extrayant une sous-sous-suite (encore notée (w_{n_k}) pour simplifier) on peut supposer que $Tw_{n_k} \to z$. Donc $w_{n_k} \to z$ et $z \in N(I-T)$. D'autre part :

$$d(w_n, N(I-T)) = \frac{d(u_n, N(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

puisque $v_n \in N(I-T)$. À la limite on obtient $d(z, N(I-T)) = 1$ - ce qui est absurde, vu que $z \in N(I-T)$. Par conséquent, $\|u_n - v_n\|$ reste borné et comme T est compact, on peut extraire une sous-suite telle que $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$.
On déduit de (13) que $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + l$; posant $g = f + l$, on a $g - Tg = f$, ie $f \in R(I-T)$. On a donc montré que l'opérateur $I - T$ est à image fermée. On peut alors appliquer un théorème précédent sur la fermeture de l'ensemble image, et en conclure :

$$R(I-T) = N(I-T^*)^\perp \text{ et } R(I-T^*) = N(I-T)^\perp$$

3. Prouvons d'abord l'implication $\Rightarrow$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$E_1 = R(I-T) \neq E$$

E_1 est un espace de Banach et $T(E_1) \subset E_1$. Donc $T_{|E_1} \in \mathscr{K}(E_1)$ et $E_2 = (I-T)(E_1)$ est un sous-espace fermé de E_1. De plus, $E_2 \neq E_1$ (puisque (I-T) injectif). En posant $E_n = (I-T)^n(E)$, on obtient ainsi une suite strictement décroissant de sous-espaces fermés. D'après le lemme de Riesz, il existe une suite (u_n) telle que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. On a :

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Notons que si $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ et par conséquent :

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Donc $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$ - ce qui est absurde puisque T est compact. Donc $R(I-T) = E$.

Inversement, supposons que $R(I-T) = E$. Alors par corollaire précédent, $N(I-T^*) = R(I-T)^\perp = \{0\}$. Puisque $T^* \in \mathscr{K}(E')$, on peut appliquer ce qui précède à T^* et conclure que $R(I-T^*) = E'$. Or, par le même corollaire, $N(I-T) = R(I-T^*)^\perp = \{0\}$.

4. Soit d =dim $N(I-T)$ et d^* =dim $N(I-T^*)$. On va d'abord montrer que $d^* \leq d$. Raisons par l'absurde et supposons que $d < d^*$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique dans E ; il exuste donc un projecteur continue P de E sur $N(I-T)$.
D'autre part, $R(I-T) = N(I-T)^\perp$ est de codomension finie d^* et par conséquent, $R(I-T)$ admet dans E un supplémentaire topologique, noté F de dimension d^*. Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\Lambda : N(I-T) \to F$ qui est injective et non surjective. Posons $S = T + (\Lambda \circ P)$; alors $R \in \mathscr{K}(E)$ puisque $\Lambda \circ P$ est de rang fini.
Montrons que $N(I-S) = \{0\}$. En effet, si

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu)$$

alors

$$u - Tu = 0 \text{ et } \Lambda \circ Pu = 0$$

ie $u \in N(I-T)$ et $\Lambda u = 0$, donc $u = 0$
En appliquant (3) à l'opérateur S, on voit que $R(I-S) = E$. Ceci est absurde puisqu'il existe $f \in F$, $f \notin R(\Lambda)$; l'équation $u - Su = f$ n'admet pas de solution.
Par conséquent, on a prouvé que $d^* \leq d$. En appliquant ce résultat à T^*, on voit que

$$\dim\, N(I-T^{**}) \leq \dim\, N(I-T^*) \leq \dim\, N(I-T)$$

Or, $N(I-T^{**}) \supset N(I-T)$ - ce qui permet de conclure que $d = d^*$.

Remarque:

1. L'Alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$. Elle exprime que :
   — **Ou bien** pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une solution unique
   — **Ou bien** l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité (i.e. $f \in N(I-T^*)^{\perp}$).
2. La propriété (3) est familière en dimension finie. Si dim $E < \infty$, un opérateur linéaire de E dans lui-même est injectif si et seulement s'il est surjectif.

4.3 Spectre d'un opérateur - Décomposition spéctrale

4.3.1 Spectre d'un opérateur compact

Définition: Ensemble résolvant, spectre, espace propre

Soit $T \in \mathscr{L}(E)$
L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ dans } E\}$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$$

On dit que λ est valeur propre - et on note $\lambda \in VP(T)$ - si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

$N(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ.

Remarque : Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. En général, l'inclusion est stricte (sauf bien sûr en dimension finie). Il peut exister λ tel que

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(T - \lambda I) \neq E$$

(un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).
Par exemple, prenons dans $E = l^2$, $Tu = (0, u_1, u_2, ...)$ où $u = (u_1, u_2, ...)$ (T est appelé le shift à droite). Alors $0 \in \sigma(T)$ et $0 \notin VP(T)$.

Proposition:

Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$$

Démonstration :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| > \|T\|$. Montrons que $T - \lambda I$ est bijectif - ce qui prouvera $\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$.
Étant donné $f \in E$, l'équation $Tu - \lambda u = f$ admet une solution unique car elle s'écrit $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ et on peut lui appliquer le théorème du point fixe de Banach (en effet, il est simple de vérifier que l'application $u \mapsto \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ définit une contraction : il suffit de majorer par $\frac{\|T\|}{\lambda}$).
Montrons maintenant que $\rho(T)$ est ouvert - ainsi $\sigma(T)$ sera par complémentaire fermé, et donc compact. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Étant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ (voisin de λ_0) et $f \in E$, on cherche à résoudre :

$$Tu - \lambda u = f \tag{14}$$

Or, on peut réécrire (14) $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, ie :

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u] \tag{15}$$

En appliquant à nouveau le théorème du point fixe de Banach, on voit que (15) possède une solution unique si

$$|\lambda - \lambda_0| \; \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$$

On définit donc une boule ouverte autour de λ_0 incluse dans $\rho(T)$. Donc $\rho(T)$ est un ouvert.

Théorème:

Soit $T \in \mathscr{K}(E)$ avec $\dim E = +\infty$. Alors on a :

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \backslash \{0\} = VP(T) \backslash \{0\}$
3. l'une des situations suivantes :
   — ou bien $\sigma(T) = 0$
   — ou bien $\sigma(T) \backslash \{0\}$ est fini
   — ou bien $\sigma(T) \backslash \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

Démonstration :

1. Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est bijectif et $I = T \circ T^{-1}$ est compact. Donc B_E est compact et par force, $\dim E < \infty$ par le théorème de Riesz précédent.
2. Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Montrons que $\lambda \in VP(T)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(T - \lambda I) = \{0\}$. Alors d'après l'alternative de Fredholm, on sait que $R(T - \lambda I) = E$, et donc $\lambda \in \rho(T)$ - ce qui est absurde.
3. On va avoir besoin du lemme suivant :

Lemme:

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \sigma(T) \backslash \{0\}$ une suite de réels tous distincts telle que

$$\lambda_n \to \lambda$$

Alors $\lambda = 0$.

On sait que $\lambda_n \in VP(T)$; soit $e_n \neq 0$ tel que $(T - \lambda_n)e_n = 0$. Soit $E_n = vect\{e_1, ..., e_n\}$. Montrons que $\forall n \; E_n \subsetneq E_{n+1}$.
Il suffit de vérifier que, pour tout n, les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont linéairement indépendants. Raisonnons par récurrence sur n. Admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Alors :

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Par suite, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$, et donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$ - ce qui est absurde. Donc $E_n \subsetneq E_{n+1}$ pour tout n.

D'autre part, il est clair que $(T-\lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$. En appliquant le lemme de Riesez, on construit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$. Soient $2 \leq m < n$ de sorte que

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$$

On a :

$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Si $\lambda_n \to \lambda$, on aboutit à une contradiction, puisque (Tu_n) admet une sous-suite convergente.

Retour à la démonstration du théorème : Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

est vide ou fini (s'il contenait une infinité de points distincts, on aurait un point d'accumulation - puisque $\sigma(T)$ est compact - et on aboutirait à une contradiction avec le lemme démontré précédemment). Lorsque $\sigma(T)\backslash\{0\}$ contient une infinité de points distincts, on peut donc les ranger en une suite qui tend vers 0.

4.3.2 Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints

On suppose dans la suite que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $T \in \mathscr{L}(H)$. En identifiant H et H' (grâce au théorème de représentation de Riesz), on peut considérer que $T^* \in \mathscr{L}(H)$.

Définition: Autoadjoint

On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$, ie

$$(Tu, v) = (u, Tv) \ \forall u, v \in H$$

Proposition:

Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose :

$$m = \inf_{u\in H,\ |u|=1} (Tu, u) \text{ et } M = \sup_{u\in H,\ |u|=1} (Tu, u)$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, avec $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Démonstration :
Soit $\lambda > M$; montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On a :

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \ \forall u \in H$$

et par conséquent

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \ \forall u \in H \text{ avec } \alpha > 0$$

Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on voit que $\lambda I - T$ est bijectif.
Montrons que $M \in \sigma(T)$. La forme $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ est bilinéaire, symétrique et

$$a(v, v) \geq 0 \ \forall v \in H$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme $a(u,v)$, il vient :

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}}(Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}} \ \forall u, v \in H$$

(Il faut m'expliquer où est CS là... ?)
D'où il résulte en particulier

$$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \ \forall u \in H \tag{16}$$

Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| = 1$ et $(Tu_n, u_n) \to M$. Grâce à (16), on voit que $|Mu_n - Tu_n| \to 0$ et donc $M \in \sigma(T)$ (car si $M \in \rho(T)$, alors $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$)
Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$

Corollaire:

Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.

Démonstration :
D'après la proposition précédente, on sait que

$$(Tu, u) = 0 \ \forall u \in H$$

Il en résulte que :

$$2(Tu, v) = (T(u+v), u+v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \ \forall u, v \in H$$

Donc $T = 0$

Théorème: Diagonalisation

On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact.
Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Démonstration :
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distincte de T, excepté 0 ; on note $\lambda_0 = 0$.
On pose $E_0 = N(T)$ et $E_n = N(T - \lambda_n I)$; rappelons que

$$0 \leq dim E_0 \leq \infty \text{ et que } 0 < dim E_n < \infty$$

Montrons d'abord que H est comme hilbertienne des $(E_n)_{n\geq 0}$:

1. Les $(E_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux. En effet, si $u \in E_m$ et $v \in E_n$ avec $m \neq n$ alors

   $$Tu = \lambda_m u \text{ et } Tv = \lambda_n v$$

   et

   $$(Tu, v) = \lambda_m(u, v) = (u, Tv) = \lambda_n(u, v)$$

   Donc $(u, v) = 0$
2. Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_{n\geq 0}$. Vérifions que F est dense dans H.
   Il est claire que $T(F) \subset F$. Il s'en suit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$; en effet, si $u \in F^\perp$ et $v \in F$, alors $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$. L'opérateur $T_0 = T_{|F}$ est autoadjoint compact. D'autre part, $\sigma(T_0) = \{0\}$; en effet, si

   $$\lambda \in \sigma(T_0)\backslash\{0\}, \text{ alors } \lambda \in VP(T_0)$$

   et donc il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tel que $T_0 u = \lambda u$. Par conséquent, λ est l'une des valeurs propres λ_n de T et $u \in F^\perp \cap E_n$. Donc $u = 0$, ce qui est absurde.
   Il résulte du corollaire précédent que $T_0 = 0$; par suite

   $$F^\perp \subset N(T) \subset F \text{ et } F^\perp = \{0\}$$

   Donc F est dense dans H.
   Enfin, on choisit dans chaque E_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

5 Théorème de Hille-Yosida

5.1 Opérateurs maximaux monotones

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert.

Définition: Maximal et monotone

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone (ou accrétif ou dissipatif) si

$$(Av, v) \geq 0 \ \forall v \in D(A)$$

A est maximal monotone si de plus, $R(I + A) = H$, ie

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A); u + Au = f$$

Proposition:

Soit A un opérateur maximal monotone. Alors :

1. $D(A)$ est dense dans H
2. A est fermé
3. Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H, et $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné de norme $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$

Démonstration :

1. Soit $f \in H$ tel que $(f, v) = 0$ pour tout $v \in D(A)$. Vérifions que $f = 0$. En effet, il existe $v_0 \in D(A)$ tel que $v_0 + Av_0 = f$. On a :

$$0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2$$

Donc $v_0 = 0$ et par suite $f = 0$.

2. Notons d'abord que pour tout $f \in H$ il existe $u \in D(A)$ unique tel que $u + Au = f$. En effet, si $\tilde{U}$ désigne une autre solution, alors on a $(u - \tilde{u}) + A(u - \tilde{u}) = 0$. Prenant le produit scalaire avec $(u - \tilde{u})$ et appliquant la monotonie de A, on voit que $u - \tilde{u} = 0$.
D'autre part, on a $|u|^2 + (Au, u) = (f, u)$ et par suite, $|u| \leq |f|$. L'opérateur $f \mapsto u$ noté $(I + A)^{-1}$ est donc un opérateur linéaire borné de H dans H et $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$.
Montrons que A est fermé. Soit $(u_n) \subset D(A)$ une suite telle que $u_n \to u$ et $Au_n \to f$. Il faut vérifier que $u \in D(A)$ et que $Au = f$. On a $u_n + Au_n \to u + f$ et donc

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + f)$$

Par conséquent, $u = (I + 1)^{-1}(u + f)$, ie $u \in D(A)$ et $u + Au = f$.

3. Supposons que pour un certain $\lambda_0 > 0$, on ait $R(I + \lambda_0 A) = H$. On va montrer que pour tout $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, on a $R(I + \lambda A) = H$.
Commençons par notrer que pour tout $f \in H$ il existe $u \in D(A)$ unique tel que $u + \lambda_0 Au = f$; l'opérateur $f \mapsto u$ est noté $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ et l'on a $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$. On cherche à résoudre l'équation

$$u + \lambda Au = f \text{ avec } \lambda > 0$$

On réécrit l'équation sous la forme

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

Ou encore :

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right] \tag{17}$$

On voit alors que si $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$, ie $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, alors (17) admet une solution grâce au théorème du point fixe de Banach.
Si A est maximal monotone, alors $I + A$ est surjectif. D'après ce qui précède, $I + \lambda A$ est surjectif pour $\lambda > \frac{1}{2}$ donc aussi pour $\lambda > \frac{1}{4}$, etc. Par récurrence on voit que $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Définition: Résolvante et régularisée

Soit A un opérateur maximal monotone. On pose, pour tout $\lambda > 0$,

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \text{ et } A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

J_λ est la résolvante de A et A_λ est la régularisée Yosida de A.

On retiendra que $\|J_\lambda\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$.

Proposition:

Soit A un opérateur maximal monotone. On a :

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$ $\forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$
2. $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$ $\forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
3. $|A_\lambda v| \leq |Av|$ $\forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
4. $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ $\forall v \in H$
5. $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ $\forall v \in D(A)$
6. $(A_\lambda v, v) \geq 0$ $\forall v \in H$, $\forall \lambda > 0$
7. $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v|$ $\forall v \in H$, $\forall \lambda > 0$

Démonstration :

1. Équivaut à $v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$, qui résulte de la définition de J_λ
2. On a :

$$Av = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

et donc

$$J_\lambda Av = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v)$$

3. Résulte de 2)
4. Supposons d'abord que $v \in D(A)$. Alors

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leq \lambda |Av|$$

Donc $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$.

Passons au cas général. Soit $v \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{D(A)} = H$, il existe $v_1 \in D(A)$ tel que $|v - v_1| \leq \varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\ &\leq 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \\ &\leq 2\varepsilon + |J_\lambda v_1 - v_1| \end{aligned}$$

Par conséquent
$$\limsup_{\lambda\to 0} |J_\lambda v - v| \leq 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$$
et donc
$$\lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda v - v| = 0$$

5. Appliquer 2. et 4.
6. On a
$$\begin{aligned}(A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v)\\ &= \lambda|A_\lambda v|^2 + (A_\lambda(J_\lambda v), J_\lambda v)\end{aligned}$$
Donc
$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0$$
7. Viens de la dernière inégalité et de Cauchy-Schwarz.

5.2 Problème d'évolution

5.2.1 Existence et unicité

On s'intéresse au problème général suivant :
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au &= 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{PbEv}$$
On rappelle le résultat classique suivant :

Théorème: Cauchy-Lipschitz-Picard

Soit E un espace de Banach et soit $F : E \to E$ une application telle que
$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\| \ \forall u, v \in E \ (L \geq 0)$$
Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in \mathscr{C}^1([0, \infty[; E)$ unique telle que
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= Fu \quad \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{CLP}$$

Théorème: Hille-Yosida

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction
$$u \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathscr{C}([0, +\infty[; D(A))$$
unique vérifiant (PbEv). De plus, on a
$$|u(t) \leq |u_0| \text{ et } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \ \forall t \geq 0$$

Remarque:

1. Soit $t \geq 0$; on considère l'application linéaire $S_A(t) : u_0 \mapsto u(t)$ de $D(A)$ dans $D(A)$ où $u(t)$ est la solution de (PbEv). Étant donné que $|S_A(t)u_0| \leq |u_0|$, on peut prolonger $S_A(t)$ par continuité et densité en un opérateur linéaire continue de H dans lui-même, qu'on désigne toujours par $S_A(t)$. On vérifie facilement que $S_A(t)$ possède les propriétés suivantes :
   (a) Pour chaque $t \geq 0$, $S_A(t) : H \to H$ est un opéarateur linéaire continue et $S_A(t)_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$
   (b) $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \geq 0$ et $S_A(0) = Id$
   (c) $\lim_{t \to 0^+} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0$ $\forall u_0 \in H$

   Une famille $\{S(T)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\mathscr{L}(H)$ définie pour chaque valeur du paramètre $t \geq 0$ et vérifiant ces trois points est par définition un semi-groupe continu de contractions.
   On montre qu'inversement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$, il existe un opérateur A maximal monotone unique tel que $S(T) = S_A(t)$ pour tout $t \geq 0$.
   On établit ainsi une correspondance bijective entre les opérateurs maximaux monotones et les semi-groupes continus de contraction.
2. Soit A un opérateur maximal monotone et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u &= 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

   se ramène très simplement à la résolution de (PbEv) grâce à l'artifice classique suivant. On pose

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

   Alors v vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av &= 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\\ v(0) &= u_0 \end{cases} \tag{18}$$

5.2.2 Régularité

Définition:

On définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1});\ Av \in D(A^{k-1})\},\ k \text{ entier } \geq 2$$

On vérifie aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} (A^j u, A^j v)$$

Théorème:

On suppose que $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (PbEv) vérifie de plus :

$$u \in \mathscr{C}^{k-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \ \text{ pour } j = 0, 1, ..., k$$

5.2.3 Dans les espaces de Banach

Soit E un espace de Banach.

Définition: m-accrétif

Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est m-accrétif si $\overline{D(A)} = E$ et si pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif de $D(A)$ sur E, avec $\|(I+\lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq 1$

Théorème: Hille-Yosida dans les espaces de Banach

Soit A un opérateur m-accrétif dans E. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[; H) \cap \mathscr{C}([0,+\infty[; D(A))$$

unique vérifiant (PbEv). De plus, on a

$$|u(t) \leq |u_0| \text{ et } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \ \forall t \geq 0$$

Théorème:

On suppose que A est m-accrétif. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, la solution u de (PbEv) est donnée par la formule exponentielle

$$u(t) = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-1}\right]^n u_0$$

Deuxième partie

Mesures

1 Mesures - premières propriétés

1.1 σ-algèbre ou tribu

Définition: Tribu

Une algèbre $\mathcal{A}$ est un ensemblede parties d'un espace Ω telle que :

1. Ω et $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ou tribu si pour tout suite $A_n \in \mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Définition: Espace mesurable

Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est un ensemble Ω munie d'une tribu $\mathcal{A}$.

Exemples de tribus :

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω
3. Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque indexée sur un ensemble I (fini ou infini, dénombrable ou non), alors $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu.

Définition:

Si $\mathcal{C}$ est un ensemble quelconque de parties de Ω, on pose :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \sigma - algbrede \Omega,\ \mathcal{C} \subset A} \mathcal{A}$$

$\sigma(\mathcal{C})$ est une σ-algèbre de Ω, appelée σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$. C'est la plus petite tribu au sens de l'inclusion contenant $\mathcal{C}$.

1.2 Mesures

Définition:

Soit μ une fonction définie sur une classe $\mathcal{A}$ de partie de Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$.

1. μ est additive si pour tout suite finie d'ensembles $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

2. μ est σ-additive si pour tout suite d'ensembles $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proposition:

Soit μ une fonction définie sur une classe $\mathcal{A}$ de partie de Ω à valeur dans $[0, +\infty]$

1. Si μ est additive ou σ-additive, alors μ est monotone, ie :

$$\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

2. Si μ est additive, alors μ est sous-additive, ie pour toute suite finie d'ensembles $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

3. Si μ est σ-additive, alors μ est σ-sous-additive, ie pour toute suite d'ensembles $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proposition:

Soit μ une fonction σ-additive réelle (en excluant un des infinis au moins) ou positive, définie sur une σ-algèbre $\mathcal{A}$ (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

1. Continuité à gauche : si $A_1 \subset A_2 \subset ...$ est une suite croissante de $\mathcal{A}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

2. Continuité à droite : si $A_1 \supset A_2 \supset ...$ est une suite décroissante de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ et telle que l'un des A_n soit de mesure finie, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$$

Contre-exemple dans le cas où la mesure de tout A_n n'est pas finie : On prend dans $\mathbb{R}$: $A_n = [n, +\infty[$. On a pour tout n $\mu(A_n) = +\infty$. Alors $\bigcap_n A_n = \emptyset$, et

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = 0$$

Donc

$$\mu(A_n) \not\to \mu\left(\bigcap_n A_n\right)$$

Définition:

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω :

1. Une mesure réelle μ sur $\mathcal{A}$ est une fonction σ-additive telle que $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$
2. Une mesure positive μ sur $\mathcal{A}$ est une fonction σ-additive telle que $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ et telle que $\mu(\emptyset) = 0$

On dit que μ est σ-finie si de plus, on a

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ avec } \Omega_n \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(\Omega_i) < \infty$$

Définition:

Un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un ensemble Ω munie d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ et d'une mesure μ positive définie sur $\mathcal{A}$. Si $\mu(\Omega) = 1$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un espace probabilisé.

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Une partie N de Ω est dite négligeable lorsqu'il existe un $A \in \mathcal{A}$ contenant N et de mesure nulle.
2. μ est une mesure complète lorsque tout ensemble négligeable pour μ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

Définition:

Soit μ une fonction positive définie sur une partie $\mathcal{A}$ d'un ensemble Ω. On appelle mesure extérieure la fonction définie pour tout sous-ensemble A de Ω par :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n);\ A_n \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

Propriété: de la mesure extérieure

1. μ^* est monotone
2. μ^* est σ-sous-additive

Remarque : En général, μ^* n'est pas additive.

Définition:

Soit μ une fonction positive définie sur une partie $\mathcal{A}$ d'un ensemble Ω. Un sous-ensemble A de Ω est dit μ-mesurable si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$

où $A \Delta A_\varepsilon = (A \cup A_\varepsilon) \backslash (A \cap A_\varepsilon)$
On note $\mathcal{A}_\mu$ la classe des ensembles μ-mesurable.

Théorème:

Soit μ une fonction réelle positive, σ-additive, définie sur une algèbre $\mathcal{A}$. Alors :

1. On a $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_\mu$ et la mesure extérieure μ^* coïncide avec μ sur $\mathcal{A}$
2. La famille d'ensemble $\mathcal{A}_\mu$ est une σ-algèbre sur Ω
3. La restriction de μ^* à $\mathcal{A}_\mu$ est σ-additive et est une mesure complète
4. La fonction μ^* est l'unique extension positive σ-additive à $\sigma(\mathcal{A})$ (et aussi à $\mathcal{A}_\mu$).

Proposition:

Soit μ une fonction réelle σ-additive, définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ et $A \subset \Omega$. Alors il y a équivalence des propositions :

1. A est μ-mesurable ($A \in \mathcal{A}_\mu$)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$)
3. Il existe deux ensembles mesurables A', $A'' \in \sigma(\mathcal{A})$ tels que
$$A' \subset A \subset A'' \text{ tels que } \mu^*(A'' \backslash A') = 0$$
4. $\mu^*(A) + \mu^*(\Omega \backslash A) = \mu^*(\Omega)$
5. Pour tout $E \subset \Omega$,
$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \backslash A) = \mu^*(E)$$

1.3 Décomposition de Hahn

Définition:

Soit $A \in \mathcal{A}$. On dit que $A \geq 0$ si $\forall B \subset A,\ B \in \mathcal{A},\ \mu(B) \geq 0$.

Théorème: Décomposition de Hahn

Soit μ une mesure σ-additive à valeurs réelles définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors il existe des ensembles disjoints Ω^+ et Ω^- de $\mathcal{A}$ tels que $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$ et tels que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(A \cap \Omega^+) \geq 0 \text{ et } \mu(A \cap \Omega^-) \leq 0$$

Démonstration :
On suppose que μ ne prend pas comme valeur $-\infty$ (sinon, il suffirait de faire le raisonnement avec $-\mu$).
On commence par le lemme suivant :
Lemme : On suppose que $D \in \mathcal{A}$ est tel que $\mu(D) \leq 0$. Alors il existe $A \subset D$, $A \leq 0$, tel que $\mu(A) \leq \mu(D)$.
En effet, définissons $A_0 = D$. En considérant que pour un certain entier n, $A_n \subset D$ a été construit, on pose

$$t_n = \sup\{\mu(B);\ B \in \mathcal{A}, B \subset A_n\}$$

Ce supremum pourrait être a priori infini. Puisque B pourrait éventuellement être l'ensemble vide, et que $\mu(\emptyset) = 0$, on a $t_n \geq 0$. Par définition de t_n, il existe $B_n \subset A_n \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(B_n) \geq \min\left\{1, \frac{t_n}{2}\right\}$$

On pose $A_{n+1} = A_n \backslash B_n$ pour terminer cette phase de construction. Soit

$$A = D \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

Puisque les ensembles $(B_n)_{n\geq 0}$ sont des ensembles disjoints de D, il résulte de la σ-additivité de la mesure signée μ que

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(D) - \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\min\left\{1, \frac{t_n}{2}\right\}}_{\geq 0}$$

Cela montre que $\mu(A) \leq \mu(D)$.
Supposons par l'absurde que A n'est pas un ensemble négatif (ie $\neg(A \leq 0)$). Il existe donc $B \in \mathcal{A}$, sous-ensemble de A, tel que $\mu(B) > 0$. Alors $t_n \geq \mu(B)$ pour tout n, et donc la série à droite de l'égalité doit diverger. Cela implique que $\mu(A) = -\infty$, ce qui est exclu. Donc A doit être un ensemble négatif, ie $A \leq 0$.

Construction de la décomposition : Soit $\Omega_0^- = \emptyset$. Constructivement, pour Ω_n^- donné, on définit

$$s_n = \inf\{\mu(D);\ D \in \mathcal{A}, D \subset \Omega \backslash \Omega_n^-\}$$

Cet infimum pourrait a priori être $-\infty$. Puisque l'ensemble vide est un D possible dans la définition de l'infimum, et que $\mu(\emptyset) = 0$, on a $s_n \leq 0$. Donc il existe $D_n \in \mathcal{A}$, $D_n \subset \Omega \backslash \Omega_n^-$ et

$$\mu(D_n) \leq \max\left\{\frac{s_n}{2}, -1\right\} \leq 0$$

D'après le lemme précédent, il existe $A_n \subset D_n$, $A_n \leq 0$ tel que $\mu(A_n) \leq \mu(D_n)$. On définit $\Omega_{n+1}^- = \Omega_n^- \cup A_n$ pour terminer la phase de construction.
Soit

$$\Omega^- = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Puisque les $(A_n)_{n\geq 0}$ sont disjoints, on a pour tout $B \subset \Omega^-$ dans $\mathcal{A}$ que

$$\mu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B \cap A_n)$$

par la σ-additivité de μ. En particulier, cela montre que $\Omega^- \leq 0$.
Soit $\Omega^+ = \Omega \backslash \Omega^-$. Si Ω^+ n'était pas un ensemble positif (ie $\neg(\Omega^+ \geq 0)$), il existerait un sous-ensemble $D \subset \Omega^+$ dans $\mathcal{A}$ tel que $\mu(D) < 0$. Alors $s_n \leq \mu(D)$ pour tout n et

$$\mu(\Omega^-) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max\left\{\frac{s_n}{2}, -1\right\} = -\infty$$

ce qui est exclu. Donc $\Omega^+ \geq 0$.

Preuve de l'unicité : Supposons que $(\tilde{\Omega}^-, \tilde{\Omega}^+)$ soit une autre décomposition de Hahn de Ω. Alors $\Omega^+ \cap \tilde{\Omega}^- \geq 0$ et aussi ≤ 0. Donc tout sous-ensemble mesurable de cet ensemble sera de mesure nulle. On peut appliquer le même raisonnement à $\Omega^- \cap \tilde{\Omega}^+ \geq 0$. Or

$$(\Omega^+ \Delta \tilde{\Omega}^+) \cup (\Omega^- \Delta \tilde{\Omega}^-) = (\Omega^+ \cap \tilde{\Omega}^-) \cup (\Omega^- \cap \tilde{\Omega}^+)$$

Cela complète donc la démonstration.

Corollaire:

Sous les hypothèses du théorème précédent, on pose pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega^-) \text{ et } \mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+)$$

1. μ^+ et μ^- sont des mesures positives à valeurs réelles, σ-additives et on a l'égalité pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$$

2. L'enseble des valeurs de μ est borné :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \ |\mu(A)| \leq M = \max\{\mu^+(\Omega), \mu^-(\Omega)\}$$

Définition:

Les mesures μ^+ et μ^- sont appelées la partie positive et négative de μ. La mesure

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

est appelée la variation totale de μ.
La quantité

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega)$$

est appelée la norme en variation de μ.

Remarque:

1. La décomposition $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée la décomposition de Jordan ou de Hahn-Jordan de μ
2. On peut définir les mesures μ^+ et μ^- par la formule

$$\begin{array}{rcl} \mu^+(A) & = & \sup\{\mu(B); \ B \subset A, B \in \mathcal{A}\} \\ \mu^-(A) & = & \sup\{-\mu(B); \ B \subset A, B \in \mathcal{A}\} \end{array}$$

3. On a $\|\mu\| \leq 2\sup\{|\mu(A)|; A \in \mathcal{A}\} \leq 2\|\mu\|$

2 Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Dnas tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

2.1 Fonctions mesurables

Définition:

Une fonction mesurable sur Ω est une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que l'image réciproque de tout borélien de $\mathbb{R}$ est mesurable. On a les mêmes définition pour une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^N$.
Dans le cas de $\mathbb{R}$, c'est équivalent à :

$$\forall c \in \mathbb{R},\ \{x \in \Omega;\ f(x) < c\} \in \mathcal{A}$$

Propriété:

On a les propriétés suivantes :
— Si f est mesurable et ϕ continue, alors $\phi(f)$ est mesurable.
— Si g est mesurable et $g(x) \neq 0\ \forall x \in \Omega$, alors ${}^1/_g$ est mesurable.
— Si f et g sont mesurables, alors $f+g$, fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont mesurables.
— Si (f_n) sont mesurables, alors $\sup_{n \geq 0} f_n$, $\inf_{n \geq 0} f_n$, $\limsup_{n \to +\infty} f_n$ et $\liminf_{n \to +\infty} f_n$ sont mesurables.
— Sin $f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable.

Définition:

Soit A une partie de Ω. La fonction indicatrice ou fonction caractéristique de A et est notée 1_A est la fonction définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

1_A est mesurable si et seulement si A est mesurable et on pose

$$\mu(A) = \int_\Omega 1_A d\mu$$

Définition:

Une fonction étagée s est définie par :

$$s = \sum_k a_k 1_{A_k}$$

où les ensembles A_k sont mesurables et $a_k \in \mathbb{C}$. On définit alors l'intégrale de s par :

$$\int_\Omega s d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k)$$

2.2 Intégrale de Lebesgue

Définition:

Si f une fonction positive mesurable définie sur Ω. On pose :

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{s \ \acute{e}tage,\ s\leq f} \int_\Omega s d\mu$$

Définition:

Soit f une fonction mesurable définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

— On dit que f est intégrable si $\int_\Omega |f| d\mu < \infty$

— Si f est à valeurs réelles, on pose $f = f^+ - f^-$ et

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

— Si f est à valeurs complexes et $f = g + ih$ avec g et h à valeurs réelles,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu + i \int_\Omega h d\mu$$

Propriété:

— Si f et g sont des fonctions intégrables et a et b sont des nombres complexes, alors $af + bg$ est intégrable et $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$

— Si $f \leq g$ aors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

— Deux fonctions qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure μ nulle ont la même intégrale : si $\mu(\{f(x) \neq g(x)\}) = 0$, alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable, et dans ce cas, $\int f d\mu = \int g d\mu$

Théorème: Convergence monotone

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives telles que pour tout n, $f_n \leq f_{n+1}$. On pose $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$. Alors on a

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int d\mu \leq \infty$$

✑ *Lemme: de Fatou*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. On pose $f = \liminf_{n\to+\infty} f_n$. On a alors

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \infty$$

✑ *Théorème: convergence dominée*

Soit $(f_n)_n$ une suite fonctions mesurables. On suppose que :

1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ p.p.
2. $\exists g$ intégrable telle que pour tout n,
$$|f_n(x) \leq g(x) \text{ p.p.}$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

2.3 Inégalités

Inégalité de convexité Soit f une fonction convexe, $(x_1, ..., x_n)$ une famille de réels dans l'intervalle de définition de f, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une famille de réels de l'intervalle $[0, 1]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Alors on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Inégalité de Young Pour $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 1$, $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$ab \leq \frac{(\varepsilon a)^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon^q}$$

Inégalité de Jensen Si $\mu(\Omega) = 1$, g est une fonction à valeurs réelles intégrable et si ϕ est une fonction convexe réelle mesurable, alors :

$$\phi\left(\int_\Omega g d\mu\right) \leq \int_\Omega \phi \circ g d\mu$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

— Dans $(E, \langle \bullet, \bullet \rangle)$, espace préhilbertien réelle ou complexe :

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$$

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement indépendants

— Dans $\mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

— Dans $L^2(\Omega)$:

$$\left|\int f\bar{g}\right| \leq \left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et le reste, j'ai la flemme.