Calcul différentiel

18 septembre 2014

Table des matières

1 Calcul variationnel

Ici : recherche d'optimum non plus dans un espace de réels, mais dans un espace de fonctions. On cherche y^* tel que :

$$I(y^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} I(y)$$

Considérons $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Parmis tous les y, dérivable et tel que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$, trouver la courbe minimisant :

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x))dx$$

Théorème: Euler-Lagrange

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Idée de la démonstration : On prend y minimisant I, et on pose $Y = y + \varepsilon\eta$, avec $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, puis on reprend I dépendant de ε. I est minimal pour $\varepsilon = 0$, on dérive, on trouve ce qu'il faut !

Définition:

g est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange si g est contante le long des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange.

Propriété:

1. Si $L = L(x, y')$, alors $\frac{\partial L}{\partial y'} = C$
2. Si $L = L(y, y')$ alors $L - y'\frac{\partial L}{\partial y} = C$.