

# Automatique non linéaire

24 novembre 2014

## Table des matières

<b>1 Outils mathématiques</b>	<b>2</b>
1.1 Difféomorphismes . . . . .	2
1.2 Application tangente . . . . .	3
1.3 Crochet de Lie . . . . .	4
<b>2 Controlabilité des systèmes</b>	<b>5</b>
2.1 Les systèmes linéaires . . . . .	5
2.2 Systèmes non linéaires . . . . .	6
2.2.1 Algèbre de Lie et variété . . . . .	6
2.2.2 Distribution . . . . .	8
2.2.3 Orbites . . . . .	9
2.3 $R_T(x_0)$ . . . . .	10
2.4 Controlabilité totale . . . . .	11
2.4.1 Problèmes de contraintes . . . . .	12
2.4.2 Stabilité à la Poisson . . . . .	12
<b>3 Linéarisation</b>	<b>13</b>
3.1 Linéarisation dans l'espace d'état . . . . .	13
3.2 Linéarisation par bouclage . . . . .	14
3.3 Contrôlabilité . . . . .	15
<b>4 Observabilité</b>	<b>15</b>

# Introduction

On s'intéresse aux équations de la forme :

$$\Pi : \begin{cases} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$u \in \mathbb{R}^m$  le contrôle

$y \in \mathbb{R}^p$  les observations

$x \in \mathbb{R}^n$  l'état.

La solution à cette équation est en générale lisse, de dimension finie mais elle n'est pas uniquement déterminée par la condition initiale  $x_0$ .

Comment choisir  $u$  ?

- $u = u(t)$  :  $\Pi$  est une équation différentielle non autonome. On peut avoir unicité des solutions. Contrôle en boucle ouverte.
- $u = u(x)$  :  $\Pi$  est une équation différentielle autonome, unicité des solutions. Contrôle en boucle fermée / par bouclage / par feedback.

## 1 Outils mathématiques

### 1.1 Difféomorphismes

✦ *Définition:*

$h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  ouvert est  $\mathcal{C}^\infty$  si  $\frac{\partial^i h}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$ ,  $i = \sum_{j=1}^n i_j$  existent et sont continues pour tout n-uplet  $(i_j)_j$ .

Si maintenant,  $h : X \rightarrow Y$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  ouvert,  $h$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si  $h_1, \dots, h_m$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .

✦ *Définition: Difféomorphisme*

$h$  est un difféomorphisme si :

- $h$  est injective :  $x \neq \tilde{x} \Rightarrow h(x) \neq h(\tilde{x})$
- $h$  est surjective :  $\forall y \in Y, \exists x \in X; y = h(x)$
- $h$  et  $h^{-1}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

✦ *Définition: Difféomorphisme local*

$h : X \rightarrow Y$  est un difféomorphisme local autour de  $x_0$  et  $y_0$  s'il existe  $X_{x_0}$  et  $Y_{y_0}$ , deux voisinages ouverts, tels que :

- $h(X_{x_0}) = Y_{y_0}$
- $h|_{X_{x_0}}$  est un difféomorphisme.

∞ *Théorème:*

Supposons  $h : X \rightarrow Y$  tel que  $h(x_0) = y_0$  et :

1.  $h \in \mathcal{C}^\infty$
2.  $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0)$  inversible

alors  $h$  est un difféomorphisme local en  $x_0$  et  $y_0$ .

## 1.2 Application tangente

### ✦ Définition: Vecteur tangent

Soit  $\gamma : ]-\varepsilon; \varepsilon[ \rightarrow X$ . Le vecteur tangent à  $\gamma(t)$  en  $p = \gamma(0)$  est  $\dot{\gamma}(0)$ .

### ✦ Définition: Espace tangent en $p$

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On appelle espace tangent en  $p$  :

$$T_p X = \{ \dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p \}$$

### ✦ Définition: Champ de vecteurs

Un champ de vecteur  $f$  sur  $X$  est :

$$p \in X \mapsto f(p) \in T_p X$$

On note :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

A chaque  $f$ , un champ de vecteurs, on associe l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ .  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . On va noter  $V^\infty(X)$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$ .

Soit  $\gamma_t(x_0) = x(t, x_0) = x_t(x_0)$  la solution passant par  $x_0$ .

### ¶ Proposition:

$\gamma_t$  satisfait :

1.  $\gamma_0 = id$
2.  $\gamma_s \circ \gamma_t(x_0) = \gamma_{s+t}(x_0) = \gamma_{t+s}(x_0)$
3.  $\gamma_t^{-1} = \gamma_{-t}$

On prend à présent  $h$ , un difféomorphisme :

$$h : X \rightarrow Y, \dim X = \dim Y = n$$

$h \circ \gamma$  est une courbe dans  $Y$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(0) &= Dh(\gamma(0)) \frac{d}{dt} \gamma(0) \\ &= Dh(p)v\end{aligned}$$

Si on note  $w$  le vecteur tangent dans  $Y$ , on a :

$$w = \frac{\partial h}{\partial x} v \in T_{h(p)}Y$$

$$w_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} v_j$$

En partant de  $h$ , non linéaire, on arrive à  $Dh = \frac{\partial h}{\partial x} = h_*$  une application linéaire qui transforme  $T_p X$  en  $T_{h(p)} Y$ . Cette application linéaire est appelée application tangente.

⇒ *Lemme:*

On a :

$$(\phi_* f)(p) = D\phi(\phi^{-1}(p))f(\phi^{-1}(p))$$

¶ *Proposition:*

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}\dot{x} = f(x) & \xrightarrow{\phi_* \text{ transforme}} & \dot{y} = (\phi_* f)(y) \\ \downarrow \text{résolution} & & \downarrow \text{résolution} \\ x(t) & \xrightarrow{\phi \text{ transforme}} & y(t) = \phi(x(t))\end{array}$$

¶ *Proposition:*

Soit  $\gamma_t$  le flot de  $\dot{x} = f(x)$ . Alors  $\sigma_t$ , le flot de  $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$  est :

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$

**Idee de la démonstration :** On vérifie simplement que le flot  $\sigma_t$  vérifie bien l'équation  $\frac{d}{dt}\sigma_t = (\phi_* f)(\sigma_t)$ .

### 1.3 Crochet de Lie

✦ *Définition:*

On note  $V^\infty(X)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur  $X$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

✦ *Définition: Crochet de Lie*

Soit  $f, g \in V^\infty(X)$ . On définit :

$$[f, g](p) = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{-t}^f)_* g(p) \Big|_{t=0}$$

⇨ *Lemme:*

On a également, en coordonnées  $x = (x_1, \dots, x_n)$  :

$$[f, g](p) = \frac{\partial g}{\partial x}(p) f(p) - \frac{\partial f}{\partial x}(p) g(p)$$

## 2 Controlabilité des systèmes

$\dot{x} = u_1 f(x) + u_2 g(x)$ , où  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ , ouvert.  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ .

📌 *Proposition:*

$$\forall p \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}, \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

⇨ *Lemme:*

Soient  $f, g \in V^\infty(X)$  et  $\phi$  un difféomorphisme. Alors :

$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$

### 2.1 Les systèmes linéaires

$\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ .

On note  $R_T(x_0)$  l'ensemble des points accessibles depuis  $x_0$  au temps  $T$ .

$R(x_0) = \bigcup_{t>0} R_t(x_0)$  : ensemble d'accessibilité depuis  $x_0$ .

⇨ *Théorème:*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $R(0) = \mathbb{R}^n$
2.  $\exists T > 0; R_T(0) = \mathbb{R}^n$

3.  $\forall T > 0, R_T(0) = \mathbb{R}^n$
4.  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R(x_0) = \mathbb{R}^n$
5.  $\exists T > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R_T(x_0) = \mathbb{R}^n$
6.  $\forall T > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R_T(x_0) = \mathbb{R}^n$
7.  $\text{Rg}(B, \dots, A^{n-1}B) = n$

## 2.2 Systèmes non linéaires

On note **II** le problème :

$$\dot{x} = F(x, u), \quad x \in X, \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{II})$$

$U$  est la classe des contrôles admissibles.

$$PC_U \subset U \subset \mathcal{M}_U$$

Où  $PC_U$  est l'ensemble des contrôles constants par morceaux à valeur dans  $U$  et  $\mathcal{M}_U$  est l'ensemble des contrôles mesurables à valeur dans  $U$ .

$$R_T(x_0) = \{x(T, u, x_0), u \in U([0, T])\}$$

où  $x(T, u, x_0)$  est la trajectoire de  $\dot{x} = F(x, u)$  passant par  $x_0$  en  $t = 0$ .

✦ *Définition:*

**II** est accessible en  $x_0$  si  $\overset{\circ}{R(x_0)} \neq \emptyset$

**II** est fortement accessible en  $x_0$  si  $\forall T > 0, \overset{\circ}{R_T(x_0)} \neq \emptyset$

Supposons que  $(x_e, u_e)$  soit un point d'équilibre, et on linéarise **II** autour de ce point d'équilibre :

$$\begin{aligned} z &= x - x_e \\ v &= u - u_e \end{aligned}$$

On aura donc :

$$\dot{z} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_e, u_e)}_{=A} (x - x_e) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(x_e, u_e)}_{=B} (u - u_e) + \dots$$

¶ *Proposition:*

Si (A,B) est contrôlable en  $(x_0, u_0)$ , alors

$$x_0 \in \overset{\circ}{R_T(x_0)}, \forall T > 0$$

(contrôlabilité locale)

Cela implique que si **II** est fortement accessible en  $x_0$ , donc il est accessible en  $x_0$ .

On pose  $\mathcal{F} = \{F_u = F(\bullet, u), u \in \mathcal{U}\}$ , appelée collection de champ de vecteurs.

### 2.2.1 Algèbre de Lie et variété

### ✦ Définition: Algèbre de Lie

L'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  de  $\Pi$  est le plus petit espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$ ) tel que :

1.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$
2.  $\mathcal{L}$  est fermée par rapport au  $[\bullet, \bullet]$ , ie :

$$f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{L}$$

### 📘 Proposition:

Pour  $\Pi$ , on a :

$$\mathcal{L} = \text{vect} \{ [F_{u_1}, \dots, [F_{u_{k-1}}, F_{u_k}]], k \geq 1, u_j \in \mathcal{U} \}$$

### ✦ Définition: Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie  $A$  est un espace vectoriel  $A$  munie d'une opération  $[\bullet, \bullet] : A \times A \rightarrow A$  tel que :

1.  $[\bullet, \bullet]$  est bilinéaire
2.  $[\bullet, \bullet]$  est antisymétrique
3.  $[\bullet, \bullet]$  satisfait l'identité de Jacobi :

$$\forall a, b, c \in A, [a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$$

### ✦ Définition: Sous-variété plongée

Une sous-variété dans  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $n$  est :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d; \phi(x) = 0\}$$

où  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  tel que  $\text{rg} \frac{d\phi}{dx}(x) = k, \forall x \in X$  et  $n = d - k$ .  
(Par force,  $d \geq k$ )

### 🔗 Lemme:

Soit  $S$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux champs de vecteurs tangents à  $S$ , ie  $f(q), g(q) \in T_q S$ ,  $\forall q \in S$ , alors

$$[f, g](q) \in T_q S$$

### ⇒ Théorème: de Sussman-Jevdjovic

Considérons  $\Pi$  où  $X \subset \mathbb{R}^n$ , ouvert, et  $x_0 \in X$ .

1. Si  $\dim \mathcal{L}(x_0) = n \Rightarrow \Pi$  est accessible en  $x_0$
2. Si  $\Pi$  est analytique, alors  $\dim \mathcal{L}(x_0) = n \Leftrightarrow \Pi$  accessible en  $x_0$ .

## 2.2.2 Distribution

### ✧ Définition: Distribution

Une distribution sur  $X$ , une variété de dimension  $n$ , est une application  $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$ .  $\mathcal{D}(p)$  étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces.

### ✧ Définition: Rang constant

Soient  $\mathcal{D}$  une distribution et  $f_1, \dots, f_k \in V^\infty(X)$ . On pose

$$\mathcal{D}(p) = \text{vect}\{f_1(p), \dots, f_k(p)\}$$

On dit alors que  $\mathcal{D}$  est de rang constant ( $= k$ ).

### ✧ Définition:

On dit que  $\mathcal{D}$ , une distribution, est  $\mathcal{C}^\infty$  si

$$\exists f_1, \dots, f_k \in V^\infty(X); \mathcal{D} = \text{vect}\{f_1, \dots, f_k\}$$

### ✧ Définition:

$\mathcal{D}$  est dite intégrale si  $\forall p \in X, \exists S$  une variété,  $p \in S$  tel que

$$T_q S = \mathcal{D}(q), \quad \forall q \in S$$

### ✧ Définition: Involutive

$f \in V^\infty(X)$ . On dit  $f \in \mathcal{D}$  si  $\forall p \in X, f(p) \in \mathcal{D}(p)$ .

$\mathcal{D}$  est dite involutive si  $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$ .



✦ *Définition: Opérateur associé à un champ de vecteur*

À chaque  $f \in V^\infty(X)$ , il correspond un opérateur différentiel d'ordre 1  $L_f$  :

$$\begin{aligned} L_f : \mathcal{C}^\infty &\rightarrow \mathcal{C}^\infty \\ a &\mapsto \nabla a.f \end{aligned}$$

∞ *Théorème: Frobenius*

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de rang constant  $k$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  intégrable
2.  $\mathcal{D}$  involutive
3. localement, autour de chaque point  $p \in X$ ,

$$\exists(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n); \mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

### 2.2.3 Orbites

✦ *Définition: Orbite*

On définit l'orbite de  $x_0$  comme :

$$\text{Orb}(x_0) = \{x; x = \gamma_{t_k}^{F_{u_k}} \circ \dots \circ \gamma_{t_1}^{F_{u_1}}(x_0), u_j \in U, t_j \in \mathbb{R}, 0 < j \leq k\}$$

On a évidemment :

$$\mathcal{R}_T(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0) \subset \text{Orb}(x_0)$$

∞ *Lemme:*

$q \sim p$  si et seulement si  $q \in \text{Orb}(p)$  est une relation d'équivalence :

1. symétrique :  $q \sim p \Leftrightarrow p \sim q$
2. réflexive :  $p \sim p$
3. transitive :  $q \sim p$  et  $p \sim r \Rightarrow q \sim r$

📌 *Propriété:*

$\forall p, q \in X; p \sim q$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Orb}(p) &= \text{Orb}(q) \\ \text{ou} & \\ \text{Orb}(p) \cap \text{Orb}(q) &= \emptyset \end{array} \right.$$

✦ *Définition: Sous variété immersee*

$V$  est une sous-variété immersee si

$$V = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i, \quad V_i \subset V_{i+1}, \quad V_i \text{ variété plongée}$$

∞ *Théorème:*

Pour  $\dot{x} = F(x, u)$  on a :

1.  $\forall x_0 \in X, Orb(x_0)$  est une sous-variété immersee de  $X$
2.  $T_p Orb(x_0) = \Gamma(p)$  où  $\Gamma$  est la plus petite distribution tel que :
  - (a)  $F_u \in \Gamma, \forall u \in U$
  - (b) Si  $g \in \Gamma$ , alors  $(\gamma_t^{F_u})_* g \in \Gamma$
3.  $\mathcal{L}(p) \subset T_p Orb(p)$ , où  $\mathcal{L}$  est l'algèbre de Lie de **II**
4. Si **II** analytique, alors  $T_p Orb(p) = \mathcal{L}(p)$
5.  $\forall p \in X$ , si  $\dim \mathcal{L}(p)$  constant  $\Rightarrow T_p Orb(p) = \mathcal{L}(p)$

📖 *Propriété: Forme normale d'accessibilité*

Supposons  $\dim \mathcal{L}(X)$  constant ( $= k$ ).

Localement, autour de chaque point  $p$ , il existe des coordonnées  $z_a^1 = (z_1^1, \dots, z_k^1)$  et  $z_a^2 = (z_1^2, \dots, z_{n-k}^2)$  tel que

$$(FN_a) \quad \begin{array}{lcl} \dot{z}_a^1 & = & F^1(z_a^1, z_a^2, \dots) \\ \dot{z}_a^2 & = & 0 \end{array}$$

## 2.3 $R_T(x_0)$

✦ *Définition: Idéal de Lie*

L'idéal de Lie  $\mathcal{L}_0$  de **II** est le plus petit espace vectoriel tel que :

1.  $\forall u, \tilde{u} \in U, F_u - F_{\tilde{u}} \in \mathcal{L}_0$
2.  $g \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow [F_u, g] \in \mathcal{L}_0$   
Par l'identité de Jacobi, cela correspond également à :  
 $g \in \mathcal{L}_0, f \in \mathcal{L} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{L}_0$

⇒ *Théorème:*

1. Si  $\dim \mathcal{L}_0(p) = n$ , alors  $\widehat{R_T(x_0)}^\circ \neq \emptyset \ \forall T > 0$  (accessibilité forte)
2. Si  $\Pi$  analytique, alors  $\dim \mathcal{L}_0 = n \Leftrightarrow \widehat{R_T(x_0)}^\circ \neq \emptyset$

¶ *Propriété:*

Fixons  $u^* \in U$  arbitraire. On a

$$\mathcal{L} = \text{vect}\{\mathcal{L}_0, F_{u^*}\}$$

⇒ *Corollaire:*

Pour  $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n u_i g_i(x)$ , on a :

$$\mathcal{L} = \text{vect}\{\mathcal{L}_0, f\}$$

(en prenant  $u^* = 0$ )

⇒ *Théorème:*

Supposons  $\dim \mathcal{L}_0(X) = k - 1$

Localement, autour de chaque point  $p$ , il existe des coordonnées  $z_a^1 = (z_1^1, \dots, z_{k-1}^1)$  et  $z_a^2 = (z_1^2, \dots, z_{n-k+1}^2)$  tel que

$$(FN_a) \quad \begin{aligned} \dot{z}_a^1 &= F_a^1(z_a^1, z_a^2, u) \\ \dot{z}_a^2 &= F_a^2(z_a^1, z_a^2, u) \end{aligned}$$

⇒ *Théorème:*

Supposons  $\dim \mathcal{L}(X) = k$ ,  $\dim \mathcal{L}_0(x) = k - 1$ ,  $\forall x \in X$

Localement, autour de chaque point  $p$ , il existe des coordonnées  $z_a^1 = (z_1^1, \dots, z_{k-1}^1)$ ,  $z_k^1$ , et  $z_a^2 = (z_1^2, \dots, z_{n-k+1}^2)$  tel que

$$(FN_a) \quad \begin{aligned} \dot{z}_a^1 &= F_a^1(z_a^1, z_k^1, z_a^2, u) \\ \dot{z}_k^1 &= 1 \\ \dot{z}_a^2 &= 0 \end{aligned}$$

## 2.4 Controlabilité totale

✦ *Définition: Complètement controlable*

$\Pi$  est dit complètement controlable si  $\forall x \in X, R(x) = X$ .

✦ *Définition: Reversible*

$\Pi$  est reversible si  $\forall u \in U, \exists \tilde{u} \in U$  tel que  $\forall x \in X$ ,

$$-F(x, u) = F(x, \tilde{u})$$

¶ *Propriété:*

Si  $\Pi$  reversible, alors  $R(p) = \text{Orb}(p), \forall p \in X$ .

✦ *Définition: Connexe*

$X$  connexe si :

$$X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1, X_2 \text{ ouverts} \Rightarrow \text{Soit } X_1 = \emptyset \text{ soit } X_2 = \emptyset$$

⇒ *Théorème:*

Supposons  $\Pi$  reversible et  $X$  connexe. Si  $\dim \mathcal{L}(x) = n, \forall x \in X$ , alors  $\Pi$  est complètement controlable.

2.4.1 Problèmes de contraintes

2.4.2 Stabilité à la Poisson

✦ *Définition: Stable à la Poisson*

$p \in X$  est dit stable à la Poisson avec  $\dot{x} = f(x), x \in X$  si  $\forall V$ , voisinage de  $p, \forall T > 0, \exists t > T; \gamma_t(p) \in V$ .

⇒ *Théorème: Bonnard-Crouch*

Supposons que pour  $\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$ , on a :

1. L'ensemble  $X'$  de points Poisson stable pour  $\dot{x} = f(x)$  est dense dans  $X$
2.  $\dim \mathcal{L}(X) = n, \forall x \in X$  (accessible en chaque point)

Alors  $\Sigma$  est complètement contrôlable.

### 3 Linéarisation

#### 3.1 Linéarisation dans l'espace d'état

On s'intéresse aux systèmes affines :

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), \quad x \in X \quad (\Sigma)$$

On prend  $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$  un difféomorphisme et on transforme  $\Sigma$ .

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{g}_i(\tilde{x})$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{f}(\tilde{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(\phi^{-1}(\tilde{x})) f(\phi^{-1}(\tilde{x})) \\ \tilde{g}_i(\tilde{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(\phi^{-1}(\tilde{x})) g_i(\phi^{-1}(\tilde{x})) \end{cases} \quad (1)$$

✦ *Définition: S-équivalent*

$\Sigma$  et

$$\tilde{\Sigma} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{g}_i(\tilde{x}) \quad (\tilde{\Sigma})$$

sont dits équivalents dans l'espace d'état (state space equivalent, ou S-equivalent) si (1).

✦ *Définition: localement S-équivalent*

$\Sigma$  et  $\tilde{\Sigma}$  sont localement, en  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$ , S-équivalent, si  $\exists V_{x_0}$  et  $V_{\tilde{x}_0}$  et  $\phi : V_{x_0} \rightarrow V_{\tilde{x}_0}$  un difféomorphisme tel que  $\phi$  transforme  $\Sigma|_{V_{x_0}}$  en  $\tilde{\Sigma}|_{V_{\tilde{x}_0}}$

✦ *Définition: S-linéarisable*

$\Sigma$  est S-linéarisable si  $\exists : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme tel que  $\Sigma$  et

$$\Lambda : \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \sum_{i=1}^m a_i b_i$$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^n$ , sont S-équivalent.

✦ *Définition:*

$$ad_f^0 g = g, \quad ad_f g = [f, g], \quad ad_f^n g = [f, ad_f^{n-1} g]$$

⇒ *Théorème:*

Supposons  $f(x_0) = 0$ , ie  $x_0$  un point d'équilibre.

$\Sigma$  est localement autour de  $x_0$  et  $0_{\mathbb{R}^n}$  S-linéarisable si et seulement si :

(SL1) :  $\dim \text{vect}\{ad_f^q g_i(x_0), 1 \leq i \leq m, 0 \leq q \leq n-1\} = n$

(SL2) :  $[ad_f^q g_i, ad_f^r g_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq m, \forall 0 \leq q \leq n-1, \forall 0 \leq r \leq n$

⇒ *Théorème:*

$\Sigma$  est S-linéarisable si et seulement si :

(SL1) :  $\dim \text{vect}\{ad_f^q g_i(x), 1 \leq i \leq m, 0 \leq q \leq n-1\} = n$

(SL2) :  $[ad_f^q g_i, ad_f^r g_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq m, \forall 0 \leq q \leq n-1, \forall 0 \leq r \leq n$

(SL3) : les champs de vecteurs  $f, g_1, \dots, g_m$  sont complets, ie les flots  $\gamma_t^f(p), \gamma_t^{g_i}(p)$  existent  $\forall p \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ad_f^q g_i$  complets,  $0 \leq q \leq n-1, 0 \leq i \leq m$

### 3.2 Linéarisation par bouclage

✦ *Définition: F-équivalence*

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ et } \tilde{\Sigma} : \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})\tilde{u}$$

sont dits équivalents par bouclage (F-equivalent) si  $\exists \psi : X \rightarrow \tilde{X}$  un difféomorphisme et  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$  et  $\beta = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  tel que  $\alpha_i, \beta_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ,  $\beta(x)$  inversible, et :

$$\begin{aligned} \phi_*(f + g\alpha) &= \tilde{f} \\ \phi_*(g\beta) &= \tilde{g} \end{aligned}$$

✦ *Définition:*

On note :

$$\mathcal{D}^j = \text{span}\{ad_f^q g_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq q \leq j-1\}$$

⇒ *Théorème: Jakubczyk-Respondek*

Supposons  $f(x_0) = 0$ , ie  $x_0$  un point d'équilibre.

$\Sigma$  est localement autour de  $x_0$  F-équivalent à

$$\Lambda : \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i b_i$$

contrôlable, si et seulement si :

(FL1) :  $\text{rg } \mathcal{D}^n(x_0) = n \Leftrightarrow (\text{SL1})$

(FL2) :  $\text{rg } \mathcal{D}^j(x) = \text{cste}, \forall j = 1, \dots, n$

(FL3) :  $\mathcal{D}^j$  involutive,  $\forall j = 1, \dots, n$

**Remarque :** Pour  $m = 1$ , on a équivalence avec :

(FL1') :  $g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g$  indépendants en  $x_0$

(FL2') :  $\mathcal{D}^{n-1}$  involutive.

### ✦ Définition: Forme de Brunovsky

On appelle forme de Brunovsky le système linéarisant par bouclage le système  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= h \\ &\vdots \\ \tilde{x}_n &= L_f^{n-1} h \end{aligned}$$

où  $h$  est la paramétrisation de la variété involutive de dimension  $n - 1$ . Ce système vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= \tilde{u} \end{aligned}$$

## 3.3 Contrôlabilité

On veut une trajectoire sur  $[0, T]$  telle que  $\tilde{x}_0$  soit relié par celle-ci à  $\tilde{x}_T$ .

Choisissons  $\phi(t)$  tel que :

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \tilde{x}_{0_1} & \phi(T) &= \tilde{x}_{T_0} \\ &\vdots & &\vdots \\ \phi^{(n-1)}(0) &= \tilde{x}_{0_n} & \phi^{(n-1)}(T) &= \tilde{x}_{T_n} \end{aligned} \quad \text{et}$$

Alors  $\tilde{u}(t) = \phi^{(n)}(t)$  résoud le problème.

## 4 Observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (\Pi)$$

$y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $hX \rightarrow Y$ ,  $\dim Y = p < \dim X = n$   
 $\forall 1 \leq i \leq p, h_i \in \mathcal{C}^\infty(X)$ .

✦ *Définition: Indistingables*

$x_0 \in X$  et  $\tilde{x}_0 \in X$  sont dits indistingables si  $\forall u(t) \in \mathcal{U}$ ,

$$y(t, x_0, u) \equiv y(t, \tilde{x}_0, u)$$

✦ *Définition: Observable*

$\Pi$  est observable si :

$$x_0 \text{ et } \tilde{x}_0 \text{ indistingables} \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$$

✦ *Définition: Localement observable*

$\Pi$  est localement observable autour de  $p \in X$  si  $\exists V_p \subset X$  ;  $\Pi|_{V_p}$  est observable.

✦ *Définition: Espace d'observation*

On définit  $\mathcal{O}$ , l'espace d'observation, comme étant le plus petit espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  tel que :

1.  $h_i \in \mathcal{O}$ ,  $1 \leq i \leq p$
2. Si  $\phi \in \mathcal{O}$ , alors  $L_{F_u} \phi \in \mathcal{O}$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$

On a

$$\mathcal{O} = \text{vect}\{L_{F_{u_1}} \dots L_{F_{u_k}} h_i, 1 \leq i \leq p, u_j \in \mathcal{U}, 1 \leq j \leq k, k \geq 0\}$$

✦ *Définition: Codistribution*

On appelle codistribution :

$$\mathcal{H} = \text{span}\{d\phi, \phi \in \mathcal{O}\}$$

(Notons que  $d\phi \in \mathcal{M}_{1 \times n}$ ).

En notant  $T_p^*X = (T_pX)^*$  l'espace dual à l'espace tangent, appelé espace cotangent :

$$\mathcal{H} : p \in X \mapsto \mathcal{H}(p) \subset T_p^*X$$

⇒ *Théorème: Hermann-Kremer*

Soit  $p \in X$

Si  $\dim \mathcal{H}(p) = n$ , alors  $\Pi$  est localement observable en  $p$ .



⇒ *Théorème:*

Supposons que  $\dim \mathcal{H}(p) = cste = k \ \forall p \in X$ .

1.  $\Pi$  est localement observable si et seulement si  $k = n$
2. La distribution

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= span\{f \in V^\infty(X); \langle d\phi, f \rangle = 0, \forall \phi \in \mathcal{O}\} \\ &= span\{f \in V^\infty(X); \langle \mathcal{H}, f \rangle = 0\} \end{aligned}$$

3. Autour de chaque  $p \in X$ ,  $\exists z^1 = (z_1^1, \dots, z_k^1)$  et  $z^2 = (z_{k+1}^2, \dots, z_n^2)$  tel que

$$\mathcal{D} = span\left\{\frac{\partial}{\partial z_{k+1}^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n^2}\right\}$$

De plus, en coordonnées  $(z^1, z^2)$  :

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= f^1(z^1, u) \\ \dot{z}^2 &= f^2(z^1, z^2, u) \\ y &= h^1(z^1) \end{aligned}$$

4. Dans  $V_p$  (où les coordonnées  $(z^1, z^2)$  sont définies),  $z_0$  et  $\tilde{z}_0$  sont indistingables si  $z_0^1 = \tilde{z}_0^1$

On considère un système affine avec la même sortie (mais tout se généralise avec les systèmes non affines).  
On prend juste le même nombre de sortie que de contrôle. ( $y_i, 1 \leq i \leq m$ )

✦ *Définition: Découplable*

$\Sigma$  est découplable entrée-sortie (I-O-découplable) si  $\exists z = \phi(x)$ ,  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  tel que :

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{g}_i(z)$$

$Z = Z_0 \times \dots \times Z_m$ , avec  $z = (z^0, z^1, \dots, z^m)$

$$\begin{aligned} \dot{z}^0 &= \tilde{f}^0(z) + \sum_{i=1}^m v^i \tilde{g}_i^0(z) \\ \dot{z}^1 &= \tilde{f}^1(z^1) + \tilde{g}_1(z^1)v^1 \\ &\vdots \\ \dot{z}^m &= \tilde{f}^m(z^m) + \tilde{g}_m(z^m)v^m \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \phi_*(f + g\alpha) = \phi_* \left( g + \sum_{i=1}^m g_i \alpha_i \right) \\ \tilde{g} &= \phi_*(g\beta) \quad \tilde{g}_i = \phi_* \left( \sum_{j=1}^m g_j \beta_{ji} \right) \end{aligned}$$

✦ *Définition:*

Pour chaque  $1 \leq i \leq m$ , soit  $\rho_i$  le plus petit nombre tel que

$$\frac{d^{\rho_i} y_i}{dt^{\rho_i}}$$

dépend exclusivement de  $u$ , ie

$$\exists j; L_{g_j} L_f^{\rho_i - 1} y_i \neq 0$$

↻ *Théorème:*

Supposons  $\text{rg} D(x) = \text{cst}$ , où

$$D_{ij} = L_{g_j} L_f^{\phi_i - 1} h_i$$

appelée matrice de découplage.

Le système  $\Sigma$  est découplable en  $x_0$  si et seulement si :

$$\text{rg} D(x_0) = m$$

De plus, on pose  $z_{ij} = L_f^{j-1} h_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \rho_i$