Automatique non linéaire

2 avril 2016

Table des matières

Introduction

On s'intéresse aux équations de la forme :

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & F(x(t), u(t)) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

$u \in \mathbb{R}^m$ le contrôle
$y \in \mathbb{R}^p$ les observations
$x \in \mathbb{R}^n$ l'état.

La solution à cette équation est en générale lisse, de dimension finie mais elle n'est pas uniquement déterminée par la condition initiale x_0.
Comment choisir u ?

- $u = u(t)$: Π est une équation différentielle non autonome. On peut avoir unicité des solutions. Contrôle en boucle ouverte.
- $u = u(x)$: Π est une équation différentielle autonome, uncité des solutions. Contrôle en boucle fermée / par bouclage / par feedback.

1 Outils mathématiques

1.1 Difféomorphismes

Définition:

$h : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^n$ ouvert est $\mathcal{C}^\infty$ si $\frac{\partial^i h}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $i = \sum_{j=1}^n i_j$ existent et sont continues pour tout n-uplet $(i_j)_j$.
Si maintenant, $h : X \to Y,\ Y \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, h est $\mathcal{C}^\infty$ si $h_1, ..., h_m$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition: Difféomorphisme

h est un difféomorphisme si :

- h est injective : $x \neq \tilde{x} \Rightarrow h(x) \neq h(\tilde{x})$
- h est surjective : $\forall y \in Y, \exists x \in X;\ y = h(x)$
- h et h^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$.

Définition: Difféormorphisme local

$h : X \to Y$ est un difféormorphisme local autour de x_0 et y_0 s'il existe X_{x_0} et Y_{y_0}, deux voisinages ouverts, tels que :

- $h(X_0) = Y_0$
- $h_{|X_0}$ est un difféomorphisme.

Théorème:

Supposons $h : X \to Y$ tel que $h(x_0) = y_0$ et :

1. $h \in \mathcal{C}^\infty$
2. $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0)$ inversible

alors h est un difféomorphisme local en x_0 et y_0.

1.2 Application tangente

Définition: Vecteur tangent

Soit $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\to X$. Le vecteur tangent à $\gamma(t)$ en $p = \gamma(0)$ est $\dot{\gamma}(0)$.

Définition: Espace tangent en p

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle espace tangent en p :

$$T_pX = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

Définition: Champ de vecteurs

Un champ de vecteur f sur X est :

$$p \in X \mapsto f(p) \in T_pX$$

On note :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

A chaque f, un champ de vecteurs, on associe l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. f est $\mathcal{C}^\infty$.
On va noter $V^\infty(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $\gamma_t(x_0) = x(t, x_0) = x_t(x_0)$ la solution passant par x_0.

Proposition:

γ_t satisfait :

1. $\gamma_0 = id$
2. $\gamma_s \circ \gamma_t(x_0) = \gamma_{s+t}(x_0) = \gamma_{t+s}(x_0)$
3. $\gamma_t^{-1} = \gamma_{-t}$

On prend à présent h, un difféormorphisme :

$$h : X \to Y, \ \dim X = \dim Y = n$$

$h \circ \gamma$ est une courbe dans Y.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(0) &= Dh(\gamma(0))\frac{d}{dt}\gamma(0) \\ &= Dh(p)v\end{aligned}$$

Si on note w le vecteur tangent dans Y, on a :

$$w = \frac{\partial h}{\partial x} v \in T_{h(p)}Y$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} v_j$$

En partant de h, non linéaire, on arrive à $Dh = \frac{\partial h}{\partial x} = h_*$ une application linéaire qui tranforme T_pX en $T_{h(p)}Y$. Cette application linéaire est appelée application tangente.

Lemme:

On a :

$$(\phi_* f)(p) = D\phi(\phi^{-1}(p))f(\phi^{-1}(p))$$

Proposition:

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \dot{x} = f(x) \arrow[r, "\phi_* \text{ transforme}"'] \arrow[d, "\text{résolution}"] & \dot{y} = (\phi_* f)(y) \arrow[d, "\text{résolution}"] \\ x(t) \arrow[r, "\phi \text{ transforme}"'] & y(t) = \phi(x(t)) \end{tikzcd}$$

Proposition:

Soit γ_t le flot de $\dot{x} = f(x)$. Alors σ_t, le flot de $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$ est :

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$

Idée de la démonstration : On vérifie simplement que le flot σ_t vérifie bien l'équation $\frac{d}{dt}\sigma_t = (\phi_* f)(\sigma_t)$.

1.3 Crochet de Lie

Définition:

On note $V^\infty(X)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition: Crochet de Lie

Soit $f, g \in V^\infty(X)$. On définit :

$$[f,g](p) = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{-t}^f)_* g(p)\Big|_{t=0}$$

Lemme:

On a également, en coordonnées $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$[f,g](p) = \frac{\partial g}{\partial x}(p) f(p) - \frac{\partial f}{\partial x}(p) g(p)$$

2 Controlabilité des systèmes

$\dot{x} = u_1 f(x) + u_2 g(x)$, où $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, ouvert. $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Proposition:

$$\forall p \in X,\ \forall t, s \in \mathbb{R},\ \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p) = p \Leftrightarrow [f,g] \equiv 0$$

Lemme:

Soient $f, g \in V^\infty(X)$ et ϕ un difféomorphisme. Alors :

$$\phi_*[f,g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$

2.1 Les systèmes linéaires

$\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

On note $R_T(x_0)$ l'ensemble des points accessibles depuis x_0 au temps T. $R(x_0) = \bigcup_{t>0} R_t(x_0)$: ensemble d'accessibilité depuis x_0.

Théorème:

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $R(0) = \mathbb{R}^n$
2. $\exists T > 0;\ R_T(0) = \mathbb{R}^n$

3. $\forall T > 0,\ R_T(0) = \mathbb{R}^n$
4. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n,\ R(x_0) = \mathbb{R}^n$
5. $\exists T > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R_T(x_0) = \mathbb{R}^n$
6. $\forall T > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, R_T(x_0) = \mathbb{R}^n$
7. $\mathrm{Rg}(B, ..., A^{n-1}B) = n$

2.2 Systèmes non linéaires

On note Π le problème :

$$\dot{x} = F(x, u),\ x \in X,\ \text{ouvert de } \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{Π}$$

U est la classe des contrôles admissibles.

$$PC_U \subset U \subset \mathcal{M}_U$$

Où PC_U est l'ensemble des contrôles constants par morceaux à valeur dans U et $\mathcal{M}_U$ est l'ensemble des contrôles mesurables à valeur dans U.

$$R_T(x_0) = \{x(T, u, x_0), u \in U([0, T])\}$$

où $x(T, u, x_0)$ est la trajectoire de $\dot{x} = F(x, u)$ passant par x_0 en $t = 0$.

Définition:

Π est accessible en x_0 si $\overset{\circ}{\widehat{R(x_0)}} \neq \emptyset$

Π est fortement accessible en x_0 si $\forall T > 0,\ \overset{\circ}{\widehat{R_T(x_0)}} \neq \emptyset$

Supposons que (x_e, u_e) soit un point d'équilibre, et on linéarise Π autour de ce point d'équilibre :

$$\begin{aligned} z &= x - x_e \\ v &= u - u_e \end{aligned}$$

On aura donc :

$$\dot{z} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_e, u_e)}_{=A}(x - x_e) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u}(x_e, u_e)}_{=B}(u - u_e) + ...$$

Proposition:

Si (A,B) est contrôlable en (x_0, u_0), alors

$$x_0 \in \overset{\circ}{\widehat{R_T(x_0)}}, \forall T > 0$$

(controlabilité locale)
Cela implique que si Π est fortement accessible en x_0, donc il est accessible en x_0.

On pose $\mathcal{F} = \{F_u = F(\bullet, u), u \in \mathcal{U}\}$, appelée collection de champ de vecteurs.

2.2.1 Algèbre de Lie et variété

Définition: Algèbre de Lie

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de Π est le plus petit espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) tel que :

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$
2. $\mathcal{L}$ est fermée par rapport au $[\bullet, \bullet]$, ie :

$$f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{L}$$

Proposition:

Pour Π, on a :

$$\mathcal{L} = vect \left\{ [F_{u_1}, ...[F_{u_{k-1}}, F_{u_k}]], k \geq 1, u_j \in \mathcal{U} \right\}$$

Définition: Algèbre de Lie

Une algèbre de Lie A est un espace vectoriel A munie d'une opération $[\bullet, \bullet] : A \times A \to A$ tel que :

1. $[\bullet, \bullet]$ est bilinéaire
2. $[\bullet, \bullet]$ est antisymétrique
3. $[\bullet, \bullet]$ satisfait l'identité de Jacobi :

$$\forall a, b, c \in A, \ [a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$$

Définition: Sous-variété plongée

Une sous-variété dans $\mathbb{R}^d$ de dimension n est :

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^d ; \phi(x) = 0 \right\}$$

où $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ tel que $\mathrm{rg} \frac{d\phi}{dx}(x) = k$, $\forall x \in X$ et $n = d - k$.
(Par force, $d \geq k$)

Lemme:

Soit S une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Si f et g sont deux champs de vecteurs tangents à S, ie $f(q), g(q) \in T_q S$, $\forall q \in S$, alors

$$[f, g](q) \in T_q S$$

Théorème: de Sussman-Jevdjevic

Considérons Π où $X \subset \mathbb{R}^n$, ouvert, et $x_0 \in X$.

1. Si dim $\mathcal{L}(x_0) = n \Rightarrow \Pi$ est accessible en x_0
2. Si Π est analytique, alors dim $\mathcal{L}(x_0) = n \Leftrightarrow \Pi$ accessible en x_0.

2.2.2 Distribution

Définition: Distribution

Une distribution sur X, une variété de dimension n, est une application $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_pX$. $\mathcal{D}(p)$ étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces.

Définition: Rang constant

Soient $\mathcal{D}$ une distribution et $f_1, ..., f_k \in V^\infty(X)$. On pose

$$\mathcal{D}(p) = vect\{f_1(p), ..., f_k(p)\}$$

On dit alors que $\mathcal{D}$ est de rang constant $(= k)$.

Définition:

On dit que $\mathcal{D}$, une distribution, est $\mathcal{C}^\infty$ si

$$\exists f_1, ..., f_k \in V^\infty(X); \mathcal{D} = vect\{f_1, ..., f_k\}$$

Définition:

$\mathcal{D}$ est dite intégrale si $\forall p \in X$, $\exists S$ une variété, $p \in S$ tel que

$$T_qS = \mathcal{D}(q),\ \forall q \in S$$

Définition: Involutive

$f \in V^\infty(X)$. On dit $f \in \mathcal{D}$ si $\forall p \in X,\ f(p) \in \mathcal{D}(p)$.
$\mathcal{D}$ est dite involutive si $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$.

Définition: Opérateur associé à un champ de vecteur

À chaque $f \in V^\infty(X)$, il correspond un opérateur différentiel d'ordre 1 L_f :

$$\begin{array}{cccc} L_f : & \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty \\ & a & \mapsto & \nabla a.f \end{array}$$

Théorème: Frobenius

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de rang constant k. Alors les conditions suivants sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}$ intégrable
2. $\mathcal{D}$ involutive
3. localement, autour de chaque point $p \in X$,

$$\exists(x_1, ..., x_k, ..., x_n); \mathcal{D} = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}\}$$

2.2.3 Orbites

Définition: Orbite

On définit l'orbite de x_0 comme :

$$Orb(x_0) = \{x; x = \gamma_{t_k}^{F_{u_k}} \circ ... \circ \gamma_{t_1}^{F_{u_1}}(x_0), u_j \in U, t_j \in \mathbb{R}, 0 < j \leq k\}$$

On a évidemment :

$$\mathcal{R}_T(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0) \subset Orb(x_0)$$

Lemme:

$q \sim p$ si et seulement si $q \in Orb(p)$ est une relation d'équivalence :

1. symétrique : $q \sim p \Leftrightarrow p \sim q$
2. reflexive : $p \sim p$
3. transitive : $q \sim p$ et $p \sim r \Rightarrow q \sim r$

Propriété:

$\forall p, q \in X; p \sim q$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Orb(p) & = & Orb(q) \\ & \text{ou} & \\ Orb(p) \cap Orb(q) & = & \emptyset \end{array} \right.$$

Définition: Sous variété immersée

V est une sous-variété immersée si

$$V = \bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i,\ V_i \subset V_{i+1},\ V_i \text{ variété plongée}$$

Théorème:

Pour $\dot{x} = F(x,u)$ on a :

1. $\forall x_0 \in X$, $Orb(x_0)$ est une sous-variété immersée de X
2. $T_p Orb(x_0) = \Gamma(p)$ où Γ est la plus petite distribution tel que :
   (a) $F_u \in \Gamma, \forall u \in U$
   (b) Si $g \in \Gamma$, alors $\left(\gamma_t^{F_u}\right)_* g \in \Gamma$
3. $\mathcal{L}(p) \subset T_p Orb(p)$, où $\mathcal{L}$ est l'algèbre de Lie de Π
4. Si Π analytique, alors $T_p Orb(p) = \mathcal{L}(p)$
5. $\forall p \in X$, si $\dim \mathcal{L}(p)$ constant $\Rightarrow T_p Orb(p) = \mathcal{L}(p)$

Propriété: Forme normale d'accessibilité

Supposons $\dim \mathcal{L}(X)$ constant $(= k)$.
Localement, autour de chaque point p, il existe des coordonnées $z_a^1 = (z_1^1, ..., z_k^1)$ et $z_a^2 = (z_1^2, ..., z_{n-k}^2)$ tel que

$$(FN_a) \quad \begin{array}{ccc} \dot{z}_a^1 & = & F^1(z_a^1, z_a^2, ...) \\ \dot{z}_a^2 & = & 0 \end{array}$$

2.3 $R_T(x_0)$

Définition: Idéal de Lie

L'idéal de Lie $\mathcal{L}_0$ de Π est le plus petit espace vectoriel tel que :

1. $\forall u, \tilde{u} \in U$, $F_u - F_{\tilde{u}} \in \mathcal{L}_0$
2. $g \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow [F_u, g] \in \mathcal{L}_0$
   Par l'identité de Jacobi, cela correspond également à :
   $g \in \mathcal{L}_0,\ f \in \mathcal{L} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{L}_0$

Théorème:

1. Si $\dim\mathcal{L}_0(p) = n$, alors $\overset{\circ}{\widehat{R_T(x_0)}} \neq \emptyset$ $\forall T > 0$ (accessibilité forte)

2. Si Π analytique, alors $\dim \mathcal{L}_0 = n \Leftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{R_T(x_0)}} \neq \emptyset$

Propriété:

Fixons $u^* \in U$ arbitraire. On a

$$\mathcal{L} = vect\{\mathcal{L}_0, F_{u^*}\}$$

Corollaire:

Pour $\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i g_i(x)$, on a :

$$\mathcal{L} = vect\{\mathcal{L}_0, f\}$$

(en prenant $u^* = 0$)

Théorème:

Supposons $\dim \mathcal{L}_0(X) = k - 1$
Localement, autour de chaque point p, il existe des coordonnées $z_a^1 = (z_1^1, ..., z_{k-1}^1)$ et $z_a^2 = (z_1^2, ..., z_{n-k+1}^2)$ tel que

$$(FN_a) \quad \begin{array}{rcl} \dot{z}_a^1 & = & F_a^1(z_a^1, z_a^2, u) \\ \dot{z}_a^2 & = & F_a^2(z_a^2) \end{array}$$

Théorème:

Supposons $\dim \mathcal{L}(X) = k$, $\dim \mathcal{L}_0(x) = k - 1$, $\forall x \in X$
Localement, autour de chaque point p, il existe des coordonnées $z_a^1 = (z_1^1, ..., z_{k-1}^1)$, z_k^1, et $z_a^2 = (z_1^2, ..., z_{n-k+1}^2)$ tel que

$$(FN_a) \quad \begin{array}{rcl} \dot{z}_a^1 & = & F_a^1(z_a^1, z_k^1, z_a^2, u) \\ \dot{z}_k^1 & = & 1 \\ \dot{z}_a^2 & = & 0 \end{array}$$

2.4 Controlabilité totale

Définition: Complètement controlable

Π est dit complètempent controlable si $\forall x \in X,\ R(x) = X$.

Définition: Reversible

Π est reversible si $\forall u \in U$, $\exists \tilde{u} \in U$ tel que $\forall x \in X$,

$$-F(x, u) = F(x, \tilde{u})$$

Propriété:

Si Π reversible, alors $R(p) = Orb(p)$, $\forall p \in X$.

Définition: Connexe

X connexe si :

$$X = X_1 \cup X_2,\ \ X_1 \cap X_2 = \emptyset,\ \ X_1, X_2 \text{ ouverts} \Rightarrow \text{ Soit } X_1 = \emptyset \text{ soit } X_2 = \emptyset$$

Théorème:

Supposons Π reversible et X connexe. Si $\dim \mathcal{L}(x) = n$, $\forall x \in X$, alors Π est complètement controlable.

2.4.1 Problèmes de contraintes

2.4.2 Stabilité à la Poisson

Définition: Stable à la Poisson

$p \in X$ est dit stable à la Poisson avec $\dot{x} = f(x)$, $x \in X$ si $\forall V$, voisinage de p, $\forall T > 0$, $\exists t > T\,;\ \gamma_t(p) \in V$.

Théorème: Bonnard-Crouch

Supposons que pour $\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$, on a :

1. L'ensemble X' de points Poisson stable pour $\dot{x} = f(x)$ est dense dans X
2. $\dim \mathcal{L}(X) = n$, $\forall x \in X$ (accessible en chaque point)

Alors Σ est complètement contrôlable.

3 Linéarisation

3.1 Linéarisation dans l'espace d'état

On s'intéresse aux systèmes affines :

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x),\ x \in X \tag{Σ}$$

On prend $\phi : X \to \tilde{X}$ un difféomorphisme et on transforme Σ.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \tilde{g}_i(\tilde{x})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{f}(\tilde{x}) & = & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\phi^{-1}(\tilde{x}))f(\phi^{-1}(\tilde{x})) \\ \tilde{g}_i(\tilde{x}) & = & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\phi^{-1}(\tilde{x}))g_i(\phi^{-1}(\tilde{x})) \end{array} \right. \tag{1}$$

Définition: S-équivalent

Σ et

$$\tilde{\Sigma} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \tilde{g}_i(\tilde{x}) \tag{$\tilde{\Sigma}$}$$

sont dits équivalents dans l'espace d'état (state space equivalent, ou S-equivalent) si (1).

Définition: localement S-équivalent

Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont localement, en x_0 et $\tilde{x}_0$, S-équivalent, si $\exists V_{x_0}$ et $V_{\tilde{x}_0}$ et $\phi : V_{x_0} \to V_{\tilde{x}_0}$ un difféomorphisme tel que ϕ transforme $\Sigma_{|V_{x_0}}$ en $\tilde{\Sigma}|_{V_{\tilde{x}_0}}$

Définition: S-linéarisable

Σ est S-linéarisable si $\exists \phi : X \to \mathbb{R}^n$ un difféormorphisme tel que Σ et

$$\Lambda : \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, sont S-équivalent.

Définition:

$$ad_f^0 g = g,\ ad_f g = [f, g],\ ad_f^n g = [f, ad_f^{n-1} g]$$

Théorème:

Supposons $f(x_0) = 0$, ie x_0 un point d'équilibre.
Σ est localement autour de x_0 et $0_{\mathbb{R}^n}$ S-linéarisable si et seulement si :

(SL1) : dim vect$\{ad_f^q g_i(x_0),\ 1 \leq i \leq m,\ 0 \leq q \leq n-1\} = n$

(SL2) : $[ad_f^q g_i, ad_f^r g_j] = 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq m$, $\forall 0 \leq q \leq n-1$, $\forall 0 \leq r \leq n$

Théorème:

Σ est S-linéarisable si et seulement si :

(SL1) : dim vect$\{ad_f^q g_i(x),\ 1 \leq i \leq m,\ 0 \leq q \leq n-1\} = n$

(SL2) : $[ad_f^q g_i, ad_f^r g_j] = 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq m$, $\forall 0 \leq q \leq n-1$, $\forall 0 \leq r \leq n$

(SL3) : les champs de vecteurs $f, g_1, ..., g_m$ sont complets, ie les flots $\gamma_t^f(p)$, $\gamma_t^{g_i}(p)$ existent $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ad_f^q g_i$ complets, $0 \leq q \leq n-1$, $0 \leq i \leq m$

3.2 Linéarisation par bouclage

Définition: F-équivalence

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ et } \tilde{\Sigma} : \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})\tilde{u}$$

sont dits équivalents par bouclage (F-equivalent) si $\exists \psi : X \to \tilde{X}$ un difféomorphisme et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^T$ et $\beta = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ tel que :$\alpha_i, \beta_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $\beta(x)$ inversible, et :

$$\begin{aligned} \phi_*(f + g\alpha) &= \tilde{f} \\ \phi_*(g\beta) &= \tilde{g} \end{aligned}$$

Définition:

On note :

$$\mathcal{D}^j = span\{ad_f^q g_i,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq q \leq j-1\}$$

Théorème: Jakuleczyk-Respondek

Supposons $f(x_0) = 0$, ie x_0 un point d'équilibre.
Σ est localement autour de x_0 F-équivalent à

$$\Lambda : \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i b_i$$

contrôlable, si et seulement si :
(FL1) : rg $\mathcal{D}^n(x_0) = n \Leftrightarrow$ (SL1)
(FL2) : rg $\mathcal{D}^j(x) = cste, \forall j = 1, ..., n$
(FL3) : $\mathcal{D}^j$ involutive, $\forall j = 1, ..., n$

Remarque : Pour $m = 1$, on a équivalence avec :
(FL1') : g, $ad_f g$,...,$ad_f^{n-1} g$ indépendants en x_0
(FL2') : $\mathcal{D}^{n-1}$ involutive.

Définition: Forme de Brunovsky

On appelle forme de Brunovsky le système linéarisant par bouclage le système Σ :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}_1 & = & h \\ & \vdots & \\ \tilde{x}_n & = & L_f^{n-1} h \end{array}$$

où h est la paramétrisation de la variété involutive de dimension $n-1$. Ce système vérifie :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}}_1 & = & \tilde{x}_2 \\ & \vdots & \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} & = & \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n & = & \tilde{u} \end{array}$$

3.3 Contrôlabilité

On veut une trajectoire sur $[0, T]$ telle que $\tilde{x}_0$ soit relié par celle-ci à $\tilde{x}_T$.
Choisissons $\phi(t)$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} \phi(0) & = & \tilde{x}_{0_1} \\ & \vdots & \\ \phi^{(n-1)}(0) & = & \tilde{x}_{0_n} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \phi(T) & = & \tilde{x}_{T_0} \\ & \vdots & \\ \phi^{(n-1)}(T) & = & \tilde{x}_{T_n} \end{array}$$

Alors $\tilde{u}(t) = \phi^{(n)}(t)$ résoud le problème.

4 Observabilité

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & F(x, u) \\ y & = & h(x) \end{array} \right. \tag{II}$$

$y \in Y \subset \mathbb{R}^p$, $hX \to Y$, dim $Y = p <$dim $X = n$
$\forall 1 \leq i \leq p, h_i \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

Définition: Indistingables

$x_0 \in X$ et $\tilde{x}_0 \in X$ sont dits indistingables si $\forall u(t) \in \mathcal{U}$,

$$y(t, x_0, u) \equiv y(t, \tilde{x}_0, u)$$

Définition: Observable

Π est observable si :

$$x_0 \text{ et } \tilde{x}_0 \text{ indistingables } \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$$

Définition: Localement observable

Π est localement observable autour de $p \in X$ si $\exists V_p \subset X$; $\Pi_{|V_p}$ est observable.

Définition: Espace d'observation

On définit $\mathcal{O}$, l'espace d'observation, comme étant le plus petit espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ tel que :

1. $h_i \in \mathcal{O}$, $1 \leq i \leq p$
2. Si $\phi \in \mathcal{O}$, alors $L_{F_u}\phi \in \mathcal{O}$, $\forall u \in \mathcal{U}$

On a

$$\mathcal{O} = vect\{L_{F_{u_1}} ... L_{F_{u_k}} h_i, 1 \leq i \leq p, u_j \in \mathcal{U}, 1 \leq j \leq k, k \geq 0\}$$

Définition: Codistribution

On appelle codistibution :

$$\mathcal{H} = span\{d\phi, \phi \in \mathcal{O}\}$$

(Notons que $d\phi \in \mathcal{M}_{1\times n}$).
En notant $T_p^*X = (T_pX)^*$ l'espace dual à l'espace tangent, appelé espace cotangent :

$$\mathcal{H} : p \in X \mapsto \mathcal{H}(p) \subset T_p^*X$$

Théorème: Hermann-Kremer

Soit $p \in X$
Si dim $\mathcal{H}(p) = n$, alors Π est localement observable en p.

Théorème:

Supposons que $\dim \mathcal{H}(p) = cste = k \ \forall p \in X$.

1. Π est localement observable si et seulement si $k = n$
2. La distribution

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= span\{f \in V^\infty(X); \langle d\phi, f\rangle = 0, \forall \phi \in \mathcal{O}\} \\ &= span\{f \in V^\infty(X); \langle \mathcal{H}, f\rangle = 0\} \end{aligned}$$

   est involutive.
3. Autour de chaque $p \in X$, $\exists z^1 = (z_1^1, ..., z_k^1)$ et $z^2 = (z_{k+1}^2, ..., z_n^2)$ tel que

$$\mathcal{D} = span\{\frac{\partial}{\partial z_{k+1}^2}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n^2}\}$$

   De plus, en coordonnées (z^1, z^2) :

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= f^1(z^1, u) \\ \dot{z}^2 &= f^2(z^1, z^2, u) \\ y &= h^1(z^1) \end{aligned}$$

4. Dans V_p (où les coordonnées (z^1, z^2) sont définies), z_0 et $\tilde{z}_0$ sont indistingables si $z_0^1 = \tilde{z}_0^1$

On considère un système affine avec la même sortie (mais tout se généralise avec les systèmes non affines). On prend juste le même nombre de sortie que de contrôle. $(y_i, 1 \leq i \leq m)$

Définition: Découplable

Σ est découplable entrée-sortie (I-O-decouplable) si $\exists z = \phi(x)$, $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ tel que :

$$\dot{z} = \tilde{f}(z) + \sum_{i=1}^m v_i \tilde{g}_i(z)$$

$Z = Z_0 \times ... \times Z_m$, avec $z = (z^0, z^1, ..., z^m)$

$$\begin{aligned} \dot{z}^0 &= \tilde{f}^0(z) + \textstyle\sum_{i=1}^m v^i \tilde{g}_i^0(z) & & \\ \dot{z}^1 &= \tilde{f}^1(z^1) + \tilde{g}_1(z^1)v^1 & y_1 &= h^1(z^1) \\ &\vdots & & \\ \dot{z}^m &= \tilde{f}^m(z^m) + \tilde{g}_m(z^m)v^m & y_m &= h^m(z^m) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{f} = \phi_*(f + g\alpha) = \phi_* \left(g + \sum_{i=1}^m g_i \alpha_i\right)$$

$$\tilde{g} = \phi_*(g\beta) \ \tilde{g}_i = \phi_* \left(\sum_{i=1}^m g_j \beta_{ji}\right)$$

Définition:

Pour chaque $1 \leq i \leq m$, soit ρ_i le plus petit nombre tel que

$$\frac{d^{\rho_i} y_i}{dt^{\rho_i}}$$

dépend exclusivement de u, ie

$$\exists j; L_{g_j} L_f^{\rho_i - 1} y_i \neq 0$$

Théorème:

Supposons rg$D(x) = cst$, où

$$D_{ij} = L_{g_j} L_f^{\rho_i - 1} h_i$$

appelée matice de découplage.
Le système Σ est découplable en x_0 si et seulement si :

$$rgD(x_0) = m$$

De plus, on pose $z_{ij} = L_f^{j-1} h_i, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq \rho_i$