

Calcul différentiel

22 novembre 2014

Table des matières

I	Calcul variationnel	2
1	Cas scalaire	2
2	Courbes paramétrées	4
3	Hamiltonien	4
II	Équations aux dérivées partielles d'ordre 1	7
1	Équations homogènes	7
2	Équations non homogènes	8
3	Équations quasi-linéaires	8
4	Systèmes d'EDP d'ordre 1	9

Première partie

Calcul variationnel

1 Cas scalaire

Ici : recherche d'optimum non plus dans un espace de réels, mais dans un espace de fonctions. On cherche y^* tel que :

$$I(y^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} I(y)$$

Considérons $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ et $L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Parmi tous les y , dérivable et tel que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$, trouver la courbe minimisant :

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x)) dx \quad (\text{P})$$

⇒ *Théorème: Euler-Lagrange*

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Idée de la démonstration : On prend y minimisant I , et on pose $Y = y + \varepsilon \eta$, avec $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, puis on reprend I dépendant de ε . I est minimal pour $\varepsilon = 0$, on dérive, on trouve ce qu'il faut !

✦ *Définition:*

g est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange si g est constante le long des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange.

¶ *Propriété:*

1. Si $L = L(x, y')$, alors $\frac{\partial L}{\partial y'} = C$
2. Si $L = L(y, y')$ alors $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C$.

✦ *Définition: Topologie dans $\mathcal{C}([x_1, x_2])$*

On définit une topologie dans $\mathcal{C}^0([x_1, x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^0; \|y\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^0([x_1, x_2]), V_\varepsilon^0(y) = \{\tilde{y} \in \mathcal{C}^0([x_1, x_2]) ; \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^0} < \varepsilon\}$$

On fait de même dans $\mathcal{C}^1([x_1, x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^1; \|y\|_{\mathcal{C}^1} = \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y(x)\|_2 + \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y'(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2]), V_\varepsilon^1(y) = \{\tilde{y} \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2]); \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon\}$$

✦ Définition:

On considère que le problème **P** admet comme solution y^* .
 y^* est un minimum fort strict s'il existe un voisinage dans $\mathcal{C}^0([x_1, x_2])$ (ie $V_\varepsilon^0(y^*)$) tel que :

$$I(y^*) < I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

C'est un maximum fort strict si :

$$I(y^*) > I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

$$\exists V_\varepsilon^1(y^*); I(y^*) < I(y) \Rightarrow y^* \text{ minimum faible strict}$$

$$\exists V_\varepsilon^1(y^*); I(y^*) > I(y) \Rightarrow y^* \text{ maximum faible strict}$$

✦ Définition:

Soit $D = [x_1, x_2] \times \mathbb{R}$.

$y(x, C), C \in \mathbb{R}$ est un champ d'extrémales, si :

1. $(x, y(x, C)) \in D, \forall C \in \mathbb{R}$
2. $\forall C \in \mathbb{R}, y(x)$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange.

Ce champ est dit propre si $\forall (x_0, y_0) \in D, \exists ! y(x, C)$ extrémale.

Ce champ est dit central si $y(x_1, C) = y_1, \forall C \in \mathbb{R}$ et $y(x, C) \neq y(x, \tilde{C}), \forall C \neq \tilde{C}, \forall x \neq x_1$.

☞ Théorème: Jacobi-Weierstrass

Supposons $L \in \mathcal{C}^3$. Considérons toujours le même problème de minimisation **P**.

Si y^* satisfait :

1. $y^*(x_1) = y_1$ et $y^*(x_2) = y_2$
2. y^* peut être plongé dans un champ d'extrémale soit propre soit central
3. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y^*, (y^*)') > 0$ (resp < 0)
 Alors y^* est un minimum (resp. maximum) faible
4. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0$ (resp < 0) $\forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$
 Alors y^* est un minimum (resp. maximum) fort.

2 Courbes paramétrées

On prend à présent $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$

$$L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

On veut minimiser $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x)) dx$

☞ **Théorème: Euler-Lagrange**

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

3 Hamiltonien

On pose à présent :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial y'_i}$$

$$H = -L + \sum_{i=1}^n y'_i p_i$$

En calculant dH , on arrive au système suivant :

$$\begin{cases} y'_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p'_i &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases} \quad (\text{SH})$$

ce qui est un système hamiltonnien.

📖 **Proposition:**

$I : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une intégrale première de $\dot{z} = f(z)$ si et seulement si

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial I}{\partial z_i} f_i \equiv 0$$

☞ **Corollaire:**

Si $I = I(z)$, alors la condition devient :

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial I}{\partial z_i} f_i = L_f I \equiv 0$$

Proposition:

Si $L = L(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ alors H est une intégrale première.

Proposition:

1. $I = I(y, p)$ est une intégrale première de (SH) si :

$$L_f I = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial I}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial y_i}}_{=\{I, H\} \text{ crochet de Poisson de I et H}} = 0$$

2. $I = I(x, y, p)$ est une intégrale première de (SH) si et seulement si

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \{I, H\} \equiv 0$$

Proposition:

H est une intégrale première si et seulement si L est invariant par rapport à $x \mapsto x + \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire:

H est une intégrale première si et seulement si $I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ est invariant par rapport à $x \mapsto x + \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la transformation

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \phi_0(x, y_1, \dots, y_n) \\ \tilde{y}_i &= \phi_i(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Définition:

$I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ est invariant par rapport à ϕ si

$$I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} L(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}') d\tilde{x}$$

On considère à présent une famille de transformation paramétré par α :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \phi_0(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \quad \phi_0(x, y_1, \dots, y_n, 0) = x \\ \tilde{y}_i &= \phi_i(x, y_1, \dots, y_n, \alpha), \quad \phi_i(x, y_1, \dots, y_n, 0) = y_i \end{aligned}$$

∞ \Rightarrow *Théorème: Emmy Noether*

Si ϕ préserve

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$$

alors le système d'Euler-Lagrange (ou de façon équivalente, (SH)) possède une intégrale première.

Deuxième partie

Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

1 Équations homogènes

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = 0 \quad (\text{EH})$$

$(f_1, \dots, f_n)^T$, $f_i = f_i(x)$: champ de vecteur donné. h cherché :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) \end{array}$$

✦ Définition: Problème de Cauchy

Soit M une hypersurface dans \mathbb{R}^n , une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\} \text{ où } \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ rg } \frac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \forall x \in M$$

Fixons M une hypersurface et $B : M \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy est :
Trouver une solution de (EH) tel que

$$h|_M = b$$

On remarque que h est une intégrale première de l'équation $\dot{x} = f(x)$
De même, en posant $y = \sigma(x)$, avec $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme, on remarque que pour la fonction \tilde{h} définit par :

$$h(x) = \tilde{h}(y)$$

on a \tilde{h} une intégrale première de $\dot{y} = \tilde{f}(y)$ définit par :

$$\tilde{f}(y(t)) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} (\sigma^{-1}(y(t))) f(\sigma^{-1}(y(t)))$$

⇨ Lemme:

Si $f(x_0) \neq 0$, $\exists y = \sigma(x)$ un difféomorphisme local, tel que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} (\sigma^{-1}(y)) f(\sigma^{-1}(y)) = \tilde{f}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

⇨ Lemme:

Étant donné (M, f) tels que $f(x_0) \notin T_{x_0}M$, $\exists y = \sigma(x)$ un difféomorphisme local, tel que :

$$M = \{y_1 = 0\} \text{ et } \frac{\partial \sigma}{\partial x} (\sigma^{-1}(y)) f(\sigma^{-1}(y)) = \tilde{f}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

⇒ *Théorème:*

1. Si $f(x_0) \neq 0$ alors (EH) possède des solutions dans un voisinage de x_0
2. Si $f(x_0) \notin T_{x_0}M$ alors dans un voisinage de x_0 , le problème de Cauchy possède une solution unique.

2 Équations non homogènes

On s'intéresse maintenant aux équations non homogènes :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) = \eta(x) \quad (\text{ENH})$$

⇒ *Théorème:*

1. Si $f(p) \neq 0$, alors il existe localement, autour de p , des solutions.
2. Fixons M une hypersurface et $b : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(p) \notin T_p M$, alors autour de p , il existe une solution du problème de Cauchy $(\text{ENH}) \oplus h|_M = b$
En plus,

$$h(\gamma_t(p)) = b(p) + \int_0^t \eta(\gamma_\tau(p)) d\tau$$

3 Équations quasi-linéaires

$$\nabla h.f(x, h) = \eta(x, h) \quad (\text{EQL})$$

On va chercher la solution sous une forme implicite, ie

$$\psi(x, h) = 0 \quad (\text{Impl})$$

Si on veut $h(x_0) = h_0$:

⇒ *Théorème: des fonctions implicites*

Si $\frac{\partial \psi}{\partial h}(x_0, h_0) \neq 0$, alors (Impl) possède une solution unique $h(x)$ satisfaisant cette dernière, ie $\psi(x, h(x)) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_i} &= - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial h}} \end{aligned}$$

On réintroduit ça dans (EQL) et on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial \psi}{\partial h} \eta = 0 \quad (\text{EHIm})$$

On obtient donc une équation homogène dans l'espace (x, h) de dimension $n + 1$!

4 Systèmes d'EDP d'ordre 1

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i^j(x) = \eta^j(x), \quad 1 \leq j \leq k \quad (\text{S})$$

On réécrit cela :

$$L_{f^j} h = \eta^j, \quad 1 \leq j \leq k$$

On construit la distribution $\mathcal{D} = \text{span}\{f^1, \dots, f^k\}$.

— Soit \mathcal{D} est involutive (et dans ce cas là, tout va bien !)

— Soit \mathcal{D} ne l'est pas.

Dans le deuxième cas, $\exists f^r, f^q; [f^r, f^q] \notin \mathcal{D}$. Dans ce cas là, on pose $f^{k+1} = [f^r, f^q]$ et :

$$\eta^{k+1} = L_{[f^r, f^q]} h = L_{f^r} \eta^q - L_{f^q} \eta^r$$

On rajoute $L_{f^{k+1}} h = \eta^{k+1}$ dans (S) et on construit une nouvelle distribution \mathcal{D} . On recommence, \mathcal{D} involutive ou non.

On note $\overline{\mathcal{D}}$ l'adhérence involutive de \mathcal{D} , ie la plus petite distribution involutive contenant \mathcal{D} .

Schématiquement, en notant $[A, B] = \{[a, b], a \in A, b \in B\}$

$$\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}^{j+1} = \mathcal{D}^j + [\mathcal{D}^j, \mathcal{D}^j]$$

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}^j$$

On note symboliquement ∞ , mais on sait que cela sera fini (n champs dans la distribution pour qu'elle soit involutive).

On peut toujours supposer \mathcal{D} involutive.

$$\forall f^i, f^j, [f^j, f^i] = \sum_{q=1}^k \alpha_q^{ji} f^q,$$

⇒ Théorème: Fröbenius

Considérons (S) où $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$ involutive.

1. (S) possède des solutions si et seulement si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites :

$$L_{f^j} \eta^i - L_{f^i} \eta^j = \sum_{q=1}^k \alpha_q^{ji} \eta^q \quad 1 \leq j < i \leq k \quad (\text{CI})$$

Le nombre de conditions d'intégrabilité vaut $\binom{k}{2}$

2. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - k$. Le problème de Cauchy (S) $\oplus (h|_M = b)$ possède une solution unique localement autour de $p \in \mathbb{R}^n$ si

$$\mathcal{D}(p) \oplus T_p M = \mathbb{R}^n$$