

Mesures et Opérateurs

12 janvier 2015

Table des matières

I	Opérateurs	2
1	Définitions et résultats préliminaires	2
2	Opérateurs non-bornés	3
2.1	Définitions et propositions	3
2.2	Opérateurs bornés	6
2.2.1	Opérateurs à image fermée	6
2.2.2	Opérateurs bornés	6
3	Topologie faible	7
4	Opérateurs compacts	9
4.1	Définitions	9
4.2	Théorie de Riesz-Fredholm	10
4.3	Spectre d'un opérateur - Décomposition spectrale	13
4.3.1	Spectre d'un opérateur compact	13
4.3.2	Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints	15
5	Théorème de Hille-Yosida	17
5.1	Opérateurs maximaux monotones	17
5.2	Problème d'évolution	19
5.2.1	Existence et unicité	19
5.2.2	Régularité	20
5.2.3	Dans les espaces de Banach	21
II	Mesures	22
1	Mesures - premières propriétés	22
1.1	σ -algèbre ou tribu	22
1.2	Mesures	22
1.3	Décomposition de Hahn	25
2	Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue	28
2.1	Fonctions mesurables	28
2.2	Intégrale de Lebesgue	29
2.3	Inégalités	30

Première partie

Opérateurs

1 Définitions et résultats préliminaires

⇒ *Théorème: du graphe fermé*

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T est fermé dans $E \times F$. Alors T est continue.

⇒ *Lemme: de Baire*

Soit X un espace métrique complet. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés. On suppose que

$$\forall n \geq 1, \overset{\circ}{X_n} = \emptyset$$

Alors

$$\overset{\circ}{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i} = \emptyset$$

Démonstration :

On pose $O_n = X_n^C$ le complémentaire de X_n , de sorte que O_n est un ouvert dense. Il s'agit de montrer que $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ est dense dans X .

Soit ω un ouvert non vide de X . On va prouver que $\omega \cap G \neq \emptyset$.

On choisit $x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ arbitraires tels que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

On choisit ensuite $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Ceci est possible car O_1 est ouvert et dense. Ainsi de suite, on construit par récurrence deux suites (x_n) et (r_n) telles que :

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $x_n \rightarrow l$. Comme $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ pour tous $n, p \geq 0$, on obtient à la limite (quand $p \rightarrow +\infty$) :

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)} \quad \forall n \geq 0$$

En particulier, $l \in \omega \cap G$.

✦ *Définition: Orthogonal d'un ev*

Soit X un espace de Banach.
Si $M \subset X$ est un sev, on pose

$$M^\perp = \{f \in X'; \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in M\}$$

Si $N \subset X'$ est un sev, on pose

$$N^\perp = \{x \in X; \langle f, x \rangle = 0 \ \forall f \in N\}$$

M^\perp (resp. N^\perp) est l'orthogonal de M (resp. N), qui est un sev fermé de X' (resp. X).

Proposition:

Soit $M \subset X$ un sev. On a alors

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \quad (1)$$

Soit $N \subset X'$ un sev. On a alors

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N} \quad (2)$$

Proposition:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X . On a :

$$G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp \quad (3)$$

$$G^\perp \cap L^\perp = (G + L)^\perp \quad (4)$$

Théorème:

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$G + L \text{ est fermé dans } X \quad (5)$$

$$G^\perp + L^\perp \text{ est fermé dans } X \quad (6)$$

$$G + L = (G^\perp + L^\perp)^\perp \quad (7)$$

$$G^\perp + L^\perp = (G \cap L)^\perp \quad (8)$$

2 Opérateurs non-bornés

2.1 Définitions et propositions

Définition: Opérateur

Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non borné de E dans F toute application linéaire

$$A : D(A) \subset E \rightarrow F$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F . $D(A)$ est le domaine de A .

On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)$$

(Oui, avec cette définition, un opérateur non borné peut être... Borné)

✦ Définition: Graphe, Image et Noyau

On appelle Graphe de A l'ensemble

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F$$

On appelle Image de A l'ensemble

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$$

On appelle Noyau de A l'ensemble

$$N(A) = \{u \in D(A); Au = 0\} \subset E$$

✦ Définition: fermé

On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

📖 Remarque:

1. Pour prouver qu'un opérateur A est fermé, on procède en général de la manière suivante : on prend une suite (u_n) dans $D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans E et $Au_n \rightarrow f$ dans F . Il s'agit ensuite de vérifier que
 - (a) $u \in D(A)$
 - (b) $f = Au$
2. Si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé.

✦ Définition: Adjoint

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur linéaire à domaine dense.

L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \rightarrow E'$, appelé adjoint de A , est l'unique opérateur vérifiant :

$$\langle v, Au \rangle_{F'F} = \langle A^*v, u \rangle_{E'E} \quad \forall u \in D(A), v \in D(A^*)$$

L'existence et l'unicité de cet opérateur vient principalement du théorème de Hahn-Banach dans sa forme analytique. On pose :

$$D(A^*) = \{v \in F'; \exists c \geq 0; |\langle v, Au \rangle| \leq c\|u\| \forall u \in D(A)\}$$

Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F' . On va maintenant définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. On considère l'application $g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $v \in D(A^*)$ par

$$g(u) = \langle v, Au \rangle_{F'F}$$

On a

$$|g(u)| \leq c\|u\| \forall u \in E$$

On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach : on sait que g peut être prolongée en une application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$|f(u)| \leq c\|u\| \forall u \in E$$

Par suite, $f \in E'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que $D(A)$ est dense. On pose enfin :

$$A^*v = f$$

Proposition:

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.

Démonstration :

Soit $(v_n) \subset D(A^*)$ telle que $v_n \rightarrow v$ dans F' et $A^*v_n \rightarrow f$ dans E' . Il s'agit de prouver que $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Or :

$$\langle v_n, Au \rangle = \langle A^*v_n, u \rangle \forall u \in D(A)$$

D'où à la limite, il vient :

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle$$

Par conséquent, $v \in D(A^*)$ par définition du domaine et $A^*v = f$.

Corollaire:

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ (dense). Alors on a :

1. $N(A) = R(A^*)^\perp$
2. $N(A^*) = R(A)^\perp$
3. $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$
4. $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$

Démonstration :

On peut très facilement vérifier les égalités suivantes :

$$N(A) \times \{0\} = G(A) \cap (E \times \{0\}) \tag{9}$$

$$E \times R(A) = G(A) + (E \times \{0\}) \tag{10}$$

$$\{0\} \times N(A^*) = G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \tag{11}$$

$$R(A^*) \times F' = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp \tag{12}$$

En utilisant (3), on a donc directement :

$$\begin{aligned}
 R(A^*)^\perp \times \{0\} &= (R(A^*) \times F')^\perp \\
 &= (G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp)^\perp \\
 &= G(A) \cap (E \times \{0\}) \\
 &= N(A) \times \{0\}
 \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.

Pour le deuxième, on fait de même :

$$\begin{aligned}
 \{0\} \times R(A)^\perp &= (G(A) + (E \times \{0\}))^\perp \\
 &= G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp \\
 &= \{0\} \times N(A^*)
 \end{aligned}$$

Pour les deux derniers résultats, on utilise les deux premiers avec (1) et (2).

2.2 Opérateurs bornés

2.2.1 Opérateurs à image fermée

⇒ *Théorème:*

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non-borné, fermé, avec le support de A dense dans E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A)$ est fermé
2. $R(A^*)$ est fermé
3. $R(A) = N(A^*)^\perp$
4. $R(A^*) = N(A)^\perp$

Démonstration :

- (1) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\})$ fermé dans X (10)
- (2) $\Leftrightarrow G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ fermé dans X' (12)
- (3) $\Leftrightarrow G(A) + (E \times \{0\}) = (G(A)^\perp \cap (E \times \{0\})^\perp)^\perp$ (10) et (11)
- (4) $\Leftrightarrow (G(A) \cap (E \times \{0\})^\perp)^\perp = G(A)^\perp + (E \times \{0\})^\perp$ (9) et (12)

La conclusion nous vient directement du théorème (5)-(8).

2.2.2 Opérateurs bornés

⇒ *Théorème:*

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur non-borné, fermé, avec son domaine dense dans E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $D(A) = E$
2. A est borné
3. $D(A^*) = F'$
4. A^* est borné

Dans ces conditions, on a :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$$

Démonstration :

(1) \Rightarrow (2) : il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé.

(2) \Rightarrow (3) : par définition de $D(A^*)$ donnée après la définition de A^*

(3) \Rightarrow (4) : On applique la proposition précédente sur une caractérisation de A^* fermée et à l'aide du théorème du graphe fermé.

(4) \Rightarrow (1) : Plus délicat. Notons d'abord que $D(A^*)$ est fermé. En effet, soit $(v_n) \subset D(A^*)$ avec $v_n \rightarrow v$ dans F' . On a :

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\|$$

Par conséquent, (A^*v_n) converge vers une limite f . Comme A^* est fermé, $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$. Dans l'espace $X = E \times F$, on considère les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que

$$G + L = D(A) \times F \text{ et } G^\perp + L^\perp = E' \times D(A^*)$$

Par conséquent, $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X' . Le théorème (5)-(8) permet de conclure que $G + L$ est fermé, donc que $D(A)$ est fermé. Comme $\overline{D(A)} = E$, on en déduit que $D(A) = E$.

Prouvons maintenant que $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$. On a :

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle \quad \forall u \in E, \quad \forall v \in F'$$

Donc

$$|\langle v, Au \rangle| \leq \|A^*\| \|v\| \|u\|$$

et

$$\|Au\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle v, Au \rangle| \leq \|A^*\| \|u\|$$

Par suite, $\|A\| \leq \|A^*\|$. Inversement, on a :

$$\|A^*v\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle A^*v, u \rangle| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle v, Au \rangle| \leq \|A\| \|v\|$$

Par conséquent, $\|A^*\| \leq \|A\|$.

3 Topologie faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual. Pour $f \in E'$, on définit $\phi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$. On définit ainsi une famille $(\phi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

✦ Définition: Topologie faible

La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\phi_f)_{f \in E'}$ continues, ie la topologie sur E avec un nombre minimal d'ouvert rendant les ϕ_f continues.

On note par \rightharpoonup la convergence pour la topologie faible.

📘 Proposition:

Soit $(x_n)_n$ une suite de E . On a :

1. $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in E', \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$
2. Si $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$
3. Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
4. Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \rightarrow f$ dans E' , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Démonstration : 1. Admis

2. Résulte de (1), puisque $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\|$

3. On utilise pour cela le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus suivant :

Corollaire : Soit G un espace de Banach et soit B un sous-ensemble de G . On suppose que pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(B) = \bigcup_{x \in B} \langle f, x \rangle$ est borné. Alors B est borné.

Il suffit donc de vérifier que pour chaque $f \in E'$, l'ensemble $(\langle f, x_n \rangle)_n$ est borné. Or, pour chaque $f \in E'$, la suite $\langle f, x_n \rangle$ converge vers $\langle f, x \rangle$ (en particulier, elle est bornée). Soit $f \in E'$, on a :

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \|x_n\|$$

et à la limite :

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$

Par conséquent :

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf \|x_n\|$$

4. On a :

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n - f\| \|x\| + |\langle f, x_n - x \rangle|$$

On conclut grâce à (1) et (3).

Proposition:

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

4 Opérateurs compacts

4.1 Définitions

Soient E et F deux espaces de Banach.

On désigne par B_E la boule unité centrée à l'origine, ie

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

et par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

✦ Définition: Opérateur compact

On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si l'image de la boule unité par T est relativement compact pour la topologie forte, ie :

$$\overline{T(\{x \in E; \|x\| \leq 1\})} \subset F \text{ compact}$$

On désigne par $\mathcal{H}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F , et $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(E, E)$.

⇒ Théorème:

$\mathcal{H}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ (pour la norme $\|\bullet\|_{\mathcal{L}(E, F)}$).

Démonstration :

Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.

Supposons que $(T_n) \subset \mathcal{H}(E, F)$, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \rightarrow 0$. Montrons que $T \in \mathcal{H}(E, F)$. Comme F est complet, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(f_i, \varepsilon)$ dans F .

Pour n assez grand, on a $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $T_n(B_E)$ est relativement compact, on a pour I fini

$$T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Donc par force,

$$T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$$

✦ Définition: Rang fini

On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si $R(T) < \infty$

Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact (car les compacts dans un espace de dimension finie sont les sous-espaces fermés bornés).

⇒ *Corollaire:*

Soit (T_n) une suite d'opérateurs de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \rightarrow 0$. Alors $T \in \mathcal{H}(E, F)$.

¶ *Proposition:*

Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{H}(F, G)$ (ou $T \in \mathcal{H}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S \circ T \in \mathcal{H}(E, G)$.

⇒ *Théorème: Schauder*

Si $T \in \mathcal{H}(E, F)$, alors $T^* \in \mathcal{H}(F', E')$, et réciproquement.

Démonstration :

On aura pour cela besoin du théorème d'Ascoli :

Théorème : Soit K un espace métrique compact et soit \mathcal{H} un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$, l'ensemble des fonctions continues sur K .

On suppose que \mathcal{H} est uniformément équicontinu, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

Alors \mathcal{H} est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$.

Montrons que $T^*(B_{F'})$ est relativement compact dans E' . Soit (v_n) une suite de $B_{F'}$. Montrons que l'on peut extraire une sous-suite telle que $T^*(v_{n_k})$ converge. Soit $K = \overline{T(B_E)}$ (métrique compact) et soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K)$ défini par :

$$\mathcal{H} = \{\phi_n : x \in K \rightarrow \langle v_n, x \rangle; n = 1, 2, \dots\}$$

Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite notée ϕ_{n_k} qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ vers une fonction $\phi \in \mathcal{C}(K)$. En particulier :

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu \rangle - \phi(Tu)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Donc

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_k}, Tu \rangle - \langle v_{n_l}, Tu \rangle| \xrightarrow{k, l \rightarrow +\infty} 0$$

ie

$$\|T^*v_{n_k} - T^*v_{n_l}\|_{E'} \xrightarrow{k, l \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent, $T^*v_{n_k}$ converge dans E' .

Réciproquement, supposons que $T^* \in \mathcal{H}(F', E')$. D'après ce qui précède, $T^{**} \in \mathcal{H}(E'', F'')$ et en particulier, $T^{**}(B_E)$ est relativement compact dans F'' . Or, $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ et F fermé dans F'' . Par conséquent, $T(B_E)$ est relativement compact dans F .

4.2 Théorie de Riesz-Fredholm

⇒ *Lemme: de Riesz*

Soit E un e.v.n. et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé tel que $M \neq E$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \exists u \in E; \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Démonstration :

Soit $v \in E \setminus M$. Comme M est fermé, alors $d = d(v, M) > 0$. On choisit $m_0 \in M$ tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Alors

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

répond à la question. En effet, si $m \in M$, on a :

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \varepsilon$$

puisque

$$m_0 + \|v - m_0\|m \in M$$

⇒ *Théorème: Riesz*

Soit E un e.v.n. tel que B_E soit compact. Alors E est de dimension finie.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Si E est de dimension infinie, il existe une suite (E_n) de sous-espaces de dimension finie tels que $E_{n-1} \subsetneq E_n$. Grâce au lemme précédent, on peut construire une suite (u_n) avec $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. En particulier, $\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour $m < n$. Donc la suite (u_n) n'admet aucune sous-suite convergente - ce qui est contraire à l'hypothèse B_E compact.

⇒ *Théorème: Alternative de Fredholm*

Soit $T \in \mathcal{H}(E)$. Alors :

1. $N(I - T)$ est de dimension finie
2. $R(I - T)$ est fermé, et plus précisément

$$R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$$

3. $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$
4. $\dim N(I - T) = \dim N(I - T^*)$

Démonstration : 1. Soit $E_1 = N(I - T)$. Alors $B_{E_1} \subset T(B_E)$ et donc B_{E_1} est compact. D'après le théorème de Riesz précédent, E_1 est de dimension finie.

2. Soit $f_n = u_n - Tu_n \rightarrow f$. Il faut montrer que $f \in R(I - T)$. Posons $d_n = d(u_n, N(I - T))$. Comme $N(I - T)$ est de dimension finie, il existe $(v_n) \subset N(I - T)$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$. On a :

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \quad (13)$$

Montrons que $\|u_n - v_n\|$ reste borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite telle que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \rightarrow \infty$. En posant

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$$

on aurait grâce à (13) $w_{n_k} - T(w_{n_k}) \rightarrow 0$. En extrayant une sous-sous-suite (encore notée (w_{n_k}) pour simplifier) on peut supposer que $T w_{n_k} \rightarrow z$. Donc $w_{n_k} \rightarrow z$ et $z \in N(I - T)$. D'autre part :

$$d(w_n, N(I - T)) = \frac{d(u_n, N(I - T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

puisque $v_n \in N(I - T)$. À la limite on obtient $d(z, N(I - T)) = 1$ - ce qui est absurde, vu que $z \in N(I - T)$. Par conséquent, $\|u_n - v_n\|$ reste borné et comme T est compact, on peut extraire une sous-suite telle que $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \rightarrow l$.

On déduit de (13) que $u_{n_k} - v_{n_k} \rightarrow f + l$; posant $g = f + l$, on a $g - Tg = f$, ie $f \in R(I - T)$. On a donc montré que l'opérateur $I - T$ est à image fermée. On peut alors appliquer un théorème précédent sur la fermeture de l'ensemble image, et en conclure :

$$R(I - T) = N(I - T^*)^\perp \text{ et } R(I - T^*) = N(I - T)^\perp$$

3. Prouvons d'abord l'implication \Rightarrow .

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$E_1 = R(I - T) \neq E$$

E_1 est un espace de Banach et $T(E_1) \subset E_1$. Donc $T|_{E_1} \in \mathcal{H}(E_1)$ et $E_2 = (I - T)(E_1)$ est un sous-espace fermé de E_1 . De plus, $E_2 \neq E_1$ (puisque $(I - T)$ injectif). En posant $E_n = (I - T)^n(E)$, on obtient ainsi une suite strictement décroissant de sous-espaces fermés. D'après le lemme de Riesz, il existe une suite (u_n) telle que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. On a :

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Notons que si $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ et par conséquent :

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Donc $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$ - ce qui est absurde puisque T est compact. Donc $R(I - T) = E$.

Inversement, supposons que $R(I - T) = E$. Alors par corollaire précédent, $N(I - T^*) = R(I - T)^\perp = \{0\}$. Puisque $T^* \in \mathcal{H}(E')$, on peut appliquer ce qui précède à T^* et conclure que $R(I - T^*) = E'$. Or, par le même corollaire, $N(I - T) = R(I - T^*)^\perp = \{0\}$.

4. Soit $d = \dim N(I - T)$ et $d^* = \dim N(I - T^*)$. On va d'abord montrer que $d^* \leq d$. Raisons par l'absurde et supposons que $d < d^*$. Comme $N(I - T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique dans E ; il existe donc un projecteur continue P de E sur $N(I - T)$.

D'autre part, $R(I - T) = N(I - T)^\perp$ est de codimension finie d^* et par conséquent, $R(I - T)$ admet dans E un supplémentaire topologique, noté F de dimension d^* . Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\Lambda : N(I - T) \rightarrow F$ qui est injective et non surjective. Posons $S = T + (\Lambda \circ P)$; alors $R \in \mathcal{H}(E)$ puisque $\Lambda \circ P$ est de rang fini.

Montrons que $N(I - S) = \{0\}$. En effet, si

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda \circ Pu)$$

alors

$$u - Tu = 0 \text{ et } \Lambda \circ Pu = 0$$

ie $u \in N(I - T)$ et $\Lambda u = 0$, donc $u = 0$

En appliquant (3) à l'opérateur S , on voit que $R(I - S) = E$. Ceci est absurde puisqu'il existe $f \in F$, $f \notin R(\Lambda)$; l'équation $u - Su = f$ n'admet pas de solution.

Par conséquent, on a prouvé que $d^* \leq d$. En appliquant ce résultat à T^* , on voit que

$$\dim N(I - T^{**}) \leq \dim N(I - T^*) \leq \dim N(I - T)$$

Or, $N(I - T^{**}) \supset N(I - T)$ - ce qui permet de conclure que $d = d^*$.

Remarque:

1. L'Alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$. Elle exprime que :
 - **Ou bien** pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ admet une solution unique
 - **Ou bien** l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité (i.e. $f \in N(I - T^*)^\perp$).
2. La propriété (3) est familière en dimension finie. Si $\dim E < \infty$, un opérateur linéaire de E dans lui-même est injectif si et seulement s'il est surjectif.

4.3 Spectre d'un opérateur - Décomposition spectrale

4.3.1 Spectre d'un opérateur compact

Définition: Ensemble résolvant, spectre, espace propre

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$

L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ dans } E\}$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$$

On dit que λ est valeur propre - et on note $\lambda \in VP(T)$ - si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

$N(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ .

Remarque : Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. En général, l'inclusion est stricte (sauf bien sûr en dimension finie). Il peut exister λ tel que

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(T - \lambda I) \neq E$$

(un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).

Par exemple, prenons dans $E = l^2$, $Tu = (0, u_1, u_2, \dots)$ où $u = (u_1, u_2, \dots)$ (T est appelé le shift à droite). Alors $0 \in \sigma(T)$ et $0 \notin VP(T)$.

Proposition:

Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$$

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| > \|T\|$. Montrons que $T - \lambda I$ est bijectif - ce qui prouvera $\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$.

Étant donné $f \in E$, l'équation $Tu - \lambda u = f$ admet une solution unique car elle s'écrit $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ et on peut lui appliquer le théorème du point fixe de Banach (en effet, il est simple de vérifier que l'application $u \mapsto \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ définit une contraction : il suffit de majorer par $\frac{\|T\|}{\lambda}$).

Montrons maintenant que $\rho(T)$ est ouvert - ainsi $\sigma(T)$ sera par complémentaire fermé, et donc compact. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$ (voisin de λ_0) et $f \in E$, on cherche à résoudre :

$$Tu - \lambda u = f \quad (14)$$

Or, on peut réécrire (14) $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, ie :

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u] \quad (15)$$

En appliquant à nouveau le théorème du point fixe de Banach, on voit que (15) possède une solution unique si

$$|\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$$

On définit donc une boule ouverte autour de λ_0 incluse dans $\rho(T)$. Donc $\rho(T)$ est un ouvert.

⇒ Théorème:

Soit $T \in \mathcal{H}(E)$ avec $\dim E = +\infty$. Alors on a :

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
3. l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(T) = 0$
 - ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini
 - ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

Démonstration : 1. Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est bijectif et $I = T \circ T^{-1}$ est compact. Donc B_E est compact et par force, $\dim E < \infty$ par le théorème de Riesz précédent.

2. Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Montrons que $\lambda \in VP(T)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(T - \lambda I) = \{0\}$. Alors d'après l'alternative de Fredholm, on sait que $R(T - \lambda I) = E$, et donc $\lambda \in \rho(T)$ - ce qui est absurde.
3. On va avoir besoin du lemme suivant :

⇒ Lemme:

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$ une suite de réels tous distincts telle que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda$$

Alors $\lambda = 0$.

On sait que $\lambda_n \in VP(T)$; soit $e_n \neq 0$ tel que $(T - \lambda_n)e_n = 0$. Soit $E_n = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$. Montrons que $\forall n, E_n \subsetneq E_{n+1}$.

Il suffit de vérifier que, pour tout n , les vecteurs e_1, \dots, e_n sont linéairement indépendants. Raisonnons par récurrence sur n . Admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Alors :

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Par suite, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, et donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ - ce qui est absurde. Donc $E_n \subsetneq E_{n+1}$ pour tout n .

D'autre part, il est clair que $(T - \lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$. En appliquant le lemme de Riesz, on construit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$. Soient $2 \leq m < n$ de sorte que

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$$

On a :

$$\left\| \frac{T u_n}{\lambda_n} - \frac{T u_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{T u_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{T u_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Si $\lambda_n \rightarrow \lambda$, on aboutit à une contradiction, puisque $(T u_n)$ admet une sous-suite convergente.

Retour à la démonstration du théorème : Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

est vide ou fini (s'il contenait une infinité de points distincts, on aurait un point d'accumulation - puisque $\sigma(T)$ est compact - et on aboutirait à une contradiction avec le lemme démontré précédemment). Lorsque $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, on peut donc les ranger en une suite qui tend vers 0.

4.3.2 Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints

On suppose dans la suite que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $T \in \mathcal{L}(H)$. En identifiant H et H' (grâce au théorème de représentation de Riesz), on peut considérer que $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

✦ Définition: Autoadjoint

On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$, ie

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H$$

📘 Proposition:

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose :

$$m = \inf_{u \in H, |u|=1} (Tu, u) \text{ et } M = \sup_{u \in H, |u|=1} (Tu, u)$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, avec $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Démonstration :

Soit $\lambda > M$; montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On a :

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \quad \forall u \in H$$

et par conséquent

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H \text{ avec } \alpha > 0$$

Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on voit que $\lambda I - T$ est bijectif.

Montrons que $M \in \sigma(T)$. La forme $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ est bilinéaire, symétrique et

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme $a(u, v)$, il vient :

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

(Il faut m'expliquer où est CS là...?)

D'où il résulte en particulier

$$|Mu - Tu| \leq C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H \quad (16)$$

Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| = 1$ et $(Tu_n, u_n) \rightarrow M$. Grâce à (16), on voit que $|Mu_n - Tu_n| \rightarrow 0$ et donc $M \in \sigma(T)$ (car si $M \in \rho(T)$, alors $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \rightarrow 0$)

Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$

Corollaire:

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors $T = 0$.

Démonstration :

D'après la proposition précédente, on sait que

$$(Tu, u) = 0 \quad \forall u \in H$$

Il en résulte que :

$$2(Tu, v) = (T(u + v), u + v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \quad \forall u, v \in H$$

Donc $T = 0$

Théorème: Diagonalisation

On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact.

Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T .

Démonstration :

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la suite des valeurs propres distincte de T , excepté 0; on note $\lambda_0 = 0$.

On pose $E_0 = N(T)$ et $E_n = N(T - \lambda_n I)$; rappelons que

$$0 \leq \dim E_0 \leq \infty \text{ et que } 0 < \dim E_n < \infty$$

Montrons d'abord que H est comme hilbertienne des $(E_n)_{n \geq 0}$:

1. Les $(E_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux. En effet, si $u \in E_m$ et $v \in E_n$ avec $m \neq n$ alors

$$Tu = \lambda_m u \text{ et } Tv = \lambda_n v$$

et

$$(Tu, v) = \lambda_m (u, v) = (u, Tv) = \lambda_n (u, v)$$

Donc $(u, v) = 0$

2. Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_{n \geq 0}$. Vérifions que F est dense dans H .

Il est clair que $T(F) \subset F$. Il s'en suit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$; en effet, si $u \in F^\perp$ et $v \in F$, alors $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$. L'opérateur $T_0 = T|_F$ est autoadjoint compact. D'autre part, $\sigma(T_0) = \{0\}$; en effet, si

$$\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}, \text{ alors } \lambda \in VP(T_0)$$

et donc il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tel que $T_0 u = \lambda u$. Par conséquent, λ est l'une des valeurs propres λ_n de T et $u \in F^\perp \cap E_n$. Donc $u = 0$, ce qui est absurde.

Il résulte du corollaire précédent que $T_0 = 0$; par suite

$$F^\perp \subset N(T) \subset F \text{ et } F^\perp = \{0\}$$

Donc F est dense dans H .

Enfin, on choisit dans chaque E_n une base hilbertienne. La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T .

5 Théorème de Hille-Yosida

5.1 Opérateurs maximaux monotones

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert.

✦ *Définition: Maximal et monotone*

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone (ou accréatif ou dissipatif) si

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A)$$

A est maximal monotone si de plus, $R(I + A) = H$, ie

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A); u + Au = f$$

¶ *Proposition:*

Soit A un opérateur maximal monotone. Alors :

1. $D(A)$ est dense dans H
2. A est fermé
3. Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H , et $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné de norme $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Démonstration : 1. Soit $f \in H$ tel que $(f, v) = 0$ pour tout $v \in D(A)$. Vérifions que $f = 0$. En effet, il existe $v_0 \in D(A)$ tel que $v_0 + Av_0 = f$. On a :

$$0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2$$

Donc $v_0 = 0$ et par suite $f = 0$.

2. Notons d'abord que pour tout $f \in H$ il existe $u \in D(A)$ unique tel que $u + Au = f$. En effet, si \tilde{u} désigne une autre solution, alors on a $(u - \tilde{u}) + A(u - \tilde{u}) = 0$. Prenant le produit scalaire avec $(u - \tilde{u})$ et appliquant la monotonie de A , on voit que $u - \tilde{u} = 0$.

D'autre part, on a $|u|^2 + (Au, u) = (f, u)$ et par suite, $|u| \leq |f|$. L'opérateur $f \mapsto u$ noté $(I + A)^{-1}$ est donc un opérateur linéaire borné de H dans H et $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Montrons que A est fermé. Soit $(u_n) \subset D(A)$ une suite telle que $u_n \rightarrow u$ et $Au_n \rightarrow f$. Il faut vérifier que $u \in D(A)$ et que $Au = f$. On a $u_n + Au_n \rightarrow u + f$ et donc

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \rightarrow (I + A)^{-1}(u + f)$$

Par conséquent, $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, ie $u \in D(A)$ et $Au = f$.

3. Supposons que pour un certain $\lambda_0 > 0$, on ait $R(I + \lambda_0 A) = H$. On va montrer que pour tout $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, on a $R(I + \lambda A) = H$.

Commençons par noter que pour tout $f \in H$ il existe $u \in D(A)$ unique tel que $u + \lambda_0 Au = f$; l'opérateur $f \mapsto u$ est noté $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ et l'on a $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. On cherche à résoudre l'équation

$$u + \lambda Au = f \quad \text{avec } \lambda > 0$$

On réécrit l'équation sous la forme

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

Ou encore :

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right] \quad (17)$$

On voit alors que si $\left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| < 1$, ie $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, alors (17) admet une solution grâce au théorème du point fixe de Banach.

Si A est maximal monotone, alors $I + A$ est surjectif. D'après ce qui précède, $I + \lambda A$ est surjectif pour $\lambda > \frac{1}{2}$ donc aussi pour $\lambda > \frac{1}{4}$, etc. Par récurrence on voit que $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

✦ Définition: Résolvante et régularisée

Soit A un opérateur maximal monotone. On pose, pour tout $\lambda > 0$,

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \text{ et } A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

J_λ est la résolvante de A et A_λ est la régularisée Yosida de A .

On retiendra que $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

¶ Proposition:

Soit A un opérateur maximal monotone. On a :

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \forall v \in H$ et $\forall \lambda > 0$
2. $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
3. $|A_\lambda v| \leq |Av| \forall v \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0$
4. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \forall v \in H$
5. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \forall v \in D(A)$
6. $(A_\lambda v, v) \geq 0 \forall v \in H, \forall \lambda > 0$
7. $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda} |v| \forall v \in H, \forall \lambda > 0$

Démonstration : 1. Équivaut à $v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$, qui résulte de la définition de J_λ

2. On a :

$$Av = \frac{1}{\lambda} [(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda} (I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

et donc

$$J_\lambda Av = \frac{1}{\lambda} (v - J_\lambda v)$$

3. Résulte de 2)

4. Supposons d'abord que $v \in D(A)$. Alors

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leq \lambda |Av|$$

Donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v$.

Passons au cas général. Soit $v \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{D(A)} = H$, il existe $v_1 \in D(A)$ tel que $|v - v_1| \leq \varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\ &\leq 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \\ &\leq 2\varepsilon + |J_\lambda v_1 - v_1| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda v - v| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

et donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda v - v| = 0$$

5. Appliquer 2. et 4.

6. On a

$$\begin{aligned} (A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\ &= \lambda |A_\lambda v|^2 + (A_\lambda(J_\lambda v), J_\lambda v) \end{aligned}$$

Donc

$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0$$

7. Viens de la dernière inégalité et de Cauchy-Schwarz.

5.2 Problème d'évolution

5.2.1 Existence et unicité

On s'intéresse au problème général suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au &= 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0 \end{cases} \quad (\text{PbEv})$$

On rappelle le résultat classique suivant :

∞ *Théorème: Cauchy-Lipschitz-Picard*

Soit E un espace de Banach et soit $F : E \rightarrow E$ une application telle que

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E \quad (L \geq 0)$$

Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty[; E)$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= Fu & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0 \end{cases} \quad (\text{CLP})$$

∞ *Théorème: Hille-Yosida*

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$$

unique vérifiant (PbEv). De plus, on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0$$

Remarque:

1. Soit $t \geq 0$; on considère l'application linéaire $S_A(t) : u_0 \mapsto u(t)$ de $D(A)$ dans $D(A)$ où $u(t)$ est la solution de (PbEv). Étant donné que $|S_A(t)u_0| \leq |u_0|$, on peut prolonger $S_A(t)$ par continuité et densité en un opérateur linéaire continue de H dans lui-même, qu'on désigne toujours par $S_A(t)$. On vérifie facilement que $S_A(t)$ possède les propriétés suivantes :

- (a) Pour chaque $t \geq 0$, $S_A(t) : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire continue et $S_A(t)_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$
- (b) $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$ et $S_A(0) = Id$
- (c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall u_0 \in H$

Une famille $\{S(T)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ définie pour chaque valeur du paramètre $t \geq 0$ et vérifiant ces trois points est par définition un semi-groupe continu de contractions.

On montre qu'inversement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$, il existe un opérateur A maximal monotone unique tel que $S(T) = S_A(t)$ pour tout $t \geq 0$.

On établit ainsi une correspondance bijective entre les opérateurs maximaux monotones et les semi-groupes continus de contraction.

2. Soit A un opérateur maximal monotone et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se ramène très simplement à la résolution de (PbEv) grâce à l'artifice classique suivant. On pose

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

Alors v vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ v(0) = u_0 \end{cases} \quad (18)$$

5.2.2 Régularité

Définition:

On définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}); Av \in D(A^{k-1})\}, \quad k \text{ entier } \geq 2$$

On vérifie aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^k (A^j u, A^j v)$$

Théorème:

On suppose que $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (PbEv) vérifie de plus :

$$u \in \mathcal{C}^{k-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k$$

5.2.3 Dans les espaces de Banach

Soit E un espace de Banach.

✧ *Définition: m-accréatif*

Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est m-accréatif si $\overline{D(A)} = E$ et si pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est bijectif de $D(A)$ sur E , avec $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$

⇒ *Théorème: Hille-Yosida dans les espaces de Banach*

Soit A un opérateur m-accréatif dans E . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$$

unique vérifiant (PbEv). De plus, on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0$$

⇒ *Théorème:*

On suppose que A est m-accréatif. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, la solution u de (PbEv) est donnée par la formule exponentielle

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-1} \right]^n u_0$$

Deuxième partie

Mesures

1 Mesures - premières propriétés

1.1 σ -algèbre ou tribu

✧ Définition: Tribu

Une algèbre \mathcal{A} est un ensemble de parties d'un espace Ω telle que :

1. Ω et $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B \in \mathcal{A}$

\mathcal{A} est une σ -algèbre ou tribu si pour toute suite $A_n \in \mathcal{A}$, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

✧ Définition: Espace mesurable

Un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) est un ensemble Ω muni d'une tribu \mathcal{A} .

Exemples de tribus :

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{A} = 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω
3. Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque indexée sur un ensemble I (fini ou infini, dénombrable ou non), alors $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu.

✧ Définition:

Si \mathcal{C} est un ensemble quelconque de parties de Ω , on pose :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-algèbre de } \Omega, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

$\sigma(\mathcal{C})$ est une σ -algèbre de Ω , appelée σ -algèbre engendrée par \mathcal{C} . C'est la plus petite tribu au sens de l'inclusion contenant \mathcal{C} .

1.2 Mesures

✧ Définition:

Soit μ une fonction définie sur une classe \mathcal{A} de parties de Ω à valeur dans \mathbb{R} ou $[0, +\infty]$.

1. μ est additive si pour toute suite finie d'ensembles $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

2. μ est σ -additive si pour tout suite d'ensembles $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proposition:

Soit μ une fonction définie sur une classe \mathcal{A} de partie de Ω à valeur dans $[0, +\infty]$

1. Si μ est additive ou σ -additive, alors μ est monotone, ie :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

2. Si μ est additive, alors μ est sous-additive, ie pour toute suite finie d'ensembles $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

3. Si μ est σ -additive, alors μ est σ -sous-additive, ie pour toute suite d'ensembles $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$, on a :

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Proposition:

Soit μ une fonction σ -additive réelle (en excluant un des infinis au moins) ou positive, définie sur une σ -algèbre \mathcal{A} (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

1. Continuité à gauche : si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ est une suite croissante de \mathcal{A} , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

2. Continuité à droite : si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ est une suite décroissante de \mathcal{A} telle que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ et telle que l'un des A_n soit de mesure finie, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$$

Contre-exemple dans le cas où la mesure de tout A_n n'est pas finie : On prend dans \mathbb{R} : $A_n = [n, +\infty[$. On a pour tout n $\mu(A_n) = +\infty$. Alors $\bigcap_n A_n = \emptyset$, et

$$\mu \left(\bigcap_n A_n \right) = 0$$

Donc

$$\mu(A_n) \not\rightarrow \mu \left(\bigcap_n A_n \right)$$

✧ Définition:

Soit \mathcal{A} une tribu sur un ensemble Ω :

1. Une mesure réelle μ sur \mathcal{A} est une fonction σ -additive telle que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$
2. Une mesure positive μ sur \mathcal{A} est une fonction σ -additive telle que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ et telle que $\mu(\emptyset) = 0$

On dit que μ est σ -finie si de plus, on a

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \text{ avec } \Omega_i \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(\Omega_i) < \infty$$

✧ Définition:

Un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un ensemble Ω munie d'une σ -algèbre \mathcal{A} et d'une mesure μ positive définie sur \mathcal{A} . Si $\mu(\Omega) = 1$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un espace probabilisé.

✧ Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Une partie N de Ω est dite négligeable lorsqu'il existe un $A \in \mathcal{A}$ contenant N et de mesure nulle.
2. μ est une mesure complète lorsque tout ensemble négligeable pour μ appartient à la tribu \mathcal{A} .

✧ Définition:

Soit μ une fonction positive définie sur une partie \mathcal{A} d'un ensemble Ω . On appelle mesure extérieure la fonction définie pour tout sous-ensemble A de Ω par :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i); A_i \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

❏ Propriété: de la mesure extérieure

1. μ^* est monotone
2. μ^* est σ -sous-additive

Remarque : En général, μ^* n'est pas additive.

✦ Définition:

Soit μ une fonction positive définie sur une partie \mathcal{A} d'un ensemble Ω . Un sous-ensemble A de Ω est dit μ -mesurable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$

où $A \Delta A_\varepsilon = (A \cup A_\varepsilon) \setminus (A \cap A_\varepsilon)$

On note \mathcal{A}_μ la classe des ensembles μ -mesurable.

⇒ Théorème:

Soit μ une fonction réelle positive, σ -additive, définie sur une algèbre \mathcal{A} . Alors :

1. On a $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_\mu$ et la mesure extérieure μ^* coïncide avec μ sur \mathcal{A}
2. La famille d'ensemble \mathcal{A}_μ est une σ -algèbre sur Ω
3. La restriction de μ^* à \mathcal{A}_μ est σ -additive et est une mesure complète
4. La fonction μ^* est l'unique extension positive σ -additive à $\sigma(\mathcal{A})$ (et aussi à \mathcal{A}_μ).

□ Proposition:

Soit μ une fonction réelle σ -additive, définie sur une algèbre \mathcal{A} et $A \subset \Omega$. Alors il y a équivalence des propositions :

1. A est μ -mesurable ($A \in \mathcal{A}_\mu$)
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$
3. Il existe deux ensembles mesurables $A', A'' \in \sigma(\mathcal{A})$ tels que

$$A' \subset A \subset A'' \text{ tels que } \mu^*(A'' \setminus A') = 0$$

4. $\mu^*(A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = \mu^*(\Omega)$
5. Pour tout $E \subset \Omega$,

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E)$$

1.3 Décomposition de Hahn

✦ Définition:

Soit $A \in \mathcal{A}$. On dit que $A \geq 0$ si $\forall B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) \geq 0$.

⇒ Théorème: Décomposition de Hahn

Soit μ une mesure σ -additive à valeurs réelles définie sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) . Alors il existe des ensembles disjoints Ω^+ et Ω^- de \mathcal{A} tels que $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$ et tels que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(A \cap \Omega^+) \geq 0 \text{ et } \mu(A \cap \Omega^-) \leq 0$$

Démonstration :

On suppose que μ ne prend pas comme valeur $-\infty$ (sinon, il suffirait de faire le raisonnement avec $-\mu$).

On commence par le lemme suivant :

Lemme : On suppose que $D \in \mathcal{A}$ est tel que $\mu(D) \leq 0$. Alors il existe $A \subset D$, $A \leq 0$, tel que $\mu(A) \leq \mu(D)$.
En effet, définissons $A_0 = D$. En considérant que pour un certain entier n , $A_n \subset D$ a été construit, on pose

$$t_n = \sup\{\mu(B); B \in \mathcal{A}, B \subset A_n\}$$

Ce supremum pourrait être a priori infini. Puisque B pourrait éventuellement être l'ensemble vide, et que $\mu(\emptyset) = 0$, on a $t_n \geq 0$. Par définition de t_n , il existe $B_n \subset A_n \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu(B_n) \geq \min\left\{1, \frac{t_n}{2}\right\}$$

On pose $A_{n+1} = A_n \setminus B_n$ pour terminer cette phase de construction. Soit

$$A = D \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

Puisque les ensembles $(B_n)_{n \geq 0}$ sont des ensembles disjoints de D , il résulte de la σ -additivité de la mesure signée μ que

$$\mu(A) = \mu(D) - \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(D) - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \min\left\{1, \frac{t_n}{2}\right\}}_{\geq 0}$$

Cela montre que $\mu(A) \leq \mu(D)$.

Supposons par l'absurde que A n'est pas un ensemble négatif (ie $\neg(A \leq 0)$). Il existe donc $B \in \mathcal{A}$, sous-ensemble de A , tel que $\mu(B) > 0$. Alors $t_n \geq \mu(B)$ pour tout n , et donc la série à droite de l'égalité doit diverger. Cela implique que $\mu(A) = -\infty$, ce qui est exclu. Donc A doit être un ensemble négatif, ie $A \leq 0$.

Construction de la décomposition : Soit $\Omega_0^- = \emptyset$. Constructivement, pour Ω_n^- donné, on définit

$$s_n = \inf\{\mu(D); D \in \mathcal{A}, D \subset \Omega \setminus \Omega_n^-\}$$

Cet infimum pourrait a priori être $-\infty$. Puisque l'ensemble vide est un D possible dans la définition de l'infimum, et que $\mu(\emptyset) = 0$, on a $s_n \leq 0$. Donc il existe $D_n \in \mathcal{A}$, $D_n \subset \Omega \setminus \Omega_n^-$ et

$$\mu(D_n) \leq \max\left\{\frac{s_n}{2}, -1\right\} \leq 0$$

D'après le lemme précédent, il existe $A_n \subset D_n$, $A_n \leq 0$ tel que $\mu(A_n) \leq \mu(D_n)$. On définit $\Omega_{n+1}^- = \Omega_n^- \cup A_n$ pour terminer la phase de construction.

Soit

$$\Omega^- = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Puisque les $(A_n)_{n \geq 0}$ sont disjoints, on a pour tout $B \subset \Omega^-$ dans \mathcal{A} que

$$\mu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B \cap A_n)$$

par la σ -additivité de μ . En particulier, cela montre que $\Omega^- \leq 0$.

Soit $\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega^-$. Si Ω^+ n'était pas un ensemble positif (ie $\neg(\Omega^+ \geq 0)$), il existerait un sous-ensemble $D \subset \Omega^+$ dans \mathcal{A} tel que $\mu(D) < 0$. Alors $s_n \leq \mu(D)$ pour tout n et

$$\mu(\Omega^-) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max\left\{\frac{s_n}{2}, -1\right\} = -\infty$$

ce qui est exclu. Donc $\Omega^+ \geq 0$.

Preuve de l'unicité : Supposons que $(\tilde{\Omega}^-, \tilde{\Omega}^+)$ soit une autre décomposition de Hahn de Ω . Alors $\Omega^+ \cap \tilde{\Omega}^- \geq 0$ et aussi ≤ 0 . Donc tout sous-ensemble mesurable de cet ensemble sera de mesure nulle. On peut appliquer le même raisonnement à $\Omega^- \cap \tilde{\Omega}^+ \geq 0$. Or

$$(\Omega^+ \Delta \tilde{\Omega}^+) \cup (\Omega^- \Delta \tilde{\Omega}^-) = (\Omega^+ \cap \tilde{\Omega}^-) \cup (\Omega^- \cap \tilde{\Omega}^+)$$

Cela complète donc la démonstration.

⇒ Corollaire:

Sous les hypothèses du théorème précédent, on pose pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega^-) \text{ et } \mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+)$$

1. μ^+ et μ^- sont des mesures positives à valeurs réelles, σ -additives et on a l'égalité pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$$

2. L'ensemble des valeurs de μ est borné :

$$\forall A \in \mathcal{A}, |\mu(A)| \leq M = \max\{\mu^+(\Omega), \mu^-(\Omega)\}$$

✦ Définition:

Les mesures μ^+ et μ^- sont appelées la partie positive et négative de μ . La mesure

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

est appelée la variation totale de μ .

La quantité

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega)$$

est appelée la norme en variation de μ .

ℹ Remarque:

1. La décomposition $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée la décomposition de Jordan ou de Hahn-Jordan de μ
2. On peut définir les mesures μ^+ et μ^- par la formule

$$\begin{aligned} \mu^+(A) &= \sup\{\mu(B); B \subset A, B \in \mathcal{A}\} \\ \mu^-(A) &= \sup\{-\mu(B); B \subset A, B \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

3. On a $\|\mu\| \leq 2 \sup\{|\mu(A)|; A \in \mathcal{A}\} \leq 2\|\mu\|$

2 Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Dnas tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

2.1 Fonctions mesurables

✦ Définition:

Une fonction mesurable sur Ω est une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'image réciproque de tout borélien de \mathbb{R} est mesurable. On a les mêmes définition pour une fonction à valeur dans \mathbb{R} , \mathbb{R} ou \mathbb{R}^N . Dans le cas de \mathbb{R} , c'est équivalent à :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in \Omega; f(x) < c\} \in \mathcal{A}$$

📖 Propriété:

On a les propriétés suivantes :

- Si f est mesurable et ϕ continue, alors $\phi(f)$ est mesurable.
- Si g est mesurable et $g(x) \neq 0 \forall x \in \Omega$, alors $1/g$ est mesurable.
- Si f et g sont mesurables, alors $f + g$, fg , $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables.
- Si (f_n) sont mesurables, alors $\sup_{n \geq 0} f_n$, $\inf_{n \geq 0} f_n$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ sont mesurables.
- Si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable.

✦ Définition:

Soit A une partie de Ω . La fonction indicatrice ou fonction caractéristique de A et est notée 1_A est la fonction définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

1_A est mesurable si et seulement si A est mesurable et on pose

$$\mu(A) = \int_{\Omega} 1_A d\mu$$

✦ Définition:

Une fonction étagée s est définie par :

$$s = \sum_k a_k 1_{A_k}$$

où les ensembles A_k sont mesurables et $a_k \in \mathbb{C}$. On définit alors l'intégrale de s par :

$$\int_{\Omega} s d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k)$$

2.2 Intégrale de Lebesgue

✦ Définition:

Si f une fonction positive mesurable définie sur Ω . On pose :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup_{s \text{ tagée}, s \leq f} \int_{\Omega} s d\mu$$

✦ Définition:

Soit f une fonction mesurable définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- On dit que f est intégrable si $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$
- Si f est à valeurs réelles, on pose $f = f^+ - f^-$ et

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu$$

- Si f est à valeurs complexes et $f = g + ih$ avec g et h à valeurs réelles,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu + i \int_{\Omega} h d\mu$$

📖 Propriété:

- Si f et g sont des fonctions intégrables et a et b sont des nombres complexes, alors $af + bg$ est intégrable et $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$
- Si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
- Deux fonctions qui diffèrent seulement sur un ensemble de mesure μ nulle ont la même intégrale : si $\mu(\{f(x) \neq g(x)\}) = 0$, alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable, et dans ce cas, $\int f d\mu = \int g d\mu$

⇒ Théorème: Convergence monotone

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives telles que pour tout n , $f_n \leq f_{n+1}$. On pose $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors on a

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \leq \infty$$

⇒ *Lemme: de Fatou*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. On pose $f = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$. On a alors

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \leq \infty$$

⇒ *Théorème: convergence dominée*

Soit $(f_n)_n$ une suite fonctions mesurables. On suppose que :

1. $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ p.p.

2. $\exists g$ intégrable telle que pour tout n ,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p.}$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

2.3 Inégalités

Inégalité de convexité Soit f une fonction convexe, (x_1, \dots, x_n) une famille de réels dans l'intervalle de définition de f , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels de l'intervalle $[0, 1]$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Alors on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Inégalité de Young Pour $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b \geq 0$, $\varepsilon > 0$:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$ab \leq \frac{(\varepsilon a)^p}{p} + \frac{b^q}{q\varepsilon^q}$$

Inégalité de Jensen Si $\mu(\Omega) = 1$, g est une fonction à valeurs réelles intégrable et si ϕ est une fonction convexe réelle mesurable, alors :

$$\phi\left(\int_{\Omega} g d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \phi \circ g d\mu$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

— Dans $(E, \langle \bullet, \bullet \rangle)$, espace préhilbertien réelle ou complexe :

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement indépendants

— Dans \mathbb{C}^n :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

— Dans $L^2(\Omega)$:

$$\left| \int f \bar{g} \right| \leq \left(\int |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et le reste, j'ai la flemme.