

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

# Projet de Fin d'Étude : Propagation d'un pathogène dans un champ de blé

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

8 mars 2015

# Sommaire

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

- 1 **Modèle mathématique étudié**
  - Différents modèles
  - Étude de la vitesse de propagation
  - Étude de la forme du front d'onde
- 2 **Simulation numérique**
  - Simplification de l'équation
  - Résultats numériques
- 3 **Problème de décision : limiter la propagation du pathogène**
  - Formulation du problème
  - Considérations théoriques
  - Simulation numérique

# Sommaire

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle

Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation

Simplification  
Résultats

Limite

propagation

Problème  
Théorique  
Numérique

- 1 **Modèle mathématique étudié**
  - Différents modèles
  - Étude de la vitesse de propagation
  - Étude de la forme du front d'onde
- 2 Simulation numérique
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène

# Modèles de propagation

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
**Diff. modèles**  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

Modèle SI :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI\end{aligned}$$

Modèle de contact distribué :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(N - I(x, t)) \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dy \quad (1)$$

Modèle avec mouvement de population

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(N - I(x, t)) - DI(x, t) + D \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dy \quad (2)$$

# Vitesse de propagation

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
**Vitesse**  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

Vitesse bornée par le modèle linéaire :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta(x) N \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dt$$

Condition initiale bornée par une exponentielle :

$$I_0(x, 0) \leq A e^{-\theta x}$$

Vitesse bornée par

$$c = \beta(x) \inf_{\theta > 0} \frac{M(\theta)}{\theta} \quad (3)$$

Conjecture : sous certaines hypothèses, vitesse du modèle complet = vitesse du modèle linéaire.

# Forme du front d'onde

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
**Forme**

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

Raisonnement par perturbations. Forme du front d'onde à l'ordre 0 donné par :

$$I(z) = \frac{1}{1 + \exp\left(\beta \frac{z}{c}\right)}$$

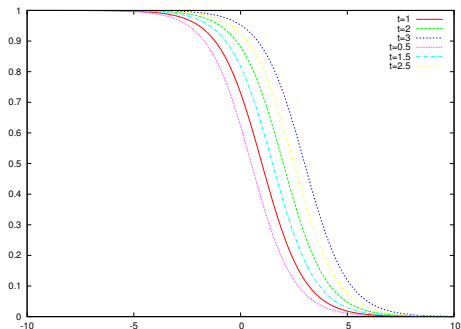


Figure : Forme approchée du front à l'ordre 0 :  $\beta = 1$ ,  $c = 1$

# Sommaire

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

- 1 Modèle mathématique étudié
- 2 Simulation numérique
  - Simplification de l'équation
  - Résultats numériques
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène

# Forme du front d'onde

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle

Diff. modèles

Vitesse

Forme

Simulation

**Simplification**

Résultats

Limite

propagation

Problème

Théorique

Numérique

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x) N \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mu_n}{n!} \frac{\partial^n I}{\partial x^n}(x, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x) \left( I(x, t) + \frac{\mu_2}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$



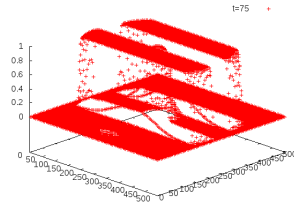
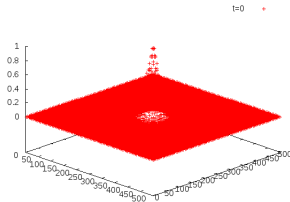
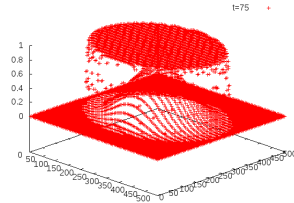
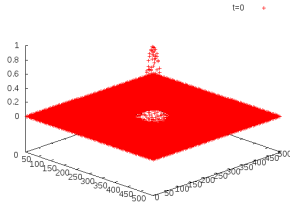
# Cadre, résultats et analyse

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme  
Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique



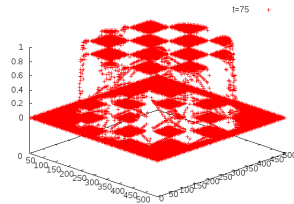
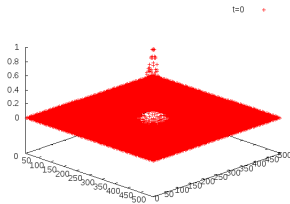
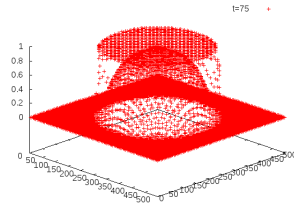
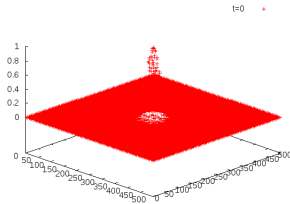
# Cadre, résultats et analyse

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme  
Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique



# Sommaire

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
Numérique

- 1 Modèle mathématique étudié
- 2 Simulation numérique
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène
  - Formulation du problème
  - Considérations théoriques
  - Simulation numérique

# Problème de décision

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation

**Problème**

Théorique  
Numérique

Maximiser

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega}^t I(x, t) dx > 0,5 \\ r_1 \leq R \leq r_2 \\ x_{\mu} > \alpha \end{array} \right.$$

Difficile à traiter.

# Largeur du front d'onde

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
**Théorique**  
Numérique

$$c = \beta \underbrace{\inf_{\theta > 0} \frac{M(\theta)}{\theta}}_{=K} = \beta K \quad (5)$$

Approximation à l'ordre 0 de la forme du front d'onde :

$$I(z) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\beta}{c}z\right)} \quad (6)$$

⇒ Largeur du front d'onde :

$$w = \frac{c}{\beta} = \frac{\beta K}{\beta} = K \text{ constante indépendante de } \beta \quad (7)$$

$$x_\mu < w \text{ ou } x_\mu > w ?$$

# Résultats

PFE

Alexandre  
Vieira

Modèle  
Diff. modèles  
Vitesse  
Forme

Simulation  
Simplification  
Résultats

Limite  
propagation  
Problème  
Théorique  
**Numérique**

