Calcul différentiel

7 octobre 2014

Table des matières

1 Calcul variationnel

1.1 Cas scalaire

Ici : recherche d'optimum non plus dans un espace de réels, mais dans un espace de fonctions. On cherche y^* tel que :

$$I(y^*) = \min_{y \in \mathcal{F}} I(y)$$

Considérons $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Parmis tous les y, dérivable et tel que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$, trouver la courbe minimisant :

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x))dx \tag{P}$$

Théorème: Euler-Lagrange

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Idée de la démonstration : On prend y minimisant I, et on pose $Y = y + \varepsilon\eta$, avec $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, puis on reprend I dépendant de ε. I est minimal pour $\varepsilon = 0$, on dérive, on trouve ce qu'il faut !

Définition:

g est une intégrale première de l'équation d'Euler-Lagrange si g est contante le long des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange.

Propriété:

1. Si $L = L(x, y')$, alors $\frac{\partial L}{\partial y'} = C$
2. Si $L = L(y, y')$ alors $L - y'\frac{\partial L}{\partial y} = C$.

Définition: Topologie dans $\mathcal{C}([x_1, x_2])$

On définit une topologie dans $\mathcal{C}^0([x_1, x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^0; \|y\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^0([x_1, x_2]),\ V_\varepsilon^0(y) = \left\{\tilde{y} \in \mathcal{C}^0\left([x_1, x_2]\right); \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^0} < \varepsilon\right\}$$

On fait de même dans $\mathcal{C}^1([x_1, x_2])$:

$$\forall y \in \mathcal{C}^1; \|y\|_{\mathcal{C}^1} = \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y(x)\|_2 + \max_{x \in [x_1, x_2]} \|y'(x)\|_2$$

$$\forall y \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2]),\ V_\varepsilon^1(y) = \left\{\tilde{y} \in \mathcal{C}^1\left([x_1, x_2]\right); \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon\right\}$$

Définition:

On considère que le problème P admet comme solution y^*.
y^* est un minimum fort strict s'il existe un voisinage dans $\mathcal{C}^0([x_1, x_2])$ (ie $V_\varepsilon^0(y^*)$) tel que :

$$I(y^*) < I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

C'est un maximum fort strict si :

$$I(y^*) > I(y) \forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$$

$$\exists V_\varepsilon^1(y^*);\ I(y^*) < I(y) \Rightarrow y* \text{ minimum faible strict}$$

$$\exists V_\varepsilon^1(y^*);\ I(y^*) > I(y) \Rightarrow y* \text{ maximum faible strict}$$

Définition:

Soit $D = [x_1, x_2] \times \mathbb{R}$.
$y(x, C), C \in \mathbb{R}$ est un champ d'extrémales, si :

1. $(x, y(x, C)) \in D,\ \forall C \in \mathbb{R}$
2. $\forall C \in \mathbb{R}$, $y(x)$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange.

Ce champ est dit propre si $\forall (x_0, y_0) \in D,\ \exists ! y(x, C)$ extrémale.
Ce champ est dit central si $y(X, C) = y_1,\ \forall C \in \mathbb{R}$ et $y(x, C) \neq y(x, \tilde{C})$, $\forall C \neq \tilde{C}$, $\forall x \neq \tilde{x}$.

Théorème: Jacobi-Weierstrass

Supposons $L \in \mathcal{C}^3$. Considérons toujours le même problème de minimisation P.
Si y^* satisfait :

1. $y^*(x_1) = y_1$ et $y^*(x_2) = y_2$
2. y^* peut être plongé dans un champ d'extrémale soit propre soit central
3. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y^*, (y^*)') > 0$ (resp < 0)
   Alors y^* est un minimum (resp. maximum) faible
4. $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0$ (resp < 0) $\forall y \in V_\varepsilon^0(y^*)$
   Alors y^* est un minimum (resp. maximum) fort.

1.2 Courbes paramétrées

On prend à présent $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^n$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$

$$L : [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

On veut minimiser $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x))dx$

✑ *Théorème: Euler-Lagrange*

Si $y \in \mathcal{C}^1[x_1, x_2]$ minimise $\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$ parmi toutes les fonctions telles que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$ où $L \in \mathcal{C}^2$, alors y satisfait :

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_i'} = 0,\ 1 \leq i \leq n$$

On pose à présent :

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial y_i} \\ H &= -L + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i \end{aligned}$$

En calculant dH, on arrive au système suivant :

$$\begin{cases} y_i' &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i' &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}$$

ce qui est un système hamiltonnien.