Présentation d'un article : Classification of existence and non-existence of running fronts in case of fast diffusion

Messoud Efendiev & Johannes Müller

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

16 novembre 2014

Sommaire

Sommaire

Équation étudiée

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u) \tag{1}$$

$$D(u) = \frac{u^a}{(1-u)^b}\bar{D}(u) \in \mathcal{C}^2[0,1[$$

$$f(u) = u(1-u)^\alpha \bar{f}(u) \in \mathcal{C}^2[0,1[$$

$$a > 1, \quad b > 0 \quad \alpha \geq 0$$

On cherche la solution $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = w(ct - x)$$

Théorème

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u)$$

Théorème :

Si $\alpha - b \leq -1$, il n'y a aucun front.

Si $\alpha - b > -1$, il existe une vitesse minimale c^* telle que :

- Pour $c < c^*$, il n'y a pas de solution de la forme $u(x,t) = w(ct - x)$ non négative
- Pour $c = c^*$, un unique front d'onde solution existe, qui tend vers 0 quand $x \to -\infty$
- Pour $c > c^*$, il y a une infinité de fronts d'ondes solutions, ordonnés. La solution minimal tend elle aussi vers 0 quand $x \to -\infty$, les autres sont strictement positives.

Sommaire

Transformation du système

Soit $u(x,t) = w(ct - x)$. En reprenant l'équation (1) et en y introduisant w, on obtient :

$$cw' = (D(w)w')' + f(w) \tag{2}$$

On définit à présent v tel que :

$$v = \frac{D(w)w'}{w}$$

En multipliant (2) par $\frac{D(w)}{w}$, on obtient :

$$cv = v'D(w) + v\frac{w'D(w)}{w} + \frac{D(w)f(w)}{w}$$

Transformation du système

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} D(w)w' & = & vw \\ D(w)v' & = & v(c-v) - \frac{D(w)f(w)}{w} \end{cases} \tag{3}$$

En faisant le changement de variable suivant (rescaling time) :

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w(t(\tau)))$$

$$\tilde{w}(\tau) = w(t(\tau))$$

$$\tilde{v}(\tau) = v(t(\tau))$$

Transformation du système

On obtient :

$$\begin{cases} \tilde{w}' & = & \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' & = & \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{cases} \tag{4}$$

où

$$g(\tilde{w}) = \frac{D(\tilde{w})f(\tilde{w})}{\tilde{w}}$$

Problème dans la transformation

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w) = \frac{w^a}{(1-w)^b}\bar{D}(w)$$

La transformation devient singulière pour $w \to 0$ et $w \to 1$

Pour $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on doit avoir :

$$0 \leq w(t) \leq 1$$

et

$$\lim_{t \to t_0^+} w(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} w(t) = 1$$

$\Rightarrow$ Problème !

Analyse du linéarisé

On prend $w = 0 \Rightarrow$ Analyse peut être faite avec le temps rééchelonné, on utilise donc le système (3) :

$$\begin{cases} \tilde{w}' &= \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' &= \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{cases}$$

On a deux points d'équilibre :

$$(0,0) \text{ et } (0,c)$$

Analyse de (0,c)

Jacobien du système en $(0, c)$:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ -g'(0) & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $g'(0) = 0$.

$$\lambda_1 = c \text{ et } \lambda_2 = -c$$

Dans l'espace des phases : point selle. Axe v invariant, stable. On a approximativement : $\tilde{w}' \approx \lambda_1 \tilde{w} = c\tilde{w}$, d'où :

$$w' \approx \frac{cw}{D(w)} \approx cw^{-(a-1)} \text{ pour } w \text{ petit}$$

Comme $a - 1 > 0$, la trajectoire atteint le point stationnaire en un temps négatif fini.

Analyse de (0,0)

Jacobien du système en $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g'(0) & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = c$$

On a directement que l'axe v sera instable.
Deuxième direction : nécessite plus de discussion.

Variété centrale pour (0,0)

Propriété

Le champ de vecteur étant $\mathcal{C}^2$ près de $(0,0)$, il existe une variété centrale tangente au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $\{v = h(w)\}$ une paramétrisation locale de cette variété. On a $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ et $v' = h'(w)w'$. En multipliant cette dernière égalité par $D(w)$:

$$v(c - v) - g(w) = h'(w)vw$$

$$h'(w) = \frac{c - h(w)}{w} - \frac{g(w)}{wh(w)}$$

Variété centrale pour (0,0)

En écrivant $h(w) = c_1 w^\beta + o(w^{\beta+1})$, on obtient :

$$c_1 \beta w^{\beta-1} = \frac{c}{w} - c_1 w^{\beta-1} - \frac{\bar{g}(0)}{c_1} w^{a-\beta-1} + o(w^{\beta+1})$$

où $\bar{g}(0) = \bar{D}(0)\bar{f}(0) > 0$.
On cherche l'ordre le plus bas pour le DL de h, il est évident que $\beta > 1$. Si $\beta = 0$, h ne satisfairait pas les conditions à l'origine. Apparement, $\beta = a$. La variété centrale est donc paramétrisée par :

$$h(w) = \underbrace{\frac{\bar{g}(0)}{c} w^a}_{>0} + o(w^{a+1})$$

Variété centrale pour (0,0)

En reprenant le système d'équation avec le temps normal (3), on obtient sur la variété centrale :

$$w' = \frac{wh(w)}{D(w)} > 0$$

Le point (0,0) est donc instable.

Analyse pour les temps larges

On prend maintenant $w = 1$, ie $t \to +\infty$. On considère la trajectoire $(w(t), v(t))$ commençant à t_0 à (w_0, v_0), avec $w_0, v_0 > 0$.
On utilise directement le système (3), qui s'écrit :

$$\begin{cases} w' &= \frac{vw^{1-a}(1-w)^b}{\bar{D}(w)} \\ v' &= \frac{v(c-v)(1-w)^b}{w^a \bar{D}(w)} - (1-w)^\alpha \bar{f}(w) \end{cases}$$

$w = 1$: point stationnaire $\Rightarrow$ toute trajectoire commencant avec $w < 1$ restera dans le demi-plan $w \leq 1$. On cherche les solutions qui resteront de plus dans le demi plan $\{w > 0, v > 0\}$.

Analyse pour les temps larges

Dans ce demi-plan : $w' > 0$. On considère l'équation suivante :

$$\frac{dv}{dw} = \frac{D(w)v'}{D(w)w'} = \frac{c}{w} - \frac{v}{w} - \frac{w^{1+a}\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{vw^2}(1-w)^{\alpha-b}$$

Si v est positif ou nul, on aura un front d'onde. Si v est négatif, il n'y aura pas de front.

Analyse pour les temps larges

On définit $y(w) = wv(w)$. v est positif si et seulement si y est positif. Dérivons cette expression :

$$y' = c - \frac{w^{1+a}\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{y}(1-w)^{\alpha-b} \tag{5}$$

Prenons $y(t_0) = y_0 > 0$. Si on montre que $y(w)$ est positif pour tout $w \in]0,1[$, on aura des fronts d'onde. Sinon, on en aura aucun.

Cas où $\alpha - b > -1$

On sait déjà qu'il existe des solutions pour $w > 0$ petit. On peut donc considérer qu'il existe w_1 tel que $w_0 < w_1 < 1$ et pour $w \in [w_0, w_1]$, la constante

$$A = \max_{w \in [w_0, w_1]} w^{1+a} \bar{D}(w) \bar{f}(w) (1-w)^{\alpha - b}$$

est finie. On a alors :

$$y' \geq c - \frac{A}{y}$$

Et là, bullshit.

Cas où $\alpha - b > -1$

On prend mainteant $\alpha - b > -1$ et on pose

$$B = \int_{w_0}^{1} w^{1+a} \bar{D}(w) \bar{f}(w) (1-w)^{\alpha - b} dw < +\infty$$

et

$$c_2 = \max\left\{ \frac{A}{y_0}, \frac{2B}{y_0(w_1 - w_0)} \right\}$$

Prenons enfin $c > c_2$.
Des remarques précédentes, on sait que pour $w \in [w_0, w_1]$, on a $y(w) > \frac{y_0}{2}$. Soit $w_2 \in [w_0, 1[$ le premier point tel que $y(w_2) = \frac{y_0}{2}$.

Cas où $\alpha - b > -1$

En intégrant (5), on obtient :

$$\begin{aligned}
0 > -\frac{y_0}{2} &= \int_{w_0}^{w_2} y'(w)dw \\
&\geq c(w_2 - w_0) - \int_{w_0}^{w_2} \frac{w^{1+a}\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{y_0/2}(1-w)^{\alpha-b}dw \\
&\geq c(w_1 - w_0) - \frac{2}{y_0}B \; (w_2 \to w_1?)
\end{aligned}$$

Et donc $c < \frac{2B}{y_0(w_1 - w_0)}$. Or, on avait pris $c > c_2 \Rightarrow$ Contradiction.
On ne peut donc pas trouver de point w_2, donc $y(w) > \frac{y_0}{2}$ pour tout $w \in [w_0, 1[$.

Cas où $\alpha - b \leq -1$

Pour avoir un front d'onde, on doit avoir $y(w) = wv(w)$ borné (car sinon, $v(w)$ non borné, car $w \in]0,1[$).
Prenons donc $y(w)$ borné, et donc continue. Pour $w_3 \in]0,1[$, la constante

$$D = \min_{w \in]w_3, 1[} w^{1+a} \frac{\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{y(w)}$$

est strictement positive.

Cas où $\alpha - b \leq -1$

Ainsi, comme $\alpha - b \leq -1$:

$$\begin{aligned}
y(w) &= \int_{w_3}^{w} y'(w)dw + y(w_3) \\
&= c(w - w_3) - \int_{w_3}^{w} w^{1+a}\frac{\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{y(w)}(1-w)^{\alpha-b}dw \\
&\quad + y(w_3) \\
&\leq y(w_3) + c(w - w_3) - D\int_{w_3}^{w}(1-w)^{\alpha-b}dw \xrightarrow[w\to 1]{} -\infty
\end{aligned}$$

$y(w)$ devient donc négatif et on exclut les fronts d'onde dans ce cas.