

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

Projet de Fin d'Étude : Propagation d'un pathogène dans un champ de blé

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

18 juin 2015

Sommaire

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

- 1 Modèle mathématique étudié
 - Différents modèles
 - Étude de la vitesse de propagation
 - Étude de la forme du front d'onde
- 2 Simulation numérique
 - Simplification de l'équation
 - Résultats numériques
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène
 - Formulation du problème
 - Considérations théoriques
 - Simulation numérique

Sommaire

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle

Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation

Simplification
Résultats

Limite

propagation

Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

- 1 Modèle mathématique étudié
 - Différents modèles
 - Étude de la vitesse de propagation
 - Étude de la forme du front d'onde
- 2 Simulation numérique
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène

Modèles de propagation

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

Modèle SI :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI\end{aligned}$$

Modèle de contact distribué :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(N - I(x, t)) \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dy \quad (1)$$

Modèle avec mouvement de population

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(N - I(x, t)) - DI(x, t) + D \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dy \quad (2)$$

Vitesse de propagation

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

Vitesse bornée par le modèle linéaire :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta N \int_{\mathbb{R}} k(x, y) I(y, t) dy$$

Condition initiale bornée par une exponentielle :

$$I_0(x, 0) \leq A e^{-\theta x}$$

Vitesse bornée par

$$c = \beta \inf_{\theta > 0} \frac{M(\theta)}{\theta} \quad (3)$$

Conjecture : sous certaines hypothèses, vitesse du modèle complet = vitesse du modèle linéaire.

Forme du front d'onde

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

Raisonnement par perturbations. Forme du front d'onde à l'ordre 0 donné par :

$$I(z) = \frac{1}{1 + \exp\left(\beta \frac{z}{c}\right)}$$

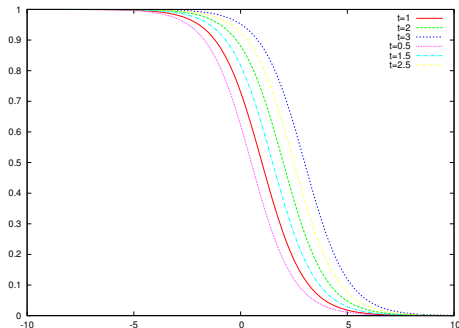


Figure : Forme approchée du front à l'ordre 0 : $\beta = 1$, $c = 1$

Sommaire

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

- 1 Modèle mathématique étudié
- 2 Simulation numérique
 - Simplification de l'équation
 - Résultats numériques
- 3 Problème de décision : limiter la propagation du pathogène

Simplification

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(N - I) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mu_n}{n!} \frac{\partial^n I}{\partial x^n}(x, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, t) = \beta(x)(1 - I) \left(I(x, t) + \frac{\mu_2}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

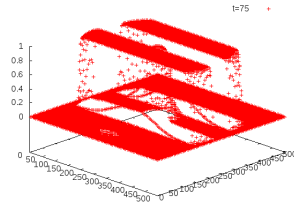
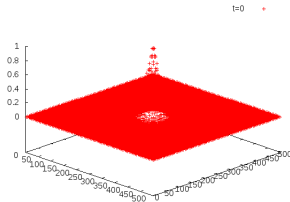
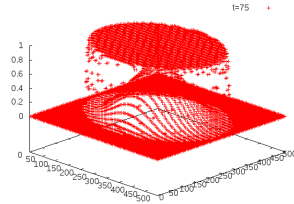
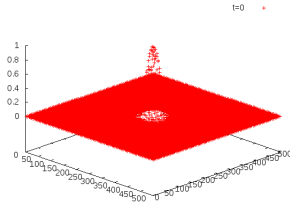
Cadre, résultats et analyse

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme
Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique
Conclusion



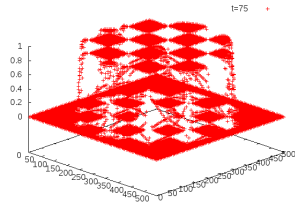
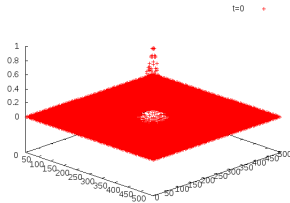
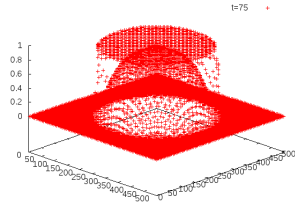
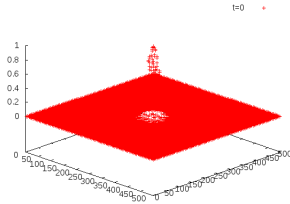
Cadre, résultats et analyse

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme
Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique
Conclusion



Sommaire

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

① Modèle mathématique étudié

② Simulation numérique

③ Problème de décision : limiter la propagation du pathogène

- Formulation du problème
- Considérations théoriques
- Simulation numérique

Problème de décision

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation

Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

Maximiser

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega}^t I(x, t) dx > 0,5 \\ r_1 \leq R \leq r_2 \\ x_{\mu} > \alpha \end{array} \right.$$

Difficile à traiter.

Largeur du front d'onde

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

$$c = \beta \underbrace{\inf_{\theta > 0} \frac{M(\theta)}{\theta}}_{=K} = \beta K \quad (5)$$

Approximation à l'ordre 0 de la forme du front d'onde :

$$I(z) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\beta}{c}z\right)} \quad (6)$$

⇒ Largeur du front d'onde :

$$w = \frac{c}{\beta} = \frac{\beta K}{\beta} = K \text{ constante indépendante de } \beta \quad (7)$$

$$x_\mu < w \text{ ou } x_\mu > w ?$$

Vitesse de propagation

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème

Théorique
Numérique

Conclusion

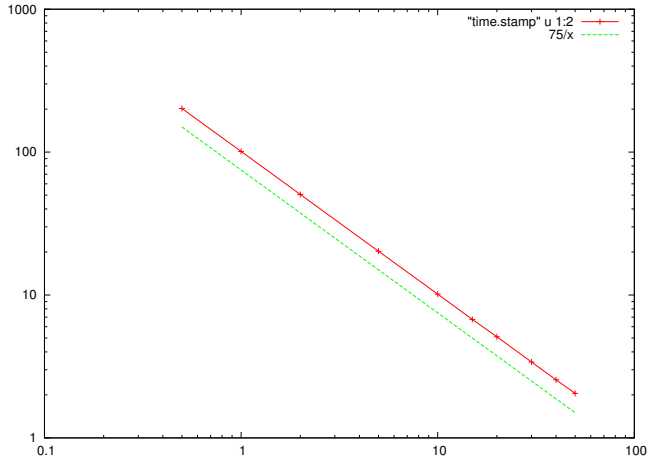


Figure : Temps où $\langle I \rangle = 0.5$ pour différentes valeurs de β (échelle logarithmique)

Largeur de front

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation

Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

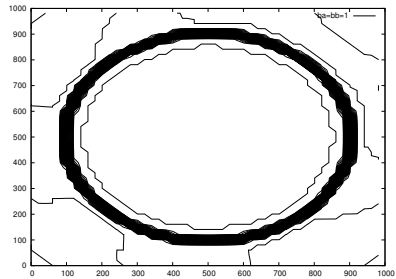
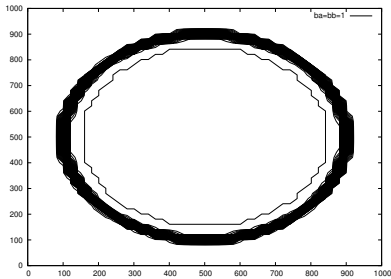


Figure : Front pour deux valeurs de beta (1 et 50)

Résultats

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

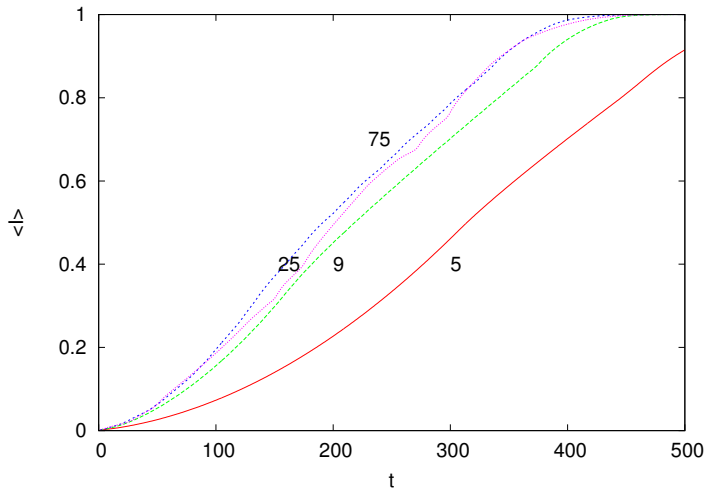


Figure : $\langle l \rangle$ pour différents x_μ : répartition en bande

Résultats

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation

Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

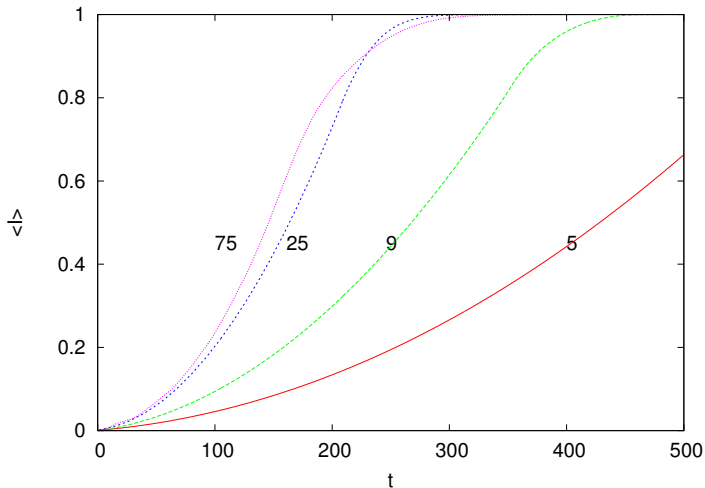


Figure : $\langle l \rangle$ pour différents x_μ : répartition en damier

Résultats

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation

Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

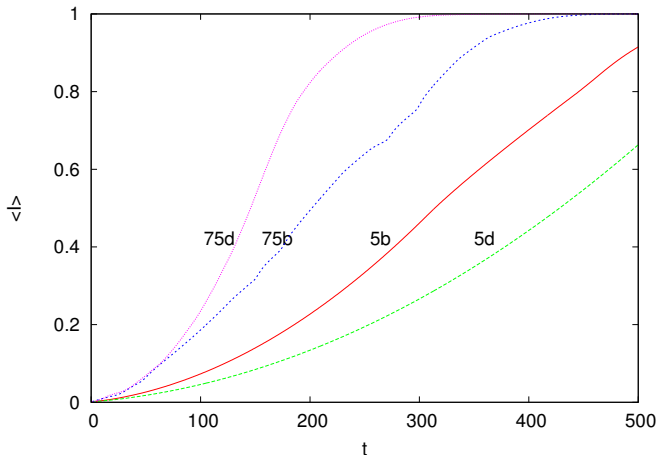


Figure : Valeur de $\langle l \rangle$ pour deux valeurs de x_μ et répartition en bande (b) ou damier (d)

Explication de cette évolution

PFE

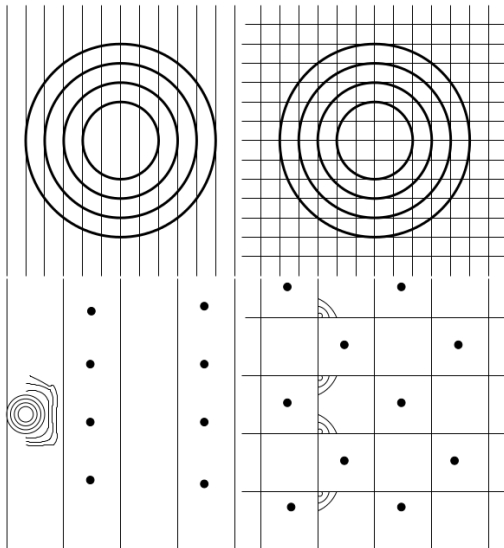
Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion



Conclusion

PFE

Alexandre
Vieira

Modèle
Diff. modèles
Vitesse
Forme

Simulation
Simplification
Résultats

Limite
propagation
Problème
Théorique
Numérique

Conclusion

- Premiers résultats encourageants
- Une complexité à augmenter : toujours les mêmes résultats avec 3, 4, + d'espèces ?
- Une approche différente dans ce projet