Optimisation convexe

19 février 2015

Table des matières

Introduction

Définition: Variété

M est une variété de dimension n si :

1. $\forall p \in M$, $\exists U$, voisinage ouvert de p, $\exists \phi : U \to \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme
2. $\forall p \in U$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $p \in V$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ doit être de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\omega$ (analytique).

On parle alors de variété de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\omega$

Définition: Espace tangent en p

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle espace tangent en p :

$$T_pX = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

Définition: Fibré tangent

On prend une variété Q de dimension d. On appelle fibré tangent :

$$TQ = \bigcup_{q \in Q} T_qQ$$

de dimension $2d$

Définition: Espace cotangent

On appelle l'espace cotangent le dual d'un espace tangent :

$$T_q^*Q = (T_qQ)^*$$

1 Rappels

1.1 Calcul différentiel

Définition: Crochet de Lie

Soit $f, g \in V^\infty(X)$. On définit :

$$[f,g](p) = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{-t}^f)_* g(p)\Big|_{t=0} = Dg(x).f(x) - DF(x).g(x)$$

Proposition:

$$\forall p \in X,\ \forall t, s \in \mathbb{R},\ \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^{g} \circ \gamma_t^{f}(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

Proposition:

1. Soit γ_t le flot de $\dot{x} = f(x)$. Alors σ_t, le flot de $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$ est :
$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$
2. Soient $f, g \in V^\infty(X)$ et ϕ un difféomorphisme. Alors :
$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$
3. $\left(\gamma_t^f\right)_* f = f$

Définition: Distribution

Une distribution sur X, une variété de dimension n, est une application $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$.
$\mathcal{D}(p)$ étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces. Soient $f_1, ..., f_k \in V^\infty(X)$.
On pose
$$\mathcal{D}(p) = vect\{f_1(p), ..., f_k(p)\}$$
On dit alors que $\mathcal{D}$ est de rang constant $(= k)$.

Définition:

$\mathcal{D}$ est dite intégrale si $\forall p \in X$, $\exists S$ une variété, $p \in S$ tel que
$$T_q S = \mathcal{D}(q),\ \forall q \in S$$

Définition: Involutive

$f \in V^\infty(X)$. On dit $f \in \mathcal{D}$ si $\forall p \in X,\ f(p) \in \mathcal{D}(p)$.
$\mathcal{D}$ est dite involutive si $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$.

Théorème: Frobenius

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de rang constant k. Alors les conditions suivants sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}$ intégrable
2. $\mathcal{D}$ involutive
3. localement, autour de chaque point $p \in X$,

$$\exists(x_1, ..., x_k, ..., x_n); \mathcal{D} = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}\}$$

1.2 Rappel sur les formes différentielles

Soit E un espace vectoriel, $e_1, ..., e_n$ sa base. On a également E^* son dual, et $e^1, ..., e^n$ sa base duale.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j$$

$T : E \times ... \times E \to \mathbb{R}$ k-linéaire est dit un k-tenseur (ensemble noté $T^k(E)$).
$A^k(E)$: k-tenseur antisymétriques, ie :

$$\begin{aligned} & T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \\ \Leftrightarrow \quad & T(..., v_i, v_{i+1}, ...) = -T(..., v_{i+1}, v_i, ...) \\ \Leftrightarrow \quad & T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)T(v_1, ..., v_k) \end{aligned}$$

$f(p) \in E = T_pX$ champ vecteur, $w(p) \in T_p^*X$ une 1-forme différentielle.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad w(p) = \sum_{j=1}^n w_j(x)dx^j$$

$$w(f) = \sum_{j=1}^n w_j(x)f^j(x)$$

De même, une k-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$: $w \in \Lambda^k(X)$

$$w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} w_{i_1 ... i_k}(x)dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

1.2.1 Comment définir une distribution ?

1. On choisit $f_1, ..., f_m \in V^\infty(X)$, et on pose $\mathcal{D} = span\{f_1, ..., f_m\}$
2. $p \in X \mapsto \mathscr{E}(p) \subset T_p^*X$ est une codistribution. On pose :

$$\mathcal{D} = \mathscr{E}^\perp = Ker\mathscr{E} = \{f \in V^\infty(X); \langle w, f\rangle = 0,\ \forall w \in \mathscr{E}\}$$

Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une distribution, on pose :

$$\mathscr{E} = \mathcal{D}^\perp = ann\mathscr{E} = \{w \in \Lambda^k(X); \langle w, f\rangle = 0,\ \forall f \in \mathcal{D}\}$$

Remarque : Si rg$\mathcal{D}$=cste (ou rg$\mathscr{E}$=cste) :

1. rg $\mathcal{D}$ +rg$\mathscr{E}$= n
2. $\rangle w, f\langle = 0$ peut être considéré point par poinr ou globalement

1.2.2 Différentielle extérieure

Soit $w \in \Lambda^k(X)$.
Si $k = 0$, $\Lambda^0(X) = \mathscr{C}^\infty(X)$
Si $k \geq 1$, $w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} w_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ et

$$dw = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} dw_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Ainsi :

$$\Lambda^0(X) \xrightarrow{d} \Lambda^1(X) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^n(X) \xrightarrow{d} 0$$

Proposition:

Soit $w \in \Lambda^1(X)$, soient $f, g \in V^\infty(X)$. On a :

$$dw = L_f w(g) - L_g w(f) - w([f,g])$$

Rappel :

$\eta \in \Lambda^k(M)$, $\omega \in \Lambda^l(M)$.

$$\eta \wedge \omega(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).\omega(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \in \Lambda^{k+l}(M)$$

Soit g indépendant en chaque point $p \in M$ de f_1 et f_2.

$$dw \wedge \omega(f_1, f_2, g) = d\omega(f_1, f_2)\omega(g)$$

$d\omega \wedge \omega \neq 0 \Leftrightarrow d\omega(f_1, f_2) = -\omega([f_1, f_2]) \neq 0$
2 cas possibles :

1. $\mathcal{D} = span\{f_1, f_2\}$ involutive
2. $\mathcal{D} = span\{f_1, f_2\}$ non involutive

Dans le premier cas, on a un système de coordonnées locales qui redresse le plan. Est-ce de même pour le deuxième cas ? Sachant qu'ils sont bien plus courants, et stable : même s'il est perturbé, le tout reste $\neq 0$!

Proposition: dans $\mathbb{R}^3$, $rg\mathcal{D} = 2$

Les conditions suivantes sont équivalentes localement autour de $p \in M$

1. $[f,g](p) \notin \mathcal{D} = span\{f,g\}$
2. $d\omega \wedge \omega(p) \neq 0$, où $\mathcal{D}^\perp = span\{\omega\}$
3. $\exists \phi(x,y,z)$ des coordonnées locales autour de p tel que $\phi_* \mathcal{D} = span\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$
4. $\mathcal{D}^\perp = span\{dz - xdy\}$

Proposition:

La condition $d\omega \wedge \omega \equiv 0$ ne dépend pas du choix de ω.

Théorème: de Frobenius pour les formes différentielles

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}$ involutive
2. $\exists \alpha_j^i \in \Lambda^1(M)$, $1 \leq i, j \leq k$ tel que $d\omega_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j \wedge \omega_j$, $1 \leq i \leq k$
3. $d\omega_i = 0 \mod I$ où I est l'idéal dans $\bigcup_{p \geq 0} \Lambda^p(M)$ engendré par $\omega_1, ..., \omega_k$