Approximation de Surface C^k-régulière à partir de Patchs de Surface

Christian Gout, Alexandre Vieira & Conrad Hillairet

INSA de Rouen - Université de Rouen

Objectifs

A partir d'un ensemble fini de patchs de surface donnés, il s'agit :

- De constuire une approximation régulière approchant la surface sur ces patchs
- Cet approximant sera une spline polynomiale par morceaux
- De tenir compte de l'aspect continu des données
- D'estimer les erreurs et d'implémenter numériquement l'approximant

Introduction

Les méthodes usuelles se contentent de prendre des points sur les patchs : on a alors des données de Lagrange. A l'inverse de ces méthodes, on veut ici tenir compte de l'aspect continu des données, prendre en compte leur aspect originel, en particulier leur régularité.

A ces fins, on introduit **un critère de fidélité aux données** sous la forme d'une norme $L^2(\Omega)$.

On considère que l'on connaît initialement :

- Ω : un ouvert connexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à forntière lipschitzienne (en pratique n=2)
- une famille finie d'ouverts de Ω : $(\omega_j)_{j=1}^N \subset \mathcal{P}(\Omega)$
- une fonction f définie sur Ω, donnée sur $\omega = \cup_{j=1}^N \omega_j$ et inconnue sur $\Omega \backslash \omega$.

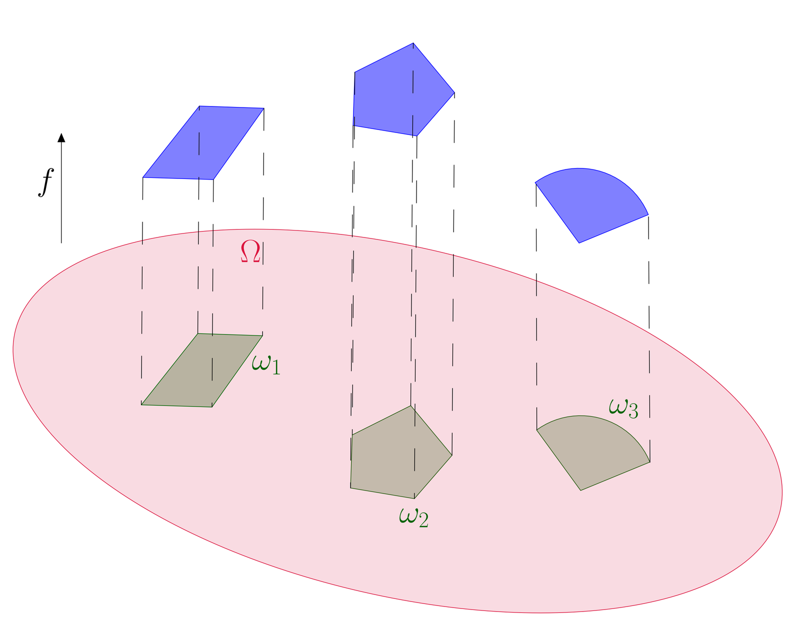


Figure 1: Exemple de trois patchs à partir desquels on veut reconstruire f sur Ω

But : Construire une fonction régulière ϕ sur Ω approximant f sur ω.

On émet les hypothèses suivantes :

1. $f \in \mathcal{H}^m(\Omega)$
2. $\phi \in \mathcal{H}^m(\Omega) \cap C^k(\overline{\Omega}), k \in \mathbb{N}, m > \frac{n}{2}$

Si $m > k + \frac{n}{2}$, le problème d'interpolation $\phi|_\omega = f|_\omega$ admet une infinité de solution. La théorie de Duchon [1] nous permet d'en obtenir une. Mais la taille considérable des systèmes à résoudre nous pousse vers une autre solution.

Nous considérons $\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H}^m(\Omega), v|_\omega = f|_\omega\}$ convexe. Le problème d'interpolation devient :

Trouver $\sigma \in \mathcal{K}$:

$$\forall v \in \mathcal{K}, |\sigma|_{m,\Omega} \leq |v|_{m,\Omega} \qquad (1)$$

où $|\sigma|_{m,\Omega} = \sqrt{\Sigma_{|\alpha|=m} \int_\Omega (\partial^\alpha v(x))^2}$

L'existence et l'unicité de (1) ont été montrées dans [2]. On a l'équivalence des normes dans $\mathcal{H}^m(\Omega)$:

1. $||u||_{m,\Omega} = \sqrt{\Sigma_{|\alpha|=\leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha v(x))^2}$
2. $|||u||| = \sqrt{||u||^2_{0,\omega} + |u|^2_{m,\Omega}}$, où $||u||^2_{0,\omega} = \Sigma_{j=1}^N \int_{\omega_j} v^2(x)dx$

σ solution de (1), est l'unique élément de norme $|||.|||$ minimale. Mais il est impossible de vérifier en dimension finie un nombre infini de conditions d'interpolation, on ne peut donc pas construire σ par discrétisation de (1). Pour prendre en compte cet aspect continu des données $f|_\omega$ on choisit ϕ non plus comme une surface d'interpolation, mais d'ajustement.

On va donc construire une D^m-spline régulière [3] qui sera discrétisée dans un espace polynomial par morceaux. On introduit pour cela la fonctionnelle : $\mathcal{J}_\varepsilon$ sur $\mathcal{H}^m(\Omega)$:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(v) = ||v - f||^2_{0,\omega} + \varepsilon |v|^2_{m,\Omega}$$

$||v - f||^2_{0,\omega}$ est le critère de fidélité aux données et honore l'aspect continu de celles-ci ; $\varepsilon > 0$ est un paramètre de régularité.

Approximation de $||.||_{0,\omega}$

On veut donner une formule de quadrature pour approximer $||.||_{0,\omega}$ à un certain ordre. On introduit pour cela :

- Des noeuds d'intégration :
- $\forall \eta \in E \subset \mathbb{R}^+_*, \forall 1 \leq j \leq N, (\xi_i)_{i=1}^{L(\eta,j)}$ points distincts de $\overline{\omega_j}$
- Des coefficients d'intégration : $(\lambda_i)_{i=1}^{L(\eta,j)} \subset \mathbb{R}^+_*$
- $\forall \eta \in E, \forall 1 \leq j \leq N, \forall v \in C^0(\overline{\omega_j}), \ell^\eta_j(v) = \Sigma_{i=1}^L \lambda_i v(\xi_i)$
- $\forall \eta \in E, \forall v \in C^0(\overline{\omega_j}), \ell^\eta(v) = \Sigma_{j=1}^N \ell^\eta_j(v)$

Si $\exists c, t > 0, \forall \eta \in E, \forall v \in \mathcal{H}^m(\Omega), \forall 1 \leq j \leq N, |\ell^\eta_j(v^2) - \int_{\omega_j} v^2 dx| \leq c\eta^t ||v||^2_{m,\Omega}$, Alors on a la formule d'intégration numérique abstraite pour $||.||^2_{0,\omega} \approx \ell^\eta(v^2)$. Pour avoir la convergence quand $\eta \to 0$, les noeuds doivent vérifier : $\max_{1\leq i \leq L} \min_{1 \leq k \leq L, k \neq i} \delta(\xi_i, \xi_k) \leq \eta$ (répartition uniforme des noeuds).

Méthodes

1. Le critère de fidélité aux données aurait pu être sous la forme d'une norme de $L^1(\Omega)$; en minimisant alors le volume entre l'approximante : ϕ et f sur ω. Sa non-hilbertianité, fait donc pencher le choix de la norme du critère vers celle de $L^2(\Omega)$.
2. En pratique, si on a une triangulation τ_n de ω, de n-simplexes τ de diamètre inférieur ou égal à η, et que $(a_i)_{i=1}^3, (b_i)_{i=1}^3$ et c sont respectivement les sommets, milieux et barycentre de chaque τ, alors on utilise la formule $\mathcal{P}_3$: $\ell^\eta(v) = \Sigma_{\tau \in \tau_n} meas(T)[\frac{1}{20}\Sigma_{i=1}^3 v(a_i) + \frac{2}{15}\Sigma_{i=1}^3 v(b_i) + \frac{9}{20} v(c)]$

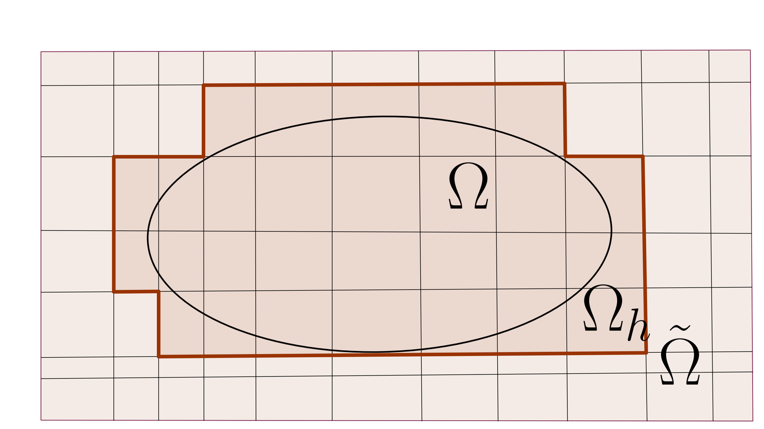


Figure 2: Définition des ensembles Ω, $\tilde{\Omega}$ et Ω_h

Approximation par D^m-spline

Soient H un sous-espace borné de $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ pour lequel 0 est un point d'accumulation, $\tilde{\Omega}$ un polygone ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ et, pour tout $h \in H$, on note $\mathcal{T}_h$ une triangulation sur $\tilde{\Omega}$ au moyen d'éléments K dont le diamètre h_K sont inférieurs ou égal à h et soit $\tilde{V}_h$ un espace d'éléments finis construit sur $\mathcal{T}_h$ tel que : $\tilde{V}_h$ est un sous-espace de dimension fini de $H^m(\tilde{\Omega}) \cap C^k(\overline{\tilde{\Omega}})$ (voir fig. 2)

De plus, pour étudier la convergence de l'approximation, on suppose qu'il existe une famille d'opérateurs linéaires continus $(\tilde{\Pi}_h)_{h\in H}$ de $H^m(\Omega)$ dans $\tilde{V}_h$ satisfaisant :

$\exists C > 0;\ \forall h \in H,\ \forall l = 0, ..., m-1,\ \forall v \in H^m(\tilde{\Omega})$

$$\left|v - \tilde{\Pi}_h v\right|_{l,\tilde{\Omega}} \leq C h^{m-l} |v|_{m,\tilde{\Omega}} \qquad (2)$$

$$\forall v \in H^m(\tilde{\Omega}), \lim_{h\to 0} \left|v - \tilde{\Pi}_h v\right|_{m,\tilde{\Omega}} = 0 \qquad (3)$$

On admet une certaine régularité sur $\mathcal{T}_h$ (voir famille régulière dans [4]). On construit Ω_h comme l'union des rectangles K dont l'intersection avec Ω est non vide (voir fig. 2) qui vérifie :

$$\forall h \in H, \Omega \subset \Omega_h \subset \tilde{\Omega} \qquad (4)$$

$$\lim_{h\to 0} \mu(\Omega_h \backslash \overline{\Omega}) = 0 \qquad (5)$$

Ainsi, on définit :

$$V_h = \{\phi|_{\Omega_h} | \phi \in \tilde{V}_h\} \qquad (6)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème de minimisation suivant : trouver $\sigma^\eta_{\varepsilon,h} \in V_h$ satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h,\ J^\eta_{\varepsilon,h}(\sigma^\eta_{\varepsilon,h}) \leq J^\eta_{\varepsilon,h}(v_h) \qquad (7)$$

où $J^\eta_{\varepsilon,h}$ est la fonctionnelle définie par :

$$J^\eta_{\varepsilon,h} = \ell^\eta\left[(v_h - f)^2\right] + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h}$$

On considère ensuite le problème variationnel suivant : trouver $\sigma^\eta_{\varepsilon,h} \in V_h$ satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h,\ \ell^\eta(\sigma^\eta_{\varepsilon,h} v_h) + \varepsilon\left(\sigma^\eta_{\varepsilon,h}, v_h\right) = \ell^\eta(f v_h) \qquad (8)$$

où $(u, v)_{m,\Omega_h} = \Sigma_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_h} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$.

UNIVERSITE DE ROUEN
INSA
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Approximation de Surface C^k-régulière à partir de Patchs de Surface

Christian Gout, Alexandre Vieira & Conrad Hillairet

INSA de Rouen - Université de Rouen

Théorème : Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $h \in H$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in E$, $\eta \leq \eta_0$, les problèmes (7) et (8) admettent une même unique solution.

Idée de demonstration : On montre que sous la relation (voir [5])

$$\forall p \in P_{m-1}(\tilde{\Omega}_h),\ p_{|\omega} = 0 \Rightarrow p \equiv 0$$

On a équivalence des normes :

$$[|v|]_h = \left(\|v\|^2_{0,\omega} + |v|^2_{m,\Omega_h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et :

$$\|v\|_{m,\Omega_h} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_h} (\partial^\alpha v)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Utilisant cela, on montre que la forme bilinéaire symétrique

$$(u_h, v_h) \mapsto \ell^\eta(u_h v_h) + \varepsilon(u_h, v_h)_{m,\Omega_h}$$

est continue V_h-elliptique, et en appliquant le théorème de Lax-Milgram, on a le résultat.

Théorème : Sous les mêmes hypothèses, si on suppose de plus que (2)-(3) est vérifié, alors la solution $\sigma^\eta_{\varepsilon,h}$ de (7) et (8) satisfont :

1. $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \to 0 \\ \frac{\eta^t}{\varepsilon} < \beta}} \|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\|_{m,\Omega} = 0$$

   où σ est la solution de (1) et où β a été introduit dans le théorème précédent

2. Il existe une constante positive C telle que :

   $$\|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - f\|^2_{0,\omega} \leq C\left(h^{2m} + \eta^t o(1) + \varepsilon\right)$$

   où

   $$\varepsilon \to 0, \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \to 0, \frac{\eta^t}{\varepsilon} < \beta$$

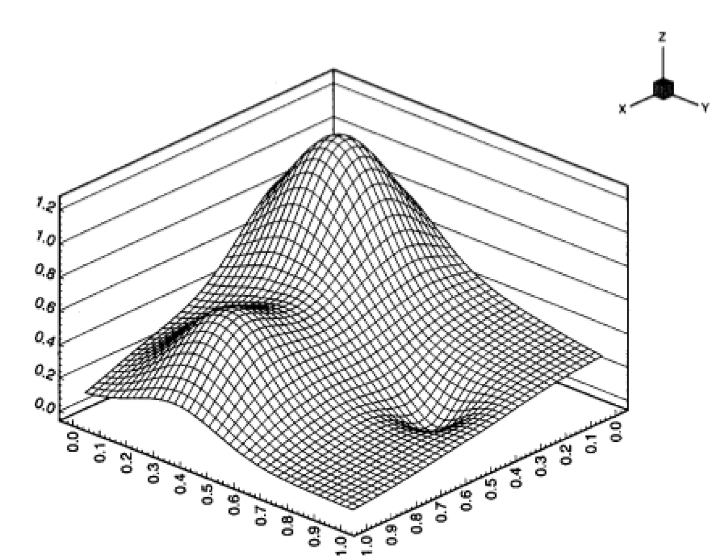
Idée de demonstration : 4 étapes :

- On montre par diverses inégalités que la famille $(\sigma^\eta_{\varepsilon,h})_{\eta,\varepsilon,h}$ est bornée dans $H^m(\Omega)$ sous les conditions apparaissant dans la limite, et donc qu'il existe une suite $(\sigma^\eta_{\varepsilon,h})_{\eta,\varepsilon,h}$ et une fonction $\sigma^* \in H^m(\Omega)$ telles que : $\sigma^{\eta_n}_{\varepsilon_n,h_n} \rightharpoonup \sigma^*$ dans $H^m(\Omega)$
- On montre ensuite que $\sigma^* = \sigma$
- On en déduit que la limite faible est aussi limite forte
- On finit la démonstration en repassant à la famille de fonctions $(\sigma^\eta_{\varepsilon,h})_{\eta,\varepsilon,h}$

Approximation numérique

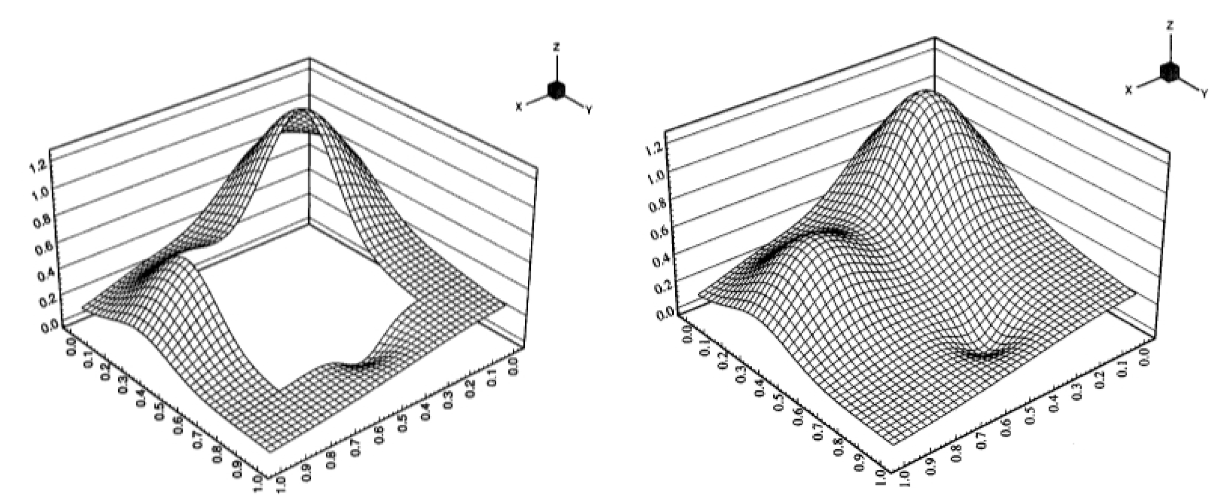
On a considéré deux fonctions sur $\Omega =]0;1[\times]0;1[$ pour tester numériquement la méthode :

- $f(x,y) = e^{-(3x-1)^2-(3y-1)^2}$
- $g(x,y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}(9x-2)^2-\frac{1}{4}(9y-2)^2} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{49}(9x+1)^2-\frac{1}{10}(9y+1)^2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(9x-7)^2-\frac{1}{4}(9y-3)^2} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y+7)^2}$



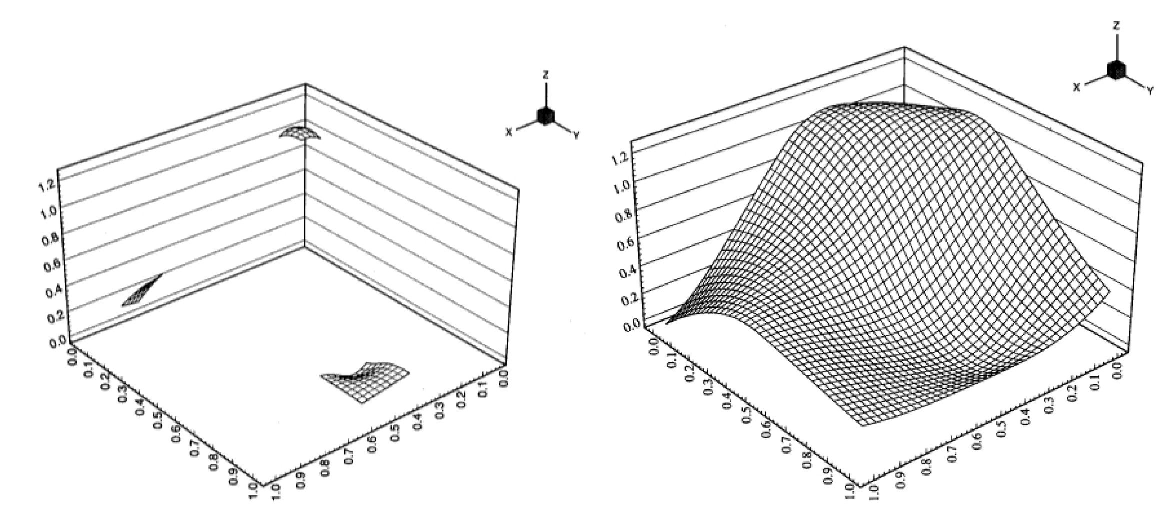
On a considéré des éléments finis rectangles C^1 de Bogner-Fox-Schmidt, et la formule de quadrature sur les patchs est P_3 sur des triangles, et on prend $\varepsilon = 10^{-6}$.

Il n'y a pas de méthode mathématique pour optimiser le choix de ce paramètre : on utilise une validation croisée.



Comparaison des résultats avec une D^m-spline sur des données de Lagrange.

Approximation numérique (2)



Calcul de l'erreur quadratique :

$$Q_{error}(\cup_i(x_i, y_i, z_i)) = \frac{\sum_{i=1}^{1600} (\tilde{z}_i - z_i)^2}{\sum_{i=1}^{1600} z_i^2})$$

Fonction g	Q_{error}	Data
Spline d'ajustement	1.34×10^{-3}	1152 points
Spline d'ajustement	0.18	33 points

Exemple d'application réelle : Big Island à Hawaï. Plus de 7 000 points de données pour un relief allant de -4 à +4km. Les résultats sont affichés fig 3

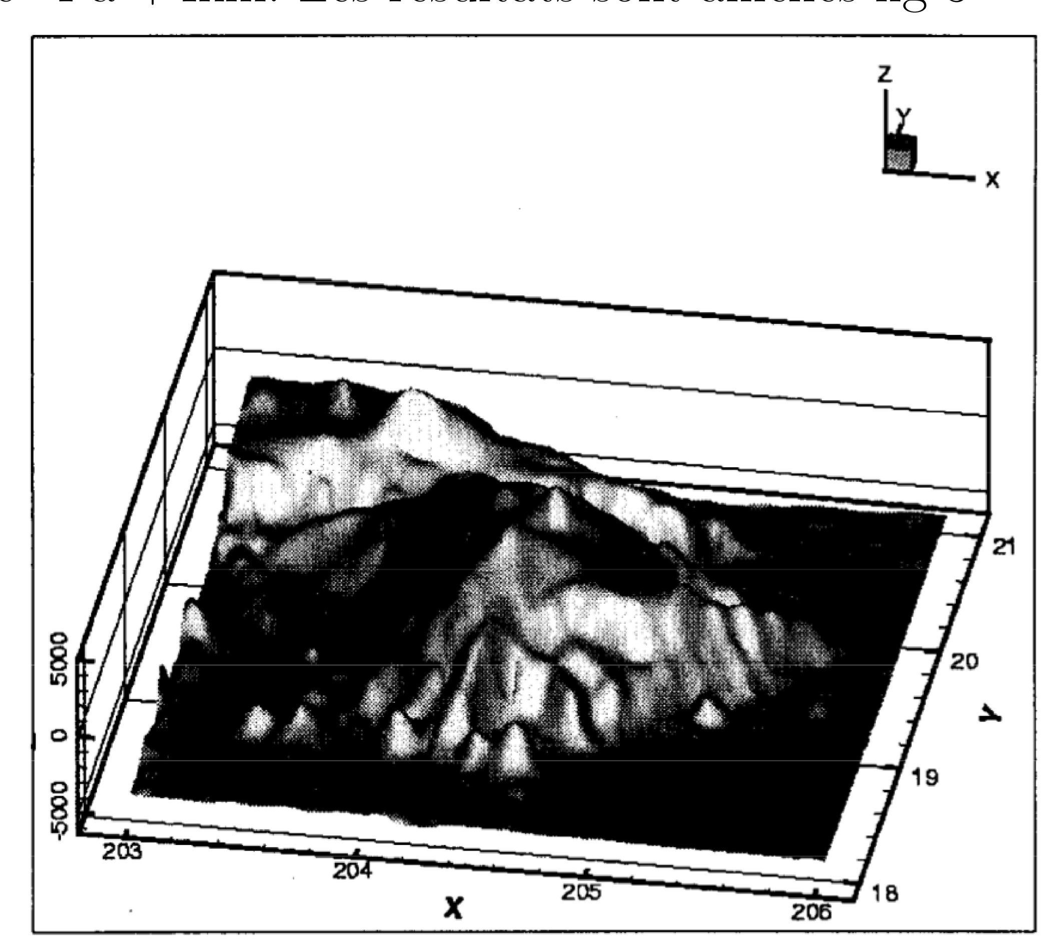


FIGURE 3: Approximation C^1, grille de 250×250 points

Réferences

[1] Jean Duchon.
Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces.
ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 10(R3) :5–12, 1976.

[2] C. Gout.
Etude de changements d'échelle en approximation : Ajustement spline sur des surfaces.
1997.

[3] R. Arcangéli.
Some applications of discrete D^m-Splines dans Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design.
Elsevier Science, 2014.

[4] Philippe G Ciarlet and PA Raviart.
General lagrange and hermite interpolation in r n with applications to finite element methods.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 46(3) :177–199, 1972.

[5] J. Nečas.
Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
Academia, 1967.

[6] R. Arcangéli, M.C.L. de Silanes, and J.J. Torrens.
Multidimensional Minimizing Splines : Theory and Applications.
Grenoble Sciences. Springer, 2004.

Contact Information

- Web : http ://lmi.insa-rouen.fr/
- Email : christian.gout@insa-rouen.fr
  conrad.hillairet@insa-rouen.fr
  alexandre.vieira@insa-rouen.fr

UNIVERSITE DE ROUEN INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN