

Présentation d'un article :  
Classification of existence and non-existence of  
running fronts in case of fast diffusion  
Messoud Efendiev & Johannes Müller

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

28 novembre 2014

# Sommaire

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

## 1 Resultats

## 2 Preuve

- Transformation du système
- Méthode du plan de phase
  - $w = 0$  dans le système transformé
  - $w = 1$  dans le système de départ

# Sommaire

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

1 Resultats

2 Preuve

# Équation étudiée

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u) \quad (1)$$

$$D(u) = \frac{u^a}{(1-u)^b} \bar{D}(u) \in \mathcal{C}^2[0, 1[$$

$$f(u) = u(1-u)^\alpha \bar{f}(u) \in \mathcal{C}^2[0, 1[$$

$$a > 1, \quad b > 0 \quad \alpha \geq 0$$

On cherche la solution  $u(x, t)$  sous la forme

$$u(x, t) = w(ct - x)$$

# Théorème

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

$$u_t = (D(u)u_x)_x + f(u)$$

## Théorème :

Si  $\alpha - b \leq -1$ , il n'y a aucun front.

Si  $\alpha - b > -1$ , il existe une vitesse minimale  $c^*$  telle que :

- Pour  $c < c^*$ , il n'y a pas de solution de la forme  $u(x, t) = w(ct - x)$  non négative
- Pour  $c = c^*$ , un unique front d'onde solution existe, qui tend vers 0 quand  $x \rightarrow -\infty$
- Pour  $c > c^*$ , il y a une infinité de fronts d'ondes solutions, ordonnés. La solution minimal tend elle aussi vers 0 quand  $x \rightarrow -\infty$ , les autres sont strictement positives.

# Sommaire

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

## 1 Resultats

## 2 Preuve

- Transformation du système
- Méthode du plan de phase

# Transformation du système

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

**Transformation  
du système**

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

Soit  $u(x, t) = w(ct - x)$ . En reprenant l'équation (1) et en y introduisant  $w$ , on obtient :

$$cw' = (D(w)w')' + f(w) \quad (2)$$

On définit à présent  $v$  tel que :

$$v = \frac{D(w)w'}{w}$$

En multipliant (2) par  $\frac{D(w)}{w}$ , on obtient :

$$cv = v'D(w) + v \frac{w'D(w)}{w} + \frac{D(w)f(w)}{w}$$

# Transformation du système

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

**Transformation  
du système**

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} D(w)w' &= v w \\ D(w)v' &= v(c - v) - \frac{D(w)f(w)}{w} \end{cases} \quad (3)$$

En faisant le changement de variable suivant (rescaling time) :

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w(t(\tau)))$$

$$\tilde{w}(\tau) = w(t(\tau))$$

$$\tilde{v}(\tau) = v(t(\tau))$$



# Transformation du système

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

**Transformation  
du système**

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

On obtient :

$$\begin{cases} \tilde{w}' &= \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' &= \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{cases} \quad (4)$$

où

$$g(\tilde{w}) = \frac{D(\tilde{w})f(\tilde{w})}{\tilde{w}}$$

# Problème dans la transformation

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

$$\frac{dt}{d\tau} = D(w) = \frac{w^a}{(1-w)^b} \bar{D}(w)$$

Resultats

Preuve

**Transformation  
du système**

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

La transformation devient singulière pour  $w \rightarrow 0$  et  $w \rightarrow 1$

Pour  $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , on doit avoir :

$$0 \leq w(t) \leq 1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} w(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 1$$

$\Rightarrow$  Problème !

# Analyse du linéarisé

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

**$w = 0$  dans  
le système  
transformé**

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

On prend  $w = 0 \Rightarrow$  Analyse peut être faite avec le temps rééchelonné, on utilise donc le système (3) :

$$\begin{cases} \tilde{w}' &= \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{v}' &= \tilde{v}(c - \tilde{v}) - g(\tilde{w}) \end{cases}$$

On a deux points d'équilibre :

$$(0, 0) \text{ et } (0, c)$$

# Analyse de $(0, c)$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

Jacobien du système en  $(0, c)$  :

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ -g'(0) & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que  $g'(0) = 0$ .

$$\lambda_1 = c \text{ et } \lambda_2 = -c$$

Dans l'espace des phases : point selle. Axe  $v$  invariant, stable.

On a approximativement :  $\tilde{w}' \approx \lambda_1 \tilde{w} = c\tilde{w}$ , d'où :

$$w' \approx \frac{cw}{D(w)} \approx cw^{-(a-1)} \text{ pour } w \text{ petit}$$

Comme  $a - 1 > 0$ , la trajectoire atteint le point stationnaire en un temps négatif fini.

# Analyse de (0,0)

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

**$w = 0$  dans  
le système  
transformé**

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

Jacobien du système en (0,0) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g'(0) & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = c$$

On a directement que l'axe  $v$  sera instable.

Deuxième direction : nécessite plus de discussion.

# Variété centrale pour $(0,0)$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

## Propriété

Le champ de vecteur étant  $\mathcal{C}^2$  près de  $(0,0)$ , il existe une variété centrale tangente au vecteur propre  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit  $\{v = h(w)\}$  une paramétrisation locale de cette variété. On a  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$  et  $v' = h'(w)w'$ . En multipliant cette dernière égalité par  $D(w)$  :

$$v(c - v) - g(w) = h'(w)vw$$

$$h'(w) = \frac{c - h(w)}{w} - \frac{g(w)}{wh(w)}$$

# Variété centrale pour $(0,0)$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

En écrivant  $h(w) = c_1 w^\beta + o(w^{\beta+1})$ , on obtient :

$$c_1 \beta w^{\beta-1} = \frac{c}{w} - c_1 w^{\beta-1} - \frac{\bar{g}(0)}{c_1} w^{a-\beta-1} + o(w^{\beta+1})$$

où  $\bar{g}(0) = \bar{D}(0)\bar{f}(0) > 0$ .

On cherche l'ordre le plus bas pour le DL de  $h$ , il est évident que  $\beta > 1$ . Si  $\beta = 0$ ,  $h$  ne satisfairait pas les conditions à l'origine.

Apparemment,  $\beta = a$ . La variété centrale est donc paramétrisée par :

$$h(w) = \underbrace{\frac{\bar{g}(0)}{c}}_{>0} w^a + o(w^{a+1})$$

# Variété centrale pour (0,0)

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

**$w = 0$  dans  
le système  
transformé**

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

En reprenant le système d'équation avec le temps normal (3), on obtient sur la variété centrale :

$$w' = \frac{wh(w)}{D(w)} > 0$$

Le point (0,0) est donc instable.



# Analyse pour les temps larges

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

On prend maintenant  $w = 1$ , ie  $t \rightarrow +\infty$ . On considère la trajectoire  $(w(t), v(t))$  commençant à  $t_0$  à  $(w_0, v_0)$ , avec  $w_0, v_0 > 0$ .

On utilise directement le système (3), qui s'écrit :

$$\begin{cases} w' &= \frac{vw^{1-a}(1-w)^b}{\bar{D}(w)} \\ v' &= \frac{v(c-v)(1-w)^b}{w^a \bar{D}(w)} - (1-w)^\alpha \bar{f}(w) \end{cases}$$

$w = 1$  : point stationnaire  $\Rightarrow$  toute trajectoire commençant avec  $w < 1$  restera dans le demi-plan  $w \leq 1$ . On cherche les solutions qui resteront de plus dans le demi plan  $\{w > 0, v > 0\}$ .

# Analyse pour les temps larges

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

Dans ce demi-plan :  $w' > 0$ . On considère l'équation suivante :

$$\frac{dv}{dw} = \frac{D(w)v'}{D(w)w'} = \frac{c}{w} - \frac{v}{w} - \frac{w^{1+a}\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{vw^2}(1-w)^{\alpha-b}$$

Si  $v$  est positif ou nul, on aura un front d'onde. Si  $v$  est négatif, il n'y aura pas de front.

# Analyse pour les temps larges

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

On définit  $y(w) = wv(w)$ .  $v$  est positif si et seulement si  $y$  est positif. Dérivons cette expression :

$$y' = c - \frac{w^{1+a}\bar{D}(w)\bar{f}(w)}{y}(1-w)^{\alpha-b} \quad (5)$$

Prenons  $y(t_0) = y_0 > 0$ . Si on montre que  $y(w)$  est positif pour tout  $w \in ]0, 1[$ , on aura des fronts d'onde. Sinon, on en aura aucun.

# Cas où $\alpha - b > -1$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

On sait déjà qu'il existe des solutions pour  $w > 0$  petit. On peut donc considérer qu'il existe  $w_1$  tel que  $w_0 < w_1 < 1$  et pour  $w \in [w_0, w_1]$ , la constante

$$A = \max_{w \in [w_0, w_1]} w^{1+a} \bar{D}(w) \bar{f}(w) (1-w)^{\alpha-b}$$

est finie. On a alors :

$$y' \geq c - \frac{A}{y}$$

Alors :  $y(w) > \frac{y_0}{2}$  pour  $w \in [w_0, w_1]$  et  $c \geq c_1 = \frac{A}{y_0}$

## Cas où $\alpha - b > -1$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

On prend maintenant  $\alpha - b > -1$  et on pose

$$B = \int_{w_0}^1 w^{1+a} \bar{D}(w) \bar{f}(w) (1-w)^{\alpha-b} dw < +\infty$$

et

$$c_2 = \max \left\{ \frac{A}{y_0}, \frac{2B}{y_0(w_1 - w_0)} \right\}$$

Prenons enfin  $c > c_2$ .

Des remarques précédentes, on sait que pour  $w \in [w_0, w_1]$ , on a  $y(w) > \frac{y_0}{2}$ . Soit  $w_2 \in [w_0, 1[$  le premier point tel que  $y(w_2) = \frac{y_0}{2}$ .

## Cas où $\alpha - b > -1$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

En intégrant (5), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 > -\frac{y_0}{2} &= \int_{w_0}^{w_2} y'(w) dw \\ &\geq c(w_2 - w_0) - \int_{w_0}^{w_2} \frac{w^{1+a} \bar{D}(w) \bar{f}(w)}{y_0/2} (1-w)^{\alpha-b} dw \\ &\geq c(w_1 - w_0) - \frac{2}{y_0} B \quad (w_2 \rightarrow w_1?) \end{aligned}$$

Et donc  $c < \frac{2B}{y_0(w_1 - w_0)}$ . Or, on avait pris  $c > c_2 \Rightarrow$

Contradiction.

On ne peut donc pas trouver de point  $w_2$ , donc  $y(w) > \frac{y_0}{2}$  pour tout  $w \in [w_0, 1[$ .

# Cas où $\alpha - b \leq -1$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système

Méthode du  
plan de phase

$w = 0$  dans  
le système  
transformé

$w = 1$  dans  
le système  
de départ

Pour avoir un front d'onde, on doit avoir  $y(w) = wv(w)$  borné (car sinon,  $v(w)$  non borné, car  $w \in ]0, 1[$ ).

Prenons donc  $y(w)$  borné, et donc continue. Pour  $w_3 \in ]0, 1[$ , la constante

$$D = \min_{w \in ]w_3, 1[} w^{1+a} \frac{\bar{D}(w) \bar{f}(w)}{y(w)}$$

est strictement positive.

# Cas où $\alpha - b \leq -1$

Class.  
Running  
Fronts

Alexandre  
Vieira

Resultats

Preuve

Transformation  
du système  
Méthode du  
plan de phase  
 $w = 0$  dans  
le système  
transformé  
 $w = 1$  dans  
le système  
de départ

Ainsi, comme  $\alpha - b \leq -1$  :

$$\begin{aligned}y(w) &= \int_{w_3}^w y'(w) dw + y(w_3) \\&= c(w - w_3) - \int_{w_3}^w w^{1+a} \frac{\bar{D}(w) \bar{f}(w)}{y(w)} (1 - w)^{\alpha-b} dw \\&\quad + y(w_3) \\&\leq y(w_3) + c(w - w_3) - D \int_{w_3}^w (1 - w)^{\alpha-b} dw \xrightarrow{w \rightarrow 1} -\infty\end{aligned}$$

$y(w)$  devient donc négatif et on exclut les fronts d'onde dans ce cas.