Optimisation convexe

17 janvier 2015

Table des matières

Première partie
Ensembles convexes

1 Définitions et premières propriétés

2 Enveloppe affine et enveloppe convexe

3 Propriétés topologiques des convexes

3.1 Ouverture et fermeture des convexes

3.2 Intérieur relatif

4 Opérations sur les ensembles convexes

4.1 Projection sur un convexe fermé

4.2 Séparation des ensembles convexes

4.3 Enveloppe convexe fermée

L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée.
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $C = \{xy \geq 1\} \cup \{0\}$: fermé.
$\text{conv}(C) = \{x > 0, y > 0\} \cup \{0\}$: non fermé.

Définition:

$A \subset E$. On définit l'enveloppe convexe fermée, noté $\overline{conv}(A)$, comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant A.

Propriété:

— $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{conv}(A_1) \subset \overline{conv}(A_2)$
— $A \subset conv(A) \subset conv(\bar{A}) \subset \overline{conv}(A)$ et $\overline{conv}(A) = \overline{conv}(\bar{A}) = \overline{conv(A)}$

Définition:

Soit H un Hilbert.
Un demi-espace fermé de H est un ensemble de la forme :

$$H^-(\xi, \alpha) = \{x \in H; (x, \xi) \leq \alpha\}$$

où $\xi \in H \neq \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Proposition:

$\overline{conv}(A)$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A.

Corollaire:

Soit C un ensemble convexe.
Alors l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C est $\overline{C}$.

Corollaire:

C convexe fermés $\Leftrightarrow$ C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C.

Théorème:

Soient H de dimension finie et A un compact de H. Alors $conv(A)$ est compact.

5 Cônes convexes

Définition: Cône

Un ensemble C est un cône si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in C$, $\lambda x \in C$

Définition: Enveloppe conique

Soit $A \subset E$. L'enveloppe conique A, notée $cone(A)$, est l'intersection de tous les coônes convexes contenant A.

Définition: Combinaison conique

On appelle combinaison conique d'élements de A un point x tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in A$

Proposition:

— C est un cône convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.

—
$$cone(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq {}^\circ, x_i \in A \right\}$$

Définition: Enveloppe conique fermée

On définit l'enveloppe conique fermée de A, notée $\overline{cone}A$, comme étant l'intersection de tous les cônes convexes fermés contenant A.

Propriété:

— $A \subset B \Rightarrow \overline{cone}(A) \subset \overline{cone}(B)$
— $A \subset cone(A) \subset cone(\bar{A}) \subset \overline{cone}(A)$ et $\overline{cone}(A) = \overline{cone}(\bar{A}) = \overline{cone(A)}$

5.1 Cône normal

Définition:

Soient H de Hilbert, $C \subset H$, $x \in C$.
On définit le cône normal à C en x, noté $\mathcal{N}_x C$ ou $\mathcal{N}_C(x)$ par :

$$\mathcal{N}_C(x) = \{d \in H; (d, y - x) \leq 0 \forall y \in C\}$$

Les éléments de $\mathcal{N}_x C$ sont appelés les normales à C en x.

Proposition:

Soit H de Hilbert de dimension fnie.
Si $C \subset H$ et $x \in \partial C$, alors $\mathcal{N}_x C$ contient au moins un élément non nul.

Remarque : Le résultat reste vrai en dimension infini si $\mathring{C}$ est non vide.

5.2 Cône dual

Définition: Cône dual, bidual, polaire

Soit $P \subset H$. On appelle cône dual de P, noté P^*, l'ensemble :

$$P^* = \{x \in H; (x, y) \geq 0 \ \forall y \in P\}$$

On appelle cône bidual de P : $P^{**} = (P^*)^*$
On appelle cône polaire (ou dual négatif) P^- l'ensemble

$$P^- = \{x \in H; (x, y) \leq 0 \ \forall y \in P\} = -P^*$$

Proposition:

P^* est un cône convexe fermé non vide.

6 Hyperplan d'appui

Définition:

Un hyperplan d'affine d'équation $(s, x) = r$ est appelé hyperplan d'appui à C en $\bar{x}$ si :

$$(s, x) \leq r \ \forall x \in C$$

$$(s, \bar{x}) = r$$

Théorème:

Soit C un ensemble convexe d'un Hilbert H. On suppose soit que H est de dimension finie soit que $\mathring{C} \neq \emptyset$. Soit $\bar{x} \in \partial C$. Alors il existe un hyperplan d'appui à C en $\bar{x}$.

7 Lemme de Farkas

Lemme:

Soient H un espace de Hilbert, $(\xi_j)_{j \in J} \subset H$ et $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}$. On suppoer que le système

$$(\xi_j, x) \leq \alpha_j \ \forall j \in J$$

admet au moins une solution.
Soit $(s, \beta) \in H \times \mathbb{R}$. On a équivalence entre les 2 propositions :

1. $$\forall x \in H, [\forall j \in J, \ (\xi_j, x) \leq \alpha_j \Rightarrow (s, x) \leq \beta]$$

2. $$(s, \beta) \in \overline{cone}\left((\xi_j, \alpha_j)_{j \in J} \cup (0, 1)\right) \subset H \times \mathbb{R}$$

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses avec $\alpha_j = 0\ \forall j \in J$. On a pour $s \in H$:

1. $$\forall x \in H, [\forall j \in J,\ (\xi_j, x) \leq 0 \Rightarrow (s, x) \leq 0]$$

2. $$s \in \overline{cone}\left((\xi_j)_{j\in J}\right)$$

Lemme:

Si C est un cône convexe fermé, alors $C^{**} = C$.

Deuxième partie
Fonctions convexes

1 Définitions et propriétés

$f : H \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$

Définition:

$$Dom(f) = \{x \in H; f(x) < +\infty\}$$
$$epi(f) = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha \geq f(x)\}$$
$$epi_S(f) = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha > f(x)\}$$

On dit que f est propre si f n'est pas identiquement égal à $+\infty$.
On dit que f est convexe si $epi(f)$ est convexe.
On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition:

Si f est convexe, alors $Dom(f)$ est convexe.
De plus, f est convexe si et seulement si : $\forall x, y \in Dom(f)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition:

On dit que f est strictement convexe si $\forall x, y \in Dom(f)$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition:

On dit que f est fortement convexe de module α si $\forall x, y \in Dom(f)$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$\frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 + f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Propriété: opérations conservant la convexité

1. Pour $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes, $\sup_{i\in I} f_i$ est convexe.
2. $\alpha \geq 0$, si f convexe, alors αf est convexe
3. Si f_1 et f_2 convexes, alors $f_1 + f_2$ convexes.

Définition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
On appelle sous ensemble de niveau de f au niveau α noté $\Gamma_\alpha(f)$ l'ensemble

$$\Gamma_\alpha(f) = \{x \in H; f(x) < \alpha\}$$

Remarque : f convexe $\Rightarrow \Gamma_\alpha(f)$ convexe $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$
Si $\Gamma_\alpha(f)$ est convexe $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est quasi-convexe.

Définition:

Soit $P \subset H$. On appelle fonction indicatrice de P la fonction :

$$\mathbb{1}_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si P convexe, alors $\mathbb{1}_P$ est convexe.
Si $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\Gamma_\alpha(\mathbb{1}_P) = P$ donc $\mathbb{1}_P$ caractérise P.

2 Fonctions d'appui

Définition:

Soit $S \subset H$.
On appelle fonction d'appui à S et on note σ_S la fonction définie par :

$$\sigma_S(d) = \sup_{s \in S}(s, d)$$

Remarque : σ_S est toujours convexe (même si S ne l'est pas).

Théorème:

Soit S un sous-ensemble non vide de H. Alors $s \in \overline{conv}(S)$ si et seulement si

$$\forall d \in H, \ (s, d) \leq \sigma_S(d)$$

De plus, $\sigma_S = \sigma_{\overline{conv}(S)}$

Remarque : Soient S_1 et S_2 2 convexes fermés. $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \sigma_{S_1} = \sigma_{S_2}$.

Propriété:

Soient S_1 et S_2 deux sous-ensembles de H non vides.

1. $\sigma_{S_1+S_2} = \sigma_{S_1} + \sigma_{S_2}$
2. $\sigma_{S_1 \cup S_2} = \max\{\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}\}$