Solution de viscosité

17 janvier 2015

Table des matières

Introduction

Le but est de voir comment résoudre les équations du type :

$$\begin{cases} F(x,u,Du,D^2u) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{EDP}$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est l'inconnue.
On notera $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$Du = \nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

D^2u est la matrice hessienne.
$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$

On note S^n l'ensemble des matrices carrées sumétriques de taille n.
Si $u \in \mathscr{C}^2$, $D^2u \in S^2$.
S^n est muni d'un ordre naturel :

$$X \geq Y \Leftrightarrow X - Y \geq 0$$

où $X \geq 0$ équivaut $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $(X\xi, \xi) \geq 0$

$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ est appelé l'hamiltonien.
On note (x, r, p, X) les variables de F. Le but est de donner un sens à l'EDP.

— En général, il n'y a pas de solution classique (ie appartenant à $\mathscr{C}^2$)
— Comme l'équation est complètement non linéaire, on ne peut pas définir une solution au sens des distributions. On doit donc trouver une autre notion de solution.

But : Introduire la notion de viscosité.
Cette notion sera bien posée dans le sens suivant :

— existence et unicité des solutions
— stabilité par rapport à F et g.
Si $F_n \to F$ et $g_n \to g$ localement uniformément, alors $u_n \to u$ localement uniformément.

Outils essentiels :

— Principe de comparaison : si u est sous-solution, v sur-solution, alors $u \leq v$. Cela nous donnera l'unicité de la solution.
— On utilisera souvent $\limsup$, $\liminf$ et la semi-continuité.
— On aura également besoin d'un ordre : F doit être à valeur dans $\mathbb{R}$ (limitation de la théorie)

Application : Géophysique, problèmes de mouvement et de front, trafic routier, imagerie, analyse numérique (convergence de schéma, extimation d'erreur...), homogénéisation (changement d'échelle),...

Première partie
Solution classique et généralisation

1 Premières définitions

Définition: Ellipticité

— On dit que F est elliptique si F est décroissante en X, ie

$$Y \geq X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

— On dit que F est strictement elliptique si :

$$Y < X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) < F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

— On dit que F est uniformément elliptique si :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0; \forall X, Y \in S^n, Y \geq 0, -\Lambda tr(Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X+Y) - F(\bullet, \bullet, \bullet, X) \leq -\lambda tr(Y)$$

— F est propre si F est croissante en r et elliptique.

Dans (presque) tout le reste du cours, on travaillera avec des opérateurs propres.

Définition: Linéarité

— F est linéaire si F est linéaire en r, p et X
— F est semi-linéaire si F est linéaire en p et X
— F est quasi-linéaire si F est linéaire en X
— F est complètement non linéaire sinon

1.1 Quelques exemples d'opérateurs propres

Equation de Poisson : $-\Delta u = f$ dans Ω

$F(x, r, p, X) = -tr(X) - f(x)$

— F uniformément elliptique

— F propre

Equation linéaire non sous forme divergentielle : $\mathscr{L}u = f$, avec $\mathscr{L}u = -tr(a(x)D^2u) + b(x)Du + c(x)u$

$a(x)$ symétrique positive, $c(x) \geq 0$.

Exercice : Montrez que $\mathscr{L}$ est propre. *Montrer au préalable :*

$$A, B \geq 0 \Rightarrow tr(AB) \geq 0$$

Equation linéaire sous forme divergentielle : $\mathscr{L}'u = f$ avec $\mathscr{L}'u = - \div (a(x)Du) + b(x)Du + c(x)u$

$\mathscr{L}'$ est elleiptique si $a \in \mathscr{C}^1(\Omega, S^n)$ avec $a \geq 0$ et propre si $c \geq 0$

Equation d'Hamilton-Jacobi d'ordre 1 : $H(x, u, \nabla u) = 0$

Propre si H croissante en u

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann : $\mathscr{L}^\alpha$ linéaire, $\mathscr{L}^\alpha u = -tr(a^\alpha(x)D^2u) + b^\alpha(x)Du + c^\alpha u$

Si $\sup_\alpha\{\mathscr{L}^\alpha u - f\alpha\} = 0$, alors $\mathscr{L}^\alpha$ propre.

2 Solutions classiques

Définition: Solution classique

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ est une solution classique de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ si u vérifie l'équation en tout point.
(on se limite à $\mathscr{C}^1$ pour les équations du premier ordre)

Proposition:

Soient $u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ tel que $u - v$ atteint un maximum positif en $\bar{x} \in \Omega$.
Alors $F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$

Démonstration :

$$u(\bar{x}) \geq v(\bar{x})$$
$$D(u-v)(\bar{x}) = 0 \Rightarrow Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x}) \text{ car on atteint un maximum}$$
$$D^2(u-v)(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow D^2u(\bar{x}) \leq Dv(\bar{x})$$

Comme F est propre :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$$

Définition:

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ est sous solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0 \ \forall x \in \Omega$
De même, u est sur solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$

Proposition:

Supposons Ω borné. On suppose u sous-solution, v sur-solution, F strictement croissante en r et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$.
Alors $u \leq v$ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration :
On raisonne par l'absurde : on suppose $\max_{\Omega}(u - v) > 0$. Soit $\bar{x}$ un point de maximum.

$$u(\bar{x}) - v(\bar{x}) > 0$$
$$Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x})$$
$$D^2u(\bar{x}) \leq Dv(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &\geq \quad F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \\ &\geq \quad F(\bar{x}, u(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &> \quad F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &\quad \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc $0 > 0$, ce qui est absurde.

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses, (EDP) admet au plus une solution vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration :
Soient u et v deux solutions.
u est sous-solution, v est sur-solution, donc $u \leq v$
De même, u est sur-solution, et v est sous-solution, donc $v \leq u$.
Donc $u = v$.

3 Vers une solution généralisée

On considère le problème :

$$\begin{cases} |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

D'après Rolle, il n'y a pas de solution classique. IL y a par contre une infinité de solution $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Par exemple :

$$u^+ = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et également $u^+ = u^-$.
On considère le problème pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Safranov nous montre qu'il existe une unique solution $u^\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ tel que :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 + x - \varepsilon\left(\exp\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) & \text{si } x \leq 0 \\ u_\varepsilon(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u^+$ uniformément. u^+ est séléctionnée par la méthode de viscosité évanescente.

Théorème: Principe du maximum

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ est une solution de (EDP) si et seulement si :

1. $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en $\bar{x}$ on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \leq 0$$

2. $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en $\bar{x}$ on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \geq 0$$

Démonstration :
On suppose que a est une solution classique. Soit ϕ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en $\bar{x}$.

$$Du(\bar{x}) = D\phi(\bar{x})$$

$$D^2u(\bar{x}) \leq D^2\phi(\bar{x})$$

$$0 = F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x}))$$

Le deuxième point se fait de la même manière.
Réciproquement : comme $u \in \mathscr{C}^2$, on peut prendre $\phi = u$ dans 1) et 2), donc $u - \phi$ atteint un max et un min en tout point.

$$\begin{array}{rcl} F(x, u, Du, D^2u) & \leq & 0 \\ & \geq & 0 \\ \Rightarrow F(x, u, Du, D^2u) & = & 0 \end{array}$$