

# Optimisation convexe

30 mars 2015

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>2</b>
1.1	Calcul différentiel . . . . .	2
1.2	Rappel sur les formes différentielles . . . . .	4
1.2.1	Comment définir une distribution ? . . . . .	6
1.2.2	Différentielle extérieure . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Systèmes équivalents</b>	<b>7</b>
2.1	Équivalence locale . . . . .	10
2.2	Système de Pfaff . . . . .	12

# Introduction

## ✦ Définition: Variété

$M$  est une variété de dimension  $n$  si :

1.  $\forall p \in M, \exists U$ , voisinage ouvert de  $p$ ,  $\exists \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme
2.  $\forall p \in U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  doit être de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$  (analytique).

On parle alors de variété de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$

## ✦ Définition: Espace tangent en $p$

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On appelle espace tangent en  $p$  :

$$T_p X = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

## ✦ Définition: Fibré tangent

On prend une variété  $Q$  de dimension  $d$ . On appelle fibré tangent :

$$TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q$$

de dimension  $2d$

## ✦ Définition: Espace cotangent

On appelle l'espace cotangent le dual d'un espace tangent :

$$T_q^* Q = (T_q Q)^*$$

## 1 Rappels

### 1.1 Calcul différentiel

## ✦ Définition: Crochet de Lie

Soit  $f, g \in V^\infty(X)$ . On définit :

$$[f, g](p) = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{-t}^f)_* g(p) \Big|_{t=0} = Dg(x) \cdot f(x) - DF(x) \cdot g(x)$$

**Proposition:**

$$\forall p \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}, \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

**Proposition:**

1. Soit  $\gamma_t$  le flot de  $\dot{x} = f(x)$ . Alors  $\sigma_t$ , le flot de  $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$  est :

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$

2. Soient  $f, g \in V^\infty(X)$  et  $\phi$  un difféomorphisme. Alors :

$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$

3.  $(\gamma_t^f)_* f = f$

**Définition: Distribution**

Une distribution sur  $X$ , une variété de dimension  $n$ , est une application  $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$ .  $\mathcal{D}(p)$  étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces. Soient  $f_1, \dots, f_k \in V^\infty(X)$ . On pose

$$\mathcal{D}(p) = \text{vect}\{f_1(p), \dots, f_k(p)\}$$

On dit alors que  $\mathcal{D}$  est de rang constant ( $= k$ ).

**Définition:**

$\mathcal{D}$  est dite intégrale si  $\forall p \in X, \exists S$  une variété,  $p \in S$  tel que

$$T_q S = \mathcal{D}(q), \forall q \in S$$

**Définition: Involutive**

$f \in V^\infty(X)$ . On dit  $f \in \mathcal{D}$  si  $\forall p \in X, f(p) \in \mathcal{D}(p)$ .  
 $\mathcal{D}$  est dite involutive si  $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$ .

### ⇒ Théorème: Frobenius

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de rang constant  $k$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  intégrable
2.  $\mathcal{D}$  involutive
3. localement, autour de chaque point  $p \in X$ ,

$$\exists(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n); \mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

## 1.2 Rappel sur les formes différentielles

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $e_1, \dots, e_n$  sa base. On a également  $E^*$  son dual, et  $e^1, \dots, e^n$  sa base duale.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j$$

$T : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -linéaire est dit un  $k$ -tenseur (ensemble noté  $T^k(E)$ ).

### ✦ Définition:

Soit  $T \in T^k(E)$ ,  $S \in T^l(E)$ . On pose :

$$T \otimes S(x_1, \dots, x_{k+l}) = T(x_1, \dots, x_k)S(x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$$

**Remarque :** En général,  $T \otimes S \neq S \otimes T$ .

### ¶ Propriété:

Une base de l'espace des  $k$ -tenseurs est formé par :

$$\bigotimes_{l=1}^k e^{i_l}$$

### ⇒ Corollaire:

$$\dim T^k(E) = n^k.$$

$A^k(E)$  :  $k$ -tenseur antisymétriques, ie :

$$\begin{aligned} & T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ \Leftrightarrow & T(\dots, v_i, v_{i+1}, \dots) = -T(\dots, v_{i+1}, v_i, \dots) \\ \Leftrightarrow & T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

## Comment produire des tenseurs antisymétriques ?

$$\text{Alt} : \begin{array}{ccc} T^k(E) & \rightarrow & T^k(E) \\ T & \mapsto & \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \end{array}$$

où  $\Sigma_k$  est l'ensemble des permutations de  $k$  éléments,  $\varepsilon(\sigma)$  est le signe de la permutation.

### Proposition:

1.  $T \in T^k(E) \Rightarrow \text{Alt}(T) \in A^k(E)$
2.  $T \in A^k(E) \Rightarrow \text{Alt}(T) = T$
3.  $T \in S^k(E)$  (tenseur symétrique)  $\Rightarrow \text{Alt}(T) = 0$

### Définition: Produit extérieur

Soit  $\omega \in A^k(E)$ ,  $\eta \in A^l(E)$ .

On définit  $\omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$ , appelé produit extérieur par :

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

### Propriété:

1.  $\omega \in A^k, \eta \in A^l \Rightarrow \omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$
2.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
3.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$

### Corollaire:

Soit  $\omega \in A^{2k+1}(E)$

$$\omega \wedge \omega = 0$$

### Corollaire:

Soit  $e^1, \dots, e^n$  la base duale.

$$e^i \wedge e^i = 0 \quad e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$$

### Proposition:

Une base de  $A^k(E)$  est donnée par :

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \text{ où } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

### Corollaire:

Si  $\omega \in A^k(E)$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

$f(p) \in E = T_p X$  champ vecteur,  $w(p) \in T_p^* X$  une 1-forme différentielle.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad w(p) = \sum_{j=1}^n w_j(x) dx^j$$

$$w(f) = \sum_{j=1}^n w_j(x) f^j(x)$$

De même, une  $k$ -forme différentielle  $\mathcal{C}^\infty : w \in \Lambda^k(X)$

$$w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

#### 1.2.1 Comment définir une distribution ?

1. On choisit  $f_1, \dots, f_m \in V^\infty(X)$ , et on pose  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$
2.  $p \in X \mapsto \mathcal{E}(p) \subset T_p^* X$  est une codistribution. On pose :

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^\perp = \text{Ker } \mathcal{E} = \{f \in V^\infty(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{E}\}$$

Réciproquement, si  $\mathcal{D}$  est une distribution, on pose :

$$\mathcal{E} = \mathcal{D}^\perp = \text{ann } \mathcal{D} = \{w \in \Lambda^k(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{D}\}$$

**Remarque :** Si  $\text{rg } \mathcal{D} = \text{cste}$  (ou  $\text{rg } \mathcal{E} = \text{cste}$ ) :

1.  $\text{rg } \mathcal{D} + \text{rg } \mathcal{E} = n$
2.  $\langle w, f \rangle = 0$  peut être considéré point par point ou globalement

#### 1.2.2 Différentielle extérieure

Soit  $w \in \Lambda^k(X)$ .

Si  $k = 0$ ,  $\Lambda^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X)$

Si  $k \geq 1$ ,  $w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  et

$$dw = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} dw_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Ainsi :

$$\Lambda^0(X) \xrightarrow{d} \Lambda^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n(X) \xrightarrow{d} 0$$

### **Proposition:**

Soit  $w \in \Lambda^1(X)$ , soient  $f, g \in V^\infty(X)$ . On a :

$$dw = L_f w(g) - L_g w(f) - w([f, g])$$

### **Rappel :**

$\eta \in \Lambda^k(M)$ ,  $\omega \in \Lambda^l(M)$ .

$$\eta \wedge \omega(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \in \Lambda^{k+l}(M)$$

Soit  $g$  indépendant en chaque point  $p \in M$  de  $f_1$  et  $f_2$ .

$$dw \wedge \omega(f_1, f_2, g) = d\omega(f_1, f_2)\omega(g)$$

$$dw \wedge \omega \neq 0 \Leftrightarrow d\omega(f_1, f_2) = -\omega([f_1, f_2]) \neq 0$$

2 cas possibles :

1.  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, f_2\}$  involutive
2.  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, f_2\}$  non involutive

Dans le premier cas, on a un système de coordonnées locales qui redresse le plan. Est-ce de même pour le deuxième cas ? Sachant qu'ils sont bien plus courants, et stable : même s'il est perturbé, le tout reste  $\neq 0$  !

## 2 Systèmes équivalents

### **Proposition:** dans $\mathbb{R}^3$ , $\text{rg}\mathcal{D} = 2$

Les conditions suivantes sont équivalentes localement autour de  $p \in M$

1.  $[f, g](p) \notin \mathcal{D} = \text{span}\{f, g\}$
2.  $d\omega \wedge \omega(p) \neq 0$ , où  $\mathcal{D}^\perp = \text{span}\{\omega\}$
3.  $\exists \phi(x, y, z)$  des coordonnées locales autour de  $p$  tel que  $\phi_*\mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}\right\}$
4.  $\mathcal{D}^\perp = \text{span}\{dz - xdy\}$

### **Proposition:**

La condition  $d\omega \wedge \omega \equiv 0$  ne dépend pas du choix de  $\omega$ .

⇒ *Théorème: de Frobenius pour les formes différentielles*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  involutive
2.  $\exists \alpha_j^i \in \Lambda^1(M)$ ,  $1 \leq i, j \leq k$  tel que  $d\omega_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i \wedge \omega_j$ ,  $1 \leq i \leq k$
3.  $d\omega_i = 0 \mod I$  où  $I$  est l'idéal dans  $\bigcup_{p \geq 0} \Lambda^p(M)$  engendré par  $\omega_1, \dots, \omega_k$  ie :

$$i \in I \Leftrightarrow i = a \wedge \omega_j$$

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \equiv 0$$

On pose  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i]$

✚ *Définition: Vecteur de croissance*

Le vecteur de croissance de  $\mathcal{D}$  en  $p$  est la suite  $(d_i(p))_{i \geq 0}$ , où  $d_i(p) = \dim \mathcal{D}_i(p)$ .

**Remarque :** Si on n'indique pas  $p$ ,  $d_i$  est constant.

⇒ *Corollaire: Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $rg \mathcal{D} = 2$*

1.  $\mathcal{D}$  involutive  $\Leftrightarrow (d_0, d_1) = (2, 2)$
2.  $d\omega \wedge \omega(p) \neq 0 \Leftrightarrow \forall q \in V_p, (d_0(q), d_1(q)) = (2, 3)$   
Si  $p$  est singulier, on a en  $p$   $(2, 2, 3)$  et en dehors  $(2, 3)$ .

✚ *Définition: Caractéristique*

Un champ  $v \in \mathcal{D}$  est dit caractéristique pour  $\mathcal{D}$  si

$$[v, f] \in \mathcal{D} \forall f \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{D}, v \text{ caractéristique}\}$  est dite la distribution caractéristique.

**Remarque :**  $v$  est parfois appelé symétrie infinitésimale, car  $(\gamma_t^v)_t$  est une famille de symétries de  $\mathcal{D}$ .  
 $\phi; M \rightarrow M$  difféomorphisme est une symétrie de  $\mathcal{D}$  si  $\phi_* \mathcal{D} = \mathcal{D}$ .  
Démontrez que  $(\gamma_t^v)_* \mathcal{D} = \mathcal{D} \Leftrightarrow [v, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ .

¶ *Proposition:*

$\mathcal{C}$  est toujours involutive.



**Proposition:**

Soit  $\text{rg} \mathcal{D} = m$ . On suppose que  $\text{rg} \mathcal{C} = p$ .  
Autour de chaque point, il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  telles que

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}, f_{p+1}, \dots, f_m \right\}$$

où

$$f_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{q=p+1}^n f_j^q \frac{\partial}{\partial x^q}, \quad p+1 \leq j \leq m, \quad \text{où } f_j^q = f_j^q(x^{p+1}, \dots, x^n)$$

**Théorème: Enegle, 1880**

Supposons que  $(d_i)$  est  $(2,3,4)$ . Alors localement, il existe  $(x, y, z, w)$  des coordonnées tel que

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w} \right\}$$

Supposons que  $f, g, [f, g], [g, [f, g]]$  sont indépendant en  $p$ .

$$\exists \alpha \in \mathcal{C}^\infty; \quad [f, [f, g]] = \alpha [g, [f, g]] \quad \text{mod } \mathcal{D}_1$$

**Lemme:**

Le champ de vecteur  $f - \alpha g \in \mathcal{D}$  est caractéristique pour  $\mathcal{D}_1$ .

## 2.1 Équivalence locale

On considère deux distributions  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$  sur  $M$  et  $\tilde{\mathcal{D}} = \text{span}\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m\}$  sur  $\tilde{M}$ .

### ✦ Définition:

$\mathcal{D}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  sont équivalentes s'il existe  $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$   $\mathcal{C}^\infty$  difféomorphisme, et  $\beta = (\beta_{ij})$ ,  $\beta_{ij} \in \mathcal{C}^\infty$  et  $\beta$  inversible tel que :

$$\phi_*(f\beta) = \tilde{f}$$

avec

$$\phi_* \left( \sum_{i=1}^m f_i \beta_{ij} \right) = f_j$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \phi_* \mathcal{D} &= \tilde{\mathcal{D}} \\ \phi_x(x) \mathcal{D}(x \tilde{\mathcal{D}}(\phi(x))) \end{aligned}$$

### ✦ Définition: Équivalence locale

$\mathcal{D}$  autour de  $p$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  autour de  $\tilde{p}$  sont localement équivalents s'il existe deux voisinages ouverts de  $p$  et  $\tilde{p}$  et un difféomorphisme local  $V_p \rightarrow V_{\tilde{p}}$  tel que :

$$\phi_* \mathcal{D}|_{V_p} = \tilde{\mathcal{D}}|_{V_{\tilde{p}}}$$

On note  $\Delta_m^n$  la famille de toutes les distributions de rang  $m$  autour de  $p \in M^n$ .

$$\Gamma = \{(\phi, \beta), \phi \text{ difféo. local, } \beta \text{ matrice inversible localement } \mathcal{C}^\infty\}$$

$\Gamma$  est un groupe. On définit :

$$\text{Orb}(\mathcal{D}) = \{\tilde{\mathcal{D}}; \exists \gamma \in \Gamma; \gamma(\mathcal{D}) = \tilde{\mathcal{D}}\}$$

### ✦ Définition: Produit intérieur

Soit  $f \in V^\infty(M)$ ,  $\Omega \in \Lambda^k(M)$ . On définit le produit intérieur  $f \rfloor \Omega \in \Lambda^{k-1}(M)$  par :

$$f \rfloor \Omega(f_1, \dots, f_{k-1}) = \Omega(f, f_1, \dots, f_{k-1})$$

### ¶ Proposition:

$f, g \in V^\infty$ ,  $\Omega \in \Lambda^k$ .

$$L_f(g \rfloor \Omega) = L_f g \rfloor \Omega + f \rfloor L_f \Omega = [f, g] \rfloor \Omega + f \rfloor L_f \Omega$$

$$L_f \Omega = f \rfloor d\Omega + d(f \rfloor \Omega)$$

Si  $d\Omega = 0$ , alors  $L_f \Omega = d(f \rfloor \Omega)$ .

✦ *Définition: Fermée, exacte*

Soit  $\Omega \in \Lambda^k(L)$ .

$\Omega$  est dite fermée si  $d\Omega = 0$ .  $\Omega$  est dite exacte si  $\exists \omega \in \Lambda^{k-1}(M)$  tel que  $\Omega = d\omega$ .

Soit  $\Omega$  une deux forme. On définit

$$\text{Ker}\Omega(p) = \{v \in T_p M; v \lrcorner \Omega \equiv 0\}$$

✦ *Définition:*

$\Omega \in \Lambda^2(M)$  est dite non dégénérée si  $\text{Ker } \Omega(p) = \{0\} \forall p \in M$ . Ceci est équivalent à dire que  $(\Omega_{ij})$  est inversible.

∞ *Théorème: de Darboux*

Supposons  $\dim M = 2n$ ,  $\Omega \in \Lambda^2(M)$ . Supposons  $\Omega$  non dégénérée et fermée. Donc  $\exists (x_1, \dots, x_n, y^1, \dots, y^n)$  tel que

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy^i$$

et donc,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

¶ *Proposition:*

Soit  $\Omega \in \Lambda^2(M)$ .

Si  $\text{rg}\Omega(p)$  est constant, alors la distribution  $\text{Ker } \Omega$  est de rang constant.

Si  $\Omega$  est fermée, alors  $\text{Ker } \Omega$  est involutive.

∞ *Théorème: Darboux réduit*

Soit  $\dim M = 2n + k$  et  $\Omega \in \Lambda^2(M)$ . Supposons que  $\text{rg}(\Omega(p)) = 2n$  et que  $\Omega$  est fermée. Alors  $\exists (x_1, \dots, x_n, y^1, \dots, y^n, z^1, \dots, z^k)$  tel que

$$\Omega = dx_i \wedge dy^i, i = \overline{1, n}$$

**Remarque:**

$\text{rg } \Omega = 2n \Leftrightarrow n$  est l'entier le plus large tel que  $\Omega^n = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \neq 0$

Soit  $\omega \in \Lambda^1(M)$ .

**Définition:**

$$\text{Classe } w(p) = \begin{cases} 2s+1 & \text{si } \omega \wedge (d\omega)^s(p) \neq 0 \\ & d(\omega)^{s+1}(p) = 0 \\ 2s & \text{si } (d\omega)^s(p) \neq 0 \\ & \omega \wedge (d\omega)^s(p) = 0 \end{cases}$$

**Théorème: de Darboux pour les 1-formes**

Supposons classe  $\omega(p) = \text{cst}$ ,  $\omega \in \Lambda^1(M)$ .

1. Si classe  $\omega(p) = 2s+1$ , alors il existe des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, z, w^1, \dots, w^k)$  tel que

$$\omega = dz + x_i dy^i, i = \overline{1, s}$$

$$\dim M = 2s + k + 1$$

2. Si classe  $\omega(p) = 2s$ , alors il existe des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, w^1, \dots, w^k)$  tel que

$$\omega = (1 + x_1) dy^1 + x_i dy^i, i = \overline{2, s}$$

$$\dim M = 2s + k$$

## 2.2 Système de Pfaff

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution,  $\text{rg } \mathcal{D} = m = n - 1$ .

$\exists \omega \in \Lambda^1(M); \mathcal{D} = \ker\{\omega\}$ . On appelle équation de Pfaff  $\omega = 0$ .

**Définition: Classe de l'équation**

classe  $(\omega = 0)(p) = 2s+1$  où  $s$  est le plus grand entier tel que  $\omega \wedge (d\omega)^s(p) \neq 0$ .

**Proposition:**

classe  $(\omega = 0)$  est bien définie, ie si  $\tilde{\omega} = \beta\omega$  où  $\beta \neq 0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , alors  $\omega \wedge (d\omega)^s(p) \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{\omega} \wedge (d\tilde{\omega})^s(p) \neq 0$

⇒ *Théorème: de Darboux pour l'équation de Pfaff*

Soit classe  $(\omega = 0) = 2s + 1$ .

Alors  $(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, z, w^1, \dots, w^k)$  tel que  $\omega = 0$  est donné par :

$$\omega = dz + \sum_{i=1}^s x_i dy^i = 0$$

⇒ *Corollaire:*

Considérons  $\mathcal{D}$  tel que  $\mathcal{D}^\perp = \text{span}\{\omega\}$ , avec classe  $(\omega = 0) = 2s + 1$ .

Rg  $\mathcal{D} = n - 1 = 2s + k$  et  $\exists(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, z, w^1, \dots, w^k)$  tel que :

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_k}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y^1} - x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^s} - x_s \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

⇒ *Théorème:*

Supposons classe  $(\omega = 0)$  maximale, ie :

—  $n = 2s + 1$ , et  $\omega \wedge (d\omega)^s(p) \neq 0$ .  $\exists(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, z)$  tel que

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y^1} - x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^s} - x_s \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

—  $n = 2s + 2$ , et  $\omega \wedge (d\omega)^s(p) \neq 0$ .  $\exists(x_1, \dots, x_s, y^1, \dots, y^s, z, w)$  tel que

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y^1} - x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^s} - x_s \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$