

Optimisation convexe

9 février 2015

Table des matières

I	Ensembles convexes	3
1	Définitions et premières propriétés	3
2	Enveloppe affine et enveloppe convexe	4
3	Propriétés topologiques des convexes	5
3.1	Ouverture et fermeture des convexes	5
3.2	Intérieur relatif	5
4	Opérations sur les ensembles convexes	6
4.1	Projection sur un convexe fermé	6
4.2	Séparation des ensembles convexes	6
4.3	Enveloppe convexe fermée	7
5	Cônes convexes	9
5.1	Cône normal	9
5.2	Cône dual	10
6	Hyperplan d'appui	10
7	Lemme de Farkas	11
II	Fonctions convexes	11
1	Définitions et propriétés	11
2	Fonctions d'appui	13
3	Transformée de Fenchel	14
4	Continuité des fonctions convexes	16
5	Différentiabilité des fonctions convexes	16
5.1	Dérivées directionnelles des fonctions convexes	16
5.2	Reconnaître une fonction convexe à l'aide de ses dérivées	16
6	Sous-différentiabilité des fonctions convexes	17
6.1	Définitions et premières propriétés	17
6.2	Sous-différentiabilité et transformée de Fenchel	18
6.3	Liens avec la différentiabilité	19
6.4	Quelques règles de calcul	19

III	Conditions d'optimalité	21
1	Une condition nécessaire générale d'optimalité	21

Première partie

Ensembles convexes

1 Définitions et premières propriétés

✦ Définition: Ensemble affine

Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble A de E est affine si

$$\forall x \in A; y \in A; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Autrement dit, un ensemble affine contient toujours la droite passant par deux de ses points x et y

✦ Définition: Ensemble affine

Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble C de E est convexe si

$$\forall x \in C; y \in C; \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

Autrement dit, un ensemble affine contient toujours le segment $[x, y]$.

✦ Définition: Simplexe

On appelle simplexe de \mathbb{R}^n le sous-ensemble

$$\Delta_n = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

✦ Définition: Combinaison convexe

On appelle combinaison convexe de n points $\{x_i\}_{i=1}^n$ tout point y s'écrivant

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ avec } \alpha \in \Delta_n$$

⇒ Théorème:

Un sous ensemble C de E est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Proposition: Opérations conservant la convexité

- Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de convexes de E , alors l'intersection $\cap_{i \in I} C_i$ est encore un convexe.
- Pour $a \in E$, le translaté $a + C = \{a + x; x \in C\}$ est convexe
- Le produit cartésien de $C \in E$ et $C' \in E'$, ie $C \times C' = \{(x; y); x \in C; y \in C'\}$ est un sous ensemble convexe de $E \times E'$
- La somme $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in C_1; x_2 \in C_2\}$ de deux ensembles convexes C_1 et C_2 est convexe.
- L'union de sous-ensembles convexes n'est en général pas convexe, mais l'union croissante de convexes est convexe.

Définition:

Soit C un ensemble convexe. Une partie convexe F de C est appelée face (ou partie extrême) de C si la propriété suivante est vérifiée

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in C \times C \text{ et} \\ \exists \alpha \in]0, 1[\text{ tel que } \alpha x + (1 - \alpha)y \in F \end{array} \right\} \Rightarrow [x, y] \in F$$

On appelle point extrême une face réduite à un seul point. En d'autres termes, $\bar{x} \in C$ est un point extrême de C s'il n'est pas possible d'avoir $\bar{x} = \alpha y + (1 - \alpha)z$ avec y et z deux points distincts de C et $\alpha \in]0, 1[$. On note $Ext(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C .

2 Enveloppe affine et enveloppe convexe

Définition: Enveloppe affine

Soit A une partie de E . L'enveloppe affine de A , notée $Aff(A)$, est l'intersection de tous les espaces affines contenant A .

Proposition:

Soit A une partie de E . On a :

$$Aff(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; n \geq 1, x_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Définition: Enveloppe convexe

Soit A une partie de E . L'enveloppe convexe de A , notée $conv(A)$, est l'intersection de tous les espaces convexes contenant A

Proposition:

Soit A une partie de E . On a :

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; n \geq 1, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Théorème: Carathéodory

Soit A une partie d'un espace vectoriel E de dimension n . Alors tout élément de $\text{conv}(A)$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de $n + 1$ éléments de A .

3 Propriétés topologiques des convexes

3.1 Ouverture et fermeture des convexes

Théorème:

Soit C un ensemble convexe. Alors son intérieur $\text{int}(C)$ et son adhérence \overline{C} sont aussi convexes.

3.2 Intérieur relatif

En analyse convexe, on rencontre souvent des ensembles convexes dont l'intérieur est vide : c'est le cas d'un segment dans \mathbb{R}^2 . Il est donc utile d'introduire la notion d'intérieur relatif.

Définition: Intérieur relatif

Soit P une partie d'un espace vectoriel E . L'intérieur relatif de P , noté $ri(P)$, est son intérieur dans son enveloppe affine $\text{Aff}(P)$, munie de la topologie induite de celle de E , i.e.

$$ri(P) = \{x \in P; \exists r > 0; (B(x, r) \cap \text{Aff}(P)) \subset P\}$$

Théorème:

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et C un convexe non vide de E . Alors $ri(C)$ est non vide.

Lemme:

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et C un convexe non vide. Alors

$$x \in ri(C) \text{ et } y \in \overline{C} \Rightarrow [x; y[\subset ri(C)$$

Ainsi, un point $x \in E$ est dans l'intérieur relatif de C si et seulement si pour tout $y \in C$ (ou $y \in Aff(C)$), il existe $\alpha > 1$ tel que $(1 - \alpha)y + \alpha x \in C$

4 Opérations sur les ensembles convexes

4.1 Projection sur un convexe fermé

⇒ *Théorème: Projection sur un convexe fermé*

Soient H un espace de Hilbert et x un élément de H . Soit également C un sous-ensemble convexe fermé de H . Il existe un unique point $y \in C$ tel que

$$\|y - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|$$

Cet élément y est appelé la projection de x sur C et sera noté $P_C(x)$. Il est caractérisé par l'inéquation suivante

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

📌 *Propriété: de la projection*

L'application projection : $x \mapsto P_C(x)$ sur un convexe fermé non vide C possède les propriétés suivantes :

1. $\forall x_1, x_2 \in H, \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\|^2$
2. elle est monotone : $\forall x_1, x_2 \in H, \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$
3. elle est Lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

4.2 Séparation des ensembles convexes

Un outil essentiel en analyse convexe est le théorème de Hahn-Banach sur la séparation des ensembles convexes. Etant donné un espace de Hilbert H , la séparation de deux convexes se fait géométriquement dans H en utilisant un hyperplan affine K de la forme

$$K = \{x \in H, \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$$

où $\xi \in H$ est non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

✦ *Définition:*

On dit qu'un hyperplan $K := \{x \in H; \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$ sépare deux convexes C_1 et C_2 si l'on a

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2, \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

On dit qu'un hyperplan $K := \{x \in H; \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$ sépare strictement deux convexes C_1 et C_2 s'il existe deux scalaires α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ et

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2, \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

Remarque:

Une condition nécessaire et suffisante pour que C_1 et C_2 puisse être séparé par un hyperplan est qu'il existe un $\xi \in H$ non nul tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que C_1 et C_2 puisse être séparé strictement par un hyperplan est qu'il existe un $\xi \in H$ tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle < \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

\Rightarrow Théorème: Séparation d'un convexe et d'un point

Soient H un espace de Hilbert, C un sous-ensemble convexe fermé de H et $x \notin C$. Alors il existe $r \in H$ tel que

$$\sup_{z \in C} \langle r, z \rangle < \langle r, x \rangle$$

\Rightarrow Théorème: Séparation de deux convexes

Soient H un espace de Hilbert et C_1 et C_2 deux convexes non vides disjoints de H , l'un étant fermé et l'autre étant compact. Alors on peut séparer strictement C_1 et C_2 .

\Rightarrow Théorème: Séparation de deux convexes en dimension finie

Soient H un espace de Hilbert de dimension finie et C_1 et C_2 deux convexes non vides disjoints de H . Alors on peut séparer C_1 et C_2 au sens large, i.e., il existe $\xi \in H$ non nul tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

4.3 Enveloppe convexe fermée

L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée.

Exemple : Dans \mathbb{R}^2 , $C = \{xy \geq 1\} \cup \{0\}$: fermé.

$\text{conv}(C) = \{x > 0, y > 0\} \cup \{0\}$: non fermé.

✧ Définition:

$A \subset E$. On définit l'enveloppe convexe fermée, noté $\overline{\text{conv}}(A)$, comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant A .

¶ Propriété:

- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{\text{conv}}(A_1) \subset \overline{\text{conv}}(A_2)$
- $A \subset \text{conv}(A) \subset \text{conv}(\bar{A}) \subset \overline{\text{conv}}(A)$ et $\overline{\text{conv}}(A) = \overline{\text{conv}(\bar{A})} = \overline{\text{conv}(A)}$

✧ Définition:

Soit H un Hilbert.

Un demi-espace fermé de H est un ensemble de la forme :

$$H^-(\xi, \alpha) = \{x \in H; (x, \xi) \leq \alpha\}$$

où $\xi \in H \neq \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

¶ Proposition:

$\overline{\text{conv}}(A)$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A .

⇒ Corollaire:

Soit C un ensemble convexe.

Alors l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C est \bar{C} .

⇒ Corollaire:

C convexe fermés $\Leftrightarrow C$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C .

⇒ Théorème:

Soient H de dimension finie et A un compact de H . Alors $\text{conv}(A)$ est compact.

5 Cônes convexes

✦ Définition: Cône

Un ensemble C est un cône si $\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in C, \lambda x \in C$

✦ Définition: Enveloppe conique

Soit $A \subset E$. L'enveloppe conique A , notée $\text{cone}(A)$, est l'intersection de tous les cônes convexes contenant A .

✦ Définition: Combinaison conique

On appelle combinaison conique d'éléments de A un point x tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, x_i \in A$

¶ Proposition:

- C est un cône convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.
-

$$\text{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq 0, x_i \in A \right\}$$

✦ Définition: Enveloppe conique fermée

On définit l'enveloppe conique fermée de A , notée $\overline{\text{cone}}A$, comme étant l'intersection de tous les cônes convexes fermés contenant A .

¶ Propriété:

- $A \subset B \Rightarrow \overline{\text{cone}}(A) \subset \overline{\text{cone}}(B)$
- $A \subset \text{cone}(A) \subset \text{cone}(\bar{A}) \subset \overline{\text{cone}}(A)$ et $\overline{\text{cone}}(A) = \overline{\text{cone}(\bar{A})} = \overline{\text{cone}(A)}$

5.1 Cône normal

✧ Définition:

Soient H de Hilbert, $C \subset H$, $x \in C$.

On définit le cône normal à C en x , noté $\mathcal{N}_x C$ ou $\mathcal{N}_C(x)$ par :

$$\mathcal{N}_C(x) = \{d \in H; (d, y - x) \leq 0 \forall y \in C\}$$

Les éléments de $\mathcal{N}_x C$ sont appelés les normales à C en x .

■ Proposition:

Soit H de Hilbert de dimension finie.

Si $C \subset H$ et $x \in \partial C$, alors $\mathcal{N}_x C$ contient au moins un élément non nul.

Remarque : Le résultat reste vrai en dimension infini si $\overset{\circ}{C}$ est non vide.

5.2 Cône dual

✧ Définition: Cône dual, bidual, polaire

Soit $P \subset H$. On appelle cône dual de P , noté P^* , l'ensemble :

$$P^* = \{x \in H; (x, y) \geq 0 \forall y \in P\}$$

On appelle cône bidual de P : $P^{**} = (P^*)^*$

On appelle cône polaire (ou dual négatif) P^- l'ensemble

$$P^- = \{x \in H; (x, y) \leq 0 \forall y \in P\} = -P^*$$

■ Proposition:

P^* est un cône convexe fermé non vide.

6 Hyperplan d'appui

✧ Définition:

Un hyperplan d'affine d'équation $(s, x) = r$ est appelé hyperplan d'appui à C en \bar{x} si :

$$(s, x) \leq r \quad \forall x \in C$$

$$(s, \bar{x}) = r$$

⇒ *Théorème:*

Soit C un ensemble convexe d'un Hilbert H . On suppose soit que H est de dimension finie soit que $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Soit $\bar{x} \in \partial C$. Alors il existe un hyperplan d'appui à C en \bar{x} .

7 Lemme de Farkas

⇒ *Lemme:*

Soient H un espace de Hilbert, $(\xi_j)_{j \in J} \subset H$ et $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}$. On suppose que le système

$$(\xi_j, x) \leq \alpha_j \quad \forall j \in J$$

admet au moins une solution.

Soit $(s, \beta) \in H \times \mathbb{R}$. On a équivalence entre les 2 propositions :

1.

$$\forall x \in H, [\forall j \in J, (\xi_j, x) \leq \alpha_j \Rightarrow (s, x) \leq \beta]$$

2.

$$(s, \beta) \in \overline{\text{con}}((\xi_j, \alpha_j)_{j \in J} \cup (0, 1)) \subset H \times \mathbb{R}$$

⇒ *Corollaire:*

Sous les mêmes hypothèses avec $\alpha_j = 0 \quad \forall j \in J$. On a pour $s \in H$:

1.

$$\forall x \in H, [\forall j \in J, (\xi_j, x) \leq 0 \Rightarrow (s, x) \leq 0]$$

2.

$$s \in \overline{\text{con}}((\xi_j)_{j \in J})$$

⇒ *Lemme:*

Si C est un cône convexe fermé, alors $C^{**} = C$.

Deuxième partie

Fonctions convexes

1 Définitions et propriétés

$$f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

✦ Définition:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in H; f(x) < +\infty\} \\ \text{epi}(f) &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha \geq f(x)\} \\ \text{epi}_S(f) &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha > f(x)\} \end{aligned}$$

On dit que f est propre si f n'est pas identiquement égal à $+\infty$.

On dit que f est convexe si $\text{epi}(f)$ est convexe.

On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

📘 Proposition:

Si f est convexe, alors $\text{Dom}(f)$ est convexe.

De plus, f est convexe si et seulement si : $\forall x, y \in \text{Dom}(f), \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

✦ Définition:

On dit que f est strictement convexe si $\forall x, y \in \text{Dom}(f), x \neq y, \forall \lambda \in]0, 1[$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

✦ Définition:

On dit que f est fortement convexe de module α si $\forall x, y \in \text{Dom}(f), \forall \lambda \in]0, 1[$

$$\frac{\alpha}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

📘 Propriété: opérations conservant la convexité

1. Pour $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes, $\sup_{i \in I} f_i$ est convexe.
2. $\alpha \geq 0$, si f convexe, alors αf est convexe
3. Si f_1 et f_2 convexes, alors $f_1 + f_2$ convexes.

✦ *Définition:*

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

On appelle sous ensemble de niveau de f au niveau α noté $\Gamma_\alpha(f)$ l'ensemble

$$\Gamma_\alpha(f) = \{x \in H; f(x) < \alpha\}$$

Remarque : f convexe $\Rightarrow \Gamma_\alpha(f)$ convexe $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

Si $\Gamma_\alpha(f)$ est convexe $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est quasi-convexe.

✦ *Définition:*

Soit $P \subset H$. On appelle fonction indicatrice de P la fonction :

$$\mathbb{1}_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si P convexe, alors $\mathbb{1}_P$ est convexe.

Si $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\Gamma_\alpha(\mathbb{1}_P) = P$ donc $\mathbb{1}_P$ caractérise P .

2 Fonctions d'appui

✦ *Définition:*

Soit $S \subset H$.

On appelle fonction d'appui à S et on note σ_S la fonction définie par :

$$\sigma_S(d) = \sup_{s \in S} (s, d)$$

Remarque : σ_S est toujours convexe (même si S ne l'est pas).

☞ *Théorème:*

Soit S un sous-ensemble non vide de H . Alors $s \in \overline{\text{conv}}(S)$ si et seulement si

$$\forall d \in H, (s, d) \leq \sigma_S(d)$$

De plus, $\sigma_S = \sigma_{\overline{\text{conv}}(S)}$

Remarque : Soient S_1 et S_2 2 convexes fermés. $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \sigma_{S_1} = \sigma_{S_2}$.

Propriété:

Soient S_1 et S_2 deux sous-ensembles de H non vides.

1. $\sigma_{S_1+S_2} = \sigma_{S_1} + \sigma_{S_2}$
2. $\sigma_{S_1 \cup S_2} = \max\{\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}\}$

3 Transformée de Fenchel

On va chercher les fonctions affines minorantes :

$$\langle p, x \rangle + \alpha \leq f(x)$$

$$-\alpha \geq \langle p, x \rangle - f(x)$$

On va prendre $-\alpha = \sup_{x \in H} \{\langle p, x \rangle - f(x)\} = f^*(p)$.

Définition: Transformée de Fenchel

Soit H un Hilbert et $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On définit la transformée de Fenchel de f , notée $f^* : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$f^*(p) = \sup_{x \in H} \{\langle p, x \rangle - f(x)\}$$

Propriété: Inégalité de Young

$$\forall p, x \in H, f^*(p) + f(x) \geq \langle p, x \rangle$$

Proposition: Semi-continue inférieurement

Soit $f : H \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (sci) si l'une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall x \in H, \forall x_n \rightarrow x, \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x)$
2. $\text{epi}(f)$ est fermé.

Proposition:

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions sci. Alors $\sup_{i \in I} f_i$ est sci.

⇒ *Corollaire:*

f^* est sci et convexe.

✎ *Définition: Biconjuguée*

La biconjuguée de f , notée f^{**} est définie par :

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in H} \{ \langle p, x \rangle - f^*(p) \}$$

📖 *Propriété:*

- $f^{**}(x) + f^*(p) \geq \langle p, x \rangle$
- $f(x) \geq f^{**}(x)$

📖 *Proposition:*

Si f est convexe, sci et propre, alors f^* est convexe, sci et propre.

⇒ *Théorème: Fenchel-Moreau*

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. alors f est convexe et sci si et seulement si $f = f^{**}$

📖 *Remarque:*

On peut définir la transformée de Fenchel sur un espace normé E réflexif :

$$f^* : \begin{array}{ccc} E' & \rightarrow & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup_{x \in E} \{ \langle p, x \rangle_{E'E} - f(x) \} \end{array}$$

Dans ce cas, les propositions précédentes et le théorème de Fenchel-Moreau restent vraies.

⇒ *Corollaire:*

Soit f propre. alors f est convexe et sci si et seulement si f est l'enceppe supérieure de ses minorantes affines.

4 Continuité des fonctions convexes

Proposition:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. On suppose qu'il existe une boule ouverte sur laquelle f est bornée. Alors f est continue sur l'intérieur de son domaine qui est non vide.

Remarque:

Si f est continue en un point, alors f est bornée sur une boule, et donc f est continue sur l'intérieur de son domaine.

Corollaire:

Si $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe et propre avec H de dimension finie, alors f restreinte à l'intérieur relatif de son domaine est continue.

Remarque : Si $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, alors f continue sur H .

5 Différentiabilité des fonctions convexes

5.1 Dérivées directionnelles des fonctions convexes

Théorème:

Soient $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \text{Dom}(f)$, $d \in H$.

1. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x+\varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$ est croissante
2. $f'(x, d)$ existe toujours et vaut éventuellement $\pm\infty$. De plus, $f'(x, d) = +\infty$ si et seulement si $x + \varepsilon d \notin \text{Dom}(f)$ pour tout ε petit, et :

$$f'(x, d) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(x, d) \leq f(x + d) - f(x)$$

3. $f'(x, d) \geq -f'(x, -d)$

5.2 Reconnaître une fonction convexe à l'aide de ses dérivées

Théorème:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. On suppose que f est différentiable sur un ouvert Ω de $\text{Dom}(f) \subset H$. On a équivalence entre les propositions suivantes :

1. f est convexe (resp. strictement convexe) sur Ω
2. $\forall x, y \in \Omega$, $f(y) \geq f(x) + f'(x, y - x)$ (resp. $f(y) > f(x) + f'(x, y - x)$)
3. $\forall x, y \in \Omega$, $(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq 0$ (resp. $(f'(y) - f'(x))(y - x) > 0$)

⇒ *Théorème:*

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre et 2 fois différentiable sur un ouvert $\Omega \subset \text{Dom}(f)$.
 Alors f est convexe si et seulement si $D^2f(d, d) \geq 0 \forall d \in H$.
 De plus, si $D^2f(d, d) > 0$, alors f est strictement convexe (réciproque fautive : penser à $f(x) = x^4$)

6 Sous-différentiabilité des fonctions convexes

6.1 Définitions et premières propriétés

✦ *Définition: Fonction affine*

a est affine si $\forall x, y \in H, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$a(tx + (1-t)y) = ta(x) + (1-t)a(y)$$

Pour toute fonction affine, il existe x^* (la pente) et α (l'ordonnée) telles que $a(x) = \langle x^*, x \rangle + \alpha$.

✦ *Définition: Minorante affine*

On dit que a est une minorante affine de f si a est affine et si :

$$\forall x \in H, f(x) \geq a(x)$$

On dit qu'une minorante affine est exacte en x_0 si $f(x_0) = a(x_0)$. Dans ce cas,

$$a(x) = \langle x^*, x - x_0 \rangle + f(x_0)$$

⇒ *Théorème: Existence d'une minorante affine*

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors f admet une minorante affine.
 De plus, celle-ci peut être choisie exacte en un point de $\text{ri}(\text{Dom}(f))$, ie : si $x \in \text{ri}(\text{Dom}(f))$,

$$\exists x^* \in H; f(y) \geq \langle x^*, y - x \rangle + f(x)$$

✦ *Définition: Sous-différentiable*

On dit que f convexe et propre est sous-différentiable en x s'il existe $x^* \in H$ tel que :

$$\forall y \in H, f(y) \geq \langle x^*, y - x \rangle + f(x)$$

Les éléments x^* sont appelés les sous-gradients de f en x , et on note $\partial f(x)$ l'ensemble des sous-gradients de f en x .

Par convention, si $x \notin \text{Dom}(f)$, alors $\partial f(x) = \emptyset$

Proposition: Sur l'optimalité

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors f atteint un minimum en x si et seulement si $0 \in \partial f(x)$.

Proposition:

Sous les mêmes hypothèses :

$$\partial f(x) = \{x^* \in H; f'(x, d) \geq \langle x^*, d \rangle, \forall d \in H\}$$

Théorème:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre, et soit $x \in \text{Dom}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\partial f(x) \neq \emptyset$
2. $\exists y \in \text{ri}(\text{Dom}(f)); f'(x, y - x) > -\infty$
3. $f'(x, \bullet) \neq -\infty$

Corollaire:

Si f est convexe et propre et si f est continue en $x \in \text{Dom}(f)$, alors $\partial f(x) \neq \emptyset$

Proposition:

Soit f convexe et propre tel que f est continue en x . Alors

$$f'(x, d) = \sigma_{\partial f(x)}(d) = \sup_{p \in \partial f(x)} \langle d, p \rangle$$

6.2 Sous-différentiabilité et transformée de Fenchel

Proposition:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors

$$\partial f(x) = \{p \in H; f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle\}$$

On définit de la même manière :

$$\partial f^*(p) = \{x \in H; f^{**}(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle\}$$

Proposition:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe, propre et sci.

$$x \in \partial f^*(p) \Leftrightarrow p \in \partial f(x)$$

6.3 Liens avec la différentiabilité

Proposition:

Soit $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexe, sci et propre. On suppose que f est continue en x .

1. Si f est Gâteaux-différentiable en x , alors

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

2. Réciproquement, si $\partial f(x)$ est réduit à un seul élément, alors f est Gâteaux-différentiable en x et $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

6.4 Quelques règles de calcul

Dans toute la suite, on supposera la dimension de H finie.

Définition: Homogène et sous linéaire

$f'(x, \bullet)$ est dite homogène de degré $n \in \mathbb{R}^*$ si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f'(x, \lambda d) = \lambda^n f'(x, d)$$

$f'(x, \bullet)$ est dite sous-linéaire si :

$$\forall d \in H, \exists L > 0; |f'(x, d)| \leq L \|d\|$$

Proposition:

Soient $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre et $x \in H$. Alors $f'(x, \bullet)$ est convexe, homogène de degré 1 et sous-linéaire.

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses, $\partial f(x)$ est un convexe compact non vide.

Proposition:

Soient $f_1, f_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, et $t_1, t_2 > 0$. Alors

$$\partial(t_1 f_1 + t_2 f_2)(x) = t_1 \partial f_1(x) + t_2 \partial f_2(x)$$

Proposition:

Soient $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction affine ($Ax = A_0 x + b$, $A_0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)
et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

$$\partial(g \circ A)(x) = A_0^* \partial g(Ax)$$

Troisième partie

Conditions d'optimalité

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u)$$

$\mathcal{U}_{ad} \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble (non vide) admissible. On suppose \mathcal{U}_{ad} fermé convexe, et J convexe.

☞ *Théorème:*

Si J est coercive ou si \mathcal{U}_{ad} est borné, alors il existe un point de minimum.

1 Une condition nécessaire générale d'optimalité

✦ *Définition: Cône tangent*

On dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une tangente à X en \bar{x} si $\exists x_k \rightarrow \bar{x}$ avec $(x_k \in X, t_k \rightarrow 0, t_k > 0)$ tel que :

$$\frac{x_k - \bar{x}}{t_k} \rightarrow d$$

L'ensemble de toutes les directions tangentes est appelé le cône tangent et est noté $T_{\bar{x}}X$.

✦ *Définition: équivalente*

$d \in T_{\bar{x}}X$ si $\exists t_k > 0, t_k \rightarrow 0$ et $\exists d_k \in X, d_k \rightarrow d$ tel que $\bar{x} + t_k d_k \in X$.

📘 *Proposition:*

$T_{\bar{x}}X$ est un cône fermé. Il est convexe si X est convexe.

📘 *Proposition:*

Soient X un ensemble convexe et $\bar{x} \in X$. Alors

$$T_{\bar{x}}X = \overline{\text{coné}}(X - \bar{x}) = \overline{\mathbb{R}_+(X - \bar{x})}$$

✦ *Définition:*

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in X$.

On dit que p est une direction normale à X en \bar{x} si

$$\langle p, d \rangle \leq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{x}}X$$

L'ensemble des normales est appelé le cône normal, noté $\mathcal{N}_{\bar{x}}X$.

📖 *Remarque:*

$\mathcal{N}_{\bar{x}}X = (T_{\bar{x}}X)^- = -(T_{\bar{x}}X)^*$
 $\mathcal{N}_{\bar{x}}X$ est donc un cône convexe.

☞ *Théorème:*

Soit \mathcal{U}_{ad} un ensemble convexe fermé non vide, $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. \bar{u} minimise J sur \mathcal{U}_{ad}
2. $J'(\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$
3. $J'(\bar{u}, d) \geq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{u}}\mathcal{U}_{ad}$
4. $0 \in \partial J(\bar{u}) + \mathcal{N}_{\bar{u}}\mathcal{U}_{ad}$.