Solution de viscosité

9 février 2015

Table des matières

Introduction

Le but est de voir comment résoudre les équations du type :

$$\begin{cases} F(x,u,Du,D^2u) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{EDP}$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est l'inconnue.
On notera $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$Du = \nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

D^2u est la matrice hessienne.
$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$

On note S^n l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille n.
Si $u \in \mathscr{C}^2$, $D^2u \in S^2$.
S^n est muni d'un ordre naturel :

$$X \geq Y \Leftrightarrow X - Y \geq 0$$

où $X \geq 0$ équivaut $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $(X\xi, \xi) \geq 0$

$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ est appelé l'hamiltonien.
On note (x, r, p, X) les variables de F. Le but est de donner un sens à l'EDP.

- En général, il n'y a pas de solution classique (ie appartenant à $\mathscr{C}^2$)
- Comme l'équation est complètement non linéaire, on ne peut pas définir une solution au sens des distributions. On doit donc trouver une autre notion de solution.

But : Introduire la notion de viscosité.
Cette notion sera bien posée dans le sens suivant :

- existence et unicité des solutions
- stabilité par rapport à F et g.
  Si $F_n \to F$ et $g_n \to g$ localement uniformément, alors $u_n \to u$ localement uniformément.

Outils essentiels :

- Principe de comparaison : si u est sous-solution, v sur-solution, alors $u \leq v$. Cela nous donnera l'unicité de la solution.
- On utilisera souvent $\limsup$, $\liminf$ et la semi-continuité.
- On aura également besoin d'un ordre : F doit être à valeur dans $\mathbb{R}$ (limitation de la théorie)

Application : Géophysique, problèmes de mouvement et de front, trafic routier, imagerie, analyse numérique (convergence de schéma, extimation d'erreur...), homogénéisation (changement d'échelle),...

Première partie

Solution classique et généralisation

1 Premières définitions

Définition: Ellipticité

- On dit que F est elliptique si F est décroissante en X, ie

$$Y \geq X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

- On dit que F est strictement elliptique si :

$$Y < X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) < F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

- On dit que F est uniformément elliptique si :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0; \forall X, Y \in S^n, Y \geq 0, -\Lambda tr(Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X+Y) - F(\bullet, \bullet, \bullet, X) \leq -\lambda tr(Y)$$

- F est propre si F est croissante en r et elliptique.

Dans (presque) tout le reste du cours, on travaillera avec des opérateurs propres.

Définition: Linéarité

- F est linéaire si F est linéaire en r, p et X
- F est semi-linéaire si F est linéaire en p et X
- F est quasi-linéaire si F est linéaire en X
- F est complètement non linéaire sinon

1.1 Quelques exemples d'opérateurs propres

Equation de Poisson : $-\Delta u = f$ dans Ω

$F(x, r, p, X) = -tr(X) - f(x)$
- F uniformément elliptique
- F propre

Equation linéaire non sous forme divergentielle : $\mathscr{L}u = f$, avec $\mathscr{L}u = -tr(a(x)D^2u) + b(x)Du + c(x)u$

$a(x)$ symétrique positive, $c(x) \geq 0$.

Exercice : Montrez que $\mathscr{L}$ est propre. *Montrer au préalable :*

$$A, B \geq 0 \Rightarrow tr(AB) \geq 0$$

Equation linéaire sous forme divergentielle : $\mathscr{L}'u = f$ avec $\mathscr{L}'u = -div(a(x)Du) + b(x)Du + c(x)u$

$\mathscr{L}'$ est elleiptique si $a \in \mathscr{C}^1(\Omega, S^n)$ avec $a \geq 0$ et propre si $c \geq 0$

Equation d'Hamilton-Jacobi d'ordre 1 : $H(x, u, \nabla u) = 0$

Propre si H croissante en u

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann : $\mathscr{L}^\alpha$ linéaire, $\mathscr{L}^\alpha u = -tr(a^\alpha(x)D^2u) + b^\alpha(x)Du + c^\alpha u$

Si $\sup_\alpha\{\mathscr{L}^\alpha u - f\alpha\} = 0$, alors $\mathscr{L}^\alpha$ propre.

2 Solutions classiques

Définition: Solution classique

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ est une solution classique de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ si u vérifie l'équation en tout point. (on se limite à $\mathscr{C}^1$ pour les équations du premier ordre)

Proposition:

Soient $u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ tel que $u - v$ atteint un maximum positif en $\bar{x} \in \Omega$.
Alors $F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$

Démonstration :

$$u(\bar{x}) \geq v(\bar{x})$$
$$D(u-v)(\bar{x}) = 0 \Rightarrow Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x}) \text{ car on atteint un maximum}$$
$$D^2(u-v)(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow D^2u(\bar{x}) \leq D^2v(\bar{x})$$

Comme F est propre :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$$

Définition:

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ est sous solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0 \ \forall x \in \Omega$
De même, u est sur solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$

Proposition:

Supposons Ω borné. On suppose u sous-solution, v sur-solution, F strictement croissante en r et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$.
Alors $u \leq v$ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration :
On raisonne par l'absurde : on suppose $\max_\Omega(u - v) > 0$. Soit $\bar{x}$ un point de maximum.

$$u(\bar{x}) - v(\bar{x}) > 0$$
$$Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x})$$
$$D^2u(\bar{x}) \leq Dv(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &\geq \quad F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \\ &\geq \quad F(\bar{x}, u(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &> \quad F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &\quad\ \ \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc $0 > 0$, ce qui est absurde.

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses, (EDP) admet au plus une solution vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration :
Soient u et v deux solutions.
u est sous-solution, v est sur-solution, donc $u \leq v$
De même, u est sur-solution, et v est sous-solution, donc $v \leq u$.
Donc $u = v$.

3 Vers une solution généralisée

On considère le problème :

$$\begin{cases} |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

D'après Rolle, il n'y a pas de solution classique. Il y a par contre une infinité de solution $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Par exemple :

$$u^+ = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et également $u^- = -u^+$.
On considère le problème pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Safranov nous montre qu'il existe une unique solution $u^\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 + x - \varepsilon \left(\exp\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) & \text{si } x \leq 0 \\ u_\varepsilon(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u^+$ uniformément. u^+ est séléctionnée par la méthode de viscosité évanescente.

Théorème: Principe du maximum

$u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ est une solution de (EDP) si et seulement si :

1. $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en $\bar{x}$ on a :
$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \leq 0$$
2. $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en $\bar{x}$ on a :
$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \geq 0$$

Démonstration :
On suppose que a est une solution classique. Soit ϕ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en $\bar{x}$.

$$Du(\bar{x}) = D\phi(\bar{x})$$

$$D^2u(\bar{x}) \leq D^2\phi(\bar{x})$$

$$0 = F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x}))$$

Le deuxième point se fait de la même manière.
Réciproquement : comme $u \in \mathscr{C}^2$, on peut prendre $\phi = u$ dans 1) et 2), donc $u - \phi$ atteint un max et un min en tout point.

$$\begin{array}{rcl} F(x, u, Du, D^2u) & \leq & 0 \\ & \geq & 0 \\ \Rightarrow F(x, u, Du, D^2u) & = & 0 \end{array}$$

Deuxième partie

Solutions de viscosité

1 Définitions et propriétés

1.1 Solutions continues

Définition: Solution de viscosité

Soit $u \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. On dit que u est sous-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en $\bar{x}$, on a

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \leq 0$$

On dit que u est sur-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en $\bar{x}$, on a

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \geq 0$$

Si u est à la fois sous-solution et sur-solution, on dit qu'elle est alors solution de viscosité de (EDP).

Proposition:

- Dans la définition précédente, on peut remplacer maximum par maximum global ou maximum strict (de même pour le minimum)
- On peut remplacer $\phi \in \mathscr{C}^2$ par $\phi \in \mathscr{C}^k$, $\forall k \geq 2$ pour les équations du deuxième ordre, et par $\phi \in \mathscr{C}^1$ pour les équations du premier ordre.

1.2 Propriété des solutions continues

Définition: Sous et sur-différentiel

Soit $u \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. On appelle sur-différentiel d'ordre 2 de u en $\bar{x}$, noté $D^{2+}(\bar{x})$ l'ensemble convexe constitué des couples $(p, M) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ tel que :

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) \leq u(\bar{x}) + p(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}M(x - \bar{x}).(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2)$$

On appelle sous-différentiel d'ordre 2 de u en $\bar{x}$, noté $D^{2-}(\bar{x})$ l'ensemble convexe constitué des couples $(p, M) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ tel que :

$$\forall x \in \Omega,\ u(x) \geq u(\bar{x}) + p(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}M(x - \bar{x}).(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2)$$

Remarque:

Si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$:

$$D^{2+}u(\bar{x}) = \{(Du(\bar{x}), M);\ M \geq D^2u(\bar{x})\}$$
$$D^{2-}u(\bar{x}) = \{(Du(\bar{x}), M);\ M \leq D^2u(\bar{x})\}$$

Théorème:

1. $u \in \mathscr{C}(\Omega)$ est sous-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in D^{2+}(\bar{x})$, on a :
$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), p, M) \leq 0$$
2. $u \in \mathscr{C}(\Omega)$ est sur-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in D^{2-}(\bar{x})$, on a :
$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), p, M) \geq 0$$

Corollaire:

1. Si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ et vérifie (EDP) au sens classique alors u est solution de viscosité
2. Si $u \in \mathscr{C}(\Omega)$ est solution de (EDP) et si u est deux fois différentiable en $\bar{x}$, alors $F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) = 0$

Proposition:

Si u sous-solution de (EDP), alors $v = -u$ est sur-solution de
$$-F(x, -v, -Dv, -D^2v) = 0$$

Théorème: Résultat de stabilité

On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, u_ε est solution de
$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = 0 \text{ dans } \Omega$$
où F_ε est un opérateur continue et elliptique.
Si $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u$ dans $\mathscr{C}(\Omega)$, dans le sens où pour tout compact $K \subset \Omega$, $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(K)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$
et si $F_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F$ uniformément sur les compacts
alors u est solution de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$.

Utilisation du théorème

1. On montre que u_ε est localement borné dans L^∞ uniformément en ε
2. On montre que u_ε est localement uniformément holderienne ou lipschitzienne
3. On utilise le théorème d'Ascoli et le procédé d'extraction diagonal pour construire une fonction u tel que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathscr{C}(\Omega)$ (à une sous-suite près)
4. On utilise le résultat de stabilité pour montrer que u est solution de (EDP).

1.3 Solutions discontinues

1.3.1 Limite sup/Limite inf

On prend X un espace topologique séparé. Soit $A \subset X$, $x \in \overline{A}$, $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Définition: Limsup/Liminf

On définit la limite supérieure de f en x par :

$$\limsup_{y \to x} f(y) = \inf_{V \in V(x)} \sup_{y \in V} f(y)$$

On définit la limite inférieure de f en x par :

$$\liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{V \in V(x)} \inf_{y \in V} f(y)$$

Remarque:

- $\limsup$ et $\liminf$ sont toujours définies (à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)
- $\liminf \leq \limsup$
- $x \in A$, $\liminf_{y \to x} f(y) \leq f(x) \leq \limsup_{y \to x} f(y)$
- $\limsup_{y \to x} f(y) = \liminf_{y \to x} f(y)$ si et seulement si $\lim_{y \to x} f(y)$ existe.
- $\liminf(-f) = -\limsup f$

Définition: fonction semi-continue

On dit que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est
- semi-continue inférieurement (sci) en x si :

$$\forall x_n \to x, \ \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

- semi-continue supérieurement (scs) en x si :

$$\forall x_n \to x, \ \limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \leq f(x)$$

Proposition:

f est sci si et seulement si $epi(f) = \{(\lambda, x); \ \lambda \geq f(x)\}$ est fermé

Propriété:

- la somme, le sup, l'inf de deux fonctions scs est scs
- le sup d'une famille de fcts sci est sci

1.3.2 Enveloppe semi-continue

Définition: Enveloppe semi-continue

Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On appelle enveloppe semi-continue supérieure de f, notée f^*, la fonction définie par : $f^*(x) = \limsup_{y \to x} f(y)$
On appelle enveloppe semi-continue inférieure de f, notée f_*, la fonction définie par : $f_*(x) = \liminf_{y \to x} f(y)$

Proposition:

f^* est la plus petite fonction scs plus grande que f.
f_* est la plus grande fonction sci plus petite que f.

Théorème: Minimisation des fonctions sci

Soit X un espace compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction sci. Alors f atteint son minimum sur X.

Définition: Semi-limites relaxées

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonction, $f_i : X \to \mathbb{R}$. On définit la semi-limite relaxée supérieure de (f_i) quand $i \to +\infty$ par :

$$\bar{f}(x) = \lim_{i \to +\infty} \limsup_{y \to x} f_i(y) \text{ (scs)}$$

On définit la semi-limite relaxée inférieure de (f_i) quand $i \to +\infty$ par :

$$\underline{f}(x) = \lim_{i \to +\infty} \liminf_{y \to x} f_i(y) \text{ (sci)}$$

Théorème:

Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions, $f_i : X \to \mathbb{R}$ et X compact.
Alors $\underline{f} = \bar{f}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si f_i converge uniformément sur X quand $i \to +\infty$ vers une fonction continue f.
De plus, $f = \bar{f} = \underline{f}$.

1.3.3 Solution de viscosité discontinues

Définition: Solutions de viscosité discontinues

On dit que u scs est sous-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u-\phi$ atteint un maximum en x, on a :

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0$$

On dit que u sci est sur-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ tel que $u-\phi$ atteint un minimum en x, on a :

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0$$

Une fonction u localement bornée est solution de viscosité de (EDP) si u^* est sous-solution et u_* est sur-solution.

Proposition:

Si (EDP) vérifie le principe de comparaison suivant :
(PC) Si u scs est sous-solution de (EDP), si v sci est sur-solution, et si $u \leq g \leq v$ sur $\partial\Omega$ ($g \in \mathscr{C}^0(\Omega)$), alors $u \leq v$ dans Ω
Alors il existe au plus une solution de (EDP) vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$ et elle est continue.

Remarque:

Comme pour les solutions continues, on peut définir les sous- et sur-solutions en utilisant les sous- et sur-différentiels (qui sont définis de la même manière pour une fonction scs et sci).

Définition:

Le sur-différentiel limite d'ordre 2 de u scs en x, noté $\bar{D}^{2+}u(x)$ est défini par :

$$\bar{D}^{2+}u(x) = \{(p, M);\ \exists (p_n, x_n, M_n);\ (p_n, M_n) \in D^{2+}u(x_n) \text{ et } p_n \to p,\ M_n \to M, x_n \to x,\ u(x_n) \to u(x)\}$$

Le sous-différentiel limite d'ordre 2 de u sci en x, noté $\bar{D}^{2-}u(x)$ est défini par :

$$\bar{D}^{2-}u(x) = \{(p, M);\ \exists (p_n, x_n, M_n);\ (p_n, M_n) \in D^{2-}u(x_n) \text{ et } p_n \to p,\ M_n \to M, x_n \to x,\ u(x_n) \to u(x)\}$$

Théorème:

u scs est sous-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in \bar{D}^{2+}u(x)$, on a $F(x, u(x), p, M) \leq 0$
u sci est sur-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in \bar{D}^{2-}u(x)$, on a $F(x, u(x), p, M) \geq 0$

2 Existence par la méthode de Perron

On note

$$\begin{cases} F(x,u,Du,D^2u) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{EDP-CB}$$

Définition:

On dit que $\underset{\sim}{u}$ scs est sous-solution barrière de (EDP-CB) si :

1. $\underset{\sim}{u}$ est sous-solution de (EDP) dans Ω
2. $\underset{\sim}{u}$ vérifie la confition au bord continuement : $\forall x \in \partial\Omega$, $\lim_{y\to x} \underset{\sim}{u}(y) = g(x)$

On dit que $\tilde{u}$ sci est sur-solution barrière de (EDP-CB) si :

1. $\tilde{u}$ est sur-solution de (EDP) dans Ω
2. $\tilde{u}$ vérifie la confition au bord continuement : $\forall x \in \partial\Omega$, $\lim_{y\to x} \tilde{u}(y) = g(x)$

Théorème:

On suppose qu'il existe une sous-solution barrière $\underset{\sim}{u}$ et une sur-solution $\tilde{u}$ de (EDP-CB). Alors il existe une solution discontinue u de (EDP-CB). De plus

$$\underset{\sim}{u} \leq u \leq \tilde{u}$$

3 Stabilité

On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère le problème :

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{EDP_ε}$$

où F_ε est propre et continue (par rapport à toutes les variables).

Théorème:

On suppose que

– $F_\varepsilon \to F$ uniformément sur les compact de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N$

– La famille $\{u_\varepsilon,\ 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ est équibornée sur les compacts de $\overline{\Omega}$

Si u_ε est sous-solution de (EDP_ε), alors $\bar{u}$, $\bar{u}(x) = \limsup_{\varepsilon\to 0,\ y\to x} u_\varepsilon(y)$ est sous-solution de (EDP).

Si u_ε est sur-solution de (EDP_ε), alors $\underline{u}$, $\underline{u}(x) = \liminf_{\varepsilon\to 0,\ y\to x} u_\varepsilon(y)$ est sur-solution de (EDP).

Corollaire: Convergence a priori

On suppose que $u_\varepsilon \to u$ et $F_\varepsilon \to F$ sur les compacts. Alors u solution de (EDP).

Corollaire: Convergence a posteriori

On suppose que (EDP) satisfait un principe de comparaison. Alors u_ε converge uniformément sur les compacts vers l'unique solution de (EDP).

3.1 Illustration : méthode de viscosité evanescente

On regarde le problème :

$$\begin{cases} u + F(Du, D^2u) & = & f & \text{sur } \Omega \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose

- F continue et propre
- Ω ouvert régulier (au moins $\mathcal{C}^2$)
- $\exists$ une sous-solution barrière $\underset{\sim}{u}$ de :

$$\underset{\sim}{u} + F(D\underset{\sim}{u}, D^2\underset{\sim}{u}) \leq f - 1,\ \underset{\sim}{u} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

- $\exists$ une sur-solution barrière $\tilde{u}$ de :

$$\tilde{u} + F(D\tilde{u}, D^2\tilde{u}) \geq f + 1,\ \tilde{u} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

Pour $\varepsilon > 0$, on considère le problème :

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + F(Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) & = & f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet un principe de comparaison.
On a donc l'existence et l'unicité de u_ε pour les barrière, $u_\varepsilon \to u$.

4 Principe de comparaison

4.1 Principe pour les équations du 1er ordre

$$\begin{cases} F(x, u, Du) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ u & = & g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

4.1.1 Cas où Ω borné

On a besoin des hypothèses suivantes :

(M) : monotonie : $\exists\gamma > 0\,;\ \forall x \in \Omega,\ \forall r, s \in \mathbb{R},\ r \geq s,\ \forall p \in \mathbb{R}^N$:

$$F(x, r, p) - F(x, s, p) \geq \gamma(r - s)$$

(CS1-1) : $\forall R > 0,\ \forall r \in [-R, R],\ \forall x, y \in \Omega,\ \forall p \in \mathbb{R}^N$:

$$|F(x, r, p) - F(y, r, p)| \leq w_R\left(|x - y|(1 + |p|)\right)$$

où w_R est un module de continuité, ie une fonction continue positive telle que $w_R(0) = 0$.

Exemple :

- Opérateur linéaire :
$$\mathscr{L}u = b(x)Du + c(x)u + f(x)$$
avec b, c et $f \in \mathscr{C}^0$, vérifie :
  - Cas où Ω borné si $c(x) \geq \delta > 0$
  - Cas où Ω borné si $b \in W^{1,\infty}$
- Opérateur complètement non linéaire :
$$\mathscr{L}u = \sup_{\alpha} \inf_{\beta} \mathscr{L}^{\alpha,\beta}u \text{ avec } \mathscr{L}^{\alpha,\beta}u = b^{\alpha,\beta}(x)Du + c^{\alpha,\beta}(x)u + f^{\alpha,\beta}$$
avec $b^{\alpha,\beta}$, $c^{\alpha,\beta}$ et $f^{\alpha,\beta} \in \mathscr{C}^0$ uniformément, vérifie :
  - Cas où Ω borné si $c^{\alpha,\beta}(x) \geq \delta > 0$
  - Cas où Ω borné si $b^{\alpha,\beta} \in W^{1,\infty}$ uniformément

Théorème: principe de comparaison

On suppose Ω borné, $F \in \mathscr{C}^0$ vérifie Cas où Ω borné, Cas où Ω borné, $g \in \mathscr{C}^0(\partial\Omega)$. Soit u scs une sous-solution de (EDP-CB) d'ordre 1 et v sci sur solution. Alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

4.1.2 Cas où Ω non borné

La condition aux bords doit être remplacée par une condition sur la croissance à l'infini.
On rajoute donc l'hypothèse suivante :
(CS1-2) : $\exists L > 0\,;\, \forall x \in \Omega,\, \forall r \in \mathbb{R},\, \forall p, q \in \mathbb{R}^N$, on a
$$|F(x,r,p) - F(x,r,q)| \leq L|p-q|$$

Théorème: Principe de comparaison

On suppose F continue et satisfaisant Cas où Ω borné, Cas où Ω borné et Cas où Ω non borné, et $g \in \mathcal{C}^0$.
Soit u scs sous-solution bornée et v sci sur-solution bornée.
Alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

5 Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2

On reprend (EDP-CB) avec Ω un ouvert borné.
Les hypothèses sont les suivantes :
(M) : monotonie : $\exists \gamma > 0\,;\, \forall x \in \Omega,\, \forall r, s \in \mathbb{R},\, r \geq s,\, \forall p \in \mathbb{R}^N,\, \forall X \in S^N$:
$$F(x,r,p,X) - F(x,s,p,X) \geq \gamma(r-s)$$
(CS2) : $\forall R > 0$, $\exists w_R$ un module de continuité tel que : $\forall r \in [-R, R]$, $\forall x, y \in \Omega$, $\forall \alpha > 0$, $\forall X, Y \in S^N$ tels que :
$$-3\alpha \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I_N & -I_N \\ -I_N & I_N \end{pmatrix} \tag{1}$$
alors
$$|F(x,r,\alpha(x-y),Y) - F(y,r,\alpha(x-y),X)| \leq w_R\left(\alpha|x-y|^2 + |x-y|\right)$$

✑ *Théorème: Principe de comparaison*

On suppose Ω borné, $g \in \mathscr{C}^0$, F continue vérifiant Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2 et Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2.
Soient u scs sous-solution et v sci sur-solution. Alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

6 Extension au cas parabolique

$$\begin{cases} u_t + F(x,t,u,Du,D^2u) &= 0 & \text{sur } [0,T]\times\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) & \text{sur } \Omega \\ u(t,x) &= g(t,x) & \text{sur } [0,T]\times\partial\Omega \end{cases} \tag{EDP-P}$$

Les hypothèses sont les suivantes :

(M-P) : monotonie : $\exists\gamma\in\mathbb{R}\,;\ \forall x\in\Omega,\ \forall r,s\in\mathbb{R},\ r\geq s,\ \forall t\in[0,T],\ \forall p\in\mathbb{R}^N,\ \forall X\in S^N$:

$$F(x,r,p,X)-F(x,s,p,X)\geq\gamma(r-s)$$

(CS2-P) : $\forall t\in[0,T]$, $F(\bullet,t,\bullet,\bullet,\bullet)$ vérifie Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2 uniformément en t (w_R ne dépend pas de t).

Définition: Sous-différentiel parabolique

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^-u(x,t) &= \Big\{(a,p,X)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S^N;\forall y\in\Omega,\forall s\in[0,T],\\ &\quad u(y,s)\geq u(x,t)+a(s-t)+p(y-x)+\frac{1}{2}X(y-x)(y-x)+o(|t-s|+|y-x|^2)\Big\}\end{aligned}$$

On définit de la même manière $\mathscr{P}^+u(x,t)$, $\overline{\mathscr{P}}^-u(x,t)$, $\overline{\mathscr{P}}^+u(x,t)$

Définition:

$\underset{\sim}{u}$ est sous-solution barrière de (EDP-P) si :
- $\underset{\sim}{u}$ est sous-solution de l'équation
- $\underset{\sim}{u}=g$ continuement sur $\partial\Omega\times[0,T]$
- $\underset{\sim}{u}(0,x)\leq u_0(x)$ dans Ω

$\tilde{u}$ est sur-solution barrière de (EDP-P) si :
- $\tilde{u}$ est sur-solution de l'équation
- $\tilde{u}=g$ continuement sur $\partial\Omega\times[0,T]$
- $\tilde{u}(0,x)\geq u_0(x)$ dans Ω

Théorème:

Soit Ω un ouvert borné, $g\in\mathscr{C}^0$, $u_0\in\mathscr{C}^0$. On suppose qu'il existe une sous et une sur-solution barrière et que F est continue vérifiant Extension au cas parabolique et Extension au cas parabolique.
Alors il existe une solution u telle que $\underset{\sim}{u}\leq u\leq\tilde{u}$.
De plus, on a un principe de comparaison : u scs sous-solution et v sci sur-solution, alors $u\leq v$ dans $\Omega\times[0,T]$.

6.1 Construction de $\tilde{\tilde{u}}$

$\tilde{u}_1 = u_0(x) + ct$

$$\begin{array}{rcl} (\tilde{u}_1)_t + F(x,t,\tilde{u}_1, D\tilde{u}_1, D^2\tilde{u}_1) & = & c + F(x,t,u_0+ct, Du_0, D^2u_0) \\ & \geq & 0 \text{ pour } C \geq \sup\limits_{x,t} |F(x,t,u_0(x)+ct, Du_0, D^2u_0)| \end{array}$$

$\tilde{u}_1(x,0) = u_0(x)$
$x \in \partial\Omega$,

$$\tilde{u}_1(x,0) = u_0(x) = g(x,0)$$

Si $c \geq \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_\infty$

$$\tilde{u}_1(x,t) \geq g(x,t)$$

On pose $\tilde{\tilde{u}} = \min(\tilde{u}, \tilde{u}_1)$

- $\tilde{\tilde{u}}$ sur-solution de (EDP-P)
- $\tilde{\tilde{u}}(x,0) = u_0(x)$
- $\tilde{\tilde{u}}(x,0) = g(x,t)\ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$

Troisième partie
Applications

1 Contrôle optimal déterministe

1.1 Principe de programmation dynamique

On fixe $T > 0$.
On considère

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(s) & = & f(y(s), \alpha(s)), \quad s \in [0,T] \\ y(0) & = & x \end{array} \right.$$

f continue, α mesurable à valeurs dans A. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des applications mesurables de $[0,T] \to A$. On suppose f lipschtizienne par rapport à sa première variable et bornée par rapport à la deuxième : $\exists C > 0$

$$|f(y,\alpha) - f(z,\alpha)| \leq C|y-z|\ \forall y,z \in \mathbb{R}^n$$

$$|f(y,\alpha)| \leq C\ \forall \alpha \in \mathscr{A}$$

On cherche à minimiser le coût :

$$J(t,x,\alpha) = \int_0^t L(y(s),\alpha(s))ds + h(y(t))$$

qui vérifie :

$$\begin{array}{ccc} |L(y,\alpha) - L(z,\alpha)| & \leq & C|y-z| \\ |L(y,\alpha)| & \leq & C \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}^n \\ |h(y) - h(z)| & \leq & C|y-z| \quad \forall \alpha \in \mathscr{A} \\ |h(y)| & \leq & C \end{array}$$

On cherche à minimiser le coût :

$$\inf_{\alpha \in \mathscr{A}} J(t,x,\alpha) = u(t,x)$$

Lemme:

Soit $\alpha \in \mathscr{A}$.
Alors $\exists! y_\alpha$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(s) & = & f(y(s), \alpha(s)), \quad s \in [0,T] \\ y(0) & = & x \end{array} \right.$$

De plus, on a :

$$|y(s)| \leq |x| + cs \text{ avec } c = \sup_{\{x,\alpha\} \in \mathbb{R}^N \times \mathscr{A}} |f(x,\alpha)|$$

Si $\tilde{y}$ est une solution avec $\tilde{y}(0) = \tilde{x}$ alors

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq |x - \tilde{x}| e^{Ls}$$

Théorème: Principe de programmation dynamique

Soit $s \in [0,t]$, on a :

$$u(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathscr{A}[0,s]} \left\{ \int_0^s L(y(u), \alpha(u)) du + u(t-s, y(s)) \right\}$$

Proposition: Régularité de la fonction valeur

u bornée et lipschitzienne

Théorème:

u est l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t + H(x, Du) & = & 0 \quad \text{dans } [0,T] \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) & = & h(x) \end{array} \right. \tag{HJB}$$

avec $H(x,p) = \sup_\alpha \{-p.f(x,\alpha) - L(x,\alpha)\}$

1.2 Contrôle en feedback

On va construire des contrôles $U : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to A$ qui dépendent de la trajectoire.

Définition:

$U(\bullet, \bullet)$ est un contrôle en feedback optimal si $\alpha(t) = U(t, y(t))$ avec y solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(s) & = & f(y(s), \alpha(s)), \quad s \in [0,T] \\ y(0) & = & x \end{array} \right.$$

est optimal.

⚩ *Théorème:*

Soit U solution de (HJB) qu'on suppose $\mathscr{C}^1$.
On suppose que $\forall(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$, $\exists U(t,x) \in A$ solution de :

$$\sup_{\alpha \in \mathscr{A}} \{-L(x,\alpha) - \nabla U(t,x).f(x,\alpha)\}$$

Alors U est un contrôle optimal en feedback.