Présentation d'un article : On shape optimization of optical waveguides using inverse problem techniques

Thomas Felici & Heinz W Engl

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

14 mars 2015

Sommaire

Sommaire

Équation étudiée

$$\Delta U + n^2 U = 0$$

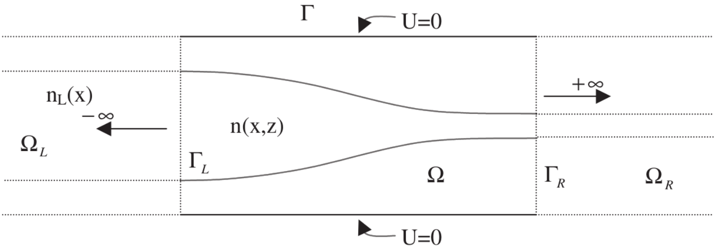
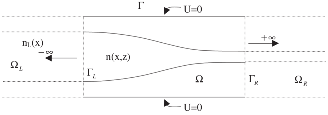


Figure : Profil du taper

Recherche de conditions au bord



$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta U + n^2 U & = & 0 & \text{pour } (x,z) \in \Omega \\ U_{|\Gamma} & = & 0 & \text{(murs réfléchissants)} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + i\sum_{k=1}^{\infty} {\beta_k^{(L)}}^2 \left\langle U, \tilde{U}_k^{(L)} \right\rangle \tilde{U}_k^{(L)} & = & 2i\sum_{k=1}^{\infty} {\beta_k^{(L)}}^2 \left\langle U_I, \tilde{U}_k^{(L)} \right\rangle \tilde{U}_k^{(L)} & \text{sur } \Gamma_L \\ \frac{\partial U}{\partial z} - i\sum_{k=1}^{\infty} {\beta_k^{(R)}}^2 \left\langle U, \tilde{U}_k^{(R)} \right\rangle \tilde{U}_k^{(R)} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{array}\right. \tag{1}$$

Problème d'optimisation

$$\langle \tilde{U}_k, \tilde{U}_k \rangle = \frac{1}{\beta_k} \tag{2}$$

On cherche à maximiser :

$$P(n^2) = \beta_1^2 |\langle U, \tilde{U}_1^{(R)} \rangle|^2 = \beta_1^2 \left| \int_{x \in \Gamma_R} U(x, z_R) \tilde{U}_1^{(R)}(x) dx \right|^2 \tag{3}$$

$\Rightarrow$Formulation difficile à exploiter.

Sommaire

Représentation locale

$$L_t(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + n^2(x,z)U$$

$$\begin{array}{rcl} L_t(U_k) & = & \beta_k^2 U_k \quad \text{dans } \Omega_z \\ U_k|_{\partial\Omega_z} & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

$$\begin{array}{rcl} U & = & \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + a_{-k})U_k \\ \frac{\partial U}{\partial z} & = & \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{-k})i\beta_k U_k \end{array} \tag{5}$$

Représentation locale

Puissance dans le $k$ème mode : $|a_k|^2$ et $|a_{-k}|^2$. Ainsi :

$$P(n) = |a_1|^2$$

Longue démonstration pour avoir :

$$\dot{a}_k(z) - i\beta_k a_k(z) = \sum_{j \neq k,0} r_{kj}(z) a_j(z), \ \ k \neq 0 \tag{6}$$

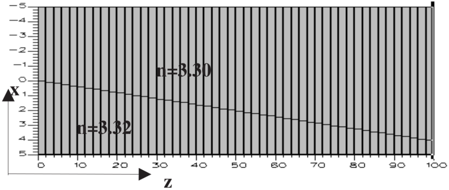
avec $\beta_{-k} = -\beta_k$ et

$$r_{kj}(z) = \frac{\int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k U_j ds}{2(\beta_k - \beta_j)}$$

pour tout $j \neq k$, $j, k \neq 0$

Sommaire

Discrétisation



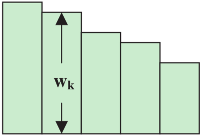


Figure : Profil du taper : discrétisation pour le problème d'optimisation

Résultats numériques

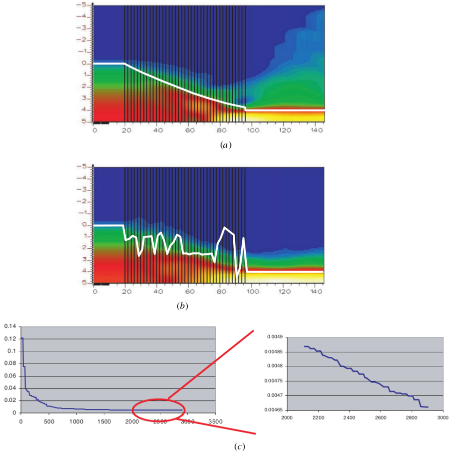


Figure : Profil du taper : résultat avec $N = 48$. (a) Forme initial du taper (b) Forme optimale (c) Perte d'énergie en fonction du nombre d'itérations.

Résultats numériques

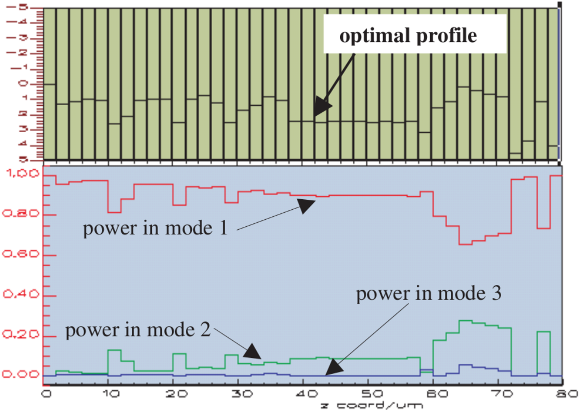


Figure : L'énergie est préservée grâce à la resonnance avec les autres modes

Un problème mal posé

- Variations arbitrairement grandes sur l'indice de refraction $n \Rightarrow$ Une solution U toujours aussi proche qu'on veut.
- Or, dans l'algorithme d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes ne dépendent que de U, et non de n !
- Point de vue physique : l'onde ne voit pas les pics plus petites que sa longueur d'onde
- Pour gagner en stabilité : réduire l'espace de recherche (ajouter de la continuité par exemple)
- À contrario, on pourrait plutôt essayer de chercher la distribution des indices provenant d'une certaine mesure.

$\Rightarrow$ approche problème inverse

Sommaire

$$1 = \sum_{k \in RB} |a_{-k}(0)|^2 + \sum_{k \in RB} |a_k(z_R)|^2$$

$$\text{avec } RB = \{k \in \mathbb{Z}^* | \beta_k^2 > 0\}$$

Pour rappel :

$$U(x, z_R) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_R) U_k^{(R)}(x)$$

Égalité seulement si :

$$\begin{bmatrix} |a_1(z_R)| \\ |a_2(z_R)| \\ |a_3(z_R)| \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{7}$$

Formulation du problème

Avantage numérique : on prend en compte tous les a_k !
Dépendance non linéaire de n, et pas forcément de solution.
D'où : approche par moindre carrés, et utilisation de la méthode de Newton.

$$\left.\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}\right|_n \delta n = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n) \tag{8}$$

Formulation du problème

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}\Big|_n = UDV^T$$

Instabilité numérique reglé par troncature des valeurs singulières du jacobien : choix de $0 < \alpha < 1$ et :

$$r := \max\{i | d_i \geq \alpha d_1\}$$

Et :

$$D_{red} = diag(d_1, ..., d_r, 0, ..., 0)$$

$$\delta n = V D_{red}^{\dagger} U^{\dagger} [\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n)] \tag{9}$$

Formulation du problème

$$\min F(\lambda) = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n_k + \lambda \delta n)\|_2^2$$

$$n_{k+1} = n_k + \lambda_{min} \delta n$$

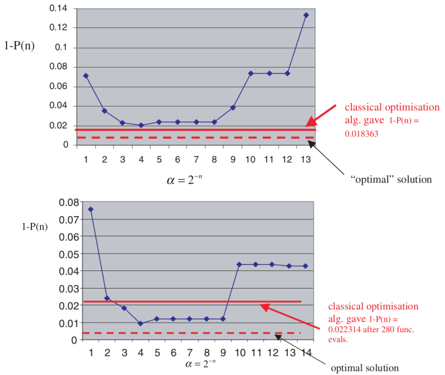


Figure : (1) N=13, M=10 modes (2) N=48, M=15

Conclusion

- Une approche par problème inverse efficace, mais sous certaines contraintes
- Moyen d'améliorer : algorithme en cascade
- Calculs très formels : il manque parfois quelques considérations mathématiques (notamment sur les séries)