

## Première partie

# Optimisation convexe

## 1 Ensembles convexes

1. Définition sous-ensemble affine, convexe
2. Définition simplexe, combinaison convexe
3. Théorème : équivalence à  $C$  convexe (comb. convexe)
4. 5 propositions sur opérations conservant convexité
5. Définition : face, point extrémal
6. Définition : enveloppe affine, enveloppe convexe
7. Proposition : expression de ces deux ensembles
8. Théorème : Carathéodory, combinaison dans dim.  $n$
9. Théorème : intérieur et fermeture d'un convexe
10. Définition intérieur relatif
11. Théorème : Si  $C$  non vide,  $ri(C)$  ?
12. Lemme :  $C$  convexe,  $x \in ri(C)$ ,  $y \in \overline{C}$ ,  $[x, y[$  ?
13. Théorème : projection sur un convexe fermé, inégalité sur produit scalaire
14. 3 propriétés de la projection
15. Définition : séparation (stricte) de deux convexes
16. Théorème : séparation d'un convexe et d'un point
17. Théorème : séparation d'un convexe et d'un fermé
18. Théorème : séparation de deux convexes disjoints
19. Définition enveloppe convexe.
20. 2 propriétés sur les convexes fermés (monotonie, inclusion, égalité)
21. Définition demi-espace. Lien avec  $\overline{conv}$
22. 2 corollaires : si  $C$  déjà convexe, équivalence à  $C$  convexe fermé
23. Théorème :  $conv(A)$  compact
24. Définition de cône, enveloppe conique, combinaison conique
25. 2 propositions ressemblant au cas convexe
26. Définition enveloppe conique fermée, propriété comme précédente (monotonie...)
27. Définition du cône normal à  $C$  en  $x$
28. Condition pour que le cône ait au moins un élément non nul
29. Définition cône dual, bidual, polaire
30. Proposition sur  $P^*$
31. Lemme de Farkas, corolaire
32. Si  $C$  cone convexe fermé, lien entre  $C^{**}$  et  $C$

## 2 Fonctions convexes

33. Définition domaine, épigraphe (strict), fonction propre, convexe
34. Équivalence à  $f$  convexe
35. Déf. strictement convexe, fortement convexe
36. 3 opérations conservant la convexité
37. Def Sous ensemble de niveau de  $f$

38. Définition fonction indicatrice
39. Définition fonction d'appui
40. Équivalence à appartenance à  $\overline{\text{conv}}(S)$ , égalité des fonctions d'appui. Si 2 ensembles convexes fermés ?
41. 2 opérations sur fonctions d'appui
42. Transformée de Fenchel
43. Inégalité de Young
44. Définition sci, équivalence
45. Famille de fonctions sci  $\Rightarrow$  sci ?
46. Corollaire sur  $f^*$
47. Définition de biconjuguée, 2 inégalités
48. Implication  $f$  sci convexe et propre
49. Thm de Fenchel-Moreau
50. Corollaire : équivalence  $f$  sci et convexe
51.  $f$  convexe propre, bornée sur une boule  $\Rightarrow$  ?
52. Corollaire sur  $f$  réduite à l'intérieur relatif de son domaine
53. Thm : dérivée directionnelle (croissance,  $= +\infty$ , inégalité)
54. 3 équivalences à  $f$  convexe avec différentiabilité
55. Thm si 2 fois différentiable
56. Définition fonction affine, pente, ordonnée
57. Définition minorante affine (exacte)
58. Thm existence minorante affine
59. Définition sous-différentiable, sous-gradients
60. Équivalence à  $f$  atteint un minimum
61. Ré-expression du sous-différentiel
62. Pour fonction convexe et propre, 3 assertions équivalentes
63. Corollaire pour  $f$  continue en un point
64. Expression de la dérivée directionnelle avec la fonction de support
65. Expression du sous-différentiel avec la transformée de Fenchel
66. Proposition : équivalence avec le sous-différentiel de  $f$  et de  $f^*$
67. Proposition si  $f$  est Gâteaux-différentiable
68. Définition homogène et sous-linéaire
69. Proposition : dérivée directionnelle si  $f$  convexe et propre
70. Corollaire : différentiel : convexité, compacité
71. Linéarité du sous-différentiel
72. Différentiel avec fonction affine



### 3 Critère d'optimalité

73. 2 définitions équivalentes du cône tangent
74. Fermeture, convexité
75. Égalité du cône tangent
76. Définition direction normale, cône normal
77. 4 équivalence à minimisation de  $J$
78. Expression de  $\Lambda(u)$  (saturation contraintes), cône  $\mathcal{N}_{(a,b,c)}(u)$ , inclusion
79. Théorème : implication donnant le minimum

- 80. Qualification des contraintes : égalité si contraintes  $c_j$  affines
- 81. Hypothèse de Slater, équivalence de minimisation.

## Deuxième partie

# Viscosité

## 1 Solution classique

- 1. Définition  $F$  elliptique, strictement elliptique, uniformément elliptique, propre
- 2. Définition  $F$  linéaire, semi-linéaire, quasi-linéaire, complètement non linéaire
- 3. Définition solution classique
- 4. Proposition si différence atteint un maximum positif
- 5. Définition sous- et sur-solution
- 6. Proposition : lien entre inégalité sur le bord et sur le domaine
- 7. Corollaire sur unicité de la solution
- 8. Théorème : Principe du maximum

## 2 Solution de viscosité

- 9. Définition (Sous- et sur-)solution de viscosité
- 10. Proposition : remplacer max (ou min),  $\mathcal{C}^2$
- 11. Sous- et sur-différentiel
- 12. Thm : Équivalence à sous et sur-solution avec le différentiel
- 13. Corollaire : si  $u$  solution classique, deux fois différentiable en un point
- 14. Théorème : Résultat de stabilité
- 15. Définition : Limsup/Liminf
- 16. Définition : fonction semi-continue
- 17. Proposition : équivalence à  $f$  sci
- 18. Propriété sur calcul de fonctions scs et sci
- 19. Définition : Enveloppe semi-continue
- 20. Proposition sur les enveloppe semi-continue (plus gde fct, ...)
- 21. Théorème : Minimisation des fonctions sci
- 22. Définition : Semi-limites relaxées
- 23. Thm : équivalence à égalité des semi-limites relaxées
- 24. Définition : Solutions de viscosité discontinues
- 25. Proposition : solution vérifiant un principe de comparaison
- 26. Définition : sous- et sur-différentiel limite
- 27. Équivalence à u sou ou sur-solution
- 28. Définition de sous et sur-solution barrière
- 29. Thm si existence de sous et sur-solution barrière
- 30. Théorème de stabilité pour les sous et sur-solutions
- 31. Corollaire sur la convergence a priori et a posteriori
- 32. Théorème : principe de comparaison pour les EDP du premier ordre avec domaine borné ou non (+ Hypothèses)
- 33. Théorème : principe de comparaison pour l'ordre 2 avec domaine borné (+ hypothèses...)
- 34. Définition : différentiels parabolique
- 35. Définition sous et sur-solution barrière parabolique
- 36. Théorème : principe de comparaison et unicité solution dans le cas parabolique

### 3 Applications

- 37. Expression du coût, hypothèse sur  $f$ ,  $L$  et  $h$
- 38. Lemme : unicité, majoration et stabilité
- 39. Théorème : Principe de programmation dynamique
- 40. Proposition : Régularité de la fonction valeur
- 41. Théorème avec HJB
- 42. Définition du contrôle en feedback optimal
- 43. Théorème : U solution de HJB  $C^1$ , contrôle optimal