

# Optimisation convexe

16 février 2015

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels</b>                                  | <b>2</b> |
| 1.1      | Calcul différentiel . . . . .                   | 2        |
| 1.2      | Rappel sur les formes différentielles . . . . . | 4        |
| 1.2.1    | Comment définir une distribution ? . . . . .    | 4        |
| 1.2.2    | Différentielle extérieure . . . . .             | 5        |

# Introduction

## ✦ Définition: Variété

$M$  est une variété de dimension  $n$  si :

1.  $\forall p \in M, \exists U$ , voisinage ouvert de  $p$ ,  $\exists \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme
2.  $\forall p \in U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  doit être de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$  (analytique).

On parle alors de variété de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$

## ✦ Définition: Espace tangent en $p$

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On appelle espace tangent en  $p$  :

$$T_p X = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

## ✦ Définition: Fibré tangent

On prend une variété  $Q$  de dimension  $d$ . On appelle fibré tangent :

$$TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q$$

de dimension  $2d$

## ✦ Définition: Espace cotangent

On appelle l'espace cotangent le dual d'un espace tangent :

$$T_q^* Q = (T_q Q)^*$$

## 1 Rappels

### 1.1 Calcul différentiel

## ✦ Définition: Crochet de Lie

Soit  $f, g \in V^\infty(X)$ . On définit :

$$[f, g](p) = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{-t}^f)_* g(p) \Big|_{t=0} = Dg(x) \cdot f(x) - DF(x) \cdot g(x)$$

**Proposition:**

$$\forall p \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}, \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

**Proposition:**

1. Soit  $\gamma_t$  le flot de  $\dot{x} = f(x)$ . Alors  $\sigma_t$ , le flot de  $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$  est :

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$

2. Soient  $f, g \in V^\infty(X)$  et  $\phi$  un difféomorphisme. Alors :

$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$

3.  $(\gamma_t^f)_* f = f$

**Définition: Distribution**

Une distribution sur  $X$ , une variété de dimension  $n$ , est une application  $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$ .  $\mathcal{D}(p)$  étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces. Soient  $f_1, \dots, f_k \in V^\infty(X)$ . On pose

$$\mathcal{D}(p) = \text{vect}\{f_1(p), \dots, f_k(p)\}$$

On dit alors que  $\mathcal{D}$  est de rang constant ( $= k$ ).

**Définition:**

$\mathcal{D}$  est dite intégrale si  $\forall p \in X, \exists S$  une variété,  $p \in S$  tel que

$$T_q S = \mathcal{D}(q), \forall q \in S$$

**Définition: Involutive**

$f \in V^\infty(X)$ . On dit  $f \in \mathcal{D}$  si  $\forall p \in X, f(p) \in \mathcal{D}(p)$ .  
 $\mathcal{D}$  est dite involutive si  $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$ .

## $\Leftrightarrow$ *Théorème: Frobenius*

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de rang constant  $k$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  intégrable
2.  $\mathcal{D}$  involutive
3. localement, autour de chaque point  $p \in X$ ,

$$\exists(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n); \mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

## 1.2 Rappel sur les formes différentielles

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $e_1, \dots, e_n$  sa base. On a également  $E^*$  son dual, et  $e^1, \dots, e^n$  sa base duale.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j$$

$T : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -linéaire est dit un  $k$ -tenseur (ensemble noté  $T^k(E)$ ).

$A^k(E)$  :  $k$ -tenseur antisymétriques, ie :

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) &= -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ \Leftrightarrow T(\dots, v_i, v_{i+1}, \dots) &= -T(\dots, v_{i+1}, v_i, \dots) \\ \Leftrightarrow T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) &= \text{sgn}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

$f(p) \in E = T_p X$  champ vecteur,  $w(p) \in T_p^* X$  une 1-forme différentielle.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad w(p) = \sum_{j=1}^n w_j(x) dx^j$$

$$w(f) = \sum_{j=1}^n w_j(x) f^j(x)$$

De même, une  $k$ -forme différentielle  $\mathcal{C}^\infty : w \in \Lambda^k(X)$

$$w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

### 1.2.1 Comment définir une distribution ?

1. On choisit  $f_1, \dots, f_m \in V^\infty(X)$ , et on pose  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$
2.  $p \in X \mapsto \mathcal{E}(p) \subset T_p^* X$  est une codistribution. On pose :

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^\perp = \text{Ker} \mathcal{E} = \{f \in V^\infty(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{E}\}$$

Réciproquement, si  $\mathcal{D}$  est une distribution, on pose :

$$\mathcal{E} = \mathcal{D}^\perp = \text{ann} \mathcal{D} = \{w \in \Lambda^k(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{D}\}$$

**Remarque :** Si  $\text{rg} \mathcal{D} = \text{cste}$  (ou  $\text{rg} \mathcal{E} = \text{cste}$ ) :

1.  $\text{rg} \mathcal{D} + \text{rg} \mathcal{E} = n$
2.  $\langle w, f \rangle = 0$  peut être considéré point par point ou globalement

### 1.2.2 Différentielle extérieure

Soit  $w \in \Lambda^k(X)$ .

Si  $k = 0$ ,  $\Lambda^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X)$

Si  $k \geq 1$ ,  $w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  et

$$dw = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} dw_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Ainsi :

$$\Lambda^0(X) \xrightarrow{d} \Lambda^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n(X) \xrightarrow{d} 0$$

**Proposition:**

Soit  $w \in \Lambda^1(X)$ , soient  $f, g \in V^\infty(X)$ . On a :

$$dw = L_f w(g) - L_g w(f) - w([f, g])$$