

# Optimisation convexe

26 octobre 2016

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Ensembles convexes</b>	<b>3</b>
1	Définitions et premières propriétés	3
2	Enveloppe affine et enveloppe convexe	4
3	Propriétés topologiques des convexes	6
3.1	Ouverture et fermeture des convexes	6
3.2	Intérieur relatif	6
4	Opérations sur les ensembles convexes	6
4.1	Projection sur un convexe fermé	6
4.2	Séparation des ensembles convexes	7
4.3	Enveloppe convexe fermée	8
5	Cônes convexes	9
5.1	Cône propre et inégalités généralisées	11
5.1.1	Minimum et élément minimal	11
5.2	Cône normal	11
5.3	Cône dual	12
6	Hyperplan d'appui	13
7	Lemme de Farkas	13
<b>II</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>14</b>
1	Définitions et propriétés	14
2	Fonctions d'appui	15
3	Transformée de Fenchel	16
4	Continuité des fonctions convexes	18
5	Différentiabilité des fonctions convexes	18
5.1	Dérivées directionnelles des fonctions convexes	18
5.2	Reconnaître une fonction convexe à l'aide de ses dérivées	19
6	Sous-différentiabilité des fonctions convexes	19
6.1	Définitions et premières propriétés	19
6.2	Sous-différentiabilité et transformée de Fenchel	21
6.3	Liens avec la différentiabilité	21
6.4	Quelques règles de calcul	21

<b>III</b>	<b>Conditions d'optimalité</b>	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>Une condition nécessaire générale d'optimalité</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>Cas où les contraintes sont explicites</b>	<b>24</b>
2.1	Qualification des contraintes . . . . .	25

## Première partie

# Ensembles convexes

## 1 Définitions et premières propriétés

### ✦ Définition: Ensemble affine

Soit  $E$  un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est affine si

$$\forall x \in A; y \in A; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha x + (1 - \alpha)y \in A$$

Autrement dit, un ensemble affine contient toujours la droite passant par deux de ses points  $x$  et  $y$

### ✦ Définition: Ensemble affine

Soit  $E$  un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble  $C$  de  $E$  est convexe si

$$\forall x \in C; y \in C; \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

Autrement dit, un ensemble affine contient toujours le segment  $[x, y]$ .

### ✦ Définition: Simplexe

On appelle simplexe de  $\mathbb{R}^n$  le sous-ensemble

$$\Delta_n = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n; \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

### ✦ Définition: Combinaison convexe

On appelle combinaison convexe de  $n$  points  $\{x_i\}_{i=1}^n$  tout point  $y$  s'écrivant

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ avec } \alpha \in \Delta_n$$

### ⇒ Théorème:

Un sous ensemble  $C$  de  $E$  est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

### Proposition: Opérations conservant la convexité

- Si  $(C_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de convexes de  $E$ , alors l'intersection  $\cap_{i \in I} C_i$  est encore un convexe.
- Pour  $a \in E$ , le translaté  $a + C = \{a + x; x \in C\}$  est convexe
- Le produit cartésien de  $C \in E$  et  $C' \in E'$ , ie  $C \times C' = \{(x; y); x \in C; y \in C'\}$  est un sous ensemble convexe de  $E \times E'$
- La somme  $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in C_1; x_2 \in C_2\}$  de deux ensembles convexes  $C_1$  et  $C_2$  est convexe.
- L'union de sous-ensembles convexes n'est en général pas convexe, mais l'union croissante de convexes est convexe.
- Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  une fonction affine, et  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $S \subseteq \mathbb{R}^k$  deux convexes. Alors  $f(C)$  et  $f^{-1}(S)$  sont également convexes.
- La somme partielle de deux convexes  $S$  et  $C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  :

$$\{(x, y_1 + y_2) | (x, y_1) \in S, (x, y_2) \in C\}$$

est aussi convexe.

- L'image d'un convexe  $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$  par la fonction perspective  $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$P(z, t) = z/t$$

est convexe. De même, la pré-image d'un convexe  $S$  par  $P$

$$P^{-1}(S) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+ | x/t \in S\}$$

est convexe.

### Définition:

Soit  $C$  un ensemble convexe. Une partie convexe  $F$  de  $C$  est appelée face (ou partie extrême) de  $C$  si la propriété suivante est vérifiée

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in C \times C \text{ et} \\ \exists \alpha \in ]0, 1[ \text{ tel que } \alpha x + (1 - \alpha)y \in F \end{array} \right\} \Rightarrow [x, y] \in F$$

On appelle point extrême une face réduite à un seul point. En d'autres termes,  $\bar{x} \in C$  est un point extrême de  $C$  s'il n'est pas possible d'avoir  $\bar{x} = \alpha y + (1 - \alpha)z$  avec  $y$  et  $z$  deux points distincts de  $C$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ . On note  $Ext(C)$  l'ensemble des points extrêmes de  $C$ .

### Définition: Polyèdre

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $d \in \mathbb{R}^p$ . On définit le polyèdre  $\mathcal{P}$  par :

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Cx = d\}$$

## 2 Enveloppe affine et enveloppe convexe

✦ *Définition: Enveloppe affine*

Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'enveloppe affine de  $A$ , notée  $Aff(A)$ , est l'intersection de tous les espaces affines contenant  $A$ .

On appelle *dimension affine* d'un ensemble  $C$  la dimension de  $Aff(C)$ .

¶ *Proposition:*

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On a :

$$Aff(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; n \geq 1, x_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

✦ *Définition: Enveloppe convexe*

Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'enveloppe convexe de  $A$ , notée  $conv(A)$ , est l'intersection de tous les espaces convexes contenant  $A$ .

¶ *Proposition:*

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On a :

$$Conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; n \geq 1, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

☞ *Théorème: Carathéodory*

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Alors tout élément de  $conv(A)$  peut s'écrire comme une combinaison convexe de  $n + 1$  éléments de  $A$ .

✦ *Définition: Simplexe*

Soient  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k + 1$  vecteurs affinement indépendants, i.e.  $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$  sont linéairement indépendants. On appelle simplexe l'ensemble défini par :

$$C = \text{conv}\{v_0, \dots, v_k\}$$

### ❏ *Propriété:*

Un simplexe est un polyèdre

## 3 Propriétés topologiques des convexes

### 3.1 Ouverture et fermeture des convexes

#### ↪ *Théorème:*

Soit  $C$  un ensemble convexe. Alors son intérieur  $\text{int}(C)$  et son adhérence  $\overline{C}$  sont aussi convexes.

### 3.2 Intérieur relatif

En analyse convexe, on rencontre souvent des ensembles convexes dont l'intérieur est vide : c'est le cas d'un segment dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est donc utile d'introduire la notion d'intérieur relatif.

#### ✦ *Définition: Intérieur relatif*

Soit  $P$  une partie d'un espace vectoriel  $E$ . L'intérieur relatif de  $P$ , noté  $ri(P)$ , est son intérieur dans son enveloppe affine  $Aff(P)$ , munie de la topologie induite de celle de  $E$ , i.e.

$$ri(P) = \{x \in P; \exists r > 0; (B(x, r) \cap Aff(P)) \subset P\}$$

#### ↪ *Théorème:*

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $C$  un convexe non vide de  $E$ . Alors  $ri(C)$  est non vide.

#### ↪ *Lemme:*

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $C$  un convexe non vide. Alors

$$x \in ri(C) \text{ et } y \in \overline{C} \Rightarrow [x; y] \subset ri(C)$$

Ainsi, un point  $x \in E$  est dans l'intérieur relatif de  $C$  si et seulement si pour tout  $y \in C$  (ou  $y \in Aff(C)$ ), il existe  $\alpha > 1$  tel que  $(1 - \alpha)y + \alpha x \in C$

## 4 Opérations sur les ensembles convexes

### 4.1 Projection sur un convexe fermé

### ⇒ Théorème: Projection sur un convexe fermé

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $x$  un élément de  $H$ . Soit également  $C$  un sous-ensemble convexe fermé de  $H$ . Il existe un unique point  $y \in C$  tel que

$$\|y - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|$$

Cet élément  $y$  est appelé la projection de  $x$  sur  $C$  et sera noté  $P_C(x)$ . Il est caractérisé par l'inéquation suivante

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

### ¶ Propriété: de la projection

L'application projection :  $x \mapsto P_C(x)$  sur un convexe fermé non vide  $C$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\forall x_1, x_2 \in H, \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\|^2$
2. elle est monotone :  $\forall x_1, x_2 \in H, \langle P_C(x_2) - P_C(x_1), x_2 - x_1 \rangle \geq 0$
3. elle est Lipschitzienne de constante 1 :

$$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C(x_2) - P_C(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

## 4.2 Séparation des ensembles convexes

Un outil essentiel en analyse convexe est le théorème de Hahn-Banach sur la séparation des ensembles convexes. Etant donné un espace de Hilbert  $H$ , la séparation de deux convexes se fait géométriquement dans  $H$  en utilisant un hyperplan affine  $K$  de la forme

$$K = \{x \in H, \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$$

où  $\xi \in H$  est non nul et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### ✧ Définition:

On dit qu'un hyperplan  $K := \{x \in H; \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$  sépare deux convexes  $C_1$  et  $C_2$  si l'on a

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2, \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

On dit qu'un hyperplan  $K := \{x \in H; \langle \xi, x \rangle = \alpha\}$  sépare strictement deux convexes  $C_1$  et  $C_2$  s'il existe deux scalaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  et

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2, \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

### ¶ Remarque:

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $C_1$  et  $C_2$  puisse être séparé par un hyperplan est qu'il existe un  $\xi \in H$  non nul tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $C_1$  et  $C_2$  puisse être séparé strictement par un hyperplan est qu'il existe un  $\xi \in H$  tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle < \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

#### ⇒ Théorème: Séparation d'un convexe et d'un point

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $C$  un sous-ensemble convexe fermé de  $H$  et  $x \notin C$ . Alors il existe  $r \in H$  tel que

$$\sup_{z \in C} \langle r, z \rangle < \langle r, x \rangle$$

#### ⇒ Théorème: Séparation de deux convexes

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes non vides disjoints de  $H$ , l'un étant fermé et l'autre étant compact. Alors on peut séparer strictement  $C_1$  et  $C_2$ .

#### ⇒ Théorème: Séparation de deux convexes en dimension finie

Soient  $H$  un espace de Hilbert de dimension finie et  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes non vides disjoints de  $H$ . Alors on peut séparer  $C_1$  et  $C_2$  au sens large, i.e., il existe  $\xi \in H$  non nul tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

### 4.3 Enveloppe convexe fermée

L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée.

*Exemple :* Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $C = \{xy \geq 1\} \cup \{0\}$  : fermé.

$\text{conv}(C) = \{x > 0, y > 0\} \cup \{0\}$  : non fermé.

#### ✦ Définition:

$A \subset E$ . On définit l'enveloppe convexe fermée, noté  $\overline{\text{conv}}(A)$ , comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant  $A$ .



### **Propriété:**

- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{\text{conv}}(A_1) \subset \overline{\text{conv}}(A_2)$
- $A \subset \text{conv}(A) \subset \text{conv}(\bar{A}) \subset \overline{\text{conv}}(A)$  et  $\overline{\text{conv}}(A) = \overline{\text{conv}}(\bar{A}) = \overline{\text{conv}(A)}$

### **Définition:**

Soit  $H$  un Hilbert.

Un demi-espace fermé de  $H$  est un ensemble de la forme :

$$H^-(\xi, \alpha) = \{x \in H; (x, \xi) \leq \alpha\}$$

où  $\xi \in H \neq \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

### **Proposition:**

$\overline{\text{conv}}(A)$  est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant  $A$ .

### **Corollaire:**

Soit  $C$  un ensemble convexe.

Alors l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant  $C$  est  $\bar{C}$ .

### **Corollaire:**

$C$  convexe fermé  $\Leftrightarrow C$  est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant  $C$ .

### **Théorème:**

Soient  $H$  de dimension finie et  $A$  un compact de  $H$ . Alors  $\text{conv}(A)$  est compact.

## 5 Cônes convexes

### ✦ Définition: Cône

Un ensemble  $C$  est un cône si  $\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in C, \lambda x \in C$

### ✦ Définition: Enveloppe conique

Soit  $A \subset E$ . L'enveloppe conique  $A$ , notée  $\text{cone}(A)$ , est l'intersection de tous les cônes convexes contenant  $A$ .

### ✦ Définition: Combinaison conique

On appelle combinaison conique d'éléments de  $A$  un point  $x$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, x_i \in A$

### 📖 Proposition:

- $C$  est un cône convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.
- 

$$\text{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq 0, x_i \in A \right\}$$

### ✦ Définition: Enveloppe conique fermée

On définit l'enveloppe conique fermée de  $A$ , notée  $\overline{\text{cone}}A$ , comme étant l'intersection de tous les cônes convexes fermés contenant  $A$ .

### 📖 Propriété:

- $A \subset B \Rightarrow \overline{\text{cone}}(A) \subset \overline{\text{cone}}(B)$
- $A \subset \text{cone}(A) \subset \text{cone}(\bar{A}) \subset \overline{\text{cone}}(A)$  et  $\overline{\text{cone}}(A) = \overline{\text{cone}(\bar{A})} = \overline{\text{cone}(A)}$

### ✦ Définition: Cône induit par une norme

Soit  $\|\cdot\|$  une norme (quelconque) sur  $\mathbb{R}^n$ . On définit le cône induit par cette norme par :

$$C = \{(x, t) \mid \|x\| \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

## 5.1 Cône propre et inégalités généralisées

### ✦ Définition: Cône propre

Un cône  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  est dit *propre* si

- $K$  est convexe
- $K$  est fermé
- $K$  est solide, i.e. il est d'intérieur non vide
- $K$  est pointé, ce qui signifie qu'il ne contient aucune droite, ou autrement dit

$$x \in K, -x \in K \implies x = 0$$

### ✦ Définition: Équations généralisées

On définit un pré-ordre sur  $\mathbb{R}^n$  de la façon suivante : à un cône propre  $K$ , on associe l'ordre partiel défini par

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

On définit aussi un ordre partiel strict par :

$$x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$$

### 📌 Propriété:

La relation d'ordre  $\preceq_K$  est transitive, réflexive, antisymétrique, stable par addition et multiplication par un scalaire positif.

### 5.1.1 Minimum et élément minimal

#### ✦ Définition: Élément minimum et minimal

$x \in S$  est un minimum de  $S$  (en vue de la relation  $\preceq_K$ ) si pour tout  $y \in S$ ,  $x \preceq_K y$ .  
 $x$  est un élément minimal de  $S$  si pour  $y \in S$ ,  $y \preceq_K x$  seulement si  $y = x$ .

### 📌 Propriété:

- S'il existe, le minimum est unique.
- $x \in S$  est un minimum de  $S$  si et seulement si  $S \subset x + K$ .
- $x \in S$  est un élément maximal de  $S$  si et seulement si  $(x - K) \cap S = \{x\}$

## 5.2 Cône normal

### ✦ Définition:

Soient  $H$  de Hilbert,  $C \subset H$ ,  $x \in C$ .

On définit le cône normal à  $C$  en  $x$ , noté  $\mathcal{N}_x C$  ou  $\mathcal{N}_C(x)$  par :

$$\mathcal{N}_C(x) = \{d \in H; (d, y - x) \leq 0 \forall y \in C\}$$

Les éléments de  $\mathcal{N}_x C$  sont appelés les normales à  $C$  en  $x$ .

### 📘 Proposition:

Soit  $H$  de Hilbert de dimension finie.

Si  $C \subset H$  et  $x \in \partial C$ , alors  $\mathcal{N}_x C$  contient au moins un élément non nul.

**Remarque :** Le résultat reste vrai en dimension infini si  $\overset{\circ}{C}$  est non vide.

## 5.3 Cône dual

### ✦ Définition: Cône dual, bidual, polaire

Soit  $P \subset H$ . On appelle cône dual de  $P$ , noté  $P^*$ , l'ensemble :

$$P^* = \{x \in H; (x, y) \geq 0 \forall y \in P\}$$

On appelle cône bidual de  $P$  :  $P^{**} = (P^*)^*$

On appelle cône polaire (ou dual négatif)  $P^-$  l'ensemble

$$P^- = \{x \in H; (x, y) \leq 0 \forall y \in P\} = -P^*$$

### 📘 Proposition:

- $P^*$  est un cône convexe fermé non vide.
- $K_1 \subseteq K_2 \implies K_2^* \subseteq K_1^*$
- Si  $K$  est d'intérieur non vide, alors  $K^*$  est pointé
- Si la fermeture de  $K$  est pointé, alors  $K^*$  est d'intérieur non vide

### 📘 Propriété: Caractérisation duale du minimum

Soit  $K$  un cône propre : on prend la relation d'ordre partielle  $\preceq_K$ .  $x$  est le minimum de  $S$  selon la relation d'ordre partielle  $\preceq_K$  si et seulement si pour tout  $\lambda \succ_{K^*} 0$ ,  $x$  est l'unique minimiseur de  $\langle \lambda, z \rangle$  pour  $z \in S$

### Propriété: Caractérisation dual de l'élément minimal

- Si  $\lambda \succ_{K^*} 0$  et  $x$  minimise  $\langle \lambda, z \rangle$  pour  $z \in S$ , alors  $x$  est minimal.
- Si  $S$  est convexe, alors  $x \in S$  est minimal s'il existe  $\lambda \succ_{K^*} 0$  non nul tel que  $x$  minimise  $\langle \lambda, z \rangle$  pour  $z \in S$ .

## 6 Hyperplan d'appui

### ✧ Définition:

Un hyperplan d'axe d'équation  $(s, x) = r$  est appelé hyperplan d'appui à  $C$  en  $\bar{x}$  si :

$$(s, x) \leq r \quad \forall x \in C$$

$$(s, \bar{x}) = r$$

### ∞ Théorème:

Soit  $C$  un ensemble convexe d'un Hilbert  $H$ . On suppose soit que  $H$  est de dimension finie soit que  $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$ . Soit  $\bar{x} \in \partial C$ . Alors il existe un hyperplan d'appui à  $C$  en  $\bar{x}$ .

## 7 Lemme de Farkas

### ∞ Lemme:

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $(\xi_j)_{j \in J} \subset H$  et  $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}$ . On suppose que le système

$$(\xi_j, x) \leq \alpha_j \quad \forall j \in J$$

admet au moins une solution.

Soit  $(s, \beta) \in H \times \mathbb{R}$ . On a équivalence entre les 2 propositions :

1.

$$\forall x \in H, [\forall j \in J, (\xi_j, x) \leq \alpha_j \Rightarrow (s, x) \leq \beta]$$

2.

$$(s, \beta) \in \overline{\text{cone}}((\xi_j, \alpha_j)_{j \in J} \cup (0, 1)) \subset H \times \mathbb{R}$$

### ∞ Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses avec  $\alpha_j = 0 \quad \forall j \in J$ . On a pour  $s \in H$  :

1.

$$\forall x \in H, [\forall j \in J, (\xi_j, x) \leq 0 \Rightarrow (s, x) \leq 0]$$

2.

$$s \in \overline{\text{cone}}((\xi_j)_{j \in J})$$

⇒ *Lemme:*

Si  $C$  est un cône convexe fermé, alors  $C^{**} = C$ .

## Deuxième partie

# Fonctions convexes

### 1 Définitions et propriétés

$$f : H \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

✦ *Définition:*

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in H; f(x) < +\infty\} \\ \text{epi}(f) &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha \geq f(x)\} \\ \text{epi}_S(f) &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha > f(x)\} \end{aligned}$$

On dit que  $f$  est propre si  $f$  n'est pas identiquement égal à  $+\infty$ .

On dit que  $f$  est convexe si  $\text{epi}(f)$  est convexe.

On dit que  $f$  est concave si  $-f$  est convexe.

📘 *Proposition:*

Si  $f$  est convexe, alors  $\text{Dom}(f)$  est convexe.

De plus,  $f$  est convexe si et seulement si :  $\forall x, y \in \text{Dom}(f), \forall \lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

✦ *Définition:*

On dit que  $f$  est strictement convexe si  $\forall x, y \in \text{Dom}(f), x \neq y, \forall \lambda \in ]0, 1[$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

✦ *Définition:*

On dit que  $f$  est fortement convexe de module  $\alpha$  si  $\forall x, y \in \text{Dom}(f), \forall \lambda \in ]0, 1[$

$$\frac{\alpha}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 + f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

### ❏ Propriété: opérations conservant la convexité

1. Pour  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de fonctions convexes,  $\sup_{i \in I} f_i$  est convexe.
2.  $\alpha \geq 0$ , si  $f$  convexe, alors  $\alpha f$  est convexe
3. Si  $f_1$  et  $f_2$  convexes, alors  $f_1 + f_2$  convexes.

### ✦ Définition:

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ .

On appelle sous ensemble de niveau de  $f$  au niveau  $\alpha$  noté  $\Gamma_\alpha(f)$  l'ensemble

$$\Gamma_\alpha(f) = \{x \in H; f(x) < \alpha\}$$

**Remarque :**  $f$  convexe  $\Rightarrow \Gamma_\alpha(f)$  convexe  $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

Si  $\Gamma_\alpha(f)$  est convexe  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , alors on dit que  $f$  est quasi-convexe.

### ✦ Définition:

Soit  $P \subset H$ . On appelle fonction indicatrice de  $P$  la fonction :

$$\mathbb{1}_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque :** Si  $P$  convexe, alors  $\mathbb{1}_P$  est convexe.

Si  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $\Gamma_\alpha(\mathbb{1}_P) = P$  donc  $\mathbb{1}_P$  caractérise  $P$ .

## 2 Fonctions d'appui

### ✦ Définition:

Soit  $S \subset H$ .

On appelle fonction d'appui à  $S$  et on note  $\sigma_S$  la fonction définie par :

$$\sigma_S(d) = \sup_{s \in S} (s, d)$$

**Remarque :**  $\sigma_S$  est toujours convexe (même si  $S$  ne l'est pas).

⇒ *Théorème:*

Soit  $S$  un sous-ensemble non vide de  $H$ . Alors  $s \in \overline{\text{conv}}(S)$  si et seulement si

$$\forall d \in H, (s, d) \leq \sigma_S(d)$$

De plus,  $\sigma_S = \sigma_{\overline{\text{conv}}(S)}$

**Remarque :** Soient  $S_1$  et  $S_2$  2 convexes fermés.  $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \sigma_{S_1} = \sigma_{S_2}$ .

¶ *Propriété:*

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux sous-ensembles de  $H$  non vides.

1.  $\sigma_{S_1+S_2} = \sigma_{S_1} + \sigma_{S_2}$
2.  $\sigma_{S_1 \cup S_2} = \max\{\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}\}$

### 3 Transformée de Fenchel

On va chercher les fonctions affines minorantes :

$$\langle p, x \rangle + \alpha \leq f(x)$$

$$-\alpha \geq \langle p, x \rangle - f(x)$$

On va prendre  $-\alpha = \sup_{x \in H} \{\langle p, x \rangle - f(x)\} = f^*(p)$ .

✦ *Définition: Transformée de Fenchel*

Soit  $H$  un Hilbert et  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . On définit la transformée de Fenchel de  $f$ , notée  $f^* : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par :

$$f^*(p) = \sup_{x \in H} \{\langle p, x \rangle - f(x)\}$$

¶ *Propriété: Inégalité de Young*

$$\forall p, x \in H, f^*(p) + f(x) \geq \langle p, x \rangle$$

¶ *Proposition: Semi-continue inférieurement*



Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement (sci) si l'une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

1.  $\forall x \in H, \forall x_n \rightarrow x, \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x)$
2.  $\text{epi}(f)$  est fermé.

**Proposition:**

Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de fonctions sci. Alors  $\sup_{i \in I} f_i$  est sci.

**Corollaire:**

$f^*$  est sci et convexe.

**Définition: Biconjuguée**

La biconjuguée de  $f$ , notée  $f^{**}$  est définie par :

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in H} \{ \langle p, x \rangle - f^*(p) \}$$

**Propriété:**

- $f^{**}(x) + f^*(p) \geq \langle p, x \rangle$
- $f(x) \geq f^{**}(x)$

**Proposition:**

Si  $f$  est convexe, sci et propre, alors  $f^*$  est convexe, sci et propre.

**Théorème: Fenchel-Moreau**

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction propre. alors  $f$  est convexe et sci si et seulement si  $f = f^{**}$

### **Remarque:**

On peut définir la transformée de Fenchel sur un espace normé  $E$  réflexif :

$$f^* : \begin{array}{ccc} E' & \rightarrow & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup_{x \in E} \{ \langle p, x \rangle_{E'E} - f(x) \} \end{array}$$

Dans ce cas, les propositions précédentes et le théorème de Fenchel-Moreau restent vraies.

### **Corollaire:**

Soit  $f$  propre. alors  $f$  est convexe et sci si et seulement si  $f$  est l'encloppe supérieure de ses minorantes affines.

## 4 Continuité des fonctions convexes

### **Proposition:**

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe et propre. On suppose qu'il existe une boule ouverte sur laquelle  $f$  est bornée. Alors  $f$  est continue sur l'intérieur de son domaine qui est non vide.

### **Remarque:**

Si  $f$  est continue en un point, alors  $f$  est bornée sur une boule, et donc  $f$  est continue sur l'intérieur de son domaine.

### **Corollaire:**

Si  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est convexe et propre avec  $H$  de dimension finie, alors  $f$  restreinte à l'intérieur relatif de son domaine est continue.

**Remarque :** Si  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f$  continue sur  $H$ .

## 5 Différentiabilité des fonctions convexes

### 5.1 Dérivées directionnelles des fonctions convexes

### **Théorème:**

Soient  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $x \in \text{Dom}(f)$ ,  $d \in H$ .

1.  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x+\varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$  est croissante
2.  $f'(x, d)$  existe toujours et vaut éventuellement  $\pm\infty$ . De plus,  $f'(x, d) = +\infty$  si et seulement si  $x + \varepsilon d \notin \text{Dom}(f)$  pour tout  $\varepsilon$  petit, et :

$$f'(x, d) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$$

$$f'(x, d) \leq f(x + d) - f(x)$$

3.  $f'(x, d) \geq -f'(x, -d)$

## 5.2 Reconnaître une fonction convexe à l'aide de ses dérivées

⇒ *Théorème:*

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction propre. On suppose que  $f$  est différentiable sur un ouvert  $\Omega$  de  $\text{Dom}(f) \subset H$ . On a équivalence entre les propositions suivantes :

1.  $f$  est convexe (resp. strictement convexe) sur  $\Omega$
2.  $\forall x, y \in \Omega$ ,  $f(y) \geq f(x) + f'(x, y - x)$  (resp.  $f(y) > f(x) + f'(x, y - x)$ )
3.  $\forall x, y \in \Omega$ ,  $(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq 0$  (resp.  $(f'(y) - f'(x))(y - x) > 0$ )

⇒ *Théorème:*

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  propre et 2 fois différentiable sur un ouvert  $\Omega \subset \text{Dom}(f)$ .

Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $D^2f(d, d) \geq 0 \forall d \in H$ .

De plus, si  $D^2f(d, d) > 0$ , alors  $f$  est strictement convexe (réciproque fautive : penser à  $f(x) = x^4$ )

## 6 Sous-différentiabilité des fonctions convexes

### 6.1 Définitions et premières propriétés

✚ *Définition: Fonction affine*

$a$  est affine si  $\forall x, y \in H, \forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$a(tx + (1 - t)y) = ta(x) + (1 - t)a(y)$$

Pour toute fonction affine, il existe  $x^*$  (la pente) et  $\alpha$  (l'ordonnée) telles que  $a(x) = \langle x^*, x \rangle + \alpha$ .

✚ *Définition: Minorante affine*

On dit que  $a$  est une minorante affine de  $f$  si  $a$  est affine et si :

$$\forall x \in H, f(x) \geq a(x)$$

On dit qu'une minorante affine est exacte en  $x_0$  si  $f(x_0) = a(x_0)$ . Dans ce cas,

$$a(x) = \langle x^*, x - x_0 \rangle + f(x_0)$$

⇒ *Théorème: Existence d'une minorante affine*

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe et propre. Alors  $f$  admet une minorante affine.  
De plus, celle-ci peut être choisie exacte en un point de  $ri(Dom(f))$ , ie : si  $x \in ri(Dom(f))$ ,

$$\exists x^* \in H; f(y) \geq \langle x^*, y - x \rangle + f(x)$$

✎ *Définition: Sous-différentiable*

On dit que  $f$  convexe et propre est sous-différentiable en  $x$  s'il existe  $x^* \in H$  tel que :

$$\forall y \in H, f(y) \geq \langle x^*, y - x \rangle + f(x)$$

Les éléments  $x^*$  sont appelés les sous-gradients de  $f$  en  $x$ , et on note  $\partial f(x)$  l'ensemble des sous-gradients de  $f$  en  $x$ .

Par convention, si  $x \notin Dom(f)$ , alors  $\partial f(x) = \emptyset$

📖 *Proposition: Sur l'optimalité*

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe et propre. Alors  $f$  atteint un minimum en  $x$  si et seulement si  $0 \in \partial f(x)$ .

📖 *Proposition:*

Sous les mêmes hypothèses :

$$\partial f(x) = \{x^* \in H; f'(x, d) \geq \langle x^*, d \rangle, \forall d \in H\}$$

⇒ *Théorème:*

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe et propre, et soit  $x \in Dom(f)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\partial f(x) \neq \emptyset$
2.  $\exists y \in ri(Dom(f)); f'(x, y - x) > -\infty$
3.  $f'(x, \bullet) \neq -\infty$

⇒ *Corollaire:*

Si  $f$  est convexe et propre et si  $f$  est continue en  $x \in Dom(f)$ , alors  $\partial f(x) \neq \emptyset$

### **Proposition:**

Soit  $f$  convexe et propre tel que  $f$  est continue en  $x$ . Alors

$$f'(x, d) = \sigma_{\partial f(x)}(d) = \sup_{p \in \partial f(x)} \langle d, p \rangle$$

## 6.2 Sous-différentiabilité et transformée de Fenchel

### **Proposition:**

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe et propre. Alors

$$\partial f(x) = \{p \in H; f(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle\}$$

On définit de la même manière :

$$\partial f^*(p) = \{x \in H; f^{**}(x) + f^*(p) = \langle p, x \rangle\}$$

### **Proposition:**

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe, propre et sci.

$$x \in \partial f^*(p) \Leftrightarrow p \in \partial f(x)$$

## 6.3 Liens avec la différentiabilité

### **Proposition:**

Soit  $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convexe, sci et propre. On suppose que  $f$  est continue en  $x$ .

1. Si  $f$  est Gâteaux-différentiable en  $x$ , alors

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

2. Réciproquement, si  $\partial f(x)$  est réduit à un seul élément, alors  $f$  est Gâteaux-différentiable en  $x$  et  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

## 6.4 Quelques règles de calcul

Dans toute la suite, on supposera la dimension de  $H$  finie.

✦ *Définition: Homogène et sous linéaire*

$f'(x, \bullet)$  est dite homogène de degré  $n \in \mathbb{R}^*$  si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f'(x, \lambda d) = \lambda^n f'(x, d)$$

$f'(x, \bullet)$  est dite sous-linéaire si :

$$\forall d \in H, \exists L > 0; |f'(x, d)| \leq L \|d\|$$

📘 *Proposition:*

Soient  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et propre et  $x \in H$ . Alors  $f'(x, \bullet)$  est convexe, homogène de degré 1 et sous-linéaire.

⇒ *Corollaire:*

Sous les mêmes hypothèses,  $\partial f(x)$  est un convexe compact non vide.

📘 *Proposition:*

Soient  $f_1, f_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes, et  $t_1, t_2 > 0$ . Alors

$$\partial(t_1 f_1 + t_2 f_2)(x) = t_1 \partial f_1(x) + t_2 \partial f_2(x)$$

📘 *Proposition:*

Soient  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction affine ( $Ax = A_0 x + b$ ,  $A_0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ) et  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

$$\partial(g \circ A)(x) = A_0^* \partial g(Ax)$$

## Troisième partie

# Conditions d'optimalité

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u)$$

$\mathcal{U}_{ad} \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble (non vide) admissible. On suppose  $\mathcal{U}_{ad}$  fermé convexe, et  $J$  convexe.

⇒ *Théorème:*

Si  $J$  est coercive ou si  $\mathcal{U}_{ad}$  est borné, alors il existe un point de minimum.

## 1 Une condition nécessaire générale d'optimalité

✦ *Définition: Cône tangent*

On dit que  $d \in \mathbb{R}^n$  est une tangente à  $X$  en  $\bar{x}$  si  $\exists x_k \rightarrow \bar{x}$  avec  $(x_k \in X, t_k \rightarrow 0, t_k > 0)$  tel que :

$$\frac{x_k - \bar{x}}{t_k} \rightarrow d$$

L'ensemble de toutes les directions tangentes est appelé le cône tangent et est noté  $T_{\bar{x}}X$ .

✦ *Définition: équivalente*

$d \in T_{\bar{x}}X$  si  $\exists t_k > 0, t_k \rightarrow 0$  et  $\exists d_k \in X, d_k \rightarrow d$  tel que  $\bar{x} + t_k d_k \in X$ .

¶ *Proposition:*

$T_{\bar{x}}X$  est un cône fermé. Il est convexe si  $X$  est convexe.

¶ *Proposition:*

Soient  $X$  un ensemble convexe et  $\bar{x} \in X$ . Alors

$$T_{\bar{x}}X = \overline{\text{coné}(X - \bar{x})} = \overline{\mathbb{R}_+(X - \bar{x})}$$

✦ *Définition:*

Soient  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x} \in X$ .

On dit que  $p$  est une direction normale à  $X$  en  $\bar{x}$  si

$$\langle p, d \rangle \leq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{x}}X$$

L'ensemble des normales est appelé le cône normal, noté  $\mathcal{N}_{\bar{x}}X$ .

ℹ *Remarque:*

$\mathcal{N}_{\bar{x}}X = (T_{\bar{x}}X)^- = -(T_{\bar{x}}X)^*$   
 $\mathcal{N}_{\bar{x}}X$  est donc un cône convexe.

☞ *Théorème:*

Soit  $\mathcal{U}_{ad}$  un ensemble convexe fermé non vide,  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, et  $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\bar{u}$  minimise  $J$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$
2.  $J'(\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}$
3.  $J'(\bar{u}, d) \geq 0 \quad \forall d \in T_{\bar{u}}\mathcal{U}_{ad}$
4.  $0 \in \partial J(\bar{u}) + \mathcal{N}_{\bar{u}}\mathcal{U}_{ad}$ .

## 2 Cas où les contraintes sont explicites

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ u; \begin{array}{ll} \langle a_i, u \rangle = b_i & i = 1, \dots, m \\ c_j(u) \leq 0 & j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

$a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $c_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

$\mathcal{U}_{ad}$  est convexe.

On note

$$\begin{array}{ccc} A : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ u & \mapsto & (\langle a_i, u \rangle)_{i=1}^m \end{array}$$

$$b = (b_i)_{i=1}^m$$

$$\{\langle a_i, u \rangle = b_i, i = 1, \dots, m\} = \{u; Au = b\}$$

On note  $(a, b, c)$  les contraintes de manière générique.

☞ *Lemme:*

Pour  $u \in \mathcal{U}_{ad}$ , on définit l'ensemble  $\Lambda(u)$  par :

$$\Lambda(u) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p; \lambda_i \geq 0, \lambda_i c_i(u) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p\}$$



On définit le cône :

$$\mathcal{N}_{(a,b,c)}(u) = \{A^*\mu + \sum_{j=1}^p \lambda_j s_j, \mu \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda(u), s_j \in \partial c_j(u)\}$$

avec  $A^*\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i$

Alors

$$\mathcal{N}_{(a,b,c)}(u) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$$

∞ *Théorème:*

Soit  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, et  $\bar{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ .

1.  $\bar{u}$  minimise  $J$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$
2.  $0 \in \partial J(\bar{u}) + \mathcal{N}_{\bar{u}} \mathcal{U}_{ad}$ .
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda \in \Lambda(\bar{u}); 0 \in \partial J(\bar{u}) + \sum_{i=1}^m a_i \mu_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \partial c_j(\bar{u})$

Alors (3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Leftrightarrow$  (2)

## 2.1 Qualification des contraintes

Les contraintes sont qualifiées si :

$$\mathcal{N}_{(a,b,c)}(u) = \mathcal{N}_{\mathcal{U}_{ad}}(u) \text{ et alors (3) } \Leftrightarrow (1)$$

∞ *Lemme:*

Si les contraintes  $c_j$  sont affines et si  $\mathcal{U}_{ad}$  est non vide, alors

$$\mathcal{N}_{(a,b,c)}(u) = \mathcal{N}_{\mathcal{U}_{ad}}(u)$$

∞ *Lemme:*

Si  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\text{cone}(s_1, \dots, s_m)$  est fermé.

On oublie le cas affine :

∞ *Théorème:*

On fait l'hypothèse dite de Slater :

$$\exists u_0; \begin{cases} Au_0 = b \\ c_j(u_0) < 0 \quad \forall j = 1, \dots, p \end{cases}$$

$\bar{u}$  minimise  $J$  sur  $\mathcal{U}_{ad}$  si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda \in \Lambda(\bar{u}); 0 \in \partial J(\bar{u}) + \sum_{i=1}^m a_i \mu_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j \partial c_j(\bar{u})$$