Soient H une sous-espace borné de $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ pour lequel 0 est un point d'accumulation, $\tilde{\Omega}$ un polygone ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ et, pour tout $h \in H$, on note $\tilde{\mathscr{T}}_h$ une triangulation sur $\tilde{\Omega}$ au moyen d'éléments K dont le diamètre h_K sont inférieurs ou égal à h et soit $\tilde{V}_h$ un espace d'éléments finis construit sur $\tilde{\mathscr{T}}_h$ tel que :

$$\tilde{V}_h \text{ est un sous-espace de dimension fini de } H^m\left(\tilde{\Omega}\right) \cap C^k\left(\overline{\tilde{\Omega}}\right) \tag{1}$$

(voir fig. 1)

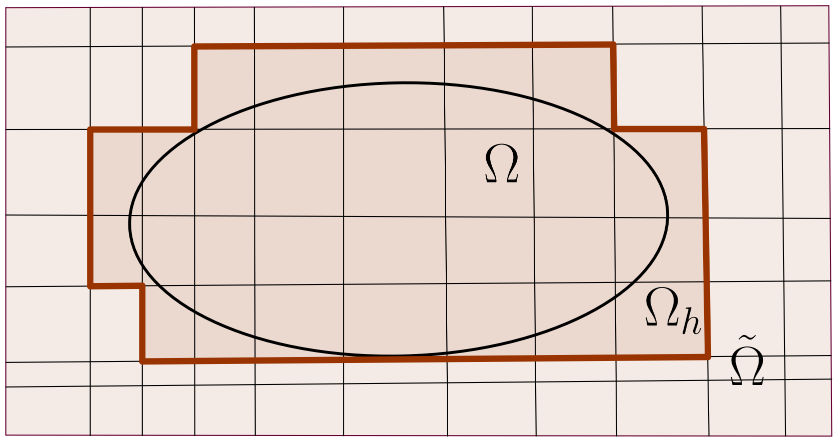

FIGURE 1 – Définition des ensembles Ω, $\tilde{\Omega}$ et Ω_h

De plus, pour étudier la convergence de l'approximation, on suppose qu'il existe une famille d'opérateurs linéaires continus $(\tilde{\Pi}_h)_{h\in H}$ de $H^m(\Omega)$ dans $\tilde{V}_h$ satisfaisant :

$$\exists C > 0;\ \forall h \in H,\ \forall l = 0, ..., m-1,\ \forall v \in H^m(\tilde{\Omega}),\ \left|v - \tilde{\Pi}_h v\right|_{l,\tilde{\Omega}} \leq C h^{m-1} |v|_{m,\tilde{\Omega}} \tag{2}$$

$$\forall v \in H^m(\tilde{\Omega}), \lim_{h\to 0} \left|v - \tilde{\Pi}_h v\right|_{m,\tilde{\Omega}} = 0 \tag{3}$$

Ces conditions n'ont pas besoin de l'hypothèse classique de régularité de la méthode des éléments finis $H^m(\tilde{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\tilde{\Omega})$, où s est l'ordre maximal des dérivés apparaissant dans la définition des degrés de liberté de l'élément fini générique de $(\tilde{V}_h)_{h\in H}$, mais on assume que :

$$\text{la famille } (\tilde{\mathscr{T}}_h)_{h\in H} \text{ est régulière} \tag{4}$$

Comme expliqué dans [2], une famille est dite régulière si, en notant h_K le diamètre de K et ρ_K le supremum du diamètre des sphères inscrites dans K :

$$\exists \alpha > 0;\ \forall K \in \tilde{\mathscr{T}}_h,\ h_K \leq \alpha \rho_K$$

De plus, les conditions (2)-(3) demandent l'hypothèse suivante : l'élément fini générique (K, P_K, Σ_K) de la famille $(\tilde{V}_h)_{h\in H}$ statisfait l'équation $P_m(K) \subset P_K$ où $P_n(K)$ définit l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n définis sur K.

À présent, pour tout $h \in H$, on considère le sous-ensemble Ω_h (voir figure 1) définie par :

$$\Omega_h \text{ est l'intérieur de l'union des rectangles } K \text{ de } \mathscr{T}_h \text{ tel que } K \cap \Omega \neq \emptyset \tag{5}$$

Il est clair que la famille $(\Omega_h)_{h\in H}$ satisfait les relations (en notant μ une mesure sur $\tilde{\Omega}$) :

$$\forall h \in H, \Omega \subset \Omega_h \subset \tilde{\Omega} \tag{6}$$
$$\lim_{h\to 0} \mu(\Omega_h \backslash \overline{\Omega}) = 0 \tag{7}$$

Pour tout $h \in H$, on définit :

$$V_h = \{\phi|_{\Omega_h} | \phi \in \tilde{V}_h\} \tag{8}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème de minimisation suivant : trouver $\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h} \in V_h$ satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h,\ J^{\eta}_{\varepsilon,h}(\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h}) \leq J^{\eta}_{\varepsilon,h}(v_h) \tag{9}$$

où $J^{\eta}_{\varepsilon,h}$ est la fonctionnelle définie par :

$$J^{\eta}_{\varepsilon,h} = \ell^{\eta}\left[(v_h - f)^2\right] + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h}$$

On considère ensuite le problème variationnel suivant : trouver $\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h} \in V_h$ satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h,\ \ell^{\eta}(\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h} v_h) + \varepsilon\left(\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h}, v_h\right) = \ell^{\eta}(f v_h) \tag{10}$$

où $(u, v)_{m,\Omega_h} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_h} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx$.

Théorème 0.0.1 :
On suppose que Ω, ω, m et f sont définis comme dans la section précédente et que les hypothèses (**??**), (1), (5) et (8) sont vérfiées. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $h \in H$, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in E$, $\eta \leq \eta_0$, les problèmes (9) et (10) admettent une même unique solution.

Démonstration :
En utilisant un argument de compacité (voir [3]), on montre, sous la relation :

$$\forall p \in P_{m-1}(\tilde{\Omega}_h),\ p_{|\omega} = 0 \Rightarrow p \equiv 0$$

que la fonction $[| \bullet |]_h$ définie sur $H^m(\Omega_h)$ par :

$$[|v|]_h = \left(\|v\|^2_{0,\omega} + |v|^2_{m,\Omega_h}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^m(\Omega_h)$ équivalente à la norme usuelle

$$\|v\|_{m,\Omega_h} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_h} (\partial^{\alpha} v)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En conséquence de la définition de ℓ^{η}, la forme bilinéaire symétrique :

$$(u_h, v_h) \mapsto \ell^{\eta}(u_h v_h) + \varepsilon(u_h, v_h)_{m,\Omega_h}$$

est continue sur $V_h \times V_h$. Ainsi, la forme est V_h-elliptique pour tout η assez petit car en utilisant (**??**), on a :

$$\begin{array}{rcl} \ell^{\eta}(v_h^2) + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h} & \geq & \|v_h\|^2_{0,\omega} - C\eta^t \|v_h\|^2_{m,\Omega} + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h} \\ & \geq & \min(1,\varepsilon)\|v_h\|^2_h - C\eta^t \|v_h\|^2_{m,\Omega} \\ & \geq & (C' \min(1,\varepsilon) - C\eta^t)\|v_h\|^2_{m,\Omega_h} \end{array} \tag{11}$$

où C' est une constante liée à l'équivalence des normes.
Supposons (voir [1] pour plus de détail) qu'il existe $\beta > 0$ tel que, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta \in E$, $\frac{\eta^t}{\min(1,\varepsilon)} < \beta$. En prenant $\beta = \frac{C'}{C}$, il existe $C'' > 0$ tel que

$$\ell^{\eta}(v_h^2) + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h} \geq C'' \|v_h\|^2_{m,\Omega_h}$$

La forme est donc bilinéaire symétrique V_h-elliptique : le théorème de Lax-Milgram s'applique donc, et l'unicité de la solution est assurée.

Remarque :
En notant M la dimension de V_h et $(\phi_j)_{1 \leq j \leq M}$ une base de V_h, on pose :

$$\sigma^{\eta}_{\varepsilon,h} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \phi_j$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq M$. On introduit les matrices :

$$\mathcal{A} = \left(\ell^\eta(\phi_i \phi_j)\right)_{1 \leq i,j \leq M}$$

$$\mathcal{R} = \left((\phi_i, \phi_j)_{m,\Omega_h}\right)_{1 \leq i,j \leq M}$$

$$\mathcal{F} = \left(\ell^\eta(f \phi_i)\right)_{1 \leq i \leq M}$$

On voit que (10) est équivalent au problème :

$$\text{Trouver } (\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_M) \in \mathbb{R}^M \text{ solution de } (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{R})\alpha = \mathcal{F}$$

On peut enfin prendre comme approximation de f la fonction $\Phi = \sigma^\eta_{\varepsilon,h}|_\Omega$ qui, en utilisant les hypothèses (1), (5) et (8), appartient à $H^m(\Omega) \cap C^k(\overline{\Omega})$.
On cherche à savoir en quel sens Φ est une approximation de f.

Théorème 0.0.2 :
Sous les mêmes hypothèses, si on suppose de plus que (**??**) est vérifié, alors la solution $\sigma^\eta_{\varepsilon,h}$ de (9) et (10) satifont :

1. $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \to 0 \\ \frac{\eta^t}{\varepsilon} \to 0}} \|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\|_{m,\Omega} = 0$$

   où σ est la solution de (**??**) et où β a été introduit dans le théorème précédent
2. Il existe une constante positive C telle que :

$$\|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - f\|^2_{0,\omega} \leq C \left(h^{2m} + \eta^t o(1) + \varepsilon\right) \text{ où } \varepsilon \to 0, \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \to 0, \frac{\eta^t}{\varepsilon} < \beta$$

Démonstration :
Soit σ l'unique solution de (**??**). On a $\sigma_{|\omega} = f|_\omega$ et

$$\|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - f\|^2_{0,\omega} = \|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\|^2_{0,\omega}$$

On a, en utilisant (**??**) :

$$\|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - f\|^2_{0,\omega} \leq \ell^\eta \left(\left(\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\right)^2\right) + C\eta^t \|\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\|^2_{m,\Omega} \tag{12}$$

D'où, de (9), on a :

$$\forall v_h \in V_h,\ \ell^\eta \left(\left(\sigma^\eta_{\varepsilon,h} - \sigma\right)^2\right) + \varepsilon |\sigma^\eta_{\varepsilon,h}|^2_{m,\Omega_h} \leq \ell^\eta \left((v_h - \sigma)^2\right) + \varepsilon |v_h|^2_{m,\Omega_h} \tag{13}$$

Références

[1] R. Arcangéli, M.C.L. de Silanes, and J.J. Torrens. *Multidimensional Minimizing Splines : Theory and Applications.* Grenoble Sciences. Springer, 2004.

[2] Philippe G Ciarlet and PA Raviart. General lagrange and hermite interpolation in r n with applications to finite element methods. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46(3) :177–199, 1972.

[3] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Academia, 1967.