Optimisation convexe

5 mars 2015

Table des matières

1 Rappels **2**
1.1 Calcul différentiel . . . 2
1.2 Rappel sur les formes différentielles . . . 4
1.2.1 Comment définir une distribution ? . . . 6
1.2.2 Différentielle extérieure . . . 6

Introduction

Définition: Variété

M est une variété de dimension n si :

1. $\forall p \in M$, $\exists U$, voisinage ouvert de p, $\exists \phi : U \to \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme
2. $\forall p \in U$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $p \in V$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ doit être de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\omega$ (analytique).

On parle alors de variété de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^\omega$

Définition: Espace tangent en p

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle espace tangent en p :

$$T_pX = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

Définition: Fibré tangent

On prend une variété Q de dimension d. On appelle fibré tangent :

$$TQ = \bigcup_{q \in Q} T_qQ$$

de dimension $2d$

Définition: Espace cotangent

On appelle l'espace cotangent le dual d'un espace tangent :

$$T_q^*Q = (T_qQ)^*$$

1 Rappels

1.1 Calcul différentiel

Définition: Crochet de Lie

Soit $f, g \in V^\infty(X)$. On définit :

$$[f,g](p) = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{-t}^f)_* g(p)\Big|_{t=0} = Dg(x).f(x) - DF(x).g(x)$$

ℹ *Proposition:*

$$\forall p \in X,\ \forall t, s \in \mathbb{R},\ \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^{g} \circ \gamma_t^{f}(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

ℹ *Proposition:*

1. Soit γ_t le flot de $\dot{x} = f(x)$. Alors σ_t, le flot de $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$ est :
$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$
2. Soient $f, g \in V^\infty(X)$ et ϕ un difféomorphisme. Alors :
$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$
3. $\left(\gamma_t^f\right)_* f = f$

Définition: Distribution

Une distribution sur X, une variété de dimension n, est une application $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$. $\mathcal{D}(p)$ étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces. Soient $f_1, ..., f_k \in V^\infty(X)$. On pose

$$\mathcal{D}(p) = vect\{f_1(p), ..., f_k(p)\}$$

On dit alors que $\mathcal{D}$ est de rang constant $(= k)$.

Définition:

$\mathcal{D}$ est dite intégrale si $\forall p \in X$, $\exists S$ une variété, $p \in S$ tel que

$$T_q S = \mathcal{D}(q),\ \forall q \in S$$

Définition: Involutive

$f \in V^\infty(X)$. On dit $f \in \mathcal{D}$ si $\forall p \in X,\ f(p) \in \mathcal{D}(p)$. $\mathcal{D}$ est dite involutive si $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$.

Théorème: Frobenius

Soit $\mathcal{D}$ une distribution de rang constant k. Alors les conditions suivants sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}$ intégrable
2. $\mathcal{D}$ involutive
3. localement, autour de chaque point $p \in X$,

$$\exists (x_1, ..., x_k, ..., x_n); \mathcal{D} = span\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}\}$$

1.2 Rappel sur les formes différentielles

Soit E un espace vectoriel, $e_1, ..., e_n$ sa base. On a également E^* son dual, et $e^1, ..., e^n$ sa base duale.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j$$

$T : E \times ... \times E \to \mathbb{R}$ k-linéaire est dit un k-tenseur (ensemble noté $T^k(E)$).

Définition:

Soit $T \in T^k(E)$, $S \in T^l(E)$. On pose :

$$T \otimes S(x_1, ..., x_{k+l}) = T(x_1, ..., x_k)S(x_{k+1}, ..., x_{k+l})$$

Remarque : En général, $T \otimes S \neq S \otimes T$.

Propriété:

Une base de l'espace des k-tenseurs est formé par :

$$\bigotimes_{l=1}^{k} e^{i_l}$$

Corollaire:

dim $T^k(E) = n^k$.

$A^k(E)$: k-tenseur antisymétriques, ie :

$$\begin{aligned} & T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \\ \Leftrightarrow \quad & T(..., v_i, v_{i+1}, ...) = -T(..., v_{i+1}, v_i, ...) \\ \Leftrightarrow \quad & T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)T(v_1, ..., v_k) \end{aligned}$$

Comment produire des tenseurs antisymétriques ?

$$Alt : \begin{array}{ccc} T^k(E) & \to & T^k(E) \\ T & \mapsto & \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\varepsilon(\sigma)T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(k)}) \end{array}$$

où Σ_k est l'ensemble des permutations de k éléments, $\varepsilon(\sigma)$ est le signe de la permutation.

Proposition:

1. $T \in T^k(E) \Rightarrow Alt(T) \in A^k(E)$
2. $T \in A^k(E) \Rightarrow Alt(T) = T$
3. $T \in S^k(E)$ (tenseur symétrique) $\Rightarrow Alt(T) = 0$

Définition: Produit extérieur

Soit $\omega \in A(E)$, $\eta \in A^l(E)$.
On définit $\omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$, appelé produit extérieur par :

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)$$

Propriété:

1. $\omega \in A^k$, $\eta \in A^l \Rightarrow \omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$
3. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$

Corollaire:

Soit $\omega \in A^{2k+1}(E)$

$$\omega \wedge \omega = 0$$

Corollaire:

Soit $e^1, ..., e^n$ la base duale.

$$e^i \wedge e^i = 0 \; e^i \wedge e^j = e^j \wedge e^i$$

ℹ Proposition:

Une base de $A^k(E)$ est donnée par :

$$e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k} \text{ où } 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$$

Corollaire:

Si $\omega \in A^k(E)$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1,...,i_k} e^{i_1} \wedge .... \wedge e^{i_k}$$

$f(p) \in E = T_pX$ champ vecteur, $w(p) \in T_p^*X$ une 1-forme différentielle.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad w(p) = \sum_{j=1}^{n} w_j(x) dx^j$$

$$w(f) = \sum_{j=1}^{n} w_j(x) f^j(x)$$

De même, une k-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$: $w \in \Lambda^k(X)$

$$w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} w_{i_1 ... i_k}(x) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

1.2.1 Comment définir une distribution ?

1. On choisit $f_1, ..., f_m \in V^\infty(X)$, et on pose $\mathcal{D} = span\{f_1, ..., f_m\}$
2. $p \in X \mapsto \mathscr{E}(p) \subset T_p^*X$ est une codistribution. On pose :

$$\mathcal{D} = \mathscr{E}^\perp = Ker\mathscr{E} = \{f \in V^\infty(X); \langle w, f\rangle = 0, \ \forall w \in \mathscr{E}\}$$

Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est une distribution, on pose :

$$\mathscr{E} = \mathcal{D}^\perp = ann\mathscr{E} = \{w \in \Lambda^k(X); \langle w, f\rangle = 0, \ \forall f \in \mathcal{D}\}$$

Remarque : Si rg$\mathcal{D}$=cste (ou rg$\mathscr{E}$=cste) :

1. rg $\mathcal{D}$ +rg$\mathscr{E}$= n
2. $\langle w, f\rangle = 0$ peut être considéré point par poinr ou globalement

1.2.2 Différentielle extérieure

Soit $w \in \Lambda^k(X)$.
Si $k = 0$, $\Lambda^0(X) = \mathscr{C}^\infty(X)$
Si $k \geq 1$, $w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} w_{i_1 ... i_k}(x) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ et

$$dw = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} dw_{i_1 ... i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Ainsi :

$$\Lambda^0(X) \xrightarrow{d} \Lambda^1(X) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Lambda^n(X) \xrightarrow{d} 0$$

Proposition:

Soit $w \in \Lambda^1(X)$, soient $f, g \in V^\infty(X)$. On a :

$$dw = L_f w(g) - L_g w(f) - w([f,g])$$

Rappel :

$\eta \in \Lambda^k(M)$, $\omega \in \Lambda^l(M)$.

$$\eta \wedge \omega(v_1, ..., v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma)\eta(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}).\omega(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+l)}) \in \Lambda^{k+l}(M)$$

Soit g indépendant en chaque point $p \in M$ de f_1 et f_2.

$$dw \wedge \omega(f_1, f_2, g) = d\omega(f_1, f_2)\omega(g)$$

$d\omega \wedge \omega \neq 0 \Leftrightarrow d\omega(f_1, f_2) = -\omega([f_1, f_2]) \neq 0$
2 cas possibles :

1. $\mathcal{D} = span\{f_1, f_2\}$ involutive
2. $\mathcal{D} = span\{f_1, f_2\}$ non involutive

Dans le premier cas, on a un système de coordonnées locales qui redresse le plan. Est-ce de même pour le deuxième cas ? Sachant qu'ils sont bien plus courants, et stable : même s'il est perturbé, le tout reste $\neq 0$!

Proposition: dans $\mathbb{R}^3$, $rg\mathcal{D} = 2$

Les conditions suivantes sont équivalentes localement autour de $p \in M$

1. $[f, g](p) \notin \mathcal{D} = span\{f, g\}$
2. $d\omega \wedge \omega(p) \neq 0$, où $\mathcal{D}^\perp = span\{\omega\}$
3. $\exists \phi(x, y, z)$ des coordonnées locales autour de p tel que $\phi_* \mathcal{D} = span\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right\}$
4. $\mathcal{D}^\perp = span\{dz - xdy\}$

Proposition:

La condition $d\omega \wedge \omega \equiv 0$ ne dépend pas du choix de ω.

Théorème: de Frobenius pour les formes différentielles

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{D}$ involutive
2. $\exists \alpha_j^i \in \Lambda^1(M)$, $1 \leq i, j \leq k$ tel que $d\omega_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j \wedge \omega_j$, $1 \leq i \leq k$
3. $d\omega_i = 0 \mod I$ où I est l'idéal dans $\bigcup_{p\geq 0} \Lambda^p(M)$ engendré par $\omega_1, ..., \omega_k$ ie :

$$i \in I \Leftrightarrow i = a \wedge \omega_j$$

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k \equiv 0$$

On pose $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i]$

Définition: Vecteur de croissance

Le vecteur de croissance de $\mathcal{D}$ en p est la suite $(d_i(p)_{i\geq 0}$, où $d_i(p) = dim\mathcal{D}_i(p)$.

Remarque : Si on n'indique pas p, d_i est constant.

Corollaire: Dans $\mathbb{R}^3$, rg$\mathcal{D}$=2

1. $\mathcal{D}$ involutive $\Leftrightarrow (d_0, d_1) = (2, 2)$
2. $dw\omega \wedge \omega(p) \neq 0 \Leftrightarrow \forall q \in V_p$, $(d_0(q), d_1(q)) = (2, 3)$
   Si p est singulier, on a en p (2,2,3) et en dehors (2,3).

Définition: Caractéristique

Un champ $v \in \mathcal{D}$ est dit caractéristique pour $\mathcal{D}$ si

$$[v, f] \in \mathcal{D} \forall f \in \mathcal{D}$$

$\mathcal{C} = \{v \in \mathcal{D},\ v \text{ caractéristique}\}$ est dite la distribution caractéristique.

Remarque : v est parfois appelé symétrie infénitésimale, car $(\gamma_t^v)_t$ est une famille de symétries de $\mathcal{D}$.
$\phi; M \to M$ difféomorphisme est une symétrie de $\mathcal{D}$ si $\phi_*\mathcal{D} = \mathcal{D}$.
Démontrez que $(\gamma_t^v)_* \mathcal{D} = \mathcal{D} \Leftrightarrow [v, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$.

Proposition:

$\mathcal{C}$ est toujours involutive.

Proposition:

Soit $\mathrm{rg}\mathcal{D} = m$. On suppose que $\mathrm{rg}\mathcal{C} = p$.
Autour de chaque point, il existe des coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$telles que

$$\mathcal{D} = span\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^p}, f_{p+1}, ..., f_m\right\}$$

où

$$f_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{q=m+1}^{n} f_j^q \frac{\partial}{\partial x^q},\ p+1 \leq j \leq m, \quad \text{où } f_j^q = f_j^q(x^{p+1}, ..., x^n)$$