

## Première partie

# Optimisation convexe

## 1 Ensembles convexes

1. Définition sous-ensemble affine, convexe
2. Définition simplexe, combinaison convexe
3. Théorème : équivalence à  $C$  convexe (comb. convexe)
4. 5 propositions sur opérations conservant convexité
5. Définition : face, point extrémal
6. Définition : enveloppe affine, enveloppe convexe
7. Proposition : expression de ces deux ensembles
8. Théorème : Carathéodory, combinaison dans dim.  $n$
9. Théorème : intérieur et fermeture d'un convexe
10. Définition intérieur relatif
11. Théorème : Si  $C$  non vide,  $ri(C)$  ?
12. Lemme :  $C$  convexe,  $x \in ri(C)$ ,  $y \in \overline{C}$ ,  $[x, y[$  ?
13. Théorème : projection sur un convexe fermé, inégalité sur produit scalaire
14. 3 propriétés de la projection
15. Définition : séparation (stricte) de deux convexes
16. Théorème : séparation d'un convexe et d'un point
17. Théorème : séparation d'un convexe et d'un fermé
18. Théorème : séparation de deux convexes disjoints
19. Définition enveloppe convexe.
20. 2 propriétés sur les convexes fermés (monotonie, inclusion, égalité)
21. Définition demi-espace. Lien avec  $\overline{conv}$
22. 2 corollaires : si  $C$  déjà convexe, équivalence à  $C$  convexe fermé
23. Théorème :  $conv(A)$  compact
24. Définition de cône, enveloppe conique, combinaison conique
25. 2 propositions ressemblant au cas convexe
26. Définition enveloppe conique fermée, propriété comme précédente (monotonie...)
27. Définition du cône normal à  $C$  en  $x$
28. Condition pour que le cône ait au moins un élément non nul
29. Définition cône dual, bidual, polaire
30. Proposition sur  $P^*$
31. Lemme de Farkas, corolaire
32. Si  $C$  cone convexe fermé, lien entre  $C^{**}$  et  $C$

## 2 Fonctions convexes

33. Définition domaine, épigraphe (strict), fonction propre, convexe
34. Équivalence à  $f$  convexe
35. Déf. strictement convexe, fortement convexe
36. 3 opérations conservant la convexité
37. Def Sous ensemble de niveau de  $f$

38. Définition fonction indicatrice
39. Définition fonction d'appui
40. Équivalence à appartenance à  $\overline{\text{conv}}(S)$ , égalité des fonctions d'appui. Si 2 ensembles convexes fermés ?
41. 2 opérations sur fonctions d'appui
42. Transformée de Fenchel
43. Inégalité de Young
44. Définition sci, équivalence
45. Famille de fonctions sci  $\Rightarrow$  sci ?
46. Corollaire sur  $f^*$
47. Définition de biconjugée, 2 inégalités
48. Implication  $f$  sci convexe et propre
49. Thm de Fenchel-Moreau
50. Corollaire : équivalence  $f$  sci et convexe
51.  $f$  convexe propre, bornée sur une boule  $\Rightarrow$  ?
52. Corollaire sur  $f$  réduite à l'intérieur relatif de son domaine
53. Thm : dérivée directionnelle (croissance,  $= +\infty$ , inégalité)
54. 3 équivalences à  $f$  convexe avec différentiabilité
55. Thm si 2 fois différentiable