

Solution de viscosité

16 février 2015

Table des matières

I	Solution classique et généralisation	3
1	Premières définitions	3
1.1	Quelques exemples d'opérateurs propres	3
2	Solutions classiques	4
3	Vers une solution généralisée	5
II	Solutions de viscosité	7
1	Définitions et propriétés	7
1.1	Solutions continues	7
1.2	Propriété des solutions continues	7
	Utilisation du théorème	8
1.3	Solutions discontinues	9
1.3.1	Limite sup/Limite inf	9
1.3.2	Enveloppe semi-continue	10
1.3.3	Solution de viscosité discontinues	11
2	Existence par la méthode de Perron	12
3	Stabilité	12
3.1	Illustration : méthode de viscosité évanescence	13
4	Principe de comparaison	13
4.1	Principe pour les équations du 1er ordre	13
4.1.1	Cas où Ω borné	13
4.1.2	Cas où Ω non borné	14
5	Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2	14
6	Extension au cas parabolique	16
6.1	Construction de \tilde{u}	17
III	Applications	17
1	Contrôle optimal déterministe	17
1.1	Principe de programmation dynamique	17
1.2	Contrôle en feedback	18
2	Introduction à l'homogénéisation au 1^{er} ordre	19

Introduction

Le but est de voir comment résoudre les équations du type :

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) &= 0 & \text{sur } \Omega \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{EDP})$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue.

On notera $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$Du = \nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}$$

D^2u est la matrice hessienne.

$g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

On note S^n l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille n .

Si $u \in \mathcal{C}^2$, $D^2u \in S^2$.

S^n est muni d'un ordre naturel :

$$X \geq Y \Leftrightarrow X - Y \geq 0$$

où $X \geq 0$ équivaut $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $(X\xi, \xi) \geq 0$

$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé l'hamiltonien.

On note (x, r, p, X) les variables de F . Le but est de donner un sens à l'**EDP**.

- En général, il n'y a pas de solution classique (ie appartenant à \mathcal{C}^2)
- Comme l'équation est complètement non linéaire, on ne peut pas définir une solution au sens des distributions. On doit donc trouver une autre notion de solution.

But : Introduire la notion de viscosité.

Cette notion sera bien posée dans le sens suivant :

- existence et unicité des solutions
- stabilité par rapport à F et g .

Si $F_n \rightarrow F$ et $g_n \rightarrow g$ localement uniformément, alors $u_n \rightarrow u$ localement uniformément.

Outils essentiels :

- Principe de comparaison : si u est sous-solution, v sur-solution, alors $u \leq v$. Cela nous donnera l'unicité de la solution.
- On utilisera souvent \limsup , \liminf et la semi-continuité.
- On aura également besoin d'un ordre : F doit être à valeur dans \mathbb{R} (limitation de la théorie)

Application : Géophysique, problèmes de mouvement et de front, trafic routier, imagerie, analyse numérique (convergence de schéma, estimation d'erreur...), homogénéisation (changement d'échelle),...

Première partie

Solution classique et généralisation

1 Premières définitions

✦ Définition: Ellipticité

- On dit que F est elliptique si F est décroissante en X , ie

$$Y \geq X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

- On dit que F est strictement elliptique si :

$$Y < X \Rightarrow F(\bullet, \bullet, \bullet, Y) < F(\bullet, \bullet, \bullet, X)$$

- On dit que F est uniformément elliptique si :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0; \forall X, Y \in S^n, Y \geq 0, -\Lambda \text{tr}(Y) \leq F(\bullet, \bullet, \bullet, X + Y) - F(\bullet, \bullet, \bullet, X) \leq -\lambda \text{tr}(Y)$$

- F est propre si F est croissante en r et elliptique.

Dans (presque) tout le reste du cours, on travaillera avec des opérateurs propres.

✦ Définition: Linéarité

- F est linéaire si F est linéaire en r, p et X
- F est semi-linéaire si F est linéaire en p et X
- F est quasi-linéaire si F est linéaire en X
- F est complètement non linéaire sinon

1.1 Quelques exemples d'opérateurs propres

Equation de Poisson : $-\Delta u = f$ dans Ω

$$F(x, r, p, X) = -\text{tr}(X) - f(x)$$

- F uniformément elliptique
- F propre

Equation linéaire non sous forme divergentielle : $\mathcal{L}u = f$, avec $\mathcal{L}u = -\text{tr}(a(x)D^2u) + b(x)Du + c(x)u$
 $a(x)$ symétrique positive, $c(x) \geq 0$.

Exercice : Montrez que \mathcal{L} est propre. *Montrer au préalable :*

$$A, B \geq 0 \Rightarrow \text{tr}(AB) \geq 0$$

Equation linéaire sous forme divergentielle : $\mathcal{L}'u = f$ avec $\mathcal{L}'u = -\text{div}(a(x)Du) + b(x)Du + c(x)u$

\mathcal{L}' est elliptique si $a \in \mathcal{C}^1(\Omega, S^n)$ avec $a \geq 0$ et propre si $c \geq 0$

Equation d'Hamilton-Jacobi d'ordre 1 : $H(x, u, \nabla u) = 0$

Propre si H croissante en u

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann : \mathcal{L}^α linéaire, $\mathcal{L}^\alpha u = -\text{tr}(a^\alpha(x)D^2u) + b^\alpha(x)Du + c^\alpha u$

Si $\sup_\alpha \{\mathcal{L}^\alpha u - f\} = 0$, alors \mathcal{L}^α propre.

2 Solutions classiques

✦ Définition: Solution classique

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est une solution classique de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ si u vérifie l'équation en tout point.
(on se limite à \mathcal{C}^1 pour les équations du premier ordre)

ℹ Proposition:

Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ tel que $u - v$ atteint un maximum positif en $\bar{x} \in \Omega$.
Alors $F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$

Démonstration :

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) &\geq v(\bar{x}) \\ D(u - v)(\bar{x}) &= 0 \Rightarrow Du(\bar{x}) = Dv(\bar{x}) \text{ car on atteint un maximum} \\ D^2(u - v)(\bar{x}) &\leq 0 \Rightarrow D^2u(\bar{x}) \leq D^2v(\bar{x}) \end{aligned}$$

Comme F est propre :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x}))$$

✦ Définition:

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est sous solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0 \ \forall x \in \Omega$
De même, u est sur solution de (EDP) si $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$

ℹ Proposition:

Supposons Ω borné. On suppose u sous-solution, v sur-solution, F strictement croissante en r et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$.
Alors $u \leq v$ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration :

On raisonne par l'absurde : on suppose $\max_{\Omega}(u - v) > 0$. Soit \bar{x} un point de maximum.

$$\begin{aligned} u(\bar{x}) - v(\bar{x}) &> 0 \\ Du(\bar{x}) &= Dv(\bar{x}) \\ D^2u(\bar{x}) &\leq D^2v(\bar{x}) \\ \Rightarrow 0 &\geq F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \\ &\geq F(\bar{x}, u(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &> F(\bar{x}, v(\bar{x}), Dv(\bar{x}), D^2v(\bar{x})) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On a donc $0 > 0$, ce qui est absurde.

⇒ *Corollaire:*

Sous les mêmes hypothèses, (EDP) admet au plus une solution vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$.

Démonstration :

Soient u et v deux solutions.

u est sous-solution, v est sur-solution, donc $u \leq v$

De même, u est sur-solution, et v est sous-solution, donc $v \leq u$.

Donc $u = v$.

3 Vers une solution généralisée

On considère le problème :

$$\begin{cases} |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

D'après Rolle, il n'y a pas de solution classique. Il y a par contre une infinité de solution \mathcal{C}^1 par morceaux. Par exemple :

$$u^+ = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et également $u^- = -u^+$.

On considère le problème pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + |u'| = 1 \text{ sur } \Omega =]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Safranov nous montre qu'il existe une unique solution $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que :

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1+x-\varepsilon \left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) & \text{si } x \leq 0 \\ u_\varepsilon(-x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u^+$ uniformément. u^+ est sélectionnée par la méthode de viscosité évanescence.

⇒ *Théorème: Principe du maximum*

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est une solution de (EDP) si et seulement si :

1. $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en \bar{x} on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \leq 0$$

2. $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en \bar{x} on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \geq 0$$

Démonstration :

On suppose que a est une solution classique. Soit ϕ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en \bar{x} .

$$Du(\bar{x}) = D\phi(\bar{x})$$

$$D^2u(\bar{x}) \leq D^2\phi(\bar{x})$$

$$0 = F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) \geq F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x}))$$

Le deuxième point se fait de la même manière.

Réciproquement : comme $u \in \mathcal{C}^2$, on peut prendre $\phi = u$ dans 1) et 2), donc $u - \phi$ atteint un max et un min en tout point.

$$\begin{aligned} F(x, u, Du, D^2u) &\leq 0 \\ &\geq 0 \\ \Rightarrow F(x, u, Du, D^2u) &= 0 \end{aligned}$$

Deuxième partie

Solutions de viscosité

1 Définitions et propriétés

1.1 Solutions continues

✦ Définition: Solution de viscosité

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. On dit que u est sous-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en \bar{x} , on a

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \leq 0$$

On dit que u est sur-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en \bar{x} , on a

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), D\phi(\bar{x}), D^2\phi(\bar{x})) \geq 0$$

Si u est à la fois sous-solution et sur-solution, on dit qu'elle est alors solution de viscosité de (EDP).

ℹ Proposition:

- Dans la définition précédente, on peut remplacer maximum par maximum global ou maximum strict (de même pour le minimum)
- On peut remplacer $\phi \in \mathcal{C}^2$ par $\phi \in \mathcal{C}^k$, $\forall k \geq 2$ pour les équations du deuxième ordre, et par $\phi \in \mathcal{C}^1$ pour les équations du premier ordre.

1.2 Propriété des solutions continues

✦ Définition: Sous et sur-différentiel

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. On appelle sur-différentiel d'ordre 2 de u en \bar{x} , noté $D^{2+}(\bar{x})$ l'ensemble convexe constitué des couples $(p, M) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ tel que :

$$\forall x \in \Omega, u(x) \leq u(\bar{x}) + p(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}M(x - \bar{x}).(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2)$$

On appelle sous-différentiel d'ordre 2 de u en \bar{x} , noté $D^{2-}(\bar{x})$ l'ensemble convexe constitué des couples $(p, M) \in \mathbb{R}^N \times S^N$ tel que :

$$\forall x \in \Omega, u(x) \geq u(\bar{x}) + p(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}M(x - \bar{x}).(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2)$$

ℹ Remarque:

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$:

$$D^{2+}u(\bar{x}) = \{(Du(\bar{x}), M); M \geq D^2u(\bar{x})\}$$

$$D^{2-}u(\bar{x}) = \{(Du(\bar{x}), M); M \leq D^2u(\bar{x})\}$$

⇒ *Théorème:*

1. $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est sous-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in D^{2+}(\bar{x})$, on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), p, M) \leq 0$$

2. $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est sur-solution de (EDP) si et seulement si $\forall (p, M) \in D^{2-}(\bar{x})$, on a :

$$F(\bar{x}, u(\bar{x}), p, M) \geq 0$$

⇒ *Corollaire:*

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et vérifie (EDP) au sens classique alors u est solution de viscosité
2. Si $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est solution de (EDP) et si u est deux fois différentiable en \bar{x} , alors $F(\bar{x}, u(\bar{x}), Du(\bar{x}), D^2u(\bar{x})) = 0$

¶ *Proposition:*

Si u sous-solution de (EDP), alors $v = -u$ est sur-solution de

$$-F(x, -v, -Dv, -D^2v) = 0$$

⇒ *Théorème: Résultat de stabilité*

On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, u_ε est solution de

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où F_ε est un opérateur continue et elliptique.

Si $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$, dans le sens où pour tout compact $K \subset \Omega$, $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(K)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

et si $F_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F$ uniformément sur les compacts

alors u est solution de $F(x, u, Du, D^2u) = 0$.

Utilisation du théorème

1. On montre que u_ε est localement borné dans L^∞ uniformément en ε
2. On montre que u_ε est localement uniformément holderienne ou lipschitzienne
3. On utilise le théorème d'Ascoli et le procédé d'extraction diagonal pour construire une fonction u tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ (à une sous-suite près)
4. On utilise le résultat de stabilité pour montrer que u est solution de (EDP).

1.3 Solutions discontinues

1.3.1 Limite sup/Limite inf

On prend X un espace topologique séparé. Soit $A \subset X$, $x \in \overline{A}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

✦ Définition: Limsup/Liminf

On définit la limite supérieure de f en x par :

$$\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \inf_{V \in V(x)} \sup_{y \in V} f(y)$$

On définit la limite inférieure de f en x par :

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \sup_{V \in V(x)} \inf_{y \in V} f(y)$$

ℹ Remarque:

- \limsup et \liminf sont toujours définies (à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)
- $\liminf \leq \limsup$
- $x \in A$, $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x) \leq \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$
- $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$ si et seulement si $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ existe.
- $\liminf(-f) = -\limsup f$

✦ Définition: fonction semi-continue

On dit que $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est

- semi-continue inférieurement (sci) en x si :

$$\forall x_n \rightarrow x, \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x)$$

- semi-continue supérieurement (scs) en x si :

$$\forall x_n \rightarrow x, \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x)$$

ℹ Proposition:

f est sci si et seulement si $\text{epi}(f) = \{(\lambda, x); \lambda \geq f(x)\}$ est fermé

Propriété:

- la somme, le sup, l'inf de deux fonctions scs est scs
- le sup d'une famille de fcts sci est sci

1.3.2 Enveloppe semi-continue

Définition: Enveloppe semi-continue

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle enveloppe semi-continue supérieure de f , notée f^* , la fonction définie par : $f^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$

On appelle enveloppe semi-continue inférieure de f , notée f_* , la fonction définie par : $f_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$

Proposition:

f^* est la plus petite fonction scs plus grande que f .

f_* est la plus grande fonction sci plus petite que f .

Théorème: Minimisation des fonctions sci

Soit X un espace compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sci. Alors f atteint son minimum sur X .

Définition: Semi-limites relaxées

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonction, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la semi-limite relaxée supérieure de (f_i) quand $i \rightarrow +\infty$ par :

$$\bar{f}(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \limsup_{y \rightarrow x} f_i(y) \text{ (scs)}$$

On définit la semi-limite relaxée inférieure de (f_i) quand $i \rightarrow +\infty$ par :

$$\underline{f}(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow x} f_i(y) \text{ (sci)}$$

Théorème:

Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions, $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ et X compact.

Alors $\underline{f} = \bar{f}$ dans \mathbb{R} si et seulement si f_i converge uniformément sur X quand $i \rightarrow +\infty$ vers une fonction continue f .

De plus, $f = \bar{f} = \underline{f}$.

1.3.3 Solution de viscosité discontinues

✦ Définition: Solutions de viscosité discontinues

On dit que u scs est sous-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un maximum en x , on a :

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0$$

On dit que u sci est sur-solution de (EDP) si $\forall \phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tel que $u - \phi$ atteint un minimum en x , on a :

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \geq 0$$

Une fonction u localement bornée est solution de viscosité de (EDP) si u^* est sous-solution et u_* est sur-solution.

ℹ Proposition:

Si (EDP) vérifie le principe de comparaison suivant :

(PC) Si u scs est sous-solution de (EDP), si v sci est sur-solution, et si $u \leq g \leq v$ sur $\partial\Omega$ ($g \in \mathcal{C}^0(\Omega)$), alors $u \leq v$ dans Ω

Alors il existe au plus une solution de (EDP) vérifiant $u = g$ sur $\partial\Omega$ et elle est continue.

ℹ Remarque:

Comme pour les solutions continues, on peut définir les sous- et sur-solutions en utilisant les sous- et sur-différentiels (qui sont définis de la même manière pour une fonction scs et sci).

✦ Définition:

Le sur-différentiel limite d'ordre 2 de u scs en x , noté $\bar{D}^{2+}u(x)$ est défini par :

$$\bar{D}^{2+}u(x) = \{(p, M); \exists(p_n, x_n, M_n); (p_n, M_n) \in D^{2+}u(x_n) \text{ et } p_n \rightarrow p, M_n \rightarrow M, x_n \rightarrow x, u(x_n) \rightarrow u(x)\}$$

Le sous-différentiel limite d'ordre 2 de u sci en x , noté $\bar{D}^{2-}u(x)$ est défini par :

$$\bar{D}^{2-}u(x) = \{(p, M); \exists(p_n, x_n, M_n); (p_n, M_n) \in D^{2-}u(x_n) \text{ et } p_n \rightarrow p, M_n \rightarrow M, x_n \rightarrow x, u(x_n) \rightarrow u(x)\}$$

∞ Théorème:

u scs est sous-solution de (EDP) si et seulement si $\forall(p, M) \in \bar{D}^{2+}u(x)$, on a $F(x, u(x), p, M) \leq 0$
 u sci est sur-solution de (EDP) si et seulement si $\forall(p, M) \in \bar{D}^{2-}u(x)$, on a $F(x, u(x), p, M) \geq 0$

2 Existence par la méthode de Perron

On note

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{EDP-CB})$$

✦ *Définition:*

On dit que \underline{u} scs est sous-solution barrière de (EDP-CB) si :

1. \underline{u} est sous-solution de (EDP) dans Ω
2. \underline{u} vérifie la condition au bord continuellement : $\forall x \in \partial\Omega, \lim_{y \rightarrow x} \underline{u}(y) = g(x)$

On dit que \tilde{u} sci est sur-solution barrière de (EDP-CB) si :

1. \tilde{u} est sur-solution de (EDP) dans Ω
2. \tilde{u} vérifie la condition au bord continuellement : $\forall x \in \partial\Omega, \lim_{y \rightarrow x} \tilde{u}(y) = g(x)$

⇒ *Théorème:*

On suppose qu'il existe une sous-solution barrière \underline{u} et une sur-solution \tilde{u} de (EDP-CB). Alors il existe une solution discontinue u de (EDP-CB). De plus

$$\underline{u} \leq u \leq \tilde{u}$$

3 Stabilité

On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère le problème :

$$F_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), Du_\varepsilon(x), D^2u_\varepsilon(x)) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{EDP}_\varepsilon)$$

où F_ε est propre et continue (par rapport à toutes les variables).

⇒ *Théorème:*

On suppose que

- $F_\varepsilon \rightarrow F$ uniformément sur les compacts de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N$
- La famille $\{u_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ est équibornée sur les compacts de $\bar{\Omega}$

Si u_ε est sous-solution de (EDP_ε), alors $\bar{u}, \bar{u}(x) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x} u_\varepsilon(y)$ est sous-solution de (EDP).

Si u_ε est sur-solution de (EDP_ε), alors $\underline{u}, \underline{u}(x) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0, y \rightarrow x} u_\varepsilon(y)$ est sur-solution de (EDP).

⇒ *Corollaire: Convergence a priori*

On suppose que $u_\varepsilon \rightarrow u$ et $F_\varepsilon \rightarrow F$ sur les compacts. Alors u solution de (EDP).

⇒ Corollaire: Convergence a posteriori

On suppose que (EDP) satisfait un principe de comparaison. Alors u_ε converge uniformément sur les compacts vers l'unique solution de (EDP).

3.1 Illustration : méthode de viscosité évanescence

On regarde le problème :

$$\begin{cases} u + F(Du, D^2u) &= f & \text{sur } \Omega \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose

- F continue et propre
- Ω ouvert régulier (au moins \mathcal{C}^2)
- \exists une sous-solution barrière \underline{u} de :

$$\underline{u} + F(D\underline{u}, D^2\underline{u}) \leq f - 1, \quad \underline{u} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

- \exists une sur-solution barrière \tilde{u} de :

$$\tilde{u} + F(D\tilde{u}, D^2\tilde{u}) \geq f + 1, \quad \tilde{u} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

Pour $\varepsilon > 0$, on considère le problème :

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + F(Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) &= f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet un principe de comparaison.

On a donc l'existence et l'unicité de u_ε pour les barrière, $u_\varepsilon \rightarrow u$.

4 Principe de comparaison

4.1 Principe pour les équations du 1er ordre

$$\begin{cases} F(x, u, Du) &= 0 & \text{sur } \Omega \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

4.1.1 Cas où Ω borné

On a besoin des hypothèses suivantes :

(M) : monotonie : $\exists \gamma > 0 ; \forall x \in \Omega, \forall r, s \in \mathbb{R}, r \geq s, \forall p \in \mathbb{R}^N :$

$$F(x, r, p) - F(x, s, p) \geq \gamma(r - s)$$

(CS1-1) : $\forall R > 0, \forall r \in [-R, R], \forall x, y \in \Omega, \forall p \in \mathbb{R}^N :$

$$|F(x, r, p) - F(y, r, p)| \leq w_R(|x - y|(1 + |p|))$$

où w_R est un module de continuité, ie une fonction continue positive telle que $w_R(0) = 0$.

☕ Exemple :

- Opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}u = b(x)Du + c(x)u + f(x)$$

avec b, c et $f \in \mathcal{C}^0$, vérifie :

- **Cas où Ω borné** si $c(x) \geq \delta > 0$
- **Cas où Ω borné** si $b \in W^{1,\infty}$
- Opérateur complètement non linéaire :

$$\mathcal{L}u = \sup_{\alpha} \inf_{\beta} \mathcal{L}^{\alpha,\beta} u \text{ avec } \mathcal{L}^{\alpha,\beta} u = b^{\alpha,\beta}(x)Du + c^{\alpha,\beta}(x)u + f^{\alpha,\beta}$$

avec $b^{\alpha,\beta}, c^{\alpha,\beta}$ et $f^{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^0$ uniformément, vérifie :

- **Cas où Ω borné** si $c^{\alpha,\beta}(x) \geq \delta > 0$
- **Cas où Ω borné** si $b^{\alpha,\beta} \in W^{1,\infty}$ uniformément

⇒ Théorème: principe de comparaison

On suppose Ω borné, $F \in \mathcal{C}^0$ vérifie **Cas où Ω borné**, **Cas où Ω borné**, $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. Soit u scs une sous-solution de **(EDP-CB)** d'ordre 1 et v sci sur solution. Alors $u \leq v$ dans $\bar{\Omega}$.

4.1.2 Cas où Ω non borné

La condition aux bords doit être remplacée par une condition sur la croissance à l'infini.

On rajoute donc l'hypothèse suivante :

(CS1-2) : $\exists L > 0$; $\forall x \in \Omega, \forall r \in \mathbb{R}, \forall p, q \in \mathbb{R}^N$, on a

$$|F(x, r, p) - F(x, r, q)| \leq L|p - q|$$

⇒ Théorème: Principe de comparaison

On suppose F continue et satisfaisant **Cas où Ω borné**, **Cas où Ω borné** et **Cas où Ω non borné**, et $g \in \mathcal{C}^0$. Soit u scs sous-solution bornée et v sci sur-solution bornée.

Alors $u \leq v$ dans $\bar{\Omega}$.

5 Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2

On reprend **(EDP-CB)** avec Ω un ouvert borné.

Les hypothèses sont les suivantes :

(M) : monotonie : $\exists \gamma > 0$; $\forall x \in \Omega, \forall r, s \in \mathbb{R}, r \geq s, \forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \in S^N$:

$$F(x, r, p, X) - F(x, s, p, X) \geq \gamma(r - s)$$

(CS2) : $\forall R > 0, \exists w_R$ un module de continuité tel que : $\forall r \in [-R, R], \forall x, y \in \Omega, \forall \alpha > 0, \forall X, Y \in S^N$ tels que :

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I_N & -I_N \\ -I_N & I_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

alors

$$|F(x, r, \alpha(x - y), Y) - F(y, r, \alpha(x - y), X)| \leq w_R (\alpha|x - y|^2 + |x - y|)$$

∞▷ *Théorème: Principe de comparaison*

On suppose Ω borné, $g \in \mathcal{C}^0$, F continue vérifiant Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2 et Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2.

Soient u scs sous-solution et v sci sur-solution. Alors $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

6 Extension au cas parabolique

$$\begin{cases} u_t + F(x, t, u, Du, D^2u) &= 0 & \text{sur } [0, T] \times \Omega \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{sur } \Omega \\ u(t, x) &= g(t, x) & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{EDP-P})$$

Les hypothèses sont les suivantes :

(M-P) : monotonie : $\exists \gamma \in \mathbb{R} ; \forall x \in \Omega, \forall r, s \in \mathbb{R}, r \geq s, \forall t \in [0, T], \forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \in S^N :$

$$F(x, r, p, X) - F(x, s, p, X) \geq \gamma(r - s)$$

(CS2-P) : $\forall t \in [0, T], F(\bullet, t, \bullet, \bullet, \bullet)$ vérifie **Principe de comparaison pour les équations d'ordre 2** uniformément en t (w_R ne dépend pas de t).

✦ *Définition: Sous-différentiel parabolique*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^- u(x, t) &= \left\{ (a, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N ; \forall y \in \Omega, \forall s \in [0, T], \right. \\ &\quad \left. u(y, s) \geq u(x, t) + a(s - t) + p(y - x) + \frac{1}{2} X(y - x)(y - x) + o(|t - s| + |y - x|^2) \right\} \end{aligned}$$

On définit de la même manière $\mathcal{P}^+ u(x, t), \overline{\mathcal{P}}^- u(x, t), \overline{\mathcal{P}}^+ u(x, t)$

✦ *Définition:*

\underline{u} est sous-solution barrière de (EDP-P) si :

- \underline{u} est sous-solution de l'équation
- $\underline{u} = g$ continuellement sur $\partial\Omega \times [0, T]$
- $\underline{u}(0, x) \leq u_0(x)$ dans Ω

\tilde{u} est sur-solution barrière de (EDP-P) si :

- \tilde{u} est sur-solution de l'équation
- $\tilde{u} = g$ continuellement sur $\partial\Omega \times [0, T]$
- $\tilde{u}(0, x) \geq u_0(x)$ dans Ω

⇒ *Théorème:*

Soit Ω un ouvert borné, $g \in \mathcal{C}^0, u_0 \in \mathcal{C}^0$. On suppose qu'il existe une sous et une sur-solution barrière et que F est continue vérifiant **Extension au cas parabolique** et **Extension au cas parabolique**.

Alors il existe une solution u telle que $\underline{u} \leq u \leq \tilde{u}$.

De plus, on a un principe de comparaison : u scs sous-solution et v sci sur-solution, alors $u \leq v$ dans $\Omega \times [0, T]$.

6.1 Construction de \tilde{u}

$$\tilde{u}_1 = u_0(x) + ct$$

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_1)_t + F(x, t, \tilde{u}_1, D\tilde{u}_1, D^2\tilde{u}_1) &= c + F(x, t, u_0 + ct, Du_0, D^2u_0) \\ &\geq 0 \text{ pour } C \geq \sup_{x,t} |F(x, t, u_0(x) + ct, Du_0, D^2u_0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x, 0) &= u_0(x) \\ x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_1(x, 0) = u_0(x) = g(x, 0)$$

$$\text{Si } c \geq \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_\infty$$

$$\tilde{u}_1(x, t) \geq g(x, t)$$

- On pose $\tilde{u} = \min(\tilde{u}, \tilde{u}_1)$
- \tilde{u} sur-solution de (EDP-P)
 - $\tilde{u}(x, 0) = u_0(x)$
 - $\tilde{u}(x, 0) = g(x, t) \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$

Troisième partie

Applications

1 Contrôle optimal déterministe

1.1 Principe de programmation dynamique

On fixe $T > 0$.

On considère

$$\begin{cases} y'(s) &= f(y(s), \alpha(s)), \quad s \in [0, T] \\ y(0) &= x \end{cases}$$

f continue, α mesurable à valeurs dans A . On note \mathcal{A} l'ensemble des applications mesurables de $[0, T] \rightarrow A$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa première variable et bornée par rapport à la deuxième : $\exists C > 0$

$$|f(y, \alpha) - f(z, \alpha)| \leq C|y - z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n$$

$$|f(y, \alpha)| \leq C \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$

On cherche à minimiser le coût :

$$J(t, x, \alpha) = \int_0^t L(y(s), \alpha(s)) ds + h(y(t))$$

qui vérifie :

$$\begin{aligned} |L(y, \alpha) - L(z, \alpha)| &\leq C|y - z| \\ |L(y, \alpha)| &\leq C \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n \\ |h(y) - h(z)| &\leq C|y - z| \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \\ |h(y)| &\leq C \end{aligned}$$

On cherche à minimiser le coût :

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(t, x, \alpha) = u(t, x)$$

⇒ *Lemme:*

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$.

Alors $\exists! y_\alpha$ solution de

$$\begin{cases} y'(s) &= f(y(s), \alpha(s)), & s \in [0, T] \\ y(0) &= x \end{cases}$$

De plus, on a :

$$|y(s)| \leq |x| + cs \text{ avec } c = \sup_{\{x, \alpha\} \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{A}} |f(x, \alpha)|$$

Si \tilde{y} est une solution avec $\tilde{y}(0) = \tilde{x}$ alors

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \leq |x - \tilde{x}| e^{Ls}$$

∞ Théorème: Principe de programmation dynamique

Soit $s \in [0, t]$, on a :

$$u(t, x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}[0, s]} \left\{ \int_0^s L(y(u), \alpha(u)) du + u(t - s, y(s)) \right\}$$

¶ Proposition: Régularité de la fonction valeur

u bornée et lipschitzienne

∞ Théorème:

u est l'unique solution de :

$$\begin{cases} u_t + H(x, Du) &= 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) &= h(x) \end{cases} \quad (\text{HJB})$$

avec $H(x, p) = \sup_{\alpha} \{-p \cdot f(x, \alpha) - L(x, \alpha)\}$

1.2 Contrôle en feedback

On va construire des contrôles $U : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow A$ qui dépendent de la trajectoire.

✦ Définition:

$U(\bullet, \bullet)$ est un contrôle en feedback optimal si $\alpha(t) = U(t, y(t))$ avec y solution de

$$\begin{cases} y'(s) &= f(y(s), \alpha(s)), & s \in [0, T] \\ y(0) &= x \end{cases}$$

est optimal.

⇒ **Théorème:**

Soit U solution de (HJB) qu'on suppose \mathcal{C}^1 .

On suppose que $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$, $\exists U(t, x) \in A$ solution de :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{-L(x, \alpha) - \nabla U(t, x) \cdot f(x, \alpha)\}$$

Alors U est un contrôle optimal en feedback.

2 Introduction à l'homogénéisation au 1^{er} ordre

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{\varepsilon}, x, u^\varepsilon, Du^\varepsilon\right) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (EDP_\varepsilon)$$

On suppose :

- F continue
- $F(\bullet, x, r, p)$ est Y -périodique où $Y = [0, 1]^N$
- $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F(y, x, r, p) = +\infty$ uniformément en $L \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega, \forall r \in [-L, L]$
- $\exists \mu > 0; \forall y, x, r, s, p$ avec $r \leq s$:

$$F(y, x, r, p) - F(y, x, s, p) \leq \mu(r - s)$$

- $\exists u^\varepsilon \in \mathcal{C}^0$ solution de (EDP_ε)
- F lipschitzienne

On va montrer que $u^\varepsilon \rightarrow u^0$ solution de :

$$\begin{cases} \bar{F}(x, u^0, Du^0) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

\bar{F} est appelé l'hamiltonien effectif.

On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} F(y, x, u, p + D_y v) = 0 & y \in \mathbb{R}^N \\ v \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (EC)$$

¶ **Proposition:**

Soit $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

$\exists \lambda = \bar{F}(x, u, p)$ tel que $\exists v$ solution de (EC).

Remarque : v n'est pas unique. On l'appelle le correcteur.

⇒ **Lemme:**

1. $\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \bar{F}(x, u, p) = +\infty$ uniformément dans $\Omega \times \overline{B(0, L)}$
2. $r \mapsto F(x, r, p) - \mu r$ est croissante $\forall x, p$
3. \bar{F} est lipschitzienne sur $\Omega \times B(0, L) \times B(0, L) \forall L > 0$

On a ainsi un principe de comparaison à la limite.

⇔ *Théorème:*

u est l'unique solution de :

$$\begin{cases} \overline{F}(x, u^0, Du^0) &= 0 & \text{sur } \Omega \\ u^0 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$