

Soient  $H$  un sous-espace borné de  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  pour lequel 0 est un point d'accumulation,  $\tilde{\Omega}$  un polygone ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$  et, pour tout  $h \in H$ , on note  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  une triangulation sur  $\tilde{\Omega}$  au moyen d'éléments  $K$  dont le diamètre  $h_K$  sont inférieurs ou égal à  $h$  et soit  $\tilde{V}_h$  un espace d'éléments finis construit sur  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  tel que :

$$\tilde{V}_h \text{ est un sous-espace de dimension fini de } H^m(\tilde{\Omega}) \cap C^k(\tilde{\Omega}) \quad (1)$$

(voir fig. 1)

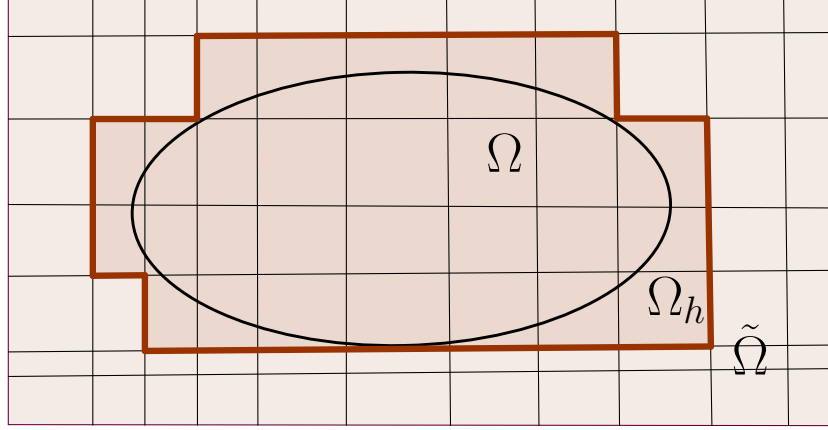


FIGURE 1 – Définition des ensembles  $\Omega$ ,  $\tilde{\Omega}$  et  $\Omega_h$

De plus, pour étudier la convergence de l'approximation, on suppose qu'il existe une famille d'opérateurs linéaires continus  $(\tilde{\Pi}_h)_{h \in H}$  de  $H^m(\Omega)$  dans  $\tilde{V}_h$  satisfaisant :

$$\exists C > 0; \forall h \in H, \forall l = 0, \dots, m-1, \forall v \in H^m(\tilde{\Omega}), \left| v - \tilde{\Pi}_h v \right|_{l, \tilde{\Omega}} \leq C h^{m-1} |v|_{m, \tilde{\Omega}} \quad (2)$$

$$\forall v \in H^m(\tilde{\Omega}), \lim_{h \rightarrow 0} \left| v - \tilde{\Pi}_h v \right|_{m, \tilde{\Omega}} = 0 \quad (3)$$

Ces conditions n'ont pas besoin de l'hypothèse classique de régularité de la méthode des éléments finis  $H^m(\tilde{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\tilde{\Omega})$ , où  $s$  est l'ordre maximal des dérivés apparaissant dans la définition des degrés de liberté de l'élément fini générique de  $(\tilde{V}_h)_{h \in H}$ , mais on assume que :

$$\text{la famille } (\tilde{\mathcal{T}}_h)_{h \in H} \text{ est régulière} \quad (4)$$

Comme expliqué dans [2], une famille est dite régulière si, en notant  $h_K$  le diamètre de  $K$  et  $\rho_K$  le supremum du diamètre des sphères inscrites dans  $K$  :

$$\exists \alpha > 0; \forall K \in \tilde{\mathcal{T}}_h, h_K \leq \alpha \rho_K$$

De plus, les conditions (2)-(3) demandent l'hypothèse suivante : l'élément fini générique  $(K, P_K, \Sigma_K)$  de la famille  $(\tilde{V}_h)_{h \in H}$  satisfait l'équation  $P_m(K) \subset P_K$  où  $P_n(K)$  définit l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  définis sur  $K$ .

À présent, pour tout  $h \in H$ , on considère le sous-ensemble  $\Omega_h$  (voir figure 1) définie par :

$$\Omega_h \text{ est l'intérieur de l'union des rectangles } K \text{ de } \tilde{\mathcal{T}}_h \text{ tel que } K \cap \Omega \neq \emptyset \quad (5)$$

Il est clair que la famille  $(\Omega_h)_{h \in H}$  satisfait les relations (en notant  $\mu$  une mesure sur  $\tilde{\Omega}$ ) :

$$\forall h \in H, \Omega \subset \Omega_h \subset \tilde{\Omega} \quad (6)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\Omega_h \setminus \tilde{\Omega}) = 0 \quad (7)$$

Pour tout  $h \in H$ , on définit :

$$V_h = \{\phi|_{\Omega_h} | \phi \in \tilde{V}_h\} \quad (8)$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère le problème de minimisation suivant : trouver  $\sigma_{\varepsilon,h}^\eta \in V_h$  satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h, \quad J_{\varepsilon,h}^\eta(\sigma_{\varepsilon,h}^\eta) \leq J_{\varepsilon,h}^\eta(v_h) \quad (9)$$

où  $J_{\varepsilon,h}^\eta$  est la fonctionnelle définie par :

$$J_{\varepsilon,h}^\eta = \ell^\eta[(v_h - f)^2] + \varepsilon |v_h|_{m,\Omega_h}^2$$

On considère ensuite le problème variationnel suivant : trouver  $\sigma_{\varepsilon,h}^\eta \in V_h$  satisfaisant :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \ell^\eta(\sigma_{\varepsilon,h}^\eta v_h) + \varepsilon (\sigma_{\varepsilon,h}^\eta, v_h) = \ell^\eta(f v_h) \quad (10)$$

où  $(u, v)_{m,\Omega_h} = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_h} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx$ .

### **Théorème 0.0.1 :**

On suppose que  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $m$  et  $f$  sont définis comme dans la section précédente et que les hypothèses (??), (1), (5) et (8) sont vérifiées. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout  $h \in H$ , il existe  $\eta_0 > 0$  tel que pour tout  $\eta \in E$ ,  $\eta \leq \eta_0$ , les problèmes (9) et (10) admettent une même unique solution.

### **Démonstration :**

En utilisant un argument de compacité (voir [3]), on montre, sous la relation :

$$\forall p \in P_{m-1}(\tilde{\Omega}_h), \quad p|_\omega = 0 \Rightarrow p \equiv 0$$

que la fonction  $[\|\bullet\|]_h$  définie sur  $H^m(\Omega_h)$  par :

$$[\|v\|]_h = (\|v\|_{0,\omega}^2 + |v|_{m,\Omega_h}^2)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H^m(\Omega_h)$  équivalente à la norme usuelle

$$\|v\|_{m,\Omega_h} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_h} (\partial^\alpha v)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En conséquence de la définition de  $\ell^\eta$ , la forme bilinéaire symétrique :

$$(u_h, v_h) \mapsto \ell^\eta(u_h v_h) + \varepsilon (u_h, v_h)_{m,\Omega_h}$$

est continue sur  $V_h \times V_h$ . Ainsi, la forme est  $V_h$ -elliptique pour tout  $\eta$  assez petit car en utilisant (??), on a :

$$\begin{aligned} \ell^\eta(v_h^2) + \varepsilon |v_h|_{m,\Omega_h}^2 &\geq \|v_h\|_{0,\omega}^2 - C\eta^t \|v_h\|_{m,\Omega}^2 + \varepsilon |v_h|_{m,\Omega_h}^2 \\ &\geq \min(1, \varepsilon) \|v_h\|_h^2 - C\eta^t \|v_h\|_{m,\Omega}^2 \\ &\geq (C' \min(1, \varepsilon) - C\eta^t) \|v_h\|_{m,\Omega_h}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

où  $C'$  est une constante liée à l'équivalence des normes.

Supposons (voir [1] pour plus de détail) qu'il existe  $\beta > 0$  tel que,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall \eta \in E$ ,  $\frac{\eta^t}{\min(1, \varepsilon)} < \beta$ . En prenant  $\beta = \frac{C'}{C}$ , il existe  $C'' > 0$  tel que

$$\ell^\eta(v_h^2) + \varepsilon |v_h|_{m,\Omega_h}^2 \geq C'' \|v_h\|_{m,\Omega_h}^2$$

La forme est donc bilinéaire symétrique  $V_h$ -elliptique : le théorème de Lax-Milgram s'applique donc, et l'unicité de la solution est assurée.

### **Remarque :**

En notant  $M$  la dimension de  $V_h$  et  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq M}$  une base de  $V_h$ , on pose :

$$\sigma_{\varepsilon,h}^\eta = \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi_j$$

avec  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq M$ . On introduit les matrices :

$$\mathcal{A} = (\ell^\eta(\phi_i \phi_j))_{1 \leq i, j \leq M}$$

$$\mathcal{R} = ((\phi_i, \phi_j)_{m, \Omega_h})_{1 \leq i, j \leq M}$$

$$\mathcal{F} = (\ell^\eta(f \phi_i))_{1 \leq i \leq M}$$

On voit que (10) est équivalent au problème :

$$\text{Trouver } (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M \text{ solution de } (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{R})\alpha = \mathcal{F}$$

On peut enfin prendre comme approximation de  $f$  la fonction  $\Phi = \sigma_{\varepsilon, h}^\eta|_\Omega$  qui, en utilisant les hypothèses (1), (5) et (8), appartient à  $H^m(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$ .

On cherche à savoir en quel sens  $\Phi$  est une approximation de  $f$ .

**Théorème 0.0.2 :**

Sous les mêmes hypothèses, si on suppose de plus que (2)-(3) est vérifié, alors la solution  $\sigma_{\varepsilon, h}^\eta$  de (9) et (10) satifont :

1.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \frac{\eta^t}{\varepsilon} \rightarrow 0}} \|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma\|_{m, \Omega} = 0$$

où  $\sigma$  est la solution de (??) et où  $\beta$  a été introduit dans le théorème précédent

2. Il existe une constante positive  $C$  telle que :

$$\|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - f\|_{0, \omega}^2 \leq C (h^{2m} + \eta^t o(1) + \varepsilon) \quad \text{où } \varepsilon \rightarrow 0, \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \rightarrow 0, \frac{\eta^t}{\varepsilon} < \beta$$

**Démonstration :**

Soit  $\sigma$  l'unique solution de (??). On a  $\sigma|_\omega = f|_\omega$  et

$$\|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - f\|_{0, \omega}^2 = \|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma\|_{0, \omega}^2$$

On a, en utilisant (??) :

$$\|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - f\|_{0, \omega}^2 \leq \ell^\eta \left( (\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma)^2 \right) + C\eta^t \|\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma\|_{m, \Omega}^2 \quad (12)$$

De plus, de (10), on a :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \ell^\eta \left( (\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma)^2 \right) + \varepsilon |\sigma_{\varepsilon, h}^\eta|_{m, \Omega_h}^2 \leq \ell^\eta \left( (v_h - \sigma)^2 \right) + \varepsilon |v_h|_{m, \Omega_h}^2 \quad (13)$$

Soit  $\tilde{\sigma}$  un prolongement  $\mathcal{C}^m$  de  $\sigma$  sur  $\tilde{\Omega}$ , en prenant (via (2))  $v_h = \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \in H^m(\tilde{\Omega})$ , on obtient :

$$\ell^\eta \left( (\sigma_{\varepsilon, h}^\eta - \sigma)^2 \right) \leq \ell^\eta \left( (\tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma)^2 \right) + \varepsilon |\tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma}|_{m, \Omega_h}^2 \quad (14)$$

Cependant, par (3), il existe  $h_0 \in H$  tel que :

$$\forall h \leq h_0, \quad \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \right|_{m, \Omega_h}^2 \leq \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \right|_{m, \tilde{\Omega}}^2 \leq C |\tilde{\sigma}|_{m, \tilde{\Omega}}^2 \leq C \|\sigma\|_{m, \Omega}^2 \quad (15)$$

De plus, en utilisant (??), on a :

$$\ell^\eta \left( (\tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma)^2 \right) \leq \left\| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma \right\|_{0, \omega}^2 + C\eta^t \left\| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma \right\|_{m, \Omega}^2$$

Et avec (2) :

$$\left\| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma \right\|_{0, \omega} \leq \left\| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma} \right\|_{0, \tilde{\Omega}} \leq Ch^m |\tilde{\sigma}|_{m, \tilde{\Omega}}$$

D'où, en utilisant (2) :

$$\ell^\eta \left( (\tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} - \sigma)^2 \right) \leq Ch^{2m} |\tilde{\sigma}|_{m, \tilde{\Omega}}^2 + C\eta^t o(1) \quad h \rightarrow 0 \quad (16)$$

De (14) et (16), on déduit que :

$$\ell^\eta \left( \left( \sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma \right)^2 \right) \leq Ch^{2m} |\tilde{\sigma}|_{m,\tilde{\Omega}} + C\eta^t o(1) + \varepsilon \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_h}^2 \quad h \rightarrow 0 \quad (17)$$

Et donc, en utilisant (12) :

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma\|_{0,\omega}^2 &\leq Ch^{2m} |\tilde{\sigma}|_{m,\tilde{\Omega}} + C\eta^t o(1) + \varepsilon \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_h}^2 + C\eta^t \|\sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma\|_{m,\Omega}^2 \\ &\leq C(h^{2m} + \eta^t o(1)) + \varepsilon \left| \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_h}^2 + C\eta^t \|\sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma\|_{m,\Omega}^2 \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (18)$$

De même, les relations (13) avec  $v_h = \tilde{\Pi}_h \tilde{\sigma}$ , (15) et (16) implique que :

$$|\sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma|_{m,\Omega}^2 \leq C \left( \frac{h^{2m}}{\varepsilon} + \frac{\eta^t}{\varepsilon} o(1) + \|\sigma\|_{m,\Omega}^2 \right) \quad h \rightarrow 0 \quad (19)$$

Finalement, en utilisant (18) et (19), on obtient :

$$\left\| \sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma \right\|_{0,\omega}^2 \leq C(\varepsilon + 1) \left( \frac{h^{2m}}{\varepsilon} + \frac{\eta^t}{\varepsilon} o(1) + \|\sigma\|_{m,\Omega}^2 \right) + C\eta^t \left\| \sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma \right\|_{m,\Omega}^2 \quad h \rightarrow 0 \quad (20)$$

où  $\|\bullet\|$  est défini dans (??). Puisque cette norme est équivalente à la norme usuelle dans  $H^m(\Omega)$ , on déduit de (20) que :

$$(1 - C\eta^t) \left\| \sigma_{\varepsilon,h}^\eta - \sigma \right\|_{m,\Omega}^2 \leq C(\varepsilon + 1) \left( \frac{h^{2m}}{\varepsilon} + \frac{\eta^t}{\varepsilon} o(1) + \|\sigma\|_{m,\Omega}^2 \right) \quad h \rightarrow 0$$

Soit  $\eta'$  une constante positive inférieure à  $(\frac{1}{C})^{\frac{1}{t}}$ . Ainsi, la famille  $(\sigma_{\varepsilon,h}^\eta)_{\eta,\varepsilon,h}$  est bornée dans  $H^m(\Omega)$  si :

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \frac{h^{2m}}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \eta \leq \eta' \quad \frac{\eta^t}{\varepsilon} \leq \beta \quad (21)$$

Cela implique donc que  $H^m(\Omega)$  contient une suite  $(\sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  extraite de la famille  $(\sigma_{\varepsilon,h}^\eta)_{\eta,\varepsilon,h}$  et une fonction  $\sigma^* \in H^m(\Omega)$  tel que :

$$\sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} \rightharpoonup \sigma^* \quad \text{dans } H^m(\Omega) \quad (22)$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n^{2m}}{\varepsilon_n} = 0, \quad (\eta_n) \subset (0, \eta'), \quad \left( \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} \right) \subset (0, \beta)$$

On doit maintenant montrer que  $\sigma^* = \sigma$ . En considérant (17) et (19) appliqué à la suite  $(\sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  :

$$\exists C > 0$$

$$\ell^{\eta_n} \left( \left( \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} - \sigma \right)^2 \right) \leq Ch_n^{2m} |\tilde{\sigma}|_{m,\tilde{\Omega}} + C\eta_n^t o(1) + \varepsilon_n \left| \tilde{\Pi}_{h_n} \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_{h_n}}^2 \quad n \rightarrow +\infty \quad (23)$$

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} \right|_{m,\Omega}^2 \leq C \left( \frac{h_n^{2m}}{\varepsilon_n} + \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} o(1) \right) + \left| \tilde{\Pi}_{h_n} \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_{h_n}}^2 \quad n \rightarrow +\infty$$

Mais, pour  $n$  assez grand, on a, sachant que  $\left| \tilde{\Pi}_{h_n} \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_{h_n}} \rightarrow |\sigma|_{m,\Omega}$  :

$$\left| \tilde{\Pi}_{h_n} \tilde{\sigma} \right|_{m,\Omega_{h_n}}^2 \leq |\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 \quad \mu > 0 \text{ arbitrairement petit}$$

Et il vient :

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} \right|_{m,\Omega}^2 \leq C \left( \frac{h_n^{2m}}{\varepsilon_n} + \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} o(1) \right) + |\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 \quad n \rightarrow +\infty \quad (24)$$

de (??), on a :

$$\left\| \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} - \tilde{\sigma} \right\|_{0,\omega}^2 \leq \ell^{\eta_n} \left( \left( \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} - \tilde{\sigma} \right)^2 \right) + C\eta_n^t \left\| \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} - \tilde{\sigma} \right\|_{m,\Omega}^2$$

Puis, en utilisant (23), et comme la suite  $(\sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est borné dans  $H^m(\Omega)$ , on a :

$$\left\| \sigma_{\varepsilon_n,h_n}^{\eta_n} - \tilde{\sigma} \right\|_{0,\omega}^2 \leq C\varepsilon_n \left( \frac{h_n^{2m}}{\varepsilon_n} + \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} o(1) + |\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 + \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} \right) \quad n \rightarrow +\infty \quad (25)$$

Et on a donc :

$$\begin{aligned} |\sigma^*|_{m,\Omega}^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} \right|_{m,\Omega}^2 \leq |\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 \\ \|\sigma - \sigma^*\|_{0,\omega}^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} - \bar{\sigma} \right\|_{0,\omega}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Et comme  $\mu$  est arbitrairement petit :

$$\begin{aligned} \sigma^* &\in H^m(\Omega) \\ |\sigma^*|_{m,\Omega} &\leq |\sigma|_{m,\Omega} \\ \sigma &= \sigma^* \text{ sur } \omega \end{aligned}$$

Et donc  $\sigma = \sigma^*$  dans  $H^m(\Omega)$  en considérant l'existence et l'unicité de la solution du problème (??).

On montre maintenant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} = \sigma$  dans  $H^m(\Omega)$ . Comme  $H^m(\Omega) \subseteq H^{m-1}(\Omega)$ , et vu que  $\sigma = \sigma^*$  dans  $H^m(\Omega)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} = \sigma$  dans  $H^{m-1}(\Omega)$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} - \sigma \right|_{m,\Omega}^2 \leq \left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} \right|_{m,\Omega}^2 + |\sigma|_{m,\Omega}^2 - 2 \left( \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n}, \sigma \right)_{m,\Omega}$$

Et donc, en utilisant (24), on obtient :

$$\left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} - \sigma \right|_{m,\Omega}^2 \leq C \left( \frac{h_n^{2m}}{\varepsilon_n} + \frac{\eta_n^t}{\varepsilon_n} o(1) \right) + 2|\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 - 2 \left( \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n}, \sigma \right)_{m,\Omega} \quad n \rightarrow +\infty$$

Or, comme  $\sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} \rightharpoonup \sigma^*$  dans  $H^m(\Omega)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sigma_{\varepsilon_n, h_n}^{\eta_n} - \sigma \right|_{m,\Omega}^2 \leq 2|\sigma|_{m,\Omega}^2 + \mu^2 - 2(\sigma, \sigma)_{m,\Omega} = \mu^2$$

Le résultat vient du fait que  $\mu$  est arbitrairement petit.

Pour terminer la preuve, on suppose que :

$$\lim \left\| \sigma_{\varepsilon, h}^{\eta} - \sigma \right\|_{m,\Omega}^2 \neq 0$$

avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\frac{h^{2m}}{\varepsilon} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\eta^t}{\varepsilon} < \beta$ . Il existe donc une suite  $(d'_n, \eta'_n, \varepsilon'_n, h'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h'^{2m}_n}{\varepsilon'_n} = 0$ ,  $\left( \frac{\eta'^t_n}{\varepsilon'_n} \right) \leq \beta$  satisfaisant pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left\| \sigma_{\varepsilon'_n, h'_n}^{d'_n, \eta'_n} - f \right\|_{m,\Omega} > \alpha$$

(Mais qu'est-ce que ce  $d_n \dots$  ?)

Mais une telle suite est bornée dans  $H^m(\Omega)$ , et on aboutit donc à une contradiction.

Le deuxième point est une conséquence de (18) et du premier point, en prenant en compte que  $\sigma|_{\omega} = f|_{\omega}$ .

## Références

- [1] R. Arcangéli, M.C.L. de Silanes, and J.J. Torrens. *Multidimensional Minimizing Splines : Theory and Applications*. Grenoble Sciences. Springer, 2004.
- [2] Philippe G Ciarlet and PA Raviart. General lagrange and hermite interpolation in r n with applications to finite element methods. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46(3) :177–199, 1972.
- [3] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, 1967.