

# Optimisation convexe

1<sup>er</sup> mars 2015

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>2</b>
1.1	Calcul différentiel . . . . .	2
1.2	Rappel sur les formes différentielles . . . . .	4
1.2.1	Comment définir une distribution ? . . . . .	6
1.2.2	Différentielle extérieure . . . . .	6

# Introduction

## ✧ Définition: Variété

$M$  est une variété de dimension  $n$  si :

1.  $\forall p \in M, \exists U$ , voisinage ouvert de  $p$ ,  $\exists \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme
2.  $\forall p \in U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  doit être de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$  (analytique).

On parle alors de variété de classe  $\mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  ou  $\mathcal{C}^\omega$

## ✧ Définition: Espace tangent en $p$

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On appelle espace tangent en  $p$  :

$$T_p X = \{\dot{\gamma}(0), \gamma \text{ une courbe passant par } p\}$$

## ✧ Définition: Fibré tangent

On prend une variété  $Q$  de dimension  $d$ . On appelle fibré tangent :

$$TQ = \bigcup_{q \in Q} T_q Q$$

de dimension  $2d$

## ✧ Définition: Espace cotangent

On appelle l'espace cotangent le dual d'un espace tangent :

$$T_q^* Q = (T_q Q)^*$$

## 1 Rappels

### 1.1 Calcul différentiel

## ✧ Définition: Crochet de Lie

Soit  $f, g \in V^\infty(X)$ . On définit :

$$[f, g](p) = \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_{-t}^f)_* g(p) \Big|_{t=0} = Dg(x) \cdot f(x) - DF(x) \cdot g(x)$$

**Proposition:**

$$\forall p \in X, \forall t, s \in \mathbb{R}, \gamma_s^{-g} \circ \gamma_t^{-f} \circ \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p) = p \Leftrightarrow [f, g] \equiv 0$$

**Proposition:**

1. Soit  $\gamma_t$  le flot de  $\dot{x} = f(x)$ . Alors  $\sigma_t$ , le flot de  $\dot{y} = (\phi_* f)(y)$  est :

$$\sigma_t = \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$$

2. Soient  $f, g \in V^\infty(X)$  et  $\phi$  un difféomorphisme. Alors :

$$\phi_*[f, g] = [\phi_* f, \phi_* g]$$

3.  $(\gamma_t^f)_* f = f$

**Définition: Distribution**

Une distribution sur  $X$ , une variété de dimension  $n$ , est une application  $p \in X \mapsto \mathcal{D}(p) \subset T_p X$ .  $\mathcal{D}(p)$  étant un sous-espace linéaire, une distribution est donc un champ de sous-espaces. Soient  $f_1, \dots, f_k \in V^\infty(X)$ . On pose

$$\mathcal{D}(p) = \text{vect}\{f_1(p), \dots, f_k(p)\}$$

On dit alors que  $\mathcal{D}$  est de rang constant ( $= k$ ).

**Définition:**

$\mathcal{D}$  est dite intégrale si  $\forall p \in X, \exists S$  une variété,  $p \in S$  tel que

$$T_q S = \mathcal{D}(q), \forall q \in S$$

**Définition: Involutive**

$f \in V^\infty(X)$ . On dit  $f \in \mathcal{D}$  si  $\forall p \in X, f(p) \in \mathcal{D}(p)$ .  
 $\mathcal{D}$  est dite involutive si  $f, g \in \mathcal{D} \Rightarrow [f, g] \in \mathcal{D}$ .

⇒ *Théorème: Frobenius*

Soit  $\mathcal{D}$  une distribution de rang constant  $k$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  intégrable
2.  $\mathcal{D}$  involutive
3. localement, autour de chaque point  $p \in X$ ,

$$\exists(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n); \mathcal{D} = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

## 1.2 Rappel sur les formes différentielles

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $e_1, \dots, e_n$  sa base. On a également  $E^*$  son dual, et  $e^1, \dots, e^n$  sa base duale.

$$e^j(e_i) = \delta_i^j$$

$T : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -linéaire est dit un  $k$ -tenseur (ensemble noté  $T^k(E)$ ).

✦ *Définition:*

Soit  $T \in T^k(E)$ ,  $S \in T^l(E)$ . On pose :

$$T \otimes S(x_1, \dots, x_{k+l}) = T(x_1, \dots, x_k)S(x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$$

**Remarque :** En général,  $T \otimes S \neq S \otimes T$ .

¶ *Propriété:*

Une base de l'espace des  $k$ -tenseurs est formé par :

$$\bigotimes_{l=1}^k e^{i_l}$$

⇒ *Corollaire:*

$$\dim T^k(E) = n^k.$$

$A^k(E)$  :  $k$ -tenseur antisymétriques, ie :

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) &= -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ \Leftrightarrow T(\dots, v_i, v_{i+1}, \dots) &= -T(\dots, v_{i+1}, v_i, \dots) \\ \Leftrightarrow T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) &= \text{sgn}(\sigma)T(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

## Comment produire des tenseurs antisymétriques ?

$$Alt : T^k(E) \rightarrow T^k(E)T \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon(\sigma) T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

où  $\Sigma_k$  est l'ensemble des permutations de  $k$  éléments,  $\varepsilon(\sigma)$  est le signe de la permutation.

### Proposition:

1.  $T \in T^k(E) \Rightarrow Alt(T) \in A^k(E)$
2.  $T \in A^k(E) \Rightarrow Alt(T) = T$
3.  $T \in S^k(E)$  (tenseur symétrique)  $\Rightarrow Alt(T) = 0$

### Définition: Produit extérieur

Soit  $\omega \in A^k(E)$ ,  $\eta \in A^l(E)$ .

On définit  $\omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$ , appelé produit extérieur par :

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)$$

### Propriété:

1.  $\omega \in A^k, \eta \in A^l \Rightarrow \omega \wedge \eta \in A^{k+l}(E)$
2.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
3.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$

### Corollaire:

Soit  $\omega \in A^{2k+1}(E)$

$$\omega \wedge \omega = 0$$

### Corollaire:

Soit  $e^1, \dots, e^n$  la base duale.

$$e^i \wedge e^i = 0 \quad e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$$

### Proposition:

Une base de  $A^k(E)$  est donnée par :

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \text{ où } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

### Corollaire:

Si  $\omega \in A^k(E)$

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

$f(p) \in E = T_p X$  champ vecteur,  $w(p) \in T_p^* X$  une 1-forme différentielle.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad w(p) = \sum_{j=1}^n w_j(x) dx^j$$

$$w(f) = \sum_{j=1}^n w_j(x) f^j(x)$$

De même, une  $k$ -forme différentielle  $\mathcal{C}^\infty : w \in \Lambda^k(X)$

$$w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

#### 1.2.1 Comment définir une distribution ?

1. On choisit  $f_1, \dots, f_m \in V^\infty(X)$ , et on pose  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$
2.  $p \in X \mapsto \mathcal{E}(p) \subset T_p^* X$  est une codistribution. On pose :

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^\perp = \text{Ker } \mathcal{E} = \{f \in V^\infty(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{E}\}$$

Réciproquement, si  $\mathcal{D}$  est une distribution, on pose :

$$\mathcal{E} = \mathcal{D}^\perp = \text{ann } \mathcal{D} = \{w \in \Lambda^k(X); \langle w, f \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{D}\}$$

**Remarque :** Si  $\text{rg } \mathcal{D} = \text{cste}$  (ou  $\text{rg } \mathcal{E} = \text{cste}$ ) :

1.  $\text{rg } \mathcal{D} + \text{rg } \mathcal{E} = n$
2.  $\langle w, f \rangle = 0$  peut être considéré point par point ou globalement

#### 1.2.2 Différentielle extérieure

Soit  $w \in \Lambda^k(X)$ .

Si  $k = 0$ ,  $\Lambda^0(X) = \mathcal{C}^\infty(X)$

Si  $k \geq 1$ ,  $w(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} w_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  et

$$dw = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} dw_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Ainsi :

$$\Lambda^0(X) \xrightarrow{d} \Lambda^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n(X) \xrightarrow{d} 0$$

**Proposition:**

Soit  $w \in \Lambda^1(X)$ , soient  $f, g \in V^\infty(X)$ . On a :

$$dw = L_f w(g) - L_g w(f) - w([f, g])$$

**Rappel :**

$\eta \in \Lambda^k(M)$ ,  $\omega \in \Lambda^l(M)$ .

$$\eta \wedge \omega(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \in \Lambda^{k+l}(M)$$

Soit  $g$  indépendant en chaque point  $p \in M$  de  $f_1$  et  $f_2$ .

$$dw \wedge \omega(f_1, f_2, g) = d\omega(f_1, f_2)\omega(g)$$

$$d\omega \wedge \omega \neq 0 \Leftrightarrow d\omega(f_1, f_2) = -\omega([f_1, f_2]) \neq 0$$

2 cas possibles :

1.  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, f_2\}$  involutive
2.  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, f_2\}$  non involutive

Dans le premier cas, on a un système de coordonnées locales qui redresse le plan. Est-ce de même pour le deuxième cas ? Sachant qu'ils sont bien plus courants, et stable : même s'il est perturbé, le tout reste  $\neq 0$  !

**Proposition: dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{rg}\mathcal{D} = 2$**

Les conditions suivantes sont équivalentes localement autour de  $p \in M$

1.  $[f, g](p) \notin \mathcal{D} = \text{span}\{f, g\}$
2.  $d\omega \wedge \omega(p) \neq 0$ , où  $\mathcal{D}^\perp = \text{span}\{\omega\}$
3.  $\exists \phi(x, y, z)$  des coordonnées locales autour de  $p$  tel que  $\phi_* \mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$
4.  $\mathcal{D}^\perp = \text{span}\{dz - xdy\}$

**Proposition:**

La condition  $d\omega \wedge \omega \equiv 0$  ne dépend pas du choix de  $\omega$ .

**$\Leftrightarrow$  Théorème: de Frobenius pour les formes différentielles**

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\mathcal{D}$  involutive
2.  $\exists \alpha_j^i \in \Lambda^1(M)$ ,  $1 \leq i, j \leq k$  tel que  $d\omega_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i \wedge \omega_j$ ,  $1 \leq i \leq k$
3.  $d\omega_i = 0 \pmod I$  où  $I$  est l'idéal dans  $\bigcup_{p \geq 0} \Lambda^p(M)$  engendré par  $\omega_1, \dots, \omega_k$  ie :

$$i \in I \Leftrightarrow i = i \wedge \omega_j$$

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \equiv 0$$

On pose  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i]$

✦ *Définition: Vecteur de croissance*

Le vecteur de croissance de  $\mathcal{D}$  en  $p$  est la suite  $(d_i(p))_{i \geq 0}$ , où  $d_i(p) = \dim \mathcal{D}_i(p)$ .

**Remarque :** Si on n'indique pas  $p$ ,  $d_i$  est constant.