

Présentation d'un article :
On shape optimization of optical waveguides
using inverse problem techniques
Thomas Felici & Heinz W Engl

Alexandre Vieira

INSA de Rouen

23 février 2015

Sommaire

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- 1 Formulation du problème
- 2 Solution du problème direct
- 3 Résultats numériques et interprétation
- 4 Approche par problèmes inverses

Sommaire

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- 1 Formulation du problème
- 2 Solution du problème direct
- 3 Résultats numériques et interprétation
- 4 Approche par problèmes inverses

Équation étudiée

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$\Delta U + n^2 U = 0$$

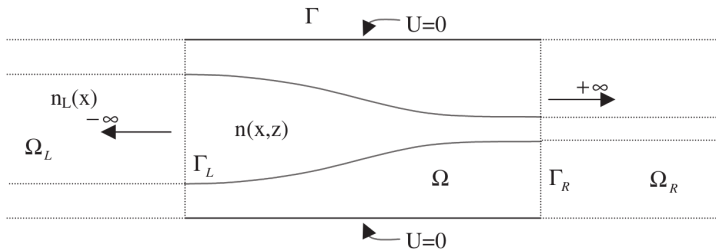


Figure : Profil du taper

Recherche de conditions au bord

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

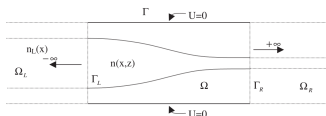
Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion



$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U + n^2 U = 0 & \text{pour } (x, z) \in \Omega \\ U|_{\Gamma} = 0 & \text{(murs réfléchissants)} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(L)^2} \langle U, \tilde{U}_k^{(L)} \rangle \tilde{U}_k^{(L)} = 2i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(L)^2} \langle U_L, \tilde{U}_k^{(L)} \rangle \tilde{U}_k^{(L)} & \text{sur } \Gamma_L \\ \frac{\partial U}{\partial z} - i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(R)^2} \langle U, \tilde{U}_k^{(R)} \rangle \tilde{U}_k^{(R)} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{array} \right. \quad (1)$$

Problème d'optimisation

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$\langle \tilde{U}_k, \tilde{U}_k \rangle = \frac{1}{\beta_k} \quad (2)$$

On cherche à maximiser :

$$P(n^2) = \beta_1^2 |\langle U, \tilde{U}_1^{(R)} \rangle|^2 = \beta_1^2 \left| \int_{x \in \Gamma_R} U(x, z_R) \tilde{U}_1^{(R)}(x) dx \right|^2 \quad (3)$$

⇒ Formulation difficile à exploiter.

Sommaire

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- 1 Formulation du problème
- 2 Solution du problème direct**
- 3 Résultats numériques et interprétation
- 4 Approche par problèmes inverses

Représentation locale

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$L_t(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + n^2(x, z)U$$

$$\begin{aligned} L_t(U_k) &= \beta_k^2 U_k \quad \text{dans } \Omega_z \\ U_k|_{\partial\Omega_z} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k}) U_k \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{-k}) i \beta_k U_k \end{aligned} \tag{5}$$

Représentation locale

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

Puissance dans le k ème mode : $|a_k|^2$ et $|a_{-k}|^2$. Ainsi :

$$P(n) = |a_1|^2$$

Longue démonstration pour avoir :

$$\dot{a}_k(z) - i\beta_k a_k(z) = \sum_{j \neq k, 0} r_{kj}(z) a_j(z), \quad k \neq 0 \quad (6)$$

avec $\beta_{-k} = -\beta_k$ et

$$r_{kj}(z) = \frac{\int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k U_j ds}{2(\beta_k - \beta_j)}$$

pour tout $j \neq k, j, k \neq 0$

Sommaire

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- 1 Formulation du problème
- 2 Solution du problème direct
- 3 Résultats numériques et interprétation**
- 4 Approche par problèmes inverses

Discrétisation

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

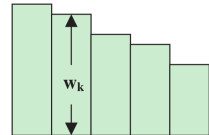
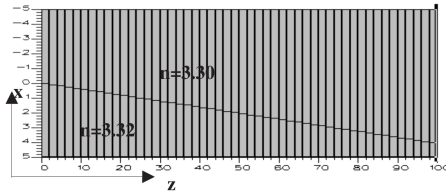


Figure : Profil du taper : discrétisation pour le problème d'optimisation

Résultats numériques

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

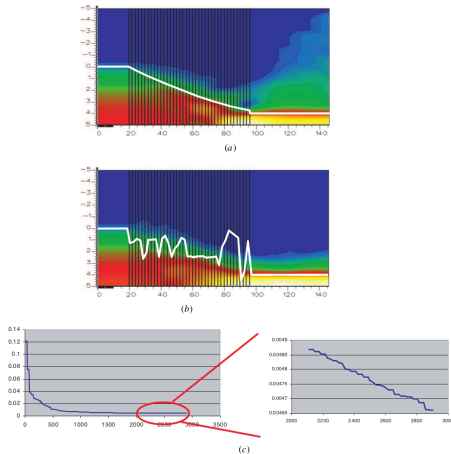


Figure : Profil du taper : résultat avec $N = 48$. (a) Forme initial du taper (b) Forme optimale (c) Perte d'énergie en fonction du nombre d'itérations.

Résultats numériques

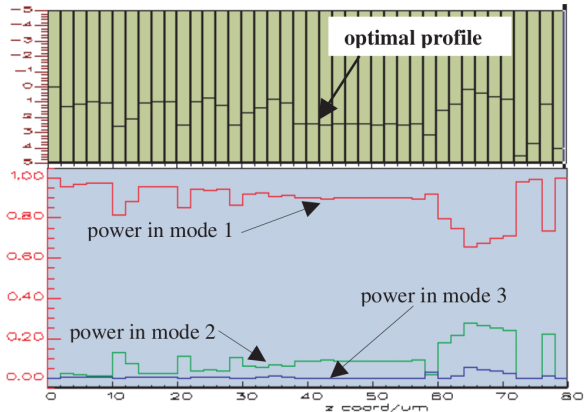


Figure : L'énergie est préservée grâce à la résonance avec les autres modes

Un problème mal posé

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- Variations arbitrairement grandes sur l'indice de refraction $n \Rightarrow$ Une solution U toujours aussi proche qu'on veut.
- Or, dans l'algorithme d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes ne dépendent que de U , et non de n !
- Point de vue physique : l'onde ne voit pas les pics plus petites que sa longueur d'onde
- Pour gagner en stabilité : réduire l'espace de recherche (ajouter de la continuité par exemple)
- À contrario, on pourrait plutôt essayer de chercher la distribution des indices provenant d'une certaine mesure.

\Rightarrow approche problème inverse

Sommaire

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- 1 Formulation du problème
- 2 Solution du problème direct
- 3 Résultats numériques et interprétation
- 4 Approche par problèmes inverses**

Formulation du problème

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$1 = \sum_{k \in RB} |a_{-k}(0)|^2 + \sum_{k \in RB} |a_k(z_R)|^2$$

$$\text{avec } RB = \{k \in \mathbb{Z}^* | \beta_k^2 > 0\}$$

Pour rappel :

$$U(x, z_R) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_R) U_k^{(R)}(x)$$

Égalité seulement si :

$$\begin{bmatrix} |a_1(z_R)| \\ |a_2(z_R)| \\ |a_3(z_R)| \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7)$$

Formulation du problème

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

Avantage numérique : on prend en compte tous les a_k !

Dépendance non linéaire de n , et pas forcément de solution.

D'où : approche par moindres carrés, et utilisation de la méthode de Newton.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} \right|_n \delta n = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n) \quad (8)$$

Formulation du problème

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$\left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} \right|_n = UDV^T$$

Instabilité numérique réglé par troncature des valeurs singulières du jacobien : choix de $0 < \alpha < 1$ et :

$$r := \max\{i | d_i \geq \alpha d_1\}$$

Et :

$$D_{red} = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

$$\delta n = VD_{red}^\dagger U^\dagger [\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n)] \quad (9)$$

Formulation du problème

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

$$\min F(\lambda) = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n_k + \lambda \delta n)\|_2^2$$

$$n_{k+1} = n_k + \lambda_{\min} \delta n$$

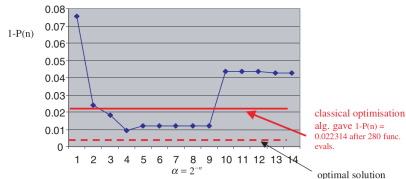
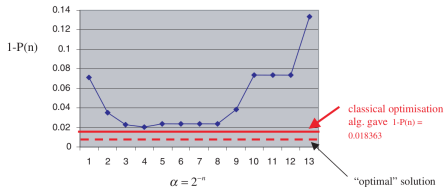


Figure : (1) $N=13$, $M=10$ modes (2) $N=48$, $M=15$

Conclusion

Shape Opti.
Waveguides

Alexandre
Vieira

Formulation
du problème

Solution du
problème
direct

Résultats
numériques
et interpréta-
tion

Approche par
problèmes
inverses

Conclusion

- Une approche par problème inverse efficace, mais sous certaines contraintes
- Moyen d'améliorer : algorithme en cascade
- Calculs très formels : il manque parfois quelques considérations mathématiques (notamment sur les séries)