Optimisation convexe

28 janvier 2015

Table des matières

Première partie
Ensembles convexes

1 Définitions et premières propriétés

2 Enveloppe affine et enveloppe convexe

3 Propriétés topologiques des convexes

3.1 Ouverture et fermeture des convexes

3.2 Intérieur relatif

4 Opérations sur les ensembles convexes

4.1 Projection sur un convexe fermé

4.2 Séparation des ensembles convexes

4.3 Enveloppe convexe fermée

L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas nécessairement fermée.
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $C = \{xy \geq 1\} \cup \{0\}$: fermé.
$\mathrm{conv}(C) = \{x > 0, y > 0\} \cup \{0\}$: non fermé.

Définition:

$A \subset E$. On définit l'enveloppe convexe fermée, noté $\overline{conv}(A)$, comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant A.

Propriété:

- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{conv}(A_1) \subset \overline{conv}(A_2)$
- $A \subset conv(A) \subset conv(\bar{A}) \subset \overline{conv}(A)$ et $\overline{conv}(A) = \overline{conv}(\bar{A}) = \overline{conv(A)}$

Définition:

Soit H un Hilbert.
Un demi-espace fermé de H est un ensemble de la forme :

$$H^-(\xi, \alpha) = \{x \in H; (x, \xi) \leq \alpha\}$$

où $\xi \in H \neq \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Proposition:

$\overline{conv}(A)$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A.

Corollaire:

Soit C un ensemble convexe.
Alors l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C est $\overline{C}$.

Corollaire:

C convexe fermés $\Leftrightarrow$ C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant C.

Théorème:

Soient H de dimension finie et A un compact de H. Alors $conv(A)$ est compact.

5 Cônes convexes

Définition: Cône

Un ensemble C est un cône si $\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in C, \lambda x \in C$

Définition: Enveloppe conique

Soit $A \subset E$. L'enveloppe conique A, notée $cone(A)$, est l'intersection de tous les coônes convexes contenant A.

Définition: Combinaison conique

On appelle combinaison conique d'élements de A un point x tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in A$

Proposition:

- C est un cône convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons coniques de ses éléments.
- $$cone(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq ^\circ, x_i \in A \right\}$$

Définition: Enveloppe conique fermée

On définit l'enveloppe conique fermée de A, notée $\overline{cone}A$, comme étant l'intersection de tous les cônes convexes fermés contenant A.

Propriété:

- $A \subset B \Rightarrow \overline{cone}(A) \subset \overline{cone}(B)$
- $A \subset cone(A) \subset cone(\bar{A}) \subset \overline{cone}(A)$ et $\overline{cone}(A) = \overline{cone}(\bar{A}) = \overline{cone(A)}$

5.1 Cône normal

Définition:

Soient H de Hilbert, $C \subset H$, $x \in C$.
On définit le cône normal à C en x, noté $\mathcal{N}_x C$ ou $\mathcal{N}_C(x)$ par :

$$\mathcal{N}_C(x) = \{d \in H; (d, y - x) \leq 0 \forall y \in C\}$$

Les éléments de $\mathcal{N}_x C$ sont appelés les normales à C en x.

Proposition:

Soit H de Hilbert de dimension fnie.
Si $C \subset H$ et $x \in \partial C$, alors $\mathcal{N}_x C$ contient au moins un élément non nul.

Remarque : Le résultat reste vrai en dimension infini si $\mathring{C}$ est non vide.

5.2 Cône dual

Définition: Cône dual, bidual, polaire

Soit $P \subset H$. On appelle cône dual de P, noté P^*, l'ensemble :

$$P^* = \{x \in H; (x, y) \geq 0 \ \forall y \in P\}$$

On appelle cône bidual de P : $P^{**} = (P^*)^*$
On appelle cône polaire (ou dual négatif) P^- l'ensemble

$$P^- = \{x \in H; (x, y) \leq 0 \ \forall y \in P\} = -P^*$$

Proposition:

P^* est un cône convexe fermé non vide.

6 Hyperplan d'appui

Définition:

Un hyperplan d'affine d'équation $(s, x) = r$ est appelé hyperplan d'appui à C en $\bar{x}$ si :

$$(s, x) \leq r \ \forall x \in C$$

$$(s, \bar{x}) = r$$

Théorème:

Soit C un ensemble convexe d'un Hilbert H. On suppose soit que H est de dimension finie soit que $\mathring{C} \neq \emptyset$. Soit $\bar{x} \in \partial C$. Alors il existe un hyperplan d'appui à C en $\bar{x}$.

7 Lemme de Farkas

Lemme:

Soient H un espace de Hilbert, $(\xi_j)_{j \in J} \subset H$ et $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}$. On suppoer que le système

$$(\xi_j, x) \leq \alpha_j \ \forall j \in J$$

admet au moins une solution.
Soit $(s, \beta) \in H \times \mathbb{R}$. On a équivalence entre les 2 propositions :

1. $$\forall x \in H, [\forall j \in J, \ (\xi_j, x) \leq \alpha_j \Rightarrow (s, x) \leq \beta]$$

2. $$(s, \beta) \in \overline{cone}\left((\xi_j, \alpha_j)_{j \in J} \cup (0, 1)\right) \subset H \times \mathbb{R}$$

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses avec $\alpha_j = 0 \ \forall j \in J$. On a pour $s \in H$:

1. $$\forall x \in H, [\forall j \in J, \ (\xi_j, x) \leq 0 \Rightarrow (s, x) \leq 0]$$

2. $$s \in \overline{cone}\left((\xi_j)_{j \in J}\right)$$

Lemme:

Si C est un cône convexe fermé, alors $C^{**} = C$.

Deuxième partie

Fonctions convexes

1 Définitions et propriétés

$f : H \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$

Définition:

$$Dom(f) = \{x \in H ; f(x) < +\infty\}$$
$$epi(f) = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha \geq f(x)\}$$
$$epi_S(f) = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times H, \alpha > f(x)\}$$

On dit que f est propre si f n'est pas identiquement égal à $+\infty$.
On dit que f est convexe si $epi(f)$ est convexe.
On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Proposition:

Si f est convexe, alors $Dom(f)$ est convexe.
De plus, f est convexe si et seulement si : $\forall x, y \in Dom(f)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Définition:

On dit que f est strictement convexe si $\forall x, y \in Dom(f)$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition:

On dit que f est fortement convexe de module α si $\forall x, y \in Dom(f)$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$\frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 + f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Propriété: opérations conservant la convexité

1. Pour $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes, $\sup_{i \in I} f_i$ est convexe.
2. $\alpha \geq 0$, si f convexe, alors αf est convexe
3. Si f_1 et f_2 convexes, alors $f_1 + f_2$ convexes.

Définition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
On appelle sous ensemble de niveau de f au niveau α noté $\Gamma_\alpha(f)$ l'ensemble

$$\Gamma_\alpha(f) = \{x \in H; f(x) < \alpha\}$$

Remarque : f convexe $\Rightarrow \Gamma_\alpha(f)$ convexe $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$
Si $\Gamma_\alpha(f)$ est convexe $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est quasi-convexe.

Définition:

Soit $P \subset H$. On appelle fonction indicatrice de P la fonction :

$$\mathbb{1}_P(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in P \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Si P convexe, alors $\mathbb{1}_P$ est convexe.
Si $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\Gamma_\alpha(\mathbb{1}_P) = P$ donc $\mathbb{1}_P$ caractérise P.

2 Fonctions d'appui

Définition:

Soit $S \subset H$.
On appelle fonction d'appui à S et on note σ_S la fonction définie par :

$$\sigma_S(d) = \sup_{s \in S}(s, d)$$

Remarque : σ_S est toujours convexe (même si S ne l'est pas).

Théorème:

Soit S un sous-ensemble non vide de H. Alors $s \in \overline{conv}(S)$ si et seulement si

$$\forall d \in H,\ (s, d) \leq \sigma_S(d)$$

De plus, $\sigma_S = \sigma_{\overline{conv}(S)}$

Remarque : Soient S_1 et S_2 2 convexes fermés. $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \sigma_{S_1} = \sigma_{S_2}$.

Propriété:

Soient S_1 et S_2 deux sous-ensembles de H non vides.

1. $\sigma_{S_1+S_2} = \sigma_{S_1} + \sigma_{S_2}$
2. $\sigma_{S_1 \cup S_2} = \max\{\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}\}$

3 Transformée de Fenchel

On va chercher les fonctions affines minorantes :

$$\langle p, x\rangle + \alpha \leq f(x)$$

$$-\alpha \geq \langle p, x\rangle - f(x)$$

On va prendre $-\alpha = \sup_{x \in H}\{\langle p, x\rangle - f(x)\} = f^*(p)$.

Définition: Transformée de Fenchel

Soit H un Hilbert et $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit la transformée de Fenchel de f, notée $f^* : H \to \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$f^*(p) = \sup_{x \in H}\{\langle p, x\rangle - f(x)\}$$

Propriété: Inégalité de Young

$$\forall p, x \in H, \; f^*(p) + f(x) \geq \langle p, x \rangle$$

Proposition: Semi-continue inférieurement

Soit $f : H \to \mathbb{R}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (sci) si l'une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $\forall x \in H, \; \forall x_n \to x, \; \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x)$
2. $epi(f)$ est fermé.

Proposition:

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions sci. Alors $\sup_{i \in I} f_i$ est sci.

Corollaire:

f^* est sci et convexe.

Définition: Biconjuguée

La biconjuguée de f, notée f^{**} est définie par :

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in H} \{\langle p, x \rangle - f^*(p)\}$$

Propriété:

- $f^{**}(x) + f^*(p) \geq \langle p, x \rangle$
- $f(x) \geq f^{**}(x)$

Proposition:

Si f est convexe, sci et propre, alors f^* est convexe, sci et propre.

Théorème: Fenchel-Moreau

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. alors f est convexe et sci si et seulement si $f = f^{**}$

Remarque:

On peut définir la transformée de Fenchel sur un espace normé E refléxif :

$$f^* : \begin{array}{ccc} E' & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \sup_{x \in E}\{\langle p, x\rangle_{E'E} - f(x)\} \end{array}$$

Dans ce cas, les propositions précédentes et le théorème de Fenchel-Moreau restent vraies.

Corollaire:

Soit f propre. alors f est convexe et sci si et seulement si f est l'eneoppe supérieure de ses minorantes affines.

4 Continuité des fonctions convexes

Proposition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. On suppose qu'il existe une boule ouverte sur laquelle f est bornée. Alors f est continue sur l'intérieur de son domaine qui est non vide.

Remarque:

Si f est continue en un point, alors f est bornée sur une boule, et donc f est continue sur l'intérieur de son domaine.

Corollaire:

Si $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe et propre avec H de dimension finie, alors f restreinte à l'intérieur relatif de son domaine est continue.

Remarque : Si $f : H \to \mathbb{R}$, alors f continue sur H.

5 Différentiabilité des fonctions convexes

5.1 Dérivées directionnelles des fonctions convexes

Théorème:

Soient $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in Dom(f)$, $d \in H$.

1. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(x+\varepsilon d)-f(x)}{\varepsilon}$ est croissante
2. $f'(x,d)$ existe toujours et vaut éventuellement $\pm\infty$. De plus, $f'(x,d) = +\infty$ si et seulement si $x + \varepsilon d \notin Dom(F)$ pour tout ε petit, et :
$$f'(x,d) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \frac{f(x+\varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon}$$
$$f'(x,d) \leq f(x+d) - f(x)$$
3. $f'(x,d) \geq -f'(x,d)$

5.2 Reconnaître une fonction convexe à l'aide de ses dérivées

Théorème:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. On suppose que f est différentiable sur un ouvert Ω de $Dom(f) \subset H$. On a équivalence entre les propositions suivantes :

1. f est convexe (resp. strictement convexe) sur Ω
2. $\forall x, y \in \Omega$, $f(y) \geq f(x) + f'(x, y-x)$ (resp. $f(y) > f(x) + f'(x, y-x)$)
3. $\forall x, y \in \Omega$, $(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq 0$ (resp. $(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq 0$)

Théorème:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ propre et 2 fois différentiable sur un ouvert $\Omega \subset Dom(f)$.
Alors f est convexe si et seulement si $D^2 f(d,d) \geq 0$ $\forall d \in H$.
De plus, si $D^2 f(d,d) > 0$, alors f est strictement convexe (réciproque fausse : penser à $f(x) = x^4$)

6 Sous-différentiabilité des fonctions convexes

6.1 Définitions et premières propriétés

Définition: Fonction affine

a est affine si $\forall x, y \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$a(tx + (1-t)y) = ta(x) + (1-t)a(y)$$

Pour toute fonction affine, il existe x^* (la pente) et α (l'ordonnée) telles que $a(x) = \langle x^*, x\rangle + \alpha$.

Définition: Minorante affine

On dit que a est une minorante affine de f si a est affine et si :

$$\forall x \in H,\ f(x) \geq a(x)$$

On dit qu'une minorante affine est exacte en x_0 si $f(x_0) = a(x_0)$. Dans ce cas,

$$a(x) = \langle x^*, x - x_0\rangle + f(x)$$

Théorème: Existence d'une minorante affine

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors f admet une minorante affine.
De plus, celle-ci peut être choisie exacte en un point de $ri(Dom(f))$, ie : si $x \in ri(Dom(f))$,

$$\exists x^* \in H;\ f(y) \geq \langle x^*, y - x\rangle + f(x)$$

Définition: Sous-différentiable

On dit que f convexe et propre est sous-différentiable en x s'il existe $x^* \in H$ tel que :

$$\forall y \in H,\ f(y) \geq \langle x^*, y - x\rangle + f(x)$$

Les éléments x^* sont appelés les sous-gradients de f en x, et on note $\partial f(x)$ l'ensemble des sous-gradients de f en x.
Par convention, si $x \notin Dom(f)$, alors $\partial f(x) = \emptyset$

Proposition: Sur l'optimalité

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors f atteint un minimum en x si et seulement si $0 \in \partial f(x)$.

Proposition:

Sous les mêmes hypothèses :

$$\partial f(x) = \{x^* \in H;\ f'(x,d) \geq \langle x^*, d\rangle,\ \forall d \in H\}$$

Théorème:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre, et soit $x \in Dom(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\partial f(x) \neq \emptyset$
2. $\exists y \in ri(Dom(f))\,;\ f'(x, y-x) > -\infty$
3. $f'(x, \bullet) \neq -\infty$

Corollaire:

Si f est convexe et propre et si f est continue en $x \in Dom(f)$, alors $\partial f(x) \neq \emptyset$

Proposition:

Soit f convexe et propre tel que f est continue en x. Alors

$$f'(x,d) = \sigma_{\partial f(x)}(d) = \sup_{p \in \partial f(x)} \langle d, p\rangle$$

6.2 Sous-différentiabilité et transformée de Fenchel

Proposition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe et propre. Alors

$$\partial f(x) = \{p \in H;\ f(x) + f^*(p) = \langle p, x\rangle\}$$

On définit de la même manière :

$$\partial f^*(p) = \{x \in H;\ f^{**}(x) + f^*(p) = \langle p, x\rangle\}$$

Proposition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe, propre et sci.

$$x \in \partial f^*(p) \Leftrightarrow p \in \partial f(x)$$

6.3 Liens avec la différentiabilité

Proposition:

Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe, sci et propre. On suppose que f est continue en x.

1. Si f est Gâteaux-différentiable en x, alors

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

2. Réciproquement, si $\partial f(x)$ est réduit à un seul élément, alors f est Gâteaux-différentiable en x et $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

6.4 Quelques règles de calcul

Dans toute la suite, on supposera la dimension de H finie.

Définition: Homogène et sous linéaire

$f'(x, \bullet)$ est dite homogène de degré $n \in \mathbb{R}^*$ si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f'(x, \lambda d) = \lambda^n f'(x, d)$$

$f'(x, \bullet)$ est dite sous-linéaire si :

$$\forall d \in H,\ \exists L > 0;\ |f'(x, d)| \leq L\|d\|$$

Proposition:

Soient $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre et $x \in H$. Alors $f'(x, \bullet)$ est convexe, homogène de degré 1 et sous-linéaire.

Corollaire:

Sous les mêmes hypothèses, $\partial f(x)$ est un convexe compact non vide.

Proposition:

Soient $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, et $t_1, t_2 > 0$. Alors

$$\partial(t_1 f_1 + t_2 f_2)(x) = t_1 \partial f_1(x) + t_2 \partial f_2(x)$$

Proposition:

Soient $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction affine ($Ax = A_0 x + b$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) et $g : \mathbb{R})^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

$$\partial(g \circ A)(x) = A_0^* \partial g(Ax)$$