Présentation d'un article :
On shape optimization of optical waveguides using inverse problem techniques

Thomas Felici & Heinz W Engl

Alexandre VIEIRA

2 mars 2015

Table des matières

Introduction

Les guides d'ondes optiques sont à la base de l'optoéléctronique, ie les composants éléctroniques interagissant avec de la lumière, et de l'industrie des télécommunications. L'exemple le plus connu est bien évidemment la fibre optique, mais il existe également d'autres exemples tout aussi important, comme les composants optiques qui manipulent, filtrent et dispatchent des signaux entrants. Ces composants sont souvent de l'ordre du quart de nanomètre, ce qui représente bien sûr un avantage en poids et en volume, et qui permettent de remplir des fonctions que ne peuvent pas faire des objets plus classiques. Le développement de cette technologie repose de plus en plus sur des modèles mathématiques de paire avec des simulations numériques pour la prédiction du comportement de ces appareils, ainsi que la production d'un appareil 'optimal', ce qui repose bien souvent sur des modèles reposant sur des EDP.
Les adaptateurs de mode intégrés, aussi appelés "taper" en anglais, sont des guides d'onde dont la section varie sur sa longueur, utilisés comme des sortes d'entonnoir. Il est bien connu que si le taper est assez long, la lumière sera transmise sans perte d'énergie. Mais plus la longueur est courte, plus le faisceau perd en énergie. Le but de ce papier était donc de trouver une formulation pour minimiser la perte d'énergie pour une longueur donnée.
Dans un premier temps, l'article met en place un premier problème direct pour la propagation d'une onde éléctromagnétique à traver un guide d'onde, puis il définit le problème d'optimisation. Comme on le vera, on peut ensuite dériver de ce modèle une formulation pour les modes, et établir des équations d'évolution pour l'excitation des modes dans le taper. Un problème d'optimisation en dimension finie basée sur une discrétisation sortira enfin de tout cela.
Des exemples numériques basés sur cette méthode montre que si la discrétisation devient trop fine, la convergence ralentit et la solution devient de plus en plus instable. Le problème vient du fait qur le problème d'optimisation est mal posé. L'article présente donc une méthode pour maximiser l'énergie résultante basée sur un problème inverse non linéaire, ainsi que des résultats numériques coroborant leur idée.

1 Formulation du problème direct en 2D

1.1 Dérivation des équations

Les équations homogènes de Maxwell dans un milieu continu avec la permitivité linéaire ε et la perméabilité magnétique μ_0 sont :

$$\begin{array}{rcl} \nabla \wedge H & = & \varepsilon \dot{E} \\ \nabla \wedge E & = & -\mu_0 \dot{H} \\ \nabla \bullet (\varepsilon E) & = & \nabla \bullet H = 0 \end{array} \tag{1}$$

On se concentre uniquement sur le cas 2D. On assume donc que E et H sont indépendants de y. Si on assume une dépendance périodique en temps $e^{-i\omega t}$ et qu'on note $E = (E_x, E_y, E_z)$ et $H = (H_x, H_y, H_z)$ les composantes spatiales de la solution, on a une solution avec $H_y = E_x = E_z = 0$ - le champ TE (transverse electric) - vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & = & -i\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} & = & -i\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & = & i\omega\mu_0 H_z \end{array} \tag{2}$$

En redérivant les deux dernières équations de (2) par rapport à respectivement z et x et en réintroduisant le résultat dans la première équation, on obtient l'équation d'Helmholtz pour E_y :

$$\Delta E_y + k^2 n^2 E_y = 0 \text{ avec } \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = k \text{ et } n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

où ε_0 désigne la permitivité du vide.

On remarque également qu'on obtient une solution avec $E_y = H_x = H_z = 0$ -le champ magnétique transverse ('TM') - donnant une équation légèrement modifiée :

$$-\Delta H_y + k^2 n^2 H_y = 0$$

Cependant, l'analyse ne se poursuivra qu'avec les modes du champ TE.

Nous allons maintenant formuler le problème de propagation de l'onde dans un guide d'onde générique Ω en notant la frontière $\Gamma \cup \Gamma_R \cup \Gamma_L$ (voir la figure 1).

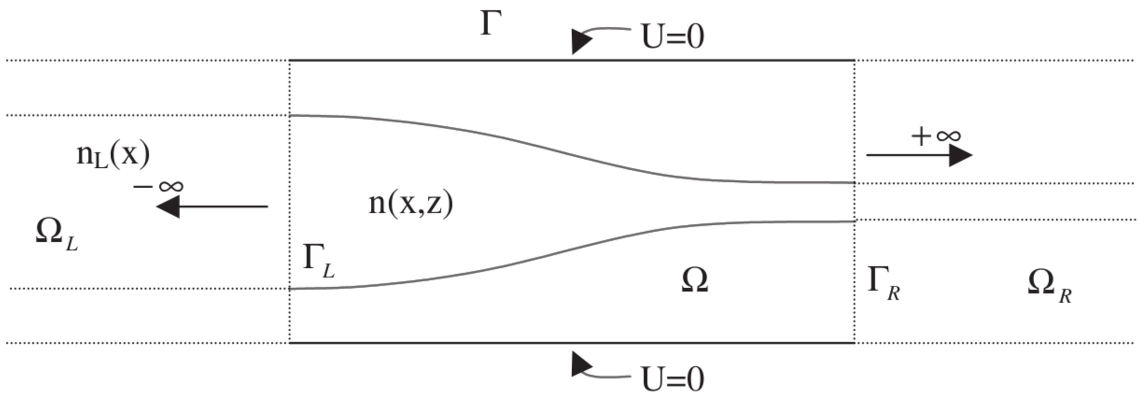


FIGURE 1 – Profil du taper

À présent, pour plus de commodité, E_y sera noté U. Sur le bord Γ, nous prenons des conditions de Dirichlet ($U = 0$). Physiquement, cela signifie que le champ est réfléchi vers Ω. En pratique, cela n'est pas un problème si on cherche des solutions de champs guidés, car ils sont par définition limités au guide d'onde et décroissent exponentiellement en dehors (ce qui sera discuté plus en détail ultérieurement). On réécrit donc les équations :

$$\Delta U + n^2 U = 0 \text{ pour } (x,z) \in \Omega \tag{3}$$
$$U_{|\Gamma} = 0 \tag{4}$$

où on a posé $k = 1$. Cela n'est rien d'autre qu'une normalisation de l'équation : on pose simplement $x' = kx$ et $z' = kz$. Ainsi :

$$(\partial_x^2 + \partial_z^2)U(x', z') = k^2(\partial_{x'}^2 + \partial_{z'}^2)U(x', z') = k^2 \Delta U(x', z')$$

D'où :

$$k^2 \Delta U + n^2 k^2 U = 0$$

On obtient l'équation précédente en simplifiant par k^2.

Nous avons besoin à présent de conditions à $\pm\infty$. Nous prenons comme hypothèse que nous avons un champ entrant venant de $-\infty$. Ce champ U_I satisfait également (3), (4) dans Ω_L. Nous devons retrouver le fait que le champ diffusé $U - U_I$ voyage vers l'extérieur des deux côtés du guide d'onde. Nous allons faire cela en terme de modes propres dans Ω_L et Ω_R, ce qui amène donc à considérer un problème spectral dans ces régions.
Dans Ω_L, on prend une dépendance périodique par rapport à z : $U(x,z) = \tilde{U}(x)e^{i\beta z}$. En réinjectant cela dans (3), on obtient :

$$\frac{d^2\tilde{U}}{dx^2} + (n^2 - \beta^2)\tilde{U} = 0 \text{ pour un } z \text{ fixé avec } \tilde{U}(x_{min}) = \tilde{U}(x_{max}) = 0 \tag{5}$$

Les conditions de Dirichlet (4) nous assure que nous avons en ensemble de valeurs propres discrètes $\{(\tilde{U}_k, \pm\beta_k) : k \in \mathbb{N}^*\}$. On a donc :

$$U(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k e^{i\beta_k z} + C_{-k} e^{-i\beta_k z}\right) \tilde{U}_k(x) \text{ dans } \Omega_L \tag{6}$$

Notons que le raisonnement tient toujours dans Ω_R et donne un résultat similaire.
Dans (6), on pose $\beta_k > 0$ si β_k est réel, $\beta_k = i|\beta_k|$ si β_k est imaginaire. Ainsi, les coefficients C_k et C_{-k} représentent respectivement le voyage vers la droite et vers la gauche de l'onde.
De plus, on remarque que l'opérateur utilisé dans (3) est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle a, b\rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} a(x)b(x)dx$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\big\langle(\Delta+n^2Id)u,v\big\rangle &= \langle\Delta u,v\rangle+\langle n^2u,v\rangle\\
&= \int_{x_{min}}^{x_{max}}\Delta u(x)v(x)dx+\langle u,n^2v\rangle\\
&= -\int_{x_{min}}^{x_{max}}\nabla u(x).\nabla v(x)dx+\underbrace{[\nabla u(x).nv(x)]_{x_{min}}^{x_{max}}}_{=0 \text{ dû au conditions de Dirichlet}}+\langle u,n^2v\rangle\\
&= \int_{x_{min}}^{x_{max}}u(x)\Delta v(x)dx-\underbrace{[\nabla v(x).nu(x)]_{x_{min}}^{x_{max}}}_{=0}+\langle u,n^2v\rangle\\
&= \big\langle u,(\Delta+n^2Id)v\big\rangle
\end{aligned}$$

Cela assure ainsi que les modes propres sont orthogonaux relativement à ce produit scalaire. De plus, si on normalise les normes :

$$\langle\tilde{U}_k,\tilde{U}_k\rangle=\frac{1}{\beta_k} \tag{7}$$

la puissance transmise dans chaque mode propre k est donné par $|C_k|^2$.
Étant donné cette normalisation, une onde sortante U_L (vers $-\infty$) est donnée en posant $C_k=0$ pour tout $k>0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\beta_k\langle U_L,\tilde{U}_k\rangle &= \beta_k\sum_{j=1}^{\infty}C_{-j}e^{-i\beta_j z}\langle\tilde{U}_j,\tilde{U}_k\rangle\\
&= \beta_k C_{-k}e^{-i\beta_k z}\frac{1}{\beta_k}\\
&= C_{-k}e^{-i\beta_k z}
\end{aligned}$$

De même, une onde entrante U_I est donnée en fixant $C_{-k}=0$ pour tout $k>0$ et C_k est donné par

$$C_k e^{i\beta_k z}=\beta_k\langle U_I,\tilde{U}_k\rangle$$

Enfin, on différencie (6) pour U_L et U_I pour obtenir les conditions au bord sur les côtés. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial U_L}{\partial z}=\sum_{k=1}^{\infty}-i\beta_k C_{-k}e^{-i\beta_k z}\tilde{U}_k(x)$$

$$\frac{\partial U_L}{\partial z}=-i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\langle U_L,\tilde{U}_k\rangle\tilde{U}_k(x) \text{ dans } \Omega_L \text{ - condition pour les ondes partant vers } -\infty \tag{8}$$

De même :

$$\frac{\partial U_I}{\partial z}=-i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\langle U_I,\tilde{U}_k\rangle\tilde{U}_k(x) \text{ dans } \Omega_L \text{ - condition pour les ondes venant de } -\infty \tag{9}$$

Puisque $U=U_I+U_L$, en replaçant U_L dans (8) et en utilisant (9), on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(L)}}^2\left\langle U,\tilde{U}_k^{(L)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(L)}+2i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(L)}}^2\left\langle U_I,\tilde{U}_k^{(L)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(L)}$$

En surmontant le tout de l'exposant (L) pour indiquer que le tout vient de la gauche, ie de $-\infty$.
De même, pour les ondes se propageant vers $+\infty$, et en supposant qu'il n'y a aucune onde venant de là, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial z}=i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(R)}}^2\left\langle U,\tilde{U}_k^{(R)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(R)} \text{ dans } \Omega_R \text{ - condition pour les ondes allant vers } +\infty$$

Le problème complet est donc : trouver $U(x,z)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\Delta U+n^2U &=& 0 & \text{pour } (x,z)\in\Omega\\
U_{|\Gamma} &=& 0 & \text{(murs réfléchissants)}\\
\frac{\partial U}{\partial z}+i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(L)}}^2\left\langle U,\tilde{U}_k^{(L)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(L)} &=& 2i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(L)}}^2\left\langle U_I,\tilde{U}_k^{(L)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(L)} & \text{sur } \Gamma_L\\
\frac{\partial U}{\partial z}-i\sum_{k=1}^{\infty}{\beta_k^{(R)}}^2\left\langle U,\tilde{U}_k^{(R)}\right\rangle\tilde{U}_k^{(R)} &=& 0 & \text{sur } \Gamma_R
\end{array}\right. \tag{10}$$

où $\{(\tilde{U}_k^{(L)}, \pm\beta_k^{(L)}) : k \in \mathbb{N}^*\}$, $\{(\tilde{U}_k^{(R)}, \pm\beta_k^{(R)}) : k \in \mathbb{N}^*\}$ sont les modes propres dans Ω_L, Ω_R respectivement.

1.2 Formulation du problème d'optimsation

En général, nous nous intéressons à la forme optimale du taper (ou la distribution des indices de refraction) qui dans un sens maximise la puissance transférée entre l'entrée et la sortie du guide d'onde.
Souvent, pour des raisons pratiques, on suppose que l'onde en entrée est une excitation de l'élément propre fondamental (indicé donc par 1), et on s'intéresse à la puissance restante dans l'élément propre fondamental $\tilde{U}_1^{(R)}$ de l'onde de sortie (on assume bien évidemment que les deux ondes admettent au moins un mode guidé). Dans la décomposition spectral (6), l'énergie restante correspond au coefficient $|C_1|^2$. Cela est donné par :

$$P(n^2) = \beta_1^2 |\langle U, \tilde{U}_1^{(R)} \rangle|^2 = \beta_1^2 \left| \int_{x \in \Gamma_R} U(x, z_R) \tilde{U}_1^{(R)}(x) dx \right|^2 \tag{11}$$

Intuitivement (et cela se vérifie, comme montré dans [2]), la puissance transférée est maximale (ie $P = 1$) quand la longueur du taper tend vers l'infini. Il est donc évident qu'on doit imposer une contrainte supplémentaire sur la longueur finie du taper.

2 Solution du problème direct

2.1 Recherche d'une représentation locale

À cause des conditions aux bords que nous avons imposé, le système (10) est en général résolu en utilisant une décomposition spectrale.
On définit $L_t(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + n^2(x, z)U$ l'opérateur 1D de Helmholtz.
Soit Ω_z la section de la région au point z. On définit la base locale $\{(U_k, \beta_k); k \geq 1\}$ à chaque position z par :

$$\begin{array}{rcl} L_t(U_k) & = & \beta_k^2 U_k \quad \text{dans } \Omega_z \\ U_{k|\partial\Omega_z} & = & 0 \end{array} \tag{12}$$

Cela est analogue à (5), donc nous parlerons des solutions U_k comme les fonctions propres locales. Le caractère auto-adjoint de l'opérateur L_t (comme on l'a prouvé précédemment) assure que les (U_k) forment une base orthogonale pour les fonctions $f \in \mathscr{C}(\Omega_z)$ avec $f_{|\partial\Omega_z} = 0$. Ainsi, toute fonction U définie dans une région Ω avec $U_{|\partial\Omega_z} = 0$ peut être exprimée comme l'unique décomposition $U = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z) U_k$ où les coefficients (uniques) c_k dépendent exclusivement de z.
On s'intéresse maintenant à une formulation qui donne une représentation locale du champ éléctromagnétique en terme de propagation vers $-\infty$ ou $+\infty$ des modes du champ EM. On choisit donc le développement de notre fonction U solution de (10) de la forme :

$$\begin{array}{rcl} U & = & \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_{-k}) U_k \\ \frac{\partial U}{\partial z} & = & \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{-k}) i\beta_k U_k \end{array} \tag{13}$$

Ce choix de coefficients nous assure que les a_k, a_{-k} correspondent aux champs se propageant vers $+\infty$ ou $-\infty$. On réutilise la normalisation (7) pour les fonctions propres U_k définies par (12) :

$$\int_{\Omega_z} U_k^2 ds = \frac{1}{\beta_k} \tag{14}$$

Cela assure que la puissance contenue dans le k^{ieme} mode de l'onde se propageant de chaque côté est obtenu par $|a_k|^2$ ou $|a_{-k}|^2$ (voir [2] pour plus de détail).
On remarque en particulier que l'énergie contenue dans l'état fondamental à la sortie du guide d'onde est maintenant

$$P(n^2) = |a_1|^2 \tag{15}$$

En référence à l'expression (11).
En utilisant le fait que la dérivée par rapport à z de U en (13) doit être identique à la seconde ligne de (13), et en substituant (13) dans (3), on en déduit que les a_k doivent vérifier le système d'EDO suivant :

$$\dot{a}_k(z) - i\beta_k a_k(z) = \sum_{j \neq k, 0} r_{kj}(z) a_j(z), \;\; k \neq 0 \tag{16}$$

avec $\beta_{-k} = -\beta_k$ et

$$r_{kj}(z) = \frac{\int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k U_j ds}{2(\beta_k - \beta_j)}$$

pour tout $j \neq k$, $j, k \neq 0$

2.2 Démonstration

Précisons tout d'abord que nous allons noter pour plus de commodité $U_{-k} = -U_k$. Pour démontrer (16), on différencie (13) et on l'identifie à la seconde ligne, on obtient que a_k vérifie :

$$\sum_{k\neq 0} \dot{a}_k U_k + \sum_{k\neq 0} a_k \frac{\partial U_k}{\partial z} = \sum_{k\neq 0} a_k i\beta_k U_k$$

Par orthogonalité des U_k, on projette cette équation sur chaque U_i, et cela mène à :

$$\dot{a}_k + \dot{a}_{-k} = (a_k - a_{-k}) i\beta_k - \sum_{j\neq 0} a_j p_{jk} \ \forall k \neq 0 \tag{17}$$

où $p_{jk} = \beta_{|k|} \int_{\Omega_z} \frac{\partial U_j}{\partial z} U_k dx$ ne sont pas moins que les coefficients du développement de $\frac{\partial U_j}{\partial z}$ dans la base des (U_k). La première expression de (3) peut être réécrite

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + L_t(U) = 0$$

Et donc, en utilisant (13) :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k\neq 0} a_k i\beta_k U_k\right) + L_t\left(\sum_{k\neq 0} a_k U_k\right) = 0$$

comme L_t est linéaire :

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k\neq 0} a_k i\beta_k U_k\right) + \sum_{k\neq 0} a_k L_t\left(U_k\right) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{k\neq 0} \frac{d}{dz}(a_k i\beta_k) U_k + \sum_{k\neq 0} a_k i\beta_k \frac{\partial U_k}{\partial z} + \sum_{k\neq 0} a_k \beta_k^2 U_k = 0 \end{array}$$

En projetant sur la base des (U_k) :

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \frac{d}{dz}(a_k i\beta_k + a_{-k} i\beta_{-k}) \frac{1}{\beta_{|k|}} + \sum_{j\neq 0} a_j i \frac{\beta_j}{\beta_{|k|}} p_{jk} + (a_k + a_{-k}) \frac{\beta_k^2}{\beta_{|k|}} = 0 \ \forall k > 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dz}(a_k i\beta_k + a_{-k} i\beta_{-k}) + \sum_{j\neq 0} a_j i\beta_j p_{jk} + (a_k + a_{-k})\beta_k^2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dz}[i\beta_k(a_k - a_{-k})] + \sum_{j\neq 0} a_j i\beta_j p_{jk} + (a_k + a_{-k})\beta_k^2 = 0 \\ \Rightarrow & i\dot{\beta}_k(a_k - a_{-k}) + i\beta_k(\dot{a}_k - \dot{a}_{-k}) + \sum_{j\neq 0} a_j i\beta_j p_{jk} + (a_k + a_{-k})\beta_k^2 = 0 \end{array}$$

Avec (17), on obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \dot{a}_k + \dot{a}_{-k} & = & (a_k - a_{-k}) i\beta_k - \sum_{j\neq 0} a_j p_{jk} & \forall k \neq 0 \\ \dot{a}_k - \dot{a}_{-k} & = & (a_k + a_{-k}) i\beta_k - (a_k - a_{-k}) \frac{\dot{\beta}_k}{\beta_k} - \sum_{j\neq 0} a_j \frac{\beta_j}{\beta_k} p_{jk} & \forall k \neq 0 \end{array} \tag{18}$$

On somme et on fait la différence des deux équations de (18), et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \dot{a}_k - i\beta_k a_k & = & -\frac{1}{2}(a_k - a_{-k}) \frac{\dot{\beta}_k}{\beta_k} - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j\neq 0} p_{jk} a_j (\beta_k + \beta_j) \\ \dot{a}_{-k} + i\beta_k a_k & = & -\frac{1}{2}(a_{-k} - a_k) \frac{\dot{\beta}_k}{\beta_k} - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j\neq 0} p_{jk} a_j (\beta_k - \beta_j) \end{array} \tag{19}$$

On peut réécrire le tout en une seule équation :

$$\dot{a}_k - i\beta_k a_k = -\frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k}(a_k - a_{-k}) - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j\neq 0} p_{jk} a_j (\beta_k + \beta_j) \tag{20}$$

On va maintenant exprimer plus précisément $\dot{\beta}$ et p_{jk}. On rappelle que par définition :

$$\frac{\partial U_k}{\partial z} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} U_j$$

En différentiant en utilisant (12), on obtient :

$$L_t\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}\right) + n^2 \frac{\partial U_k}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} L_t(U_k) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}\right) + n^2 \frac{\partial U_k}{\partial z} + \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k$$

$$\Rightarrow L_t\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} L_t(U_k) - \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k = \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 U_k) - \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k$$

$$\Rightarrow L_t\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}\right) = \beta_k^2 \frac{\partial U_k}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 - n^2) U_k$$

On a donc, en reprenant la décomposition spectrale de $\frac{\partial U_k}{\partial z}$ et par linéarité de L_t :

$$\begin{array}{rc} & L_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} U_j\right) = \beta_k^2 \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} U_j + \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 - n^2) U_k \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj}(\beta_j^2 - \beta_k^2) U_j = \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 - n^2) U_k \\ \Rightarrow & p_{kj}(\beta_j^2 - \beta_k^2) = \beta_j \int_{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 - n^2) U_k U_j dx \end{array}$$

en projetant sur U_k. Si $j \neq k$, en utilisant l'orthogonalité des fonctions propres, on a :

$$p_{kj} = \frac{\beta_j}{(\beta_k^2 - \beta_j^2)} \int_{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial z}(\beta_k^2 - n^2) U_k U_j dx \tag{21}$$

Si $j = k$, le membre de gauche s'annule, et on a donc une condition sur les β_k :

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_k} \int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k^2 dx \tag{22}$$

p_{kk} est déterminé par la normalisation des U_k :

$$p_{kk} = \beta_k \int_{\Omega_z} \frac{\partial U_k}{\partial z} U_k dx = \frac{\beta_k}{2} \int_{\Omega_z} \frac{\partial U_k^2}{\partial z} dx = \frac{\beta_k}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega_z} U_k^2 dx = \frac{\beta_k}{2} \frac{\partial \beta_k^{-1}}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial z}$$

Donc :

$$p_{kk} = -\frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k} \tag{23}$$

À présent, dans (20), on remplace tous les p en utilisant (21) et (23) et on remplace le terme $\dot{\beta}$ en utilisant (22). Le terme $j = k$ dans la somme se simplifie avec le premier terme dans le membre de droite, et on peut réécrire (20) comme :

$$\begin{aligned} \forall k \neq 0,\ \dot{a}_k - i\beta_k a_k &= -\frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k}(a_k - a_{-k}) - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j \neq 0} p_{jk} a_j (\beta_k + \beta_j) \\ &= -\frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k}(a_k - a_{-k}) + \frac{1}{2\beta_k} a_k 2\beta_k \frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k} - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j \neq 0,k} p_{jk} a_j (\beta_k + \beta_j) \\ &= \frac{\dot{\beta}_k}{2\beta_k} a_{-k} - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j \neq 0,k} p_{jk} a_j (\beta_k + \beta_j) \\ &= \frac{a_{-k}}{4\beta_k} \int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k^2 dx - \frac{1}{2\beta_k} \sum_{j \neq 0,k} \frac{\beta_k}{\beta_j^2 - \beta_k^2} (\beta_k + \beta_j) a_j \int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k U_j dx \\ &= \frac{a_{-k}}{4\beta_k} \int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k^2 dx + \sum_{j \neq 0,k} a_j \frac{1}{2(\beta_k - \beta_j)} \int_{\Omega_z} \frac{\partial n^2}{\partial z} U_k U_j dx \end{aligned}$$

Finalement, on inclut les termes les termes a_{-k} comme le terme $-k$ de la somme et nous arrivons à l'équation (16).

2.3 Équation d'évolution de l'amplitude

Pour compléter l'équation (16), on a également des conditions au début ($z = 0$) et à la fin du guide d'onde ($z = z_R$), qui se traduisent par :

$$a_k(0) = A_k; \quad a_{-k}(z_R) = 0 \quad \forall k > 0 \tag{24}$$

où les A_k sont les coefficients correspondant au champ d'entrée U_I.
L'équation (16) peut se réécrire, on notant $\gamma_k(z) = e^{-i\int \beta_k(z)dz} a_k(z)$:

$$\dot{\gamma}_k(z) = \sum_{j \neq 0,k} r_{kj}(z) e^{i\int_0^z (\beta_j(z) - \beta_k(z))dz} \gamma_j(z) \tag{25}$$

C'est l'équation d'évolution des amplitudes $\gamma_k(z)$. Notons que :

1. Le membre de droite ne dépend pas de γ_k, ce qui signifie que l'équation décrit le couplage entre les différents modes
2. Dans un guide d'onde de section constante, $r_{kj} = 0$, donc $\gamma_k(z)$ est constant, comme attendu.
3. Une borne supérieure pour le couplage est donnée par $r_{kj} \leq \frac{\int_{\Omega_z} \left|\frac{\partial n^2}{\partial z}\right| ds}{2|\beta_k - \beta_j|}$, et donc le couplage tend à être plus fort avec les voisins immédiats, pour lesquels $|\beta_k - \beta_j|$ est petit.

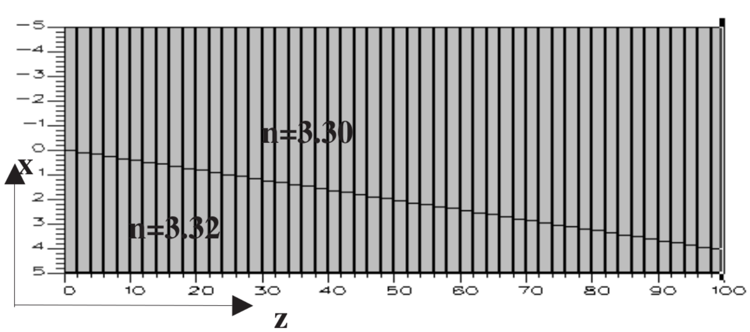
2.4 Précisions sur les conditions aux bords

Les conditions aux bords (4) sont en un sens "artificielles". Si nous utilisions plutôt des conditions plus vraisemblables, les modes locaux seraient divisé en un ensemble discret de modes guidés et en une continuité de modes dû à la radiation. Les équations (13) auraient alors une composante intégrale, ce qui est difficile à analyser analytiquement et numériquement.
C'est pour cela que des "murs" sont utilisés ici. Comme on l'a vu, on obtient ainsi un ensemble discret de modes guidés, qui ne sont pratiquement pas affectés par cette approximation puisqu'ils décroient exponentiellement vers 0 à l'extérieur du taper, et un ensemble discret de modes dû à la radiation. Bien évidemment, toute radiation du taper sera réfléchi par le bord et pourrait se coupler avec les modes guidés dans le taper. Cela affecterait donc la puissance que nous cherchons justement à optimiser ! Cependant, cet effet sera négligeable si le ratio entre la distance entre le bord et le taper et la longueur totale du taper est assez grande pour empêcher le champ réfléchi d'atteindre le cœur du taper avant sa fin.

3 Solution numérique du problème d'optimisation

3.1 Choix de la discrétisation

Le problème posé précédent a été discrétisé de la manière suivante : la paramétrisation du profil du taper a été divisé en N sous-sections équidistantes. L'indice de réfraction dans chaque sous-section est contrôlé par un nombre fini de paramètres. Les paramètres à optimiser ici sont les hauteurs du guide d'onde $\{w_1, ..., w_N\}$ (voir figure 2).



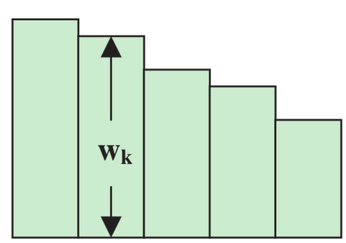


FIGURE 2 – Profil du taper : discrétisation pour le problème d'optimisation

Cette discrétisation impose une régularité très faible pour le profil du taper. On pourrait en effet obtenir des solution avec un profil totalement discontinu. Le champ est calculé grâce à l'analyse faite sur les modes locaux. Les guides d'onde en entrée et en sortie sont choisis tels qu'ils aient au moins un mode guidé. Les dérivées requises sont calculées via un schéma de type différences finies, avec $N = 13$ ou 48 et une solution initiale qui est une droite comme montrée figure 2.

3.2 Résultats et interprétation physique

Les résultats sont assez étonnants : en effet, on pense en général que le profil devrait plutôt ressembler à une courbe assez lisse. Cependant, comme on peut le voir figure 3, le résultat n'est pas vraiment ce à quoi on s'attendait. Ces résultats ont été obtenus en 2900 itérations.

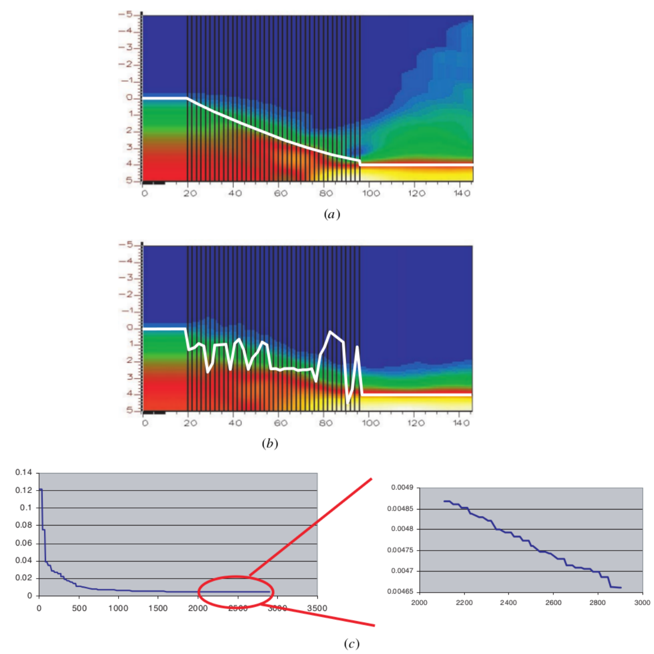


FIGURE 3 – Profil du taper : résultat avec $N = 48$. (a) Forme initial du taper (b) Forme optimale (c) Perte d'énergie en fonction du nombre d'itérations.

On remarque dans la figure 4 que le mécanisme d'optimisation repose surtout sur une résonnance entre les modes. On remarque que le profil est fait de petits pics qui se répètent tous les $10\mu m$. Cela fait que l'énergie reste presque

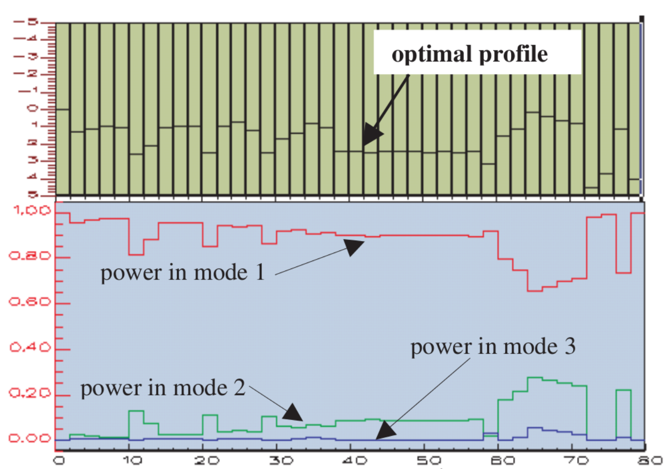


FIGURE 4 – L'énergie est préservée grâce à la resonnance avec les autres modes

entièrement dans les deux premiers modes. Après un passage assez plat, le saut final juste avant la fin réintroduit toute la puissance du mode 2 dans le mode 1. La perte d'énergie totale est de seulement 0.5% en 80μm, tandis qu'un taper plus classique aurait besoin, pour avoir la même efficacité, d'être au moins 5 fois plus long.
On ne sait pas, bien sûr, si c'est la solution optimale, mais cette perte d'énergie faible est bien plus importante. Cependant, ces résultats soulèvent une autre problématique : le problème est mal posé.

3.3 Un problème mal posé

Les résultats précédents montrent une certaine instabilité au niveau de l'optimisation du profil. Pire encore, cette instabilité semble croître encore avec le nombre de sous-sections N.
Cela s'explique par le fait qu'on peut toujours trouver une variation arbitrairement grande de la solution qui donnerait toujours un champ U arbitraire assez proche. La solution optimale est donc instable par rapport aux variations de l'indice de réfraction du profil. On peut voir cela ainsi : supposons que nous avons une solution avec n^2 de notre problème d'optimisation, et appliquons une perturbation δn^2 à n^2. Le champ résultant U subira également une perturbation δU qui est donné au premier ordre par (10) :

$$\begin{array}{ll} \Delta\delta U + n^2\delta U = -U\delta n^2 & (x,z)\in\Omega \\ \delta_U|_\Gamma = 0 & \\ \frac{\partial\delta U}{\partial z} + i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(L)}\langle\delta U,\tilde{U}_k^{(L)}\rangle\tilde{U}_k^{(L)} = 0 & \text{sur } \Gamma_L \\ \frac{\partial\delta U}{\partial z} - i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(R)}\langle\delta U,\tilde{U}_k^{(R)}\rangle\tilde{U}_k^{(R)} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{array} \tag{26}$$

Il est souvent utile de réexprimer (26) sous forme intérgale : on introduit donc la fonction de Green $G(r,r')$ avec $r=(x,z)$ et $r'=(x',z')$.
<u>Fonction de Green :</u> Si on note $\mathfrak{D}$ un opérateur différentiel linéaire, on note $G(x)$ toute solution de l'équation :

$$\mathfrak{D}G(x) = \delta(x)$$

où $\delta(x)$ note ici la distribution de Dirac.

Pour en revenir à notre problème, la fonction de Green $G(r,r')$ est exprimée par :

$$\begin{array}{ll} \Delta G(r,r') + n(r)^2G(r,r') = \delta(r-r') & r,r'\in\Omega \\ G(r,r')|_{r\in\Gamma} = 0 & r\in\Omega \\ \frac{\partial G(r,r')}{\partial z} + i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(L)}\langle G,\tilde{U}_k^{(L)}\rangle\tilde{U}_k^{(L)} = 0 & \text{sur } \Gamma_L \\ \frac{\partial G(r,r')}{\partial z} - i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(R)}\langle G,\tilde{U}_k^{(R)}\rangle\tilde{U}_k^{(R)} = 0 & \text{sur } \Gamma_R \end{array} \tag{27}$$

Le champ δU est ainsi donné par l'expresion :

$$G\Delta\delta U - \delta U\Delta G \equiv \nabla.(G\nabla\delta U - \delta U\nabla G)$$

On intègre sur Ω, et on obtient :

$$\delta U(r) = \int_{r'\in\Omega} -G(r',r)U(r')\delta n^2(r')d\nu - \underbrace{\int_{r'\in\partial\Omega}\left(G(r',r)\frac{\partial U(r')}{\partial n} - U\frac{\partial G(r')}{\partial n}\right).nds'}_{=0 \text{ dû aux conditions aux bords}}$$

(Et ce passage avec la fonction de Green a été totalement incompris, pour être honnête)

On a donc :

$$\delta U(r) = -\int_{r'\in\Omega} G(r,r')U(r')\delta n^2(r')dv := K(\delta n^2) \tag{28}$$

C'est une relation intégrale reliant δU et δn^2. Si on considère δU donné, (28) peut être vu comme une équation intégrale (de Fredholm) du premier type pour δn^2 avec l'opérateur intégral :

$$K : \delta n^2 \mapsto -\int_{z\in\Omega} G(r,r')U(r')\delta n^2(r')dv$$

qui est, en tant qu'opérateur à noyau, compact dans l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}^0(\Omega)$.
Selon [1], les équations intégrales du premier ordre à opérateur compact débouchent sur des problèmes mal posés,

dans le sens que pour tout δU admissible correspondant à une solution δn^2, pour tout ε petit, il existe une autre fonction δn_1^2 assez éloignée de δn^2 (mais typiquement, différent de δn^2 uniquement sur un petit ensemble) tel que $\|K(\delta n_1^2) - \delta U\| < \varepsilon$
On en vient donc aux remarques suivantes :

1. Puisque les fonctions objectifs et les contraintes sur les deux problèmes d'optimisation précédents dépendent explicitement et continuement du champ U, et non de l'indice de réfraction n^2, de petites variations dans le champ impliquent de petites variations dans les contraintes et les fonctions objectifs. Donc, si n^2 est une solution optimale, alors il existe n_1^2 aussi éloigné de n^2 que l'on veut qui minimise la fonction objectif et qui satisfait également les contraintes à une précision arbitraire.
2. Tout schéma d'optimisation qui utilise d'une quelconque manière la linéarisation précédente pour trouver une direction locale de descente rencontrera des instabilités si on n'ajoute aucune présomption sur l'espace dans lequel on recherche la solution, c'est-à-dire si on cherche une solution optimale n^2 dans tout $\mathscr{C}^0(\Omega)$.
3. D'un point de vue physique, ce caractère mal-posé du problème vient du fait que la puissance transmise n'est pas sensible à de grands changements de l'indice de réfraction sur un petit intervalle (comme un pic). En effet, l'onde U "ne voit pas" les variations dans l'indice de réfraction qui sont plus petites que la longueur d'onde de U.
4. On pourrait gagner en stabilité en limitant notre recherche à un espace de fonction plus petit. Par exemple, on pourrait chercher la solution optimale n^2 dans un sous-ensemble borné de $\mathscr{C}^1(\Omega)$, ce qui éviterait les pics sus-mentionnés. L'équation (28) deviendrait alors une fonction $K : \mathscr{C}^1(\Omega) \to K(\mathscr{C}^1(\Omega))$ qui aurait un inverse (s'il existe) dans $\mathscr{C}^0(\Omega)$ dû à la compacité de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$. Si cet inverse n'existe pas, on peut toujours considérer l'inverse généralisé et calculer de manière stable en troncant les valeurs singulières (voir [1]). Ces considérations seront la base de l'algorithme alternatif décrit juste après.

Pour terminer cette discussion, nous allons discuter le role que joue le fait que ce problème soit mal posé dans ce problème.
On considère le problème d'optimisation qui est de trouver une (et pas la) distribution des indices de refraction remplissant un certain nombre de critères. Dans un tel problème, l'uncité n'est pas importante, ni même la stabilité de la solution optimale, puisqu'on souhaite principalement remplir les critères d'optimalité. A contrario, on pourrait aussi considérer le problème inverse, qui est d'identifier la distribution des indices de réfraction provenant d'une certaine mesure. Ce problème inverse est un problème d'identification de paramètre pour une équation aux dérivées partielle et donc mal-posé dans le sens que pour aucune norme disons raisonnable, sa solution (si elle est unique) ne sera pas stable au regard des perturbations sur les données (voir [1]). Mathématiquement, les deux problèmes sont équivalents - seule la manière de voir le problème est différent. On pourrait donc penser que le fait que ce soit mal-posé n'est pas important. Cependant, tout optimiseur digne de ce nom utilisera l'information donnée par le gradient. Comme montré avant, le problème linéarisé à partir duquel on récupère le gradient est en fait mal posé puisqu'il peut être décrit comme une équation intégrale du premier ordre avec un opérateur compact. C'est une propriété lié à notre linéarisation, peu importe la manière dont on la résoud, c'est-à-dire même si on n'utilise pas l'intégrale dans notre simulation. Et cela est bien retrouvé dans les simulations !

4 L'approche par problème inverse

Cette approche est basée sur la conservation de la puissance pour (10), ie :

$$\mathrm{Im} \int_{z\in\Omega_z} U \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} dx$$

est conservé le long du guide d'onde. Donc la puissance totale doit être la puissance totale à la sortie plus la puissance réfléchie à l'entrée :

$$1 = \textstyle\sum_{k\in RB} |a_{-k}(0)|^2 + \sum_{k\in RB} |a_k(z_R)|^2 \quad \text{avec} \quad RB = \{k \in \mathbb{Z}^* | \beta_k^2 > 0\}$$

ce qui correspond à la somme sur tous les modes guidés. La seconde somme contient les coefficients de la décomposition spectrale de $U(x, z_r)$ à la sortie du taper :

$$U(x, z_R) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_R) U_k^{(R)}(x)$$

qui sont déterminés de façon unique par (16) et (24) pour un indice de réfraction donné n : dans (24), tous les coefficients représentant l'onde revenant en arrière ont déjà été mis à 0. Il en suit que la puissance transmise dans le mode fondamental, $|a_1(z_R)|^2$ est toujours plus petit que 1, et on a égalité uniquement quand :

$$\begin{bmatrix} |a_1(z_R)| \\ |a_2(z_R)| \\ |a_3(z_R)| \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{29}$$

On a donc réexprimé le problème d'optimisation mal posé de minimiser $P(n^2)$ en résolvant (29) pour l'indice de réfraction inconnu n. La dépendance de $U(x, z_R)$ par rapport à n n'est pas linéaire, et il n'existe pas nécessairement de solution de (29), puisqu'il n'existe pas forcément de profil de longueur finie assurant $P = 1$ à la sortie. Cependant, cette formulation a l'avantage numérique qu'on prend également en compte a_2, a_3,... en plus de a_1. Même si ce n'est pas nécessaire, cela devrait aider numériquement à "attirer" ces coefficients vers les bonnes valeurs en résolvant (29) au sens des moindes carrés. On utilisera pour cela une approche du type méthode de Newton.
On réécrit (29) $\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}_1$ avec

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}(n) = \begin{bmatrix} |a_1(z_R)| \\ |a_2(z_R)| \\ |a_3(z_R)| \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture, on va omettre les carrés sur n^2 et δn^2. Une étape dans la méthode de Newton donnant la prochaine itération $n + \delta n$ depuis n est donné par le problème linéaire :

$$\left.\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}\right|_n \delta n = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n) \tag{30}$$

En paramétrisant n pour les N sous-sections, $\left.\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}\right|_n$ est une matrice $M \times N$, où M est l'indice du dernier mode retenu.
Ce jacobien a été calculé en utilisant un schéma de type différences finies. Notons que selon le choix de M et N, le système peut être sous- ou sur-déterminé, mais il sera de toute façon résolu au sens des moindres carrés. Cependant, plus on augmente M, plus la solution sera instable, étant donné qu'il s'agit de la discrétisation d'un problème mal-posé. On pourrait utiliser pour régler ce problème des méthodes de régularisation de la théorie des problèmes inverses (voir [1]), mais il a été choisi ici d'utiliser une méthode heuristique de régularisation basé une troncature des valeurs singulières.
Résoudre (30) par les moindres carrés peut être fait un faisant une décomposition en valeurs singulières du Jacobien ;

$$\left.\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}\right|_n = UDV^T$$

où U et V sont des matrices unitaires et D une matrice diagonale avec les valeurs singulières en diagonale suivie de zéros. On note d_k, $k \leq \min(M, N)$ ces valeurs singulières, et on les suppose rangées : $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$. Étant donné qu'on part d'une disrétisation, on s'attend à ce que les plus petites valeurs singulières décroissent vers 0 si la dimension de la matrice augmente.
La régularisation consiste en la troncature des petites valeurs singulières : on choisit un paramètre de régularisation $0 < \alpha < 1$ et on pose :

$$r := \max\{i | d_i \geq \alpha d_1\}$$

Et :

$$D_{red} = diag(d_1, ..., d_r, 0, ..., 0)$$

d'inverse généralisé :

$$D_{red}^{\dagger} = diag\left(\frac{1}{d_1}, ..., \frac{1}{d_r}, 0, ..., 0\right)$$

L'étape δn est donc choisi comme :

$$\delta n = VD_{red}^{\dagger}U^{\dagger}[\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n)] \tag{31}$$

5 Simulation numérique utilisant l'approche problème inverse

L'algorithme utilisé est le suivant : étant donné une étape n_k donné, la prochaine itération est donné par (31). On cherche ensuite à minimiser :

$$F(\lambda) = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n_k + \lambda\delta n)\|_2^2$$

et on pose

$$n_{k+1} = n_k + \lambda_{min}\delta n$$

On répète ce processus jusqu'à ce que $\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}(n)\|_2$ arrête de décroître.
Pour comparer les deux algorithmes (entre la méthode directe et l'approche problème inverse), les deux algorithmes sont lancés avec le même nombre d'itérations, et la puissance à la fin de ces itérations est enfin comparée.
On remarque d'abord une forte variation en fonction du paramètre de régularisation α choisi. Il semble y avoir, pour $N = 13$ et $N = 48$ à chaque fois une région pour α où l'algorithme semble mieux fonctionner. Cela se comprend aisément :

— Si le paramètre est trop proche de 1, seuls les valeurs singulières trop hautes sont retenues, et donc la correction δn sera toujours d'autant plus douce. Cependant, comme on peut le voir sur les simulations, la solution semble bien être très irrégulière. La convergence semble donc être ralentie par les corrections trop faibles apportées à chaque fois.

— A contrario, un paramètre trop proche de zéro retiendra des valeurs singulières très petite, et augmentera d'autant plus l'instabilité numérique.

Deuxième chose : pour un choix raisonnable du paramètre α, les deux algorithmes donnent des résultats similaires dans le cas d'une discrétisation assez grossière, mais la méthode en problème inverse devient plus intéressant pour des discrétisations plus fines (comme on peut le voir figure 5). Cela montre que la régularisation peut en effet accélérer la convergence et nous permettre d'obtenir des résultats en un temps raisonnable, ce qui ne serait pas réalisable avec l'algorithme direct.

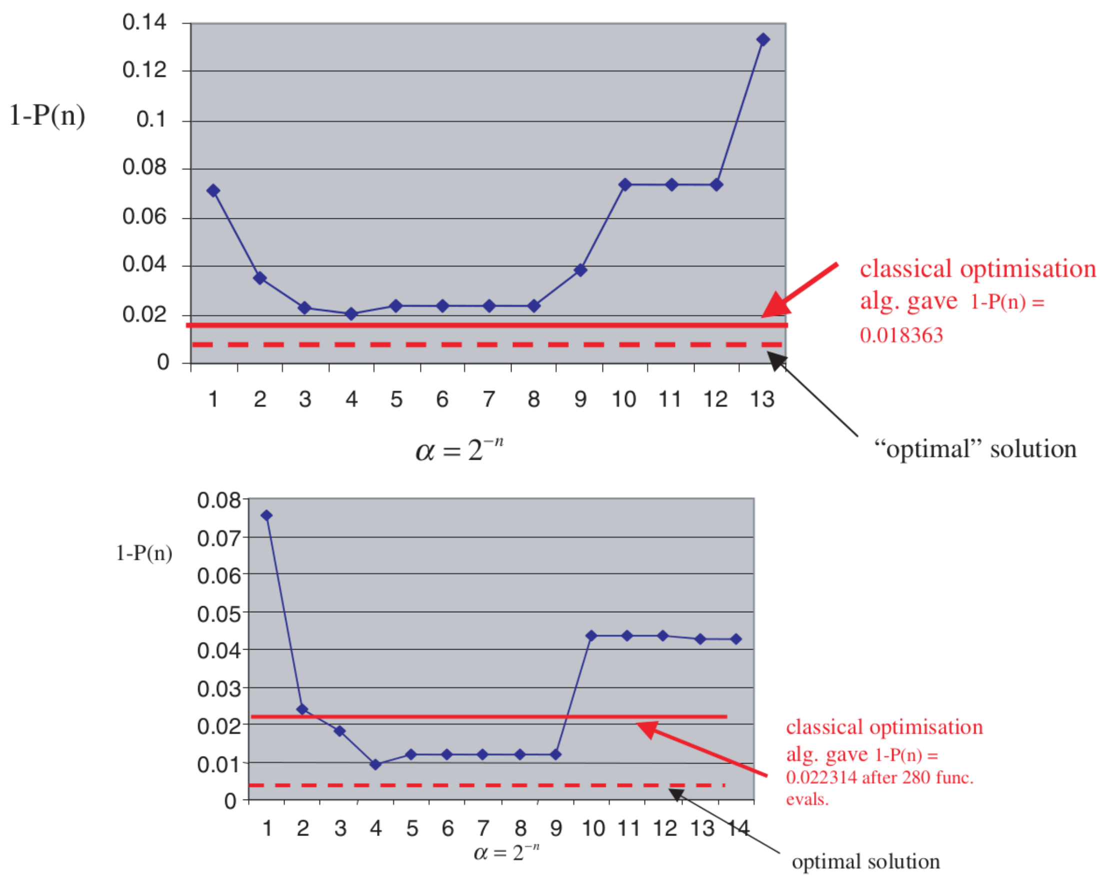


FIGURE 5 – Convergence des deux algorithmes : premier cas avec 13 sous-sections et 10 modes, deuxième cas avec 48 sous-sections et 15 modes

6 Algorithme en cascade

Malgré le fait que le problème soit mal posé, on peut tout de même utiliser le problème direct et le même optimiseur pour trouver une solution intéressante.
L'idée est simple : on commence avec une discrétisation grossière pour avoir un optimum approché. On redivise ensuite le profil en subdivisions plus fines, et on prend comme solution initiale celle trouvée précédemment (en interpolant quelque peu les données pour correspondre à ce nouveau maillage). On note d'ailleurs qu'on peut même augmenter la vitesse de calcul en limitant (du moins pour les premières recherches d'optimum) le nombre de modes, puis qu'ils ne serviront qu'à avoir une solution initiale à l'itération d'après. Notons également que si on utilise l'agorithme par la méthode inverse, il faudra également décroître le paramètre α à chaque rafinement.
L'exemple montré figure 6 utilise ce procédé. Il fallait maximiser la puissance transmise par un guide d'onde où la

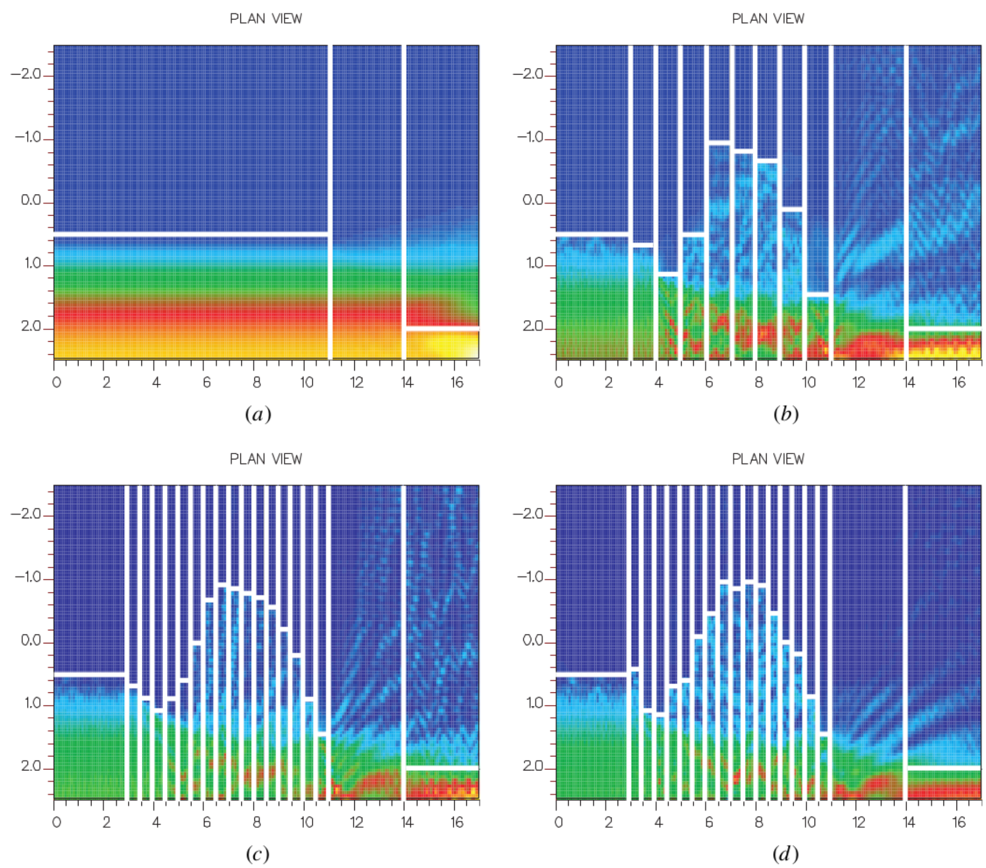


FIGURE 6 – (a) Solution initiale (b) Solution grossière (c) Rafinement et interpolation de la solution grossière (d) Solution avec le rafinement

sortie (beaucoup plus petite) est placée à une certaine distance (non nulle) du guide d'onde, et séparé par un milieu vide. La solution ressemble à une lentille, ce qui est attendu.

Références

[1] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Mathematics and Its Applications. Springer, 1996.

[2] A.W. Snyder and J. Love. *Optical Waveguide Theory*. Science paperbacks. Springer, 1983.