Ben-Gurion University of the Negev

SOLUTION

By

Avi Ferdman

שאלה 1

טענת עזר: תהי A קבוצת מחלקות השקילות בשפה L ותהי B קבוצת השורות הייחודיות ב-M. **קיימת פונ' חח"ע ועל**

$$F: B \longrightarrow A$$

רעיון ההוכחה: לכל מילה w מעל Σ^* נראה שהיא שייכת למחלקת השקילות שמיוצגת ע"י השורה ה-i כך שלכל מילה ה- j בסדר בשפה מתקיים בשורה: $M(L)[i, j] = w \cdot \#j$.

הוכחת הטענה הראשית באמצעות טענת העזר:

$\Leftarrow$ L רגולרי צ"ל מספר השורות במטריצה M סופי. לפי משפט שהוכחנו בכיתה אם L רגולרית אז $|A|$ סופי. מטענת עזר נובע: $|A| = |B|$ ולכן $|B|$ סופי ומכאן מספר השורות במטריצה M סופי.

$\Rightarrow$ נניח שמספר השורות במטריצה M סופי צ"ל L רגולרית. מהגדרת B נובע $|B|$ סופי ומטענת העזר: $|A| = |B|$. נשים לב כי $|A| = rank(L)$ ולכן לפי משפט שהוכחנו בכיתה אם $rank(L)$ סופי אזי L רגולרית.

הוכחת טענת העזר:

תהי A קבוצת מחלקות השקילות בשפה L ותהי B קבוצת השורות הייחודיות ב-M. צ"ל קיימת פונ' חח"ע ועל

$$F: B \longrightarrow A$$

נגדיר את הפונקציה באופן הבא:

תהי $b \epsilon B$ ותהי $a \epsilon A$ נגדיר: $\mathrm{F(b) = a}$ אמ"מ מתקיים:

תהי $w \epsilon b$ ולכל מילה $j \epsilon \Sigma^*$ יהיו: $\#p = w$ ו- $\#k = j$ ונגדיר $a_k = M[p, k]$ (כאשר: $w \cdot j \in L$ אם"ם $M[p, k] = 1$)

תחילה נראה כי הפונ' מוגדת היטב, כלומר שלכל $b \epsilon B$ אם $\mathrm{F(b) = a}$ אז $a \in A$ וגם a יחיד.

לפי הגדרת a, מספר המילים מעל הא"ב שווה למספר העמודות (מכיון שהעמודות מייצגות את המילים האלו בסדר כלשהו), אנו מגדירים עבור כל מילה ב- Σ^* את האינדקס k להיות 0 או 1 כאשר k שווה למיקום המילה בסדר #. ומכאן נקבעת שורה יחידה נסמנה a ומההגדרה $a \in A$. ובנוסף מכיוון ש- A קבוצה (ולא מולטי קבוצה) נובע כי לא קיימת $a' = a \in A$ כך ש: $\mathrm{F(b) = a'}$.

הוכחה שהפונק' F חחע ועל:

הוכחת חח"ע:

תהי $b \epsilon B$ ותהי $a \epsilon A$ אם $\mathrm{F(b) = a}$ אז לא קיים $b' \epsilon B$ ו- $b' \neq b$ כך ש: $\mathrm{F(b') = a}$. נניח בשלילה שקיים $b' \neq b$ כך ש: $\mathrm{F(b') = a}$. נקח מילה $\mathrm{x \in b}$ ומילה $\mathrm{y \in b'}$ לא קיימת ריישא מפרידה ל-x ול-y, מכיוון שאילו היתה קיימת רישא מפרידה בין x ל-y נסמנה s יהי m האינדקס של s תחת הסדר # אזי לפי הגדרה נובע כי אחד מהשניים מתקיים:

1) $x \cdot s \in L$ וגם $y \cdot s \notin L$
2) $y \cdot s \in L$ וגם $x \cdot s \notin L$

נחלק למקרים:

יהי p האינדקס של x תחת הסדר # ויהי l האינדקס של y תחת הסדר #.

מקרה א': נניח ש- 1) מתקיים. מהגדרת המטריצה $M[p, m] = 1$ וגם $M[l, m] = 0$ ולכן שתי השורות שונות באינדקס ה-m ולכן לא יכול להיות שהשורות זהות בסתירה לכך שהנחנו שהשורות המתקבלות זהות.

מקרה ב': סימטרי לחלוטין למקרה א'.

<u>הוכחת על:</u>

תהי $a\epsilon A$ צ"ל קיים $b\epsilon B$ F(b) = a.

נגדיר מחלקת שקילות, ונוכיח כי היא אכן מחלקת שקילות, וכי מתקיים: F(b) = a .

נגדיר את מחלקת השקילות b באופן הבא:

$$\boldsymbol{b = \{w \mid M[p,k] = a_k, \forall k\epsilon\mathbb{N}, \#p = w\}}$$

b אינה ריקה:

ראשית נבחין כי a זו שורה כלשהי במטריצה, אינדקס השורה במטריצה הוא בדיוק מיקום בסדר # של מילה כלשהי נסמנה w, אשר עונה על ההגדרה של קבוצה b ולכן שייכת ל-b .

אין סייפא מפרידה בין שני נציגים ב-b:

יהיו $w_1, w_2 \in b$ נניח בשלילה שקיימת סייפא s מפרידה ביניהם אזי: יהיו : $\#p = w_1$ ו- $\#k = w_2$ $\#m = s$ שרשור סייפא זו תוביל לאחד מבין המצבים:

1) $w_1 \cdot s \in L$ וגם $w_2 \cdot s \notin L$ במקרה זה: $M[p,m] = 1$ וגם: $M[k,m] = 0$ אבל זה בסתירה להגדרת b. (מכיוון ש-b זה אוסף כל המילים ששרשור כל המילים מעל הסדר בספה יתנו את אותו ערך)
2) $w_2 \cdot s \in L$ וגם $w_1 \cdot s \notin L$ במקרה זה: $M[p,m] = 0$ וגם: $M[k,m] = 1$ אבל זה בסתירה להגדרת b. (מכיוון ש-b זה אוסף כל המילים ששרשור כל המילים מעל הסדר בספה יתנו את אותו ערך)

ובכל מקרה הגענו לסתירה.

קיימת סייפא מפרידה בין נציג ממחלת שקילות b ונציג ממחלקת שקילות b':

יהיו $w_1 \in b$ ו- $w_2 \in b'$ ויהיו : $\#p = w_1$ ו- $\#k = w_2$ מכיוון ש- $b' \neq b$ מתקיים כי קיים אינדקס i שבו מתקיים $\mathrm{M[p,i]} \neq \mathrm{M[k,i]}$ נקח אתה המילה $\#i = s$ להיות הסייפא המפרידה ואכן מתקיים **בדיוק** אחד משני התנאים:

1) $w_1 s \in L$ וגם $w_2 s \notin L$
2) $w_2 s \in L$ וגם $w_1 s \notin L$

עבור a שורה כלשהי קיימת b מחלקת שקילות כך שמתקיים $\mathbf{F(b) = a}$ (לקחנו שורה a כלשהי והרכבנו עבורה מחלקת שקילות b כנ"ל בראש העמוד) :

יהי $w\epsilon b$ ותהי $\#p = w$ הערך של w בסדר מעל הא"ב. מהגדרת b מתקיים: $M[p,k] = a_k, \forall k\epsilon\mathbb{N}$ ומכאן השורה שמתקבלת עפ"י הגדרת הפונק' F לפי הגדרתה בהפעלתה על b היא בדיוק a.

<u>שאלה 2</u>

טענת עזר: לכל שפה רגולרית כל מחלקת שקילות שלה היא שפה רגולרית.

הוכחת טענת העזר:

תהי x מחלקת שקילות בשפה L רגולרית כלשהי, לפי טענה שנלמדה בכיתה (ראינו את בניית האוטומט) מספר המצבים באוטומט הדטרמינסטי המינימלי שווה ל- $rank(L)$ כך שכל מצב מייצג מחלקת שקילות. נבנה אוטומט זה, כאשר המצב המקבל **היחיד** הינו המצב המייצג את מחלקת השקילות x. קל להיווכח כי אוטומט זה יקבל את המילים ששיכות למחלקת השקילות x **ורק אותן.** לכן זה אוטומט מקבל את השפה x.לכן קיים אוטומט המקבל את השפה x ולכן היא שפה רגולרית.

<u>סעיף א</u>

הטענה נכונה.

הוכחת הסעיף באמצעות טענת העזר:

$L' = \cup_{A_j \in A'} A_j$ שפה רגולרית. **לפי טענת העזר**, לכל j מתקיים A_j שפה רגולרית **ומתכונת סגירות לאיחוד של שפות רגולריות** נובע כי L' רגולרית.

<u>סעיף ב</u>

הטענה נכונה.

תהי L שפה רגולרית, לפי טענה שנלמדה בכיתה (ראינו את בניית האוטומט) מספר המצבים באוטומט הדטרמינסטי המינימלי שווה ל- $rank(L)$ כך שכל מצב מייצג מחלקת שקילות. תהי $L' = \cup_{A_j \in A'} A_j$. באמצעות בניית אוטומט זה ניתן לקבל את השפה L' רק עלינו לשנות את קבוצת המצבים המקבלים, **קבוצת המצבים המקבלים החדשה** תהיה כל הקודקודים המייצגים את מחלקות השקילות:$A_j \epsilon A'$. ניתן להיווכח כי אוטומט זה יקבל בדיוק את המילים השייכות למחלקות שקילות אלה, **ורק אותן,** ולכן מקבל את השפה L'. כעת נשתמש בטענה שנלמדה בכיתה שאומרת כי לכל שפה רגולרית מספר המצבים באוטומט כלשהו המקבל אותה גדול שווה למספר מחלקות השקילות של השפה. נשים לב כי מספר המצבים באוטומט זה הוא $rank(L)$ (מכיוון שלא שינינו את קבוצת המצבים אלא רק שינינו את קבוצת המצבים המקבלים) ולכן מתקיים:

$$rank(L') \leq |Q| = rank(L) = n$$

<u>סעיף ג</u>

הטענה **אינה** נכונה.

נראה דוגמא נגדית:

$L = \{w \mid |w| mod 4 = 0\}$. לשפה זו קיימות 4 מחלקות שקילות $A = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ כך שכל A_i , $0 \leq i \leq 3$ מייצגת את קבוצת כל המילים שארוכן שארית 4 הוא i (כפי שראינו בתרגול). כעת נקח: $A' = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ולכן:
$L' = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (מכיוון שמתקיים $L' = \cup_{A_j \in A'} A_j$). נשים לב כי מהגדרת מחלקות שקילות (חלוקה של **כל המילים מעל הא"ב**) נובע כי $L = \Sigma^*$. ולכן קבוצת מחלקות השקילות של L' היא קבוצה B המכילה את היחידון שהוא **מחלקת השקילות היחידה** של L' (יחידון B_1 הוא כל המילים מעל הא"ב) כלומר: $B = \{B_1\}$ ובפרט מתקיים:
$1 = |B| = rank(L') < |A'| = 4$

<u>סעיף ד</u>

הטענה נכונה.

נראה דוגמא: $L = \{w \mid |w| mod 4 = 0\}$. לשפה זו קיימות 4 מחלקות שקילות $A = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ כך שכל A_i , $0 \leq i \leq$ 3 מייצגת את קבוצת כל המילים שארוכן שארית 4 הוא i (כפי שראינו בתרגול). כעת נגדיר $L' = \{w \mid |w| mod 2 = 0\}$. נשים לב כי $L' = A_0 \cup A_2$ נקח $A' = \{A_0, A_2\}$ ולכן מתקיים: $L' = \cup_{A_j \in A'} A_j$. בנוסף מחלקות השקילות של L' הן $B = \{B_0, B_1\}$, כך שכל B_i , $0 \leq i \leq 1$ מייצגת את קבוצת כל המילים שארוכן שארית 2 הוא i. בפרט מתקיים: $2 = |B| = rank(L') <$ $rank(L) = |A| = 4$.

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א:</u>

הטענה אינה נכונה, דוגמא נגדית:

יהי Σ א"ב כלשהו לא ריק. נקח $L = \{w \mid w \in \Sigma^*, |w| = 1\}$. נסמן את קבוצת מחלקות השקילות של L: $A = \{A_0, A_1, A_{\geq 2}\}$ כאשר A_i היא קבוצת כל המילים מעל Σ^* בגודל i. תחילה נראה כי זו אכן קבוצת מחלקות השקילות של L. יהיו w_1, w_2 שתי מילים מאותה קבוצה A_i כלומר או ש: $|w_1| = |w_2| < 2$ או ש: $|w_1| \geq 2,\ |w_2| \geq 2$ ונראה כי כל הוספת כל סייפא תגרום לשתיהן להתקבל בשפה או לשתיהן לא להתקבל בשפה.

מקרה א: נניח כי $|w_1| = |w_2|$, תהי s סייפא כלשהי, לכן: $|w_1 s| = |w_2 s|$ ולכן אם $|w_1 s| = |w_2 s| = 1$ אז הסייפא תגרום למילים להתקבל בשפה ואחרת אם $|w_1 s| = |w_2 s| \neq 1$ אז הסייפא תגרום למילים לא להתקבל בשפה.

מקרה ב: $|w_1| \geq 2,\ |w_2| \geq 2$ במקרה כזה שתי המילים לא בשפה, ואף סייפא שנוסיף לא תגרום להן להתקבל בשפה.

כעת נראה כי קיימת סייפא מפרידה בין שתי מילים ממחלקות שקילות שונות:

יהיו w_1 , w_2 מילים משתי מחלקות שקילות שונות. נחלק למקרים:

מקרה א': אחת מהמילים שייכת למחלקת השקילות A_0, נניח בה"כ שזו w_1. במקרה זה, נקח סייפא מפרידה $s = \sigma \epsilon \Sigma$ ולכן $|w_1 s| = 1$ ושייכת לשפה, וגם $|w_2 s| > 1$ ולכן לא שייכת לשפה.

מקרה ב: אחת מהמילים שייכת למחלקת השקילות A_1, נניח בה"כ שזו w_1. במקרה זה, נקח סייפא מפרידה $s = \varepsilon$ ולכן $|w_1 s| = 1$ ושייכת לשפה, וגם מתקיים או $|w_2 s| > 1$ או $|w_2 s| = 0$ ובכל מקרה לא שייכת לשפה.

כעת נתבונן ב-$f_\sigma(L)$. מהגדרתה: $f_\sigma(L) = \{\varepsilon\}$ ולכן קיימות 2 מחלקות שקילות לשפה זו: קבוצה שמכילה את המילה ε וקבוצה שמכילה את כל שאר המילים.

הראנו כי $rank(L) = 3$ ו-$rank\big(f_\sigma(L)\big) = 2$ ולכן: $rank\big(f_\sigma(L)\big) \neq \mathrm{rank(L)}$.

<u>סעיף ב:</u>

הטענה אינה נכונה, דוגמא נגדית:

נקבע אות σ ששייכת ל- Σ כלשהי לא ריקה.

תהי $L = \{\sigma w \mid w \in \Sigma^*\}$. נסמן את קבוצת מחלקות השקילות של L: $A = \{A_0, A_\sigma, A_{!\sigma}\}$ כאשר:

$$\mathrm{A}_0 = \{\varepsilon\}\,, \mathrm{A}_\sigma = \{\, \sigma w \mid w \in \Sigma^*\}\,, \mathrm{A}_{!\sigma} = \{\, \sigma' w \mid w \in \Sigma^*, \sigma' \neq \sigma\}$$

נקח שתי מילים מאותה מחלקת שקילות ונראה כי כל סייפא שנוסיף או ששתי המילים יתקבלו בשפה או ששתיהן לא יתקבלו:

מקרה א': הטענה מתקיימת באופן ריק על מחלקת השקילות A_0.

מקרה ב': יהיו $w_1, w_2 \epsilon A_\sigma$. מהגדרת A_σ שתי המילים מתחילות באות σ ולכן כל סייפא שנשרשר לשתי המילים הן עדיין יתחילו באות σ ולכן שתיהן ישתייכו לשפה.

מקרה ג': יהיו $w_1, w_2 \epsilon A_{!\sigma}$. מהגדרת $A_{!\sigma}$ שתי המילים **לא** מתחילות באות σ ולכן כל סייפא שנשרשר לשתי המילים הן עדיין **לא** יתחילו באות σ ולכן שתיהן **לא** ישתייכו לשפה.

נקח שתי מילים כלשהן ממחלקות שקילות שונות ונראה כי קיימת סייפא מפרידה:

מקרה א': $w_1 \epsilon A_0$ $w_2 \epsilon A_\sigma$ נקח סייפא $s \in \Sigma^*$ שהיא מילה כלשהי **שאינה** מתחילה באות σ מההגדרה של L מתקיים: $s \notin L$ $w_2 s \in L$ ולכן s זו סייפא מפרידה.

מקרה ב': $w_2\epsilon A_{!\sigma}$ $w_1\epsilon A_0$ נקח סייפא $s\in\Sigma^*$ שהיא מילה כלשהי שמתחילה באות σ מההגדרה של L מתקיים: $s\in L$ $w_2s\notin L$ ולכן s זו סייפא מפרידה.

מקרה ג': $w_2\epsilon A_{\sigma}$ $w_1\epsilon A_{!\sigma}$ נקח סייפא $s\in\Sigma^*$ מילה כלשהי (יכולה להיות כל מילה מעל הא"ב) מההגדרה של L מתקיים $w_1s\notin L$ וגם $w_2s\in L$ ולכן s זו סייפא מפרידה.

כעת נתבונן ב-$L^R=\{w\sigma|\ w\in\Sigma^*\}$. נסמן את מחלקות השקילות של L^R : $A=\{A_\sigma,A_{!\sigma}\}$ כאשר:

$$\mathrm{A}_\sigma=\{w\sigma\mid w\in\Sigma^*\}\,,\mathrm{A}_{!\sigma}=\{\,w\sigma'\mid w\in\Sigma^*,\sigma'\neq\sigma\}$$

נקח שתי מילים מאותה מחלקת שקילות ונראה כי כל סייפא שנוסיף או ששתי המילים יתקבלו בשפה או ששתיהן לא יתקבלו:

מקרה א: $w_1,w_2\epsilon A_\sigma$ ותהי $s\in\Sigma^*$ סייפא כלשהי נשים לב כי אם s מסתיימת בσ אז שתי המילים מהגדרת L^R שייכות לשפה, ואחרת אם s לא מסתיימת בσ שתי המילים אינן שייכות לשפה.

מקרה ב: $w_1,w_2\epsilon A_{!\sigma}$ ותהי $s\in\Sigma^*$ סייפא כלשהי נשים לב כי אם s מסתיימת בσ אז שתי המילים מהגדרת L^R שייכות לשפה, ואחרת אם s לא מסתיימת בσ שתי המילים אינן שייכות לשפה.

נקח שתי מילים כלשהן ממחלקות שקילות שונות ונראה כי קיימת סייפא מפרידה:

$w_2\epsilon A_\sigma$ $w_1\epsilon A_{!\sigma}$ ניקח את הסייפא ε ולפי הגדרת מחלקות השקילות והגדרת L^R נובע $w_2\in L^R$ וגם $w_1\notin L^R$

לכן: $rank(L)=3$ וגם $rank(L^R)=2$ ולכן: $rank(L^R)\neq rank(L)$.

<u>סעיף ג:</u>

הטענה נכונה. נוכיח זאת:

נחלק למקרים:

מקרה א': המילה הקצרה ביותר בשפה היא ε.

מקרה ב': המילה הקצרה ביותר בשפה היא באורך $k>0$.

אבחנה: לכל שפה ומעל כל א"ב, קיימת לפחות מחלקת שקילות אחת. (מכיוון שמחלקות השקילות מהוות חלוקה של Σ^* וקיימת לפחות מילה אחת - ε)

נניח ומקרה א' מתקיים:

מהאבחנה קיימת לפחות מחלקת שקילות אחת, לכל שפה ומעל כל א"ב ולכן הטענה מתקיימת.

נניח ומקרה ב' מתקיים:

תהי w המילה הקצרה ביותר ב-L נסמן אורכה ב-k. נניח בשלילה שהטענה אינה מתקיימת. כלומר שמתקיים: $rank(L)\leq k$. נסתכל על המילים w_i כך ש:$0\leq i\leq k$ כך: w_i זו הרישא ה-i של w. קיימות $k+1$ מילים כאלה, וקיימות לפי ההנחה, לכל היותר k מחלקות שקילות. לכן מעקרון שובך היונים בהכרח קיימות לפחות 2 מילים w_i,w_j ששייכות לאותה מחלקת שקילות, כך ש$|w_i|=i\neq|w_j|=j$. נניח בה"כ ש: $i>j$ נסתכל על המילה שהיא הסייפא ה-$k-i$ של w נסמנה w', היא בהכרח מהווה סייפא מפרידה בין w_i לבין w_j מכיוון שמההגדרה מתקיים: $w_i\cdot w'=w$ וגם $|w_j\cdot w'|<k$ ולכן $w_j\cdot w'\notin L$, וזו סתירה להיותן שייכות לאותה מחלקת שקילות.

<u>סעיף ד:</u>

הטענה בשאלה:

$$rank(L_1 \backslash L_2) = rank\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) > rank(L_1) \cdot rank(L_2)$$

הטענה אינה נכונה. נוכיח כי לכל שתי שפות, מתקיים:

$$rank(L_1 \backslash L_2) = rank\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \leq rank(L_1) \cdot rank(L_2)$$

לפי טענה שנלמדה בכיתה ניתן לבנות אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים ל-L_1 ול-L_2 כך M_1 ו-M_2 שמספר המצבים בהם הוא $rank(L_1)$ ו- $rank(L_2)$ בהתאמה. אם כך ניתן לבנות אוטומט מכפלה של שתי השפות שיקבל את השפה: $rank\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right)$ ע"י כך שנגדיר את המצבים המקבלים בו להיות המצבים שהם מכפלה של מצב מקבל מM_1 ושל מצב לא מקבל מ-M_2 ולקבל אוטומט שמספר המצבים בו הוא: $rank(L_1) \cdot rank(L_2)$. אוטומט זה יקבל את השפה $L_1 \cap \overline{L_2}$. ממשפט שנלמד בכיתה לכל שפה L ולכל אוטומט M שמקבל את השפה מתקיים: $|Q| \geq rank(L)$ ולכן מתקיים:

$$rank(L_1 \backslash L_2) = rank\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \leq |Q| = rank(L_1) \cdot rank(L_2)$$

שאלה 4

סעיף א:

השפה אינה רגולרית.

נקח קבוצה של אינסוף מילים, נראה כי כל זוג מילים שייכות למחלקות שקילות שונות, מכך יבע כי קיימות אינסוף מחלקות שקילות ולכן השפה אינה רגולרית.

נתבונן במילים מהצורה: AU^k כך ש- $k \in \mathbb{N}$. נתבונן בשתי מילים שונות: $w_1 = AU^{k_1}$ ו- $w_2 = AU^{k_2}$ כך ש: $k_1 \neq k_2$.
בהכרח קיימת סייפא מפרידה, s, בין שתי המילים, נקח את הסייפא: $s = A^{k_1}$. נקבל את המילים: $w_2 s = AU^{k_2}A^{k_1}$ ו- $w_1 s = AU^{k_1}A^{k_1}$ ומתקיים: $w_1 s \in L$ וגם: $w_2 s \notin L$. לכן יש אינסוף מחלקות שקילות מכיוון שיש באינסוף מילים כאלו ולכן השפה אינה רגולרית.

סעיף ב:

השפה רגולרית.

$$(A \cup U)^*(G^*(GCC^*)^*GG^*)^* \cup (A \cup U)^*(C^*(CGG^*)^*CC^*)^*$$

תהי $w \in L$ נשים לב כי אם $U \in w$ או $A \in w$ אזי בהכרח האותיות G, C לא נמצאות לפניהן במילה, זה נובע מהגדרת L. בנוסף נבחין כי רצף האותיות הראשון במילה שהוא מבין האותיות G או C יקבע גם את האות שתהיה ברצף האחרון במילה (במילים אחרות אם הרצף הראשון הוא לדוגמא מהאות C אז המילה תסתיים גם ברצף כלשהו של האות C).

סעיף ג:

השפה אינה רגולרית.

נראה זאת ע"י כך שנוכיח כי סדרת ההפרשים אינה חסומה. בנוסף הראינו בכיתה כי אילו סדרת ההפרשים אינה חסומה אזי השפה אינה מקיימת את למת הניפוח (כי קיים חסם בין הפרש אורכי שני איברים עוקבים, הוא לכל היותר קבוע הניפוח). נראה כעת כי הסדרה אכן אינה חסומה:

$$|w_{n+1}| - |w_n| = (n+1)^2 + 2(n+1) - n^2 - 2n = 2n + 3$$

הפרש זה אינו חסום, ככל ש-n גדול יותר, כך ההפרש גדל.

סעיף ד:

השפה אינה רגולרית.

נניח בשלילה ש-L רגולרית, אזי היא מקיימת את למת הניפוח. יהי N קבוע הניפוח, נסתכל על המילה:

$$G^N U^1 C^{N \cdot 1}$$

לפי הלמה קיים פירוק $G^N U^1 C^{N \cdot 1} = xyz$ כך ש: $|y| > 0$ וגם: $|xy| \leq N$. לכן xy זו רישא כלשהי של G^N. נסתכל על $xz = xy^0 z$ הנמצא גם ב-L לפי הלמה. קיבלנו: $G^{N-i}U^1 C^{N \cdot 1}$ כך ש: $1 \leq i \leq N$ זו מילה בשפה, בסתירה להגדרת השפה (מכיוון ש: $N \neq N - i$). לכן השפה אינה מקיימת את למת הניפוח ולכן אינה רגולרית.

סעיף ה:

השפה רגולרית.

נראה אוטומט המקבל את השפה:

$$M = (\Sigma, Q, s, A, \delta)$$

$$\Sigma = \{A, U, G, C\}$$

$$Q = \{q_0^1, q_1^1, q_2^1, q_0^2, q_1^2, q_2^2, q_0^3, q_1^3, q_2^3, q^4\}$$

$$s = q_0^1$$

$$A = \{q_0^1, q_0^2, q_0^3\}$$

$$\delta(q,\sigma) = \begin{cases} q^1_{(i+1)mod3} & if:\ q = q^1_{(i)mod3} \wedge \sigma = U \\ q^2_{(i+1)mod3} & if:\ q = q^2_{(i)mod3} \wedge \sigma = G\ or\ \ q = q^1_{(i)mod3} \wedge \sigma = G \\ q^3_{(i+1)mod3} & if:\ q = q^3_{(i)mod3} \wedge \sigma = C\ or\ \ q = q^2_{(i)mod3} \wedge \sigma = C\ or\ \ q = q^1_{(i)mod3} \wedge \sigma = C \\ q^4 & else \end{cases}$$

הסבר:

האוטומט מורכב מ-3 מעגלים וממצב "זבל". המעגל הראשון הוא של אותיות U המעגל השני הוא של אותיות G והמעגל השלישי הוא של אותיות C. כאשר אנו במעגל ששייך לאות מסויימת וקוראים את אותה אות, אנו עוברים למצב הבא במעגל שמחשב את גודל המילה מודולו 3. כאשר אנו במעגל של אות מסויימת וקוראים אות אחרת, אז אם זה חוקי שהאות הזו תקרא אחרי האות שאנו נמצאים במעגל שלה, נעבור למעגל שאחראי על האות שקראנו וספציפית למצב שסופר את גודל המילה שהיינו בה ועוד אחד מודולו 3, אחרת אם זה לא חוקי לקרוא את האות שקראנו נעבור למצב זבל. המצבים המקבלים הם המצבים בכל מעגל שגודל המילה מודולו 3 בהם הוא 0.

סעיף ו:

השפה רגולרית.

$$M = (\Sigma, Q, s, A, \delta)$$

$$\Sigma = \{A, U, G, C\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$s = q_0$$

$$A = \{q_2\}$$

$$\delta(q,\sigma) = \begin{cases} q_{i+1} & if\ q = q_i\ \wedge i \leq 1 \\ q_2 & else \end{cases}$$

שאלה 5

סעיף א:

נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה, כלומר יהיו שתי שפות L_1, L_2 המקיימות: $L = L_1 \cup L_2$ כך ש: $n > \max(n_1, n_2)$. לכן, ממינימאליות קבוע הניפוח נובע כי קיימת מילה w, כך ש: $|w| = n - 1$ וגם $w \in L$ וגם w אינה ניתנת לניפוח עפ"י תנאי למת הניפוח. מהגדרת L מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $w \in L_1$: מכיוון ש- $|w| = n - 1 \geq n_1$ נובע ש- w ניתנת לניפוח ב-L מכיוון שהיא ניתנת לניפוח ב-L_1 בסתירה.
2) $w \in L_2$: מכיוון ש- $|w| = n - 1 \geq n_2$ נובע ש- w ניתנת לניפוח ב-L מכיוון שהיא ניתנת לניפוח ב-L_2 בסתירה.

בכל אחד מהמקרים הגענו לסתירה.

נראה דוגמא של שתי שפות L_1, L_2 המקיימות: $L = L_1 \cup L_2$ כך ש: $n < \max(n_1, n_2)$. יהי Σ א"ב כלשהו לא ריק.

נקבע אות σ ששייכת ל- Σ. נגדיר:

$$L_1 = \{\sigma w \mid w \in \Sigma^*\}$$

$$L_2 = \overline{L_1}$$

נראה כי: $\max(n_1, n_2) \geq 2$. לצורך כך מספיק להראות כי $n_1 \geq 2$. לכן נראה כי $n_1 \neq 1$ ולכן ינבע $n_1 \geq 2$.

לצורך כך נקח מילה, שגודלה 1 ששייכת לשפה ונראה כי **לכל חלוקה של המילה** (חוקית על פי תנאי למת הניפוח) **קיים ניפוח** על פי תנאי למת ניפוח כך שנקבל מילה **שאינה** שייכת לשפה.

תהי $w = \sigma$, על פי הגדרת L_1 ברור כי $w \epsilon L_1$ (זו המילה היחידה בגודל 1 ששיכת לשפה). מתנאי למת הניפוח חלוקת המילה חייבת להיות: $x = \varepsilon, y = \sigma, z = \varepsilon$. (מכיוון ש$y$ אינו אפסילון), **זו חלוקת המילה היחידה החוקית.** כלומר המילה היא מהצורה: σ^k. נבצע ניפוח שלילי כלומר $k = 0$ ונקבל $w' = \varepsilon \notin L_1$. ולכן מוכרח להתקיים: $n_1 \geq 2$.

כעת נתבונן ב: $L = L_1 \cup L_2$. מהגדרתה, נובע כי $L = \{w \mid w \in \Sigma^*\}$. עבור שפה כזו ברור כי קבוע הניפוח המינימאלי קטן **ממש מ2** מכיוון שכל מילה שניקח שגודלה קטן מ2 (למשל מילים בגודל 1), אם ניתן לחלק אותה באופן כזה שיקיים את תנאי למת הניפוח אז יהיה לנפח אותה מכיוון שברור כי **לאחר הניפוח תתקבל מילה כלשהי מעל Σ^* ולכן תהיה שייכת לשפה.** לכן נקבל $n < 2$. ובסה"כ קיבלו כי:

$$n < 2 \leq n_1 \leq \max(n_1, n_2)$$

סעיף ב:

נראה דוגמא של שתי שפות L_1, L_2 המקיימות: $L = L_1 \cap L_2$ כך ש: $n < \min(n_1, n_2)$.

יהי Σ א"ב כלשהו לא ריק, **ששייכות אליו לפחות שתי אותיות.**

נקבע שתי אותיות **שונות** σ_1, σ_2 ששייכת ל- Σ.

נגדיר:

$$L_1 = \{\sigma_1 w \mid w \in \Sigma^*\}$$

$$L_1 = \{\sigma_2 w \mid w \in \Sigma^*\}$$

רעיון הדוגמא הוא להראות שתי שפות שקבוע הניפוח של כל אחת מהן גדול או שווה ל2, החיתוך שלהן הוא שפה ריקה ולכן קבוע הניפוח של החיתוך שלהן קטן ממש מ2.

ראשית נראה כי $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2 \geq 2$:

הראנו זאת בסעיף א', כלומר הראנו כי $n_1, n_2 \neq 1$ ולכן ינבע $n_1, n_2 \geq 2$.

כעת מהגדרתן השפות בהכרח זרות, כלומר לא יכולה להיות מילה ששייכת לחיתוך שלהן מכיוון שאלמלא כן ינבע כי $\sigma_1 = \sigma_2$ בסתירה. מכך שהחיתוך הוא שפה ריקה ומכך שקבוע הניפוח המינימאלי של שפה ריקה **קטן ממש** מ2 (תנאי למת הניפוח מתקיימים באופן ריק) נקבל בסה"כ:

$$n < 2 \le \min(n_1, n_2) \le n_1, n_2$$

<u>סעיף ג:</u>

תהי $L = L_1 \cdot L_2$. נחלק למקרים:

מקרה א': אם אחת השפות L_1 או L_2 לפחות היא השפה הריקה.

לכן: $L = L_1 \cdot L_2 = \emptyset$ ולכן למת הניפוח מתקיימת באופן ריק עבור כל קבוע ניפוח טבעי ולכן הטענה: $n \le n_1 + n_2$ מתקיימת.

מקרה ב': שתי השפות אינן שפות ריקות. נניח בשלילה שהטענה אינה מתקיימת כלומר שמתקיים $n > n_1 + n_2$. ממינימאליות קבוע הניפוח נובע כי קיימת מילה $w = w_1 w_2$ כך ש: $|w| = n - 1$ וגם $w \in L$ וגם w אינה ניתנת לניפוח עפ"י תנאי למת הניפוח. מהגדרת L מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $|w_1| \ge n_1$ – אזי w_1 ניתנת לניפוח על פי תנאי למת הניפוח בL_1 ולכן w ניתנת לניפוח בL בסתירה.
2) $|w_2| \ge n_2$ – אזי w_2 ניתנת לניפוח על פי תנאי למת הניפוח בL_2 ולכן בסה"כ w ניתנת לניפוח בL בסתירה.

בכל אחד מהמקרים הגענו לסתירה.

נראה דוגמא של שתי שפות L_1, L_2 המקיימות: $L = L_1 \cdot L_2$ כך ש: $n < n_1 + n_2$.

יהי Σ א"ב כלשהו לא ריק, ונקבע אות σ ששייכת ל- Σ. נגדיר: $L_2 = \phi$, $L_1 = \{\sigma w \mid w \in \Sigma^* \}$.

אבחנה: כל מספר טבעי הוא קבוע ניפוח של שפה ריקה, מכיוון שתנאי למת הניפוח מתקיימים עבורו באופן ריק.

רעיון הדוגמא הוא שקבוע הניפוח של השפה הריקה הוא כל מספר טבעי מהאבחנה, בנוסף נראה כי קבוע הניפוח של L_1 כלומר, n_1 גדול או שווה ל2 ומכיוון **ששרשור של שפה ריקה עם שפה כלשהי אחרת הוא שפה ריקה** נקבל את הטענה הרצויה בסעיף.

תחילה נראה כי $n_1 \ge 2$:

השתמשנו בשפה L_1 בסעיפים א' ו-ב' והראנו בסעיף א' כי מתקיים קבוע הניפוח של השפה גדול או שווה 2.

מכך ומהאבחנה נובע:

$n < n_1 + n = n_1 + n_2$ (השיוויון נובע מכך שL_2 וגם L הן השפה הריקה ולכן קבוע הניפוח המינימאלי שלהן שווה).