Ben-Gurion University of the Negev

SOLUTION

By

Avi Ferdman

<u>שאלה 1</u>

i. נניח $L_1 \subseteq L_2$ צ"ל ${L_1}^* \subseteq {L_2}^*$ כלומר $\bigcup_{n=0}^{\infty} {L_1}^n \subseteq \bigcup_{n_2=0}^{\infty} {L_2}^{n_2}$.

<u>טענת עזר 1:</u> לכל n טבעי מתקיים אם $L_1 \subseteq L_2$ אז: $\bigcup_{k=0}^{n} {L_1}^k \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} {L_2}^k$

<u>טענת עזר 2</u>: לכל n טבעי, אם $L_1 \subseteq L_2$ אז ${L_1}^n \subseteq {L_2}^n$.

<u>נוכיח באינדוקציה את טענת עזר 1:</u>

<u>בסיס:</u> n=0 אז מתקיים $\{\varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon\}$.

<u>צעד:</u> נניח כי $\bigcup_{k=0}^{n-1} {L_1}^k \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} {L_2}^k$ צ"ל $\bigcup_{k=0}^{n} {L_1}^k \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} {L_2}^k$. תהי $w \in \bigcup_{k=0}^{n} {L_1}^k$ צ"ל $w \in \bigcup_{k=0}^{n} {L_2}^k$.
מההגדרה נובע כי $w \in \bigcup_{k=0}^{n-1} {L_1}^k \cup {L_1}^n$ מטענת עזר 2 נובע: $w \in \bigcup_{k=0}^{n-1} {L_1}^k \cup {L_2}^n$ מהנחת האינדוקציה נובע כי $w \in \bigcup_{k=0}^{n-1} {L_2}^k \cup {L_2}^n$ ומההגדרה: $w \in \bigcup_{k=0}^{n} {L_2}^k$.

<u>הוכחת טענת עזר 2:</u>

נניח $L_1 \subseteq L_2$ יהי n טבעי כלשהו צ"ל: ${L_1}^n \subseteq {L_2}^n$. תהי $w \in {L_1}^n$ מההגדרה נובע: $w = w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n$,
מההגדרה מתקיים: $w_k \in L_1$ לכל $1 \le k \le n$ ומההנחה: $w_k \in L_2$ לכל $1 \le k \le n$ ולכן מהגדרת ${L_2}^n$: $w \in {L_2}^n$.

נשים לב כי הטענה המרכזית נובעת ישירות מטענת עזר 1.

ii. דוגמא נגדית לגרירה ההפוכה:
נגדיר:

$$\Sigma = \{1\}, L_1 = \{11\}, L_2 = \{1\}$$

בדוגמא זו אכן מתקיים: ${L_1}^* \subseteq {L_2}^*$ אבל לא מתקיים $L_1 \subseteq L_2$.
דוגמא נגדיר:

$$\Sigma = \{1\}, L_1 = \{11\}, L_2 = \{1\}$$

בדוגמא זו אכן מתקיים: ${L_1}^* \cup {L_2}^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ וגם מתקיים $L_1 \not\subseteq L_2$ ו- $L_2 \not\subseteq L_1$.

<u>שאלה 2</u>

$$L = 0^* \circ (001 \cup 010 \cup 100 \cup 00) \circ 0^*$$

על סמך הבנייה הנ"ל, ניתן לראות כי בתחילת המילה ובסופה, ניתן לשרשר את האות "0" ללא הגבלה (כולל 0 פעמים) ובהכרח אחד מהביטויים : 001,010,100,00 יהיה תת מחרוזת במילה. ומכאן שהאות "0" מופיעה פעמיים לכל הפחות, האות "1" תופיע פעם אחת לכל היותר, וניתן להרכיב כל מילה העומדת בתנאים אלו.

שאלה 3

i. 2 מילים המושרות ע"י השפה:
1) 010
2) 00100

2 מילים שאינן מושרות ע"י השפה:
1) 0
2) 1

ii. 2 מילים המושרות ע"י השפה:
1) 10101
2) 1101011

2 מילים שאינן מושרות ע"י השפה:
1) 0
2) 00

iii. 2 מילים המושרות ע"י השפה:
1) 0101
2) 01101

2 מילים שאינן מושרות ע"י השפה:
1) 1
2) 11

שאלה 4

i. מילה השייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1 ו- r_2: 01101010
ii. מילה השייכת לr_1 אבל לא שייכת לשפה של r_2: 01101001
iii. מילה השייכת לשפה של r_2 אבל לא שייכת לשפה של r_1: 001010
iv. מילה שלא שייכת לשתי השפות המושרות ע"י r_1, r_2: 0

שאלה 5

תהא L שפה רגולרית ויהא r ביטוי רגולרי המגדיר אותה.
נראה כי לשפה L' ישנו ביטוי רגולרי r' כך ש $L' = L(r')$ ונסיק ש L' שפה רגולרית. נוכיח באינדוקציה שלמה על $|r|$

בסיס: $|r| = 1$ מכאן ש $L = \{e\}$ או $L = \phi$. אם $L = \{e\}$ אז $L' = \sigma^{n0} \circ e \circ \sigma^{n1}$ עבורה $r' = \sigma^* \circ e \circ \sigma^*$ ביטוי רגולרי.

או $r' = r$ ולכן ביטוי רגולרי.

הנחה: לכל שפה L עבורה קיים r ביטוי רגולרי כך ש: $L = L(r)$ ו- $1 \leq |r| \leq n$ קיים ביטוי רגולרי r' כך ש $L' = L(r')$

צעד: תהא L שפה שקיים עבורה ביטוי רגולרי r כך ש $r = |n|$, כיוון של $|r| = n > 1$ אז קיימים ביטויים רגולרים r_1, r_2 כך שאחד מההבאים מתקיים:

$$r = (r_1) \cup (r_2)$$

$$r = (r_1) \circ (r_2)$$

$$r = (r_1)^*$$

נבחין כי בכל אחד מהמקרים $|r_1|, |r_2| < |n|$ ולכן הנחת האינדוקציה מתקיימת עבורם, וקיימים r_1', r_2' כך ש :

$\mathrm{L}'_1 = \mathrm{L}(\mathrm{r}'_1)$ ו- $\mathrm{L}'_2 = \mathrm{L}(\mathrm{r}'_2)$. נסמן ב- a אות השייכת ל r_1 וב-b אות השייכת ל r_2

עבור מקרה א': נגדיר את $r' = (r'_1) \cup (r'_2)$

טענה: $L' = L(r')$

הוכחה:

$$W \in L' \Leftrightarrow W = \left(\sigma^{n0} \circ a_1 \circ \sigma^{n1} \circ \ldots \circ a_k \circ \sigma^{nk} \circ \sigma^{n(k+1)}\right) \vee \left(\sigma^{n0} \circ b_1 \circ \sigma^{n1} \circ \ldots \circ b_p \circ \sigma^{np}\right) \Leftrightarrow W \in \mathrm{L}'_1 \ \vee \ W \in \mathrm{L}'_2 \Leftrightarrow$$

$$W \in L(r'_1) \vee W \in L(r'_2) \Leftrightarrow W \in L\left((r'_1) \cup (r'_2)\right) \Leftrightarrow W \in L(r')$$

עבור מקרה ב': נגדיר את $r' = (r'_1) \circ (r'_2)$

טענה: $L' = L(r')$

הוכחה:

$$W \in L' \Leftrightarrow W = \left(\sigma^{n0} \circ a_1 \circ \sigma^{n1} \circ \ldots \circ a_k \circ \sigma^{nk} \circ \sigma^{n(k+1)}\right) \circ \left(\sigma^{n0} \circ b_1 \circ \sigma^{n1} \circ \ldots \circ b_p \circ \sigma^{np}\right) \Leftrightarrow W \in \mathrm{L}'_1 \circ \mathrm{L}'_2 \Leftrightarrow$$

$$W \in L(r'_1) \circ W \in L(r'_2) \Leftrightarrow W \in L\left((r'_1) \circ (r'_2)\right) \Leftrightarrow W \in L(r')$$

עבור מקרה ג': נגדיר את $r' = (\mathrm{r}_1)^*$

טענה: $L' = L(r')$

הוכחה:

$$W \in L' \Leftrightarrow W = \varepsilon \text{ or } W = \mathrm{w}_1 \circ \mathrm{w}_2 \circ \ldots \circ \mathrm{w}_\mathrm{k} \mid w_i \epsilon L(r'_1)\ \forall i \ \ 1 \le i \le k \Leftrightarrow W \in (\mathrm{r}_1)^* \Leftrightarrow W \in L(r')$$

שאלה 6

$\mathrm{A} = \{L|\ L = L^*\}$ $\qquad |A| = ?$

עובדה מתמטית: בהינתן שני מספרים p, q הזרים זה לזה, קיים מספר $n(p,q)$ כך שכל מספר הגדול ממנו ניתן לבטא כקומבינציה לינארית של p, q עם מקדמים אי-שליליים (כלומר $rp + sq$ עבור $r, s \geq 0$).

נגדיר 2 קבוצות:

$$B = \{L|L = L^* \wedge \text{קיימות שתי מילים } w_1, w_2 \in L \text{ כך ש}: |w_1| = p, |w_2| = q\ p, q \text{ זרים}\}$$

$$C = \{L|L = L^* \wedge \text{לכל שתי מילים } w_1, w_2 \in L \text{ כך ש}: |w_1| = p, |w_2| = q\ p, q \text{ אינם זרים}\}$$

נשים לב כי מההגדרות מתקיים: $A = B \cup C$ וגם $B \cap C = \emptyset$

טענת עזר: $|B| + |C| \leq \aleph_0$

מטענת העזר נובע כי:

$$|A| = |B \cup C| = |B| \cup |C| = |B| + |C| \leq \aleph_0$$

ומכיוון שיש אינסוף שפות השייכות ל-A (דוגמא לקבוצת שפות אינסופית שכזו היא $L_1 = \{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \dots\}$ $L_2 = \{\varepsilon, 11, 1111, 111111, 11111111, \dots\}$ $L_3 = \{\varepsilon, 111, 111111, 111111111, \dots$ $L_4 = \{\varepsilon, 1111, 11111111, \dots\}$ וכו') בפרט: $|A| \geq \aleph_0$

ולכן נובע כי: $|A| = \aleph_0$

הוכחת טענת העזר: תהי $L \epsilon \mathrm{A}$ נתבונן במילים האפשריות השייכות ל-L. נחלק למקרים:

<u>מקרה א</u> אם $L \in B$:

לפי העובדה המתמטית קיים מספר $n(p,q)$ כך שכל מספר הגדול ממנו ניתן לבטא כקומבינציה לינארית של p, q עם מקדמים אי-שליליים (כלומר $rp + sq$ עבור $r, s \geq 0$). לכן כל מילה w כך ש-$|w| \geq n(p,q)$ שייכת ל-L. מספר השפות השונות שניתן להרכיב כך שיכילו את כל המילים שאורכן גדול או שווה ל- $n(p,q)$ והמילים שאורכן p ו-q שייכות אליהן הוא: $2^{n(p,q)-2}$ (מכיוון שלכל אורך בטווח חוץ מהמילים שאורכן p, q יש שתי אפשרויות או להיות שייך או לא להיות שייך). לכן מספר השפות המקיימות $w_1, w_2 \epsilon L$ כך ש: $|w_1| = p, |w_2| = q$ ו-$L = L^*$ הוא לכל היותר $2^{n(p,q)-2}$ ובפרט סופי. לכן מספר השפות L המקיימות את מקרה א' הוא **לכל היותר** כמספר זוגות המספרים הטבעיים הזרים כפול מספר סופי. עוצמת הקבוצה שמכילה זוגות של מספרים טבעיים זרים הוא $\aleph_0$. לכן נובע כי: $|B| \leq \aleph_0$.

<u>מקרה ב</u> אם $L \in C$:

טענת עזר: קיימת פונ' $\mathrm{f} : (\mathrm{B}, \mathbb{N}_{\geq 2}) \to \mathrm{C}$ שהיא על.

הוכחת מקרה ב' באמצעות טענת העזר:

מטענת עזר 2 נובע כי קיימת פונ' $\mathrm{f} : (\mathrm{B}, \mathbb{N}_{\geq 2}) \to C$ שהיא על. ולכן: $|C| \leq |BX\mathbb{N}_{\geq 2}| = |\mathbb{N}X\mathbb{N}| = \aleph_0$

הוכחת טענת העזר:

תהי $L' \in B$ ו-$c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ נגדיר פונ' f:

$$f : (\mathrm{L}', \mathrm{c}) \longrightarrow \{w \mid w' \epsilon L' \wedge |w| = |w'| \cdot c\}$$

כדי להשלים את ההוכחה **נותר להוכיח 2 דברים:**

א. הפונקציה מוגדרת היטב, הטווח שלה הוא $\mathrm{B}, \mathbb{N}_{\geq 2}$ והתמונה היא C.
ב. הפונקציה על.

<u>הוכחת א':</u>

הטווח של הפונקציה הוא אכן $B, \mathbb{N}_{\geq 2}$ כי לפי ההגדרתה $L' \in B$ וגם לפי הגדרה $c \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. כעת נוכיח כי התמונה שלה היא הקבוצה C. תהי $L' \in B$ ו-c מספר טבעי. לאחר הפעלת הפונק' אנו מכפילים את גודל כל המילים ב-c ולכן אורך כל המילים בשפה החדשה שנוצרה מתחלקים ב-c (לכן אין אף זוג של מילים שאורכן זר).תהי L השפה שמתקבלת לאחר הפעלת הפונ'. נותר להראות כי $L = L^*$. נניח בשלילה כי $L \neq L^*$. **לכן קיימת מילה ששייכת ל-L^* נסמן את גודלה ב-n כך שאינה שייכת ל- L** (נשים לב שהמקרה שקיימת מילה ששיכת לL אך לא שייכת ל-L^* לא יכול להיות). מהגדרת L^* קיים צירוף לינארי של גדלים של מילים ב-L כך שסכום האורכים של המילים בצירוף זה הוא n. לכן אם ניקח כל מילה בצירוף הלינארי הזה ונחלק את גודלה ב-c נקבל מילה חוקית ב-L'. כעת באמצעות אותו צירוף לינארי בדיוק נוכל לקבל מילה w ב-$(L')^*$ בגודל $\frac{n}{c}$ (מכיוון שחילקנו כל גורם ב-c) מההנחה ש-$L' \in B$ בפרט מתקיים $L = L^*$ ולכן המילה $w \in L$ כך ש-$|w| = \frac{n}{c}$. לכן כאשר נפעיל את הפונ' על המילה w **נקבל מילה w' ששייכת ל-L כך שגודלה: $\boldsymbol{n = c \cdot \frac{n}{c} = |w'|}$** בסתירה להנחה שלא קיימת מילה שגודלה n ב-L.

<u>הוכחת ב'</u>

נוכיח כי הפונ' f על. תהי $L \in C$ צריך למצוא שפה $L' \in B$ ומספר טבעי c כך שיתקיים $f(L', c) = L$. נגדיר $c = \gcd(L)$ ו- $\{w' \mid w \epsilon L \wedge |w'| = \frac{|w|}{c}\} = L'$ צ"ל כי $L' \in B$ וכי $f(L', c) = L$.

א. צ"ל $L' \in B$

תהי $L \in C$ וgcd המחלק הכי גדול של גודל המילים ב-L. לאחר הפעלת הפונק' אנו מחלקים את גודל כל המילים ב-gcd ולכן קיימות לפחות 2 מילים בשפה החדשה שנוצרה נסמנה L' כך שגודלן זר. לכן נותר להראות כי $(\mathrm{L}')^* = L'$. נניח כי קיימת מילה ששיכת ל-$(\mathrm{L}')^*$ נסמן את גודלה ב-n ונניח בשלילה כי אינה שייכת ל- L'. לכן לא קיימת מילה בגודל n ב-L' אבל קיים צירוף לינארי של גדלים של מילים ב-L' כך שסכום האורכים הוא n. לכן עפ"י הגדרת הפונ' לא קיימת מילה ב-L שגודלה הוא $gcd \cdot n$ אבל אם ניקח את הצירוף הלינארי שראינו כי הוא קיים ונכפיל את גודל אורך כל המילים בו ב-gcd נקבל מילה חוקית ב-L^* (כי היא נוצרה ע"י קומבינציה לינארית של מילים מ-L) בגודל $n \cdot gcd$ אבל זו סתירה לכך ש-$L = L^*$.

ב. כיוון הכלה ראשון: $f(L', c) \subseteq L$:

תהי $w \in f(L', c)$ עפ"י הגדרת f מתקיים: $|w| = |w'| \cdot c$ כך ש-$w' \in L'$ ועפ"י הגדרת L' והגדרת c נובע $w \in L$.

ג. כיוון הכלה שני: $f(L', c) \supseteq L$.

תהי $w \in L$ עפי הגדרת L' ועפי הגדרת c (כ-gcd) נובע $|w'| = \frac{|w|}{c}$ כך ש-$w' \in L'$ ועפ"י הגדרת f מתקיים $w \in f(L', c)$.

■