Ben-Gurion University of the Negev

SOLUTION
By
Avi Ferdman

.1

א. נגדיר אוטומט דטרמיניסטי : $M = < Q, \Sigma, \delta, s, A >$: באופן הבא:

$$Q = \{q_{ij} : 0 \le i \le 2 , 0 \le j \le 1\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$s = q_{00}$$

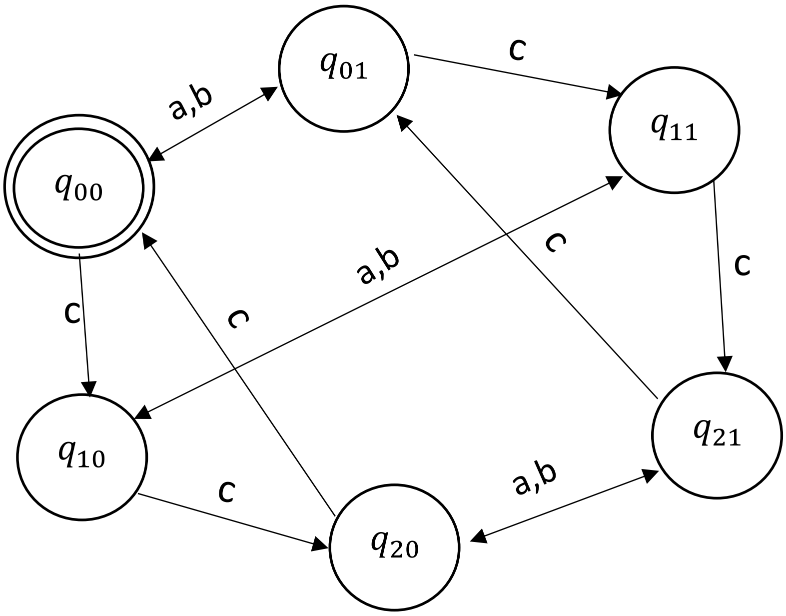
$$\delta(q_{ij}, 'a') = q_{i,(j+1)\,mod\,2}$$

$$\delta(q_{ij}, 'b') = q_{i,(j+1)\,mod\,2}$$

$$\delta(q_{ij}, 'c') = q_{(i+1)mod3\,,j}$$

$$A = \{q_{00}\}$$

שרטוט:



באוטומט שבנינו מצב מייצג זוג סדור $< i , j >$כך ש: i מייצג את שארית חילוק בשלוש של מספר התווים 'c' במילה ו- j את שארית חילוק בשתיים של מספר התווים השונים מ- 'c'. קריאת אות מעבירה לקונפיגורציה המתארת את התנאים הנ"ל בהתאם לאות שנקראה. ומכאן שמילה המסתיימת ב - q_{00} היא מילה שמספר המופעים של אותיות שאינן c זוגי ומספר המופעים של האות c מתחלק ב3 ולכן מתקבלת באוטומט ולכן האוטומט מתאר את השפה הדרושה.

ב. נגדיר אוטומט אי דטרמיניסטי : $M =< Q, \Sigma, \Delta , s, A >$: באופן הבא:

$Q = \{q_i : 0 \le i \le 7 \}$
$\Sigma = \{'a','b','c'\}$
$s = q_0$
$\Delta(q_0 , \varepsilon) = q \mid q \in \{q_1, q_5\}$

$\Delta(q_1 ,'a') = q_2$

$\Delta(q_2 ,'b') = q_3$

$\Delta(q_3 ,'c') = q_4$

$\Delta(q_4 ,\sigma) = q_4 \mid \ \sigma \epsilon \Sigma$

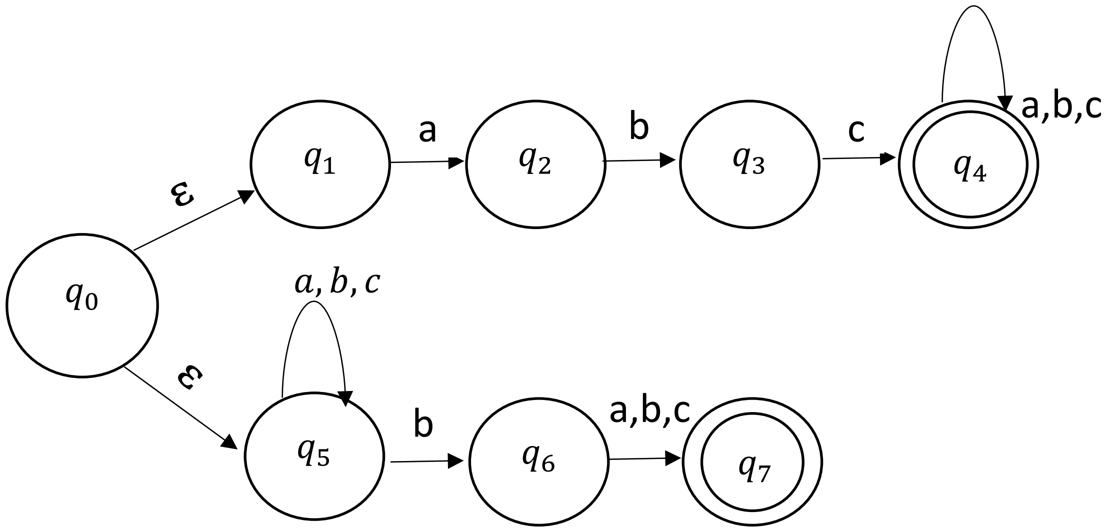
$\Delta(q_5 ,\sigma) = q_5 \mid \ \sigma \epsilon \Sigma$

$\Delta(q_5 ,'b') = q_6$

$\Delta(q_6 ,\sigma) = q_7 \mid \ \sigma \epsilon \Sigma$

$A = \{q_{4,} q_{7,}\}$

שרטוט:

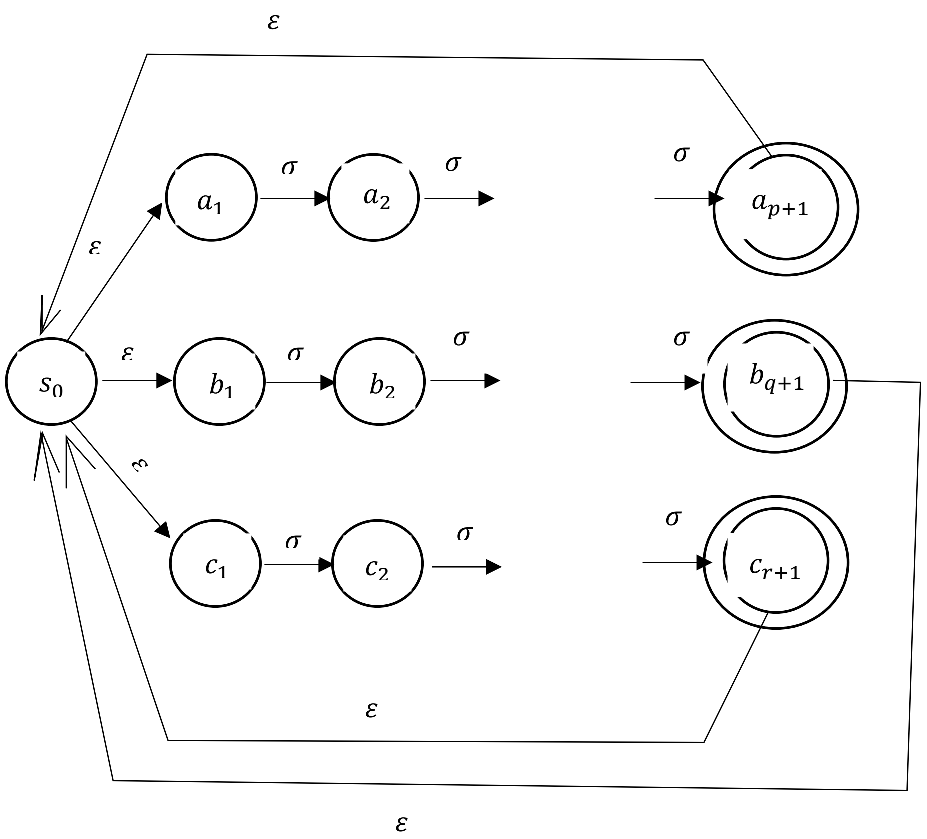


באוטומט אי דטרמיניסטי, מילה שייכת לשפת האוטומט אם"ם קיימת ריצה המסתיימת במצב מקבל.

מהבנייה, ניתן לראות כי עבור מילים המתחילות ברצף אותיות abc קיימת ריצה המובילה ל$q_4 \in A$ כך שעבור כל רצף אותיות שיקראו לאחר מכן נשאר במצב המקבל. ואילו מילים בהן האות לפני האחרונה היא b, קיימת ריצה שבה ניתן להגיע ל-q_5 עבור קריאת הרישא ללא שתי האותיות האחרונות, ובקריאתם מהבנייה נגיע ל $q_7 \in A$ כנדרש.

<u>שאלה 2</u>

המחשה של האוטומט



יהיו שלושה מספרים טבעיים r, q, p .

תיאור פורמלי של האוטומט: $M =< Q, \Sigma, \delta, s, A >$:

הערה: לא נוכל להגדיר את סיגמא מכיוון שהא״ב לא נתון, אבל זה לא משנה באוטומט זה וזה יהיה נכון עבור **א״ב כלשהו**.

נגדיר:

$$Q_1 = \{a_i |\ 1 \leq i \leq p+1,\}, Q_2 = \{b_i |\ 1 \leq i \leq q+1,\}, Q_3 = \{c_i |\ 1 \leq i \leq r+1,\},$$

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup \{s_0\}$$

$$\delta(q,\sigma') = \begin{cases} a_{i+1} & , q = a_i \ \wedge \ \sigma' \epsilon \, \Sigma \ \wedge 1 \leq i \leq p \\ b_{i+1} & , q = b_i \ \wedge \ \sigma' \epsilon \, \Sigma \ \wedge \ 1 \leq i \leq q \\ c_{i+1} & , q = c_i \ \wedge \ \sigma' \epsilon \, \Sigma \ \wedge \ 1 \leq i \leq r \\ s_0 & , \left(q = a_{p+1} \vee \ q = b_{q+1} \vee \ q = c_{r+1}\right) \ \wedge \ \sigma' = \varepsilon \\ a_1, b_1, c_1 & q = s_0 \wedge \sigma' = \varepsilon \end{cases}$$

$$s = s_0$$

$$A = \{a_{p+1}, b_{q+1}, c_{r+1}\}$$

שפת האוטומט $L(M)$ היא שפת כל המילים שאורכן הוא קומבינציה ליניארית **חיובית** של r, q, p

הסבר: תהי w מילה שאורכה הוא צירוף לינארי **חיובי** של r, q, p. לכן ניתן לסמן את w כשרשור תתי מילים באופן הבא $w = w_0 \circ w_1 \circ \ldots \circ w_n$ כך שלכל $0 \le i \le n$ מתקיים $|w_i| = p \vee |w_i| = q \vee |w_i| = r$ וגם מכיוון שזה צירוף **חיובי ממש** ניתן לכתוב את w כך ש- $|w_0| = p \vee |w_0| = q \vee |w_0| = r$ ולכן בסוף קריאת המילה w_0 קיימת ריצה שבה האוטומט יגיע למצב מקבל כלשהו. לאחר מכן לכל קריאת תת מילה נוספת, קיימת ריצה שבה האוטומט יגיע למצב מקבל מבניית האוטומט ומהתכונה שציינו שאורך כל תת מילה הוא אחד מהאורכים r, q, p ולכן בסופו של דבר לכל מילה חוקית בשפה הרצויה קיימת ריצה שבה האוטומט יגיע למצב מקבל ולכן המילה שייכת לשפת האוטומט.

כעת נראה שאם האוטומט קיבל מילה כלשהי זו מילה ששייכת לשפת כל המילים שאורכן הוא קומבינציה ליניארית **חיובית** של r, q, p . תהי w המילה שהתקבלה ע"י האוטומט. אזי מכיוון שהגיעה לאחד מהמצבים המקבלים ניתן לסמן אותה באופן הבא: $w = w_{n-1} \circ w_n$ כך ש: $|w_n| = p \vee |w_n| = q \vee |w_n| = r$. מהבנייה של האוטומט תת המילה w_{n-1} מסתיימת או במצב מקבל או במצב ההתחלתי (ניתן להראות זאת למשל באינדוקציה אבל לא נדרש הסבר פורמלי) ולכן בהכרח גם גודל תת המילה w_{n-1} היא **צירוף לינארי לא בהכרח חיובי** של r, q, p ולכן בסה"כ אורכה של w הוא צירוף **לינארי חיובי ממש** של r, q, p.

שאלה 3

סעיף א'

תהי L שפה כלשהי, צריך להוכיח:

L רגולרית <= $L_{\frac{1}{2}}$ רגולרית.

נראה כי קיים אוטומט M’ סופי אי דטרמניסטי כך ש$L_{\frac{1}{2}}$= L(M’) וממשפט שהוכחנו בכיתה, הטוען כי L שפה רגולרית אם ורק אם קיים אוטומט M כך ש: $L(M') = L_{\frac{1}{2}}$ נקבל כי $L_{\frac{1}{2}}$ רגולרית. מהמשפט שלעיל, קיים אוטומט סופי דטרמניסטי: $M = <Q, \Sigma, \delta, s, A>$ כלשהו כך ש $L(M) = L$.

נבנה את האוטומט הסופי האי דטרמיניסטי $M' =<Q', \Sigma, \Delta, s', A'>$ באופן הבא:

$$Q' = Q \cup s'$$

$$\Delta(q, \sigma) = \begin{cases} q' \in \{q_k \mid \exists q_k, q_j \in Q, \quad \exists \sigma' \in \Sigma: \ \delta(q, \sigma') = q_j \wedge \delta(q_j, \sigma) = q_k\} & \text{אם } q \neq s' \\ q \mid q \in Q \wedge \delta(s, \sigma) = q & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$A' = \{q \mid q \in Q \wedge \exists \sigma' \in \Sigma, \exists q_k \in A \wedge \delta(q, \sigma') = q_k\}$$

בנוסף אם: $s \epsilon A$ נגדיר: $A' = \{s'\} \cup A'$.

(הסבר במילים אינטואיטיבי **ולא רשמי**:

1) מוסיפים מצב התחלתי חדש, מחברים אותו בדיוק למצבים שהמצב ההתחלתי הקודם היה מעביר, עם אותן אותיות

2) פונ' המעברים השתנתה באופן כזה שקודקוד כלשהו מגיע עם אות כלשהי לכל הקודקודים שבקריאת אותה אות "השכנים" שלו היו מגיעים

3) המצבים המקבלים הם כל המצבים שע"י קריאת אות כלשהי מהם ניתן להגיע למצב מקבל

4) אם המצב ההתחלתי המקורי היה מקבל אז גם המצב ההתחלתי החדש יהיה מקבל).

טענה ראשית: $L_{\frac{1}{2}} = L(M')$.

טענת עזר: לכל $k \geq 1$ קיימת מילה $w \in L$ וקונפיגורציה חוקית $(s, w) \longmapsto_M^{2k-1} (q, \sigma w'')$ **בעלת $2k-1$ מעברים** אם"ם קיימת מילה $w' \in L_{\frac{1}{2}}$ וקונפיגורציה חוקית: $(s, w') \longmapsto_{M'}^{k} (q, w'')$ **בעלת k מעברים** כך **שסדרת המצבים** בקונפיגורציה של $\boldsymbol{M'}$ היא בדיוק **סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי** של מעברים בקונפיגורציה של-$\boldsymbol{M}$.

הוכחת הטענה הראשית באמצעות טענת העזר:

הכלה דו כיוונית:

נתבונן תחילה במקרים בהם $k \geq 1$.

$\Leftarrow$ תהי $w \in L(M') = \sigma^1\sigma^2..\sigma^n$ צ"ל $w \in L_{\frac{1}{2}}$

ממהנחה קיימת קונפיגורציה $(s, w) \longmapsto_{M'}^{n} (q, \varepsilon)$ כך ש- $q \in A'$. מטענת העזר נובע כי קיימת מילה: $w' \in L$ וקיימת קונפיגורציה חוקית $(s, w') \longmapsto_M^{2k-1} (q, \sigma)$ **בעלת $2k-1$ מעברים** כך **שסדרת המצבים** בקונפיגורציה של $\boldsymbol{M'}$ היא בדיוק **סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי** של מעברים בקונפיגורציה של-$\boldsymbol{M}$. מכאן **ומבניית פונ' המעברים** של M' קיימת w' מהצורה: $w' = \sigma^1\sigma^{1\prime}\sigma^2\sigma^{2\prime}..\sigma^n\sigma^{n\prime}$. מההגדרה של M' נובע כי $\delta(q, \sigma') = q_k \wedge q_k \in A$ ולכן בסה"כ קיימת הקונפיגורציה: $(s, w') \longmapsto_M^{2k-1} (q, \sigma) \longmapsto_M (q_k, \varepsilon)$. מכאן $w' \in L(M)$ ומכאן $w \in L_{\frac{1}{2}}$.

$\Rightarrow$ תהי $w \in L_{\frac{1}{2}} = \sigma^1\sigma^2..\sigma^n$ צ"ל $w \in L(M')$ מהגדרת $L_{\frac{1}{2}}$ נובע כי קימת מילה $w' = \sigma^1\sigma^{1\prime}\sigma^2\sigma^{2\prime}..\sigma^n\sigma^{n\prime} \in L$ לכן $w' \in M(L)$ לכן קיימת קונפיגורציה: $(s, w') \longmapsto_M^{2n} (q_k, \varepsilon)$ כך ש- $q_k \epsilon A$. נפרק את הקונפיגורציה:

$(q_k,\varepsilon) \longmapsto_M (q,\sigma) \longmapsto_M^{2n-1} (s,w')$. מטענת העזר מהגדרת פונ' המעברים ב-M' ומהגדרת w' נובע כי $(s,w') \longmapsto_{M'}^{n} (q,\varepsilon)$ קונפיגורציה חוקית ב-M'. בנוסף מהגדרת A' נובע כי $q\epsilon A'$ ומכאן: $w \in$ L(M') .

כעת נתבונן במקרה שבו $\boldsymbol{k=0}$: משמעות מקרה זה היא: $\varepsilon \in$ L $\iff$ $s\epsilon A$ $\iff$לפי הגדרת A' $s'\epsilon A'$ $\iff \varepsilon \in M'$(L) $\iff \varepsilon \in$ $L_{\frac{1}{2}}$ ולכן הטענה מתקיימת במקרה זה.

<u>הוכחת טענת העזר:</u>

$\Leftarrow$ יהי $k \geq 1$ ותהי מילה $w \in$ L וקונפיגורציה חוקית $(s,w) \longmapsto_M^{2k-1} (q,\sigma w'')$ **בעלת $\boldsymbol{2k-1}$ מעברים** צ"ל קיימת מילה $w' \in L_{\frac{1}{2}}$ וקונפיגורציה חוקית: $(s,w') \longmapsto_{M'}^{k} (q,w'')$ **בעלת $\boldsymbol{k}$ מעברים** כך **שסדרת המצבים** בקונפיגורציה של $\boldsymbol{M'}$ היא בדיוק **סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי** של מעברים בקונפיגורציה של-$\boldsymbol{M}$.

נוכיח באינדוקציה על k מספר המעברים (נשים לב כי מכיוון שזה אוטומט דטרמניסטי בכל מעבר אנו קוראים אות).

בסיס: $\boldsymbol{k=1}$ אזי $(s,\sigma w) \longmapsto_M (q,w)$ וגם לפי הגדרת M' מתקיים: $(s,w) \longmapsto_{M'} (s,\sigma w)$ והטענה מתקיימת (מצאנו מילה למעשה זו יכולה להיות כל מילה שתתחיל באות σ וגם סדרת סדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-M שבמקרה זה זו אותה קונפיגורציה בדיוק).

נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$, נוכיח שהטענה נכונה עבור k.

נניח קיימת קונפיגורציה חוקית $(s,w) \longmapsto_M^{2k-1} (q,\sigma w'')$ בעלת $2k-1$ מעברים צ"ל קיימת מילה $w' \in L_{\frac{1}{2}}$ וקונפיגורציה חוקית: $(s,w') \longmapsto_{M'}^{k} (q,w'')$ בעלת k מעברים כך שסדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-$\boldsymbol{M}$.

נפרק את הקונפיגורציה באוטומט M:

$$(s,w) \longmapsto_M^{2k-3} (q',\sigma'\sigma''w'') \longmapsto_M (q'',\sigma''w'') \longmapsto_M (q,w'')$$

מהנחת האינדוקציה נובע כי קיימת מילה w' כך ש:

$$(s,w') \longmapsto_{M'}^{k-1} (q',\sigma''w'')$$

ומהגדרת פונ' המעברים של M' מתקיים:

$$(q',\sigma''w'') \longmapsto_{M'} (q,w'')$$

ובסה"כ:

$$(s,w) \longmapsto_{M'}^{k-1} (q',\sigma''w'') \longmapsto_{M'} (q,w'')$$

ובנוסף מההרכבה ומהנחת האינדוקציה נובע כי סדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-M.

$\Rightarrow$ נניח קיימת קונפיגורציה חוקית $(s,w') \longmapsto_{M'}^{k} (q,w'')$ בעלת k מעברים צ"ל קיימת קונפיגורציה חוקית קיימת מילה $w \in$ L וקונפיגורציה חוקית $(s,w) \longmapsto_M^{2k-1} (q,\sigma w'')$ בעלת $2k-1$ מעברים כך שסדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-$\boldsymbol{M}$.

נוכיח באינדוקציה על k מספר המעברים (נשים לב כי אמנם זה אוטומט אי-דטרמניסטי לפי הבניה לא קיימים מעברי אפסילון ולכן בכל מעבר אנו קוראים אות).

בסיס: $\boldsymbol{k=1}$ אזי $(q,w) \longmapsto_{M'} (s,\sigma w)$ וגם לפי הגדרת פונ' המעברים של M' נובע: $(s,w) \longmapsto_{M'} (s,\sigma w)$ והטענה מתקיימת (מצאנו מילה למעשה זו יכולה להיות כל מילה שתתחיל באות σ וגם סדרת סדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-M שבמקרה זה זו אותה קונפיגורציה בדיוק).

נניח שהטענה נכונה עבור $k-1$, נוכיח שהטענה נכונה עבור k:

נניח קיימת קונפיגורציה חוקית: $(q,w'') \longmapsto_{M'}^{k} (s,w')$ בעלת k מעברים צ"ל קיימת מילה $w \in \mathrm{L}$ וקונפיגורציה חוקית $(q,\sigma w'') \longmapsto_{M}^{2k-1} (s,w)$ בעלת $2k-1$ מעברים כך שסדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-M.

נפרק את הקונפיגורציה הנתונה באוטומט M':

$$(s,w') \longmapsto_{M'}^{k-1} (q',\sigma' w'') \longmapsto_{M'} (q,w'')$$

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$(s,w''') \longmapsto_{M}^{2k-3} (q',\sigma' w'')$$

מהגדרת פונ' המעברים של M' מתקיים שקיימת הקונפיגורציה הבאה ב-M:

$$(q',\sigma''\sigma' w'') \longmapsto_{M} (q'',\sigma' w'') \longmapsto_{M} (q,w'')$$

לכן נרכיב מילה חדשה w באופן הבא: w תהיה שרשור של הרישא ה-$2k-3$ של w''' לאחר מכן שרשור של האותיות: $\sigma''\sigma'$.

ובסה"כ יתקיים:

$$(s,w) \longmapsto_{M}^{2k-3} (q',\sigma''\sigma' w'') \longmapsto_{M} (q'',\sigma' w'') \longmapsto_{M} (q,w'')$$

כלומר:

$$(s,w) \longmapsto_{M}^{2k-1} (q,w'')$$

ובנוסף מההרכבה ומהנחת האינדוקציה נובע כי סדרת המצבים בקונפיגורציה של M' היא בדיוק סדרת המצבים תוך מספר אי זוגי של מעברים בקונפיגורציה של-M.

כנדרש.

■

סעיף ב

תהי L שפה כלשהי, צריך להוכיח: רגולרית <= L_2 רגולרית.

נראה כי קיים אוטומט סופי אי דטרמיניסטי M' כך ש$L(M') = L_2$ וממשפט שהוכחנו בכיתה, הטוען כי L שפה רגולרית אם ורק אם קיים אוטומט M כך ש: $L(M') = L_2$ נקבל כי L_2 רגולרית. מהמשפט שלעיל, קיים אוטומט סופי דטרמיניסטי:
$M = \langle Q, \Sigma, \delta, s, A \rangle$ כלשהו כך ש $L(M) = L$. נבנה את האוטומט האי-דטרמיניסטי $M' = \langle Q', \Sigma, \Delta, s, A' \rangle$ באופן הבא:
* נסמן את מספר המצבים ב-M ב-n.

נוסיף מספר מצבים ככמות: $n \cdot |\Sigma|$ נסמן קבוצה זו: $Q'' = \{q_{i+n}^{\sigma} | \forall q_i \in Q\ \forall \sigma \in \Sigma\}$

$$Q' = Q \cup Q''$$
$$\Delta\left(q_j, \sigma\right) = q_{j+n}^{\sigma} \mid q_j \epsilon Q$$
$$\Delta\left(q_{j+n}^{\sigma}, \sigma\right) = q_i \mid q_{j+n}^{\sigma} \epsilon Q'' \wedge \delta\left(q_j, \sigma\right) = q_i$$
$$A' = A$$

(הסבר במילים אינטואיטיבי **ולא רשמי**:
1) מוסיפים עוד מצבים כמספר המצבים הקודם כפול גודל הא"ב, לכל מצב מקורי מוסיפים מצבים "תאומים" לכל אות – מצב תואם.
2) כל מצב מהאוטומט הישן עובר בקריאת אות שיצאה ממנו בעבר למצב ה"תאום" שלו המתאים לקריאת אות זו, והמעבר מה"תאום" המתאים זהה למעבר של המצב הישן אילו היה קורא את האות הזו.)

טענה ראשית: $L(M') = L_2$

טענת עזר: תהי $w \epsilon L$ כך ש: $|w| > 0$ קיימות $(q_i, w) \longmapsto_M^* (q_p, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$ קונפיגורציות חוקיות אמ"מ קיימות קונפיגורציות חוקיות: $(q_i, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_{p+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ כאשר w_2 מייצגת את "המילה הכפולה" של w כלומר לכל אות ששייכת ל-w באינדקס i אות זו מופיעה באינדקס $2i$ ו- $2i-1$ ב-w_2. (לכן בפרט גם מתקיים: $|w_2| > 0$)

לשם נוחות מעתה והלאה נסמן עבור כל w את w_2 כאשר w_2 מייצגת את "המילה הכפולה" של w כלומר לכל אות ששייכת ל-w באינדקס i אות זו מופיעה באינדקס $2i$ ו- $2i-1$ ב-w_2.

הוכחת הטענה $L(M') = L_2$ הראשית באמצעות טענת העזר:

$\Leftarrow$ תהי $w_2 \epsilon L_2$ צ"ל $w_2 \epsilon L(M')$.

נחלק למקרים:

מקרה א: $|w_2| = 0$: לכן מהגדרה L_2 נובע: $|w| = 0$ כלומר, $\varepsilon \epsilon L(M)$. לכן קיימת הקונפיגורציה: $s \epsilon A$. מהגדרת פונ' המצבים של M': $s \epsilon A'$ ולכן קיימת קונפיגורציה ב-M': $(s, \varepsilon) \longmapsto_{M'}^* (s, \varepsilon)$ ולכן: $w_2 \epsilon L(M')$.

מקרה ב: $|w_2| > 0$ |מההגדרה של L_2 קיימת $w \epsilon L$ כך לכל אות ששייכת ל-w באינדקס i אות זו מופיעה באינדקס $2i$ ו- $2i-1$ ב-w_2. מהגדרת M נובע: $w \epsilon L(M)$. לכן קיימת הקונפיגורציה: $(s, w) \longmapsto_M^* (q_p, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$ כך ש-$q_j \epsilon A$. מטענת העזר קיימת הקונפיגורציה: $(s, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_{p+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ובנוסף מהגדרת A' מתקיים: $q_j \in A'$ ולכן: $w_2 \epsilon L(M')$.

$\Rightarrow$ תהי$w_2 \epsilon L(M')$ צ"ל $w_2 \epsilon L_2$.

מקרה א: $|w_2| = 0$: לכן $\varepsilon \epsilon L(M')$ לכן מהגדרת פונ' המצבים של M' ומהגדרת A' נובע: $s \epsilon A'$ ולכן $s \epsilon A$ ולכן $\varepsilon \epsilon L(M)$ ולכן $\varepsilon \epsilon L$ ולכן מהגדרת L_2 נובע: $\varepsilon \epsilon L_2$.

מקרה ב: $|w_2| > 0$: מההנחה נובע כי קיימת הקונפיגורציה: $(s, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_{p+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ כך שמתקיים: $q_j \in A'$.
מטענת העזר נובע כי קיימת הקונפיגורציה: $(s, w) \longmapsto_M^* (q_p, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$ ומההגדרה של A' נובע: $q_j \in A$ ולכן: $w \epsilon L$ ולכן מהגדרת L_2 מתקיים: $w_2 \epsilon L_2$.

הוכחת טענת העזר:

$\Leftarrow$ תהי $w\epsilon L$ $|w|>0$ נניח כי קיימת קונפיגורציה: $(q_i, w) \longmapsto_M^* (q_p, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$, צ"ל קיימת קונפיגורציה חוקית: $(q_i, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_j, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_{j+n}^{\sigma}, \varepsilon)$.

נוכיח באינדוקציה על גודל המילה $|w|$ (נבחין כי האוטומט דטרמיניסטי ובכל מעבר אנו קוראים אות)

בסיס: $|w|=1$ אזי: $w=\sigma$, מההנחה : $(s,\sigma) \longmapsto_M^* (s,\sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$. מההגדרה של w_2 נובע $w_2 = \sigma\sigma$. מהגדרת פונ' המעברים, קיים המעברים: $\Delta(s,\sigma) = s_n^{\sigma}$, $\Delta(s_n^{\sigma}, \sigma) = q_j$ ולכן בסה"כ קיימת הקונפיג' : $(s,\sigma\sigma) \longmapsto_{M'}^* (s_n^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ והטענה מתקיימת.

נניח שהטענה נכונה עבור $|w| = k-1 > 1$. נוכיח שהטענה נכונה עבור $w\epsilon L$ ו-$|w|=k$:

תהי קונפיגורציה: $(q_i, w) \longmapsto_M^k (q_j, \varepsilon)$ נפרק קונפיג' זו:

$$(q_i, w) \longmapsto_M^{k-1} (q_m, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$$

מהגדרת פונ' המעברים נובע כי ב-M' קיימים המעברים:

$$(q_m, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_{m+n}^{\sigma}, \varepsilon)$$

וגם:

$$(q_{m+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$$

מהנחת האינדוקציה:

נסמן ב- w^{k-1} את הרישא ה-$k-1 > 1$ של w אזי מתקיים: $(q_i, w_2^{k-1}) \longmapsto_{M'}^* (q_m, \varepsilon)$

ניצור את המילה $w_2 = w_2^{k-1} \circ \sigma \circ \sigma$ ונקבל:

$$(q_i, w_2^{k-1} \circ \sigma \circ \sigma) \longmapsto_{M'}^{k-1} (q_m, \sigma\sigma) \longmapsto_{M'} (q_{m+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$$

והטענה מתקיימת.

$\Rightarrow$ תהי $w_2\epsilon L_2$ כך ש: $|w_2|>0$ נניח כי קיימת קונפיגורציה:$(q_i, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_{p+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ צ"ל קיימת קונפיגורציה חוקית: $(q_i, w) \longmapsto_M^* (q_p, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$

נוכיח באינדוקציה על גודל המילה $|w_2|$:

(הערה: מהגדרת L_2 ומההנחה מתקיים: $|w_2| \geq 2$)

בסיס: $|w_2| = 2$ אזי: $w_2 = \sigma\sigma$ מהגדרת פונ' המעברים, קיים המעבר: $(s,\sigma\sigma) \longmapsto_{M'}^* (s_n^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ מההגדרה של w_2 נובע $w=\sigma$ ובנוסף מבניית פונ' המעברים נובע כי קיימת הקונפיג' : $(s,\sigma) \longmapsto_M^* (s,\sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$ ולכן הטענה מתקיימת.

(הערה: למרות שהאינדוקציה תתבצע בקפיצות של 2, מספיק מקרה בסיס 1 מכיוון שאורך המילה w_2 תמיד זוגי.)

נניח שהטענה נכונה עבור $|w_2| = 2k-2 > 0$. נוכיח שהטענה נכונה עבור $w_2\epsilon L_2$ ו-$|w_2| = 2k$:

מההנחה קיימת הקונפיג': $(q_i, w_2) \longmapsto_{M'}^* (q_{m+n}^{\sigma}, \sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$ נפרק את הקונפיגורציה:

$$(q_i, w_2) \longmapsto_{M'}^{2k-2} (q_m, \sigma\sigma) \longmapsto_{M'} (q_{m+n}^{\sigma}\sigma) \longmapsto_{M'} (q_j, \varepsilon)$$

מהנחת האינדוקציה קיימת מילה, נסמנה w^{k-1} כך שמתקיים:

$$(q_i, w^{k-1}) \longmapsto_M^{k-1} (q_m, \varepsilon)$$

בנוסף מהגדרת פונ' המעברים של M' נקבל:

$$(q_m, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$$

כעת ניצור את המילה w באופן הבא: $w = w^{k-1} \circ \sigma$ ונקבל בסה"כ:

$$(q_i, w^{k-1} \circ \sigma) \longmapsto_M^{k-1} (q_m, \sigma) \longmapsto_M (q_j, \varepsilon)$$

והטענה מתקיימת, כנדרש.

■

שאלה 4

שפת האוטומט היא כל המחרוזות הבינאריות מעל $\{0,1\}$ כך שהערך הדסימלי שלהן מתחלק ב3 ללא שארית או המילה הריקה. באופן פורמלי: $L(M) = \{w|\ w\epsilon\{0,1\}^* \wedge F(w)mod3 = 0\}$ כך שהפונקציה $F(w)$ מקבלת מחרוזת בינארית ומחזירה את ערכה בבסיס דסימלי, כלומר: $F(w): \{0,1\}^* \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$F(w) = \begin{cases} 0, & if \quad |w| = 0 \\ \sigma_{|w|-1}2^{|w|-1} \dots \sigma_0 2^0, & else \end{cases}.$$

אבחנה 1: בהנתן מחרוזת בינארית, הוספה של 0 מימין מכפילה את ערכה הדסימלי פי 2.

אבחנה 2: בהנתן מחרוזת בינארית, הוספה של 1 מימין מכפילה את ערכה הדסימלי פי 2 ועוד 1.

טענת עזר: קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\varepsilon, s_i)$ אמ"מ $F(w)mod3 = i$

הוכחת הטענה הראשית באמצעות טענת העזר:

$\Leftarrow$ תהי מילה w ששייכת לשפה, כלומר $w \in L(M)$ אזי קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\varepsilon, s_0)$ ולפי טענת העזר: $F(w)mod3 = 0$ ולכן המילה מייצגת מחרוזת בינארית שמייצגת מספר בבסיס דסימלי המתחלק ב3.

$\Rightarrow$ תהי מחרוזת בינארית w שמייצגת מספר בבסיס דסימלי שמתחלק ב-3 ללא שארית, אזי לפי הגדרת F מתקיים: $F(w)mod3 = 0$ ולפי טענת העזר קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\varepsilon, s_0)$ ולכן $w \in L(M)$

נוכיח את הטענה הראשית באופן אינדקוטיבי על גודל המילה באמצעות אבחנות 1 ו-2.

מקרה בסיס: כאשר גודל המילה הוא 0 אז אנו נמצאים ב-s_0 והמילה מתקבלת והטענה מתקיימת.

מקרה בסיס נוסף: כאשר גודל המילה הוא 1 אז המחרוזת היא או 0 ואז אנו נמצאים ב-s_0 והטענה מתקיימת כי $F(0)mod3 = 0$ או אם המילה היא 1 ואז אנו נמצאים עפ"י הגדרת האוטומט ב- s_1 והטענה מתקיימת כי $F(1)mod3 = 1$.

כעת נניח כי הטענה נכונה עבור מילה w כך ש: $|w| = n - 1$ נוכיח שהטענה נכונה עבור $|w| = n$.

נתבונן בקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_j) \rightarrow (\varepsilon, s_i)$ לפי הנחת האינדוקציה מתקיים: $F(w_{n-1})mod3 = j$.

כעת נחלק למקרים:

מקרה א' $\sigma = 0$: אז לפי אבחנה 1 הכפלנו את המספר פי 2 ולכן אם $j = 0$ אז גם המחרוזת הבינרית החדשה מתחלקת ב-3 ללא שארית וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_0) \rightarrow (\varepsilon, s_0)$. אם $j = 1$ אז המחרוזת הבינארית החדשה מתחלקת ב-3 עם שארית של 2 וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_1) \rightarrow (\varepsilon, s_2)$.. ואם $j = 2$ אז המחרוזת הבינארית החדשה מתחלקת ב-3 עם שארית של 1 וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_2) \rightarrow (\varepsilon, s_1)$.

מקרה ב' $\sigma = 1$: אז לפי אבחנה 2 הכפלנו את המספר פי 2 ועוד 1. ולכן אם $j = 0$ אז המחרוזת הבינרית החדשה מתחלקת ב-3 עם שארית 1 וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_0) \rightarrow (\varepsilon, s_1)$. אם $j = 1$ אז המחרוזת הבינארית החדשה מתחלקת ב-3 בלי שארית וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_1) \rightarrow (\varepsilon, s_0)$.. ואם $j = 2$ אז המחרוזת הבינארית החדשה מתחלקת ב-3 עם שארית של 2 וכן קיימת הקונפיגורציה: $(w, s_0) \rightarrow (\sigma, s_2) \rightarrow (\varepsilon, s_2)$.

ב. נשים לב כי כל מעגליות באוטומט דורשת כוכב קליני. נחלק את המילים המתקבלות ע"י האוטומט לקבוצות זרות:

- מילים שמתקבלות רק ע"י מעברים בין המצב s_0 לעצמו, מילים כאלה ייוצגו ע"י הביטוי הרגולרי: 0^*
- מילים שאינן מתקבלות רק ע"י מעברים בין המצב s_0 לעצמו:

ניתן לבחור את מספר הפעמים שנרצה לנוע במעגל: s_0, s_1, s_0 ולכל בחירה כזו של מעגלים, נבחר כמה פעמים נרצה לנוע במעגל: s_0, s_1, s_2, s_1, s_0, כל תנועה במעגל כזה מיוצגת ע"י כוכב קליני ובסה"כ: $(1(0(1)^*0)^*1)^*$

כעת מכיוון שחילקנו לשתי קבוצות זרות של מילים נשתמש באיחוד ונקבל את הביטוי הרגולרי:

$$r = (1(0(1)^*0)^*1)^* \cup (0)^* = (1(0(1)^*0)^*1 \cup 0)^*$$

ולכן שפת האוטומט היא:

$$L = L(r)\,, r = (1(0(1)^*0)^*1 \cup 0)^*$$

ג. אנו מעוניינים בחישוב הביטוי: $T(1,1,3)$ על פי נוסחאת הנסיגה הבאה:

(לצורך הנוחיות שלנו בלבד נסמן את המצבים ב-1,2,3 במקום ב-0,1,2

בנוסף, נציג את הביטויים הרגולרים בשורות ולא בטבלה גם לצורך נוחות בלבד, זה שקול)

נסמן בכחול את העמודה $k=0$ כתום: $k=1$ ירוק $k=2$ שחור $k=3$

$$T(i,j,k+1) = T(i,j,k) \cup (T(i,k+1,k) \circ (T(k+1,k+1,k))^* \circ T(k+1,j,k)).$$

$$T(1,1,0) = \varepsilon \cup 0$$
$$T(1,2,0) = 1$$
$$T(2,1,0) = 1$$
$$T(2,2,0) = \varepsilon$$
$$T(2,3,0) = 0$$
$$T(3,3,0) = \varepsilon \cup 1$$
$$T(3,2,0) = 0$$
$$T(3,1,0) = \emptyset$$
$$T(1,3,0) = \emptyset$$

$$T(1,1,1) = T(1,1,0) \cup \left(T(1,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,1,0)\right) = \varepsilon \cup 0 \cup (\varepsilon \cup 0^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}\varepsilon \cup 0) = (0)^*$$

$$T(1,2,1) = T(1,2,0) \cup \left(T(1,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,2,0)\right) = 1 \cup (\varepsilon \cup 0^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}1) = (0)^*1$$

$$T(2,2,1) = T(2,2,0) \cup \left(T(2,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,2,0)\right) = \varepsilon \cup (1^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}1) = \varepsilon \cup (1(0)^*1)$$

$$T(2,1,1) = T(2,1,0) \cup \left(T(2,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,1,0)\right) = 1 \cup (1^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}\varepsilon \cup 0) = 1(0)^*$$

$$T(2,3,1) = T(2,3,0) \cup \left(T(2,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,3,0)\right) = 0 \cup (1^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}\emptyset) = 0$$

$$T(1,3,1) = T(1,3,0) \cup \left(T(1,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,3,0)\right) = \emptyset \cup ((\varepsilon \cup 0)^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}\emptyset) = \emptyset$$

$$T(3,3,1) = T(3,3,0) \cup \left(T(3,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,3,0)\right) = \varepsilon \cup 1 \cup (\emptyset^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}\emptyset) = \varepsilon \cup 1$$

$$T(3,2,1) = T(3,2,0) \cup \left(T(3,1,0)^\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*\circ}T(1,2,0)\right) = 0 \cup (\emptyset^\circ(\varepsilon \cup 0)^{*\circ}1) = 0$$

$$T(3,1,1) = T(3,1,0) \cup \left(T(3,1,0)\circ\left(T(1,1,0)\right)^{*}\circ T(1,1,0)\right) = \emptyset \cup (\emptyset\circ(\varepsilon \cup 0)^{*}\circ(\varepsilon \cup 0)) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} T(1,1,2) &= T(1,1,1) \cup \left(T(1,2,1)\circ\left(T(2,2,1)\right)^{*}\circ T(2,1,1)\right) = (0)^{*} \cup \left((0)^{*}1\circ\left(\varepsilon \cup (1(0)^{*}1)\right)^{*}\circ 1(0)^{*}\right) \\ &= (0)^{*} \cup ((0)^{*}1\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 1(0)^{*}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1,3,2) &= T(1,3,1) \cup \left(T(1,2,1)\circ\left(T(2,2,1)\right)^{*}\circ T(2,3,1)\right) = \emptyset \cup \left((0)^{*}1\circ\left(\varepsilon \cup (1(0)^{*}1)\right)^{*}\circ 0\right) \\ &= (0)^{*}1\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(3,3,2) &= T(3,3,1) \cup \left(T(3,2,1)\circ\left(T(2,2,1)\right)^{*}\circ T(2,3,1)\right) = \varepsilon \cup 1 \cup (0\circ(\varepsilon \cup (1(0)^{*}1))^{*}\circ 0) \\ &= \varepsilon \cup 1 \cup (0\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(3,1,2) &= T(3,1,1) \cup \left(T(3,2,1)\circ\left(T(2,2,1)\right)^{*}\circ T(2,1,1)\right) = \emptyset \cup (0\circ((1(0)^{*}1)^{*}\circ 1\circ(0)^{*}) \\ &= \left(0\circ(1(0)^{*}1)^{**}\circ 1\circ(0)^{*}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1,1,3) &= T(1,1,2) \cup \left(T(1,3,2)\circ\left(T(3,3,2)\right)^{*}\circ T(3,1,2)\right) \\ &= ((0)^{*} \cup ((0)^{*}1\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 1(0)^{*})) \cup (((0)^{*}1\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 0) \circ \left(\varepsilon \cup 1 \cup (0\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 0)\right)^{*} \\ &\circ (0\circ(1(0)^{*}1)^{*}\circ 1\circ(0)^{*})) \\ &= ((\mathbf{0})^{*} \cup ((\mathbf{0})^{*}\mathbf{1}\circ(\mathbf{1}(\mathbf{0})^{*}\mathbf{1})^{*}\circ \mathbf{1}(\mathbf{0})^{*})) \cup (((\mathbf{0})^{*}\mathbf{1}\circ(\mathbf{1}(\mathbf{0})^{*}\mathbf{1})^{*}\circ \mathbf{0}) \circ \left(\mathbf{1} \cup (\mathbf{0}\circ(\mathbf{1}(\mathbf{0})^{*}\mathbf{1})^{*}\circ \mathbf{0})\right)^{*} \\ &\circ (\mathbf{0}\circ(\mathbf{1}(\mathbf{0})^{*}\mathbf{1})^{*}\circ \mathbf{1}\circ(\mathbf{0})^{*})) \end{aligned}$$

שאלה 5

סעיף א:

הערה כללית: כל השפות הן מעל הא"ב Σ.

$$L_0 = \{w \mid |w|_a mod4 \neq 0 \wedge |w|_a mod5 \neq 0\}$$

$$L_1 = \{w \mid (|w|_a mod4 = 0 \wedge |w|_a mod5 \neq 0) \vee (|w|_a mod5 = 0 \wedge |w|_a mod4 \neq 0)\}$$

$$L_2 = \{w \mid |w|_a mod4 = 0 \wedge |w|_a mod5 = 0\}$$

$$L_3 = \{w \mid |w|_a = 0\}$$

$$L_4 = \emptyset$$

סעיף ב:

צ"ל לכל אוטומט א"ד M מתקיים: $L_N(M) \in L_{DFA}$, כלומר צריך להוכיח שקיים אוטומט דטרמניסטי M' כך שמתקיים: $L_N(M) = L(M')$. יהי N מספר טבעי ויהי $M =< Q, \Sigma, \Delta , s, A >$ אוטומט אי דטרמיניסטי עבור L_N. נגדיר אוטומט דטרמניסטי $M' =< \Sigma, Q, s', \delta', A' >$:

$$Q' = P(Q) = 2^Q$$

$$E(q) = \{q' : (q, \varepsilon) \longmapsto^* (q', \varepsilon)\}$$

$$s' = E(s)$$

$$\mathrm{A}' = \{R \subseteq Q : |R \cap A| = N\}$$

$$\delta'(\mathrm{B}, \sigma) = \bigcup_{q \in B} \bigcup_{q' \epsilon \Delta(\mathrm{q}, \sigma)} E(q') \quad , B \subseteq Q, \sigma \in \Sigma$$

הערה: נשים לב שלמצבים באוטומט הדטרמיניסטי יש שמות של קבוצות אך זוהי תווית בלבד, וכי כל מצב באוטומט M' הינו מצב בודד ה"מייצג" קבוצה של מצבים באוטומט M המקורי.

למה: לכל $B \subseteq Q$, $w \epsilon \Sigma^*$ אם (B, ε) $\longmapsto^*_{M'}$ (s', w) מתקיים: $B = \{q \epsilon Q : (s, w) \longmapsto^*_M (q, \varepsilon)\}$

הוכחת הלמה כפי שראינו בכיתה מתבססת על פונקציית המעברים של M' שנבנה בכיתה.

הסבר מדוע ניתן להשתמש בלמה: מאחר **ופונקציית המעברים** של M' הנוכחי ושל M' בהוכחה בכיתה, **זהה** (ההבדל היחיד הינו בהגדרת A') הלמה תקפה גם עבור בנייה זו.

כיוון 1: $L_N(M) \subseteq L(M')$

תהי $w \epsilon L_N(M)$, כלומר $R = \{q \epsilon Q : (s, w) \longmapsto^*_M (q, \varepsilon)\} : |R \cap A| = N$. נסמן עובדה זו ב-(*).

יהי B_w המצב של M' שעבורו מתקיים (B_w, ε) $\longmapsto^*_{M'}$ (s, w).

מהלמה נקבל כי $B_w = \{q \epsilon Q : (s, w) \longmapsto^*_M (q, \varepsilon)\}$, ובצירוף עם (*) נקבל כי $|B_w \cap A| = N$.

מהגדרת A' מתקבל כי $B_w \epsilon A'$ כלומר $w \epsilon L(M')$.

כיוון 2: $L_N(M) \supseteq L(M')$

תהי $w\epsilon L(M')$, כלומר קיים $B_w\epsilon\ A'$ שעבורו $(s,w)\ \longmapsto_{M'}^{*}\ (B_w,\varepsilon)$, מהגדרת A' נקבל כי $|B_w\cap A|=N$.

מהלמה נקבל כי $B_w=\{q\epsilon Q\ :\ (s,w)\ \longmapsto_{M}^{*}\ (q,\varepsilon)\}$

כלומר: $R=\{q\epsilon Q\ :\ (s,w)\ \longmapsto_{M}^{*}\ (q,\varepsilon)\}$. ולכן $B_w=R$ ולכן $|R\cap A|=N$, ומהגדרת $L_N(M)$ נקבל כי $w\epsilon L_N(M)$.

הערה: נשים לב כי גם עבור מקרה בו חישוב של M על w נתקע.

לכל $n\in N$ הטענה מתקיימת.

אם n=0 נקבל כי: $|\emptyset\cap A|=|B_w\cap A|=\ |R\cap A|=0=N$ ואכן המילה מתקבלת ב-'M. מכיוון שעונה על ההגדרה של $L_N(M)$

אחרת נקבל כי: $|\emptyset\cap A|=|B_w\cap A|=\ |R\cap A|=0\neq N$ ואכן המילה לא מתקבלת ב-'M. מכיוון שאינה עונה על ההגדרה של $L_N(M)$