שאלה 1:

א) $S_1;(S_2;S_3)$ ו- $(S_1;S_2);S_3$

הוכחה:

נראה 2 כיוונים: ① $\langle (S_1;S_2);S_3, S_0\rangle \to S_3 \Rightarrow \langle S_1;(S_2;S_3), S_0\rangle \to S_3$

② $\langle S_1;(S_2;S_3), S_0\rangle \to S_3 \Rightarrow \langle (S_1;S_2);S_3, S_0\rangle \to S_3$

①

$$\text{comp}\ \dfrac{\dfrac{*}{\langle S_1, S_0\rangle \to S'} \qquad \text{comp}\ \dfrac{\dfrac{*}{\langle S_2, S\rangle \to S'} \quad \dfrac{*}{\langle S_3, S'\rangle \to S_3}}{\langle S_2;S_3, S'\rangle \to S_3}}{\langle S_1;(S_2;S_3), S_0\rangle \to S_3}$$

* נכון בגלל הצעד מעלה.

מהנתון $\langle (S_1;S_2);S_3, S_0\rangle \to S_3$ נובעות 3 טענות נכונות, שהן בדיוק 3 הטענות שהיינו צריכים לדעת מעלה.

$$\text{comp}\ \dfrac{\text{comp}\ \dfrac{\dfrac{①}{\langle S_1; S_0\rangle \to S_1} \quad \dfrac{②}{\langle S_2, S_1\rangle \to S'}}{\langle S_1;S_2, S_0\rangle \to S'} \qquad \dfrac{③}{\langle S_3, S'\rangle \to S_3}}{\langle (S_1;S_2);S_3, S_0\rangle \to S_3}$$

② מהנתון ש- $\langle S_1;(S_2;S_3), S_0\rangle \to S_3$ נובע ש-
(לפי עץ הגזירה מעלה).

I $\langle S_1, S_0\rangle \to S'$

II $\langle S_2, S_1\rangle \to S'$

III $\langle S_3, S'\rangle \to S_3$

והשביל להוכיח $\langle (S_1;S_2);S_3, S_0\rangle \to S_3$ צריך בדיוק את הטענות אלו אז הכיוון הזה גם נכון.

<u>שאלה 1:</u>

ב) נוכיח כי לא [illegible] מתקיים $S_1;S_2 \sim S_2;S_1$:

$S_1 = x := x-1$

$S_2 = x := 3*x$

יהי s_0,

נסמן ב-y   נסמן s_0 את המצב

$$\frac{\langle S_1, s_0\rangle \to s_0[x \to x-1] \qquad \langle S_2, s_0\rangle \to s_0[y \to 3*y]}{\langle S_1;S_2, s_0\rangle \to s_0[x \to 3x-3]}$$

נסמן ב-y   נסמן ב-s_0 את המצב

$$\frac{\langle S_2, s_0\rangle \to s_0[x \to 3*x] \qquad \langle S_1, s_0\rangle \to s_0[y \to y-1]}{\langle S_2;S_1, s_0\rangle \to s_0[x \to 3x-1]}$$

לכן קיבלנו ש- $S_1;S_2$ עבור קלט s_0 עשה פעולה שונה מ- $S_2;S_1$ על קלט s_0.

ג) <u>כן:</u>

if b then (if c then S_1 else S_2) else S_3

$\sim$

if b and c then S_1 else if b and not c then S_2 else S_3

<u>אם $b,c = tt$:</u>

I
$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \text{if } b \text{ then (if } c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2) \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

II
$$\frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\text{if } b \text{ and } c \text{ then } S_1 \text{ else if } b \text{ and not } c \text{ then } S_2 \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

לכן שקול.

<u>אם $b = ff$:</u>

I
$$\frac{\langle S_3, s\rangle \to s'}{\langle \text{if } b \text{ then (if } c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2) \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

II
$$\frac{\langle S_3, s\rangle \to s_1}{\text{if } b \text{ and } c \text{ then } S_1 \text{ else if } b \text{ and not } c \text{ then } S_2 \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

לכן שקול.

המשך

אחרת: $c=ff,\ b=tt$;

(I)
$$\frac{\dfrac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \text{if } c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s\rangle \to s'}}{\langle \text{if } b \text{ then } (\text{if } c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2) \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

(II)
$$\frac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \text{if } b \text{ and } c \text{ then } S_1 \text{ else if } b \text{ and not } c \text{ then } S_2 \text{ else } S_3, s\rangle \to s'}$$

לכן שקולים.

שאלה 2:

א) $\text{do } S \text{ while } b$:

$[\text{do while}^{tt}] =$

if $B[b]_{s'} = tt$
$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad \langle \text{do } S \text{ while } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''}$$

$[\text{do while}^{ff}]$

if $B[b]_{s'} = ff$
$$\frac{\langle S, s\rangle \to s'}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s'}$$

ב) טענה: $\text{do } S \text{ while } b \sim S; \text{if } b\ (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}$

הוכחה: (1) $\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s'' \Rightarrow \langle S; \text{if } b (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''$

(2) $\Leftarrow$

(1) אם $B[b]_{s'} = tt$ אז
$$\frac{T_1 \quad T_2}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''}$$

כך ש- T_1 מהצורה $\langle S, s\rangle \to s'$ ו- T_2 מהצורה $\langle \text{do } S \text{ while } b, s'\rangle \to s''$ מהצעד.

נשים לב ש-

comp
$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad \langle \text{do } S \text{ while } b, s'\rangle \to s''}{\langle S; \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''}$$

כעת, נעבור לכלל if כאשר $B[b]_{s'} = tt$:

if
$$\frac{\langle S; \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''}{\langle S; \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''}$$

כנדרש.

מקרה הבא

אם $\mathcal{B}[b]s' = ff$:

$$\frac{T}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s'}$$

נשים T כך ש T מוכיח $\langle S, s\rangle \to s'$

לגזור לפי if^{ff}:

$$\frac{\langle \text{skip}, s''\rangle \to s''}{\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s''\rangle \to s''}$$

כעת, Comp:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s'' \quad \langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''}{\langle S; \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''}$$

לכן $\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''$ כנדרש.

כיוון שני, נניח $\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''$ ונוכיח $\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''$

לפי ההנחה, קיים עץ גזירה כך ש-

$$\frac{T_1 \quad T_2}{\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s'}$$

T_1 מוכיחה $\langle S, s\rangle \to s'$, T_2 מוכיחה $\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s\rangle \to s''$ -

אם $\mathcal{B}[b]s' = tt$:

אז השורה של T_2 היא מהצורה $\dfrac{T_3}{\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s'\rangle \to s''}$

כאשר T_3 מוכיחה $\langle \text{do } S \text{ while } b, s'\rangle \to s''$, ונוכל לגזור לפי do-while של tt.

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s' \quad \langle \text{do } S \text{ while } b, s'\rangle \to s''}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''}$$

כנדרש.

אם $\mathcal{B}[b]s' = ff$: T_2 מוכיחה $\langle \text{if } b \text{ then } (\text{do } S \text{ while } b) \text{ else skip}, s'\rangle \to s''$ והמצב לכן מתקיים לכן $s' = s''$, אך T_1 מוכיחה $\langle S, s\rangle \to s'$ לכן $\langle S, s\rangle \to s''$.

כעת נשתמש ב $[\text{do while}]^{ff}$ של ff:

$$\frac{\langle S, s\rangle \to s''}{\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s'}$$

קיבלנו $\langle \text{do } S \text{ while } b, s\rangle \to s''$. כנדרש

שאלה 3

ג) נגדיר את הכללים הבאים עבור פונקציה סמנטית $N:Bin\rightarrow int$

1. $N[0]=0$
2. $N[1]=1$
3. $N[n\ 0]=2\cdot N[n]$
4. $N[n\ 1]=2\cdot N[n]+1$

ד) נוכיח באינדוקציה את הטענה המתקיימת לכל n שמייצג מספר בינארי:

בסיס: אם $n=0$ אזי, לפי הגדרת הכללים $N[0]=0$
ואכן ה output של n זה

אם $n=1$ אזי, גם כן לפי הגדרת הכללים $N[1]=1$
ואכן גם פה ה Output של n

מצינו שגם הבסיס אכן מתקיים:

הנחה: נניח כי הטענה נכונה לכל $n'<n$ ונוכיח עבור n.

צעד: כלומר אנו מניחים כי עבור כל מספר בינארי $n'<n$ אז פונקציית הסמנטיקה שהגדרנו תחזיר Output. נרצה להוכיח שגם מתקיים גם כן עבור n. מכיוון ש n מספר בינארי יכולים להיות לו 2 מקרים: מקרה ראשון שהוא מורכב $n = k\,0$ כלומר הוא מורכב ממספר בינארי כלשהו k שאינו ריק קטן ב-1 מ-n וספרה 0. או ש $n = k\,1$ כלומר מורכב ממספר k שאינו ריק קטן מ-n וספרה 1

עבור $n = k\,0$: לפי הפונקציה שהגדרנו אנו נקבל ש

$$N[n] = N[k\,0] \overset{\text{הגדרת } N}{=} 2\cdot N[k]$$

מכיוון ש $n>k$ לפי הנחת האינדוקציה אכן יש ל $N[k]$ Output ונכפיל ב-2 ונקבל גם Output עבור n הנדרש

עבור $n = k\,1$: לפי הפונקציה שהגדרנו אנו נקבל ש

$$N[n] = N[k\,1] = 2\cdot N[k] + 1$$

גם כאן מכיוון ש $n>k$ לפי הנחה יש לו Output ועבור הכפלתו ב-2 ונוסיף 1 נקבל Output גם ל n הנדרש.

(עבור $n=0$, $n=1$ כאשר k ריק הוכחנו בבסיס האינדוקציה). הוכחנו צעד

לסיכום, הוכחנו עבור כל מספר בינארי פונקציית הסמנטיקה N שהגדרנו תחזיר Output