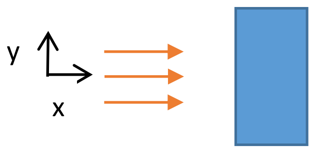


<u>פרויקט B: הידרודינמיקה דו-ממדית של זורם לא דחיס עם צמיגות במצב עמיד</u>

נתאר זרימה במהירות V_0 הנתקלת במכשול מלבני ברוחב $2W$ בניצב לזרימה ואורך T.

נסמן את הצפיפות החומרית ב-ρ , את המהירות ב-$\vec{V}$, את הלחץ ב-p ואת מקדם הצמיגות הקינטית (הפיזיקלית) ב-ν.

משוואות התנועה האוילריות:

משוואת הרציפות (שימור החומר) - $$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

משוואת התנע בנוכחות צמיגות (משוואת Navier-Stokes) - $$\partial_t\vec{V} = -\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}$$

נניח שהטמפרטורה בזורם אחידה ושהשינויים בצפיפות זניחים – זורם בלתי דחיס. כמו כן, נתעניין בפתרון של מצב עמיד כלומר, $\partial_t = 0$. מכאן נקבל:

משוואת הרציפות - $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$$

משוואת התנע - $$\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}$$

נטפל במקרה הדו-ממדי ונסמן את רכיב x של המהירות ב- u ואת רכיב y ב-v ונרשום את המשוואות לא בכתיב ווקטורי:

$$(1)\quad \partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$(2)\quad u\,\partial_x u + v\partial_y u = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right)$$

$$(3)\quad u\,\partial_x v + v\partial_y v = -\frac{1}{\rho}\partial_y p + \nu\left(\partial_x^2 v + \partial_y^2 v\right)$$

מקבלים שלוש משוואות דיפרנציאליות חלקיות עבור שלושה נעלמים: u, v, p.

נחליף את רכיבי המהירות בשני גדלים אחרים: פונקציית הזרם (stream function) ψ והמערבולתיות (vorticity) ζ.

פונקציית הזרם מוגדרת כך ש: $v = -\partial_x\psi \quad , \quad u = \partial_y\psi$ ומשוואת הרציפות הופכת להיות טריוויאלית. (ניתן להראות שקיים ψ שכזה לכל שדה זרימה שמקיים את משוואת הרציפות). כמו כן מתקיים $\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi = 0$ כלומר, המהירות היא משיקה לקווים שווי ψ ולכן קווים אלו הם "קווי זרימה" ומכאן שם הגודל.

המערבולתיות מוגדרת על ידי הקשר: $\zeta = \partial_y u - \partial_x v$ (כלומר, $\vec{\zeta} = -\vec{\nabla}\times\vec{V}$ אלא שבעולם דו ממדי נקבל גודל סקלרי).

מכאן מקבלים קשר בין פונקציית הזרם למערבולתיות:

$$(a) \quad \Delta\psi = \zeta$$

נקבל משוואה נוספת אם נגזור את (2) לפי y ואת (3) לפי x, נרשום את ההפרש ונשתמש במשוואת הרציפות:

$$(b) \quad \nu\Delta\zeta = \left[\partial_y\psi\partial_x\zeta - \partial_x\psi\partial_y\zeta\right]$$

אם נגזור את (2) לפי x ואת (3) לפי y ונחברם, נקבל משוואה לנגזרת המרחבית השנייה של הלחץ, אך מכיוון שהלחץ לא מופיע ב-(a) וב-(b) ניתן לפתור רק אותן ולקבל את שדה הזרימה.

פתרון נומרי מסתמך על דיסקרטיזציה של המרחב באמצעות סריג דו-ממדי של נקודות במרווח אחיד h עם N_x, N_y נקודות ב-x, y בהתאמה. נגדיר את $y = 0$ במרכז המכשול וכך, משיקולי סימטריה, מספיק לפתור את הבעיה עבור $y \geq 0$. נסמן את נקודות הסריג על ידי i, j כך ש: $x_i = i * h,\ \ y_j = j * h$. את המשתנים על הסריג נרשום בגדלים חסרי יחידות כך שפונקציות הזרם תהיה ביחידות של $V_0 h$ והמערבולתיות ב-V_0/h.

משוואות ההפרשים יהיו:

$$\delta_i^2\psi_{i,j} + \delta_j^2\psi_{i,j} = \zeta_{i,j} \quad , \quad \delta_i^2\zeta_{i,j} + \delta_j^2\zeta_{i,j} = \frac{R}{4}\left(\delta_j\psi_{i,j}\delta_i\zeta_{i,j} - \delta_i\psi_{i,j}\delta_j\zeta_{i,j}\right)$$

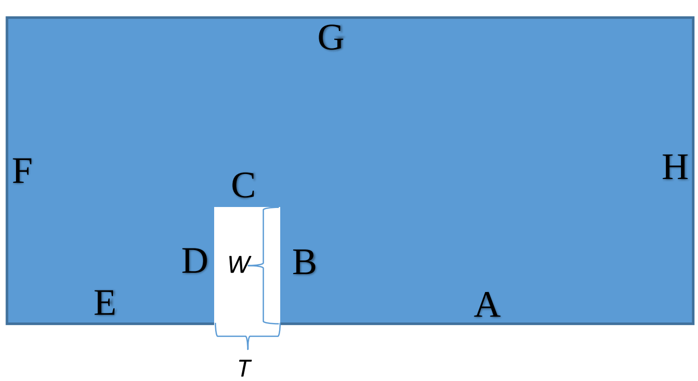
כאשר נגדיר את האופרטורים:

$$\delta_i\chi_{i,j} \equiv \chi_{i+1,j} - \chi_{i-1,j} \quad , \quad \delta_i^2\chi_{i,j} \equiv \chi_{i+1,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i-1,j}$$

וכן:

$$\delta_j\chi_{i,j} \equiv \chi_{i,j+1} - \chi_{i,j-1} \quad , \quad \delta_i^2\chi_{i,j} \equiv \chi_{i,j+1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j-1}$$

כש-$R = \frac{V_0 h}{\nu}$ מכונה מספר ריינולדס של הסריג. הפתרון הנומרי מחושב בתת-המרחב המוצג בשרטוט הבא (ללא קנ"מ):



ניתן לראות שקיבלנו משוואות הפרשים הניתנות לפתרון נומרי על ידי איטרציות, בהינתן תנאי שפה וניחוש התחלתי.

כניחוש התחלתי נשתמש בערכי הגדלים במצב בו לא קיים מכשול: $u = V_0\, , v = 0 \ \Rightarrow\ \psi = V_0 y\, ,\ \zeta = 0$.

תנאי השפה על השפות השונות שסומנו בשרטוט צריכים להגדיר את הערך או הנגזרת הניצבת של הנעלמים, פונקציית הזרם והמערבולתיות. נבחן את השפות השונות:

תנאי השפה על A ו-E נקבעים משיקולי סימטריה: רכיב y של המהירות צריך להתאפס: $v=-\partial_x\psi=0$. מכאן נובע ש-A ו-E הם קווי זרימה (ψ קבוע עליהם). בנוסף, מכיוון שהמהירות הניצבת (שהיא הנגזרת בכיוון המשיק של ψ) מתאפסת על שפות המכשול D,C,B הרי שערכו של ψ על E,D,C,B,A הוא קבוע וכל הרצף הזה של השפות מהווה קו זרימה אחד, ויש חופש לבחור את הערך ולכן נבחר $\psi=0$ (המהירויות הן נגזרות של ψ ולכן הפתרון הפיזיקאלי לא משתנה אם מוסיפים ל-ψ קבוע). בגלל הסימטריה ב-A ו-E גם המערבולתיות עליהם מתאפסת: $\zeta=0$.

תנאי השפה על הזרם הנכנס ב-F נקבע כך שיתאר זרימה שאינה מושפעת מהמכשול: $v=-\partial_x\psi=0\ \ ,\ \ \zeta=0$.

באופן דומה כשהשפה העליונה רחוקה מספיק, הזרימה בה אינה מופרעת, ונקבל על G: $u=\partial_y\psi=V_0\ \ ,\ \ \zeta=0$.

תנאי השפה במורד הזרימה ב-H עשויים להשפיע על הפתרון אם השפה אינה רחוקה מספיק. אנו נדרוש שהפתרון לא ישתנה כפונקציה של המרחק כלומר, $\partial_x\zeta=0\ \ ,\ \ \partial_x\psi=0$.

על שפות המכשול D,C,B קבענו תנאי שפה ל-ψ על ידי דרישה שהמהירות הניצבת מתאפסת. בזרימה עם צמיגות גם המהירות המשיקית צריכה להתאפס ונשתמש בכך כדי לרשום תנאי שפה על המערבולתיות שנקרא "no slip". נתבונן תחילה על שפה C, מהירות משיקית מתאפסת משמעה ש: $u=\partial_y\psi=0$. על השפה, גם המהירות הניצבת מתאפסת ולכן לא משתנה ומכאן נקבל: $\partial_x v=0$ ומהגדרת המערבולתיות נקבל: $\zeta=\partial_y u=\partial_y^2\psi$.

נתבונן בנקודה (i,j) על C, נזכור ש: $\psi_{i,j}=0$, נפתח בטור כדי להעריך את ערכו של $\psi_{i,j+1}$ ונשתמש בערכי הנגזרות הראשונה והשנייה שקיבלנו: $\psi_{i,j+1}=\psi_{i,j}+h\partial_y\psi_{i,j}+\frac{h^2}{2}\partial_y^2\psi_{i,j}=\frac{h^2}{2}\zeta_{i,j}$ כלומר קיבלנו: $\zeta_{i,j}=\frac{2}{h^2}\psi_{i,j+1}$

במילים אחרות, ערכה של המערבולתיות בכל נקודה על C נקבע מערך פונקציית הזרם בנקודה מעליה (נשים לב שהפיתוח נעשה עבור הגדלים ביחידות פיזיקאליות, וכשמשתמשים בגדלים חסרי יחידות **אין** פקטור h^2 בין המערבולתיות ופונקציית הזרם).

בצורה דומה, על B מתקיים: $\zeta_{i,j}=\frac{2}{h^2}\psi_{i+1,j}$, ועל D מתקיים: $\zeta_{i,j}=\frac{2}{h^2}\psi_{i-1,j}$. בקודקודי המפגש בין C ל-B ובין C ל-D נשתמש במיצוע בין השכנים בכיוון האופקי והכיוון האנכי.

פתרון משוואות ההפרשים נעשה על ידי איטרציות, כשכל איטרציה מורכבת משני שלבים:

- מבצעים איטרצית גאוס-זיידל בודדת עם פרמטר רלקסציה $w < 1$ עבור משוואת הלפלסיאן של ψ כאשר ערכי ζ נלקחים מהאיטרציה הקודמת, תוך התחשבות בתנאי השפה ל-ψ.
- מבצעים איטרצית גאוס-זיידל בודדת עם פרמטר רלקסציה $w < 1$ עבור משוואת הלפלסיאן של ζ כאשר ערכי ψ נלקחים מהשלב הקודם, תוך התחשבות בתנאי השפה ל-ζ.

חוזרים על האיטרציות עד להתכנסות (כלומר, עד שהשינויים ב-ψ וב-ζ הם קטנים מאוד). כאשר ערכו של מספר ריינולדס של הסריג R הנו גדול, עלולה להיות בעיית יציבות. ניתן להתגבר עליה על ידי הקטנת ערכו של פרמטר הרלקסציה (במקרה שלנו $w \approx 0.1$).

את הפתרון ניתן להציג על ידי ציור קווי גובה של ψ.

בעיית הזרימה הפיזיקאלית מאופיינת על ידי מספר ריינולדס הפיזיקאלי: $Re = \frac{2WV_0}{\nu}$. עבור ערכי Re נמוכים, הזרימה עוקפת את המכשול בצורה חלקה. כשמגדילים את ערכי Re מתחילות להיווצר מערבולות בצד האחורי של המכשול, בסמוך לקו הסימטריה. עבור ערכים גבוהים אף יותר, הופכת הזרימה לטורבולנטית ממש.

ממדי המערכת אותם יש לפתור מוגדרים על ידי אורך השפות: 76-A, 8-B, 8-C, 8-D, 36-E, 40-F, 120-G, 40-H.

(יחידות האורך הן שרירותיות). כלומר, ממדי המכשול הם: $T = 8\ ,\ 2W = 16$.

<u>מטלות:</u>

א. לפתור את משוואות הזרימה ולהציג פתרון גרפי (קווי גובה של ψ) עבור $R = 0.01 \quad , \quad h = 1$. לציין כמה איטרציות נעשו ומה תנאי ההתכנסות.

ב. כנ"ל עבור $R = 4.00 \quad , \quad h = 1$.

ג. מציאת ערכו של Re בו מתחילה להיווצר מערבולת בגב המכשול, עבור $h = 1$. כלומר, מהו הערך הנמוך ביותר של Re, בו מופיעה מהירות משיקית המתרחקת מקו הסימטריה בנקודת הסריג הסמוכה לציר הסימטריה וגב המכשול.

ד. מציאת ערכו של Re בו מתחילה להיווצר מערבולת בגב המכשול, עבור $h = \frac{1}{2}$.

ה. להציג פתרון גרפי עם $h = 1$ עבור ערך של Re הגבוה מהערך הקריטי בו מתקבלת מערבולת, ולציין את מספר האיטרציות הנדרש.

ו. להציג פתרון גרפי עם $h = \frac{1}{2}$ עבור ערך של Re הגבוה מהערך הקריטי בו מתקבלת מערבולת **הזהה** לערך של Re במטלה ה ולציין את מספר האיטרציות הנדרש.