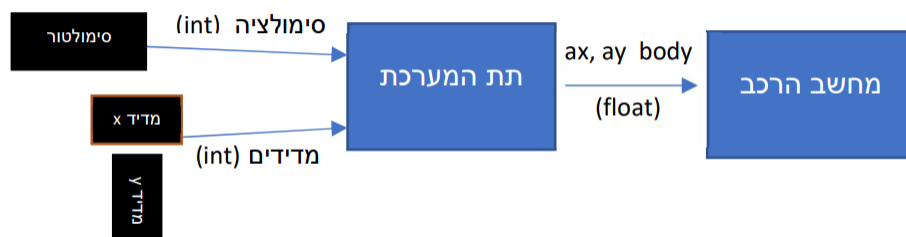


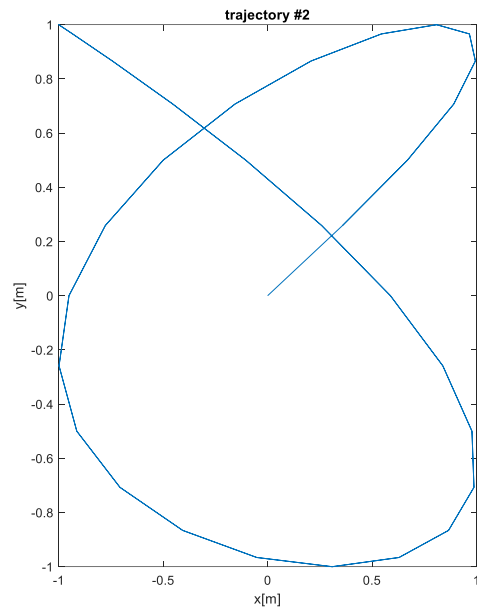
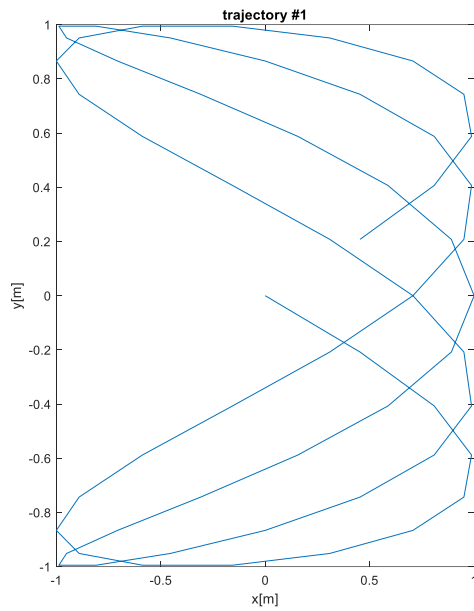
## אלגוריתמיקה – שאלה #1



1. בחלקו הראשון של התרגיל, נדרשנו לדמות מצב בו קיימת תת מערכת בעלת שני ערוצי קלט: INS המודד ומעביר תאוצות בשני צירים, וערוץ סימולטור שביכולתו להזריק נתונים "מזויפים" למטרות שונות. לתת המערכת מידע מקדים אודות שגיאות המדידים, ותפקידה, לאפסם בטרם העברתם למחשב המשימה.
2. השגיאות שנלקחות בחשבון הן שגיאת התקנה (אשר מבוטאת כמטריצת סיבוב R), Scale-Factor ו-Bias באופן הבא:

$$\text{Out} = R * SF * \text{In} + \text{bias}$$

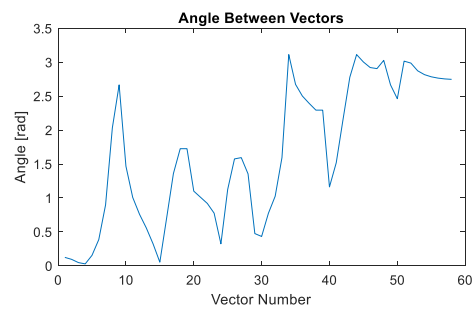
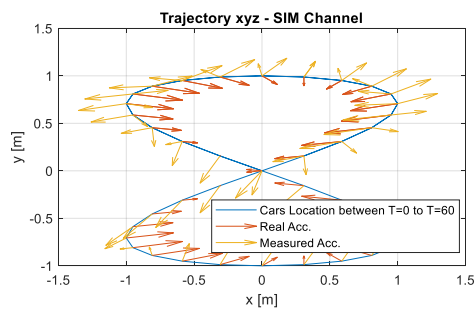
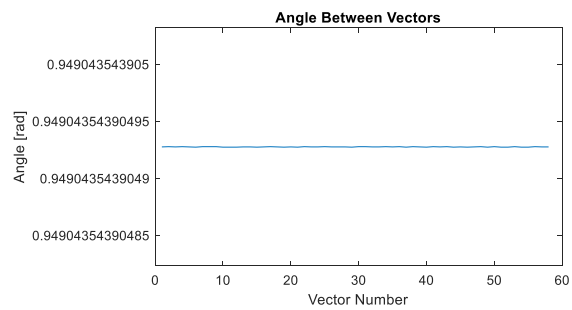
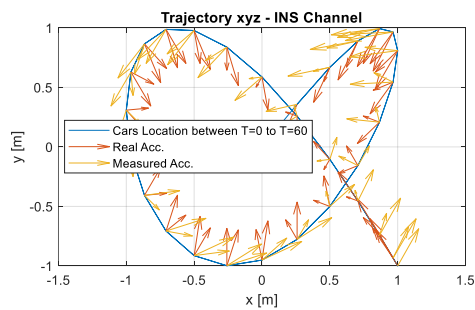
3. כאמור, בהחלטת מפעיל, תת המערכת מוגדרת להעביר אחד משני ערוצי הקלט שלה: ערוץ המדידים, שמועבר לאחר תיקון השגיאות, או לחלופין ערוץ הסימולטור שמועבר ללא שינוי. אנו נדרשים לתכנן אלגוריתם, **שללא מידע מקדים** יידע לסווג את קלט תת המערכת, ע"י השוואתו לערוץ המדידים הגולמי.
4. במצב דברים פשוט יותר, בו תת המערכת לא הייתה מבצעת שינויים בערוץ המדידים, משימתנו הייתה פשוטה יחסית: בתרחיש בו מועבר ערוץ המדידים, פלט תת המערכת היה זהה לחלוטין לקלט ערוץ המדידים, ומבחן קורלציה פשוט היה יכול לזהות זאת. אולם למעשה אנו נדרשים לייצר "מסווג" שיידע לזהות את הדימיון בין ערוץ המדידים לגרסתו המתוקנת, מוכפלת ומסובבת.



איור 1 - שני מסלולים אקראיים אושר נוצרו ע"י מחולל המסלולים

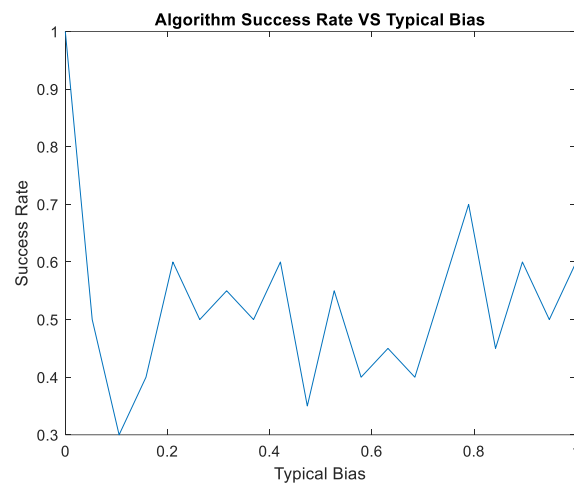
## גישה 1 – מדידת הזווית בין מדידות הפלט והקלט

5. בתרחיש בו שגיאת הביאס הינה זניחה, צפוי להתקיים מצב בו ההבדל בין ערוץ המדידים הגולמי לפלט תת המערכת המתוקן יתבטא בזווית קבועה בין ווקטורי המדידות. זאת לאור העובדה שמטריצת הסיבוב הינה קבועה, ושגיאת ה-SF מתבטאת גם היא בתוספת קבועה לזווית ולערך המוחלט של הווקטור.



6. בתרשים לעיל ניתן להיווכח ביכולת ההבחנה המהותית של מסווג המבוסס על מדידת הזווית בין ווקטורי הפלט והקלט: בדוגמה העליונה, נמדדת הזווית בין ערוץ המדידים הגולמי, לפלט המתוקן והמסובב של אותו ערוץ. בהתאם, נמדדת זווית קבועה בין כלל הווקטורים. זאת לעומת השוואת הזווית בין אותו ערוץ קלט, לפלט סימולטיבי אשר שונה מהותית מזה של ערוץ ה-INS. הפעם נמדדת זווית משתנה, אקראית. מדידת התופעה מאפשרת בתרחישים אלה להבחין בין שני התרחישים.

7. כפי שצוין, אלגוריתם זה תקף ושריר כל עוד ערכי ה-Bias אינם משמעותיים, היות ואלה מתבטאים בתוספת זווית שונה לכל ווקטור. להלן גרף המציג את מידת "הצלחתו" של האלגוריתם בניחוש פלט תת המערכת, כתלות בגודלן האופייני של שגיאות ה-Bias של המערכת:



8. ניתן להיווכח שגם תוספת קטנה של Bias פוגמת באופן משמעותי ביכולתו של האלגוריתם, המבוסס על מדידת הזווית בין הווקטורים, לסווג נכונה את פלט תת המערכת.

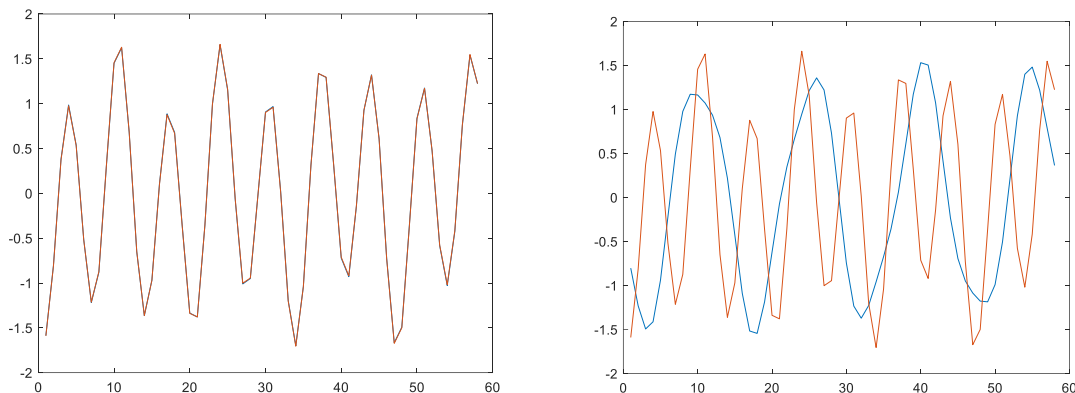
## גישה 2 – בחינת ערכי התאוצה, נרמול, וסיבוב לקביעת מקור משותף

9. האלגוריתם הבא הינו מורכב יותר מקודמו, אולם מתמודד בהצלחה יתרה עם שגיאות המערכת ובפרט עם שגיאת ה-Bias. אם באלגוריתם הראשון ניסינו לבצע השוואה בין ווקטורים שלמים ע"י מדידת הזווית שביניהם, כאן נבחן את ההתנהגות של רכיבי הווקטורים הנפרדים.

10. למרות שההשפעה של ה-Bias על זווית הווקטור כולו משתנה, הוא נותר קבוע אם בוחנים כל רכיב בנפרד (יחד עם שאר השגיאות). לכן:

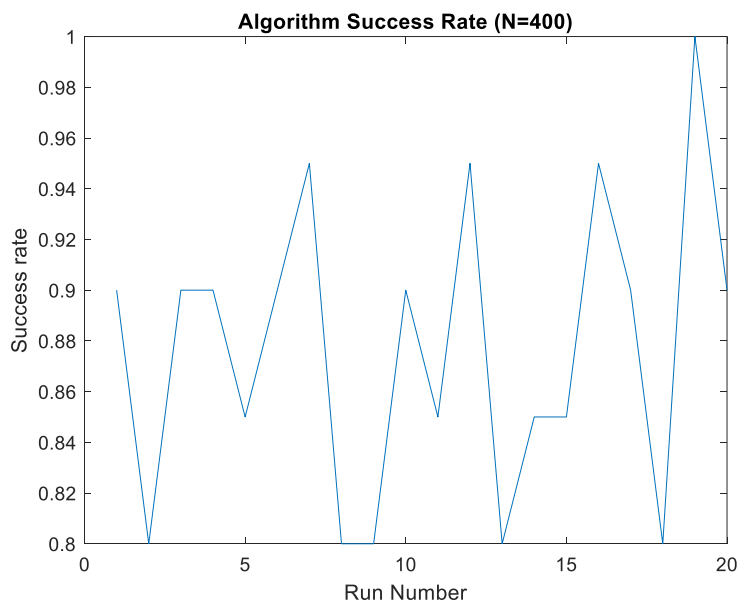
a. נירמול תוצאות המדידה טרם השוואתם צפוי לנטרל את השפעת השגיאות (SF-i Bias).

b. לאחר הנרמול נוכל "לסובב" את הווקטורים האחר ביחס לשני, ובהינתן חפיפה מספקת לקבוע את מקורם המשותף.



איור 2 - מימין: רכיבי ווקטורי לאחר נרמול, טרם סיבוב לזווית חפיפה. משמאל: סיבוב הדרגתי, מגלה חפיפה מלאה בין הרכיבים.

**11.** לאחר נרמול רכיבי הווקטור, נוכל "לסובב" אותו בהדרגה באמצעות מטריצת סיבוב, עד אשר נמצא (באמצעות מבחן קורלציה) את זווית הסיבוב שמחזירה את רכיב הווקטור לצורתו המקורית (טרם תוקן ע"י תת המערכת). במידה ובדיקה זו תבוצע על גבי פלט הסימולציה, ההשוואה לקלט המדידים הגולמי תייצר קורלציות נמוכות לאור השוני המהותי בין הערוצים. ע"י ביצוע הצעדים הנ"ל נוכל להבדיל בין הפלטים.



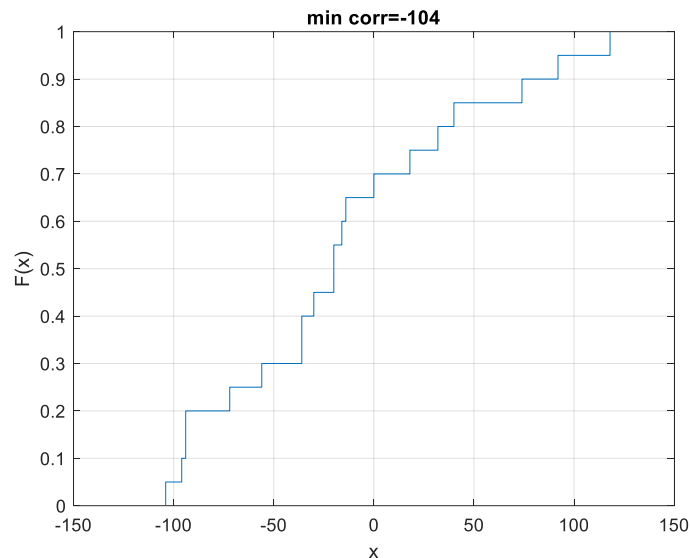
**12.** מתוך 400 הגרלות של מסלולים שונים, נראה כי האלגוריתם הצליח לסווג באופן תקין ב-87% מהמקרים בממוצע. המקרים בהם הסיווג כשל, נוגעים לאופן המימוש הספציפי של מחולל המסלולים. המסלולים הורכבו משילוב של סינוסים בתדירים שונים. המקרים בהם בחר מחולל המסלולים תדרי סינוס קרובים לשני המסלולים, יצרו קורלציה גבוהה באופן יחסי באופן שהקשה על המסווג להבחין ביניהם על בסיס מבחן קורלציה. ברור, שבתרחיש מציאותי יותר, בו המסלולים אקראיים, מבחן הקורלציה יאפשר הבחנה חדה בהרבה, באופן שיגדיל את אחוזי ההצלחה של אלגוריתם הסיווג.

## אלגוריתמיקה – שאלה #2

13. בבעיה זו נתונים 20 וקטורים בינאריים באורך 5000, המכילים ערכים של 1 ו -1 במיקומים אקראיים. מטרתנו הינה לתכנן וקטור נוסף (ייקרא RefVec) אשר לו אופיין קורלציה אופטימלי עם סדרת הווקטורים הנתונה.

14. ניתן להגדיר את הקורלציה בין וקטור הייחוס לוקטור נתון, ע"י כמות האיברים הזהים (מכאן שהקורלציה צפויה לקבל ערכים בתחום שבין -5000:5000). עלינו לתכנן ווקטור ייחוס, בעל שהקורלציה המינימלית שלו לסט הווקטורים הבינאריים יהיה מיטבי.

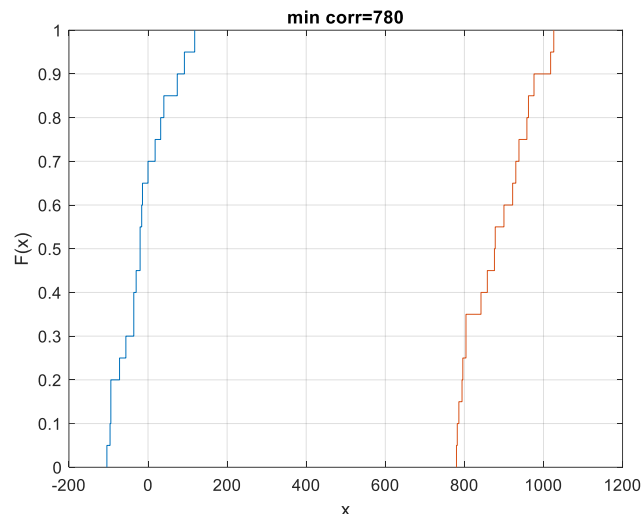
15. נתחיל מווקטור אקראי, ונמדוד את הקורלציה שלו לכל אחד מ-20 הווקטורים הנתונים:



איור 3 - CDF המציג את הקורלציות לסט הווקטורים הנתונים.

16. לכל איבר של הווקטור האקראי, היות ומוגדרות 2 אפשרויות לערכים עבור על איבר, יש סיכוי של 50% להיות תואם לאיבר המקביל בווקטור מולו מחושבת הקורלציה. ואכן מתרשים ה-CDF ניתן לראות כי בממוצע לווקטור האקראי קורלציה 0 לשאר הווקטורים (כלומר, מחצית מהאיברים זהים ומחצית שונים). נדגיש כי הקורלציה המינימלית המגדירה את אופיין הקורלציה, מוערכת ל -104 בדוגמה זו.

17. כעת, נבנה ווקטור חדש ומשופר באופן הבא: נקבע את ערכו של איבר בווקטור הייחוס, לפי ערכי האיברים המקבילים של סט הווקטורים: אם מרבית האיברים ערכם למשל -1, נבחר להגדיר את האיבר המקביל בווקטור הייחוס באותו האופן. באופן הזה, כל איבר של ווקטור הייחוס "מרצה" כמות גדולה ככל הניתן של ווקטורים מהסט הנתון.



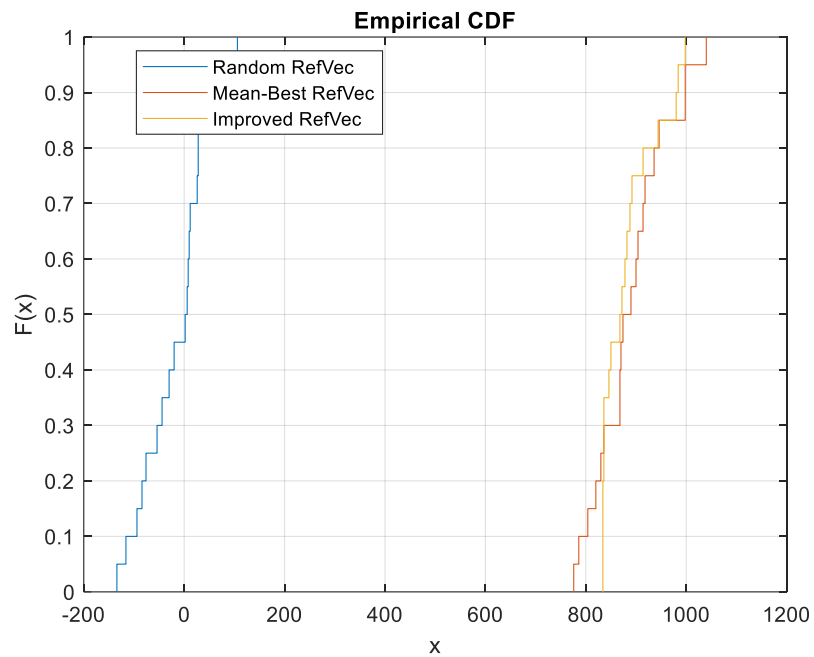
איור 4 - ווקטור הייחוס המשופר. ניתן לראות כי הקורלציה לכלל הווקטורים השתפרה באופן משמעותי, ובפרט הקורלציה המינימלית שמגדירה את אופיין הקורלציה.

18. השיפור בקורלציה הממוצעת, השתפרה באופן משמעותי. גם כאן, קיימת התפלגות מסויימת לטיב הקורלציה עם ווקטורי הסט – ניתן לראות כי קיים ווקטור איתו הקורלציה היא מקסימלית וערכה מעל 1000, לעומת ווקטור אחר איתו הקורלציה היא המינימלית וערכה 780 בדוגמה זו. נדגיש כי אלגוריתם ראשוני זה הינו יעיל במיוחד וסיבוכיותו שווה לאורך הווקטור בלבד (במקרה שלנו 5000 חישובים)

19. היות ואופיין הקורלציה נמדד לפי הקורלציה המינימלית לווקטורי הסט, נוכל למצוא לקחת את הווקטור שייצור ולשפר עבורו את הקורלציה המינימלית **על חשבון הקורלציה המקסימלית**. כלומר נעדיף לפגוע בקורלציה עם ווקטורים איתם הקורלציה היא טובה מהממוצע, כדי לקבל קורלציה טוב יותר לווקטורים עבורם הקורלציה הינה גרועה מהממוצע.

20. כאן נכנס לפעולה חלקו השני של האלגוריתם, שעובר איבר-איבר בווקטור המשופר ובודק האם שינוי ערכו מגדיל את הקורלציה המינימלית (כאמור, בהכרח על חשבון הקורלציה המקסימלית). הבדיקה נעשית ע"י שינוי ערכו של איבר וחישוב אופיין הקורלציה המתקבלת: באם הקורלציה המינימלית השתפרה, השינוי נשמר. אחרת, השינוי מוחזר לאחר

21. מדובר באלגוריתם בעל סיבוכיות גדולה בהרבה, אולם העובדה שה-"כיוול הסופי" הזה מתבצע כבר על ווקטור בעל קורלציה ממוצעת מקסימלית, מבטיח התכנסות למקסימום הגלובלי תוך זמן קצר ככל הניתן (בוודאי בהשוואה לתרחיש בו אלגוריתם זה היה מוחל על ווקטור אקראי).



איור 5 - בכחול: קורלציה של ווקטור ייחוס אקראי. בכתום: ווקטור ייחוס בעל קורלציה ממוצעת מיטבית. בצהוב: כיול נוסף של ווקטור הייחוס בעל הקורלציה ממוצעת המיטבי, על מנת לשפר את הקורלציה המינימלית.