לוגיקה

טבלה קצרה להבהרת הביטויים "אם...אז...." , "רק אם .... אז..."

הטבלה מציגה את הפירוש הפורמלי המקובל עבור כל אחד מהביטויים המילוליים. בשפה מדוברת ייתכנו משמעויות שונות מאלה. בקורס שלנו, כאשר אתם מתבקשים לתרגם אמירה מילולית לפסוק, משמעות הביטויים היא המשמעות המתמטית שלהלן. הפסוקים בטבלה הם בכתיב מקוצר.

נסמן P : "הכלב נובח" , Q : "החתול בורח"

	שפה מדוברת	**פסוק**	**הערות**
	I. אם... (אז) ...		
א.	**אם** הכלב נובח **אז** החתול בורח	$P \to Q$	
ב.	**אם** הכלב נובח, החתול בורח	$P \to Q$	כמו א, בהשמטת המלה "אז"
ג.	החתול בורח **אם** הכלב נובח	$P \to Q$	נראה הפוך מהסעיף הקודם אבל זה סתם ניסוח אחר, עם אותה משמעות. התנאי "**אם**" מתייחס עדיין ל- P .
ד.	**אם** החתול בורח, הכלב נובח	$Q \to P$	מובן
	II. רק אם ...(אז) ...		
ה.	**רק אם** הכלב נובח, החתול בורח	$Q \to P$	"רק אם" הוא חץ הפוך !
ו.	החתול בורח **רק אם** הכלב נובח	$Q \to P$	נראה הפוך מהסעיף הקודם אבל זה סתם ניסוח אחר, עם אותה משמעות. התנאי "**רק אם**" מתייחס עדיין ל- P .
ז.	**רק אם** החתול בורח, הכלב נובח	$P \to Q$	מובן
	III. שלילה		
ח.	אם הכלב **לא** נובח, החתול **לא** בורח	$(\sim P) \to (\sim Q)$	שקול טאוטולוגית לפסוק $Q \to P$
ט.	אם החתול **לא** בורח, הכלב **לא** נובח	$(\sim Q) \to (\sim P)$	שקול טאוטולוגית לפסוק $P \to Q$
	IV. ג'לסומינו בארץ השקרנים		
י.	אם החתול נובח הכלב בורח		כדי לנתח את הקשר בין טענה זו לטענות הקודמות כדאי לעבור לתחשיב הפרדיקטים...

איתי הראבן, אוקטובר 2006

קבוצות

ב"ה

ישראל בר-מאיר
דף סיכום לאלגברה של קבוצות

הפרש סימטרי $A\triangle B$ (מסומן בספר ב- $\oplus$)	הפרש $A\setminus B$	חיתוך $A\bigcap B$	איחוד $A\bigcup B$	קבוצות A,B,C
מתקיים	לא	מתקיים	מתקיים	חילופיות $A\circ B=B\circ A$
מתקיים	לא	מתקיים	מתקיים	קיבוציות $A\circ\left(B\circ C\right)=\left(A\circ B\right)\circ C$
$A\triangle\varnothing=A$	$A\setminus\varnothing=A$	$A\bigcap\varnothing=\varnothing$	$A\bigcup\varnothing=A$	פעולה עם הקבוצה הריקה $A\circ\varnothing$
$A\triangle U=A'$ (משלים)	$A\setminus U=\varnothing$	$A\bigcap U=A$	$A\bigcup U=U$	פעולה עם העולם $A\circ U$
$A\triangle A=\varnothing$	$A\setminus A=\varnothing$	$A\bigcap A=A$	$A\bigcup A=A$	פעולה עם עצמו $A\circ A$
$\Leftrightarrow A\triangle B=B\setminus A$	$\Leftrightarrow A\setminus B=\varnothing$	$\Leftrightarrow A\bigcap B=A$	$\Leftrightarrow A\bigcup B=B$	הכלה $A\subseteq B$

תכונות נוספות וזהויות חשובות

תכונות המשלים
לכל שתי קבוצות A,B מתקיים:

1. $\left(A'\right)'=A$
2. $A\bigcap B'=A\setminus B$
3. כללי דה – מורגן . $\left(A\bigcap B\right)'=A'\bigcup B'$ $\qquad$ $\left(A\bigcup B\right)'=A'\bigcap B'$
4. $A\subseteq B\Leftrightarrow A'\supseteq B'$

חוקי פילוג לגבי איחוד, חיתוך והפרש סימטרי לכל C,B,A קבוצות

1. חיתוך מעל האיחוד $A\bigcap\left(B\bigcup C\right)=\left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$
2. איחוד מעל החיתוך $A\bigcup\left(B\bigcap C\right)=\left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right)$
3. חיתוך מעל הפרש סימטרי $A\bigcap\left(B\triangle C\right)=\left(A\bigcap B\right)\triangle\left(A\bigcap C\right)$

איחוד וחיתוך לפי קבוצת אינדקסים

N היא קבוצת המספרים הטבעיים $N=\{0,1,2,...\}$
Z היא קבוצת המספרים השלמים $Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

לכל $n\in N$, תהי $A_n=\{x\in Z \mid -2n-5\le x\le -2n+2\}$
לכל $n>0$, תהי $B_n=A_n-A_{n-1}$. נגדיר גם $B_0=A_0$

א. חשב את $\bigcap_{n\in N} A_n$
ב. כתוב ביטוי מפורש, פשוט ככל האפשר, עבור B_n.
ג. חשב את $\bigcup_{n\in N} A_n$
ד. חשב את $\bigcup_{n\in N} B_n$
ה. לכל $n\ge 2$ נסמן $D_n=B_n-\bigcup_{1<i<n} B_i$ (בפרט $D_2=B_2$, $D_3=B_3-B_2$).

עבור איזה ערכים של n קיים $D_n\ne\phi$? כלומר מצא את $\{n\in N^* \mid D_n\ne\phi\}$.
אל תשכח להראות שתשובתך כוללת את **כל** הערכים המקיימים זאת ("הכלה דו-כיוונית")

פתרון:
ראשית, כדאי לכתוב באופן מפורש כמה קבוצות ספציפיות, כדי "לקבל תחושה".
למשל, ניתן לראות ש - $A_0=\{-5,-4,-3,...,2\}$ ו - $A_1=\{-7,-6,...,0\}$.
כך אפשר לראות שגודל כל קבוצה הוא בדיוק 8, ושכל קבוצה מתקבלת מהקבוצה הקודמת ע"י הזזה של שתי יחידות שמאלה ע"ג ציר המספרים (זה יעזור לסעיף ב').

תזכורת: $\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid exists\_j\in I\_such\_that\_x\in A_j\}$
$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_j, to\_all\_j\in I\}$

א. קודם כל, הכוונה במילה "חשב" היא לכתוב למה שווה הקבוצה שבשאלה **ולהוכיח!**

טענה: $\bigcap_{n\in N} A_n=\phi$
הוכחת הטענה: נראה זאת בשתי דרכים שונות.

א.1. הרעיון כאן הוא לשים לב שניתן כבר למצוא שתי קבוצות (מתוך אינסוף הקבוצות שיש לנו) שהן כבר זרות, כלומר חיתוכן הוא הקבוצה הריקה.
לכן מכאן בקלות נראה שחיתוך כל הקבוצות באוסף הוא ריק.

ניעזר באבחנה השנייה.
נשים לב שאם $x\in A_4$ אזי $x\le -2\cdot 4+2=-6$
ואם $x\in A_0$ אזי $x\ge -2\cdot 0-5=-5$.
לכן מתקיים $A_0\cap A_4=\phi$ (ברור שאפשר לבחור גם שתי קבוצות אחרות).
לכן, מכך שהאיחוד קומוטטיבי נקבל $\bigcap_{n\in N} A_n=(A_0\cap A_4)\cap\bigcap_{n\in N-\{0,4\}} A_n=\phi\cap\bigcap_{n\in N-\{0,4\}} A_n=\phi$

א.2. הפעם נראה את הטענה באופן אחר.

נניח בשלילה ש - $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \phi$. לכן קיים איבר $x \in \bigcap_{n\in N} A_n$.

המטרה עכשיו להראות שקיימת קבוצה באוסף שאותו איבר x לא שייך אליה וכך עפ"י הגדרת החיתוך לפי קבוצת אינדקסים נגיע לסתירה.

העניין הוא איך מוצאים קבוצה ספציפית כזאת, שהרי לא נתון לנו שום מספר באופן מפורש? הפתרון הוא ע"י כך שנמצא קבוצה שהאינדקס שלה תלוי באותו x (שהרי זהו מספר, רק שפשוט אנחנו לא יודעים אותו).

מתוך הגדרת הקבוצות נובע ש- $x \in Z$ כלומר הוא שלם, אבל אולי שלילי (בדרך כלל זה יהיה ככה), בעוד שקבוצת האינדקסים שלנו היא של הטבעיים.

נביט למשל בקבוצה שהאינדקס שלה הוא $j = 2|x| + 4$. שימו לב שזהו מספר טבעי ולכן בקבוצת האינדקסים !!

עפ"י ההנחה חייב להתקיים $x \in A_j$ (כי הוא שייך לכל הקבוצות). לכן זה אומר שמתקיים

$-2\cdot(2|x|+4)-5 \le x \le -2\cdot(2|x|+4)+2$ כלומר $-4|x|-13 \le x \le -4|x|-6$

אם נביט באי השוויון הימני, נקבל $x \le -4|x|-6$ וע"י העברת אגפים $4|x| \le -x-6$

אבל $4|x| \ge 0$ ולכן $-x-6 \ge 0$ כלומר $x \le -6$.

זה אומר ש- x שלילי ולכן $|x| = -x$.

נחזור שוב לאי השוויון הנ"ל ונקבל $x \le -4|x|-6 = -4\cdot(-x)-6 = 4x-6$

נחלץ את x ונקבל $2 \le x$.

זו סתירה שכן לא ייתכן שגם $x \le -6$ וגם $2 \le x$.

בסתירה מראה שההנחה שגויה ולכן $\bigcap_{n\in N} A_n = \phi$.

ב. נשתמש בזהויות ידועות לגבי קבוצות, כולל בחוק הדיסטריבוטיבי:

$B_n = A_n - A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}'$

$A_n = \{x \in Z \mid -2n-5 \le x \le -2n+2\}$,

$A_{n-1}' = \{x \in Z \mid x < -2n-3\} \cup \{x \in Z \mid x > -2n+4\}$

ונקבל $B_n = \{-2n-5, -2n-4\}$

ג. טענה: $\bigcup_{n\in N} A_n = -N \cup \{1,2\}$

$-N = \{-n \mid n \in N\}$

הוכחה: צריך להראות הכלה כפולה.

יהי $x \in \bigcup_{n\in N} A_n$ אזי קיים $j \in N$ כך ש- $x \in A_j$.

לכן מתקיים $x \in Z$ וגם $x \le -2j+2 \le -2\cdot 0+2 = 2$.

בפרט זה מראה את ההכלה $\bigcup_{n\in N} A_n \subseteq -N \cup \{1,2\}$

יהי עתה $x \in -N \cup \{1,2\}$.

צריך להראות קיום $j \in N$ (מספר קבוע כלשהו, אחד לפחות) שעבורו מתקיים $x \in A_j$.

נמצא j כזה ע"י חישוב מהסוף להתחלה: נניח ויש לנו אינדקס j כזה: לכן מתקיים

$$-2j-5 \le x \le -2j+2$$

יש כאן שני אי-שוויונים ונחלץ מכל אחד מהם את j.

נקבל שצריך להתקיים $-\frac{x}{2}-2\frac{1}{2} \le j \le -\frac{x}{2}+1$

ההפרש בין שני החסמים הללו הוא בדיוק $3\frac{1}{2}$, כלומר באינטרוול הזה יש לפחות 3 מספרים שלמים. זה עדיין לא מספיק כי צריך שלפחות חד מאותם שלמים גם יהיה טבעי, כי קבוצת האינדקסים שלנו היא של הטבעיים בלבד.

אם $x \le -5$ אז $j \ge 0$ (אי שויון ימני) ולכן ניתן למצוא j טבעי כנ"ל.

אחרת, $-5 < x \le 2$ אבל אז $j \le -\frac{x}{2}+1 \le -\frac{2}{2}+1 = 0$, כלומר יתקיים $x \in A_0$ במקרה זה (כמו שאנחנו כבר יודעים).

זה מראה שלכל x באגף ימין קיים j טבעי כך ש- $x \in A_j$, כלומר $\bigcup_{n\in N} A_n \supseteq -N \cup \{1,2\}$

ההכלה הכפולה מראה את השויון $\bigcup_{n\in N} A_n = -N \cup \{1,2\}$ כנדרש.

ד. $\bigcup_{n\in N} B_n = -N \cup \{1,2\}$

ההוכחה כאן דומה לזו של הסעיף הקודם ומושארת כתרגיל.

ה. מושאר כתרגיל לקורא.

יחסים - שימור תכונות

התכונה \ הפעולה	איחוד $R\cup S$	חיתוך $R\cap S$	הופכי R^{-1}	כפל RS	חזקה $R^n\ (n\ge 1)$	הפרש $R-S$	משלים ל- $A\times A$ R'
רפלקסיביות	כן	כן	כן	כן	כן	לא	לא
סימטריות	כן	כן	כן	לא	כן	כן	כן
אנטיסימטריות	לא	כן	כן	לא	לא	כן	לא
טרנזיטיביות	לא	כן	כן	לא	כן	לא	לא

הוכחות

רפלקסיביות

איחוד $R\cup S$	למעשה מספיק שאחד היחסים יהיה רפלקסיבי: אם R רפלקסיבי אז $I_A\subseteq R$, ולכן $I_A\subseteq R\cup S$.
חיתוך $R\cap S$	מכיוון ש- R ו- S רפלקסיביים מתקיים $I_A\subseteq R$ ו- $I_A\subseteq S$; לכן $I_A\subseteq R\cap S$.
הופכי R^{-1}	מכיוון ש- R רפלקסיבי מתקיים $I_A\subseteq R$; לכן גם $I_A^{-1}\subseteq R^{-1}$. אבל $I_A^{-1}=I_A$, כך ש- $I_A\subseteq R^{-1}$.
כפל RS	לֶמָּה 1: אם $R\subseteq S$ ו- $T\subseteq U$ אז $RT\subseteq SU$. הוכחה: $(a,b)\in RT \Rightarrow (a,x)\in R\ and\ (x,b)\in T \Rightarrow$ $\Rightarrow (a,x)\in S\ and\ (x,b)\in U \Rightarrow (a,b)\in SU$ מכיוון ש- R ו- S רפלקסיביים מתקיים $I_A\subseteq R$ ו- $I_A\subseteq S$; בעזרת למה 1 מקבלים: $I_A{}^2\subseteq RS$. אבל $I_A{}^2=I_A$, ולכן $I_A\subseteq RS$.
חזקה $R^n\ (n\ge 1)$	נובע מהעובדה שכפל יחסים משמר רפלקסיביות.
הפרש $R-S$	דוגמה נגדית: $R=S=I_A \Rightarrow R-S=\phi$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A=\{1,2\}$: $R=I_A \Rightarrow R^{-1}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$

סימטריות

איחוד $R\cup S$	$(a,b)\in R\cup S \Rightarrow (a,b)\in R \ or \ (a,b)\in S \Rightarrow$ $\Rightarrow (b,a)\in R \ or \ (b,a)\in S \Rightarrow (b,a)\in R\cup S$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \Rightarrow (a,b)\in R \ and \ (a,b)\in S \Rightarrow$ $\Rightarrow (b,a)\in R \ and \ (b,a)\in S \Rightarrow (b,a)\in R\cap S$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \Rightarrow (b,a)\in R \Rightarrow (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R^{-1}$
כפל RS	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftarrow RS=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
חזקה $R^n \ (n\ge 1)$	באינדוקציה: נתון ש- R^1 סימטרי. אם R^n סימטרי עבור $n\ge 1$ אז: $(a,b)\in R^{n+1} \Rightarrow (a,b)\in R^nR \Rightarrow (a,x)\in R^n \ and \ (x,b)\in R \Rightarrow$ $\Rightarrow (x,a)\in R^n \ and \ (b,x)\in R \Rightarrow (b,a)\in R\cdot R^n \Rightarrow (b,a)\in R^{n+1}$
הפרש $R-S$	$(a,b)\in R-S \Rightarrow (a,b)\in R \ and \ (a,b)\notin S \Rightarrow$ $\Rightarrow (b,a)\in R \ and \ (b,a)\notin S \Rightarrow (b,a)\in R-S$
משלים R'	$(a,b)\in R' \Rightarrow (a,b)\notin R \Rightarrow (b,a)\notin R \Rightarrow (b,a)\in R'$

אנטיסימטריות

איחוד $R\cup S$	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Leftarrow R\cup S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \ and \ (b,a)\in R\cap S \Rightarrow (a,b)\in R \ and \ (b,a)\in R \Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \ and \ (b,a)\in R^{-1} \Rightarrow (b,a)\in R \ and \ (a,b)\in R \Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$
כפל RS	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}34\\21\end{pmatrix} \Leftarrow RS=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
חזקה $R^n \ (n\ge 1)$	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix} \Leftarrow R^2=\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$
הפרש $R-S$	$(a,b)\in R-S \ and \ (b,a)\in R-S \Rightarrow (a,b)\in R \ and \ (b,a)\in R \Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A=\{1,2\}$: $R=I_A \Leftarrow R^{-1}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$

<u>טרנזיטיביות</u>

איחוד $R\cup S$	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $R\cup S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
חיתוך $R\cap S$	$(a,b)\in R\cap S \;\; and \;\; (b,c)\in R\cap S \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad \big((a,b)\in R \;\; and \;\; (b,c)\in R\big)$ and $\big((a,b)\in S \;\; and \;\; (b,c)\in S\big) \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad (a,c)\in R \;\; and \;\; (a,c)\in S \quad \Rightarrow \quad (a,c)\in R\cap S$
הופכי R^{-1}	$(a,b)\in R^{-1} \;\; and \;\; (b,c)\in R^{-1} \quad \Rightarrow \quad (b,a)\in R \;\; and \;\; (c,b)\in R \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad (c,a)\in R \quad \Rightarrow \quad (a,c)\in R^{-1}$
כפל RS	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}12\\34\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}34\\21\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $RS=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
חזקה $R^n \; (n\geq 1)$	למה 2: R טרנזיטיבי אםם $R^2\subseteq R$. הוכחת הכיוון הראשון: $(a,b)\in R^2 \quad \Rightarrow \quad (a,x)\in R \;\; and \;\; (x,b)\in R \quad \Rightarrow \quad (a,b)\in R$ הוכחת הכיוון השני: $(a,b)\in R \;\; and \;\; (b,c)\in R \quad \Rightarrow \quad (a,c)\in R^2 \quad \Rightarrow \quad (a,c)\in R$ ועכשיו באינדוקציה: נתון ש- R^1 טרנזיטיבי, ועל-כן $R^2\subseteq R$ (למה 2). אם R^n טרנזיטיבי עבור $n\geq 1$ אז $R^{2n}\subseteq R^n$ (למה 2). מלמה 1 מקבלים: $R^2R^{2n}\subseteq RR^n$, כלומר: $R^{2(n+1)}\subseteq R^{n+1}$, ולכן גם R^{n+1} טרנזיטיבי (למה 2).
הפרש $R-S$	דוגמה נגדית: $R=\begin{pmatrix}1212\\2112\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $R-S=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$
משלים R'	דוגמה נגדית מעל $A=\{1,2\}$: $R=I_A$ $\Leftarrow$ $R^{-1}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$

טענות בתורת הקבוצות

- **תת-קבוצה חלקית ממש** (אמיתית) – אם $A\subseteq B$ אבל $A\neq B$ אז $A\subset B$. (ע"מ 6)
- **כל קבוצה חלקית לעצמה** - $A\subseteq A$ (נובע מהגדרה, ע"מ 6) ו**עבור כל קבוצה A כלשהי, מתקיים** $\varnothing\subseteq A$ (ע"מ 7).
- **מספר האיברים בקבוצה החזקה:** אם ב- A יש x איברים **אזי ב- P(A) יש 2^x איברים.** (שאלה 1.7 ע"מ 9)

- **תכונות האיחוד והקיבוץ:**
  - **תכונות האיחוד** (ע"מ 10) –
    קומוטטיביות: $A\cup B = B\cup A$
    אסוציאטיביות: $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$
    אידמפוטנטיות: $A\cup A = A$
    איחוד עם הקבוצה הריקה: $A\cup\varnothing = A$
    כן מתקיים: $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$
  - **תכונות החיתוך:** (ע"מ 15)
    קומוטטיביות: $A\cap B = B\cap A$
    אסוציאטיביות: $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
    אידמפוטנטיות: $A\cap A = A$
    חיתוך עם הקבוצה הריקה: $A\cap\varnothing = \varnothing$
  - **טענה (שוויון בעזרת חיתוך ואיחוד)** $A\cap B=A\cap C$ **וגם** $A\cup B=A\cup C \Rightarrow B=C$ (ע"מ 20)
  - **חוקי הספיגה (אבסורבציה)** - $A\cup(A\cap B) = A$ $A\cap(A\cup B) = A$. (ע"מ 19)
  - **דיסטריבוטיביות** (ע"מ 18)
    החיתוך מעל האיחוד - $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
    האיחוד מעל החיתוך- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - **תכונות ההפרש** (ע"מ 21) –
    $\varnothing-A = \varnothing$ $A-A = \varnothing$ $A-\varnothing = A$ $A-B = \varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$,
    $A-B = A \Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$
  - **תכונות המשלים** (ע"מ 22)- U היא הקבוצה האוניברסלית
    $x\notin A \Leftrightarrow x\in A'$ $x\notin A' \Leftrightarrow x\in A$ $A\cap A' = \varnothing$; $A\cup A' = U$
    $\varnothing' = U$; $\varnothing = U'$ $(A')' = A$ $\mathbf{A-B = A\cap B'}$ (ע"מ 23)
  - **כללי דה מורגן:** (ע"מ 24) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ $(A\cap B)' = A'\cup B'$.
  - שאלות בע"מ 24 - $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A\cup(B-A)=A\cup B$ $A\cap(B-A)= \varnothing$

- **טענות הקשורות לקבוצות חלקיות:**
  - **שוויון דרך תת-קבוצה** – $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B$ and $B\subseteq A$. (ע"מ 6)
    הוכחה: $A=B \Leftrightarrow (x\in A \Leftrightarrow x\in B) \Leftrightarrow A\subseteq B$ and $B\subseteq A$.
  - **טענת טרנזיטיביות של ההכלה** $A\subseteq B$ and $B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$. (ע"מ 8 שאלה 1.6)
    הוכחה: נתון $A\subseteq B$, לכן אם $x\in A$ אז $x\in B$. נתון גם $B\subseteq C$, לכן מתקיים לאותו $x\in B$ גם $x\in C$. ומכאן נקבל $x\in A \Rightarrow x\in C$, כלומר $A\subseteq C$.
  - $A\cup B\subseteq C \Leftrightarrow B\subseteq C$ ו- $A\subseteq C$. (שאלה 1.9 ע"מ 11)
  - $A\cap B\subseteq A$ (ע"מ 15 שאלה 1.10א)
  - $C\subseteq A\cap B \Leftrightarrow C\subseteq B$ ו- $C\subseteq A$ (ע"מ 15 שאלה 1.10ב)
  - $A\cap B = A \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$ (ע"מ 16 שאלה 1.11ב)
  - **שאלה 1.16** ע"מ 19– $A\subseteq B$ and $C\subseteq D \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$
    וגם $A\subseteq B$ and $C\subseteq D \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$

- **איחוד קבוצות לכל משפחה של קבוצות** – האסוציאטיביות של איחוד הקבוצות מאפשרת לרשום איחוד של קבוצה כלשהי של קבוצות. לכל קבוצה ניתן אינדקס $i\in I$, וכדי לסמן קבוצה של קבוצות A נסמן: $\{A_i\}_{i\in I}$. כאשר i "עובר" על קבוצות האינדקסים הנתונה I.
  איחוד קבוצות לכל משפחה של קבוצות מסמנים: $\bigcup_{i\in I} A_i$.
  $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$ אם ורק אם קיים $i_1\in I$ לפחות אחד, כך ש- $x\in A_{i_1}$. (הגדרה 1.6 עמ' 12)

- **חיתוך קבוצות לכל משפחה קבוצות** – עבור קבוצת קבוצות $\{A_i\}_{i\in I}$, מסמנים ב- $\bigcap_{i\in I} A_i$ את הקבוצה המקיימת $x\in\bigcap_{i\in I} A_i$ אם ורק אם $x\in A_i$ עבור כל $i\in I$. אם אין איברים כאלה החיתוך הוא הקבוצה הריקה $\varnothing$.
- **קבוצות זרות** – אם $A\cap B=\varnothing$. (עמ' 15)
- **קבוצה של קבוצות זרות** – קבוצה של קבוצות $\{A_i\}_{i\in I}$ נקראת קבוצה של קבוצות זרות (זו לזו) אם $A_{i_1}\cap A_{i_2}=\phi$ עבור כל $i_1,i_2\in I$. כלומר, אם כל שתי קבוצות מתוך אוסף הקבוצות הזה זרות זו לזו.

- **סכומי קבוצות** -
  עבור 2 קבוצות **סופיות**: $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$
  בפרט עבור **זרות** נקבל: $|A\cup B| = |A| + |B|$
  עבור 3 קבוצות **סופיות** מתקיים:
  $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$

- **ביטוי דואלי** – **העשרה** (עמ' 25) –יהא נתון ביטוי באלגברת הקבוצות, נבצע בעת ובעונה אחת את ההחלפות הבאות:
  כל סימן איחוד $\cup$ יוחלף בסימן חיתוך $\cap$ ולהפך , כל הופעה של U תוחלף בהופעה של $\varnothing$ ולהפך.
  הביטוי המתקבל נקרא ביטוי דואלי לביטוי הנתון.

- **הפרש סימטרי** – (עמ' 27) מגדירים את ההפרש הסימטרי של הקבוצות A ו- B ע"י:
  $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$. ההפרש הסימטרי מקיים את התכונות הבאות:
  קומוטטיביות: $A\oplus B = B\oplus A$
  אסוציאטיביות: $(A\oplus B)\oplus C = A\oplus(B\oplus C)$
  הפרש סימטרי עם הקבוצה הריקה: $A\oplus\varnothing = A$
  הפרש סימטרי בין קבוצה לבין עצמה: $A\oplus A = \varnothing$
  כן מתקיים: $A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$, $A\oplus B\oplus(A\cap B) = A\cup B$.

הערות / טיפים:

- בקורס שלנו, קבוצת המספרים הטבעיים **N** כוללת את המספר 0.
- לשים לב בהוכחות שבהם יש התייחסות למשלים **לבחור קבוצה אוניברסלית מתאימה**. לדוג' "נבחר קבוצה אוניברסלית U המכילה את A וגם את B"
- כל טענה או מעבר שאינו הגדרה יש לנמק בקצרה, מספיק לרשום את התרגיל/ המשפט בספר שבו זה מופיע

טענות ברלציות*

❖ **הגדרות:**

מכפלה קרטזית - $A\times B = \{(a,b)\,|\, a\in A, b\in B\}$ (הגדרה 2.2)

רלציה בינארית – תת קבוצה של AXB. רלציה טרינארית – תת קבוצה של AXBXC

איבר ברלציה - $(a,b)\in R; aRb$

תחום – $Domain(R)=\{x\in A\,|\, there is\ y\in B\ so\ xRy\}$ (הגדרה 2.4) ← $Domain(R)\subseteq A$

טווח - $Range(R)=\{y\in B\,|\, there is\ x\in A\ so\ xRy\}$ (הגדרה 2.5) ← $Range(R)\subseteq B$

רלציה הופכית - $R^{-1}=\{(b,a)\,|\,(a,b)\in R\}$ או $bR^{-1}a = aRb$ (הגדרה 2.6)

המשלים ליחס - $R' = A\times A - R$

מכפלת רלציות - $RS=\{(a,c)\,|\,(thre is\ b\in B\ so\ aRb\ and\ bSc\}$. (הגדרה 2.7).

רלציה מעל קבוצה A - רלציה מ A ל A.

רלציית היחידה - $I_A=\{(a,a)\,|\,a\in A\}$. (הגדרה 2.9)

❖ **טענות (חזקות והיפוך):**

$\varnothing R=\varnothing$; $R\varnothing=\varnothing$ (ישירות מהגדרה)

$I_A R = R$; $RI_A = R$

$(R^{-1})^{-1}=R$ (שאלה 2.6)

$(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$. (שאלה 2.8)

$R^nR^m=R^{n+m}$

❖ **טענות (חיתוך, איחוד והכלה):**

$(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1};(R\bigcap S)^{-1}=R^{-1}\bigcap S^{-1};R\subseteq S\Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$ (שאלה 2.6)

$R(S\bigcup T)=RS\bigcup RT$ (שאלה 2.10)

$R(S\bigcap T)=RS\bigcap RT$. (שאלה 2.10)

$R\subseteq S\Rightarrow RT\subseteq ST, VR\subseteq VS$. (שאלה 2.10)

❖ **טענות (תחום וטווח):**

$Domain(R^{-1})=Range(R)$; $Range(R^{-1})=Domain(R)$ (שאלה 2.6)

$I_A\subseteq RR^{-1}\Leftrightarrow Domain(R)=A$. (שאלה 2.12)

$I_A=R^{-1}R\Leftrightarrow Range(R)=A$. (שאלה 2.12)

❖ **מכפלת רלציות היא אסוציאטיבית:** aR(ST)b <=> a(RS)Tb **(משפט 2.8)**

❖ **מספר האיברים** של מכפלות קרטזיות של קבוצות סופיות: $|A_1\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot\ldots\cdot|A_n|$

בפרט |AXB|=|A|*|B|

❖ **כמות הרלציות השונות** מ- A ל B הוא $2^{|A||B|}$

טענה (ע"מ 47):

תהי R^m החזקה הקטנה ביותר של R, השווה לחזקה R^k של R שקודמת בסדרה $R,R^2,R^3\ldots$.

אזי כל חזקה של R הגבוהה מ R^m , שווה אף לחזקה קודמת של R ולכן מספר החזקות השונות של R הוא m-1. הטענה נכונה כל עוד מדובר ברלציה מעל קבוצה סופית.

*מכיל את כל החומר שנלמד בפרק פרט ל"סגור"

תכונות מיוחדות:

	הגדרה	תכונות
רפלקסיביות** (2.10)	$I_A \subseteq R$ או $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$	$R \subseteq R^2$ $R \subseteq R \subseteq R^3 \subseteq \ldots \subseteq R^n \subseteq \ldots$. (שאלה 2.18)
סימטריות* (2.10)	$R = R^{-1}$ או $aRb \Leftrightarrow bRa$ או SR=RS (מ2.12)	$R \bigcup R^{-1}$, $R \bigcap R^{-1}$ סימטריות (ש 2.23)
אנטי סימטריות* (2.13)	$aRb \text{ and } bRa \Rightarrow a = b$ או $R \bigcap R^{-1} \subseteq I_A$	
טרנזיטיביות** (2.14)	$aRb \text{ and } bRc \Rightarrow aRc$ או $(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$	$R^2 \subseteq R$ $\ldots \subseteq R^n \subseteq \ldots \subseteq R^3 \subseteq R^2 \subseteq R$. (ש 2.29)

*= שקילות
*= סדר חלקי

הפעולה / התכונה	איחוד $R \cup S$	חיתוך $R \cap S$	הופכי R^{-1}	כפל RS	חזקה R^n $(n \geq 1)$	הפרש $R - S$	משלים ל- $A \times A$ R'
רפלקסיביות	כן	כן	כן	כן	כן	לא	לא
סימטריות	כן	כן	כן	לא	כן	כן	כן
אנטיסימטריות	לא	כן	כן	לא	לא	כן	לא
טרנזיטיביות	לא	כן	כן	לא	כן	לא	לא

טענות (שאלה 2.31): (תכונות של רלציות מיוחדות)

הרלציה $A \times A$ היא: רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית (**שקילות**)

הרלציה $\varnothing$ היא: סימטרית, אנטי-סימטרית וטרנזיטיבית (על ריק).

- כדאי להכיר גם את התכונות של I_A למרות שזה לא מופיע בספר (רפלקסיבית, סימטרית, אנטיסימטרית וטרנזיטיבית – עבור $|A| \geq 2$)

רלציית שקילות:

❖ **הגדרות:**

חלוקה של A (π_A)- קבוצת תת-קבוצות זרות זו לזו של קבוצה A, אשר איחודן הוא A
מחלקות/ בלוקים – כל אחת מתת הקבוצות הנ"ל
הרלציה R_π (מעל A) - $xR_\pi y \Leftrightarrow x, y\ are\ in\ the\ same\ block$.
רלציית שקילות (E)– אם היא רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית
קבוצת המנה (A/E) – קבוצת מחלקות השקילות של רלציית שקילות E מעל A
האינדקס של E – מספר מחלקות השקילות של E (יכול להיות סופי / אינסופי) = |A/E|
עידון (π_2 הוא <u>עידון</u> של π_1)- כל בלוק של π_2 מוכל בבלוק של π_1.

❖ **משפטים:**

❖ R_π היא סימטרית, רפלקסיבית וטרנזיטיבית (ע"מ 60)
❖ **משפט (2.19):** תהא E רלציה מעל A המוגדרת כך $xEy \Leftrightarrow x\ and\ y\ are\ in\ the\ same\ block$. אזי E רלציית שקילות מעל A.
❖ **משפט (2.20):** שקילות E מעל קבוצה A משרה חלוקה של הקבוצות למחלקות שקילות. כל האיברים במחלקת אחת (או בבלוק אחד של החלוקה המתקבלת) נמצאים ביחס E זה עם זה, ואף אחד מהם אינו ביחס E עם איבר ממחלקה אחרת.
❖ **טענות (שאלה 2.40):** תהיינה E_1, E_2 שקילויות מעל A. אזי:
(א) $E_1 \cap E_2$ היא שקילות מעל A.
(ב) E_1E_2 שקילות מעל A אם ורק אם $E_1E_2 = E_2E_1$.
(ד) אם $E_1 \cup E_2$ היא שקילות אזי $E_1E_2 = E_2E_1 = E_1 \cup E_2$.
❖ **טענה (תשובה 2.46):** כל שקילות E מעל A מקיימת $I_A \subseteq E \subseteq A \times A$.

❖ **טענות בנושא עידון:**

(שאלה 2.45): π_2 היא עידון של π_1. אזי השקילויות המתאימות מקיימות $E_2 \subseteq E_1$.
ולהיפך, אם $E_2 \subseteq E_1$ אזי π_2 היא עידון של π_1.
טענות (שאלה 2.46): החלוקה התאימה לשקילות I_A היא עידון של כל חלוקה שהיא π.
ואילו כל חלוקה π היא עידון של החלוקה התאימה לשקילות $A \times A$.
טענה (שאלה 2.48): אם π_2 היא עידון של π_1 אזי $\pi_1\pi_2 = \pi_2$.
טענה (שאלה 2.49): יהיו E_1, E_2 השקילויות המתאימות ל π_1, π_2 בהתאמה. אזי $E_1 \cap E_2$ היא רלציית השקילות המתאימה ל $\pi_1\pi_2$.

רלציית מיוחדות:

❖ **הגדרות:**

פונקציה - רלציה שבה לכל איבר בתחום מתאים איבר אחד ויחיד בטווח $aRb_1 \text{ and } aRb_2 \Rightarrow b_1 = b_2$.

פונקציה חלקית – תחומה חלקי ממש ל-A

פונקציה על – אם טווח הפונקציה הוא כל B. (לכל איבר בטווח מגיע לפחות חץ אחד בדיגרף)

פונקציה חח"ע – לכל איבר תמונה שונה. לכל $a_1, a_2 \in A$ מתקיים $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

או $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

פונקציה הופכית (φ^{-1}) – $\varphi(b) = a \Leftrightarrow a \in \varphi^{-1}(b)$

פונקציית הזהות – לכל $a \in A$ מתקיים $\varphi(a) = a$

מכפלת פונקציות- $\varphi\psi(a) = \psi(\varphi(a))$ (דורשים $\varphi: A \to B$ ו $\psi: B \to C$)

פונקציה של תת קבוצה של התחום- $\varphi(A_1) = \{\varphi(a) | a \in A_1\}$ ו- $R(A_1) = \{b | (a,b) \in R, a \in A_1\}$

התאמה – פונקציה חח"ע ועל ("התאמה חח"ע בין A ל B")

תמורה – פונקציה חח"ע מ-A על-A

העתק טבעי – כל פונקציה משרה חלוקה לרכיבי שקילות. הרלציה המתאימה היא $E = ff^{-1}$ (ע 84)

פונקציה אופיינית- $f_A = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \in U - A \end{cases}$ (למי שלמד אינפי, זה מזכיר את פוני' דיריכלה)

טענה(שאלה 3.3): שיוויון עוצמות

אם A ו B הן קבוצות סופיות, וקיים העתק (פונקציה) חד-חד-ערכי של A על B אז |A|=|B|;
ולהיפך, אם |A|=|B| אזי אפשר לקבוע התאמה חד-חד-ערכית בין A ל B.

טענה (שאלה 3.7): תכונות של מכפלת פונקציות

מכפלת פונקציות היא פונקציה. כמו כן כפל פונקציות הוא **אסוציאטיבי**. אם 2 פונקציות הן על אז גם מכפלתם היא על ואם שתיהן חח"ע אז גם מכפלתם חח"ע.

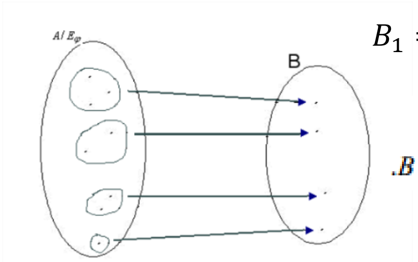
טענות (שאלה 3.2): תכונות של פונקציה הופכית

(א) f^{-1} היא פונקציה מ B ל A אםם f היא פוני' חח"ע מ A ל B. יתרה מזו, גם f^{-1} היא חח"ע.

(ב) אם f היא פונקציה חח"ע של A על B, אזי f^{-1} היא פונקציה חח"ע של B על A (נובע מא')

(ג) תהי f פונקציה חח"ע של A על B: אזי מתקיים $f^{-1}f = I_B$ $ff^{-1} = I_A$ כאשר I היא פונקצית הזהות על A או B בהתאם לסימון.

שאלה 3.8 – תכונות של פונקציה של תת קבוצה:



(א) $A_1 \subseteq \varphi\varphi^{-1}(A_1)$ (ב) $B_1 = \varphi^{-1}\varphi(B_1)$

תכונות של העתק הטבעי(עפ"י "הבהרה לסעיף העתק טבעי" שבאתר):

פונקציה φ של A לקבוצה B כלשהי משרה חלוקה של A.

אם φ היא **על** B, יש התאמה **חח"ע** של קבוצת מחלקות השקילות A/E_φ **על** B.

טענות (שאלה 3.11): תכונות של תמורות

(א) אם f ו g הן תמורות של A, אזי f^{-1}, fg אף הן תמורות של A.

(ב) I_A היא תמורה של A. עבור כל תמורה f מתקיים של A מתקיימים

$ff^{-1} = f^{-1}f = I_A$ $I_A f = fI_A = f$.

טענות (שאלה 3.12): תכונות של פונקציות אופייניות

$f_A = f_B \Leftrightarrow A = B$. $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$

$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$. $f_{U-A}(x) = 1 - f_A(x)$

$f_{A-B}(x) = f_A(x) \cdot (1 - f_B(x))$.

סדר חלקי:

❖ **הגדרות:**

סדר חלקי – (מעל A) רלציה רפלקסיבית, טרנזיטיבית ואנטי-סימטרית.

קבוצה סדורה חלקית - קבוצה עם רלציית סדר חלקי מעליה

סדר מלא – סדר חלקי המשווה בין כל 2 איברים ב- A (3.5) – כלומר מתקיים רק אחד מבין הבאים: aRb או bRa (אלא אם a=b)

b **מכסה את** a אם $a,b\in A$, $a\neq b$, $a\leq b$ ואין $c\in A$, $c\neq a,b$ כך ש $a\leq c\leq b$ ($\leq$ סדר חלקי מעל A)

רלציית "מחלק בלי שארית" - $a\,|\,b$ אם ורק אם a מחלק את b ללא שארית

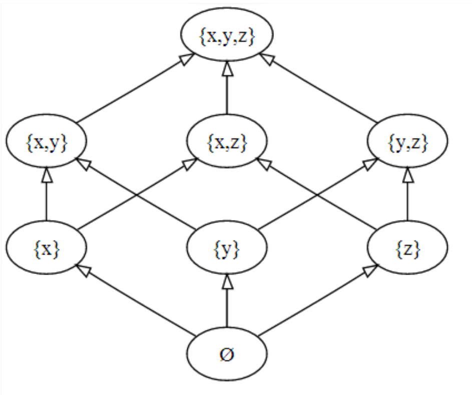
קבוצה סדורה ליניארית (שרשרת) - קבוצה עם סדר מלא מעליה

איבר מינימאלי- אם לכל $x\in A$, $x\leq a\Rightarrow x=a$ כלומר, אם אין איבר x השונה מ a המקיים $x\leq a$.

איבר מקסימאלי- אם עבור כל $x\in A$ מתקיים $b\leq x\Rightarrow b=x$, כלומר, אם אין ב A איבר x שונה מ b המקיים $b\leq x$.

איבר קטן ביותר - אם עבור כל $x\in A$ מתקיים $a\leq x$.

איבר גדול ביותר - אם עבור כל $x\in A$ מתקיים $x\leq b$.



מבנה דיאגרמת הסה:

ענף מחבר איבר b עם איבר a, אם ורק אם b מכסה את a בסדר החלקי. איבר b המכסה את איבר a, נמצא גבוה ממנו בדיאגרמה.

טענה (שאלה 3.13): אם R הוא סדר חלקי מעל A אז גם R^{-1} הוא סדר חלקי מעל A (שני סדרים חלקיים אלה נקראים סדרים חלקיים דואליים).

משפט (3.8): קיום איבר מינמלי בקבוצה <u>סופית</u>

בקבוצה סדורה חלקית סופית, חייב להיות איבר מינימלי אחד לפחות.

טענות (שאלה 3.21): יחידות האיבר הקטן והגדול

בקבוצה סדורה חלקית יכולים להיות לכל היותר איבר קטן ביותר אחד ואיבר גדול ביותר אחד. כמו כן, בקבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר קטן ביותר **יש רק איבר מינימלי אחד** ובקבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר גדול ביותר יש רק **איבר מקסימלי אחד**.

טענות (שאלה 3.22): על בקבוצה סדורה בסדר מלא <u>בלבד</u>

אם בקבוצה <u>סדורה בסדר מלא</u> יש איבר מינימלי, אזי הוא יחיד והוא גם האיבר הקטן ביותר. אם בקבוצה סדורה בסדר מלא יש איבר מקסימלי, אזי הוא יחיד והוא גם האיבר הגדול ביותר.

טענות (שאלה 3.25א): כל קבוצה היא סדורה בסדר חלקי לגבי <u>הכלה</u> ($\subseteq$).

קומבינטוריקה

	תמורה עם חשיבות לסדר **PERMUTATION** סידור n איברים מתוך n בשורה	**חליפה עם חשיבות לסדר** **PERMUTATION** בחירת k איברים מתוך n	**צירוף בלי חשיבות לסדר** **COMBINATION**
עם חזרות (איבר יכול להיבחר עד k פעמים)	$p(n;k_1,k_2,k_3,\ldots k_m)$ $=\dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_m!}$ $when: k_1+k_2+\ldots k_m=n$ כאשר k_1 זהים, k_2 זהים,... k_n זהים	n^k	בחירת k איברים מתוך n סוגים שונים של איברים $D(n,k)=$ $=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$ פיזור k איברים זהים לתוך n תאים שונים או מספר פתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+\ldots x_n=k$
בלי חזרות (איבר יכול להיבחר עד פעם אחת) מגבלה: $k\le n$	$p(n,n)=p(n)=n!$ סידור n איברים שונים במעגל: $(n-1)!$	$p(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	בחירת k איברים מתוך n $c(n,k)=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ # ניתן לצמצם בחישוב זה $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

רקיא אלכסנד
19.05.2007

ספירת פונקציות

יהיו הקבוצות: A ו- B כך ש- |A|=n ו- |B|=k.

1. מס' הפונקציות של A ל- B

$$k^n$$

2. מס' הפונקציות של A על- B

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$$

3. מס' הפונקציות החח"ע של A ל- B $(n \le k)$

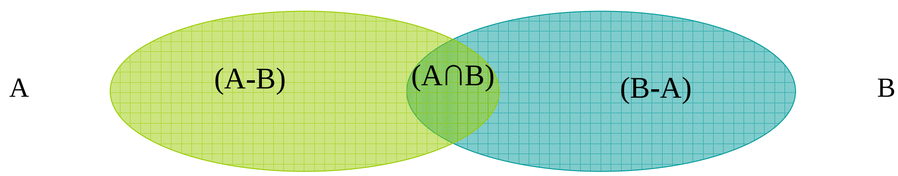
$$\frac{k!}{(k-n)!}$$

4. מס' הפונקציות מ A ל- B

$$(k+1)^n$$

<u>**עקרון ההכלה וההפרדה**</u>

מקרה של 2 קבוצות



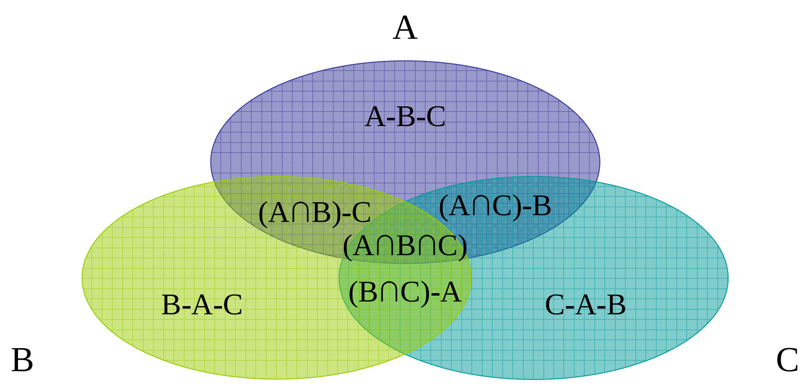
$$\left|A\cup B\right|=\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|$$

The complement:

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|=\left|\overline{A\cup B}\right|=\left|U\right|-\left|A\cup B\right|=$$

$$=\left|U\right|-\left|A\right|-\left|B\right|+\left|A\cap B\right|$$

מקרה של 3 קבוצות



$$\left|A\cup B\cup C\right|=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|A\cap C\right|-\left|B\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|$$

The complement:

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|=\left|\overline{A\cup B\cup C}\right|=\left|U\right|-\left|A\cup B\cup C\right|=$$

$$=\left|U\right|-\left|A\right|-\left|B\right|-\left|C\right|+\left|A\cap B\right|+\left|A\cap C\right|+\left|B\cap C\right|-\left|A\cap B\cap C\right|$$

עקרון ההכלה וההפרדה

מקרה של 4 קבוצות

$$|A\cup B\cup C\cup D| = |A|+|B|+|C|+|D|$$
$$-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|$$
$$+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|$$
$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

$$=\sum_{i=1}^{4}|A_i|-\sum_{1\le i_1<i_2\le 4}^{4}|A_{i_1}\cap A_{i2}|+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 4}^{4}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

The complement:

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}| = |\overline{A\cup B\cup C\cup D}| = |U|-|A\cup B\cup C\cup D| =$$
$$=|U|-|A|-|B|-|C|-|D|$$
$$+|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|$$
$$-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|-|A\cap C\cap D|-|B\cap C\cap D|$$
$$+|A\cap B\cap C\cap D|$$

$$=|U|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{1\le i_1<i_2\le 4}^{4}|A_{i_1}\cap A_{i2}|-\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 4}^{4}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

<u>המקרה הכללי:</u>

$$S_k = \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3....\le k}^{k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap......\cap A_k|$$

$$|A_1\cup A_2\cup....\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

The complement:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap....\cap\overline{A_n}| = |U|-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

<u>הערה חשובה:</u>

כל החיתוכים מסדר זוגי הם במינוס והחיתוכים מסדר אי-זוגי הם תמיד בפלוס.
במקרה של המשלים זה מתהפך..
ולכן במשלים: החיתוכים מסדר זוגי הם בפלוס והחיתוכים מסדר אי-זוגי הם במינוס.

רקיא אלכסנדר
20.05.2007

נוסחאות בסיסיות בפונקציות יוצרות

(i) סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

(ii) סכום טור הנדסי אינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$.

(iii) אם $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, ו- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$

אז $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ (ראה ראש עמוד 122 בספר הלימוד).

(iv) $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$ (נוסחת הבינום. הסכום באגף ימין לא חייב להיעצר כאשר $i = n$,

בזכות העובדה שהמקדמים הבינומים החריגים מתאפסים – "קומבינטוריקה" עמ' 30).

(v) $\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k) x^k$.

במלים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

ראו שאלה 7.9 או שאלה 7.10 בעמ' 129 בספר.

להסבר מפורט יותר על פונקציות יוצרות – ראו הקובץ "מבוא לפונקציות יוצרות" באתר הקורס.

אנלוגיות לשאלות בקומבינטוריקה

1. חליפות ותמורות

- כמה אפשרויות יש לבחור k עצמים שונים מתוך n בשורה (עם חשיבות לסדר) ? :

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

- כמה אפשרויות יש לסדר n עצמים שונים בשורה ?:

$$P(n,n) = n!$$

2. צירופים

- כמה אפשרויות יש לבחור *k* עצמים שונים מתוך *n* (ללא חשיבות לסדר) ? :

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

3. חליפות ותמורות עם חזרה

- כמה אפשרויות לחלק *k* עצמים שונים לתוך *n* תאים שונים ? : n^k
- כמה סדרות בינריות ניתן לבנות בעלות n תווים ? : 2^n
- כמה אפשרויות יש לסדר *n* עצמים שביניהם k_1 עצמים זהים, k_2 עצמים זהים וכו כך ש- $k_1+k_2+\ldots+k_h=n$?

$$P(n;k_1,k_2,\ldots,k_h) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_h!}$$

4. צירוף עם חזרה

כל השאלות הבאות שקולות:

- כמה אפשרויות לבחור *k* עצמים מתוך *n* קבוצות של עצמים כאשר כל העצמים מקבוצה מסויימת זהים ?
- מהו מס' הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ בטבעיים ?
- כמה אפשרויות יש לפזר *k* עצמים זהים לתוך *n* תאים שונים ?

$$D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

גרפים

ריכוז טענות/משפטים/מסקנות מתורת הגרפים

מבוא והגדרות

גרף פשוט : גרף ללא מעגלים

גרף קשיר : יש מסלול בין כל שני צמתים

גרף מלא : גרף פשוט שבו כל זוג צמתים מחובר בקשת. מסומן בתור K_n בד״כ.

גרף משלים $\bar{G}$: מכיל את כל צמתי G, אך קבוצת קשתותיו היא בדיוק כל הקשתות בגרף המלא פחות הקשתות בגרף G. אם אין קשת בין זוג צמתים ב G יהיה ביניהם קשת במשלים ואם יש ביניהם קשת ב G לא יהיה ביניהם קשת במשלים.

רכיב קשירות (הגדרה בתחילת עמ' 11) הוא מחלקת שקילות – הרחבה של שאלה 2 בעמ' 11.

סכום הדרגות בגרף G הוא : $\Sigma \deg_G(v) = 2 \cdot |E|$

שאלה 4 עמ' 12 : אם G פשוט לא קשיר אז $\bar{G}$ קשיר

גרף דו-צדדי : גרף שאת צמתיו ניתן לחלק לשתי קבוצות לא ריקות A, B כך שלכל קשת יש קצה אחד ב A והשני ב B.

טענה 1.6 עמ' 14 : גרף הוא דו-צדדי $\Leftrightarrow$ אין בו מעגל באורך אי-זוגי

יער ועצים

יער : גרף שאין בו מעגל/כל רכיב קשירות בו הוא עץ

יער קשיר : עץ

טענה 2.3 עמ' 17 : בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות עלה אחד

טענה 2.4 עמ' 18 : יהיה v צומת בעץ T : אם נוסיף ל T צומת חדש u וקשת בודדת uv נקבל עץ.

אם v הוא עלה ב T אז $T \setminus \{v\}$ גם הוא עץ.

משפט 2.5 עמ' 19 - טענות שקולות ל G :

- G הוא עץ

-בין כל שני צמתים של G יש מסלול יחיד

- G הוא גרף קשיר מינמאלי (השמטת כל קשת גוררת גרף לא קשיר)

- G קשיר $|E| = |V| - 1$. כלומר, מספר הקשתות הוא $n-1$

- G אינו מכיל מעגלים ו: $|E| = |V| - 1$

- G אינו מכיל מעגלים, הוספת קשת בין כל שני צמתים קיימים גוררת מעגל.

טענה 2.6 עמ' 21 : כל גרף קשיר מכיל תת-גרף פורש שהוא עץ

נוסחות קיילי ופרופר

עמ' 27 ועמ' 30 דוגמות לבנות סדרה מעץ נתון, ושחזור עץ על-ידי סדרה נתונה.

מעגלי אוילר והמילטון

אוילר: מסלול/מעגל אוילר בגרף G הוא מסלול(מעגל) שבו כל קשת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.

המילטון: מסלול(מעגל) המילטון בגרף G הוא מסלול(מעגל) שבו כל צומת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.

תנאי הכרחי לקיום מסלול אוילר: מספר הצמתים מדרגה אי—זוגית = 0 או 2.

משפט 3.1 עמ' 35: גרף קשיר G הוא אוילרי $\Leftrightarrow$ דרגת כל צומת בו היא זוגית.

גרף d-רגולרי: אם דרגת כל צומת בגרף היא בדיוק d.

שאלה 5 עמ' 38: עבור גרף G d-רגולרי ו $\bar{G}$ גרף משלים, אם $|V|$ אי-זוגי אזי לפחות אחד מהגרפים $G,\bar{G}$ הוא אוילרי.

משפט 3.2 עמ' 40 (משפט אור): G גרף פשוט על $3 \le n = |V|$ כך שלכל זוג צמתים u,v שאינם שכנים מתקיים $\deg(u) + \deg(v) \ge n \Leftarrow$ G המילטוני.

משפט 3.3 עמ' 42 (משפט דירק): עבור גרף פשוט על $3 \le n = |V|$ אם דרגת כל צומת היא לפחות $\frac{n}{2} \Leftarrow$ המילטוני.

זיווגים

משפט 4.7 עמ' 48 (משפט הול): בגרף דו-צדדי יש זיווג המזווג את כל צמתי A $\Leftrightarrow$ לכל $X \subseteq A$ מתקיים $|r_g(X)| \ge |X|$ כאשר, $r_g(X)$ = קבוצת השכנים של X.

מסקנה 4.8 עמ' 50: בגרף G יש זיווג מושלם $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ וגם לכל $X \subseteq A$ מתקיים $|X| \le |r_g(X)|$.

גרפים מישוריים

משפט 2.5 עמ' 57: K_5 אינו מישורי.

הגרף המתקבל על –ידי השמטת קשת אחת (כלשהי) מ K_5 מישורי (שאלה 1 עמ' 58).

משפט 5.3 עמ' 59 (נוסחת אוילר): G גרף מישורי קשיר (לאו דווקא פשוט) בעל n צמצים ו m קשתות אזי מספר הפאות בכל שיכון מישורי של G הוא: $f = m - n + 2$.

משפט 5.4 עמ' 59: בגרף מישורי פשוט בעל $n \ge 3$ צמתים, יש לכל היותר $\boxed{3n-6}$ קשתות.

מסקנה 5.5 עמ' 60: בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו קטנה או שווה ל-5.

שאלה 3 עמ' 61: בגרף מישורי דו-צדיי פשוט וקשיר על n צמתים יש לכל היותר $\boxed{2n-4}$ קשתות.

(אותה שאלה): $K_{3,3}$ אינו מישורי.

משפט 5.8 עמ' 63 (משפט קורטובסקי): גרף הוא מישורי $\Leftrightarrow$ לא מכיל תת גרף של $K_5 / K_{3,3}$.

<u>צביעת גרפים</u>

הגדרה 6.1 עמ' 65 : צביעה נאותה – אם כל שני צמתים סמוכים צבועים בשני צבעים שונים.

מספר הצביעה: המספר המינימאלי של צבעים שמקיים צביעה נאותה.

$\chi\left(K_n\right) = n$.

שאלה 1 עמ' 65: כל גרף G ניתן לצביעה נאותה ב $\Delta\left(G\right)+1$ דלתא G = הדרגה המקסימאלית של צומת ב G.

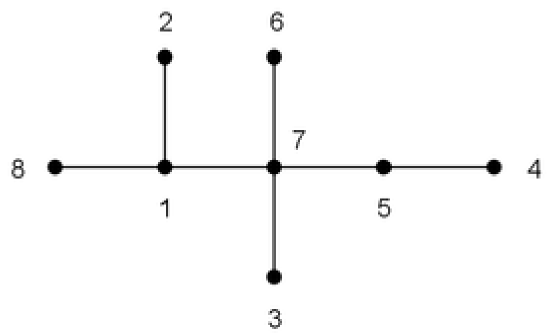
משפט 6.3 עמ' 67: כל גרף מישורי הוא 4-צביע.

גרף דו-צדדי הוא 2-צביע (טריוויאלי).

שאלה 2 עמ' 66: גרף d-מנוון אם בכל תת גרף שלו יש צומצ מדרגה d לכל היותר. ניתן לצבוע כל גרף d מנוון ב d+1 צבעים._

קוד פופר מעץ בנוי

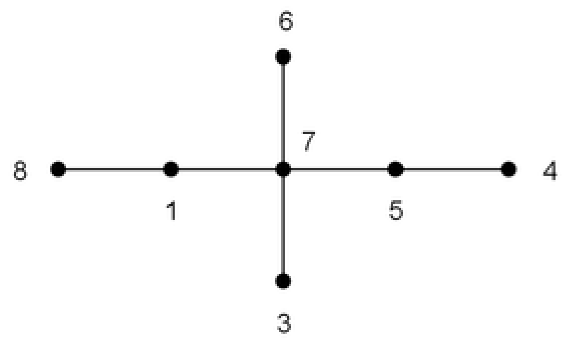
Let T be the following labeled tree:



This tree has 8 nodes, so the corresponding Prüfer sequence will have 6 elements.

Iteration 1

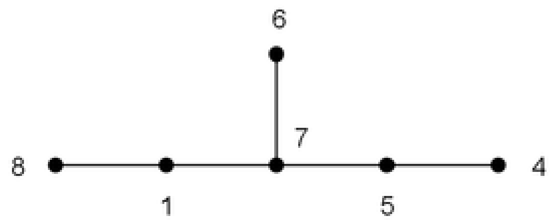
Step 1: There are 8 nodes, so continue to **step 2**.
Step 2: The nodes of degree 1 are 8,2,6,4,3. Of these, 2 is the lowest.
Step 3: 2 is adjacent to 1, so add 1 to the Prüfer sequence.
Step 4: Removing node 2 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1).

Iteration 2

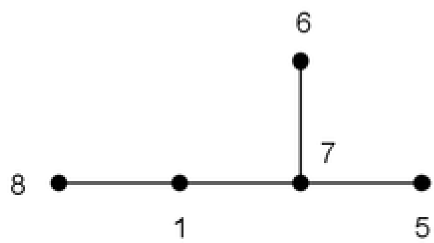
Step 1: There are 7 nodes, so continue to **step 2**.
Step 2: The nodes of degree 1 are 8,6,4,3. Of these, 3 is the lowest.
Step 3: 3 is adjacent to 7, so add 7 to the Prüfer sequence.
Step 4: Removing node 3 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1,7).

Iteration 3

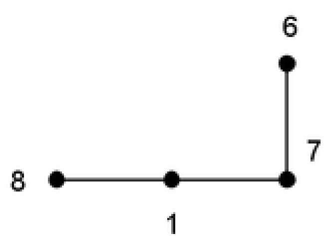
> **Step 1**: There are 6 nodes, so continue to **step 2**.
> **Step 2**: The nodes of degree 1 are 8,6,4. Of these, 4 is the lowest.
> **Step 3**: 4 is adjacent to 5, so add 5 to the Prüfer sequence.
> **Step 4**: Removing node 4 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1,7,5).

Iteration 4

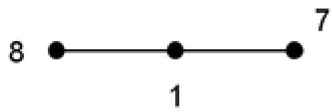
> **Step 1**: There are 5 nodes, so continue to **step 2**.
> **Step 2**: The nodes of degree 1 are 8,6,5. Of these, 5 is the lowest.
> **Step 3**: 5 is adjacent to 7, so add 7 to the Prüfer sequence.
> **Step 4**: Removing node 5 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1,7,5,7).

Iteration 5

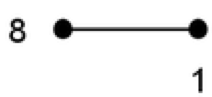
Step 1: There are 4 nodes, so continue to **step 2**.
Step 2: The nodes of degree 1 are 8,6. Of these, 6 is the lowest.
Step 3: 6 is adjacent to 7, so add 7 to the Prüfer sequence.
Step 4: Removing node 6 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1,7,5,7,7).

Iteration 6

Step 1: There are 3 nodes, so continue to **step 2**.
Step 2: The nodes of degree 1 are 8,7. Of these, 7 is the lowest.
Step 3: 7 is adjacent to 1, so add 1 to the Prüfer sequence.
Step 4: Removing node 7 leaves the following tree:



At this stage, the Prüfer sequence is (1,7,5,7,7,1).

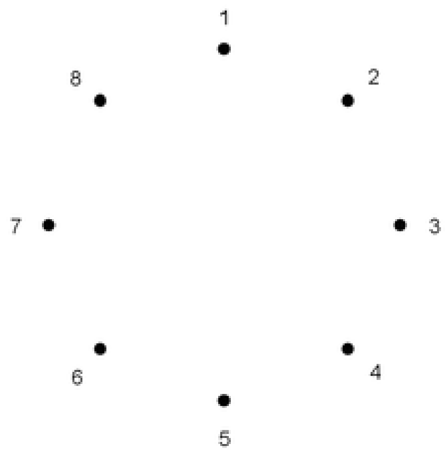
Iteration 7

Step 1: There are 2 nodes, so **stop**.
The Prüfer sequence is (1,7,5,7,7,1).

בניית עץ מקוד פופר

Let the starting Prüfer sequence be (1,7,5,7,7,1).

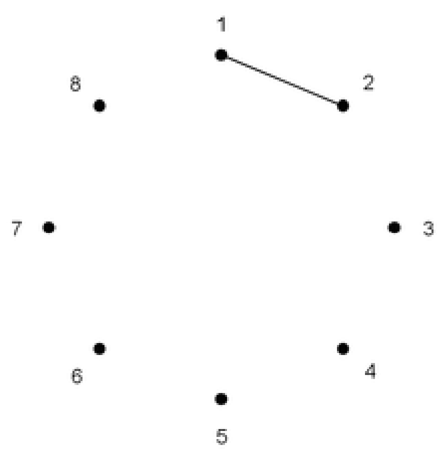
Step 1: **The sequence** is length 6, so the tree will have 8 nodes:



Step 2: We generate **the list**: (1,2,3,4,5,6,7,8).

Iteration 1

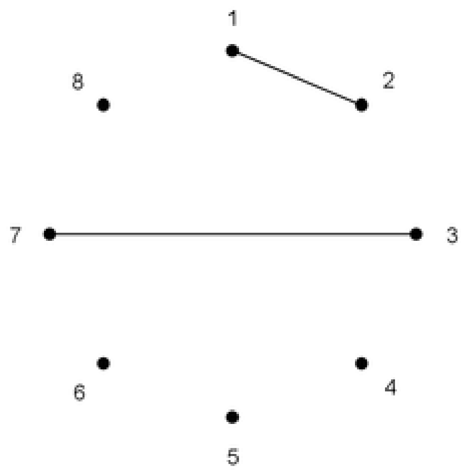
Step 3: There are 8 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 2, and the first number in **the sequence** is 1. We join 1 and 2, to obtain this graph:



Step 5: We delete 2 from **the list** to obtain (1,3,4,5,6,7,8), and 1 from the start of **the sequence** to obtain (7,5,7,7,1).

Iteration 2

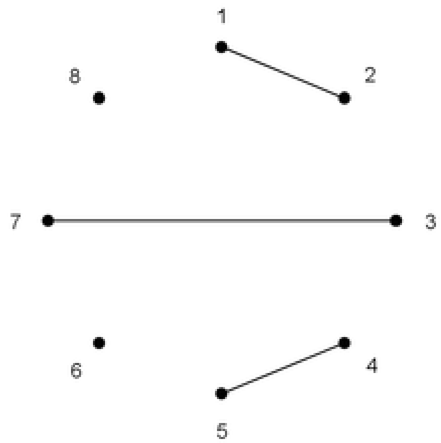
Step 3: There are 7 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 3, and the first number in **the sequence** is 7. We join 3 and 7, to obtain this graph:



Step 5: We delete 3 from **the list** to obtain (1,4,5,6,7,8), and 7 from the start of **the sequence** to obtain (5,7,7,1).

Iteration 3

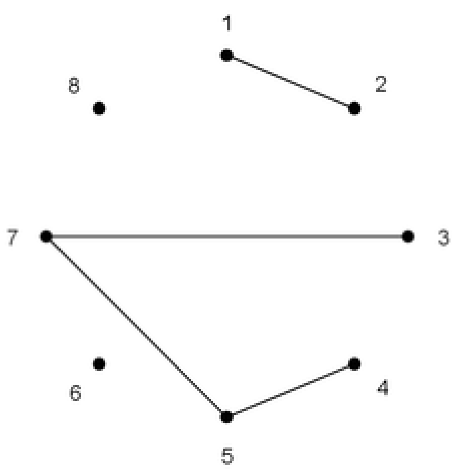
Step 3: There are 6 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 4, and the first number in **the sequence** is 5. We join 4 and 5, to obtain this graph:



Step 5: We delete 4 from **the list** to obtain (1,5,6,7,8), and 5 from the start of **the sequence** to obtain (7,7,1).

Iteration 4

Step 3: There are 5 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 5, and the first number in **the sequence** is 7. We join 5 and 7, to obtain this graph:

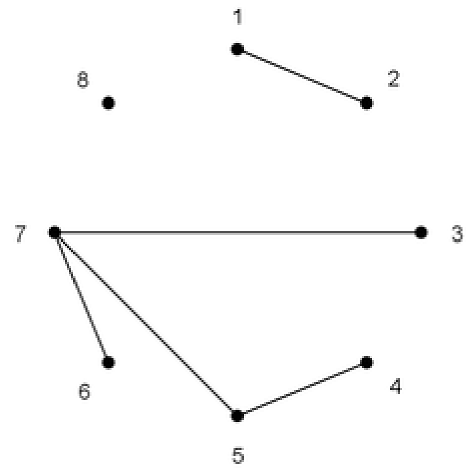


Step 5: We delete 5 from **the list** to obtain (1,6,7,8), and 7 from the start of **the sequence** to obtain (7,1).

Iteration 5

Step 3: There are 4 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.

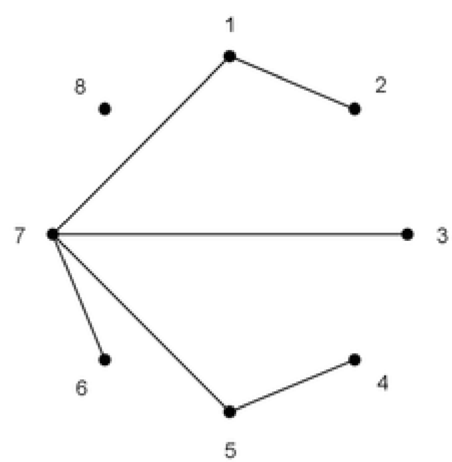
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 6, and the first number in **the sequence** is 7. We join 6 and 7, to obtain this graph:



Step 5: We delete 6 from **the list** to obtain (1,7,8), and 7 from the start of **the sequence** to obtain (1).

Iteration 6

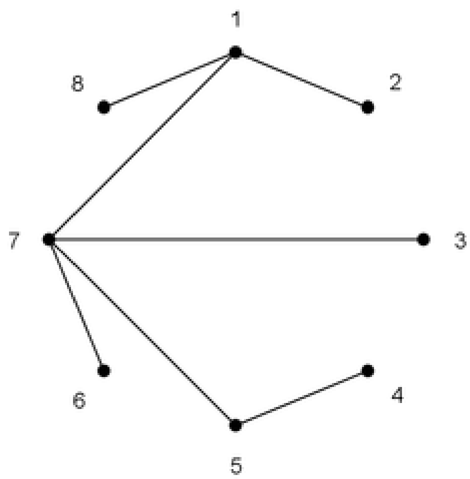
Step 3: There are 3 elements in **the list**, so we move on to **step 4**.
Step 4: The smallest number in **the list** which is not in **the sequence** is 7, and the first number in **the sequence** is 1. We join 7 and 1, to obtain this graph:



Step 5: We delete 7 from **the list** to obtain (1,8), and 1 from the start of **the sequence**, which is at this point empty.

Iteration 7

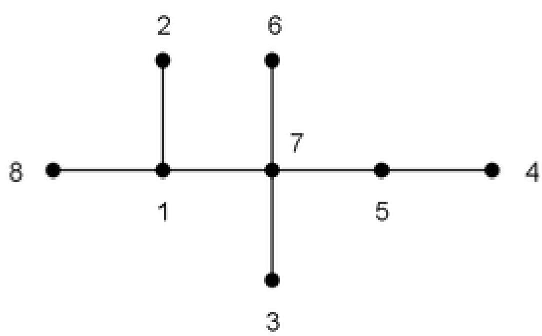
Step 3: There are 2 elements in **the list**: (1,8), so we join them to obtain this graph:



Then we **stop**.

The algorithm has terminated, and the tree is complete.

Rearranging the positions of the nodes, we can draw it like this:



נספחים

חלוקה המושרה ע"י פונקציה

הבהרה / ניסוח מחודש לסעיף "העתק טבעי", תורת הקבוצות עמ' 84.

א. תהי φ פונקציה של קבוצה A לקבוצה B.

בעזרת φ ניתן להגדיר יחס (רלציה), שנקרא לו E_φ, מעל A:

עבור $x, y \in A$ נאמר ש- $(x,y) \in E_\varphi$ אםם $\varphi(x) = \varphi(y)$.

טענה: E_φ הוא **יחס שקילות** מעל A

הוכחה: נראה טרנזיטיביות: יהיו $(x,y) \in E_\varphi$, $(y,z) \in E_\varphi$.

כלומר $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\varphi(y) = \varphi(z)$.

שוויון הוא כמובן טרנזיטיבי, לכן $\varphi(x) = \varphi(z)$.

כלומר, מהגדרת E_φ : $(x,z) \in E_\varphi$.

לכן E_φ הוא יחס טרנזיטיבי.

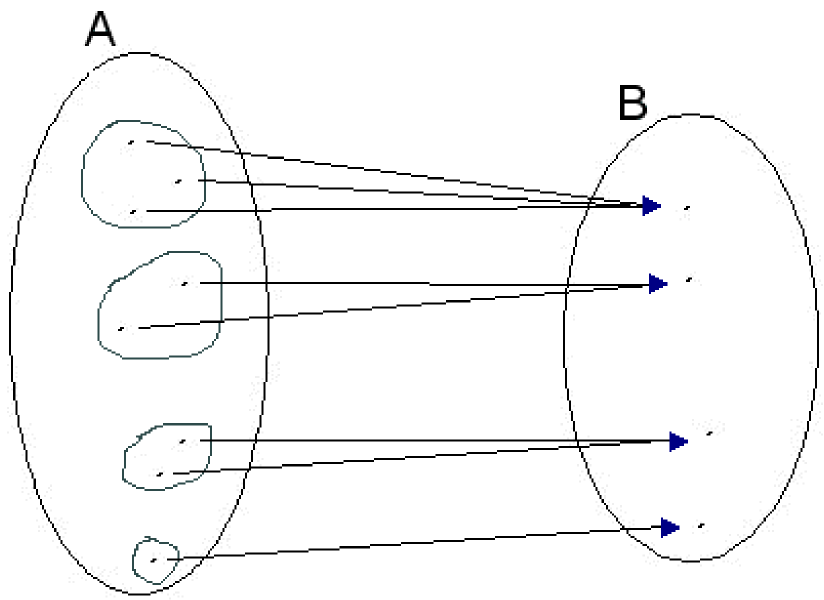
תרגיל מומלץ וקל מאד: השלימו ההוכחה, כלומר הוכיחו ש- E_φ הוא רפלקסיבי וסימטרי.

כידוע, כל יחס שקילות מעל A מגדיר חלוקה של A.

קיבלנו אפוא שכל פונקציה $\varphi: A \to B$ **מַשרה** (כלומר מאפשרת להגדיר) חלוקה של A,

והחלוקה היא כזו:

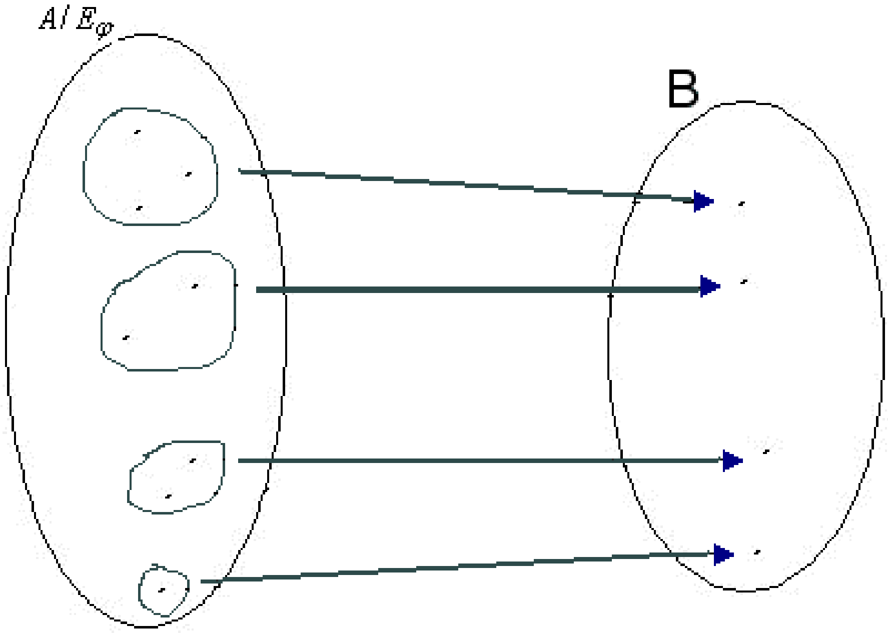
שני איברים של A נמצאים באותה מחלקה אםם יש להם אותה תמונה תחת φ.



ב. נסמן את קבוצת המנה, כלומר **קבוצת מחלקות השקילות** , בסימן A/E_φ :
זו הקבוצה **שאיבריה** הם מחלקות השקילות: כל אחת ממחלקות השקילות, כעצם בפני עצמו, היא איבר בקבוצה זו. למשל, באיור שבעמוד הקודם, A/E_φ היא קבוצה בת 4 איברים.

כדי לפשט את המשך הדיון, נניח מעתה ש- φ היא **<u>על</u>** B .
כלומר כל איבר של B מתקבל כתמונה של איבר כלשהו (ייתכן של יותר מאבר אחד) של A.
הערה: זו אינה ממש הנחה מגבילה: אם φ אינה על B, תהי B' תמונת φ : קבוצת אותם אברי B המתקבלים ע"י φ. במקום לראות את φ כפונקציה של A לתוך B, נראה אותה כפונקציה של A **על** B' ! נמשיך את הדיון עם B' במקום B .

מהגדרת יחס השקילות המושרה ע"י φ , לכל איבר של A/E_φ מתאים איבר אחד ויחיד של B : האיבר המותאם לכל איברי המחלקה ע"י φ.



קיבלנו אפוא פונקציה של A/E_φ ל- B (אפשר לסמן פונקציה זו φ/E_φ).

פונקציה זו היא **חד-חד-ערכית**: מהגדרת E_φ, למחלקות שקילות שונות של E_φ מותאמים איברים שונים ב- B.

הפונקציה היא **<u>על</u>** B: זה נובע מהנחתנו ש- φ עצמה היא על B: לכל איבר של B יש מקור תחת φ, ומקור זה שייך למחלקה כלשהי. מחלקה זו היא המקור שלו תחת הפונקציה φ/E_φ.

נסכם:

פונקציה φ של A לקבוצה B כלשהי משרה חלוקה של A.

אם φ היא **על** B, יש התאמה **חח"ע** של קבוצת מחלקות השקילות A/E_φ **<u>על</u>** B.

ג. לכאורה, החלוקה של A שקיבלנו כאן היא דוגמא מיוחדת של חלוקה:
"חלוקה שהתקבלה ע"י פונקציה".
אך למעשה, **כל** חלוקה של A (וכל יחס שקילות מעל A) ניתן להציג בצורה כזו!
בהינתן יחס שקילות E **כלשהו** מעל A, תהי A/E **קבוצת מחלקות השקילות**.
קיימת פונקציה "טבעית" של A על A/E:
הפונקציה השולחת כל איבר של A למחלקה בה הוא נמצא!
נקח $B = A/E$ וניקח את הפונקציה φ להיות הפונקציה הטבעית הזו.
לפי הגדרת φ, וההגדרה בסעיף (*i*) של חלוקה מושרית ע"י פונקציה, קל לראות שהחלוקה של A ש- φ משרה, היא בדיוק החלוקה המתקבלת מיחס השקילות הנתון E (בידקו זאת!).
כך קיבלנו את יחס השקילות E כיחס שקילות המושרה ע"י פונקציה.

ד. הערה אחרונה: בפרקים 4, 5 נדון בהשוואה בין גדלים של קבוצות אינסופיות.
כדאי לחזור לבנייה שכאן במהלך לימוד פרקים אלה, ולראות מה היא אומרת על גודל הקבוצה A/E לעומת הגודל של B, ולעומת הגודל של A.

מבוא לפרק 4 בכרך "תורת הקבוצות"

א. רקע

מושג האינסוף נתפש במהלך רוב ההיסטוריה האנושית כמושג שעל גבול המיסטיקה.
מפתיע אולי לשמוע, שמזה כ- 130 שנה קיימת מסגרת התייחסות מתמטית,
שבמידה רבה "אילפה" את המושג הזה, ומאפשרת לדון בו בצורה מוגדרת היטב ועניינית.
את היסודות לתחום זה הניח גיאורג קנטור (Georg Cantor, 1845 – 1918).

שאלות ישנות כגון:

- האם יש אינסוף אחד ויחיד או שיש מובן לגדלים אינסופיים שונים?
- אם יש יותר מאינסוף אחד, האם ניתן להשוות בין שני "אינסופים", ולומר שאינסוף אחד גדול ממשנהו?
- אם יש "אינסופים" גדולים יותר וגדולים פחות, האם יש אינסוף הגדול מכל שאר ה"אינסופים", והאם יש אינסוף הקטן מכל שאר ה"אינסופים"?

קיבלו תשובה ברורה כבר בעבודותיו הראשונות של קנטור.

למרבה הפלא, ההגדרות הנדרשות כדי "לאלף" את מושג האינסוף הן פשוטות ביותר, וכמעט מובנות מאליהן. הקושי אינו בהגדרות, אלא בכך שמיד עם תחילת יישום ההגדרות אנו נתקלים בתוצאות הנראות בלתי-הגיוניות, תוצאות העשויות להביא למסקנה שההגדרות אינן מובילות למשהו מועיל. לקנטור היה הדמיון הנדרש ללכת, למרות זאת, בעקבות ההגדרות, ולבדוק לאן הן מובילות. הטיפול שלו במושג האינסוף עורר התנגדות של חלק מהמתמטיקאים בתקופתו. למרות זאת, תוך זמן לא רב, בתהליך שהחל עוד בימי חייו של קנטור, הפכה גישתו למוכרת ומקובלת. קנטור סבל בערוב ימיו מדיכאון קליני ואושפז לסירוגין בבתי חולים. עם זאת, הספיק לראות את ראשית הצלחת תורתו. המושגים והתוצאות אליהם הגיע הם כיום חלק בסיסי של תורת הקבוצות, ונלמדים באופן שגרתי בשנה א' של לימודי מתימטיקה.

ב. קבוצות שוות עוצמה

בספר מדע-פופולרי ישן בשם "1,2,3 … Infinity" מציג הפיסיקאי George Gamow את הרעיון הבסיסי של קנטור בצורה פשוטה וברורה. הנה התיאור שלו, בעיבוד קל:
נניח שבשבט מסוים האנשים אינם יודעים לספור מעֵבר ל- 5 . כל מספר הגדול מ- 5 הוא בעיניהם "**הרבה**". למרות מגבלה זו, אין לבני השבט בעיה לבצע עסקה של החלפת "הרבה" סוסים תמורת "הרבה" מטבעות זהב, כאשר הם בטוחים שכמות הסוסים שמסרו שווה בדיוק לכמות המטבעות שקיבלו:

הדרך לעשות זאת היא להתאים אחד-לאחד בין הסוסים למטבעות, באופן שלכל סוס יותאם מטבע אחד ויחיד, ולא יישארו סוסים או מטבעות שאינם מותאמים.

במושגים מתימטיים, בני השבט מנסים לבנות פונקציה **חד-חד-ערכית** של קבוצת הסוסים **על** קבוצת המטבעות. קיומה של פונקציה כזו מראה שהקבוצות שוות גודל.

מצבנו לגבי המושג **אינסוף** דומה למצבם של בני השבט לגבי המושג **הרבה**.
לנו לא ברור איך להשוות בין קבוצות אינסופיות. נאמץ אפוא את הפתרון של אותו שבט:
הגדרה: נאמר שלקבוצות A, B יש אותו גודל (המונח המקובל הוא **עוצמה**) אם קיימת **פונקציה חד-חד-ערכית** של A **על** B.

אם נחשוב על כך, ניתן לטעון שזו בעצם ההגדרה היחידה המתקבלת על הדעת:
אם יש סיכוי כלשהו לדבר על גדלים של קבוצות אינסופיות, הרי תכונה בסיסית שודאי נרצה לדרוש ממושג הגודל היא, שאם ניתן להתאים את אברי שתי קבוצות "אחד-לאחד" ולמצות כך את שתי הקבוצות, הקבוצות הן שוות-גודל.
קנטור לקח אפוא "דרישה מינימלית" זו – כהגדרה!

אגב, נשים לב שכמו עבור בני השבט, הגדרה זו מאפשרת לנו לקבוע אם שתי קבוצות הן שוות-גודל בלי לדעת מהו גודל זה. בני השבט אינם צריכים לתת שם למספר 12, או אף לדעת שמכרו 12 סוסים, כדי לדעת שקבוצת הסוסים שמכרו **שוות-גודל** לקבוצת המטבעות שקיבלו. הגדרנו את המושג **קבוצות שוות-עוצמה** כיחידה אחת, בלי שנזקקנו לדעת מהי "עוצמה".

עוד הערה: הגדרנו בינתיים רק שוויון עוצמות, ולכן אנו יכולים בשלב זה לשאול רק אם שתי קבוצות הן **שוות-עוצמה** או **שונות-עוצמה**. המושג "גדול מ-" הוא עדין יותר, ויוגדר בשלב מאוחר יותר.

אם הגדרת שוויון עוצמות כה פשוטה, מדוע נוסדה תורת העוצמות האינסופיות רק בשלהי המאה ה-19 ולא הרבה קודם? הסיבה לכך היא ככל הנראה מכשלות כגון זו:
נתבונן בקבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$. תהי $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}-\{0\}=\{1,2,3\ldots\}$.
$\mathbf{N}^*$ היא קבוצה **חלקית-ממש** של $\mathbf{N}$.
מצד שני, הפונקציה $f(n)=n+1$ היא פונקציה **חח"ע** של $\mathbf{N}$ **על** $\mathbf{N}^*$.
לפי הגדרתנו, פירוש הדבר כי לשתי קבוצות אלו אותו גודל!
אך זה נראה כשטות גמורה: **איך יתכן שלקבוצה ולקבוצה חלקית-ממש שלה יהיה אותו גודל?**

ההגדרה הביאה לתוצאה הנראית בלתי מתקבלת על הדעת. מצד שני, ההגדרה שנתנו היא כאמור דרישה "מינימלית" סבירה ביותר ממושג הגודל. מכיון שהגדרה זו הביאה מיד למסקנה, שקבוצה יכולה להיות שוות-גודל לקבוצה חלקית-ממש שלה, אנו עשויים לחשוב שמושג הגודל הוא חסר-טעם לגבי קבוצות אינסופיות. בעיה זו עיכבה את התפתחות מושג האינסוף במשך מאות שנים.

פריצת הדרך של קנטור החלה בכך שלא נרתע מהפרדוקס. הוא חשד שיש טעם להמשיך לבדוק את המסקנות המתקבלות מהגדרת שוויון עוצמה, למרות ההתנגשות עם האינטואיציה.

לשם כך עלינו לקבל, שייתכן שלקבוצה A ולקבוצה B החלקית-ממש ל- A יהיה אותו גודל! רעיון זה מוזר לנו, אך מוזרותו נובעת מכך שהאינטואיציה שלנו לגבי גדלים של קבוצות נבנתה בעבודה עם קבוצות סופיות! בקבוצות סופיות אכן מצב כזה לא ייתכן. מסתבר שמצב כזה קורה רק בקבוצות אינסופיות, ולמעשה מאפיין קבוצות אינסופיות: לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצות השונות ממנה, שהן שוות-עוצמה לה; ורק בקבוצה אינסופית ייתכן מצב כזה.

הנה עוד דוגמאות למצב זה:

- $A=\mathbf{N}$, $B=$ קבוצת הטבעיים הזוגיים.
- הפונקציה $f:A\to B$, $f(n)=2n$, היא חח״ע ועל,
- ומראה כי קבוצת המספרים הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים.

- $A=\mathbf{N}$, $B=$ קבוצת הטבעיים המתחלקים ב- 10.
- הפונקציה $f:A\to B$, $f(n)=10n$, היא חח״ע ועל,
- ומראה כי קבוצת הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת הטבעיים המתחלקים ב- 10.

- $A=\mathbf{N}$, $B=\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
- הפונקציה $f:A\to B$, $f(n)=10^n$, היא חח״ע ועל,
- ומראה כי קבוצת הטבעיים שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים שהם חזקות של 10.

- הפונקציה המתוארת בספר הלימוד בשאלה 4.4 מראה כי קבוצת המספרים השלמים שוות-עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים.

- בתשובה לשאלה 4.8 בספר הלימוד מתוארת פונקציה המראה כי קבוצת המספרים הרציונליים (המספרים הניתנים לכתיבה כשבר שמונהו ומכנהו מספרים שלמים, והמכנה שונה מאפס) היא שוות עוצמה לקבוצת המספרים הטבעיים.

- הפונקציה המתוארת באיור שבעמ' 128 בספר הלימוד מראה כי קבוצת הנקודות שעל קו ישר שוות עוצמה לקבוצת הנקודות שבקטע פתוח.

כללית, אם עוצמת A שווה לעוצמת B , כותבים $|A|=|B|$.

אחרי שרואים את כל הדוגמאות הללו (ודוגמאות נוספות שיוזכרו בהמשך) עולה חשד שכל הקבוצות האינסופיות שוות עוצמה. למרבה השמחה, המצב אינו כך. דוגמא ראשונה לשתי קבוצות אינסופיות שאינן שוות עוצמה ניתנה **בהוכחת האלכסון של קנטור**, המראה כי קבוצת המספרים הממשיים **אינה** שוות עוצמה לקבוצת הטבעיים (משפט 4.5).

כדי להבין את משמעות המשפט, חשוב להבין מה עלינו להוכיח כדי להראות שקבוצה נתונה A **אינה** שוות עוצמה לקבוצה נתונה B. אין זה די שנבנה פונקציה של A ל- B שהיא אך לא חח״ע

על, או פונקציה של A ל- B שהיא על אך לא חח״ע ! אילו הקבוצות היו סופיות היה אמנם די בכך. **אך עבור קבוצות אינסופיות קיומה של פונקציה כזו אינו אומר שלקבוצות עוצמה שונה!**

נסתכל למשל בקבוצות $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$ שבעמוד הקודם. כזכור $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\} = \{1,2,3\ldots\}$.

הפונקציה $g: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$: $g(n) = n$ היא חד-חד-ערכית ואינה על (0 אינו בתמונה).

למרות זאת ראינו בעזרת פונקציה אחרת, ששתי הקבוצות הללו שוות עוצמה !

כיצד אפוא ניתן להראות ששתי קבוצות כלשהן אינן שוות עוצמה ?

הגדרת שוויון עוצמות אמרה :

הקבוצות A,B שוות-עוצמה אםם **קיימת** פונקציה חח״ע של A על B.

לכן, כדי להראות שקבוצה A **אינה** שוות עוצמה לקבוצה B עלינו להראות **שלא קיימת** פונקציה חח״ע של A על B. טענה כזו לא ניתן לבדוק ע״י הבאת דוגמא של פונקציה זו או אחרת.

עלינו להראות **שאין אף** פונקציה של A ל- B שהיא בעת ובעונה אחת חח״ע ועל.

זה מה שהראה קנטור בהוכחת האלכסון, עבור $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{R}$. כאמור זהו משפט 4.5 בספר.

ג. היחס ״קטן מ-״ בין עוצמות

לאחר שמשתכנעים שקיימות עוצמות אינסופיות שונות, עולה השאלה אם ניתן לומר עבור שתי עוצמות לא רק שהן שונות, אלא ש״עוצמתה של קבוצה A קטנה מעוצמתה של קבוצה B״.

הדוגמא עם הפונקציה g בראש העמוד, והדוגמאות שראינו לקבוצה אינסופית שהיא שוות עוצמה לתת-קבוצה-ממש שלה, מראות לנו שיש להיזהר מעט בהגדרה.

להגדרת אי-שוויון עוצמות שני חלקים :

בשלב ראשון מגדירים אי-שוויון חלש, כלומר ״קטן או שווה״ (עמ׳ 129 בספר הלימוד) :

הגדרה : $|A| \le |B|$ אםם קיימת פונקציה **חד-חד-ערכית** של A ל- B
(פונקציה שאינה דווקא על).

<u>דוגמאות</u> :

- הפונקציה g שבראש העמוד מראה כי $|\mathbf{N}^*| \le |\mathbf{N}|$.

(ואכן הפונקציה f בעמ׳ 2 כאן הראתה שלמעשה קבוצות אלו שוות-עוצמה!).

- הפונקציה של $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{R}$ השולחת כל מספר לעצמו מראה כי $|\mathbf{N}| \le |\mathbf{R}|$

(והוכחת האלכסון מראה כי במקרה זה העוצמות אינן שוות).

- כללית יותר, אם $A \subseteq B$, אז הפונקציה של A ל- B השולחת כל איבר של A לעצמו מראה כי $|A| \le |B|$.

בשלב שני מגדירים אי-שוויון חזק כך :

הגדרה : $|A|<|B|$ אםם $|A|\le|B|$ ו- $|A|\ne|B|$.

כלומר $|A|<|B|$ אםם

קיימת פונקציה חד-חד-ערכית של A ל- B, **ולא קיימת פונקציה חד-חד-ערכית** של A __על__ B.

דוגמא : מהגדרה זו והאמור למעלה נובע ש- $|\mathbf{N}|<|\mathbf{R}|$.

דוגמא חשובה וכללית - משפט 4.8 : לכל קבוצה A, $|A|<|P(A)|$.

בשל חשיבותו זכה משפט זה לשם "משפט קנטור" , אם כי כמעט כל הטענות בפרק 4 הוכחו ע"י קנטור (גם המשפט הקרוי בספר "משפט שרדר-ברנשטיין" מכונה ברוב הטקסטים המתימטיים "משפט קנטור-ברנשטיין").

לסיום, הנה כמה טענות לגבי עוצמות, המוכחות בספר.

עוצמת $\mathbf{N}$ מסומנת $\aleph_0$ (גם סימון זה נקבע ע"י קנטור).

עוצמת $\mathbf{R}$ מסומנת בספר שלנו C (בספרים אחרים היא מסומנת לרוב $\aleph$).

- איחוד שתי קבוצות, שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- איחוד k קבוצות (k טבעי גדול מ- 0 כלשהו) , שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- איחוד $\aleph_0$ קבוצות , שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתו $\aleph_0$.
- $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=\aleph_0$
- מכפלה קרטזית של k קבוצות (k טבעי גדול מ- 0 כלשהו) , שעוצמת כל אחת מהן $\aleph_0$ - עוצמתה $\aleph_0$.
- איחוד k קבוצות (k טבעי גדול מ- 0 כלשהו) , שעוצמת כל אחת מהן C - עוצמתו C.
- מכפלה קרטזית של k קבוצות (k טבעי גדול מ- 0 כלשהו) , שעוצמת כל אחת מהן C - עוצמתה C.
- $|P(\mathbf{N})|=C$
- קבוצת כל הפונקציות של N לקבוצה $\{0,1\}$ - עוצמתה C.

ואזהרה :

לא הבאנו דוגמא לעוצמה שבין $\aleph_0$ ל- C, ועשוי אפוא להתקבל הרושם ש- C היא העוצמה הבאה בגודלה אחרי $\aleph_0$. האם זה אכן המצב? במובן מסוים, שאולי אינו לגמרי מספֵּק, התשובה לשאלה אם יש עוצמות בין $\aleph_0$ ל- C ידועה, אך התשובה אינה "כן" או "לא", אלא מעט מורכבת יותר. נושא זה חורג מתחום הקורס שלנו.