מתמטיקה בדידה

מפגש 5

תורת הקבוצות - פרק 3
פונקציות

הגדרה: פונקציה היא שלשה (A,B,g)

כאשר A ו B הן קבוצות ו g היא תת קבוצה של $A\times B$

המקיימת ש**לכל** $x\in A$ יש y **יחיד** ב B כך ש $(x,y)\in g$

A נקראת תחום הפונקציה.

B " טווח הפונקציה.

g " גרף הפונקציה.

סימון: נסמן $f: A\to B$ ונאמר כי **f היא** **פונקציה מ A ל B**.

כאשר **התחום** הוא A

הטווח הוא B

והגרף הוא אוסף הזוגות $(x,f(x))$

הערה: פונקציות הן **שוות** אמ"מ יש שוויון של
כל אחד משלושת הרכיבים: תחום, טווח, גרף.

תזכורת:

$\mathbb{N}$ - קבוצת הטבעיים $0,1,2,\dots$

$\mathbb{Z}$ - " השלמים $\dots,-2,-1,0,1,2\dots$

$\mathbb{Q}$ - " הרציונליים

$\mathbb{R}$ - " הממשיים

$\mathbb{R}^{+}$ - הממשיים החיוביים.

עוד הגדרות: עבור פו' $f=\langle A,B,g\rangle$

קב' הרכיבים הימנ"ם ב g = $Im(f)$ היא התמונה של הפונקציה.

$g\subseteq A\times B$

אם מתקיים $y=f(x)$ אז y הוא הדמות של x

ז"א $(x,y)\in g$ ‏ x הוא המקור של y

כאשר $f:A\to B$ פו' ו- $C\subseteq A$ התמונה של C, $f[C]$, היא קבוצת הדמויות של האיברים ב C.

$$f[C]=\{f(x)\,/\,x\in C\}$$

כאשר $f:A\to B$ פו' ו- $D\subseteq B$ התמונה ההפוכה של D, $f^{-1}[D]$, היא קבוצת המקורות של איברי D

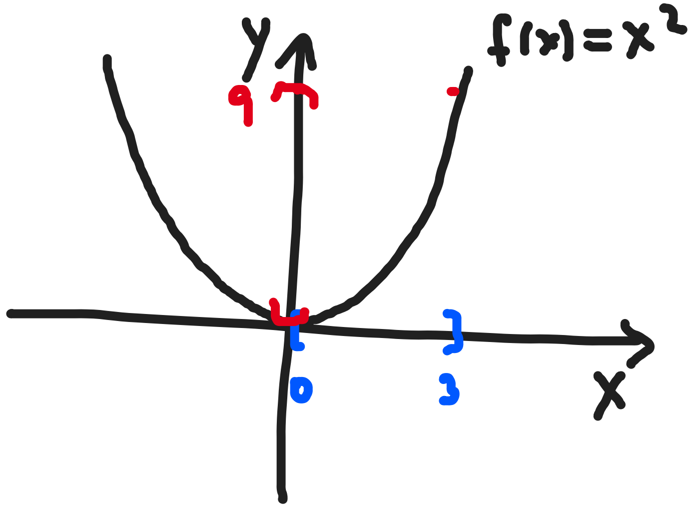
$$f^{-1}[D]=\{x\in A\,/\,f(x)\in D\}$$

דוגמא 3:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

נתון $C=[0,3]$ מהי $f[C]$?

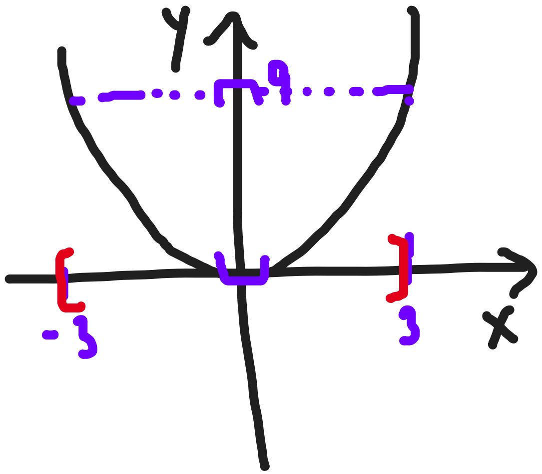
פתרון: $f[C] = [0,9]$



דוגמא 3:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=x^2$$

ניקח $D=[0,9]$ מהו $f^{-1}[D]$?



תשובה: $f^{-1}[[0,9]] = [-3,3]$

הערה. $f[A] = Im(f)$

$g \subseteq A \times B$

$g = \{ (x, f(x)) / x \in A \}$

הגדרות:

פונקציה נקראת **חד-חד-ערכית** (חח"ע) אם היא מקיימת:

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

במילים: למקורות שונים יש תמונות שונות.

או בדיוק שקולה:

$$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$$

פונקציה נקראת **על B** אם היא מקיימת:

$$\forall b \in B (\exists a \in A ((a,b) \in g))$$

במילים: לכל איבר ב B יש מקור ב A.

משפט: עדנר $f: A \to B$

הטענות הבאות שקולות:

1) f היא חח"ע.

2) לכל $C_1, C_2 \subseteq A$ מתקיים $f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$

3) לכל $C \subseteq A$ מתקיים $f[C^c] = f[C]^c$

4) לכל $C_1, C_2 \subseteq A$ מתקיים $f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$

5) לכל $C \subseteq A$ מתקיים $f^{-1}[f[C]] = C$

ראינו קודם דוגמא לפונ' **שלא** מקיימת $f^{-1}[f[C]] = C$
והיא אכן **לא** חח"ע. הנה היא:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f^{-1}[f[0,3]] = [-3,3]$

$[0,9]$

משפט: תהי $f:A\to B$ על B אזי לכל $D\subseteq B$ מתקיים

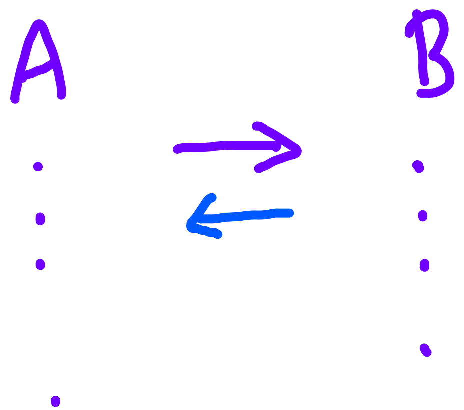
$$f[f^{-1}[D]]=D$$

משפט 3.11 אם A ו-B קבוצות סופיות

$|A|=|B|$ אמ"מ יש פונ' חח"ע מ-A על B.

$|A|\leq|B|$ " " " חח"ע מ-A ל-B.

$|A|\leq|B|$ " " " מ-B על A.



קשר בין פונקציה ויחס שקילות

א) עבור פונ' $f:A\to B$ נגדיר יחס $\equiv_f$ כך:

$$\forall x,a\in A \qquad x\equiv_f a \iff f(x)=f(a)$$

טענות: 1) מחלקות השקילות הן בדיוק $f^{-1}[\{c\}]$ עבור כל $c\in \mathrm{Im}f$.

2) f היא חח"ע אמ"מ בכל מחלקת שקילות יש איבר יחיד.

ב) לכל יחס שקילות על A ניתן להגדיר פונ' $f:A\to B$ כך שיחס השקילות יהיה בדיוק $\equiv_f$.

תרגול:

$A = \{1,2,3,4\}$

$f: P(A) \to P(A)$

$$f(X) = \begin{cases} A \setminus X & : |X| \leq 2 \\ X & : |X| \geq 3 \end{cases}$$

א) האם הפונ' חח"ע? האם היא על $P(A)$?

ב) נגדיר יחס R כך: $(X_1, X_2) \in R \iff f(X_1) = f(X_2)$

הוכיחו כי R יחס שקילות.

כמה מחלקות שקילות יש (מהן?)

תשובות:

א) לא חח"ע. לדוגמ'

$f(\{1\}) = \{2,3,4\}$

$f(\{2,3,4\}) = \{2,3,4\}$

לא על. לדוגמ' $\emptyset$ לא תתקבל כתמונה של אף איבר.

אם $f(X) = X$ אז ב X יש 3 איברים או יותר

ולכן לא $\emptyset$.

ואז $A \setminus X = \emptyset$ אז לפי ההגדרה $X = A$

אבל אז $f(A) = A$ ולא $\emptyset$.

ב) מחלקות השקילות:

$\{\emptyset, A\}$

$\{\{1\}, \{2,3,4\}\}$

$\{\{2\}, \{1,3,4\}\}$

$\{\{3\}, \{1,2,4\}\}$

$\{\{4\}, \{1,2,3\}\}$

$\{\{1,2\}\}$

$\{\{1,3\}\}$

$\{\{1,4\}\}$

$\{\{2,3\}\}$

$\{\{2,4\}\}$

$\{\{3,4\}\}$

עוד דוגמה של יחס שקילות המוגדר ע"י פונקציה...

נתונה הפונ'

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$f(x)=x^2$$

$\equiv_f$ יחס השקילות המוגדר כך: $f(x_1)=f(x_2) \iff x_1\equiv_f x_2$

מהן מחלקות השקילות?

$\{0\}$

$\{1,-1\}$

$\{2,-2\}$

$\{3,-3\}$

$\vdots$

$\{n,-n\}$

$\vdots$

$\{\{a,-a\}\mid a\in\mathbb{Z}\}$

עוד דוגמאות של פונקציות ותמונה הפוכה.

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$f(x)=x-8$$

נניח $D=\{4,11,-3\}$ מהי $f^{-1}[D]$

$x-8=-3$ $x-8=11$ $x-8=4$

$x=5$ $x=19$ $x=12$

$$f^{-1}[D]=\{5,12,19\}$$

פונקציות מיוחדות - חשוב לקרוא (ופשוט להבין)

- פונקציה <u>קבועה</u>. $f(x)=K$
- פונקציית זהות. $f(x)=x$ $\quad I_a$
- פונקציה הטלה. לדוג' $f((m,n))=m$
- <u>פונקציה אופיינית</u>

אם $A\subseteq U$ נגדיר פו' כך: $\chi_A : U \to \{0,1\}$

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 0 & : \quad x\notin A \\ 1 & : \quad x\in A \end{cases}$$

שאלה:

האם פו' הטלה הוא חח"ע?

האם הוא על?

$$\pi_1: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\pi_1((m,n,p)) = m$$

$$\pi_2: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\pi_2((m,n,p)) = n$$

$$\pi_3: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\pi_3((m,n,p)) = p$$

תשובה:

לא חח"ע

כן על

הוכחה ש π_3 הוא על $\mathbb{N}$.

יהי $b\in\mathbb{N}$ כלשהו.

ניקח $x=(1,1,b)$

מתקיים

$$\pi_3((1,1,b)) = b$$ מ.ש.ל.

$U = \{1, 2, \ldots, 5\}$:lcdl 13

$A = \{2, 4, 5\}$

$\chi_A : U \to \{1, 0\}$

$\chi_A(1) = 0$

$\chi_A(2) = 1$

$\chi_A(3) = 0$

$\chi_A(4) = 1$

$\chi_A(5) = 1$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$: [illegible]

$$A = \{1, 2\}$$

$$\chi_A(1) = 1$$

$$\chi_A(2) = 1$$

$$\chi_A(3) = 0$$

$$\chi_A(4) = 0$$

$$\chi_A(5) = 0$$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **דוגמה:**

$\chi_A(1) = 0$ **נתון:**

$\chi_A(2) = 1$

$\chi_A(3) = 0$

$\chi_A(4) = 1$

$\chi_A(5) = 0$

מהי A?

תשובה:

$A = \{2, 4\}$

$U = \{1, 2, \ldots 5\}$ דוגמא 2

$$\chi_B(1) = 1$$
$$\chi_B(2) = 0$$
$$\chi_B(3) = 0$$
$$\chi_B(4) = 1$$
$$\chi_B(5) = 0$$

מכאן נוכל להסיק כי $B = \{1, 4\}$

הרכבת פונקציות

אם $g: A \to B$, $f: B \to C$ פו'

נגדיר את הפו' $f \circ g: A \to C$

כך:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

תרגיל קטן:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |x|$

מהו $f \circ g$?

האם היא חח"ע? האם היא על $\mathbb{R}$?

תשובה:

$$(f \circ g): \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$$(f \circ g) = f(g(x)) = f(|x|) = \sqrt{|x|}$$

לא חח"ע. לדוג' $(f \circ g)(-9) = (f \circ g)(9) = 3$ היא לא על.

<u>הערה:</u> שורש של מספר טבעי הוא טבעי או אי-רציונלי

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3} =$ אי רציונלי

$\sqrt{2} =$ " "

$\sqrt{1} = 1$

לדוגמא 1.5 הוא לא שורש של מספר שלם.

$(1.5)^2 = 2\frac{1}{4}$

גם $1\frac{1}{2}$ הוא שייך ל $\mathbb{R}$

אך איננו דמות של אף איבר ב $\mathbb{Z}$

תחת הפו' $f \circ g$.

משפט 3.21

אם f ו-g חח״ע אז גם $f \circ g$ חח״ע.

אם f ו-g הן פו׳ על אז גם $f \circ g$ פו׳ על.

משפט 3.22

אם $f \circ g$ חח״ע אז g חח״ע.

אם $f \circ g$ על אז f על.

פונקציה הפכית

אם $f: A \to B$ חח"ע ועל

אז $f^{-1}: B \to A$ היא הפ' ההפכית.

המוגדרת כך: נתאים לכל $b \in B$ את האיבר $a \in A$ היחיד שמקיים $f(a)=b$.

ז"א $f^{-1}(b)=a$ אמ"מ $f(a)=b$

משפט: אם f חח"ע ועל

אז גם f^{-1} חח"ע ועל ומתקיים

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$f \circ f^{-1} = I_B$$

$$f^{-1} \circ f = I_A$$

דוגמא:

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$f(x) = x+5$$

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$f^{-1}(x) = x-5$$

עוד דוגמא:

מה ההפכי' ההפכית של:

$$f: [0,1] \longrightarrow [0,2]$$
$$f(x) = 2x$$
$$f^{-1}: [0,2] \longrightarrow [0,1]$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

תרגולים:

נתונות הפונקציות הבאות

$f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

$f\langle m,n\rangle = \langle m, 2m-n\rangle$

$g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$

א) הוכיחו כי f הפיכה.
ומצאו את f^{-1}.

ב) הוכיחו ש g איננה הפיכה.

ג) מצאו את $g[\mathbb{N} \times \{0\}]$ $g^{-1}[\mathbb{N} \times \{0\}]$

תרגולים:

נתונות הפונקציות הבאות $f,g:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$

$$f\langle m,n\rangle=\langle m,2m-n\rangle$$

א) הוכיחו כי f הפיכה.
ומצאו את f^{-1}.

פתרון: א) f חח"ע: נניח

$$\underbrace{\langle m_1,2m_1-n_1\rangle}_{f(x_1)}=\underbrace{\langle m_2,2m_2-n_2\rangle}_{f(x_2)}$$

$\Rightarrow\ m_1=m_2$ וגם $2m_1-n_1=2m_2-n_2\quad /-2m_1$

$-n_1=-n_2\quad /\cdot(-1)$

$n_1=n_2$

אז

$$\underbrace{\langle m_1,n_1\rangle}_{x_1}=\underbrace{\langle m_2,n_2\rangle}_{x_2}$$

מ.ש.ל. חח"ע.

f על: יהי $\langle m,n\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$
נבחר $x=\langle m,2m-n\rangle$ ונחשב את $f(x)$

$$f(x) = f\langle m, 2m-n \rangle = \langle m, 2m-(2m-n) \rangle$$
$$= \langle m, n \rangle$$

[illegible]

תרגולים:

נתונות הפונקציות הבאות $f, g : \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$

$g\langle m,n\rangle = \langle m, m-2n\rangle$

ב) הוכיחו ש g איננה הפיכה.

ג) מצאו את $g[\mathbb{N}\times\{0\}]$ $g^{-1}[\mathbb{N}\times\{0\}]$

פתרון: ב) נוכיח שהיא חח"ע:

נניח $\langle m_1, m_1-2n_1\rangle = \langle m_2, m_2-2n_2\rangle$

$\Leftarrow$ $m_1-2n_1 = m_2-2n_2$ וגם $m_1=m_2$

$/-m_1$

$-2n_1 = -2n_2 \quad /:(-2)$

$n_1 = n_2$.

נוכיח שהיא לא על $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

למשל עבור הזוג הסדור $\langle 0,-1\rangle$ אין מקור.

$$g:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$$
$$g\langle m,n\rangle=\langle m,m-2n\rangle$$

המשך... לזוג $\langle 0,-1\rangle$ אין מקור.

<u>הוכחה:</u> נניח שכן:

אז $m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}$

$$g\langle m,n\rangle=\langle 0,-1\rangle$$

אז

אזי

$$\langle m,m-2n\rangle=\langle 0,-1\rangle$$

$m-2n=-1$ וגם $m=0$

$\Leftarrow$

$$-2n=-1$$
$$2n=1$$

אין n שלם המקיים $2n=1$.

אזי אין מקור לזוג $\langle 0,-1\rangle$.

קיבלנו כי הנ"ל איננה על ולכן איננה הפיכה. מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> עבור m זוגי $m-2n$ תמיד זוגי.

תרגילים:

נתונות הפונקציות הבאות

$f,g:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$

$g\langle m,n\rangle=\langle m,m-2n\rangle$

ב) הוכיחו ש g איננה הפיכה.

ג) מצאו את $g[\mathbb{N}\times\{0\}]$ $g^{-1}[\mathbb{N}\times\{0\}]$

$g[\mathbb{N}\times\{0\}]=\{\langle m,m\rangle / m\in\mathbb{N}\}$

$g\langle m,0\rangle=\langle m,m\rangle$

$g^{-1}[\mathbb{N}\times\{0\}]=\{\langle m,n\rangle / \langle m,m-2n\rangle\in\mathbb{N}\times\{0\}$ וגם $m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\langle m,n\rangle / m\in\mathbb{N}$ וגם $m-2n=0$ וגם $n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\langle m,n\rangle / m\in\mathbb{N}$ וגם $n=\frac{m}{2}$ וגם $n\in\mathbb{Z}\}$

$=\{\langle m,\frac{m}{2}\rangle /$ m זוגי טבעי $\}$

תרגול:

נתונה פונ' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(n)=\begin{cases} n-1 & : n>0 \\ 0 & : n=0 \end{cases}$$

נגדיר פונ' $g:P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$

$$g(D)=f^{-1}[D]$$

א) הוכיחו כי g היא חח"ע.

ב) חשבו את
$g[\{0,1,2\ldots,n\}]$
$g[\mathbb{N}]$
$g[\mathbb{N}\setminus\{0\}]$

ג) האם g היא על $P(\mathbb{N})$?

תרגיל:

נתונה פונ' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(n)=\begin{cases} n-1 & : n>0 \\ 0 & : n=0 \end{cases}$$

נגדיר פונ' $g: P(\mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N})$

$$g(D) = f^{-1}[D]$$

א) הוכיחו כי g היא חח"ע.

פתרון: נניח $D_1 \neq D_2$ שתי תת קבוצות של $\mathbb{N}$

אז יש איבר $m \in D_1$ $\quad g(D_1) = f^{-1}[D_1]$

$m \notin D_2$

$$m+1 \in f^{-1}[D_1] = g(D_1)$$

לעומת: $m+1 \notin f^{-1}[D_2] = g(D_2)$

כי $f(m+1) = m \notin D_2$.

קיבלנו כי $g(D_2) \neq g(D_1)$

מסקנה: g חח"ע.

תרגיל:

נתונה פו' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(n)=\begin{cases} n-1 & : n>0 \\ 0 & : n=0 \end{cases}$$

נגדיר פו' $g: P(\mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N})$

$$g(D) = f^{-1}[D]$$

ב) חשבו את

$g[\{0,1,2\dots,n\}]$

$g[\mathbb{N}]$

$g[\mathbb{N}\setminus\{0\}]$

פתרון:

$$g[\{0,1,2,\dots n\}] = f^{-1}[\{0,1,\dots n\}] = \{0,1,\dots n+1\}$$

$$g[\mathbb{N}] = f^{-1}[\mathbb{N}] = \mathbb{N}$$

$$g[\mathbb{N}\setminus\{0\}] = f^{-1}[\underbrace{\mathbb{N}\setminus\{0\}}_{\{1,2,3,\dots\}}] = \{2,3,\dots\} = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$$

תרגיל:

נתונה פו' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(n)=\begin{cases} n-1 & : n>0 \\ 0 & : n=0 \end{cases}$$

נגדיר פו' $g: P(\mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N})$

$$g(D) = f^{-1}[D]$$

4) האם g הפיך על $P(\mathbb{N})$.

תס"מו בבית (ונראה פתרון מסודר בתחילת המפגש הבא)