# מתמטיקה בדידה

## מפגש 11

פונקציות יוצרות

# טור פורמלי - פונקציה יוצרת

בהינתן סדרה $\{a_n\}$ נקרא טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ כך ש: -
המקדם של $x^n$ הוא $a_n$.

ובהינתן טור פורמלי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נאמר שהפונ' $f(x)$
יוצרת את הסדרה $\{a_n\}$.

## דוגמאות:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ יוצרת את הסדרה $1,1,1,1,1,\dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ יוצרת את הסדרה: $0,1,2,3,\dots$

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{10}{k} x^k$ יוצרת את הסדרה

$\binom{10}{0},\binom{10}{1},\binom{10}{2},\dots,\binom{10}{10},0,0,\dots$

אחרי שנגדיר:

$\binom{m}{k}=0$ אם $m<k$

## נוסחאות חשובות:

① טור גאומטרי אינסופי

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$$

② טור גאומטרי סופי

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = 1+x+\dots+x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

③ נוסחת הבינום

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

ראיון כבר:

נוסחאות חשובות:

טור גאומטרי אינסופי

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

טור גאומטרי סופי

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = 1+x+\dots+x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \qquad (2)$$

נוסחת הבינום

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m \qquad (3)$$

הערות:

(א) הצבה. דוגמאות

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = \frac{1}{1-x^4}$$

$$\underbrace{(1-a^3)^m}_{=(1+(-a^3))^m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-a^3)^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k a^{3k}$$

**תרגיל:** מצאו את המקדם של $x^{20}$ בביטוי $\left(\sum_{k=2}^{6} x^k\right)^5$

$$= (x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^5 = \left(x^2(1+x+x^2+x^3+x^4)\right)^5$$

$$= x^{10}\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$$

המקדם של $x^{20}$ בביטוי המקורי שווה למקדם של $x^{10}$ בביטוי $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$.

$$(1+x+\dots+x^4)^5 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5\cdot(1-x^5)^5 =$$

(2) נוסחה

(1) נוסחה

(3) נוסחה

$$(1+x+x^2+\dots)^5\cdot\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^k x^{5k}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^5$$

**הערה:** ישנן נקודים לנוסחאות נוספות כדי להמשיך ...

רוצים לפתח ניסוח עבור

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n$$

נפתור כמה תרגילים

עד שנגיע לניסוח...

<u>תרגיל:</u> מצאו את המקדם של $x^{20}$ בביטוי $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^6$

$$= \underbrace{(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+\dots)\cdot \ \dots \ \cdot(1+x+x^2+\dots)}_{6 \text{ פעמים}}$$

<u>פתרון:</u>

המקדם של $x^{20}$ = מספר הדרכים להגיע לסכום של 20 כאשר מסכמים 6 מספרים טבעיים.

= מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה

$$\boxed{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=20}$$

= (למדנו בשבוע שעבר צירופים עם חזרות)

$$D(6,20)=\binom{25}{20}$$

תרגיל: מצאו את המקדם של $x^{20}$ בביטוי $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^m$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^m = \underbrace{(1+x+x^2+\dots)\cdot\dots\cdot(1+x+x^2+\dots)}_{\text{m פעמים}}$$

= מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה:

$$a_1+a_2+\dots+a_m = 20$$

$$\Leftarrow \quad D(m,20) = \binom{m-1+20}{20}$$

ובאופן כללי: מה המקדם של $x^n$ בביטוי $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^m$

$$= \underbrace{(1+x+x^2+\dots)\cdot\dots(1+x+x^2+\dots)}_{m \text{ פעמים}}$$

המקדם של $x^n$ בביטוי הוא בדיוק

מספר הפתרונות של

$$t_1+t_2+\dots+t_m=n$$

צ"ל $D(m,n)=\binom{m-1+n}{n}$

---

קיבלנו נוסחה ①:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} D(m,n)x^n$$

מצאנו שהמקדם של $X^n$ בביטוי $\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^m$ הוא –

$$D(m,n)$$

ולכן קיבלנו נוסחא נוספת:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} D(m,n) X^n$$

$$\left(\frac{1}{1-X}\right)^m = \frac{1}{(1-X)^m}$$

## נוסחאות

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = 1+x+\dots+x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \qquad (2)$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m \qquad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D(m,n) x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^m \qquad (4)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum c_k x^k \qquad (5)$$

כפל בין טורים

כאשר $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k =$$

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots\,.)\cdot(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \ldots) =$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 +$$

$$(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) X^3 + \ldots$$

$$\ldots (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) X^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \qquad c_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \quad \text{usw}$$

<u>תרגיל:</u> מצאו את המקדם של $\underline{\underline{x^{20}}}$ בביטוי $\left(\sum_{k=2}^{6} x^k\right)^5$

פתרון:

$$\left(\sum_{k=2}^{6} x^k\right)^5 = \left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^5$$
$$= \left(x^2(1+x+x^2+x^3+x^4)\right)^5$$
$$= x^{10}\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^5$$

ולכן אנחנו מחפשים את המקדם של $x^{10}$ בביטוי -

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^5 =$$ (לפי נוסחא 2)

$$\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5\cdot\left(1-x^5\right)^5$$

$$\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 (1-x^5)^5$$

נוסחה 4

נוסחה 3

$$(1-x^5)^5 = (1+(-x^5))^5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D(5,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5}{k}(-x^5)^k =$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} D(5,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{5}{k} x^{5k}}$$

השאלה היא: מה המקדם של $x^{10}$ בביטוי הזה (המקורי)

$$\underbrace{D(5,10)\cdot(-1)^0\cdot\binom{5}{0}}_{k=0} + \underbrace{(-1)^1\binom{5}{1}\cdot D(5,5)}_{k=1} + \underbrace{(-1)^2\binom{5}{2} D(5,0)}_{k=2}$$

$$\binom{14}{10}\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 5\cdot\binom{9}{5} + 1\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\cdot\binom{4}{0} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - 5\cdot\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$\binom{14}{10}\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 5\cdot\binom{9}{5} + 1\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\cdot\binom{4}{0}$$

$$= \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 5\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + 1\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot 1$$

$$= 7\cdot 13\cdot 11 - 5\cdot 9\cdot 7\cdot 2 + 10$$

$$\left(1+x+\dots+x^4\right)^5 = \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 \cdot \left(1-x^5\right)^5 =$$

נוסחה 2

נוסחה 1

נוסחה 3

$$\left(1+x+x^2+\dots\right)^5 \cdot \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}(-1)^k x^{5k} =$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 = \sum_{n=0}^{\infty} D(5,n)x^n$$

נוסחה 4 $m=5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D(5,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5}{k}(-1)^k x^{5k}$$

המקדם של $x^{10}$ במכפלה הנ"ל בין הטורים

הוא (נוסחה 5)

$$D(5,10)\cdot\binom{5}{0}(-1)^0 + D(5,5)\binom{5}{1}(-1)^1 + D(5,0)\binom{5}{2}(-1)^2$$

$$\binom{14}{10}\binom{5}{0} - \binom{9}{5}\binom{5}{1} + \binom{4}{0}\binom{5}{2}$$

עד עכשיו - עשינו מניפולציות שונות
על וקטורים.

עכשיו נראה איך <u>להשתמש</u> בפונקציות
יוצרות כדי לפתור בעיות קומבינטוריות.

## תרגיל:

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים זהים. בעלי החנות מעמיסים את המחשבים על שלושה רכבים שונים, שבכל אחד מהם יש מקום ל 24 מחשבים לכל היותר.

א) רשמו פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים בין 3 הרכבים. (לא חייבים לנצל את כל הרכבים).

ב) אם מספר המחשבים הוא 70 חשבו את מספר הדרכים לחלק אותם בין המכוניות.

**תשובה:**

א)

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{24})^3$$

המקדם של $x^n$ הוא בדיוק מספר הדרכים
לחלק n מחשבים בין שלושת הרכזים.

$$(1+x+x^2+\dots+x^{24})(1+x+x^2+\dots+x^{24})(1+x+\dots+x^{24})$$

המקדם של $x^n$ בביטוי הזה = למספר הדרכים
להגיע למספר n ע"י סכום של שלושה מספרים
שכל אחד מהם הוא מספר בין 0 ל- 24.

(1) $f(x)=\left(1+x+x^2+\dots+x^{24}\right)^3$

$$=\left(\sum_{k=0}^{24} x^k\right)^3$$

המקדם של $x^n$ הוא מספר האפשרויות לחלק n מחוזים
בין 3 המטנים.

(2) צריך לחשב את המקדם של $x^{70}$
בביטוי הנ"ל. נפתח אותו.

$$\left(1+x+x^2+\dots+x^{24}\right)^3=\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3=\left(\frac{1}{1-x}\right)^3\cdot\left(1-x^{25}\right)^3$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)x^i\cdot\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k x^{25k}$$

(4) נוסחה (5) נוסחה

ולכן המקדם של $x^{70}$ הוא:

$$D(3,70)\cdot\binom{3}{0}+D(3,45)\binom{3}{1}(-1)+D(3,20)\binom{3}{2}=\dots 6$$

$$\left(1+x+x^2+\dots+x^{24}\right)^3 = \left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 \cdot \left(1-x^{25}\right)^3$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} D(3,i)\,x^i \cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^k x^{25k}$$

(4) knolJ

(5) (knol)

$$\left(1-x^{25}\right)^3 = \left(1+\left(-x^{25}\right)\right)^3 \underset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(-x^{25}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^k \cdot \left(x^{25}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} x^{25k}$$

...

פתרון <u>אחר</u> לסעיף ד'.

תגובה מלאה של הרכיבים מתאימה ל 72 מחזורים.

אז כשנמצאים 70 רכבים נשארים 2 מקומות פנויים.

אז השאלה הופכת להיות-

בכמה דרכים אפשר "לחלק" 2 מקומות פנויים

בין 3 רכבים? $D(3,2)=\binom{4}{2}=6$.

**תרגיל:** (א) כתבו פונקציה יוצרת עבור מספר פתרונות

המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3n+1$

כאשר כל המשתנים הם מספרים טבעיים שמתחלקים ב 3

פרט לאחד המשתנים שהוא מספר טבעי שאינו מתחלק ב 3.

לא נדרש מיהו יוצא הדופן.

הדרכה: כתבו פונקציה יוצרת בהנחה שידוע מיהו יוצא

הדופן, והכפילו אותה בגורם מתאים.

(ב) בעזרת חלק א' מצאו את מספר הפתרונות הנ"ל

עבור $n=12$.

$$f(x) = 5\cdot\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k+1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}\right)^4$$ א

ב עבור $n=12$. צריך למצוא את המקדם של $3\cdot 12+1$

ז״א של $\underline{37}$.

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}\right)^4 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (x^3)^m\right)^4 = \left(\frac{1}{1-x^3}\right)^4$$

נוסחא 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k+1} = x\cdot\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} = x\cdot\frac{1}{1-x^3}$$

כמו קודם

$$\Rightarrow f(x) = 5\cdot x\cdot\left(\frac{1}{1-x^3}\right)^5$$

$$\Rightarrow f(x) = 5\cdot x\cdot\left(\frac{1}{1-x^3}\right)^5 \underset{\text{לפי נוסחה 4}}{=}$$

$$= 5\cdot x\cdot\sum_{k=0}^{\infty} D(5,k)\, x^{3k}$$

ועכשיו צריכים למצוא את המקדם של $x^{37}$ בפיתוח $f(x)$.

אז המקדם של $x^{36}$ בפיתוח הסיגמה.

אז עבור $k=12$. קיבלנו מקדם:

$$5\cdot D(5,12) = 5\cdot\binom{16}{12}$$

$$= 5\cdot\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 9100$$

## תרגיל:

ארבע משפחות מחלקות ביניהם מנות פלאפל.
כל משפחה מסוגלת לחסל לכל היותר 20 מנות.
כל משפחה חייבת לקבל לפחות 5 מנות.
המנות זהות. (והמשפחות שונות זו מזו).

א) רשמו פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק $n$ מנות פלאפל בין המשפחות.

ב) בדקו את התשובות המתקבלות עבור המקרים:
$n=20$, $n=21$, $n=90$. הסבירו.

ג) אם מספר מנות הפלאפל הוא 55 חשבו באמצעות הפונ בסעיף א' את מספר הדרכים לחלק אותם בין המשפחות.

(א)

$$f(x) = (x^5 + x^6 + \dots + x^{20})^4$$

המקדם של $x^n$ ב $f(x)$ הוא מספר הדרכים לחלק
$n$ מנות בין 4 המשפחות.

(ב) עבור $n=20$ יש דרך אחת והיא לתת לכל משפחה
5 מנות.

עבור $n=21$ יש 4 אפשרויות. כל משפחה חייבת
לקבל 5 מנות ("בסיס" 20) נשארה
מנה אחת שצריך לתת לאחת המשפחות.
יש 4 אפשרויות.

עבור $n=90$ אין אפשרויות, כי אפשר לחלק לכל
היותר 80 מנות (20 לכל משפחה)

$$f(x) = (x^5 + x^6 + \dots + x^{20})^4 =$$

$$[x^5(1 + x + x^2 + \dots + x^{15})]^4 =$$

$$x^{20}(1 + x + \dots + x^{15})^4 =$$

$$x^{20} \cdot \left(\frac{1 - x^{16}}{1 - x}\right)^4 =$$

$$x^{20} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^4 \cdot (1 - x^{16})^4 =$$

$$x^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} D(4,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}(-x^{16})^k =$$

$$\boxed{f(x) = x^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} D(4,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}(-1)^k x^{16k}}$$

ג

קיבלנו: $f(x) = x^{20} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} D(4,n)x^n \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}(-1)^k x^{16k}$

ולכן המקדם של $x^{55}$ הוא:

המקדם של $x^{35}$ בביטוי

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} D(4,n)x^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-1)^k x^{16k}\right)$$

ניקח $k=0$ $(x^0)$

$k=1$ $(x^{16})$

$k=2$ $(x^{32})$

$$D(4,35)\cdot\binom{4}{0}\cdot 1 + D(4,19)\cdot\binom{4}{1}\cdot(-1) + D(4,3)\cdot\binom{4}{2}\cdot 1$$

(עבור $k>2$ המעלה של $x$ הוא מעל 35 ולכן לא תורם למקדם של $x^{35}$)

קיבלנו שהמקדם הוא

$$\binom{38}{35}\cdot\binom{4}{0} + \binom{22}{19}\binom{4}{1}(-1) + \binom{6}{3}\binom{4}{2}\cdot 1$$

$$= \frac{38\cdot 37\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 - \frac{22\cdot 21\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1 = 8436 - 1540 + 20 = 6916$$

**תרגיל:** נתבונן בזהות

$$(1+x)^m(1-x)^m=(1-x^2)^m$$

מצאו את המקדם של $x^6$ בכל אחד מהאגפים של הזהות.

(באגף אחד יתקבל סכום של מחוברים, ובאגף השני ביטוי פשוט)

הביטויים כמובן תלויים ב $m$.

רשמו את הזהות המתקבלת.

בדקו את הזהות עבור $m=4$.

**הערה:** אין צורך להפריד את החישוב לפי הגודל של $m$.

## תרגיל: נתבונן בזהות

$$(1+x)^m(1-x)^m = (1-x^2)^m$$

מצאו את המקדם של $x^6$ בכל אחד מהאגפים של הזהות.

$$(1+x)^m\cdot(1-x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}(-x)^j$$

המקדם של $x^6$ יהיה:

$$\sum_{i=0}^{6}\binom{m}{i}(-1)^i\cdot\binom{m}{6-i}$$

$$(1-x^2)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}(-1)^k x^{2k}$$

המקדם של $x^6$ מתקבל כאשר $k=3$ ולכן המקדם הוא

$$\binom{m}{3}\cdot(-1)^3 = -\binom{m}{3}$$

קבלנו אם כן את הזהות:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{m}{6-i} = -\binom{m}{3}}$$

② עבור $m=4$

אגף ימין הוא: $-\binom{4}{3} = -4$

אגף שמאל הוא:

$$\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\binom{4}{i}\binom{4}{6-i} =$$

$$\underbrace{\cancel{\binom{4}{0}\binom{4}{6}}}_{i=0} - \underbrace{\cancel{\binom{4}{1}\binom{4}{5}}}_{i=1} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{4}{4}}_{i=2} - \underbrace{\binom{4}{3}\binom{4}{3}}_{i=3} + \underbrace{\binom{4}{4}\binom{4}{2}}_{i=4} - \underbrace{\cancel{\binom{4}{5}\binom{4}{1}}}_{i=5} + \underbrace{\cancel{\binom{4}{6}\binom{4}{0}}}_{i=6}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

② עבור $m=4$

אגף ימין: $-\binom{4}{3} = -4$

אגף שמאל:

$$\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\binom{4}{i}\binom{4}{6-i} =$$

$$\underbrace{\binom{4}{0}\cancel{\binom{4}{6}}}_{i=0} - \underbrace{\binom{4}{1}\cancel{\binom{4}{5}}}_{i=1} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{4}{4}}_{i=2} - \underbrace{\binom{4}{3}\binom{4}{3}}_{i=3} + \underbrace{\binom{4}{4}\binom{4}{2}}_{i=4} - \underbrace{\cancel{\binom{4}{5}\binom{4}{1}}}_{i=5} + \cancel{\binom{4}{6}\binom{4}{\;}}$$

$$= 6\cdot 1 - 4\cdot 4 + 1\cdot 6 = 12 - 16 = -4$$

**תרגיל: (חגית)**

כתבו פו יוצרת עבור מס' הפתרונות הטבעיים של המשוואה

$$3x_1+2x_2+3x_3+2x_4+3x_5+2x_6+3x_7=20$$

$$3(x_1+x_3+x_5+x_7)+2(x_2+x_4+x_6)=20$$

אפשר לסיים את ממ"ח 04

וכן את ממ"ן 15 (עד 1 דצמבר)

ולקרוא לשיעור הבא את

פרקים 1-2 בתורת הגרפים.

לסיים שאלות 14-20 בממ"ח 04

(וכן בעצם לסיים את הממ"ח) (הגשה ביום ראשון הבא)

וכן את ממ"ן 15

ולקרוא פרקים 1-2 בתורת הגרפים.