<u>לוגיקה</u>

<u>הגדרות:</u>

(t טאוטולוגיה כלשהי, f סתירה כלשהי, α,β פסוקים פורמאליים, p,q,r משתנים פסוקיים)

<u>טאוטולוגיות:</u>

- $p \lor (\neg p)$
- $p \to p$
- $p \leftrightarrow p$
- $f \to p$
- $p \to t$

<u>סתירות:</u>

- $p \land (\neg p)$
- $p \leftrightarrow (\neg p)$
- $t \to f$

<u>שקילויות:</u>

- $p \equiv \neg\neg p \equiv p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p \wedge t \equiv p \vee f$
- $p \wedge f \equiv f$
- $p \vee t \equiv t$
- $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p) \equiv \neg(p \wedge (\neg q)) \equiv (\neg p) \vee q$
- חילוף, קיבוץ ופילוג (לשני הכיוונים) הקשרים $\wedge, \vee$
- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
- $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$
- $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

<u>גרירות/נביעות:</u>

- $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \to q$
- $p, q \Rightarrow p \vee q$
- $p \wedge q \Rightarrow p, q$
- $(p \vee q) \wedge (\neg p) \Rightarrow q$
- $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$
- $(p \to q) \wedge (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
- $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$

<u>משפט דה-מורגן לכמתים:</u>

- $\neg \forall x \Psi \equiv \exists x \neg \Psi$
- $\neg \exists x \Psi \equiv \forall x \neg \Psi$

<u>שאלות שימושיות:</u>

9. $t1 \equiv t2,\ f1 \equiv f2$ p22

18. $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow \beta,\ \beta \Rightarrow \alpha$ p31

<u>משפטים נוספים:</u>

3. $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \beta \equiv t$ p26

5. $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \to \beta \equiv t$ p31

7. p32
   - $\alpha \Rightarrow t$
   - $t \Rightarrow \alpha \Rrightarrow \alpha \equiv t$
   - $f \Rightarrow \alpha$
   - $\alpha \Rightarrow f \Rrightarrow \alpha \equiv f$

- $\alpha \Rightarrow f \Rrightarrow \alpha \Rightarrow \beta$
- $\alpha \wedge (\neg\beta) \Rightarrow f \Rrightarrow \alpha \Rightarrow \beta$

תורת הקבוצות

הגדרות:

פרק 1

פרק 2

פרק 3

פרק 4

פרק 5

A,B,C,D) קבוצות כלשהן, x איבר כלשהו של הקבוצה האוניברסלית U . ,V,S,T,R הן רלציות כלשהן.
E_1, E_2 רלציות שקילות. ψ, φ פונקציות כלשהן. k_1, k_2, k_3, k, m עוצמות.)

<u>תכונות ההכלה:</u>

- $A \subseteq A$
- $A=B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $\varnothing \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

<u>תכונות האיחוד:</u>

- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \rightarrow A \cup B \subseteq C$
- $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$
- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

תכונות החיתוך:

- $A\cap B\subseteq A$
- $C\subseteq A \land C\subseteq B \leftrightarrow C\subseteq A\cap B$
- $A\cap B = B\cap A$
- $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
- $A\cap A=A$
- $A\cap\varnothing=\varnothing$
- $A\cap B=B \leftrightarrow B\subseteq A$
- $A\subseteq B \land C\subseteq D \rightarrow A\cap C\subseteq B\cap D$

תכונות המקשרות בין האיחוד לחיתוך:

- $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cup(A\cap B) = A$
- $A\cap(A\cup B) = A$
- $A\cup B=A\cup C \land A\cap B=A\cap C \rightarrow B=C$

תכונות ההפרש:

- $A-\varnothing = A$
- $A-A = \varnothing$
- $\varnothing-A = \varnothing$
- $A-B = \varnothing \leftrightarrow A\subseteq B$
- $A-B=A \leftrightarrow A\cap B=\varnothing$
- $(A\cup B)-B = A-B$
- $A\cap(B-A) = \varnothing$
- $A\cup(B-A) = A\cup B$
- $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$
- $A-B=B-A \leftrightarrow A=B$

תכונות המשלים:

- $x\notin A \leftrightarrow x\in A'$
- $x\notin A' \leftrightarrow x\in A$
- $A\cap A' = \varnothing$
- $A\cup A' = U$

- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$
- $(A')' = A$
- $A-B = A \cap B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $A \cup B=U \wedge A \cap B=\varnothing \leftrightarrow B=A'$
- $U=(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$

<u>תכונות ההפרש הסימטרי:</u>

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- $A \oplus \varnothing = A$
- $A \oplus A = \varnothing$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$

<u>תכונות המכפלה הקרטזית:</u>

- $A \neq B \rightarrow AxB \neq BxA$
- $Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$
- $Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$
- $(A \cap B)x(C \cap D) = (AxC) \cap (BxD)$

<u>תכונות בסיסיות של רלציות:</u>

- $Domain(R) \subseteq A$
- $Range(R) \subseteq B$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $Domain(R^{-1}) = Range(R)$
- $Range(R^{-1}) = Domain(R)$
- $R \subseteq S \leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

<u>תכונות של מכפלת רלציות:</u> *(מניחים כאן כי כל המכפלות מוגדרות)*

- $R\varnothing = \varnothing R = \varnothing$
- $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$
- $R(S \cup T) = RS \cup RT$
- $R \subseteq S \rightarrow RT \subseteq ST \wedge VR \subseteq VS$

- R(S∩T) ⊆ RS∩RT
- R(ST) = (RS)T
- $RI_A = I_A R = R$
- Domain(R)=A → $I_A \subseteq RR^{-1}$
- Range(R)=A → $I_A \subseteq R^{-1}R$

רלציות רפלקסיביות:

- R is reflexive ⇒ R⊆ R^2
- R is reflexive ⇒ R^{-1} is reflexive ∧ ∀n∈N: R^n is reflexive
- R is reflexive ⇒ ∀n∈N: $R^n \subseteq R^{n+1}$
- S,R are reflexive ⇒RS, R∪S, R∩S are reflexive

רלציות סימטריות:

- ∀a,b∈A:aRb→bRa ⇒ R is symmetric
- R is symmetric ⇒ R^{-1} is symmetric ∧ ∀n∈N: R^n is symmetric
- R,S are symmetric ⇒ (RS is symmetric ↔ RS=SR)
- R,S are symmetric ⇒ R∪S,R∩S are symmetric
- $R \cap R^{-1}$, $R \cup R^{-1}$ are symmetric

רלציות אנטיסימטריות:

- R is antisymmetric ⇒ R^{-1} is antisymmetric
- R,S are antisymmetric ⇒ R∩S is antisymmetric

רלציות טרנזיטיביות:

- R is transitive ⇔ $R^2 \subseteq$R
- R is transitive ⇒R^{-1} is transitive ∧ ∀n∈N: R^n is transitive
- R is transitive ⇒ ∀n∈N: $R^{n+1} \subseteq R^n$
- R,S are transitive ⇒ R∩S is transitive

רלציות שקילות:

E_1, E_2 **רלציות שקילות.**

- $E_1 \cap E_2$ is an equivalence relation
- $E_1 E_2$ is an equivalence relation ⇔ $E_1 E_2 = E_2 E_1$
- $E_1 \cup E_2$ is an equivalence relation ⇒ $E_1 \cup E_2 = E_1 E_2 = E_2 E_1$

סגור:

(R^s - הסגור הסימטרי של R, וכו')

- $R^r = R \cup I_A$
- $R^s = R \cup R^{-1}$
- $R^t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
- $|A|=n, n \in N \Rightarrow (R^t = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \wedge$ (R is reflexive $\rightarrow R^t = R^{n-1}$))
- $R^{rt} = R^t \cup I_A$
- $(R^t)^t = R^t$
- $(R^{rt})^{rt} = R^{rt}$
- $RR^{rt} = R^{rt}R = R^t$

פונקציות:

על = *surjective*

חד-חד-ערכית = *injective*

תמורה = *permutation*

- φ^{-1} is a function $\Leftrightarrow$ φ is injective
- φ is injective $\Rightarrow$ φ^{-1} is injective
- φ is injective and surjective $\Rightarrow$ φ^{-1} is injective and surjective
- φ is injective $\Rightarrow$ $\varphi\varphi^{-1} = I_A \wedge \varphi^{-1}\varphi = I_B$
- φ,ψ are surjective ⇒ φψ is surjective
- φ,ψ are injective ⇒ φψ is injective
- φ,ψ are permutations ⇒ φψ, φ^{-1} are permutations
- φ is a permutation ⇒ $I_A\varphi = \varphi I_A = \varphi \wedge \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = I_A$

תכונות הפונקציה האופיינית:

- $\varphi_A = \varphi_B \leftrightarrow A = B$
- $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
- $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
- $\varphi_{U-A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

- $\varphi_{A-B}(x) = \varphi_A(x) \cdot (1 - \varphi_B(x))$

סדר חלקי:

- R is a partial order ⇒ R^{-1} is a partial order
- A is partially ordered ∧ A is finite⇒ ($\exists x \in A$: x is minimal) ∧ ($\exists y \in A$: y is maximal)

טענות על עוצמות:

- (|A| = $\aleph_0$ ∧ B⊆A ∧ B is infinite) → |B|= $\aleph_0$
- $(\forall n, k \in N: (|A_n| \in N \wedge A_n \cap A_k = \varnothing)) \to |\bigcup_{n \in N} A_n| = \aleph_0$
- $(\forall n, k \in N: (|A_n| = \aleph_0 \wedge A_n \cap A_k = \varnothing)) \to |\bigcup_{n \in N} A_n| = \aleph_0$
- |Z| = $\aleph_0$
- |Q| = $\aleph_0$
- |P(N)| = c
- |{x|x∈R ∧ 0<x<1}| = c
- |{x|x∈R ∧ 0≤x≤1}| = c
- A⊆B → |A|≤|B|
- $\aleph_0$ < c
- k ≤ k
- $(k_1 \le k_2 \wedge k_2 \le k_3) \to k_1 \le k_3$
- $(k_1 \le k_2 \wedge k_2 \le k_1) \to k_1 = k_2$
- $\neg (k_1 < k_2 \wedge k_2 > k_1)$
- $(k_1 < k_2 \wedge k_2 < k_3) \to k_1 < k_3$
- |A|<|P(A)|
- k< 2^k
- (B⊆A ∧ |B|= $\aleph_0$ ∧ A-B is infinite) → |A-B|=|A|
- (A is infinite ∧ |A|≠ $\aleph_0$ ∧ B⊆A ∧ |B|= $\aleph_0$) → |A-B|=|A|

אריתמטיקה של עוצמות:

- $|P(A)| = 2^{|A|}$=| $\{0,1\}^A$ |
- |A∪B| = |A| + |B| - |A∩B|

- |AxB| = |A|·|B|
- k+0 = k
- $k \text{ is finite } \to \aleph_0 + k = \aleph_0$
- $k \text{ is infinite } \to \aleph_0 + k = k$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- c+c = c
- $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$
- $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$
- k·0 = 0
- k·1 = k
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- c·c = c
- $k_1 k_2 = k_2 k_1$
- $(k_1 k_2) k_3 = k_1 (k_2 k_3)$
- $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$
- $2^{\aleph_0} = c$
- $c^{\aleph_0} = c$
- $(k_1 \cdot k_2)^{k_3} = k_1^{k_3} \cdot k_2^{k_3}$
- $k_1^{k_2 + k_3} = k_1^{k_2} \cdot k_1^{k_3}$
- $k_1^{k_2 \cdot k_3} = (k_1^{k_2})^{k_3}$

<u>משפטים נוספים:</u>

2.19 אם π היא חלוקה של A, ו-E היא הרלציה המוגדרת על ידי:

$$\forall x, y \in A : (xEy \leftrightarrow \exists a \in \pi : x, y \in \pi)$$

אז E היא רלצית שקילות מעל A.

2.20 אם E היא רלצית שקילות מעל A, ו-π היא הקבוצה המוגדרת על ידי:

$$\pi = \{a | a \subseteq A \wedge (\forall x, y \in a : xEy) \wedge (\forall x, y \in A : ((x \in a \wedge y \notin a) \to (x, y) \notin E))\}$$

אז π היא חלוקה של A.

4.1 רלצית השקילות בין קבוצות היא רלצית שקילות.

5.7 היחס ≤ בין עוצמות הוא סדר חלקי מעל קבוצה כלשהי של עוצמות.

5.18 אם A,B סופיות אז מספר הפונקציות של A ל-B הוא $|B|^{|A|}$.

שאלות שימושיות:

2.15 אם R רלציה סופית ו R^m החזקה הקטנה ביותר של R ששווה לחזקה הקודמת לה, אז מספר החזקות השונות של R הוא m-1.

2.45-2.50- טענות על עידונים ומכפלות של חלוקות. עמ' 69-70

3.21

- A סדורה חלקית ⇐ יש ב-A לכל היותר איבר קטן ביותר אחד.
- A סדורה חלקית ⇐ יש ב-A לכל ביותר איבר גדול ביותר אחד.
- A סדורה חלקית ו-a∈A הוא איבר קטן ביותר ⇐ a הוא האיבר המינימלי היחיד ב-A.
- A סדורה חלקית ו-b∈A הוא איבר גדול ביותר ⇐ b הוא האיבר המקסימלי היחיד ב-A.

3.22

- A סדורה בסדר מלא ו-a∈A הוא מינימלי ⇐ a הוא האיבר המינימלי היחיד, ו-a הוא האיבר הקטן ביותר.
- A סדורה בסדר מלא ו-b∈A הוא מקסימלי ⇐ b הוא האיבר המקסימלי היחיד, ו-b הוא האיבר הגדול ביותר.

5.5

- עוצמת כל קטע (פתוח, סגור או חצי-פתוח) היא c.
- קבוצה של מספרים ממשיים שמכילה קטע, עוצמתה היא c.

<u>תורת הגרפים</u>

<u>הגדרות:</u>

פרק 1

פרק 2

- גרף d-מנוון - 66

($G=(V,E)$ גרף כלשהו, u,v צמתים ב-G)

תכונות של גרפים:

- $\sum_{v\in V} deg_G(v) = 2|E|$
- מספר הצמתים שדרגתם אי זוגית הוא זוגי
- קשיר G $\vee$ קשיר $\overline{G}$
- |V|≥2 ⇒ (דו-צדדי G ↔ אין ב-G מעגל באורך אי זוגי)
- ($\forall$v∈V: $deg_G(v)=2$) $\wedge$ קשיר G ⇒ מעגל G

יערות ועצים:

- |V|≥2 $\wedge$ עץ G ⇒ $\exists$v,u∈V: עלים v,u $\wedge$ u≠v
- עץ G $\wedge$ v∈V ⇒ עץ G∪{u,uv}
- עץ G $\wedge$ עלה v∈V ⇒ עץ G\{v}
- עץ G ⇔ G יש מסלול יחיד בין כל 2 צמתים של ⇔ גרף קשיר מינימלי G ⇔
  ⇔ קשיר G $\wedge$ |E|=|V|-1 ⇔ אין ב-G מעגלים $\wedge$ |E|=|V|-1 ⇔
  ⇔ אין ב-G מעגלים $\wedge$ כל קשת שמוסיפים ל-G יוצרת מעגל

גרפים אולריים, המילטוניים:

- קשיר G ⇒ (אוילרי G ↔ $\forall$v∈V: זוגי $deg_G(v)$)
- יש בגרף שני צמתים שדרגתם אי-זוגית, ודרגת שאר הצמתים זוגית ⇔
  ⇔ יש בגרף מסלול אוילר שאינו מעגל
- אי זוגי |V| $\wedge$ רגולרי-d G ⇒ אוילרי G $\vee$ אוילרי $\overline{G}$
- פשוט G $\wedge$ |V|≥3 $\wedge$ $\forall u,v\in V(uv\notin E\rightarrow deg_G(u)+deg_G(v)\geq|V|)$ ⇒ המילטוני G
- פשוט G $\wedge$ |V|≥3 $\wedge$ $\forall v\in V(deg_G(v)\geq\frac{|V|}{2})$ ⇒ המילטוני G
- המילטוני $K_{p,q}$ ⇔ p=q≥2

זיווגים:

- מעגל G $\wedge$ זוגי |V| ⇒ יש זיווג מושלם ב-G
- זיווג מקסימום M ⇔ אין מסלול שיפור ביחס ל-M
- דו צדדי G=(A∪B,E) ⇒ (יש זיווג המזווג את כל צמתי A ↔ $\forall X\subseteq A: |\Gamma_G(X)|\geq|X|$)
- דו צדדי G=(A∪B,E) ⇒ (יש זיווג מושלם ב-G ↔ (|A|=|B| $\wedge$ $\forall X\subseteq A: |\Gamma_G(X)|\geq|X|$))

- פשוט G ∧ רגולרי-d G ∧ d≥1 ⇒ G-יש זיווג מקסימום ב

גרפים מישוריים:

- K_5 אינו מישורי
- $K_{3,3}$ אינו מישורי
- $K_5 \setminus \{uv\}$ מישורי
- עץ G ⇒ מישורי G
- מישורי G ∧ קשיר G ⇒ f = |E| - |V| + 2
- מישורי G ∧ פשוט G ∧ |V|≥3 ⇒ |E| ≤ 3|V| - 6
- מישורי G ∧ פשוט G ⇒ $\exists v \in V : deg_G(v) \le 5$
- מישורי G ∧ פשוט G ∧ קשיר G ∧ דו-צדדי G ⇒ |E| ≤ 2|V| - 4

צביעת גרפים:

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(G)$ = 2 ⇔ דו צדדי G ∧ |E|≥1
- מעגל G ∧ זוגי |V| ⇒ $\chi(G)$ =2
- מעגל G ∧ אי זוגי |V| ⇒ $\chi(G)$ =3
- $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$
- מנוון-d G ⇒ $\chi(G)$ ≤ d+1
- מישורי G ⇒ $\chi(G)$ ≤ 4

משפטים נוספים:

2.6 כל גרף קשיר מכיל תת-גרף שהוא עץ.

2.9 מספר העצים על קבוצה של n≥2 צמתים מתויגים הוא n^{n-2}.

5.7 גרף מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא מישורית.

5.8 גרף הוא מישורי אם ורק אם אין לו תת-גרף שהוא העדנה של K_5 או $K_{3,3}$.

6.2 $\chi(G) \le \Delta(G)$ פרט לשני המקרים הבאים, שבהם $\chi(G) = \Delta(G) + 1$:

- ל-G יש רכיב קשירות שהוא $K_{\Delta(G)+1}$.
- $\Delta(G) = 2$ ול-G יש רכיב קשירות שהוא מעגל באורך אי-זוגי.

<u>שאלות שימושיות:</u>

פרק 1 שאלה 3

- בגרף פשוט, אם דרגת כל צומת היא לפחות k, קיים מסלול פשוט ולא סגור שבו k+1 צמתים.
- בגרף פשוט, אם דרגת כל צומת היא לפחות k, ו-k≥2, קיים מעגל פשוט בעל לפחות k+1 צמתים.

פרק 1 שאלה 5 - אם גרף הוא דו צדדי וקשיר, ניתן לחלק את צמתיו לשני "צדדים" רק בדרך אחת.

פרק 2 שאלה 2 - אם P,Q שני מסלולים שונים המקשרים בין אותם שני צמתים, באיחוד של P,Q יש מעגל.

פרק 6 שאלה 5 - קשר בין מספר המשולשים (מעגלים באורך 3) למספר הקשתות בגרף מישורי פשוט.
עמ' 70

פתרון שאלות

פתרון באינדוקסיה

יש להוכיח טענה מהסוג: n מקיים $\forall n \in N,\ n \geq k : \alpha$

ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

עקרון האינדוקציה:

1. מוכיחים כי k מקיים α
2. מניחים כי n≥k מקיים α
3. מוכיחים כי n+1 מקיים α

עקרון האינדוקסיה השלמה:

1. מוכיחים כי k מקיים α
2. מניחים כי כל k≤x<n מקיים α
3. מוכיחים כי n מקיים α

פתרון יחסי רקורסיה (נסיגה) לינאריים

אם יש לפתור נוסחה מהצורה:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2)$$

1. מניחים כי קיים פתרון מהצורה $f(k) = q^k$, ומציבים זאת בנוסחה שלמעלה:

$$q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2}$$

2. מחלקים בחזקה הכי קטנה:

$$q^2 = c_1 q + c_2$$

3. פותרים את המשוואה הזאת. נסמן את הפתרונות של המשוואה ב- q_1, q_2.
4. אם הפתרונות האלו שונים, מציבים אותם בנוסחה הזאת:

$$f(n) = Aq_1^n + Bq_2^n$$

5. אם הפתרונות זהים (יש רק פתרון אחד), מציבים בנוסחה הזאת:

$$f(n) = Aq_1^n + Bnq_1^n$$

6. מוצאים את A,B על ידי הצבת הערכים התחיליים הנתונים ב-ח, ופתרון המשווה המתקבלת.
7. מציבים את ערכי A,B שנמצאו. הפתרון הסתיים.

אם צריך לפתור יחס עם יותר מ-2 מחוברים, ראה תקציר מושגים ומסקנות בקומבינטוריקה.

נוסחאות בנושא פונקציות יוצרות

- סכום המספרים מ-1 עד ח:

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n = b^n + nab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + ... + a^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

- סכום טור הנדסי סופי:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

- סכום טור הנדסי אינסופי:

$$1 + x + x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

- כפל פונקציות יוצרות:

אם:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

אז:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + ... + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-1}$$

- העלאה בחזקה של טור הנדסי אינסופי:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + ...)^n = 1 + nx + D(n,2)x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} D(n,k)x^k$$