האוניברסיטה הפתוחה

20276

מתמטיקה דיסקרטית
קומבינטוריקה

תקציר מושגים ומסקנות

ערכה: ענת לרנר

תנאי שימוש בקובץ הדיגיטלי:

1. הקובץ הוא לשימושך **האישי** בלבד. פרטים מזהים שלך מוטבעים בקובץ בצורה גלויה ובצורה סמויה.
2. השימוש בקובץ הוא אך ורק למטרות לימוד, עיון ומחקר אישי.
3. העתקה או שימוש בתכנים נבחרים מותרת בהיקף העומד בכללי השימוש ההוגן, המפורטים בסעיף 19 לחוק זכות יוצרים 2007. במקרה של שימוש כאמור חלה חובה לציין את מקור הפרסום.
4. הנך רשאי/ת להדפיס דפים מחומר הלימוד לצורכי לימוד, מחקר ועיון אישיים. אין להפיץ או למכור תדפיסים כלשהם מתוך חומר הלימוד.

הקדמה

מבחר האפשרויות לבעיות קומבינטוריות הוא עצום, וכדי להגיע למיומנות דרוש תרגול רב. כשפותרים בעיות קומבינטוריות קל מאוד לטעות ולמעשה אין "נוסחה בטוחה" או "מרשם בטוח" לפתרון כללי. לכן, ברצוני להעלות כמה עצות שימושיות:

* יש בספר מבחר רב של שאלות פתורות. נסו, ככול שהזמן מאפשר לכם, לפתור אותן לבד ורק אחר-כך, השוו לפתרון המוצג בספר. שימו לב: ישנן דרכים רבות לפתרון אותה בעיה ופתרון שונה איננו בהכרח פתרון שגוי!

* יש כמה "שיטות" שבאמצעותן אפשר לפסול פתרון שגוי, (שים לב: אין שיטה שבאמצעותה אפשר לאמת פתרון!) וביניהן:
  * הצבת מספרים קטנים בנוסחת הפתרון, שעבורם אפשר למצוא בקלות את התוצאה האמיתית, והשוואת התוצאה האמיתית לתוצאה שהתקבלה מנוסחת הפתרון. כמובן שפתרון שאינו נכון עבור מספרים קטנים הוא פתרון שגוי.
  * פתרון אותה בעיה בכמה דרכים שונות והשוואת הנוסחאות שהתקבלו. אם הנוסחאות אינן זהות (כלומר, שוות בכל הצבה אפשרית של מספרים) - לפחות אחד מהפתרונות שגוי.

מטרת התקציר מושגים ומסקנות היא לרכז בצורה מתומצתת את החומר הדרוש לפתרון בעיות. אנו מקווים כי תמצא זאת לעזר.

תקציר מושגים ומסקנות
ליחידה II - קומבינטוריקה

פרק 1 - עקרון החיבור ועקרון הכפל

* עקרון החיבור - אם יש n_1 אפשרויות לבחור אלמנט אחד מסוג a_1, ויש n_2 אפשרויות לבחור אלמנט אחד מסוג a_2 אזי, יש n_1+n_2 אפשרויות לבחור אלמנט אחד מאחד הסוגים (מסוג a_1 או מסוג a_2).

* עקרון הכפל - אם יש n_1 אפשרויות לבחור אלמנט אחד מסוג a_1, ויש n_2 אפשרויות לבחור אלמנט אחד מסוג a_2 אזי, יש $n_1 \times n_2$ אפשרויות לבחור אלמנט אחד מסוג a_1 ואחריו אלמנט אחד מסוג a_2).

ניסוח אחר: אם אפשר לבצע תהליך מסוים ב-k שלבים עוקבים, כך שיש n_1 תוצאות אפשריות לשלב הראשון, n_2 תוצאות אפשריות לשלב השני,...., ו-n_k תוצאות אפשריות לשלב ה-k-י ואם כל הצירופים האפשריים של תוצאות k השלבים לתוצאה של התהליך כולו, שונים זה מזה, אזי לתהליך יש $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ תוצאות אפשריות.

פרק 2 - חליפות, תמורות וצירופים

* **חליפה בלי חזרות** של k איברים מתוך n איברים -
בחירת k איברים שונים מתוך n איברים עם חשיבות לסדר הבחירה.
סימון: $P(n,k)$

$$P(n,k)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

* **תמורה בלי חזרות** של n איברים -
חליפה של n איברים מתוך n איברים כלומר, סידור n איברים בשורה.
סימון: $P(n)$

$$P(n)=n!$$

* **צירוף בלי חזרות** של k איברים מתוך n איברים -
בחירת k איברים שונים מתוך n בלי חשיבות לסדר הבחירה.
סימון: $C(n,k)$ או $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

הסכם: $\binom{n}{0}=1$ = $\binom{n}{n}$; לכל $m>0$ מתקיים, $\binom{n}{n+m}=0$; $0!=1$

* **חליפה עם חזרות** של k איברים מתוך n איברים -
בחירת k איברים, לא בהכרח שונים (כלומר, איבר יכול להיבחר מספר כלשהו של פעמים), מתוך n איברים עם חשיבות לסדר הבחירה. **הערה:** במקרה זה, k יכול להיות גם גדול ממש מ-n.
מספר החליפות עם חזרות של k איברים מתוך n הוא:

$$n^k$$

* **תמורות עם חזרות של n איברים -**

סידור n איברים בשורה כאשר k_1 איברים זהים ביניהם, k_2 אחרים זהים ביניהם, ..., k_h אחרים זהים ביניהם ($k_1+k_2+...+k_h=n$). כלומר, יש h סוגים של איברים, ומכל סוג i יש k_i איברים.

סימון: $P(n;\ k_1,k_2,...,k_h)$.

$$P(n;\ k_1,k_2,...,k_h) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_h!}$$

* **צירופים עם חזרות של k מתוך n -**

ניסוח ראשון לבעיה:

בחירת k איברים, לא בהכרח שונים, מתוך n סוגים של איברים, בלי חשיבות לסדר הבחירה. כלומר, בחירת k איברים כאשר בוחרים k_1 איברים מהסוג הראשון, k_2 איברים מהסוג השני, ..., k_n איברים מהסוג ה-n-י, ($k_1+k_2+...+k_n=k$).

ניסוח שני לאותה הבעיה:

מספר הפתרונות במספרים טבעיים (כלומר, מספרים שלמים לא-שליליים) של המשוואה: $x_1+x_2+...+x_n=k$

ניסוח שלישי לאותה בעיה:

פיזור k איברים זהים לתוך n תאים שונים.

סימון: $D(n,k)$.

$$D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

נסכם פרק זה באמצעות טבלה כך:

מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים הוא:

	בלי חשיבות לסדר (צירוף)	**עם חשיבות לסדר** (חליפה)
בלי חזרות (איבר יכול לא להיבחר, או להיבחר פעם אחת).	מגבלה: $k \le n$ $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	מגבלה: $k \le n$ $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ $P(n,n) = n!$
עם חזרות (איבר יכול להיבחר עד k פעמים).	$D(n,k) = \binom{n-1+k}{k}$	n^k

פרק 3 - הבינום של ניוטון; המקדמים הבינומיים

להלן רשימת זהויות שימושיות שהוכחו בגוף היחידה בספר.
לנוחיותך, ציינו ליד כל זהות היכן הוכחה בספר.

1. נוסחת הבינום

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{(n-i)}$$

2. תכונת משולש פסקל

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

3. תכונת משולש פסקל

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

4. (שאלה 3.9 - רמז)

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

5. (שאלה 3.9)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{(n-1)}n$$

6. (שאלה 3.10)

$$\binom{n}{k}\binom{k}{h} = \binom{n}{h}\binom{n-h}{k-h}$$

7. (שאלה 3.12)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

8. (שאלה 3.13)

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

9. (שאלה 3.15)

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{k+i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

10. (שאלה 3.16א)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

11. (שאלה 3.16ב)

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{n}{k+i} = \binom{m+n}{m+k}$$

12. (שאלה 3.17)

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

13. (שאלה 3.18)

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{k} = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

14.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}$$

15. (שאלה 3.21)

$$\sum_{i=0}^{[n\backslash 2]} (2i+1) \binom{n}{2i+1} = \sum_{i=0}^{[n\backslash 2]} 2i \binom{n}{2i} = n2^{(n-2)}$$

16. (שאלה 3.24)

$$n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$$

17. (שאלה 3.25)

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$$

פרק 4 - עקרון ההכלה וההפרדה

סימונים:

U - הקבוצה האוניברסלית כלומר, הקבוצה הכללית אליה מתייחסים.

A' - המשלים של הקבוצה A ביחס לקבוצה U. כלומר, אוסף כל האיברים הנמצאים ב-U אך אינם נמצאים ב-A.

S_i - סכום מספרי האיברים בכל חיתוך של i קבוצות. לדוגמה,

$$S_3 = \sum_{1 \le i \le j \le k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

משפט ההכללה וההפרדה:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

צורה אחרת לרישום:

$$|A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n'| = |U| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

אי-סדר מלא

תמורה של n מספרים $1,2,...,n$ נקראת אי-סדר מלא אם אף מספר לא נמצא במקומו הטבעי. מספר התמורות שהן אי-סדר מלא הוא:

$$n!\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}\right)$$

משוואות ליניאריות עם פתרונות במספרים שלמים

* מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

שהם מספרים שלמים המקיימים:

$$x_1 \geq a_1,\ x_2 \geq a_2,\ \dots,\ x_n \geq a_n$$

הוא:

$$\binom{n-1+k-a_1-a_2-\dots-a_n}{n-1}$$

* את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

שהם מספרים שלמים המקיימים:

$$b_1 \geq x_1 \geq a_1,\ b_2 \geq x_2 \geq a_2,\ \dots,\ b_n \geq x_n \geq a_n$$

אפשר למצוא באמצעות שימוש בעקרון ההכלה וההפרדה, כך:

א. נמיר את הבעיה לבעיה שקולה:

מצא את מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = k - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

שהם מספרים שלמים המקיימים:

$$b_1-a_1 \geq y_1 \geq 0,\ \dots,\ b_n-a_n \geq y_n \geq 0$$

ב. נגדיר את n הקבוצות הבאות:

A_i - קבוצת הפתרונות בטבעיים של המשוואה שקיבלנו בסעיף א, המקיימים: $y_i > b_i - a_i$ $(1 \le i \le n)$.

ג. נציב בנוסחת ההכלה וההפרדה את הערכים המתאימים ונמצא את $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'|$.

הרחבת עקרון ההכלה וההפרדה

סימונים:

תהי U קבוצה אוניברסלית, שבה n איברים.

P_i $1 \le i \le t$ - t תכונות אשר כל אחד מ-n איברי הקבוצה U יכול לקיים או לא לקיים כל אחת מהן.

$W(P_i)$ - מספר איברי U, המקיימים את התכונה P_i (אין הגבלה לגבי קיום או אי-קיום של תכונות אחרות).

$W(P_i')$ - מספר איברי U, שאינם מקיימים את התכונה P_i (אין הגבלה לגבי קיום או אי-קיום של תכונות אחרות).

$W(P_iP_j)$ - מספר איברי U, המקיימים את שתי התכונות P_i ו-P_j (שוב, ללא הגבלה לגבי שאר התכונות).

וכך הלאה.

$W(r)$ - מספר האיברים שכל אחד מהם מקיים לפחות r תכונות כלשהן מתוך t התכונות. כלומר,

$$W(r) = \Sigma\, W(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_r})$$

כאשר הסכום הוא על כל התת-קבוצות של r תכונות מתוך t התכונות. מסמנים גם $n=W(0)$.

$E(m)$ - מספר איברי U, המקיימים כל אחד **בדיוק** m תכונות כלשהן מתוך t התכונות. לדוגמה, $E(0) = W(P_1'P_2'\ldots P_t')$, וכן $E(t) = W(P_1P_2\ldots P_t)$.

באמצעות סימונים אלה, נכליל את עקרון ההכלה וההפרדה:

$$\boxed{E(m) = \sum_{i=0}^{t-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} W(m+i)}$$

כמקרה פרטי, אם נציב בנוסחה המוכללת $m=0$, נקבל את הנוסחה המצומצמת שהיצגנו קודם.

פרק 5 - עקרון שובך היונים - הגדרה ושימושים

עקרון שובך היונים

בחלוקה של קבוצה סופית A ל-n מחלקות, קיימת לפחות מחלקה אחת אשר מספר איבריה גדול או שווה ל- $\frac{|A|}{n}$.

ניסוח אחר: אם $n+1$ יונים נכנסות לשובך המחולק ל-n תאים, הרי בתא אחד לפחות יש יותר מיונה אחת.

פרק 6 - רקורסיה

אפשר לפתור בעיות קומבינטוריות רבות באמצעות יחס רקורסיה. **יחס רקורסיה** הוא סדרה של פתרונות, חלקם נתונים כמספרים (התנאים התחיליים) והשאר נתונים כפונקציה של איברים קודמים בסדרה. מספר התנאים התחיליים ואופים תלוי בבעיה בה דנים.

לעתים קל אמנם לפתור בעיה באמצעות יחס רקורסיה, אך חישוב ערך המתאים למספר נתון מסוים יכול להיות ארוך ומייגע. לכן, מעוניינים לבטא את יחס הרקורסיה באמצעות נוסחה מפורשת כלומר, נוסחה שאינה רקורסיבית.

הגדרה:

יחס רקורסיה לינארי הוא יחס רקורסיה שתבניתו היא:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \dots + c_k f(n-k)$$

הגדרה:

משוואה אופיינית של יחס רקורסיה לינארי היא המשוואה:

$$\alpha^k - c_1\alpha^{k-1} - c_2\alpha^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

שיטה למציאת נוסחה מפורשת - $f(n)$ - עבור יחס רקורסיה לינארי:

1. פתור את המשוואה האופיינית.
2. אם כל פתרונות המשוואה: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ הם מספרים שונים, אזי:

$$f(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \dots + A_k\alpha_k^n$$

את הקבועים $A_1, A_2, \dots, A_k$ קובעים לפי התנאים התחיליים.

3. אם יש פתרון החוזר פעמיים ($\alpha_1=\alpha_j$), אזי, נציב בסכום שהוגדר ב-2 את המחובר $A_j n\alpha_j^n$ במקום המחובר $A_j\alpha_j^n$. (הערה: אם יש פיתרון α, החוזר m פעמים, נציב בסכום במקום הפעם ה-r שהוא מופיע $A_r\alpha^n n^{r-1}$.)

פרק 7 - פונקציות יוצרות

הגדרה

הפונקציה היוצרת של סדרה (סופית או אינסופית) של מספרים $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ היא הביטוי (הסופי או האינסופי, בהתאמה) הבא:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

עבור סדרה סופית, הפונקציה היוצרת היא פולינום במשתנה אחד x.
עבור סדרה אינסופית, נתייחס לביטוי בצורה פורמלית, בלי לנסות ולבדוק מהו המשתנה x (האם הוא מספר ממשי או מורכב) והאם הסכום האינסופי מתכנס או לאו. כלומר, נוכל לגזור את הביטוי, להכפילו באחר וכו'.

אפשר להשתמש בפונקציות יוצרות לפתרון בעיות קומבינטוריות רבות, המקבילות לבעיות של מציאת מספר צירופים בתנאים נתונים. בספר הודגמו כמה סוגים של בעיות כאלה וביניהם:

* מציאת מספר הפתרונות של משוואה לינארית:
כדי למצוא את מספר הפתרונות במספרים שלמים של המשוואה:

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = k$$

המקיימים את ההגבלות: $0 \le t_i \le b_i$ לכל $0 \le i \le n$, יש לחשב את המקדם של x^k בפולינום:

$$f(x) = (1+x+\ldots+x^{b_1})(1+x+\ldots+x^{b_2})\ldots(1+x+\ldots+x^{b_n})$$

מקרה פרטי: כדי למצוא את מספר הפתרונות במספרים טבעיים (שלמים חיוביים, כולל אפס) של אותה משוואה, ללא הגבלות נוספות על הנעלמים, יש לחשב את המקדם של x^k בפולינום:

$$f(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^k)^n$$

הערה: אחת הטכניקות למציאת המקדם של x^k בפונקציה $f(x)$, שהיא גזירה k פעמים, היא באמצעות טור טיילור: גוזרים את $f(x)$ k פעמים, מציבים $x=0$ בנגזרת ה-k-ית ומחלקים ב-$k!$. כלומר, אם נסמן ב-a_k את המקדם של x^k, וב-$f^{(k)}(0)$ את הנגזרת ה-k-ית של $f(x)$ בנקודה $x=0$, נקבל את השוויון הבא:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

* בכמה אפשרויות ניתן לרשום את המספר n כסכום של מספרים טבעיים גדולים מאפס ושונים זה מזה.
לפתרון בעיה זו, נמצא את המקדם של x^n בפולינום הבא:

$$(x^0+x^1)(x^0+x^2)\dots(x^0+x^n)$$

* **שימוש בפונקציות יוצרות לחישובים במקדמים בינומיים:**
חישוב של סכום במקדמים בינומיים - הרעיון: מציאת פונקציה יוצרת, שהמקדם של x^k בה הוא הסכום המבוקש. נוסחה שימושית היא הנוסחה לחישוב סכום של n איברים ראשונים של טור הנדסי, שהאיבר הראשון בו הוא a_1:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

מכאן נובע גם, שסכום של טור הנדסי אינסופי (קיים סכום כזה רק אם $q<1$) הוא:

$$\frac{a_1}{1-q}$$

פונקציות יוצרות מעריכיות

הפונקציה היוצרת המעריכית המתאימה לסדרה $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ היא:

$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

בפונקציה יוצרת מעריכית משתמשים לפתרון בעיות בחירה כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה. (כלומר, בעיות המקבילות לבעיות של מציאת מספר חליפות, עם או בלי חזרות, בתנאים נתונים.) נחפש פונקציה יוצרת מעריכית שבה פתרון הבעיה הנדונה עבור k מסוים הוא המקדם של $\frac{x^k}{k!}$.

להלן כמה דוגמאות:

* מספר החליפות, ללא חזרות, של k איברים מתוך n איברים, שווה למקדם של $\frac{x^k}{k!}$ בפונקציה היוצרת המעריכית $(1+x)^n$.

* מספר החליפות, עם חזרות, של k איברים מתוך n קבוצות איברים, שווה למקדם של $\frac{x^k}{k!}$ בפונקציה היוצרת המעריכית:

$$h(x) = \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]^n = e^{xn} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

שימוש בפונקציות יוצרות לפתרון יחסי רקורסיה

לעתים אפשר להשתמש בפונקציות יוצרות, כדי למצוא ביטוי מפורש עבור פונקציה המוגדרת באמצעות יחס רקורסיה.

הרעיון: בנית פונקציה יוצרת לאיברי יחס הרקורסיה, כינוסה באמצעות פעולות מתמטיות לפונקציה שעבורה יודעים למצוא את המקדם של x^k, לכל k. המקדם הזה הוא האיבר ה-k-י בסדרה כלומר, פתרון יחס הרקורסיה.