משפטים בתורת הגרפים:

E - קשתות ; V - צמתים ; **שכנים** מחוברים בקשת. קשת שיוצאת מצומת **סמוכה** אליה. **לולאה** מחברת צומת לעצמה. **קשתות מקבילות** מחברות אותו זוג צמתים. **גרף פשוט** לא מכיל לולאות ומקבילות. **דרגת צומת** – מספר הקשתות היוצאות. בגרף **מכוון** יש משמעות לכיוון הקשת (הגדרה 1.2).

טענה 1.3 : סך הדרגות שווה לפעמיים מספר הקשתות : $\mathbf{\Sigma_{deg(\mathit{v})} = 2\mathit{m}}$

שאלה 1 (עמ׳ 10) בכל גרף מספר הצמתים שדרגתם א״ז הוא תמיד זוגי.

עמ׳ 10 : **מסלול**, צומתי קצה, צמתים פנימיים. **אורך** המסלול : מספר הקשתות. מסלול סגור = **מעגל** = צומתי הקצה זהים. במסלול **פשוט** כל הצמתים שונים. **מעגל פשוט** – מסלול פשוט מעגלי. **מרחק** – אורך המסלול הקצר ביותר. בגרף **קשיר** יש מסלול בין כל 2 צמתים. **רכיב קשירות** – תת קבוצה מקסימלית קשירה.

שאלה 2 (עמ׳ 11) : היחס ״יש מסלול בין״ הוא **יחס שקילות**.

הגדרה 1.4 (עמ׳ 12) : **תת גרף** חלקי לגרף. תת גרף **פורש** הוא תת גרף ששונה מהמקור רק בקשתות. תת גרף **מושרה** – מכיל את כל הקשתות של הגרף המקורי המחברות בין הצמתים של תת הגרף. **גרף מלא** = קליק – גרף פשוט שכל זוג מצמתיו מחוברים. **הגרף המשלים** – כולל את כל הקשתות החסרות במקור – המשלים של גרף לא קשיר – קשיר (שאלה 4).

סימונים נוספים בשימושם הרגיל : \ (למעט) וU (וגם)

שאלה 3 : בגרף פשוט שדרגת כל צומת K קיים מסלול פשוט עם K+ 1 צמתים.

אם K גדול שווה 2 קיים גם מעגל פשוט באורך זה לפחות.

1.3 גרפים דו״צ:

הגדרה 1.5 (עמ׳ 13) : גרף **דו״צ** : ניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות כך שכל קשת עם קצה אחד בכל קבוצה. **דו״צ מלא** – כולל את כל הקשתות הנ״ל.

משפט 1.6 (עמ׳ 14) : גרף בעל 2 צמתים לפחות הוא **דו״צ אס״ם אין בו מעגל באורך א״ז.**

שאלה 5 (עמ׳ 16) : לגרף קשיר יש **חלוקה דו״צ יחידה**.

פרק 2 עצים (עמ׳ 17)

יער – גרף בלי מעגל. יער קשיר – **עץ**. **עלה** – צומת בעץ שדרגתו 1.

טענה 2.3 : בכל עץ בעל לפחות 2 צמתים יש **לפחות עלה אחד**. (ראה שאלה 3)

טענה 2.4 : אם נוסיף לעץ צומת חדשה ונחבר לצומת קיימת – זה **יישאר עץ**. גם אם נוריד עלה מהעץ הוא יישאר עץ.

שאלה 2 : האיחוד של שני מסלולים שונים המחברים שני צמתים בגרף **מכיל מעגל**.

משפט 2.5 : שקילות : G עץ = בין כל שניים מצמתיו יש מסלול יחיד = הוא גרף קשיר מינימלי = הוא קשיר ו- $|E| = |V| - 1$ = הוא אינו מכיל מעגלים ו - $|E| = |V| - 1$ = הוא לא מכיל מעגלים אך כל קשת שנוסיף בין 2 צמתים תיצור מעגל.

שאלה 3 (עמ׳ 20) : בכל עץ בעל לפחות 2 צמתים יש **לפחות 2 עלים**.

טענה 2.6 : כל גרף קשיר מכיל תת-גרף פורש שהוא עץ.

הגדרה 2.7 : (עמ׳ 23) שני גרפים **איזומורפיים** אם קיימת העתקה חח״ע ועל כך ששני צמתים בגרף אחד מחוברים רק אם מחוברים גם בשני.

הגדרה 2.8 : **בגרף מתויג** נדרוש גם זהות בתגים לשם איזומורפיות.

משפט **קיילי** 2.9 (עמ׳ 25) : לכל $n \geq 2$ **מספר העצים המתויגים השונים** על קבוצה מתויגת V של n צמתים הוא n^{n-2}

סדרת פרופר (עמ׳ 26): נוריד כל פעם את העלה הקטן ביותר, ונוסיף לסדרה את השכן שלו.

האורך של סדרת פרופר : 2 פחות מסך הצמתים.

שאלה 6 (עמ׳ 32) : כל צומת **מופיע בסדרת פרופר** מספר פעמים השווה לדרגתו פחות 1.

פרק 3 מעגלי אוילר והמילטון (עמ׳ 35)

מסלול (מעגל) אוילר – מסלול (מעגל) שבו כל קשת של הגרף מופיעה בדיוק פעם אחת. **מסלול (מעגל) המילטון** : מסלול (מעגל) שבו כל צומת של הגרף מופיע בדיוק פעם אחת.

גרף נקרא אוילרי/המילטוני אם קיים בו מעגל אוילר/המילטון.

משפט 3.1 : גרף קשיר הוא אוילרי **אס״ם דרגת כל צומת בו זוגית** (עמ׳ 35).

גרף קשיר **שדרגת שניים בלבד מצמתיו א״ז מכיל מסלול אוילר** (עמ׳ 37) ולהיפך – גרף שמכיל מסלול אוילר שאינו מעגל – דרגת שניים בלבד מצמתיו א״ז.

שאלה 2 : גרף קשיר שדרגת כל צומת בו 2 – מעגל.

שאלה 5 (עמ׳ 38) : **גרף d רגולרי** – דרגת כל צומת בו היא d. בהכרח גרף כזה או המשלים שלו - **לפחות אחד מהם אוילרי**.

משפט 3.2 **(אור)** (עמ׳ 40) : גרף פשוט על יותר מ-3 צמתים, כך שכל זוג צמתים שאינם סמוכים – **סכום דרגותיהם גדול או שווה לסך צמתיו – המילטוני**.

מקרה פרטי - **משפט דירק** (עמ׳ 42) : גרף פשוט על $n \geq 3$ צמתים – אם **דרגת כל צומת היא לפחות** $\frac{n}{2}$, אז הוא **המילטוני.**

שאלה 6 גרף פשוט על $n \geq 3$ צמתים, כך ש**n א״ז**.– אם **דרגת כל צומת היא לפחות** $\mathbf{\frac{n}{2} - 1}$, אז הוא **המילטוני.**

שאלה 7 : הגרף הדו״צ המלא $K_{p,q}$ כלומר – בצד אחד p צמתים ובשני q, מכיל מעגל המילטוני אס״ם $p, q \geq 2$ ו- $p = q$.

פרק 4 זיווגים, כיסויים, קליקים וקבוצות בלתי תלויות (עמ׳ 44)

הגדרה 4.1 : **זיווג** : קבוצת קשתות M **שאין בה שתי קשתות הסמוכות לאותו צומת**, כלומר – דרגת כל צומת בתת-גרף עם קשתות אלו בלבד אינה גדולה מ-1.

הגדרה 4.2 : צומת **מכוסה** ע״י קבוצת קשתות אם יש קשת מהקבוצה שסמוכה אליו. צומת **מזווג** – צומת שמכוסה ע״י זיווג.

הגדרה 4.3 : **זיווג מקסימום** – $|M| \geq |M'|$. **זיווג מושלם** מזווג את כל הצמתים בגרף : $|M| = \frac{|V|}{2}$. זיווג מושלם הוא זיווג מקסימום, אבל ההיפך לא בהכרח נכון.

שאלה 1 : זיווג מושלם קיים **במעגל פשוט אס״ם סך n (הצמתים) זוגי**. במצב כזה יש 2 זיווגים מושלמים שונים. קיימים מעגלים לא פשוטים בהם אין זיווג מושלם (ממן 16)

הגדרה 4.4 : P הוא **מסלול** M **מתחלף** – אם אחת מכל שתי קשתות סמוכות שלו היא מM. אם שני צומתי הקצה במסלול אינם מזווגים, ייקרא P **מסלול שיפור ביחס** לM

טענה 4.5 – משפט 4.6 (ברג׳) (עמ׳ 46) : M הוא זיווג מקסימום אס״ם אין מסלול שיפור ביחס לM.

משפט 4.7 (הול) (עמ׳ 48) **בגרף דו״צ יש זיווג המזווג את כל צומתי צד אחד, אס״ם** לכל תת קבוצה של צומתי אותו הצד מתקיים – **עצמת קבוצת שכניה אינו קטן מעצמתה.**

מסקנה 4.8 : בגרף דו״צ יש זיווג מושלם אס״ם סך האיברים בשני צידיו זהה, ולכל תת קבוצה של צומתי צד אחד מתקיים – **עצמת קבוצת שכניה אינו קטן מעצמתה.**

שאלה 2 עמ׳ 51 : בכל גרף רגולרי שהוא גם פשוט ודו״צ – אם $d \geq 1$- יש זיווג מושלם.

פרק 5 גרפים מישוריים (עמ׳ 57)

הגדרה 5.1 : גרף נקרא מישורי אם ניתן לציירו במישור כך שלא יצטלבו שתי קשתות.

טענה 5.2 K_5 (גרף מלא על 5 צמתים) אינו מישורי.

שאלה 1 : הגרף המתקבל מ K_5 ע״י השמטת קשת כלשהי – מישורי.

פאות (עמ׳ 59) – חלקי המישור שגרף מפריד ע״פ שיכון מישורי שלו. ייתכנו שיכונים שונים. אך מספר הפאות אינו תלוי בשיכון :

משפט 5.3 (אוילר) : בגרף מישורי קשיר (לאו דווקא פשוט) בעל n צמתים ו m קשתות, מספר הפאות הוא : $\boldsymbol{m = n + f - 2}$(בהרבה הוכחות השימוש בנוסחה חוזר פעמיים)

מסקנה 5.4 : בגרף מישורי פשוט בעל לפחות 3 צמתים : $\mathbf{m \leq 3n - 6}$.

מסקנה 5.5 : בכל גרף מישורי פשוט **יש צומת שדרגתו קטנה או שווה ל-5**.

שאלה 3 (עמ׳ 61) : בגרף מישורי דו״צ פשוט וקשיר בעל n צמתים יש לכל היותר $2n - 4$ קשתות. מכאן ש $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הגדרה 5.6 : **עידון של קשת** הוא הוספת צומת באמצעה. גרף אחד מעדן גרף אחר, אם ניתן לקבלו מהאחר על ידי סדרת עידונים (כל גרף הוא עידון של עצמו).

טענה 5.7 : **גרף הוא מישורי אס״ם** כל העדנה שלו היא גרף מישורי.

משפט 5.8 – קורטובסקי (עמ׳ 63) : גרף הוא מישורי אס״ם הוא לא מכיל כתת-גרף העדנה של K_5 או $K_{3,3}$.

פרק 6 צביעת גרפים (עמ׳ 64)

הגדרה 6.1 : **צביעה** היא פונקציה מצומתי הגרף לקבוצה שאיבריה נקראים צבעים. בצביעה **נאותה** צמתים סמוכים צבועים שונה. **מספר הצביעה** – מספר הצבעים המינימלי : $\chi(\mathrm{G})$ (עמ׳ 65). G הוא k צביע אם $\chi(\mathrm{G}) \leq \mathrm{k}$.

$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{K_n}) = \mathbf{n}$; $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{2}$ אס״ם G הוא גרף דו״צ המכיל לפחות קשת אחת.

אם G מעגל, $\chi(\mathrm{G}) = 2$ אם $|V(G)|$ זוגי, ואילו $\chi(\mathrm{G}) = 3$ אם $|V(G)|$ אי-זוגי (עמ׳ 65).

משפט 6.2 $\boldsymbol{\chi(G) \leq \Delta(G)}$, כאשר ΔG - הדרגה המקסי׳ של צומת בגרף, פרט לשני המקרים הבאים בהם $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$: 1. לG יש רכיב קשירות המשרה גרף מלא על $\Delta(G) + 1$ צמתים. 2. $\Delta(G) = 2$ ויש לG רכיב קשירות המשרה מעגל באורך א״ז.

שאלה 2 : גרף **d מנוון** (כלומר בכל תת גרף שלו יש צומת מדרגה d לכל היותר) הוא **d+1 צביע** (עמ׳ 66).

משפט 6.3 : כל גרף **מישורי** הוא **4-צביע** (עמ׳ 67).