מתמטיקה בדידה

מפגש 7

פעולות על עוצמות

קומבינטוריקה

חיבור

הגדרה

עבור עוצמות k ו m נגדיר את העוצמה $k+m$ כך:

נבחר קבוצות A ו B כך ש:

$|A|=k$

$|B|=m$

$A\cap B=\emptyset$

ונחשב את העוצמה של הקבוצה $A\cup B$.

נגדיר את $k+m=|A\cup B|$.

הערה: חייבים להוכיח אי-תלות בקבוצות הנציגים.

כלומר צריך להוכיח שאם נתון

$|A|=|C|$

$|B|=|D|$

$A\cap B=C\cap D=\emptyset$

אז $|A\cup B|=|C\cup D|$

__דוגמא:__ נחשב את $\aleph_0 + 1$

ניקח את $A = \{1, 2, 3, \dots\}$
$= \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$B = \{0\}$

$A \cap B = \emptyset$

$|A| = \aleph_0$

$|B| = 1$

$A \cup B = \mathbb{N}$

$|A \cup B| = \aleph_0$

מסקנה: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

תרגילים: חשבו את

① $\aleph_0 + \aleph_0$

② $\aleph_0 + \aleph$

③ $\aleph + \aleph$

תזכורת:

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = |\{0 \le x \le 1\}| = \aleph$

פתרון:

① תרגיל $\aleph_0 + \aleph_0$:

$A = \mathbb{N}$

$B = \{-1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

$A \cap B = \emptyset$

$|A| = \aleph_0$

$|B| = \aleph_0$

$A \cup B = \mathbb{Z}$ $\qquad$ $|A \cup B| = \aleph_0$

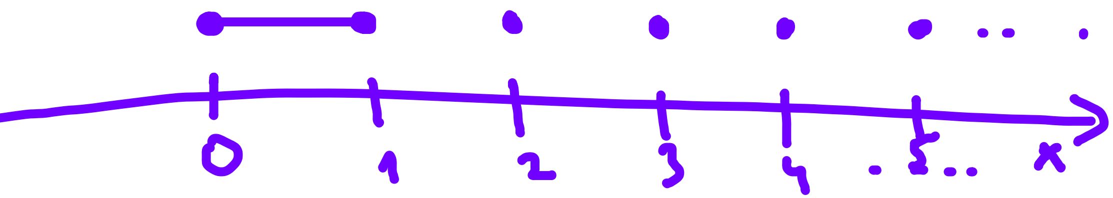
<u>מסקנה</u> : $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

2 נבחר

$A = \mathbb{N}$

$B = \{0 < x < 1\}$

$A \cap B = \emptyset$



$A \cup B \subseteq \mathbb{R}$

לכן $|A \cup B| \leq \aleph$

$B \subseteq A \cup B$

לכן $\aleph \leq |A \cup B|$

$\Leftarrow$ לפי משפט ק-ש-ב

$|A \cup B| = \aleph$

$\aleph_0 + \aleph = \aleph$ צ"ל.

③ נבחר קבוצות:

$A = \{0 < x \le 1\}$

$B = \{1 < x < 2\}$

$A \cap B = \emptyset$

$|A| = \aleph \qquad |B| = \aleph$

$A \cup B = \{0 < x < 2\}$

$\Rightarrow |A \cup B| = \aleph$

קיבלנו $\aleph + \aleph = \aleph$.

<u>טענה:</u> לכל עוצמה אינסופית k מתקיים $\aleph_0 + k = k$

עכשיו נגדיר עוד פעולות :

כפל בהינתן עוצמות k,m נבחר קבוצות A , B

כך ש- $|A|=k$ $|B|=m$.

נחשב את העוצמה של $A\times B$ ונגדיר :

$$k\cdot m = |A\times B|$$

הערה: שימו לב שהגדרה זו מתאימה גם לקבוצות סופיות.

הערה חשובה: צריך להוכיח שאין תלות בנציגים.

צ"ל אם יש קבוצות C D כך ש- $|C|=|A|$ ו $|D|=|B|$

אז $|C\times D|=|A\times B|$.

דוגמא: נחשב את $\aleph_0\cdot\aleph_0$

נבחר $A=\mathbb{N}$

$B=\mathbb{N}$

הערה: שימו לב שבהגדרת כפל אין דרישה של קבוצות זרות.

מהי $A\times B$?

$$|A\times B| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$$

מסקנה: $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

תכונות: (עבור k_1,k_2,k_3 עוצמות)

$k_1+k_2=k_2+k_1$, $k_1\cdot k_2=k_2\cdot k_1$ — חוק חילוף

$(k_1+k_2)+k_3=k_1+(k_2+k_3)$, $k_1(k_2k_3)=(k_1k_2)k_3$ — חוק קיבוץ

$k_1(k_2+k_3)=k_1k_2+k_1k_3$ — חוק פילוג

תרגיל: חשבו את $2\cdot\aleph_0$ בשתי דרכים.

(1- ישירות, לפי הגדרה.
2- לפי חוקי עוצמות)

פתרון:

1) $A=\{1,2\}$

$B=\mathbb{N}$

$$A\times B=\{(a,n)\ /\ a\in\{1,2\},\ n\in\mathbb{N}\}$$
$$=\{(1,n)/n\in\mathbb{N}\}\cup\{(2,m)/\ m\in\mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow |A\times B|=\aleph_0$$

2) $2\cdot\aleph_0=(1+1)\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

תרגיל:

נניח $A \supseteq B$

$C \supseteq D$

$|A| = |C|$

$|B| = |D|$

האם בהכרח $|A \setminus B| = |C \setminus D|$?

(אם כן - להוכיח
אם לא - למצוא דוגמה נגדית)

תשובה - **לא**.

דוגמה נגדית

$A = \mathbb{Z}$ $\quad C = \mathbb{N}$

$B = \mathbb{N}$ $\quad D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$|A \setminus B| = \aleph_0$ $\quad |C \setminus D| = 1$

אין פעולת חיסור
בין עוצמות

<u>הגדרה:</u> בהינתן קבוצות A ו- B נגדיר את הקב' A^B כך:

$$A^B = \{ f: B \to A \ / \ f \text{ פונקציה} \}$$

במילים: A^B היא קבוצת כל הפו' מ- B ל- A.

<u>דוגמא:</u> מהי $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

<u>תשובה:</u> כל הסדרות האינסופיות של מס' ממשיים.

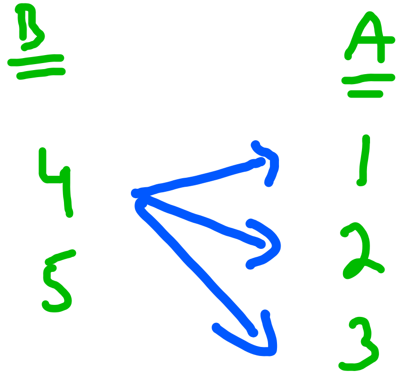
$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

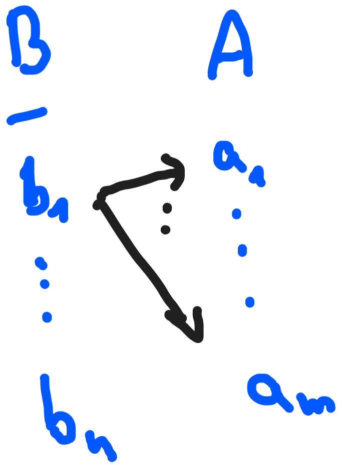
<u>שאלה:</u> אם A ו- B קבוצות <u>סופיות</u>, $|A|=m$, $|B|=n$, כמה איברים יש ב- $|A^B|$?

<u>דוגמא:</u> ניקח $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5\}$

אז A^B היא קבוצת כל הפו' מ- B ל- A

כמה פו' כאלה יש?





$$|A^B| = 3\cdot 3 = 9$$

$$|A^B| = \underbrace{m\cdot m\cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ פעמים}}$$

$$= m^n = |A|^{|B|}$$

$$|A^B| = |A|^{|B|}$$ קיבלנו -

$f: B \longrightarrow A$

B	A
4	1
5	2
	3

$f_1 = \{(4,1), (5,1)\}$

$f_2 = \{(4,1), (5,2)\}$

$f_3 = \{(4,1), (5,3)\}$

$f_4 = \{(4,2), (5,1)\}$

$f_5 = \{$ " $(5,2)\}$

$f_6 = \{$ " $(5,3)\}$

$f_7 = \{(4,3), (5,1)\}$

$f_8 = \{$ " $(5,2)\}$

$f_9 = \{$ " $(5,3)\}$

חזקה :

<u>הגדרה</u>. בהינתן עוצמות k, m נבחר קבוצות A ו־ B

כך ש: $|A|=k$ ו־ $|B|=m$.

נחשב את העוצמה של A^B,

ונגדיר -

$$k^m = |A^B|$$

<u>הערה:</u> חייבים <u>להוכיח</u> שההגדרה <u>לא</u> <u>תלויה</u> בנציגים.

כי אם $|A|=|C|$

$|B|=|D|$

אז $|A^B| = |C^D|$.

(ההוכחה כתובה בספר.)

משפט - עבור כל קבוצה מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$

רעיון ההוכחה: נגדיר התאמה חח"ע ועל בין $P(A)$ ל-$\{0,1\}^A$.

כל איבר של $P(A)$, X $(X \subseteq A)$
מותאם ל- φ_X: הפו' האופיינית של X.

תזכורת (פונקציה אופיינית)

$$\varphi_X : A \to \{0,1\}$$

$$\varphi_X(a) = \begin{cases} 0 & : a \notin X \\ 1 & : a \in X \end{cases}$$

מכיוון שזו התאמה חח"ע ועל נקבל כי

$$|P(A)| = |\{0,1\}^A|$$

$$= |\{0,1\}|^{|A|} = 2^{|A|}$$

לפי ההגדרה

מ.ש.ל.

תזכורת פונקציה אופיינית.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$X_2 = \{2, 3, 4\}$$

$\varphi_{X_1} : A \longrightarrow \{0, 1\}$

$\varphi_{X_1}(1) = 1$

$\varphi_{X_1}(2) = 1$

$\varphi_{X_1}(3) = 1$

$\varphi_{X_1}(4) = 0$

$\varphi_{X_1}(5) = 0$

$\varphi_{X_2} : A \to \{0, 1\}$

$\varphi_{X_2}(1) = 0$

$\varphi_{X_2}(2) = 1$

$\varphi_{X_2}(3) = 1$

$\varphi_{X_2}(4) = 1$

$\varphi_{X_2}(5) = 0$

הערכה: לכל קב' A מתקיים $|A| < |P(A)|$

מסקנה: לכל עוצמה k מתקיים $k < 2^k$

$$\overset{\shortparallel}{|A|} \quad \overset{\shortparallel}{|P(A)|}$$

משפט: $|P(\mathbb{N})| = \aleph$

תרגיל קטן: הסיקו כמה שווה $2^{\aleph_0}$.

תשובה: $2^{\aleph_0} = \aleph$

תכונות חזקה: (עבור $k_1 k_2 k_3$ עוצמות)

$$(k_1 k_2)^{k_3} = k_1^{k_3} k_2^{k_3}$$

$$k_1^{k_2} k_1^{k_3} = k_1^{k_2+k_3}$$

$$k_1^{k_2 k_3} = (k_1^{k_2})^{k_3}$$

תרגיל: תשבו את $\aleph^{\aleph_0}$

תשובה:

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

אינסופיות

תרגיל:

נתון כי A,B,C הן קבוצות בנות מניה, החלקיות ל $\mathbb{R}$.

נסמן $D = A^c \cap B^c \cap C^c$

מהי עוצמת D ?

א) 0

ב) מספר טבעי שאינו אפס.

ג) $\aleph_0$

ד) $\aleph$

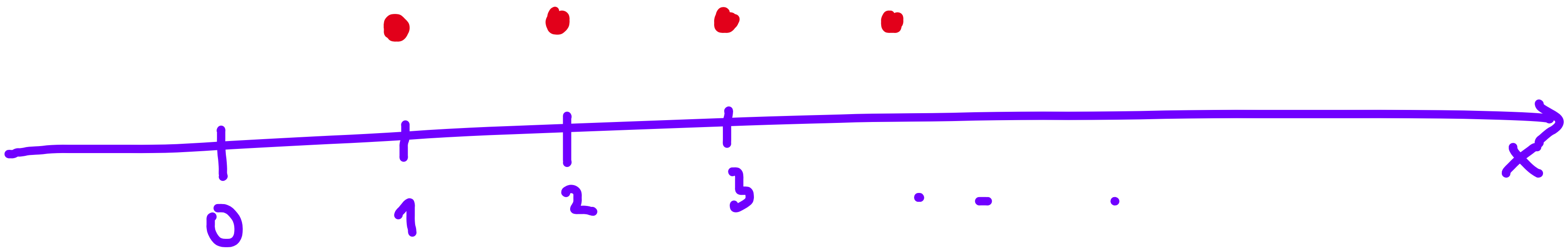
ה) התשובה תלויה בבחירות הקב' A,B,C

תשובה:

$$D = A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c \Rightarrow |D| = \aleph$$

$A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad C = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ $\quad$ קבוצות של [illegible]

$B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$



$|A^c| = \aleph$

$|B^c| = \aleph$

$|C^c| = \aleph$

$\{x<2\} \subseteq A^c \cap B^c \cap C^c$

[illegible]

$\aleph$.

תרגיל:

א) מהי עוצמת הרלציות מעל $\mathbb{N}$?

ב) מהי עוצמת הרלציות הסימטריות מעל $\mathbb{N}$?

פתרון:

א) כל רלציה מעל $\mathbb{N}$ היא בעצם תת-קבוצה של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

אז קבוצת הרלציות מעל $\mathbb{N}$ היא בדיוק הקבוצה $P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

ולכן עוצמתה $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$

$$2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

סלבדור ומומלץ יפתור את ט ממ"ן 13

ונעבור לחלק הבא של הקורס.

קומבינטוריקה

עיקרון החיבור:

אם אפשר לבחור עצם מסוג 1 ב k_1 דרכים

ועצם מסוג 2 ב k_2 דרכים

⋮

ועצם מסוג n ב k_n דרכים

ורוצים לבחור עצם אחד בדיוק, בסה"כ.

אזי יש $k_1+k_2+\dots+k_n$ דרכים לבחור אותו.

דוגמא: בבית ספר מסוים יש 8 כיתות י"ב.

בכיתה י"ב 1 יש m_1 תלמידים.

בכיתה י"ב 2 יש m_2 תלמידים.

⋮

בכיתה י"ב 8 יש m_8 תלמידים.

ורוצים לבחור נציג אחד של השכבה לנאום במסיבת הסיום.

כמה אפשרויות יש?

תשובה: $m_1+m_2+\dots+m_8$.

עיקרון הכפל:

הניסוח הכללי: אם אפשר לבחור עצם מסוג 1 ב k_1 דרכים

ועצם מסוג 2 ב k_2 דרכים

$\vdots$

ועצם מסוג n ב k_n דרכים

ורוצים לבחור n עצמים, אחד מכל סוג

וכל בחירה לא תלויה בבחירות הקודמות,

אזי יש $k_1 k_2 \cdots k_n$ דרכים לבחור.

דוגמא: בבית הספר הנ"ל רוצים לבחור ועד טדן

יש נציג אחד מכל כיתה.

בכמה דרכים אפשר לבחור ועד כזה?

$m_1 m_2 \cdots m_8$

<u>תרגיל:</u> נתונות ספרות 1 - 5.

כמה מספרים שונים אפשר לייצור ע"י שימוש בכל הספרות בדיוק פעם אחת?

א) ללא הגבלות נוספות

ב) המספרים מתחלקים ב 2.

ג) המספרים זוגיים וגדולים מ 30,000.

תרגיל: נתונות ספרות 1 - 5.

כמה מספרים שונים אפשר לייצור ע"י שימוש בכל הספרות בדיוק פעם אחת?

א) ללא הגבלות נוספות

ב) המספרים מתחלקים ב 2.

ג) המספרים זוגיים וגדולים מ 30,000.

תשובה:

א) $5! = 120$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ב)

$$\underline{\;4\;}\;\underline{\;3\;}\;\underline{\;2\;}\;\underline{\;1\;}\;\underline{\;2\;} \qquad 4!$$

$$+$$

$$\underline{\;4\;}\;\underline{\;3\;}\;\underline{\;2\;}\;\underline{\;1\;}\;\underline{\;4\;} \qquad 4!$$

$$48$$

3/4/5 | | | | 2

3 3 2 1

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

$+$

3/5 | | | | 4

2 3 2 1

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

30

23/ מג'

הערה: ספרוני טון בעצם את כל התמורות של הספרות 1-5.

נעבור למקרה כללי.

אם יש n איברים שונים, אז מספר התמורות הוא:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot 1$$

$$P(n) = n!$$

$P(n) =$ מספר התמורות של n איברים.

נוסחאות

מספר התמורות של $P(n) = n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot 1 = n!$
n איברים שונים.

יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

תרגיל: כמה "מילים" באורך 4 ניתן ליצור מאותיות א׳-ו׳, כאשר לא משתמשים באות יותר מפעם אחת.

א) ללא הגבלות נוספות.

ב) המילים מתחילות באות א׳.

ג) המילים לא מתחילות באות א׳.

ד) אותיות א׳ וב׳ צמודות זל"ז (אם הן מופיעות).

ה) אחרי אות אה"ו לא תבוא עוד אות אהו.

תרגיל: כמה "מילים" באורך 4 ניתן ליצור מאותיות
א׳-ו׳, כאשר לא משתמשים באות יותר מפעם
אחת.

א) ללא הגבלות נוספות.
ב) המילים מתחילות באות א׳.
ג) המילים לא מתחילות באות א׳.
ד) אותיות א׳ ו-ב׳ צמודות זל"ז (אם הן מופיעות).
ה) אחרי אות אה"ו לא תבוא עוד אות אהו.

תשובות:

א) $\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$
$3\cdot4\cdot5\cdot6$
$$6\cdot5\cdot4\cdot3=360$$

ב) $\underline{\text{א}}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$
$3\ \ 4\ \ 5$
$$5\cdot4\cdot3=60$$

ג) $360-60=300$.

תרגיל: כמה "מילים" באורך 4 ניתן לייצר מאותיות א'-ו', כאשר לא משתמשים באות יותר מפעם אחת.

ד) אותיות א' ו-ב' צמודות זל"ז (אם הן מופיעות).

ה) אחרי אות אה"ו לא תבוא עוד אות אהו.

ד) $\underbrace{\text{א-ב}}$, ג , ד , ה , ו

"מילים" ללא א' ו-ב' יש $4!$

מילים עם א' ו-ב' $5!$ $\quad 2 \cdot \underbrace{\ \ }_{3} \cdot \underbrace{\ \ }_{4} \cdot \underbrace{\text{אב}}_{5}$

סך הכל יש 144 אפשרויות.

תרגיל: כמה "מילים" באורך 4 ניתן ליצור מאותיות א׳-ו׳, כאשר לא משתמשים באות יותר מפעם אחת.

ד) אותיות א׳ ו-ב׳ נמצאות צמודות (אם הן מופיעות).

ה) אחרי אות אה"ו לא תבוא עוד אות אה"ו.

ה)

בגד | אהו | בגד | אהו

$2\cdot2\cdot3\cdot3$ 36

+

אהו | בגד | בגד | אהו

$2\cdot2\cdot3\cdot3$ 36

+

בגד | בגד | בגד | אהו

$1\cdot2\cdot3\cdot3$ 18

+

אהו | בגד | אהו | בגד

$2\cdot2\cdot3\cdot3$ 36

+

בגד | בגד | אהו | בגד

$1\cdot2\cdot3\cdot3$ 18

+

בגד | אהו | בגד | בגד

$1\cdot3\cdot2\cdot3$ 18

+

אהו | בגד | בגד | בגד

$3\cdot1\cdot2\cdot3$ 18

$$5\cdot36 = 180$$

ענ׳19

ספרנו תמורות (תמורה = סידור של איברים שונים)

במקרה כללי: תמורה של k איברים מתוך n

נסמן ב- $P(n,k)$

ונחשב:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) =$$

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(6,4) = 6\cdot5\cdot4\cdot3$$

$$= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

נוסחאות

מספר התמורות של n איברים שונים.

$$P(n) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

מספר החליפות של k איברים שונים מתוך n איברים שונים.

$$P(n,k) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

תרגיל: בוחרים 3 מספרים טבעיים שונים בין 1 ל 9.

א) מה מספר האפשרויות אם סדר הבחירה חשוב?

ב) מה מספר האפשרויות אם סדר הבחירה לא חשוב?

תשובות:

א) זהו בדיוק מספר תליפות של 3 מספרים מתוך 9 מספרים

[illegible]

$$P(9,3) = \frac{9!}{6!} = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$$

ב)

4 3 2
3 4 2
4 2 3
2 4 3
2 3 4
3 2 4

כל 6 תליפות שבחרנו - נותנות את אותה קבוצה של 3 איברים ולכן בסה"כ יש $\frac{504}{6} = 84$.

ט"ז בכ"ג

ב ⓒ סמננו צירופים = בחירה של איברים כאשר אין חשיבות לסדר.

נסמן ב- $C(n,k)$ את מספר הצירופים של k איברים שונים מתוך n איברים שונים.

יש $P(n,k)$ תליפות של k איברים. כאשר יש תליפות שמורכבות מאותם איברים בסדר אחר. כמה כאלה יש?

k איברים שונים אפשר לסדר ב $P(k)$ תמורות שונות.

קיבלנו:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

הערה: את $C(n,k)$ מסמנים גם ע"י $\binom{n}{k}$

נוסחאות

מספר התמורות של n איברים שונים.
יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

$$P(n) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

מספר החליפות של k איברים שונים מתוך n איברים שונים.
יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

$$P(n,k) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר צירופים של k איברים שונים מתוך n איברים שונים.
אין חשיבות לסדר
אין חזרות

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

נעבור לתמורות, חליפות וצירופים - עם חזרות

תרגיל:

א) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad B = \{a,b,c\}$

כמה פונקציות אפשר להגדיר מ-A ל-B ?

$$|B^A| = |B|^{|A|} = 3^6$$

ב) כמה "מילים" באורך 6 אפשר לבנות מהאותיות a, b, c ?

(אין מניעה שאות תופיע יותר מפעם אחת)

A	B
1	a
2	b
3	c
4	
5	
6	

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$$

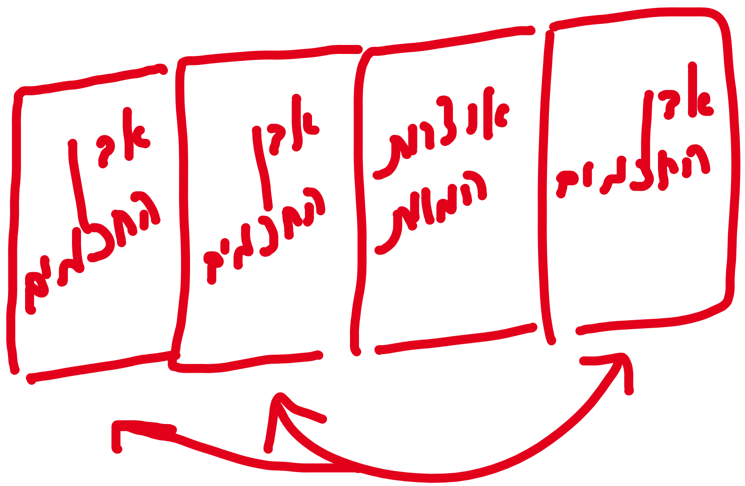
1 2 3 4 5 6

תשובה: 3^6

חישבנו עכשיו מספר חליפות עם חזרות.
מכיוון שאין הגבלה על מספר הפעמים שאיבר יופיע, לפי עקרון הכפל נקבל:

מספר חליפות עם <u>חזרות</u> של k איברים מתוך n איברים <u>שונים</u> $= \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{פעמים } k} = n^k$

תרגיל: התרגיל עוסק בסידור של ספרים על מדף בספריה.
יש בספריה את כל 7 ספרי הארי פוטר.
3 כאשר מהספר הראשון ("אבן החכמים") יש שלושה עותקים.
2 מהספר השלישי ("האסיר מאזקבאן") יש שני עותקים.
4 מהספר השביעי ("אוצרות המוות") יש 4 עותקים.
1 משאר הכרכים יש בדיוק עותק אחד.
1 בכמה דרכים אפשר לסדר את הספרים על המדף?
1 **הערה:** עותקים של אותו כרך נחשבים זהים.
1



תשובה:

$$\frac{13!}{3!\,2!\,4!}$$

עמ' 44

זאת היתה נושא לתמורה עם חזרות.

נסמן ב- $P(n,k_1,k_2 \ldots k_m)$ את מספר התמורות של

n איברים כאשר יש m סוגים שונים של איברים

k_1 איברים זהים

k_2 " "

$\vdots$

k_m " "

כך ש- $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$

$$P(n;k_1,k_2 \ldots k_m)=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$$

טבלת סיכום

		בלי חזרות	עם חזרות
יש חשיבות לסדר	תמורות	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$
יש חשיבות לסדר	חליפות	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	צירופים	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$	

נשאר להשלים בפעם הבאה -

צירופים עם חזרות

(להתחיל לפתור את ממ"ח 04)

← לקרוא את פרק 1-3 בקומבינטוריקה