שיעור שישי – מתמטיקה בדידה

קבוצות אינסופיות / עוצמות / קרדינליות

אשר קרביץ

שאלה

א. כיתבו פונקציה חח"ע ועל מהטבעיים אל הזוגיים הטבעיים

ב. כיתבו פונקציה חח"ע ועל מהזוגיים הטבעיים אל הטבעיים.

ג. האם בהכרח הפונקציה בסעיף ב הפוכה לזו שכתבתם בסעיף א?

רמז (עבה) לפתרון א'

$$\begin{array}{lcccccccc}
\mathbb{N} & \quad & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
2\mathbb{N} & & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots
\end{array}$$

תשובה

א. כיתבו פונקציה חח"ע ועל מהטבעיים אל הזוגיים הטבעיים $f(a)=2a$

ב. כיתבו פונקציה חח"ע ועל מהזוגיים הטבעיים אל הטבעיים. $f(a)=a/2$

ג. האם בהכרח הפונקציה בסעיף ב הפוכה לזו שכתבתם בסעיף א?

לא! (למשל, מפני שבסעיף א' יכולנו להחליף בין כל שני ערכים ועדיין הפונקציה היתה חח"ע ועל)

שאלה

תנו דוגמא לפונקציה חח"ע מהטבעיים (N)
אל המכפלה הקרטזית NxN

$$F: N \rightarrow N \times N$$

שאלה

תנו דוגמא לפונקציה חח"ע מהטבעיים (N)
אל המכפלה הקרטזית NxN

$$F(a) \rightarrow (a,a)$$

שאלה

האם קיימת לדעתכם פונקציה חח"ע מהכפלה הקרטזית NxN אל הטבעיים (N) ?

$$F: N \times N \rightarrow N$$

תשובה: קיימת בהחלט!

למשל, ניתן להתאים לכל זוג סדור את הסכום של איבריו ואז אם הסכומים זהים, לסדר אותם על פי "סדר מילוני".
(0,0) , (0,1) ,(1,0) , (0,2) , (1,1), (2,0) , (0,3), (1,2)... ,

הפונקציה תתאים לכל זוג סדור את מיקומו בסדר. למשל

F((0,3))=7

הערה: דוגמא נוספת לפונקציה שכזו מתוארת בספר הלימוד בעמוד 123.

שאלה

תנו דוגמא לפונקציה חח"ע מהטבעיים (N)
אל קבוצת כל הקבוצות של הטבעיים: (P(N))

$$F: N \to P(N)$$

תשובה

תנו דוגמא לפונקציה חח"ע מהטבעיים (N)

אל קבוצת כל הקבוצות של הטבעיים: (P(N))

$$F: N \rightarrow P(N)$$

תשובה

$$F(a) = \{a\}$$

שאלה

האם קיימת פונקציה חח"ע מקבוצת כל הקבוצות של הטבעיים (P(N)) אל הטבעיים (N) ?

$$F: P(N) \to N$$

תשובה

לא ולא! הדבר יעמוד בסתירה למשפט קנטור שיוצג בהמשך המצגת.

תרגיל: נא לבנות פונקציה חח"ע ועל

מ- N לקבוצה $A \cup B \cup C$ כאשר

$$A=\{(n,0): n\in N,\ n= 4 \bmod 5\}$$

$$B=\{(n,1): n\in N:\ n= 2 \bmod 7\}$$

$$C=\{(n,2): n\in N:\ n= 0 \bmod 8\}$$

הסבר פירוש הביטוי $n= 4 \bmod 5$: אם נחלק את n בחמש תתקבל שארית 4
למשל: המספרים: 4, 9, 14, 19 ו- 74 שייכים לקטגוריה זו. כלומר כולם שווים $4 \bmod 5$

פתרון

נחלק את N לשלוש קבוצות

בהתאם לשארית בחילוק ב- 3:

1) את המספרים מהסוג $3k$ נתאים לאברי A;

2) את המספרים מהסוג $3k+1$ נתאים לאברי B;

3) את המספרים מהסוג $3k+2$ נתאים לאברי C.

חלק ראשון של הפונקציה

1) יהי $n \bmod 3 = 0$ נבנה התאמה

$n=3k \rightarrow (5k+4,0)$

נקבל $k=n/3$, ואז $5k+4=5n/3+4$. ובכן במקרה הזה

$f(n)=(5n/3+4, 0)=((5n+12)/3, 0)$

חלק שני של הפונקציה

2) יהי $n \bmod 3 = 1$ נבנה התאמה

$$n=3k+1 \rightarrow (7k+2,1)$$

נקבל $k=(n-1)/3$, ואז

$$7k+2 = 7\frac{n-1}{3} + 2 = \frac{7n-1}{3}$$

ובכן במקרה הזה

$$f(n) = \left(\frac{7n-1}{3}, 1\right)$$

חלק שלישי של הפונקציה

3) יהי $n \bmod 3 = 2$ נבנה התאמה

$$n=3k+2 \rightarrow (8k,2)$$

נקבל $k=(n-2)/3$, ואז

$$8k = 8\frac{n-2}{3} = \frac{8(n-2)}{3}$$

ובכן במקרה הזה

$$f(n) = \left(\frac{8(n-2)}{3}, 2\right)$$

נסכם את התוצאה

$$f(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{5n+12}{3},0\right), & n\equiv 0 \pmod 3\\[2ex] \left(\dfrac{7n-1}{3},1\right), & n\equiv 1 \pmod 3\\[2ex] \left(\dfrac{8(n-2)}{3},2\right), & n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

עוצמות

הגדרה. עבור קבוצות סופיות מספר האיברים בקבוצה נקרא **עוצמה** של קבוצה.

עוצמה של קבוצה A מסומנת על-ידי |A|.

(מילה נרדפת לעוצמה היא המספר הקרדינלי של קבוצה או הקרדינליות של הקבוצה).

דוגמאות

$A=\{1,2,3\}$, אזי $|A|=3$

$B=\{1,\{2,3,4\}\}$, אזי $|B|=2$

כדי למצוא את העוצמה של קבוצה המורכבת

ממספר תת-קבוצות יש לפרק את הקבוצה

לתת-קבוצות זרות (לבצע חלוקה של קבוצה)

ולחבר את עוצמותיהן - כך נספור

כל איבר בדיוק פעם אחת.

חישוב עצמה

תהיינה A וB - קבוצות כלשהן,

אזי $|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B|$

דוגמא

$B=\{4,2,3\}$ $A=\{1,2,3\}$

$$|A\cup B| = |A|+|B| - |A\cap B| = 4$$

עצמות אינסופיות

כדי לקבוע את העוצמה של קבוצה סופית היינו צריכים למנות את האברים שלה. נשאלת השאלה איך ניתן להרחיב מושג של גודל הקבוצה, כלומר מושג של עוצמה כדי לכלול לתוכו גם קבוצות אינסופיות (כמו קבוצה של מספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים ממשיים וכו'). כאן אנו לא יכולים פשוט "לספור" את איברי הקבוצה כמו במקרה של קבוצה סופית ויש למצוא שיטה חלופית אשר תשמש כהרחבה של השיטה המתאימה לקבוצות סופיות. כלומר אם נשתמש בשיטה החדשה לקבוצות סופיות תוצאותיה לא יסתרו את המושג הרגיל של מספר האיברים בקבוצה.

כדי להבין את הדרך לבניית מושג העוצמה עבור קבוצות אינסופיות נשים לב לתהליך שבו נקבע גודל של קבוצה סופית. אם ניקח קבוצה של עצמים ונתחיל למנות: "אחד, שתיים, שלוש,..." מה שאנו עושים למעשה זה בניית ההתאמה חח"ע ועל בין העצמים שיש למנותם לבין הרישא של N^+ שהיא קבוצה מהסוג $\{1,2,....n\}$: לכל עצם מותאם מספר טבעי אחד ויחיד. כדי לקבוע שבכיתה 15 שולחנות יש לבנות פונקציה חח"ע ועל בין קבוצת השולחנות בכיתה לבין הקבוצה $\{1,2,...,15\}$. כאשר אומרים שמספר השולחנות בכיתה שווה למספר הכיסאות הכוונה היא לכך שלכל שולחן ניתן להתאים כיסא משלו ולכל כסא - שולחן משלו.

כדי להגיד שבכיתה א' ובכיתה ב' יש אותו מספר שולחנות אפשר ללכת בשתי דרכים: א' לבנות פונקציה חח"ע ועל בין קבוצות השולחנות בשתי הכיתות או ב' לבנות פונקציה חח"ע ועל בין הרישא של N^+ לבין קבוצות השולחנות בכל אחת מהכיתות ולוודא שבשני המקרים מתקבל אותו n. ובכן פעולת ההשוואה בין עוצמות של קבוצות מצטמצמת לאחד מהשנים:

עוצמות שוות

תהיינה A ו-B שתי קבוצות.

אומרים ש-A ו-B הן בעלות **עוצמה שווה**

<u>אם ורק אם</u> קיימת ביניהן פונקציה **חח"ע ועל**.

את העובדה ש-A ו-B הן בעלות עוצמה שווה

מסמנים על-ידי $A \sim B$ או על-ידי $|A|=|B|$.

תרגיל

- הראו בכל סעיף שעוצמת הקבוצה A שווה לעוצמת הקבוצה B. X ו- Y מספרים ממשיים.

- א) $A=\{(x,y) : 0<x<2 , 1<y<2\}$
- $B=\{(x,y) : -1<x<1 , 0<y<0.5\}$

- ב) $A=\{(x,y) : 0<x^2+y^2<4\}$
- $B=\{(x,y) : 0<x^2+y^2<1\}$

פתרון

- א) $A=\{(x,y) : 0<x<2 , 1<y<2\}$
- $B=\{(x,y) : -1<x<1 , 0<y<0.5\}$
- $f_{(x,y)} = (x-1 , \frac{y-1}{2})$
- ב) $A=\{(x,y) : 0<x^2+y^2<4\}$
- $B=\{(x,y) : 0<x^2+y^2<1\}$
- $f_{(x,y)} = (x/2 , y/2)$

א .
א .

תרגיל

- הראו שעוצמת הקבוצה A שווה לעוצמת הקבוצה B.

- $A=\{x\in R : 0<x<1\}$
- $B=\{x\in R : 1<x<\infty\}$

א.
א.

פתרון

- הראו שעוצמת הקבוצה A שווה לעוצמת הקבוצה B.

- $A=\{x \in R : 0<x<1\}$
- $B=\{x \in R : 1<x<\infty\}$
- תשובה: נסתייע בפונקציה: $F(x)=1/x$

$\aleph_0$

הגדרה. תהי N קבוצת המספרים הטבעיים אם מתקיים A~N אומרים שA- היא קבוצה

בת-מנייה או שעוצמתה שווה ל- $\boldsymbol{\aleph_0}$. ($|A| = \aleph_0$)

טיפ חשוב לחיים: אינטואיציה שלנו בד"כ לא מותאמת "באופן טבעי" לעבודה עם קבוצות אינסופיות ולכן אין לסמוך עליה בדיון בנושאים הללו, לפחות לא עד שרוכשים ניסיון משמעותי, ולכן יש להיצמד להגדרות ולמשפטים.

תרגיל

תהי A קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים.

יש להוכיח שְ $A \sim N$

תרגיל

תהי A קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים.

יש להוכיח שֶ $A \sim N$

תשובה: זה בדיוק מה שהוכחנו בשקף מספר 3,
כי בנינו בין שתי הקבוצות פונקציה חח"ע ועל.

תרגיל

הוכיחו ש- $N \sim Z$

פתרון

$$f(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2}, & n\text{ - even} \\ \dfrac{n+1}{2}, & n\text{ - odd} \end{cases}$$

תרגיל

נא להוכיח ש- $|N\times N|\sim|N|$

פתרון

הוכחנו זאת בשקף מספר 7. ניגש עתה לבעיה מזווית מעט שונה:

נוכיח ש- $|N\times N|\sim|N|$.

נבנה לשם כך פונקציה f חח"ע ועל

$f:N\times N\to N$. נרשום את הזוגות בצורת מטריצה:

$$
\begin{array}{c}
\ldots(0,3)\ (0,2)\ (0,1)\ (0,0) \\
\ldots(1,3)\ (1,2)\ (1,1)\ (1,0) \\
\ldots(2,3)\ (2,2)\ (2,1)\ (2,0) \\
\ldots(3,3)\ (3,2)\ (3,1)\ (3,0) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

נתאים 0 לזוג (0,0), 1 ו2 - לזוגות (0,1) ו-(1,0) וכו'.

התאמה חח"ע ערכית ואסטרטגיית ספירה

יש זוג אחד שסכום המספרים שבו שווה ל- 0

שני זוגות שסכום המספרים בהם שווה ל1

ובאופן כללי: יש $n+1$ זוגות

שסכום המספרים שבזוג שווה ל- n.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)...

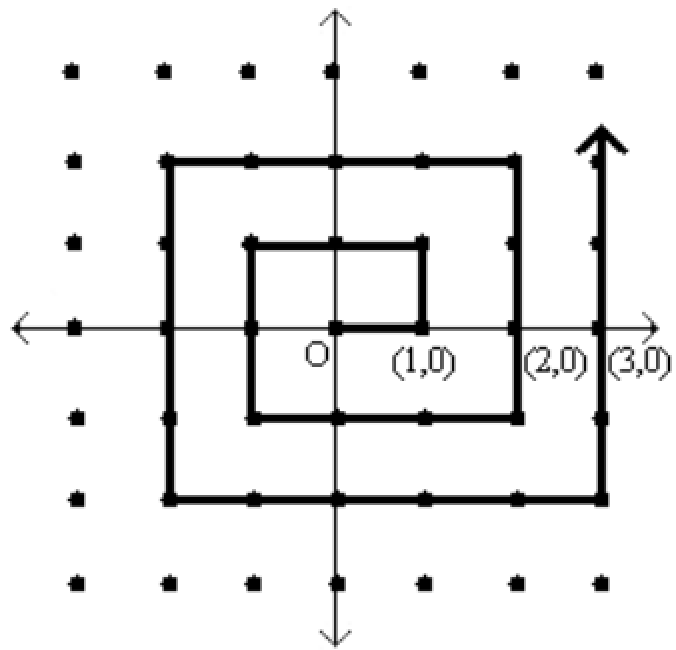
כך תיראה ההתאמה

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 3 & \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\
2 & 4 & 7 & \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\
5 & 8 & 12 & \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \cdots \\
\cdots & & &
\end{array}$$

תרגיל

הצביעו על אסטרטגית ספירה שתוכיח שעוצמת המכפלה הקרטזית ZxZ (שלמים כפול שלמים) היא בת-מניה.

תשובה (אחת מיני רבות)



שאלה

נתון: קיימת פונקציה חח"ע מ A אל B.

מה ניתן להסיק מכך על העוצמות של שתי הקבוצות?

תשובה

נתון: קיימת פונקציה חח"ע מ A אל B.

מה ניתן להסיק מכך על העוצמות של שתי הקבוצות?

מסקנה: $|B| \geq |A|$

שאלה

נתון: קיימת פונקציית "על" מ A אל B.

מה ניתן להסיק מכך על העוצמות של שתי הקבוצות?

תשובה

נתון: קיימת פונקציה "על" מ A אל B.

מה ניתן להסיק מכך על העוצמות של שתי הקבוצות?

מסקנה: $|A| \geq |B|$

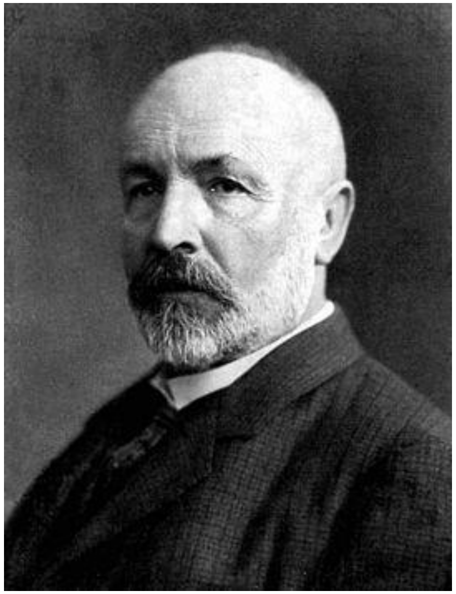
שאלה וגם תשובה

נתון: קיימת פונקציית חח"ע וגם "על" מ A אל B.

מה ניתן להסיק מכך על העוצמות של שתי הקבוצות?

מסקנה: $|A| = |B|$

משפט קנטור 1891



$$\forall X \ \ |X| < |P(X)|$$

הוכחה

א. תהי קבוצה כלשהיא X. נשים לב שמתקיים $X \leq P(X)$ מכיוון שההעתקה $\forall x \in X \; f(x) = \{x\}$ היא חח"ע. לכן מספיק להראות $|X| \neq |P(x)|$.

ב. תהי העתקה $f: X \to P(X)$, נוכיח ש-f אינה על.

ג. נגדיר $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ בהכרח מתקיים ש- $Y \in P(x)$ אינה בטווח של f, מכיוון שאם היה קיים $z \in X$ כך ש- $f(z) = Y$ היינו מקבלים:

$z \in Y \Leftrightarrow z \in \{x \in X : x \notin f(x)\} \Leftrightarrow z \notin f(z) \Leftrightarrow z \notin Y$, סתירה □

הסבר עם המחשה

מסקנה מרחיקת לכת:
קיימים אינסוף "סוגים שונים" של אינסופים!!

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\aleph_0 & & |\mathbb{R}| & & & & & & \\
\parallel & & \parallel & & & & & & \\
|\mathbb{N}| & < & |\mathscr{P}(\mathbb{N})| & < & |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))| & < & |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))| & < & \cdots
\end{array}
$$

שאלה

מה תוכלו לומר על עוצמת קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים אל הקבוצה $\{0,1\}$?

האם עוצמת הקבוצה הנ"ל שווה לזו של הטבעים? גדולה ממנה? קטנה ממנה?

שאלה

מה תוכלו לומר על עוצמת קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים אל הקבוצה $\{0,1\}$?

האם עוצמת הקבוצה הנ"ל שווה לזו של הטבעים? גדולה ממנה? קטנה ממנה?

תשובה: עצמת קבוצת הפונקציות הנ"ל היא C, כעצמת הקבוצה $P(N)$.

משפט קנטור שרדר ברנשטיין

אם $|A| \le |B|$ וגם $|B| \le |A|$ אז $|A| = |B|$

שאלה

מהי עצמת הקבוצה AxB

וזאת כאשר A קבוצת הטבעיים הזוגיים ו-B היא הקבוצה: B={1,2,3}

תרגיל

יש להוכיח שקבוצת המספרים הממשיים בקטע הפתוח $(0,1)$ אינה בת מניה.

הוכחה

$$r_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots$$
$$r_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots$$
$$r_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\ldots$$
$$r_4 = 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\ldots$$
$$\vdots$$

$d_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{if } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{if } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

שאלה

לאחר שנוכחנו בשאלה הקודמת שעוצמת הקטע הפתוח (0,1) שונה מעוצמת הטבעיים עלינו להחליט: למי עוצמה גדולה יותר: לקבוצה (0,1) או למספרים הטבעיים?

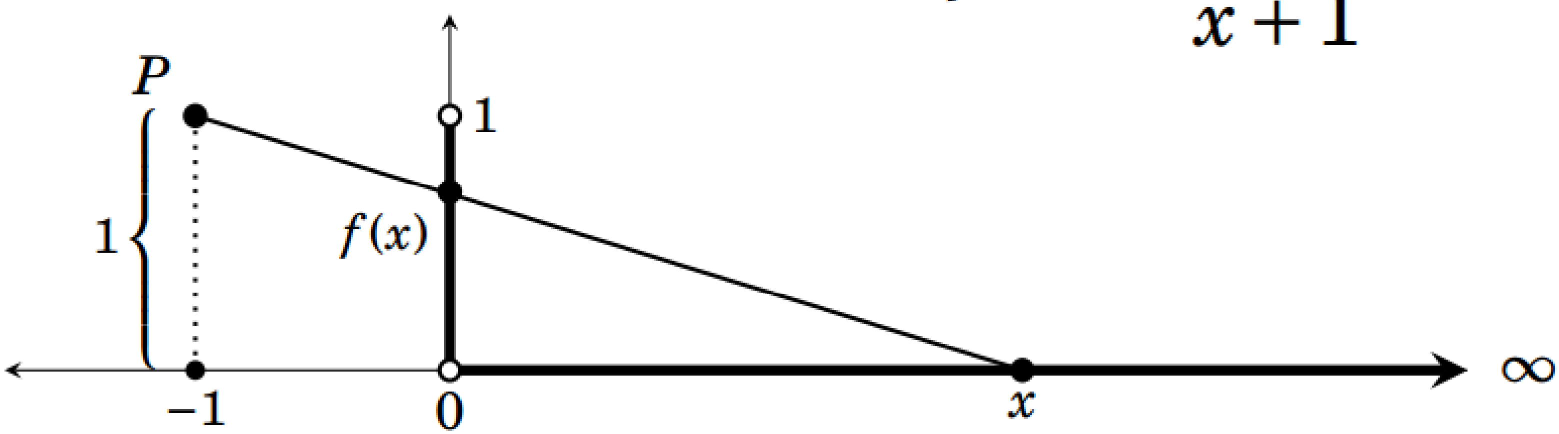
תרגיל

הראו שעוצמת הקטע הסגור (0,1) שווה לעוצמת כל החלק החיובי של הציר הממשי, כלומר לעוצמת הקטע .

תשובה

$$\frac{1}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$



תרגיל

הסבירו מדוע איחוד של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת-מניה

תשובה

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\} \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\} \end{aligned}$$

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\}$$