מתמטיקה בדידה

מפגש 4

תורת הקבוצות פרק 2

. יחס שקילות . יחס סדר.

תזכורת: תכונות של רלציה:

R רפלקסיבית $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$

$\forall a\ (a,a) \in R$

R אנטי רפלקסיבית $\Leftrightarrow$ $I_A \cap R = \emptyset$

$\forall a\ (a,a) \notin R$

R סימטרית $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$

$(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

R אנטי סימטרית $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} = \emptyset$

$(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$

R טרנזיטיבית $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

תזכורת:

יחס שקילות ≡

יחס שהוא: רפלקסיבי, סימטרי, טרנזטיבי
נקרא יחס שקילות.

דוגמאות: עבור $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3),(1,4),(4,1)\}$$

תרגיל: עבור כל יחס בדקו אילו
מהתכונות קיימת וקבעו האם הוא
יחס שקילות:

1) יחס L מעל $\mathbb{Z}$ מוגדר כך:

$(m,n)\in L \iff$ $m+n$ זוגי

2) יחס M מעל $\mathbb{N}$ מוגדר כך:

$(m,n)\in M \iff$ $m=n$ או $m\cdot n$ זוגי

יחס L מעל $\mathbb{Z}$ מוגדר כך:

$(m,n)\in L \iff$ $m+n$ זוגי

✓ רפלקסיבי, לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $n+n=2n$ והוא זוגי
ולכן $(n,n)\in L$.

✓ סימטרי, $(a,b)\in L \Rightarrow a+b=b+a$ זוגי $\Rightarrow (b,a)\in L$

✓ טרנזיטיבי, נניח $(a,b)\in L$ וגם $(b,c)\in L$
אזי $a+b$ זוגי וגם $b+c$ זוגי
נסתכל על $\underbrace{a+b+b+c}_{\text{זוגי}} = a+c+\underbrace{2b}_{\text{זוגי}}$
$\Rightarrow$ $a+c$ זוגי $\Rightarrow (a,c)\in L$.

מסקנה: זהו יחס שקילות

החלוקה שהיחס L מגדיר על הקבוצה $\mathbb{Z}$

היא לשתי מחלקות:

① המספרים הזוגיים

② המספרים האי-זוגיים.

$(m,n)\in L \iff m+n$ הוא זוגי.

עבור m זוגי, המספרים שאיתו ביחס, הם המספרים שמקיימים $m+n$ זוגי, ז״א כל מספר זוגי.

ועבור m אי-זוגי, יהיו איתו כל המספרים האי-זוגיים.

2) יחס M מעל $\mathbb{N}$ מוגדר כך:

$(m,n)\in M \iff m=n$ או $m\cdot n$ זוגי

✓ רפלקסיבי. לכל $a\in\mathbb{N}$ מתקיים $(a,a)\in M$, לפי הגדרה.

✓ סימטרי. נניח כי $(a,b)\in M$ אז $ab=ba$ זוגי או $a=b$
בכל מקרה נקבל כי $(b,a)\in M$.

✗ טרנזיטיבי. [נניח כי $(a,b)\in M$ וגם $(b,c)\in M$ (לא בהכרח מתקיים $(a,c)\in M$)]

דוגמא נגדית:

$(1,2)\in M$ והזוג $(2,3)\in M$

אבל הזוג $(1,3)$ לא שייך לM

כי $1\cdot 3$ לא זוגי וגם $1\neq 3$.

מסקנה: M איננו יחס שקילות.

2) יחס M מעל $\mathbb{N}$ מוגדר כך:

$(m,n)\in M \iff m=n$ או $m\cdot n$ זוגי

✓ רפלקסיבי: ברור. ((a,a) מקיים $a=a$ ולכן שייך לM)

✓ סימטרי: אם $(a,b)\in M$ אז יש שתי אפשרויות:

① $a=b$ ואז ברור כי $(b,a)\in M$.

② $a\cdot b$ הוא זוגי. אז כמובן גם $b\cdot a$ הוא זוגי ולכן $(b,a)\in M$.

X אנטי רפלקסיבי - ברור.

X אנטי סימטרי - ברור.

X טרנזיטיבי: $(1,2)\in M$ וגם $(2,3)\in M$

אבל $(1,3)\notin M$

מסקנה: M איננו יחס שקילות

תזכורת:

חלוקה של A היא קבוצה של תת קבוצות לא ריקות של A כך ש-

- כל שתיים זרות זו לזו
- איחוד כולן שווה ל A.

הגדרה: עבור קבוצה A ויחס שקילות $\equiv$ מעל A

קבוצת המנה המסומנת $A/_{\equiv}$

היא קבוצת מחלקות השקילות של היחס $\equiv$.

<u>תרגיל חשוב:</u> תהי $A=\mathbb{Z}$

נגדיר יחס שנסמן $\equiv_n$, כך:

$a-b$ מתחלק ב n ללא שארית $\iff$ $a\equiv_n b$

צ"ל: a ו b יש אותה שארית בחלוקה ב n.

א) הראו שזהו אכן יחס שקילות.

ב) מהי החלוקה המתאימה של A?

תרגיל 3: $\equiv_5$

$$(11, 26) \in \equiv_5$$

$$26-11=15$$

$(26,12) \notin \equiv_5$ $\quad 26-12=14$

יהיו שני מספרים עם אותה שארית k בחלוקה ב 5.

$$a = 5\cdot m + k$$

$$b = 5\cdot n + k$$

$$a-b = 5m+k-(5n+k) = 5(m-n)$$

אזי $a-b$ מתחלק ב 5.

גיל חשוב: תהי $A=\mathbb{Z}$

נגדיר יחס שנסמן $\equiv_n$, כך:

$a-b$ מתחלק ב n ללא שארית $\iff$ $a\equiv_n b$

כלו׳: ל a ול b יש אותה שארית בחלוקה ב n.

א) הראו שזהו אכן יחס שקילות.

ב) מהי החלוקה המתאימה של A?

א) פתרון:

א) רפלקסיבי. ה: לכל $a\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a-a=0$ ולכן מתחלק ב n ללא שארית.

ב) סימטרי. ה: נניח כי $(a,b)\in\equiv_n$ כלו׳ $a-b$ מתחלק ב n ללא שארית. אז כמובן גם $b-a$ מתחלק ב n ללא שארית. כי $b-a=(-1)\cdot(a-b)$.

ג) טרנזיטיבי. ה: נניח כי $(a,b)\in\equiv_n$ וגם $(b,c)\in\equiv_n$

כלו׳ $a-b$ מתחלק ב n ללא שארית

וגם $b-c$ מתחלק ב n ״ ״

ולכן הסכום שלהם $\underbrace{a-b+b-c}_{=a-c}$ מתחלק ב n ללא שארית.

ולכן $(a,c)\in\equiv_n$.

<u>הערה</u>: אם x,y מתחלקים ב n ללא שארית

אז קיימים מספרים שלמים k_1,k_2 כך ש:

$$x = n\cdot k_1$$
$$y = n\cdot k_2$$

ולכן

$$x+y = n(k_1+k_2)$$

והוא שוב מספר שמתחלק ב: n ללא שארית.

המשך הדוגמא עבור $n=5$. נקבל:

$\bar{1}=\{\dots,-9,-4,1,6,11,16,21,26,31,36,\dots\}$

$\bar{2}=\{\dots,-8,-3,2,7,12,17,22,27,\dots\}$

$\bar{3}=\{\dots,-7,-2,3,8,13,18,23,28,\dots\}$

$\bar{4}=\{\dots,-6,-1,4,9,14,19,24,\dots\}$

$\bar{0}=\{\dots,-5,0,5,10,15,20,25,\dots\}$

ב עבור n כללי. מחלקות השקילות הן:

$\bar{0}$ – הכפולות של n

$\bar{1}$ – נותנים שארית 1 בחלוקה ב-n

$\bar{2}$ – " 2 " "

$\bar{3}$

$\vdots$

$\overline{n-1}$ – נותנים שארית $n-1$ " "

כך מקבלים.

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

כאשר $\bar{0}$ - זה הכפולות של n.

$\bar{1}$ - זה המספרים שנותנים שארית 1 בחלוקה ב-n

$\bar{2}$ " " " " 2 " "

$\vdots$

$\overline{n-1}$ " " " " $n-1$ " "

$\prec$

יחס סדר

הגדרה: יחס נקרא **יחס סדר חלקי** אם הוא אנטי רפלקסיבי, וטרנזיטיבי.

דוגמאות: היחס $<$ (קטן ממש) על הקבוצה $\mathbb{N}$

היחס $\subset$ (מוכל ממש) על הקבוצה $A=P(\{1,2,3,4\})$

הגדרה: יחס נקרא **יחס סדר מלא** אם הוא: אנטי רפלקסיבי, טרנזיטיבי, ו<u>משווה</u> בין כל שני איברים ב A.

כלומר לכל $a,b\in A$ אם $a\neq b$ אז:

$(b,a)\in\prec$ או $(a,b)\in\prec$

דוגמאות: $<$ על $\mathbb{N}$ הוא יחס סדר מלא.

אם $m \neq n$ אז $m < n$

או $n < m$.

אבל $\subset$ על $P(\{1,2,3,4\})$ אינו יחס סדר מלא

$$\{1,2\}\ ,\ \{2,3\}$$

$$\{1,2\} \not\subset \{2,3\}$$

וגם $\{2,3\} \not\subset \{1,2\}$

דוגמאות נוספות:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

R_1 הוא אכן אנטי רפלקסיבי. והוא גם טרנזיטיבי.

ולכן R_1 הוא אכן יחס סדר חלקי.

R_1 איננו יחס סדר מלא. לדוגמא המספרים 2 ; 3

לא ניתנים להשוואה לפי היחס.

R_2 הוא אכן אנטי רפלקסיבי. והוא גם טרנזיטיבי.

ולכן גם R_2 הוא יחס סדר חלקי.

דיאגרמת הסה של יחס סדר $\prec$ על A.

רושמים את כל אברי A, פעם אחת, בגרף.

כאשר מתקיים:

אם $b \prec a$ אז יש מסלול בין a ל b:

b מופיע מעל a.

יש קו שמחבר בין a ל b רק אם b **מכסה** את a.

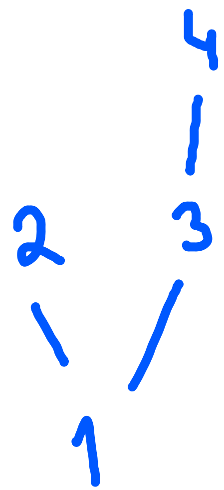
ז"א

אין c כך ש $a \prec c \prec b$.

$$A = \{1,2,3,4\}$$

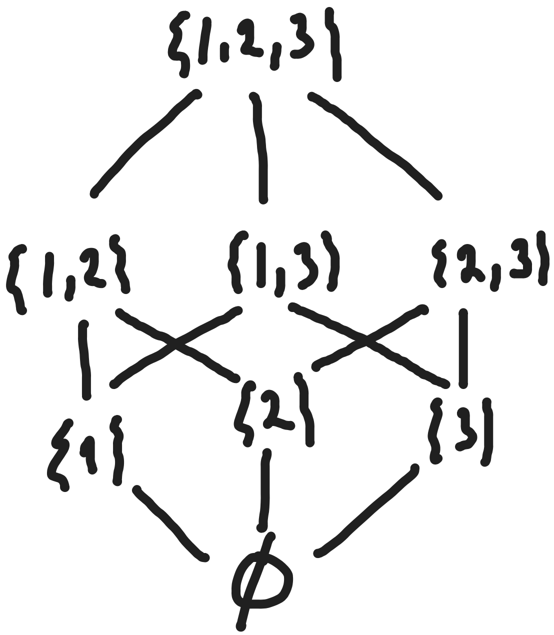
$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(3,4)\}$$

נצייר דיאגרמת הסה מתאימה:



$$A = P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

נצייר דיאגרמת הסה מתאימה ליחס $\subset$ (מוכל ממש)



דוגמא 13:

$A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

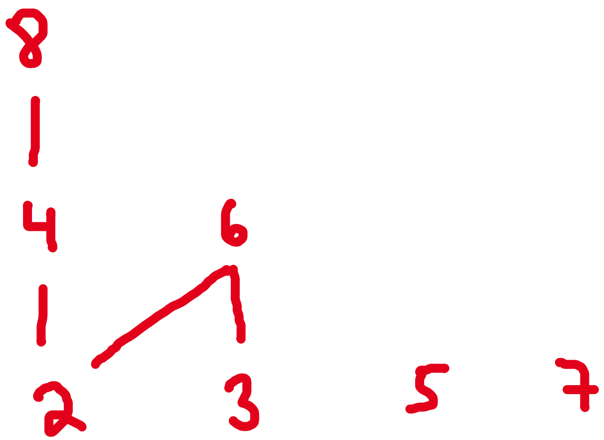
נגדיר יחס כך: $a \prec b \iff a | b$ וגם $a \neq b$

(כלו' b מתחלק ב a ללא שארית)

(תרגיל לבית: הוכיחו שזהו אכן יחס סדר חלקי)

נצייר את דיאגרמת הסה:

$\prec = \{(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$



דוגמה 13:

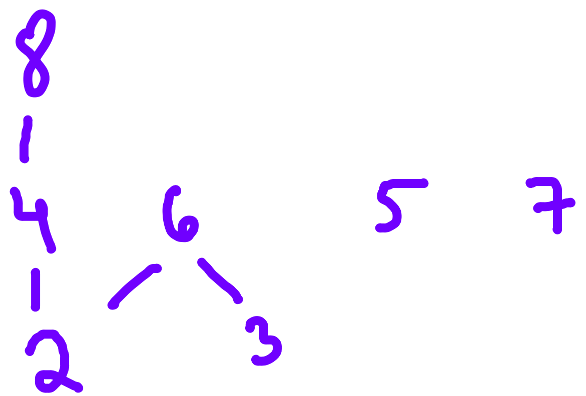
$$A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$$

נגדיר יחס כך: $a \prec b \iff a|b$ וגם $a \neq b$

(ז"א b מתחלק ב-a ללא שארית)

(תרגיל לבית: הוכיחו שזהו אכן יחס סדר חלקי)

נצייר דיאגרמת הסה מתאימה.



$$\prec=\{(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$$

<u>תרגיל:</u> רשמו דיאגרמת הסה ליחס הבא מעל A

כאשר A היא קבוצת המחלקים הטבעיים של 12.

והיחס מוגדר כך: $a \prec b \iff a \neq b$ וגם $a|b$.

$$A = \{1,2,3,4,6,12\}$$

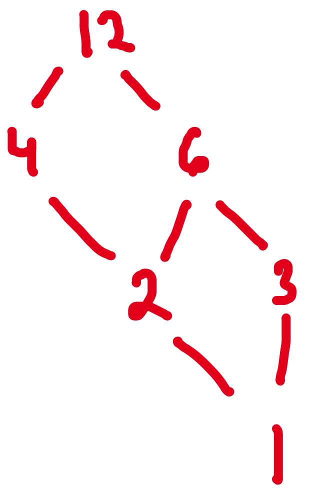
<u>הערה:</u> (בעקבות שאלה בזום)

$a|b$ זה "a מחלק את b" או b מתחלק ב a.

(אז b הוא הגדול וa הוא הקטן)

לדוגמא $2/8$ ולא $\cancel{8/2}$.

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$



שאלה: איך נראית דיאגרמת הסה לסדר **מלא**?

תשובה: כל האיברים בטור

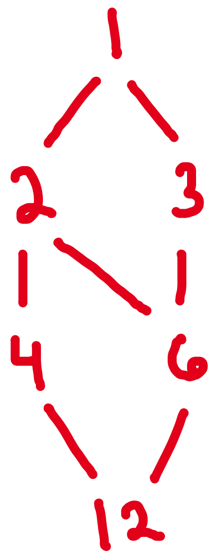
תרגול של דרך:

$A=\{1,2,3,4,6,12\}$

נגדיר יחס S כך: $(a,b)\in S$ אםם $b|a$

וגם $a\neq b$.

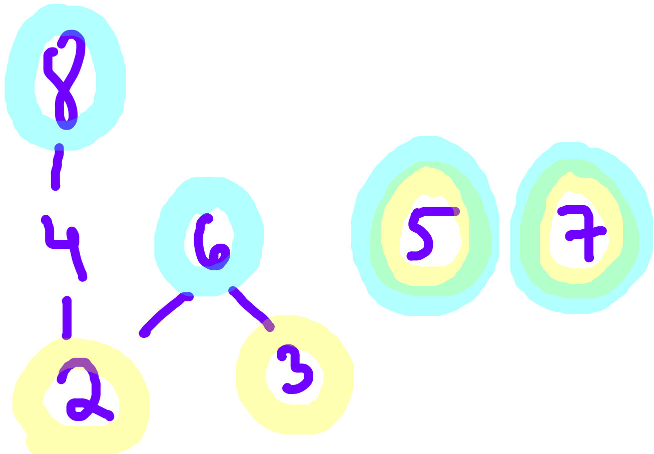
איך תיראה דיאגרמת הסה.



הגדרות:

איבר מינימלי לפי היחס - הוא איבר שאין איבר תחתיו בגרף.

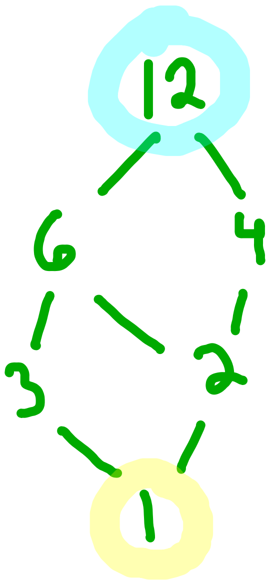
״ מקסימלי ״ ״ ״ ״ ״ מעליו ״ .



הגדרות:

איבר מינימלי לפי היחס - הוא איבר שאין איבר מתחתיו בגרף.

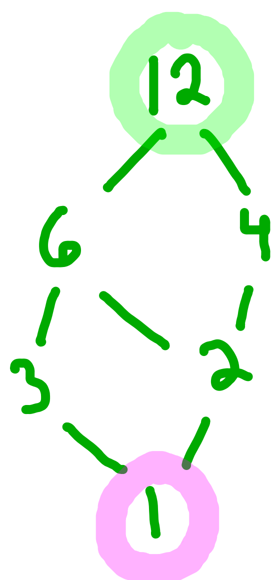
״ מקסימלי ״ ״ ״ ״ ״ מעליו ״.

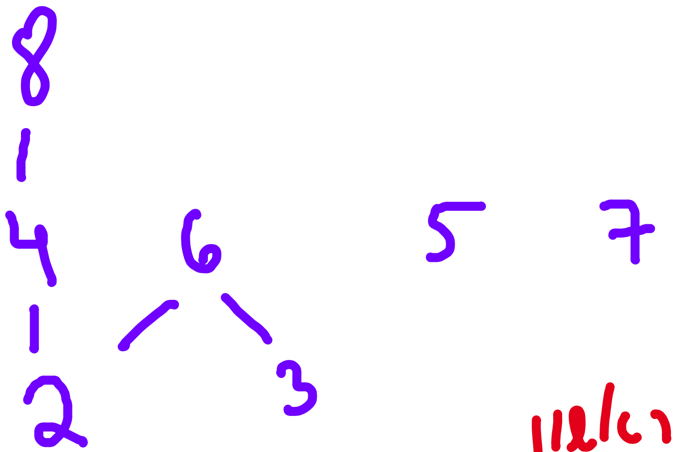


עוד הגדרות:

איבר הוא איבר ראשון (לפי היחס.) אם הוא מתחת לכל שאר האיברים בגרף.

איבר אחרון הוא איבר שמעל לכל שאר האיברים בגרף.





אין איבר ראשון
אין איבר אחרון

תרגיל:

רשמו דיאגרמת הסה עבור יחס ההכלה על הקבוצה $A=P(\{1,2,3\})$

ומצאו איברים מקסימליים, מינימליים, ראשון אחרון.