מתמטיקה בדידה

מפגש 3

תורת הקבוצות - פרק 2

17 בנובמבר 2019

מכפלה קרטזית - הוא קבוצה של זוגות סדורים. כך:

אם A ו B קבוצות נגדיר:

$$A\times B=\{(a,b)\,/\,a\in A,\ b\in B\}$$

דוגמא: $A=\{1,2\}$ $B=\{5,6\}$

$$A\times B=\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$$

<u>שאלה</u>: אם $|A|=m$ ו $|B|=n$ כמה זוגות ב $A\times B$?

תשובה:

$$|A \times B| = mn$$

תרגיל: בחרו את התשובה הנכונה.

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$$

א) אם $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$ אז $R=A\times B$

ב) אם $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ אז $R=A\times B$

ג) קיימות קב' A ו- B שונות מהנ"ל כך ש- $R=A\times B$

ד) לא קיימות קבוצות A,B כך ש- $R=A\times B$

תרגיל: בחרו את התשובה הנכונה.

- לתין

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$

א) אם $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$ אז $R=A\times B$

ב) אם $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ אז $R=A\times B$

ג) קיימות קב' A ו-B שונות מהן כך ש: $R=A\times B$

ד) לא קיימות קבוצות A, B כך ש: $R=A\times B$

הַגְדָרָה: כל תת-קבוצה של $A \times B$ נקראת יחס (רֶלַצְיָה) מ- A ל- B.

דוגמאות:

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{4,5,6\}$ – נניח

R, S, T כולן רלציות:

$R = \{(1,4)(1,5),(3,6)\}$

$S = \{(1,5),(2,4),(2,6),(3,6),(1,4),(1,6)\}$

$T = \{(2,5)\}$

<u>סימונים</u>: אם R רלציה מ- A ל- B

$(a,b) \in R$ אפשר גם לסמן

כך: $R \in \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, aRb $\langle a,b \rangle$

תרגיל קטן: רשמו את היחס S

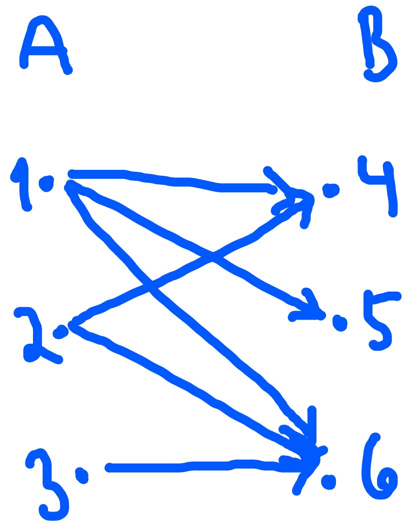
כטבלה ובאמצעות גרף ?

$$S = \{(1,5),(2,4),(2,6),(3,6),(1,4),(1,6)\}$$

תרגיל קטן: רשמו את היחס S
כטבלה ובאמצעות גרף

$$S=\{(1,5),(2,4),(2,6),(3,6),(1,4),(1,6)\}$$

A \ B	4	5	6
1	1	1	1
2	1		1
3			1



הגדרות:

$$R \subseteq A \times B$$

$$\text{Domain}R = \{a \in A \mid \exists y \in B \ (a,y) \in R\}$$

$$\text{Range}R = \{b \in B \mid \exists x \in A \ (x,b) \in R\}$$

שאלה: מהו

$\text{Domain}R$?

$\text{Range}R$?

$$R = \{(1,4)(1,5),(3,6)\}$$

הגדרה: אם $R\subseteq A\times A$ יחס מ A ל A

נאמר כי R הוא <u>יחס מעל A</u>.

הערה: מעכשיו, עד סוף השיעור נתייחס ליחסים מעל A.

הגדרה: יחס השיוויון הוא היחס I_A המוגדר כך:

$$I_A = \{(a,a) / a\in A\}$$

דוגמא: אם $A=\{1,2,3\}$ אז

$$I_a = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

שאלה: אם יש ב A n איברים, כמה איברים יהיו ב I_A?

תשובה: n

הגדרה: רלציה הופכית. אם $R \subseteq A \times B$

רלציה מ-A ל-B אז $R^{-1} \subseteq B \times A$

היא הרלציה ההופכית ל-R שמוגדרת

כך: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

תרגיל קטן: עבור היחסים הבאים מעל $\{1,2,3,4\}$

רשמו את היחס ההפכי:

א) $R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$

ב) $R_2 = \{(1,1),(3,2),(2,1),(3,1)\}$

הגדרה: רלציה הופכית. אם $R \subseteq A \times B$

רלציה מ-A ל-B אז $R^{-1} \subseteq B \times A$

היא הרלציה ההופכית ל-R שמוגדרת

כך:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

תרגיל קטן: עבור היחסים הבאים מעל $\{1,2,3,4\}$

רשמו את היחס ההפכי:

א) $R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$

$R_1^{-1} = \{(2,1),(3,1),(1,2),(1,3),(2,2)\} = R_1$

ב) $R_2 = \{(1,1),(3,2),(2,1),(3,1)\}$

$R_2^{-1} = \{(1,1),(2,3),(1,2),(1,3)\}$

ריבוע היחס

<u>הגדרה:</u> עבור יחס R מעל A היחס R^2 הוא היחס המוגדר כך:

$$R^2 = \{(a,b) / \ \exists c \in A \ (aRc \wedge cRb)\}$$

תרגיל קטן - עבור היחסים הבאים מעל $\{1,2,3,4\}$ תשבו את R^2.

ב) $R_2 = \{(1,1), (3,2), (2,1), (3,1)\}$

ג) $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

ריבוע היחס

הגדרה: עבור יחס R על A היחס R^2 הוא היחס המוגדר כך:

$$R^2 = \{(a,b) / \exists c \in A \ (aRc \wedge cRb)\}$$

$$(a,c) \in R \wedge (c,b) \in R$$

תרגיל קטן - עבור היחסים הבאים על $\{1,2,3,4\}$ תשבו את R^2.

ב) $R_2 = \{(1,1), (3,2), (2,1), (3,1)\}$

$R_2^2 = \{(1,1), (3,1), (2,1), (3,1)\} = \{(1,1), (3,1), (2,1)\}$

ג) $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

$R_3^2 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\} = R_3$

תכונות של רלציות

יחס נקרא רפלקסיבי אם מתקיים $I_A \subseteq R$

כלומר לכל $a \in A$ מתקיים aRa.

תזכורת: $I_a = \{(a,a) \mid a \in A\}$

דוגמאות:

היחס $\leq$ מעל $\mathbb{N}$ הוא רפלקסיבי

היחס $<$ מעל $\mathbb{N}$ אינו רפלקסיבי

היחס "מכיר את" מעל קבוצת האנשים הוא רפלקסיבי.

דוגמאות:

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$I_a=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(4,4)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_4=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$$

$$R_5=\{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$$

$$R_6=\{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל רפלקסיביות?

דוגמאות:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$I_a = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\} \quad \times$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \quad \times$$

$$R_3 = \{\underline{(1,1)},(1,2),\underline{(2,2)},\underline{(3,3)},\underline{(4,4)}\} \quad \checkmark$$

$$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\} \quad \times$$

$$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\} \quad \times$$

$$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\} \quad \times$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל רפלקסיביות?

יחס R נקרא אנטי רפלקסיבי אם $R\cap I_A=\emptyset$

ז"א אם לכל $a\in A$ $(a,a)\notin R$

דוגמאות: $<$ הוא אנטי רפלקסיבי.

"להיות אבא של" הוא אנטי רפלקסיבי.

שאלה- האם כל יחס שאיננו רפלקסיבי הוא אנטי -רפלקסיבי?

$$A=\{1,2,3,4\}$$

דוגמאות:

$$R_1=\{(1,1),(2,2),(4,4)\}$$

$$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_4=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$$

$$R_5=\{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$$

$$R_6=\{(1,3),(3,1),(2,3),(2,3)\}$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל אנטי רפלקסיביות?

אילו אינן רפלקסיביות ואינן אנטי-רפלקסיביות?

דוגמאות:

$A=\{1,2,3,4\}$

$I_a=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_1=\{(1,1),(2,2),(4,4)\}$ ✗

$R_2=\{\underline{(1,1)},(1,2),(2,1)\}$ ✗

$R_3=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ ✗

$R_4=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$ ✓

$R_5=\{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$ ✗

$R_6=\{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$ ✓

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל אינן רפלקסיביות?

אילו אינן רפלקסיביות ואינן אנטי-רפלקסיביות?

יחס נקרא סימטרי אם מתקיים $R=R^{-1}$

במילים אחרות R הוא סימטרי כאשר מתקיים

$aRb \iff bRa$

דוגמאות:

היחס $\le$ אינו סימטרי.

היחס $=$ הוא סימטרי.

היחס "מכיר את" הוא סימטרי.

היחס "להיות בן של" אינו סימטרי.

$$A = \{1,2,3,4\}$$

דוגמאות:

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$$

$$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל סימטריות?

$A = \{1,2,3,4\}$

דוגמאות:

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$ ✓

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ✓

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ ✗

$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$ ✗

$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$ ✗

$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$ ✗

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל סימטריות?

ג

יחס נקרא **אנטי-סימטרי** אם $R\cap R^{-1}=\emptyset$

כלומר R הוא אנטי סימטרי כאשר מתקיים

$$aRb \to \neg(bRa)$$

במילים אחרות: אם (a,b) ביחס אז (b,a) לא.

דוגמאות: היחס $<$ הוא אנטי סימטרי.

היחס $\subsetneq$ הוא אנטי סימטרי.

היחס "היות צאצא של" הוא אנטי סימטרי.

<u>שאלה:</u> האם כל יחס שאינו סימטרי הוא אנטי-סימטרי?

האם יתכן יחס שהוא גם סימטרי וגם אנטי סימטרי?

תשובה: א) לא. דוגמא ליחס שהוא אינו סימטרי ולא אנטי-סימטרי:

⇐ $\leq$ מעל הטבעיים.

$3 \leq 2$: $2 \nleq 3$ (לכן אינו סימטרי)

אך $2 \leq 2$ (לכן הוא אינו אנטי-סימטרי)

ב) כן, היחס הריק.
כל יחס שאינו $\emptyset$ לא יכול להיות אנטי סימטרי וגם סימטרי.

דוגמאות:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$$

$$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל אנטי סימטריות?

$$A = \{1,2,3,4\}$$

דוגמאות:

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$ ✗

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ✗

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ ✗

$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$ ✓

$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$ ✗

$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$ ✗

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל אנטי סימטריות?

3

יחס נקרא טרנזיטיבי אם מתקיים $R^2 \subseteq R$

אם הוא מקיים $aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc$

דוגמאות:

היחס $\leq$ הוא טרנזיטיבי

$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

היחס $=$ הוא טרנזיטיבי.

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

היחס "מכיר את" אינו טרנזיטיבי.

היחס "להיות אחים של - " הוא טרנזיטיבי.

$$A = \{1,2,3,4\}$$

אנטיסימטריות :

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$ ✓

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ✗

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ ✓

$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$ ✓

$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$ ✓

$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$ ✗

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל טרנזיטיביות ?

דוגמאות:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$$

$$R_5 = \{(2,2),(2,3),(4,3),(4,4)\}$$

$$R_6 = \{(1,3),(3,1),(2,3),(2,2)\}$$

שאלה: אילו מהרלציות הנ"ל טרנזיטיביות?

תרגיל:

$A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,1),(1,2),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

אילו מהטענות הבאות נכונות?

1) $R\cup R^{-1}$ רפלקסיבי.

2) $R\cup R^{-1}$ סימטרי.

3) $R\cup R^{-1}$ טרנזיטיבי.

4) R אנטי סימטרי.

תרגיל:

$A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

אילו מהטענות הבאות נכונות?

1) $R \cup R^{-1}$ רפלקסיבי. ✗

2) $R \cup R^{-1}$ סימטרי. ✓

3) $R \cup R^{-1}$ טרנזיטיבי. ✗

4) R אנטי סימטרי. ✗

כי $(1,1) \in R$

$R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(4,2),(1,3),(4,3)\}$

<u>תרגיל</u>: נתון כי R יחס מעל קבוצה סופית.
נתון כי R <u>אינו</u> אנטי-סימטרי.
מכאן ניתן <u>להסיק</u>:

א) R סימטרי.
ב) יש ב R לפחות שני איברים.
ג) יש ב R לכל היותר שני איברים.
ד) יש ב R בדיוק שלושה איברים.
ה) יש ב R מספר זוגי של איברים.
ו) אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

תרגיל: נתון כי R יחס מעל קבוצה סופית.
נתון כי R אינו אנטי-סימטרי.
מכאן ניתן להסיק:

X א) R סימטרי.
X ב) יש ב R לפחות שני איברים.
X ג) יש ב R לכל היותר שני איברים.
X ד) יש ב R בדיוק שלושה איברים.
X ה) יש ב R מספר זוגי של איברים.
ו) אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

תרגיל נתון כי R יחס טרנזיטיבי וסימטרי מעל $\mathbb{N}$.

נתון כי $(1,2) \in R$.

מכאן ניתן להסיק כי:

א) R רפלקסיבי.

ב) יש R לפחות 4 איברים.

ג) יש ב R אינסוף איברים.

ד) לא יתכן R כזה.

ה) אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

תרגיל נתון כי R יחס טרנזיטיבי וסימטרי מעל $\mathbb{N}$.
נתון כי $(1,2)\in R$.
מכאן ניתן להסיק כי:

א) R רפלקסיבי.
ב) יש R לפחות 4 איברים.
ג) יש ב R אינסוף איברים.
ד) לא יתכן R כזה.
ה) אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

תרגיל: R, S הם שני יחסים מעל קבוצה A.

נתון כי $R \leq S$.

אילו מהטענות הבאות נכונות:

1) אם S סימטרי אז R סימטרי.

2) אם S אנטי סימטרי אז R אנטי סימטרי.

תרגיל: R,S הם שני יחסים מעל קבוצה A.

נתון כי $R\subseteq S$.

אילו מהטענות הבאות נכונות:

✗ 1) אם S סימטרי אז R סימטרי.

✓ 2) אם S אנטי סימטרי אז R אנטי סימטרי.

1) דוגמא נגדית: $A=\{1,2,3,4\}$

סימטרי $S=\{(1,2),(2,1)\}$

לא סימטרי $R=\{(1,2)\}$

2) **הוכחה:** S אנטי סימטרי. $\Leftarrow$ $S\cap S^{-1}=\emptyset$

$R\subseteq S \Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1} \Rightarrow R\cap R^{-1}\subseteq S\cap S^{-1}$

ולכן $R\cap R^{-1}=\emptyset$.

מ.ש.ל.

שקילות

הגדרה:

יחס שהוא טרנזיטיבי, סימטרי, ורפלקסיבי
הוא יחס שקילות.

חלוקה של קבוצה A היא קבוצה של תת קבוצות לא ריקות של A כך שכל שתיים זרות, ואיחודן כל A. כל תת-קבוצה בחלוקה נקראת מחלקה.

אם $\equiv$ יחס שקילות אז נגדיר את החלוקה π המושרית ע"י היחס $\equiv$ כך:

a ו b נמצאים באותה <u>מחלקה</u> אמ"מ $a\equiv b$

ולהפך, כל <u>חלוקה</u> של A מגדירה יחס שקילות.
כך: $a\equiv b$ אמ"מ b ו a באותה מחלקה.

3 דוגמאות ליחס שקילות עבור $A=\{1,2,3,4\}$

$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2)\}$

$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3),(1,4),(4,1)\}$

$R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$

כל יחס שקילות מעל קבוצה A משרה חלוקה של איברי A.

$\frac{A}{R_2}=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$

$\frac{A}{R_4}=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$

$\frac{A}{R_3}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$

$\frac{A}{R_1}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

תרגול:

(א) עבור החלוקה הבאה כתבו את היחס שמתאים.

$\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$

תשובה:

$R = \{(1,1),(2,2),(4,4),(2,4),(4,2),(3,3)\}$

(ב) עבור החלוקה $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ מהו יחס השקילות שמשרה אותו?

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

2) נתון יחס

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$$

מצאו את החלוקה המושרית על ידו.

תשובה:

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$

בקשה מהקהל: תרגיל בנושא חיתוכים ואיחודים אינסופיים

תרגיל לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $A = \{k, 2k, 3k, \dots\}$

א) $\bigcap_{k=1}^{5} A_k =$

ב) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} =$

ג) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k =$

<u>תרגיל</u> לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $A=\{k,2k,3k,\dots\}$

א) $\bigcap_{k=1}^{5} A_k = \bigcap_{k=3}^{5} A_k = A_{60}$

$A_1=\{1,2,3,\dots\}$

$A_2=\{2,4,6,8,\dots\}$

$$\begin{cases} A_3=\{3,6,9,12,\dots\} \\ A_4=\{4,8,12,16,20,\dots\} \\ A_5=\{5,10,15,20,\dots\} \end{cases}$$

1) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k} = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \dots\dots = A_2$

$A_2 \supseteq A_{2k}$ k לכל

2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \phi$

לפתור בממ"ח 02 את כל השאלות

חוץ מ: 15,19,20

בממ"ן 12 שאלה 1 ב

שאלה 2 ב ד

לקרוא את כל פרק 2 ולהתחיל את פרק 3