

מפגש 12

תורת הגרפים

פיתוח 2-1

.

.

.

לראשית'ם:

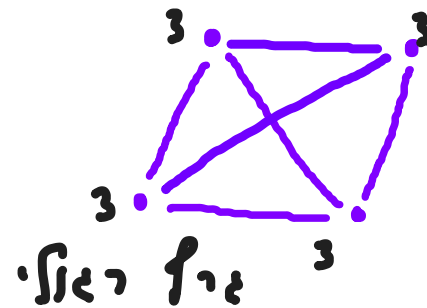
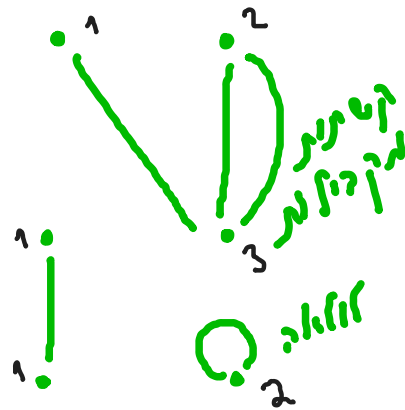
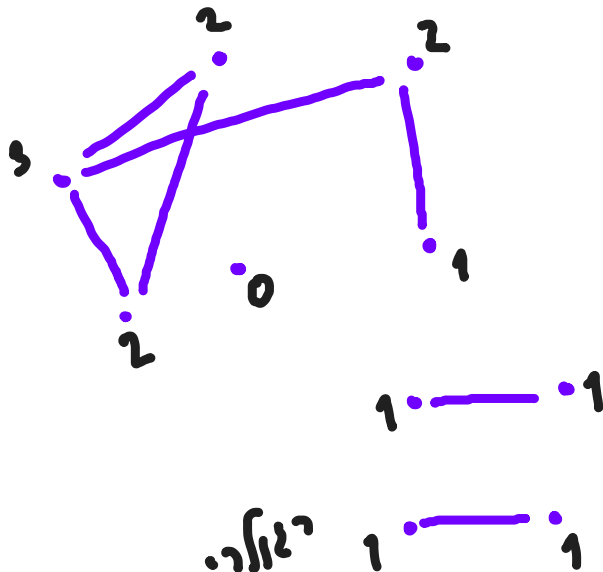
- גרף $G = (V, E)$ סוגו V קבוצת ה צמתים
- צומת v קבוצת הקשתות
- קשת e

• גרף פשוט - לא תחתית ולא קשתות מקבוצות

• ציגה של צומת $deg(v)$

• גרף רגולרי

צולגות של גרפים:



משפט: סכום הדרגות הנ"ל שווה לפעמיים מספר הקשתות.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

מסקנה: סכום הדרגות הוא זוגי.

מסקנה: בט גרף מספר הזוגות בדרג זוגית.

מסקנה: אם בגרף מספר הזוגות הוא אי-זוגי, אז יש בו לפחות צומת אחד עם דרגה זוגית.

תרגיל:

הזמר ק"מ גדול פגוט צמ 6 צורות שגורגור מלחם
הם יורסורים האלה:

א/מ ב/א, ג/א, ד/א, ה/א, ו/א.

א) 1 2 3 4 4 5

ב) 1 2 3 3 4 5

ג) 1 2 3 4 5 5

ד) 0 2 3 3 3 5

ה) 1 1 1 1 1 1

ו) 1 1 1 1 1 5

תרגיל:

הזרם קיים בדף פשוט עם 6 צמתים שגודלן או מזהם
 גם יחסים האלה:

אם כן, מנסה . אם לא, נמנה.

(א) X 1 2 3 4 4 5 סדר צמתים או-גודל.

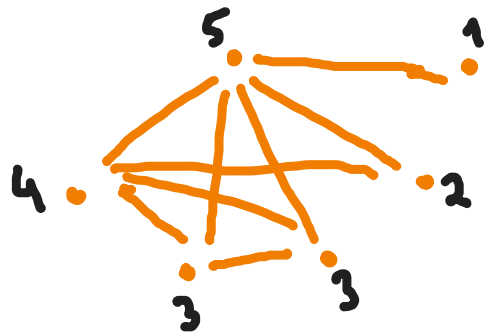
1 2 3 3 4 5 (ב) ✓

(ג) X 1 2 3 4 5 5 ①

(ד) X 0 2 3 3 3 5

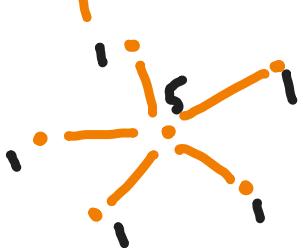
1 1 1 1 1 1 (ה) ✓

1 1 1 1 1 5 (ו) ✓



2 צמתים עם דרגה 5
 \Rightarrow הדקות כולן ≤ 2 .

יש צומת עם דרגה 5 \Rightarrow הדקות כולן ≤ 1 .



1 1 1 1 1 1
 1 1 1 1 1 1

גרמאן:

הונטן נ דא גול פגוט (שיש דו אכיוורטטען לערנען)
יש אפיוורטטען צאמטשם באלץ אונטער זונען.

גרסה:
הוכחנו כי כל n (שיש בו אינסוף מסלולים)
יש אינסוף מסלולים במרחב n -ממדי.

הוכחה: לפי עקרון האינדיקציה.

נניח שיש n צמתים בגרף.

הגרף בעל n ואלו הנדונים המקסימלי של צמתים הוא $n-1$.
כל הנדונים המקסימליים הם $\{1, 2, \dots, n-1\}$.
לא ייתכן גרף בעל n צמתים איננו צומת עם $n-1$
ואם צומת עם n צמתים.

ואכן יש רק $n-1$ צמתים שאינן מקסימליות.
יש n צמתים.

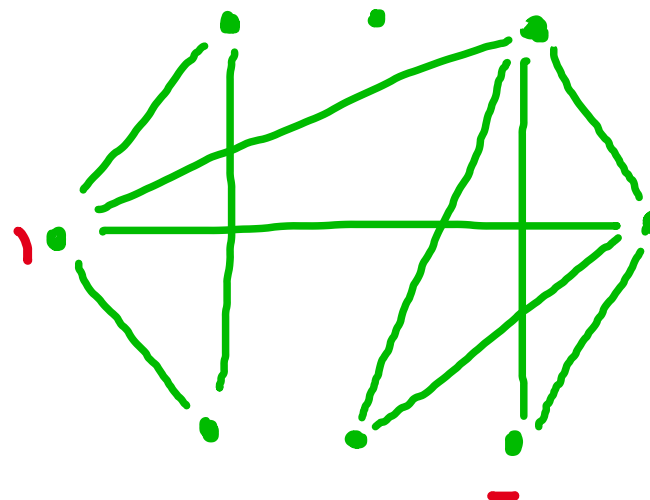
ואכן לפי עקרון האינדיקציה יש לנו צמתים עם אינדיקס n .

ל.ל.ל.

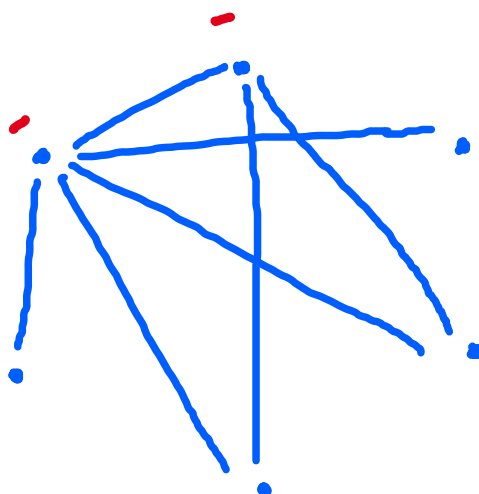
תרגיל: הוכיחו כי בכל קבוצה בגר מספר זוגי של אגדים
 יש איכות שני אגדים של מספר הגדרים
 השלבים שלהם תואו זוגי.

דוגמאות:

א



ב



תרגיל: הוכיחו כי בכל קבוצה בת מספר זוגי של ארבעים

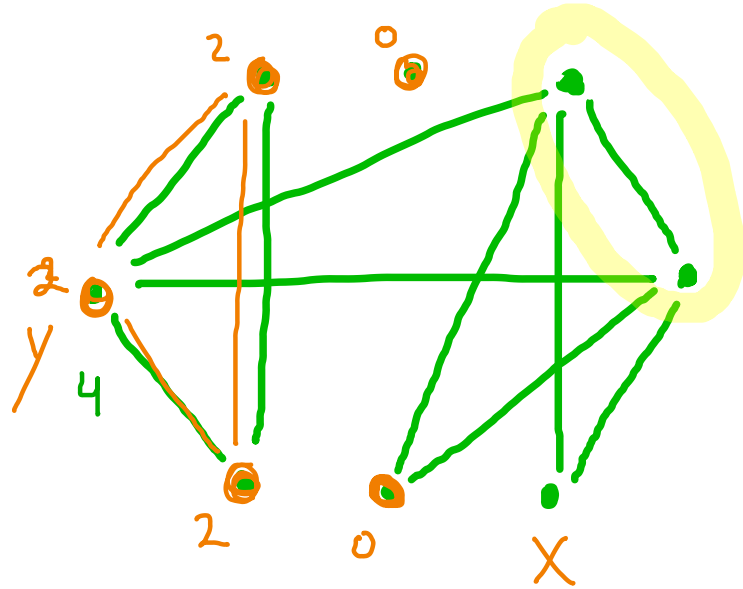
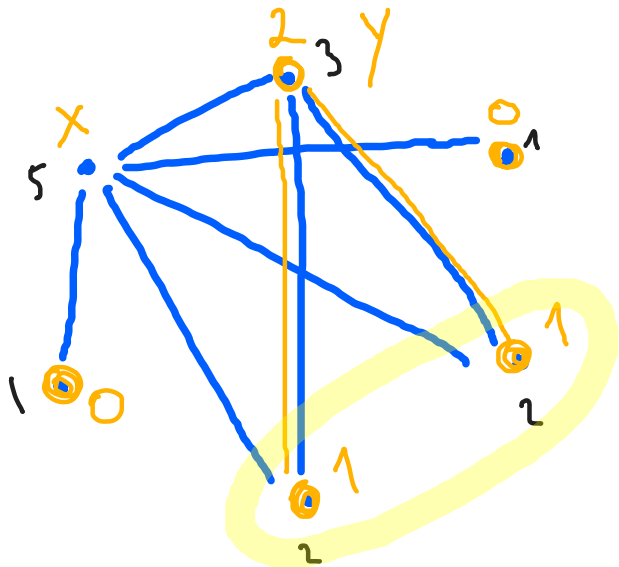
יש לפחות שני ארבעים של מספרים החדשים

השלמים שלהם הוא זוגי.

הוכחה: נניח שכל בן בא איש הוא צאטר. וסוד בקבוצה

בין שני ארבעים אחת הם מכירים (אדם מאדם)
 צולמא/ור: קובצו כל כנס. (אם מספר זוגי של צמחים)
 (a)

(b)



הוכחה: נגדיר g : כל אחד דקדוקה חוץ צולח דגור.
מכר בין שני צמחים דקדוקה יאמץ הארעם מכירים יאמץ.
קבוצה g עם מספר זוגי על צמחים.

יש קטן אנטינומי:
(א) יש דגור צולח (אנטינומי אחד ככה) שהדוגה עלו היא אי-נומי.
(ב) כל הצמחים עם דוגה זוגית.

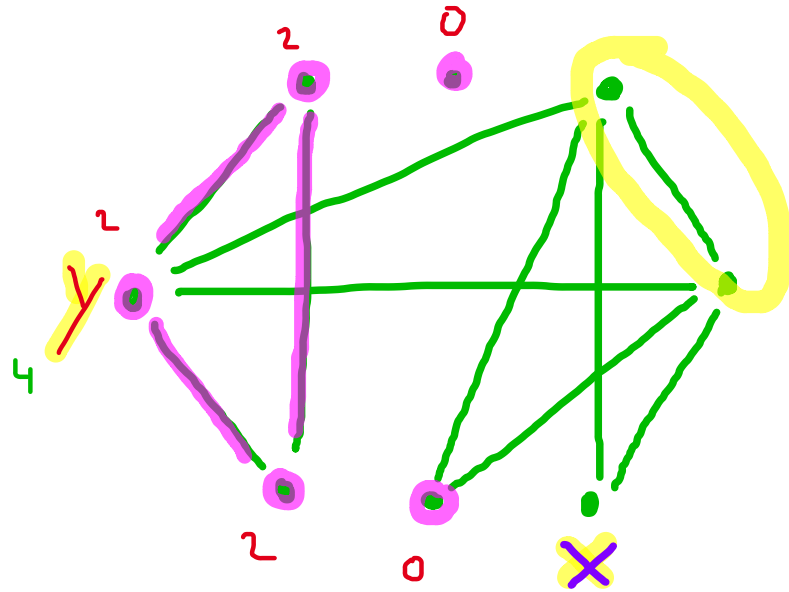
מקרה ①:

יש צולח עם דוגה אי-נומית. נקרא A .
אם נסתכל על קבוצת המכנים שלו - קבוצה תת-זוג עם מספר
אי-זוגי על צמחים.
ולכן, לפי ההסקנה יש בתת-זוג צולח שהדוגה עלו היא זוגית,
נקרא A \bar{A} .
הדוגה על \bar{A} נחלק תת-זוג היא מספר הארעם \bar{A} מכיר מתוך
קב' הארעם \bar{A} מכיר. אלו דיוק המכרים המשותפים $A \cap \bar{A}$.
הדוגה הזאת היא זוגית.
קבוצה מספר המכנים המשותפים $A \cap \bar{A}$ היא זוגית. ג.א. ②

תרגיל: הוכיחו כי בכל קבוצה בגר מספר זוגי של אגדים
 יש אבות שני אגדים שלהם מספר הגורים
 הגלגלים שלהם הוא זוגי.

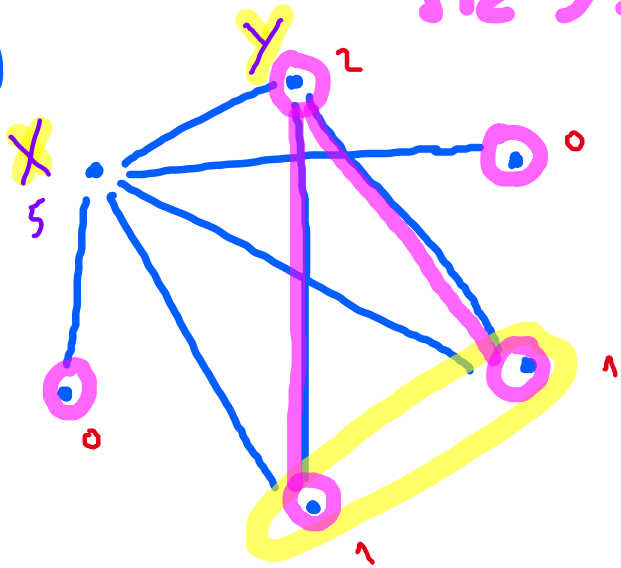
דוגמאות:

(a)



גר-זוגי

(b)



מקרה (כ) - כל הדואר הן יא.א.
(נדרש) צומר מאד וקראו לו א.

א מכר מספר זוגי של ארשים, ואכן מספר הארשים
שיווא לא מכר הווא אי-זוגי.

(סה"כ יש מספר זוגי של ארשים בתוכם א. זכר
יש מספר אי-זוגי של ארשים חולף ה. א.)

מכיוון הווא מכר מספר זוגי, כלל יש מספר אי-זוגי
שיווא לא מכר.)

רשימה של יקבוצת הארשים ש א לא מכר כתת-זרף.
(כתת-זרף עם מספר אי-זוגי של צמחים)

אכן חכי המסקנה מקומו יש בו צומח עם זרזה זוגית
מקרא לו - צ.

הזיהה של צ בתוך התת-זרף היא זוגית.
הזיהה של צ קיבל המקורי הווא זוגית.

ואכן מספר הארשים ש צ מכר ועם א מכר הווא זוגי. (צ לא מכר
א.א.)
כלל מספר הגברים המשתתפים הווא זוגי. ג.א. (ד)

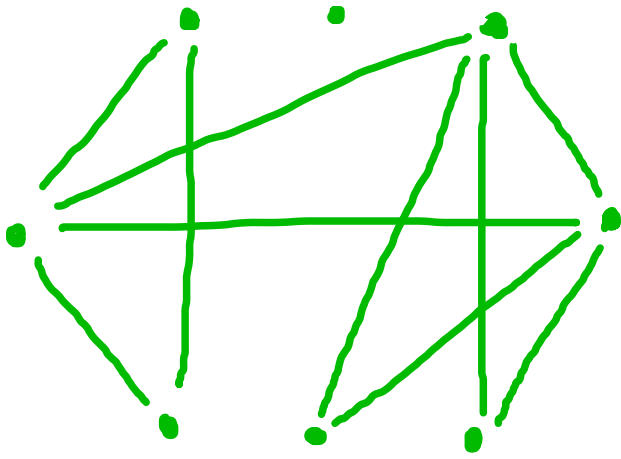
צור מוגלגים:

מסלול

מצע

גוף קשיר = בין כל שני צמתים יש מסלול
רוב קשירות

צאגלגל:



מסלול צמתים יש מסלול

גרעול:

רעון גוף בטוח עם 100 צמתים, שרשרת 6 צומת
הוין אפחות 50.
הוכחו שהגוף קשיר.

צור מולגים:

לסלול

לצל

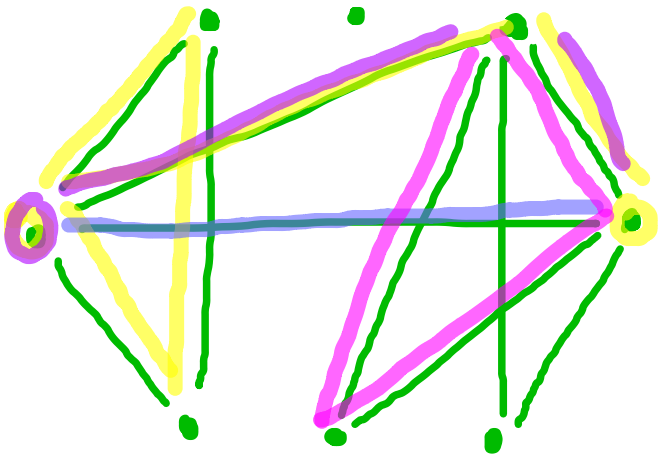
גוף קטיר - בין

רוב קטיר - בין
סני צלמים
יש לסלול

גרעול:

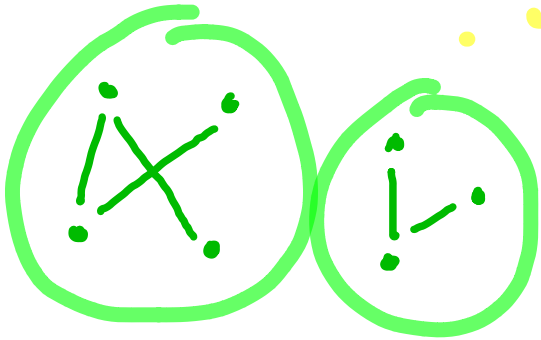
רעון גוף בטול עם 100
הוין אפחור 50
הוכחו שהגוף קטיר

צולגל:



לצל
קאורק 3

לסלול
קאורק 5



צולגל:

גוף עם 2 נקדי
קטירור

הוין אפחור 50
הוכחו שהגוף קטיר

הוכחה:

נניח בשלילה שהגורף אינו קשור.

אז יש בו איזומורפיזם עם \mathbb{R}^2 קשיחות.

לפי משפט 4.1 הרכיב הקטן להדחיהם. יש בו לא יותר מ-50
צמתים.

אכן הצורה המקומית ביותר (מתוך הרכיב הזה) היא 49 זוג
ג'ומטרי.

אבל נתון שהצורה של \mathbb{R}^2 צומת היא איזומורפיזם 50.

סתירה!

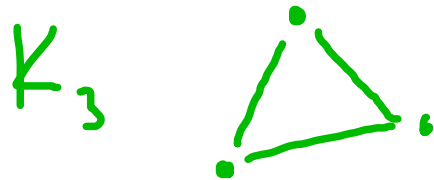
לפיכך - הגורף קשור.

למשל.

הגדרת המלאכה K_n - גרף פשוט עם

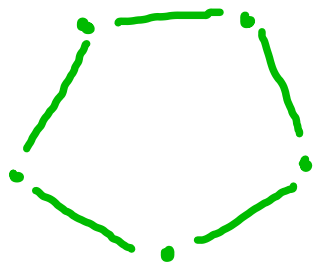
n צמתים, וכל הקטעים
האפשריים. (כל קטע
אלו המאחזים)

צולעים:



שאלה: כמה קטעים יש בגרף המלאכה K_n ?

גרף מכלים \bar{G}



צולעים: אם G הווי הגרף הדינ:

מהו הגרף המכלים?

$$\frac{\sum \deg(v)}{2} = |E|$$

הגדרת המלאן K_n - גרף פשוט עם n צמתים, וכל הקשתות האפשריות. (כל קצה הוא מחובר לכל שאר הקצוות)

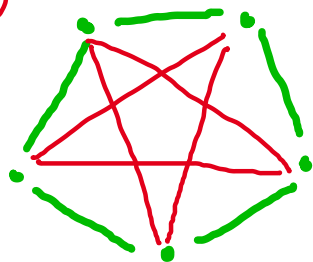
צולע מלא:



שאלה: כמה קשתות יש בגרף המלא K_n ?

תשובה: K_n הוא גרף רגולרי שהדרגה של G קבועה היא $n-1$.
 \implies ולכן למספר הקשתות הוא:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = |E|$$



- הצמתים כמו של G הקשתות הן בדיוק הקשתות של G הן הן הגרף הנגדי:

\bar{G}

גרף מכלים

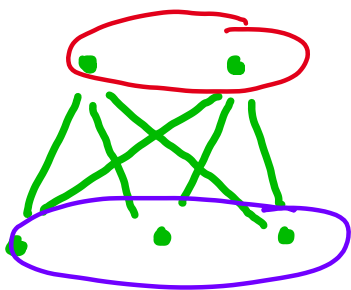
צולע מלא: אם

מהו הגרף המלא?

: 12213

שיתן
 תגובות הולמים
 (A : B) כן
 שאין
 תגובות
 בראש
 (איתה תגובה
 (איתן תגובות
 ב' (קד' אקד')

31/12/2019

 $K_{2,3}$

ע: כמה קבועים יש בגזירה?
פ: 2

משפט: גרף (שיט בו רבחויות שט צמתים) הוא גרף 1-3331
אברהם אין בו מעלה באוירק אי - דאגו.

תרגיל: $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ נונה זיף.

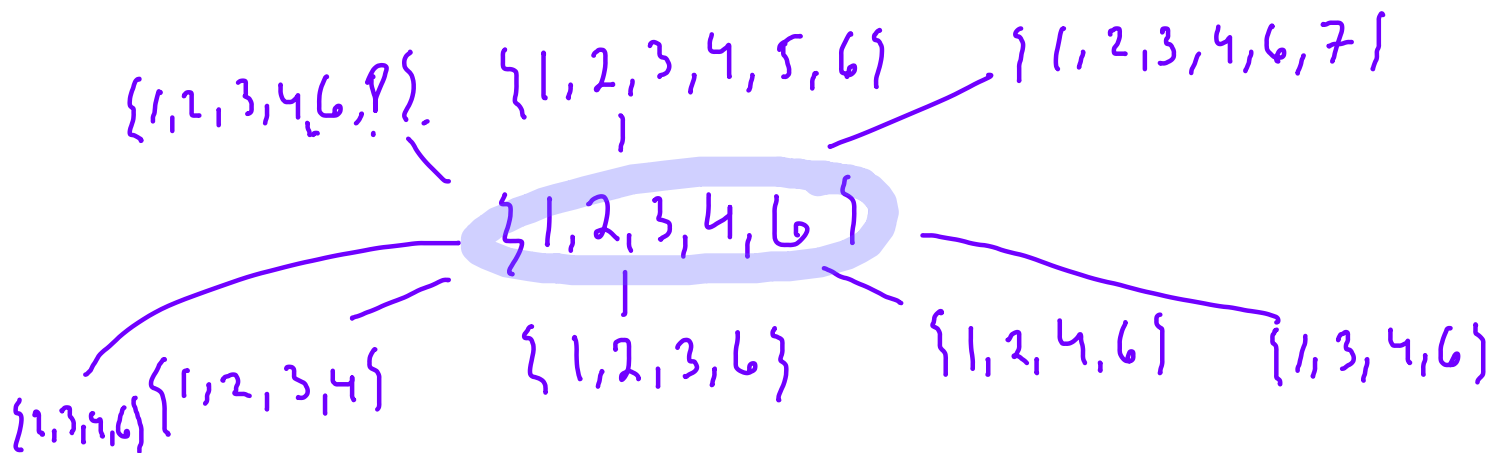
כא תת-קבוצה של A הוא צומת בגרף.

הקשרים בין הקבוצות של ציאוריות הסה המכילות איחוס
ההכנה.

(א) הראו שהגרף הוא רגולרי.

(ב) חשבו את מספר הקשרים בגרף.

(ג) הוכיחו שהגרף הוא 3-צבדי. (הראו חלוקה של הולגותים לשתי קבוצות)



הוכחה. יהי v צומת כלשהו. $\lambda - v \leq \lambda$

(טלן ב $k = |v|$ היורה
 נחשג אר v

בזימלגת הסה יס א תת-קדולת
שנמצאות "מתחת" ל V ומחוגרת אליה.
ויס א-8 תת-קדולת להצ'א (שמולחת)
ואת היצוגה של V ה'א בד'ק:

$$k + 8 - k = 8$$

זה נכון מאד צדקה.
מסקנה: הגורל חזק ונצחי.

(ב) הערך הכולל של המכשיר.

היצא הכול וגזור. יש קו
הירוק = סכום הזיגזג = $\frac{2^8 \cdot 8}{2}$ ואם מספר
. $2^{10} = 2^7 \cdot 2^3$

(ג) קבוצה $I =$ הנתונים שהם בת-קבוצות של A
 קבוצה $\Pi =$ "אי-דאגיות"

צורת V מתוקר בקשת יי אצבעות בלתי זוגיות שאינה נשא
(זמ אחר ילד יתע (נזל) או זמ אחר אחר פחור (מתחתיו).

הכנה: $A = \{1, 2, \dots, n\}$ נניח $n \in \mathbb{N}$.

כל תת-קבוצה של A הוא צומת בגרף.

הקשתות בין הקוים של דיאגרמת הסה המלאכה אינם
יהיו.

(א) הראו שהגרף הוא רגולרי.

(ב) חשבו את מספר הקשתות בגרף.

(ג) הוכיחו שהגרף הוא 1-צביר. (הראו חלוקה של הולמרים לזוגות קדומים)

פתרון:

(א) נחשב את הצורה של צומת כלשהו.

יהי $X \subseteq A$ צומת בגרף. נניח $|X| = i$. $\{1, \dots, n\}$

הוא מחולק לקשתות מצלילן אל היתת-קדומים של A מהכילים
את X וצביר אינר אחר. יש למצוא $i-8$ קשתות.

הוא מחולק לקשתות מתחתיו אל היתת-קדומים של A מהכילים
היוצות אינר אחר X . יש למצוא i קשתות.

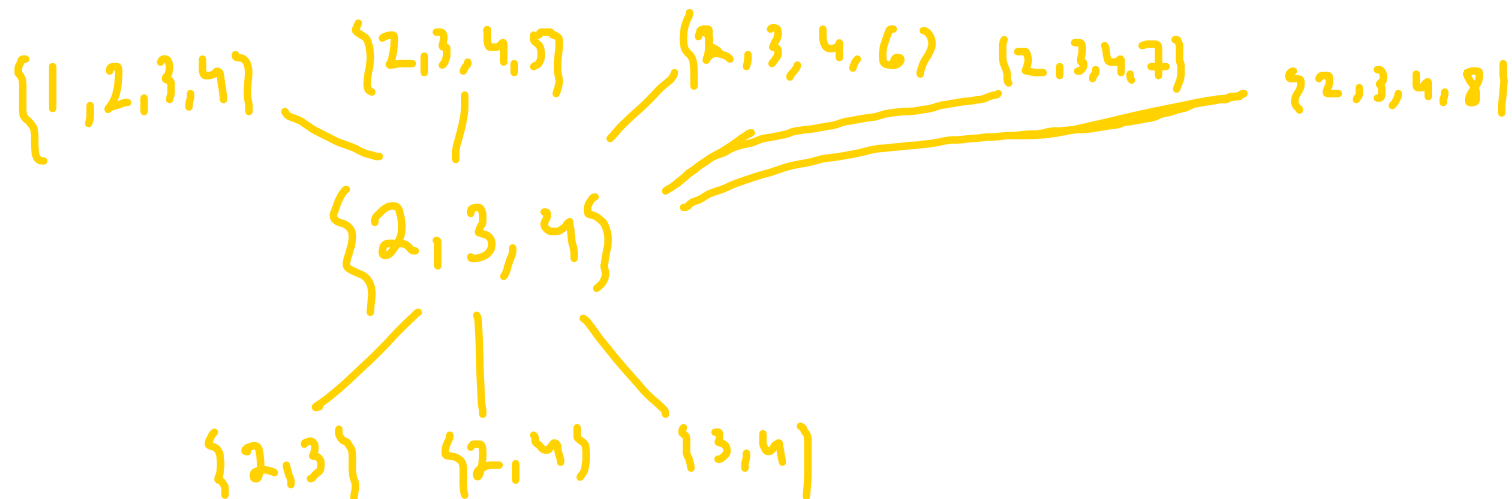
אם נחליף י: : $i-8$ קטנות.

אם נחליף י: i קטנות.

בסוג X מחזיק i : $i-8$. י: i ! 8 קטנות.

לסקנה: הדינא של X היא 8 .
בה נתון 16 ציבור גדול. י: i הוא יחיד.

31213:



(ד) מספר הקטנות = $\frac{\text{סכום הזוגות}}{2}$
 גדול וגדולו סכום הזוגות = 2^8 מספר הזוגות ככול הזוגות.
 במקרה שלנו :

$$2^8$$

מספר הזוגות
 הזוגה היא 8

ולכן מספר הקטנות הוא :

$$\frac{2^8 \cdot 8}{2} = 2^{10}$$

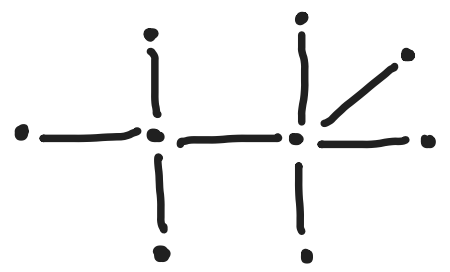
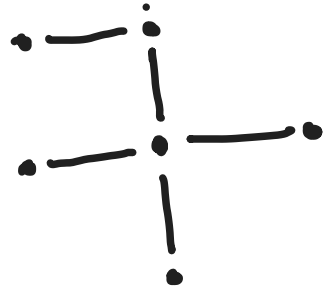
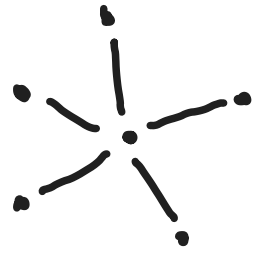
(ה) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{יתר-קדולות עם מספר זוגי של איברים.}$
 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{אין-זוגי של איברים.}$

אם $|X|=i$ אז השכנים של X הם הקדולות
 עם $i+1$ איברים (הזוגי) או עם $i-1$ איברים
 (הזוגי). כך מקנה אין קטנות בין יתר-קדולות עם ציולמות
 עם אותה טעיות.

צור מושגים:

יצף - גוף קטן ולא מוגזג.

צאגאית:

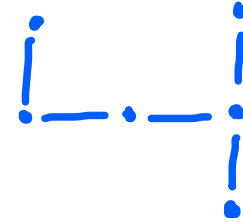
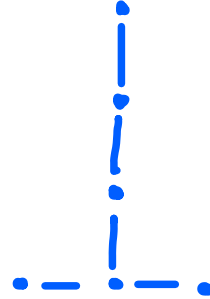
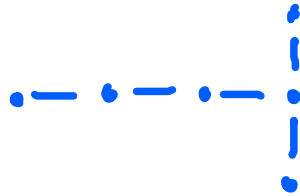


← יצר - גוף שט רכיב קטנות שלו הוא צף. \equiv גוף קטן מוגזג.

צלה - צומת בצף שהצורה שלו היא 1.

גופים אינומורפיים -

צוגמא:



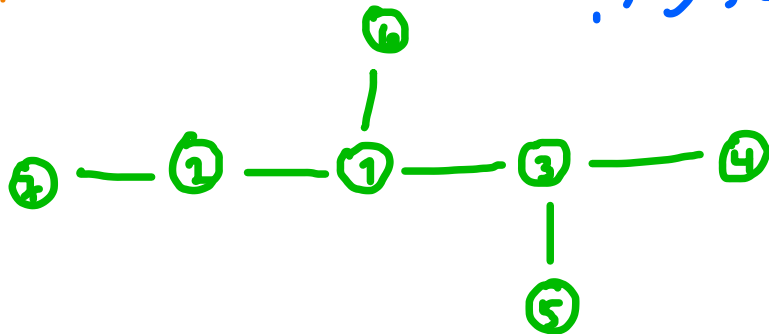
כל הגופים הן אינומורפיים.

גופים מתאימים.

גופים שיש "עלמור" אצלם גופים.

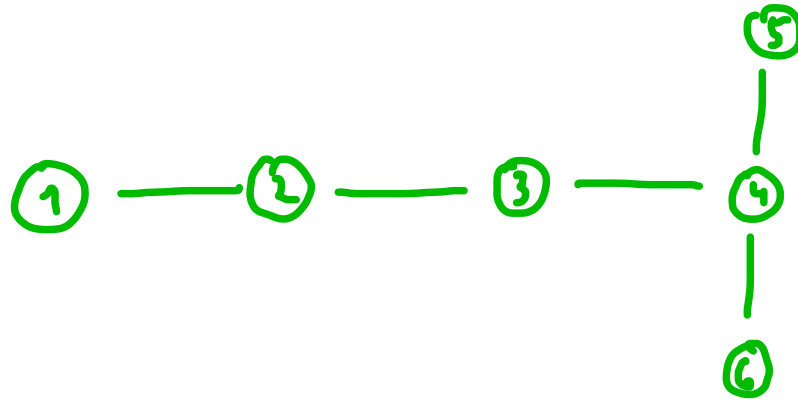
צוגמא:

צף מתאים:

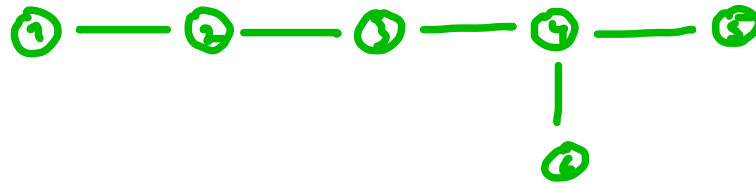


המספרים 1 עד 5, כאלו
"היו" להם יוצגים

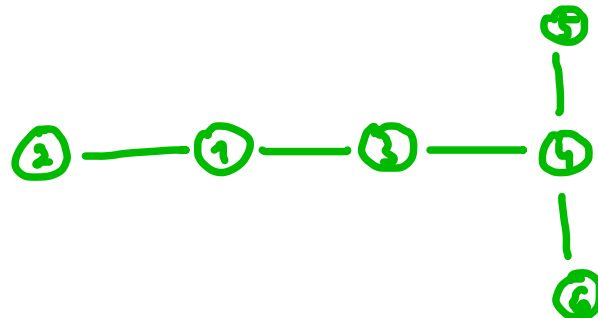
קנינים למיל'ים



אינאורני אורף :



אבא אינאורני אורף :



להגות:

הצעות המאמר שקולות:

א) G הוא צף. $g =$ גרף קטיר וכל המצבים.

ב) בין G ל- G במרחב G יש מסלול יחיד.

ג) G הוא גרף קטיר מינימלי.

ד) G הוא קטיר ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ה) G אין מעגל ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ו) G אין מעגל אבל אם נוסף קטיר נשבר מעגל.

עצים מילגים / סדרות פראר

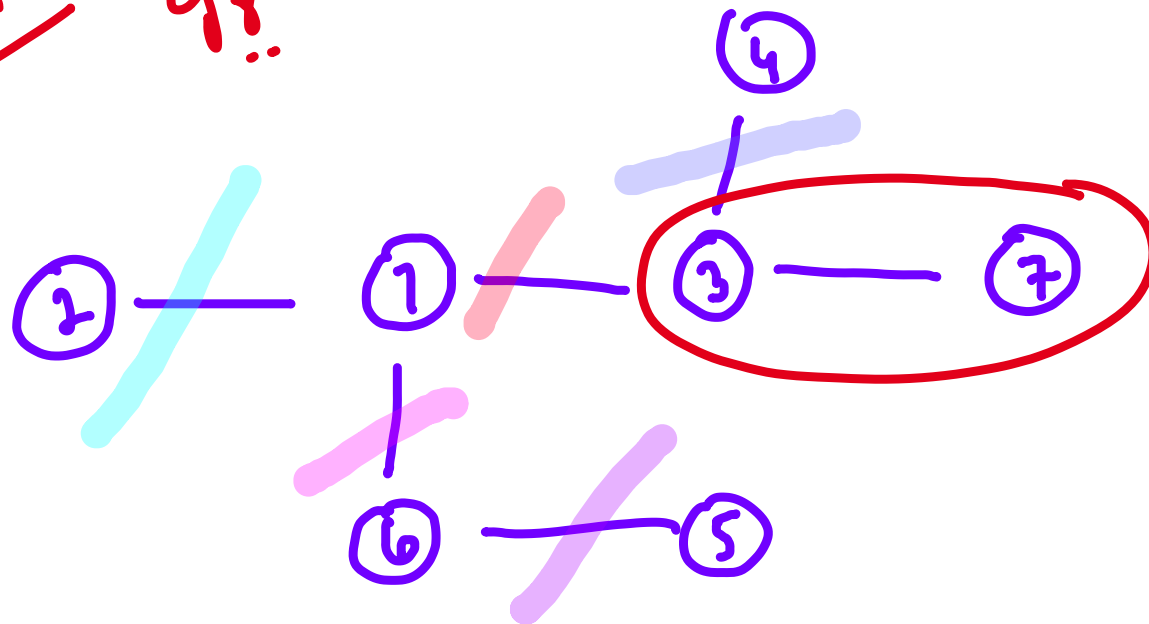
יציאת סדרת פראר :

(1) מוחקים את הצלה עם המספר הקטן ביותר
ורולג'ים את המספר של הצלאת שהוא היום
מחוקר אליו.

(2) חוצרים על שלב ① על הצל המצויין.
עצ שנשארים רק 2 צלחות.

הסדרה שהתקבלה היא סדרת פראר.

1 2 3 d:



| מסלול | מסלול |
|------------|-------|
| 5, 7, 4, 2 | 6, 1 |

1 3 6 1 3

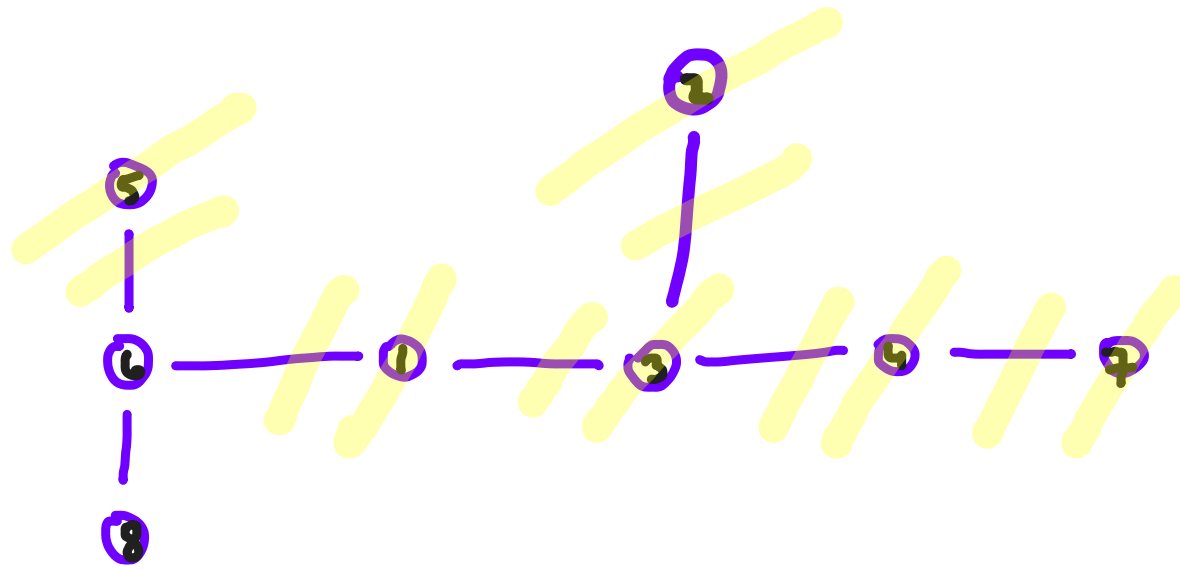
סדרת פרופר

השאלה של יוקל :

על צמ 2 במת'ם קב'וק.



ה סצרה - ריקה \emptyset .

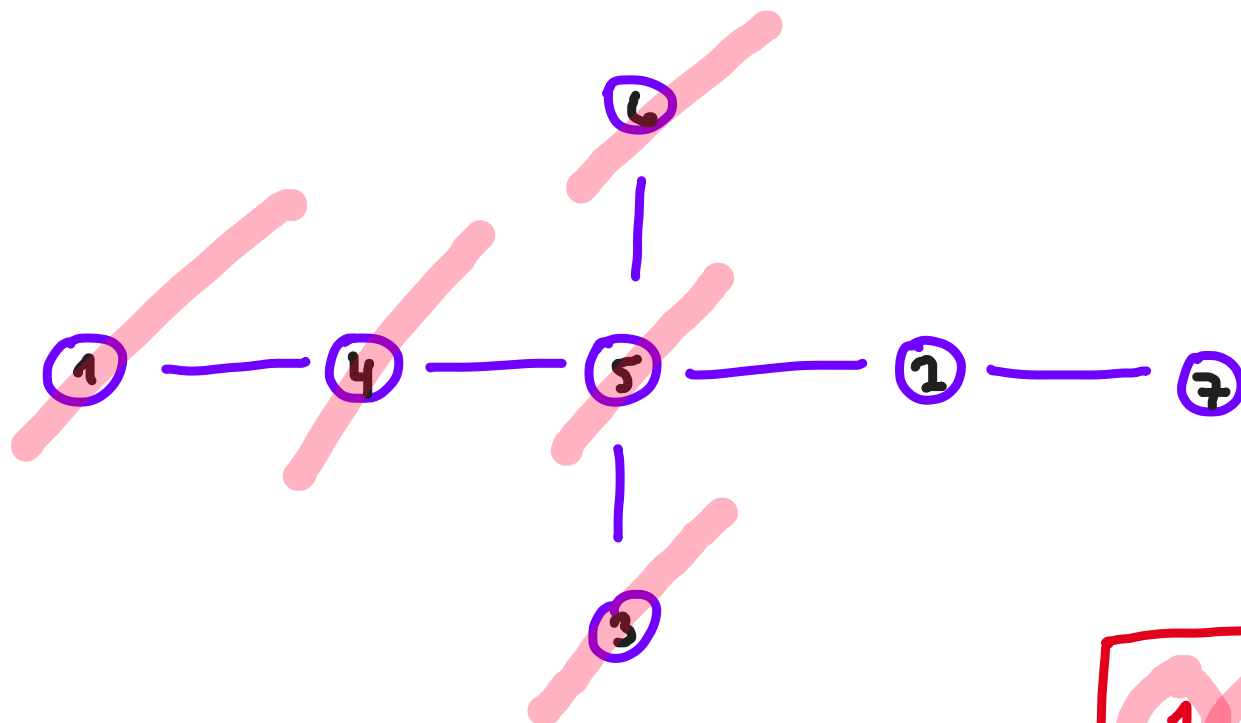


3 2 1 4

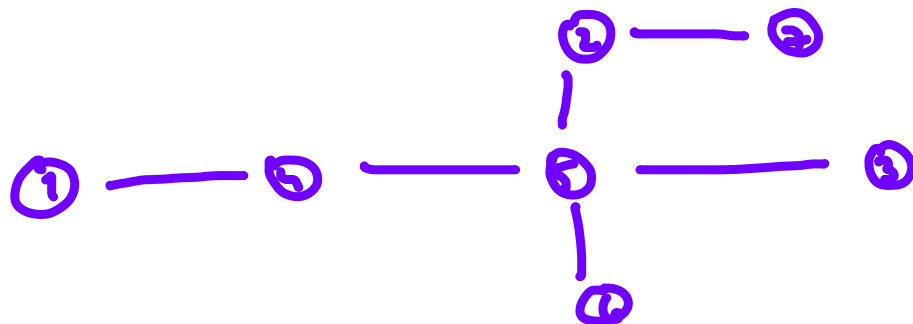
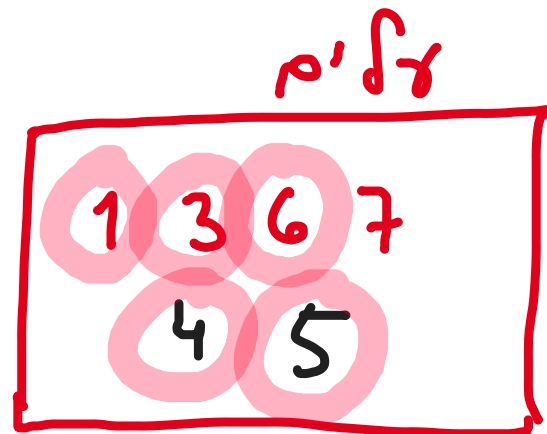
| פ'ח | 10 | נ | נ |
|------------|----|---|---|
| 5, 8, 2, 7 | | | |
| 4 | 3 | 1 | |

364316

2 k12/3



4 5 5 5 2 113011



תכונות סדרת פראפר:

(1) אורך הסדרה $= 2-n$ (ח מספר הזוגות)
קצר

(2) העלים לא מופיעים בסדרה.

(3) כל זוגת (שאנן עליה) מופיע בסדרה

$d-1$ פעמים (כאילו ג-הדרגה שלו)

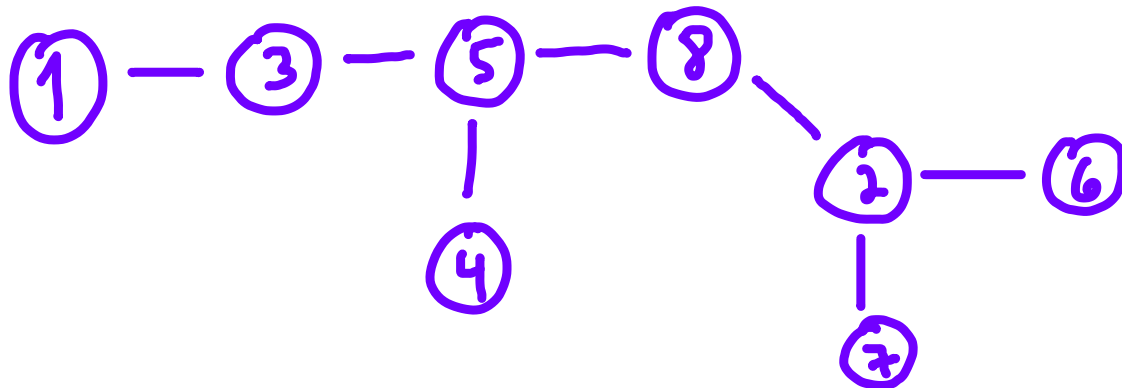
3/2/21 - קהנת סדרה - נבנה את הדף המתאים

355822

מחסן הוצאים

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 | 7 |
| 3 | 5 | 8 | 2 |

(א) הסדרה באורך ≤ 6 הצלמים הם $\{1, 2, \dots, 8\}$
(ב) הוצאים הם: 1, 4, 6, 7

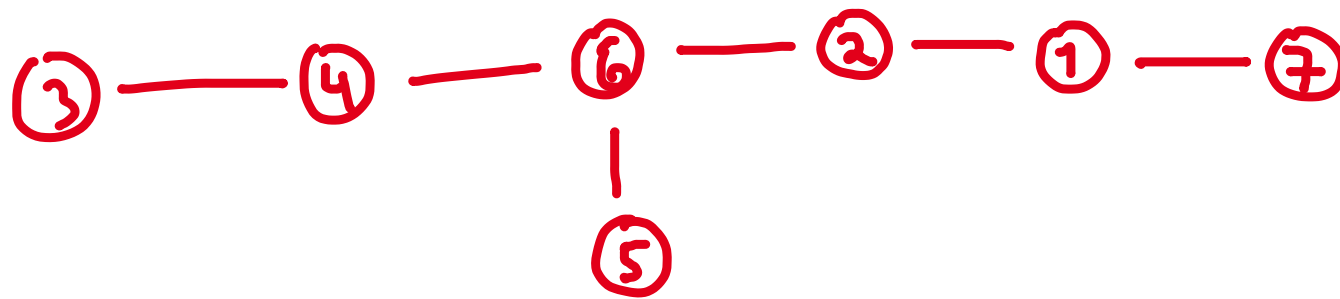


3/8 3/4

4 6 6 2 1

0.376

3 5 7 1
4 6 2



הרציון: בגאולה זו נתיחם לצדק עם ה

א) כמה צבים טאג
 ב) לעצאן לעסער
 3 לערנ'ם וועטא'נ'ם
 יג?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 קיין העלם קען

געצייג
 1, 2, 3

אקרווא למרגש הבא

אלר פיקים 3-4 בטרר הזורב.

לפטר שאלר 1-4

! 10-14 ברמ" 05

ושאלר 2 ברמ"ן 16