קבוצות – סיכום פרק 1

1.1 הגדרת שוויון של קבוצות :

הקבוצות A ו-B שוות אם ורק אם יש להן בדיוק אותם האיברים:

$$\boldsymbol{A=B \leftrightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B)}$$

$$\boldsymbol{A=B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$$

1.2 הגדרת תת קבוצה:

$$\boldsymbol{A \subseteq B}$$

$$\boldsymbol{x \in A \rightarrow x \in B}$$

כלומר, עבור כל x , אם x איבר של A אז הוא גם איבר של B

1.3 הגדרה – הקבוצה הריקה

קבוצה ריקה, הינה קבוצה שאין בה איברים

עבור כל קבוצה A מתקיים $\phi \subseteq A$

תכונה: הטרנזיטיביות של ההכלה

$$\mathbf{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$$

1.5 הגדרה – איחוד קבוצות

$$\mathbf{A \cup B \equiv \{\boldsymbol{x}|x \in A \vee x \in B\}}$$

תכונות האיחוד:

קומוטטיביות (חילופיות): $\mathbf{A \cup B} = \boldsymbol{B} \cup \mathbf{A}$

אסוציאטיביות(קיבוציות): $\mathbf{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$

איד-מפוטנטיות: $\mathbf{A \cup A = A}$

איחוד עם הקבוצה הריקה: $\mathbf{A} \cup \phi = \mathbf{A}$

איחוד עם קבוצת העולם: $\boldsymbol{A \cap U = A}$ (עמ' 26 למטה, תורת הקבוצות)

תכונת איחוד נוספת: $\mathbf{A \subseteq A \cup B\,, B \subseteq A \cup B}$

(עמ' 10)

1.7 הגדרה – חיתוך הקבוצות

$$\mathbf{A \cap B \equiv \{x|\ x \in A \wedge x \in B\}}$$

תכונות החיתוך:

קומוטטיביות (חילופיות): $\mathbf{A \cap B} = \boldsymbol{B} \cap \mathbf{A}$

אסוציאטיביות (קיבוציות): $(\mathbf{A \cap B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B \cap C})$

איד-מפוטנטיות: $\mathbf{A \cap A = A}$

חיתוך עם הקבוצה הריקה: $\mathbf{A} \cap \phi = \phi$

חיתוך עם העולם: $\mathbf{A \cap U = A}$ (עמ' 26)

1.3.4 הדיסטריביוטיות – חוק הפילוג

מזכיר את העיקרון של כפל מעל החיבור $a(b+c) = ab + ac$

חיתוך מעל האיחוד: $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

איחוד מעל החיתוך: $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

חוקי הספיגה (האבסורבציה)

$$\mathbf{A \cup (A \cap B) = A}$$

$$\mathbf{A \cap (A \cup B) = A}$$

1.8 הגדרה – הפרש

$$\mathbf{A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}}$$

ההפרש $A - B$ הוא קבוצה, שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B

1.9 הגדרה – המשלים

ההפרש $\mathrm{U - A}$ מסומן ב $\mathrm{A^c}$. ונקרא המשלים של A

אם כך, המשלים של A הוא כל מה שלא בתוך A וכן נמצא ביוניברס (U)

<u>1.4.3 כללי דה-מורגן</u>

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \cap \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$$

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \cup \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$$

<u>עם כמתים:</u>

$$\neg\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} = \exists \mathbf{x} \notin \mathbf{A}$$

$$\forall \mathbf{x} \notin \mathbf{A} = \neg\exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}$$

<u>1.4.4 עקרון הדואליות (עמ' 25)</u>

יהי נתון ביטוי באלגברת הקבוצות. נבצע בו בעת ובעונה אחת את ההחלפות הבאות:

כל סימן איחוד $\cup$ יוחלף בסימן חיתוך $\cap$, ולהפך.

כל הופעה של $\boldsymbol{U}$ (הקבוצה האוניברסלית) תוחלף בהופעה של ϕ, ולהפך.

הביטוי המתקבל לאחר החלפות אלו נקרא **<u>דואלי</u>** לביטוי הנתון.

<u>לדוגמא:</u>

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$$

<u>שאלה 1.22 - הפרש סימטרי (עמ' 27)</u>

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

קבוצה המורכבת מכל איברי A שאינם ב-B, ומכל איברי B שאינם ב-A.

<u>תכונות ההפרש הסימטרי:</u>

קומוטטיביות (חילופיות): $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \boldsymbol{B} \oplus \mathbf{A}$

אסוציאטיביות (קיבוציות): $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})$

בין קבוצה לבין עצמה: $\mathbf{A} \oplus \mathbf{A} = \phi$

עם הקבוצה הריקה: $\mathbf{A} \oplus \phi = \mathbf{A}$

<u>שקילויות וזהויות שימושיות מספר מבוא ללוגיקה (עמ' 24)</u>

א. **<u>שלילה כפולה:</u>** $\neg\neg\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$

ב. **<u>כללי דה מורגן:</u>**

$$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B})$$

$$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv (\neg\mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{B})$$

ג. **<u>עקרון ה-contraPositive:</u>**

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv (\neg\mathbf{A}) \rightarrow (\neg\mathbf{B})$$

ד. **<u>הבעת קשר חץ (אם ← אז) בעזרת קשרים אחרים:</u>**

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\big(\mathbf{A} \wedge (\neg\mathbf{B})\big) \equiv (\neg\mathbf{A}) \vee \mathbf{B}$$

ה. **<u>שקילויות עבור חץ כפול:</u>**

$$\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}) \equiv (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \big((\neg\mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{B})\big)$$

ו. **<u>זהות חסרת שם:</u>**

$$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{C}$$

***קיבוציות חילופיות ופילוג חלים באופן מאד דומה בדוגמא של תורת הקבוצות ואין צורך להדגים שוב**

קבוצות – סיכום פרק 2

2.1 הגדרה - סדורים

זוג סדור רושמים בצורה $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ כאשר $\boldsymbol{a}$ הוא האיבר הראשון בזוג ו-$\boldsymbol{b}$ הוא האיבר השני.

שוויון בין סדורים: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d})$

2.2 הגדרה – מכפלה קרטזית

$A\times B$ (מכפלה קרטזית של A ו-B)

הגדרה פורמאלית: יהיו A ו-B קבוצות. קבוצת כל הזוגות הסדורים:

$$\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{B}\}$$

זהויות ידועות על מכפלה קרטזית:

מכפלה קרטזית עם קבוצה ריקה: $\mathbf{A}\times\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}$

חוק הפילוג – קרוס מעל האיחוד\חיתוך:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\times(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})$$

הוכחה 3: $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\cap\mathbf{D})=(\mathbf{A}\ \times\mathbf{C})\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{D})$

מכפלה קרטזית היא **לא** קומוטטיבית(חילופית):

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

<u>2.3 הגדרה – רלציה (יחס)</u>

תת קבוצה (כלשהי) של $A \times B$ הינה רלציה בינארית מ*A* ל*B*.

תת קבוצה (כלשהי) של $A \times B \times C$ הינה רלציה טרנארית מ*A* ל*B* ל*C*.

יש גם רלציה *N*-ארית.. $\mathrm{A_1 x A_2 x A_3 \dots x A_n}$

<u>הגדרה 2.4 (Domain), התחום של *R*:</u>

$$\boldsymbol{Domain(R) = \{a \in A | \exists b \in A : (a,b) \in R)}$$

קבוצת כל איברי A המופיעים כאיבר ראשון בזוגות הסדורים של R.

ידוע כי תמיד: $\boldsymbol{Domain(R) \subseteq A}$

<u>הגדרה 2.5 (Range), הטווח של *R*:</u>

$$\boldsymbol{Domain(R) = \{b \in A | \exists a \in A : (a,b) \in R)}$$

קבוצת כל איברי A המופיעים כאיבר שני בזוגות הסדורים של R.

ידוע כי תמיד: $\boldsymbol{Range(R) \subseteq B}$

<u>2.6 הגדרה - רלציה הופכית</u>

תהי R רלציה מA לB. ה**רצליה ההופכית** של R, היא רלציה מB לA, המסומנת ב $\mathrm{R^{-1}}$.

הגדרה פורמאלית: $\boldsymbol{R^{-1}} = \{(\mathbf{b},\mathbf{a}) | (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbf{n}\}$

אפשר גם כך: $\mathbf{bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb}$

<u>זהויות ידועות ברלציות הופכיות</u>

הופכי מבטל הופכי: $\mathbf{\left(R^{-1}\right)^{-1} = R}$

התחום של רלציה הופכית: $\boldsymbol{Domain\left(R^{-1}\right) = Range(R)}$

הטווח של רלציה הופכית: $\boldsymbol{Range\left(R^{-1}\right) = domain(R)}$

<u>יהיו R ו-S רלציות מA ל-B:</u>

$$\mathbf{R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}}$$

$$\boldsymbol{(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}}$$

$$\boldsymbol{(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}}$$

<u>2.7 הגדרה – כפל רלציות</u>

תהא R רלציה מ-A ל-B, ותהא S רלציה מ-B ל-C.

המכפלה RS $(R \cdot S)$, של שתי הרלציות R ו-S היא הרלציה מ-A ל-C , המוגדרת כך:

$$\mathbf{RS} = \{\ (\mathbf{a}, \mathbf{c})\ |\ \exists \mathbf{b} \in \mathbf{B} : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R} \wedge (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{S}\}$$

אפשר גם כך: $a\boldsymbol{RS}c \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B} : a\boldsymbol{R}b \wedge b\boldsymbol{S}c$

**כפל רלציות מזכיר כפל שברים:* $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$

<u>זהויות ידועות בכפל רלציות</u>

כפל רלציה בקבוצה ריקה: $\mathbf{R\phi} = \mathbf{\phi} \quad , \quad \mathbf{\phi R} = \mathbf{\phi}$

כפל רלציות הופכיות: $(\mathbf{RS})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1}$

כפל מעל האיחוד: $\mathbf{R}(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = \mathbf{RS} \cup \mathbf{RT}$

כפל מעל החיתוך: $\mathbf{R}(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = \mathbf{RS} \cap \mathbf{RT}$

[2.8] כפל רלציות אסוציאטיבי (קיבוצי): $\mathbf{RS}(\mathbf{T}) = \mathbf{R}(\mathbf{ST})$

<u>2.9 הגדרה – רלציית היחידה \ רלציית האלכסון (I_A)</u>

הגדרה פורמאלית: $\mathbf{I_A} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{a}) |\ \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}$

כלומר, הרלציה המורכבת מכל הזוגות הסדורים ששני איבריהם שווים,
נקראת **רלציית היחידה** מעל *A*, או רלציית האלכסון מעל *A*.

עבור כל רלציה *R* מעל *A* מתקיים:

$$\mathbf{R}\boldsymbol{I_A} = \boldsymbol{I_A R} = \boldsymbol{R}$$

עבור *m* ו-*n* מספרים טבעיים מקבלים:

$$\mathbf{R^m} \cdot \mathbf{R^n} = \mathbf{R^{m+n}}$$

<u>2.10 רלציות רפלקסיביות (עמ' 48)</u>

רלציה $\mathbf{R}$ מעל $\mathbf{A}$, המקיימת $\boldsymbol{I_A} \subseteq \boldsymbol{R}$, נקראת רלציה **רפלקסיבית.**
כלומר, אם רלציית האלכסון מוכלת ב$\mathbf{R}$.

הוכחת רפלקסיביות: רלציה רפלקסיבית = $\mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$$

ברפלקסיבית מתקיים: $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R^2}$

מתקיים גם: $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R^2} \subseteq \mathbf{R^3} \subseteq \cdots \mathbf{R^n}$

*** לפי שאלה 2.18: אם *R* רפלקסיבית** אז גם אלה רפלקסיביות:

$\boldsymbol{R}^{-1}$ וגם $\mathbf{R^n}$ עבור כל $\boldsymbol{n}$ חיובי.

2.11 רלציות סימטריות (עמ' 49)

רלציה R המקיימת $\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R}$ היא רלציה **סימטרית.**

דרך נוספת להגדיר זאת: $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbf{R} \to (\mathbf{b},\mathbf{a}) \in \mathbf{R}$
או: $\mathrm{a}\mathbf{R}\mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{b}\mathbf{R}\mathrm{a}$

ידוע: מכפלת רלציות סימטריות, הינה רלציה סימטרית.
נתון כי R ו-S הן רלציות סימטריות, אזי $\boldsymbol{RS}$ היא רלציה סימטרית אם ורק אם R ו-S מתחלפות,
כלומר אם ורק אם $\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$.
הוכחה: $(\mathbf{RS})^{-1} = \mathbf{S^{-1}R^{-1}} = \mathbf{SR} = \mathbf{RS}$

$$\mathbf{RS} = (\mathbf{RS})^{-1} = \mathbf{S^{-1}R^{-1}} = \mathbf{SR}$$

מסקנה: אם רלציה סימטרית גם $\mathrm{R^n}$ היא רלציה סימטרית, עבור n טבעי.

2.13 רלציות אנטיסימטריות (עמ' 50)

רלציה אנטי סימטרית מוגדרת כך:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{a}) \in \mathbf{R} \to \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

2.14 רלציות טרנזיטיביות

רלציה טרנזיטיבית מוגדרת כך:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \mathbf{R} \to (\mathbf{a},\mathbf{c}) \in \mathbf{R}$$

או כך: $aRb \wedge bRc \to aRc$

בטרנזיטיבית מתקיים $\mathbf{R} \cup \mathbf{R^2} \cup \mathbf{R^3} \cup \ldots \subseteq \mathbf{R}$

שים לב! ניתן ואפשרי ש $a=c$

להמחשה:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{a}) \in \mathbf{R} \to (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) \in \mathbf{R}$$

2.15 הסגור של רלציה (עמ' 55)

סגור של רלציה *R* ביחס לתכונה מסוימת, הינה רלציה *S* המכילה את *R* + הרחבת איברים מינימלית אשר תקיים את התכונה המסוימת. (רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות וכו')

<u>דוגמא:</u> *R* הינה רלציה. *T* הינו הסגור הטרנזיטיבי של *R*.

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{R} \cup \mathbf{R^2} \cup \mathbf{R^3} \cup \ldots \subseteq \boldsymbol{T}$$

ראה עמ' 56 לתכונות נוספות

2.17 הגדרה - חלוקה של קבוצה

קבוצת תת-קבוצות זרות זו לזו של קבוצה *A*, אשר איחודן הוא *A* היא חלוקה של *A*.
תת קבוצות של *A* היוצרות חלוקה π_A , נקראות **המחלקות** או **הבלוקים** של החלוקה.

2.52 רלציית שקילות

חלוקה π משרה באופן טבעי את הרלציה R_π.

רלציית השקילות, הינה רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.

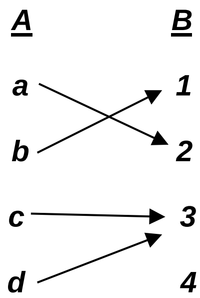
ראה עמ' 20 במצגת(אשר) שיעור רביעי

פונקציה (פונקציה של) - הגדרה [3.1]

יחס *R* מ-*A* ל-*B*, נקרא פונקציה **של** *A* ל-*B*,

אם לכל $a \in A$ מותאם ע"י *R*, איבר יחיד מ-*B*.

לדוגמא:

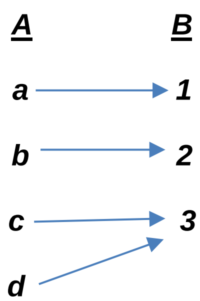


$$R = \{(a,2),(b,1),(c,3),(d,3)\}$$

פונקציה "על" – הגדרה [3.2] עמ' 78

פונקציה היא "על", אם לכל איבר בטווח (*B*) של הפונקציה, מתאים לפחות איבר אחד בתחום שלה (*A*).

$$\mathbf{f(x) = x} \ : \forall \mathbf{y} \in \mathbf{B} \rightarrow \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}$$



פונקציה חד חד ערכית (חח"ע) - הגדרה [3.2] עמ' 79

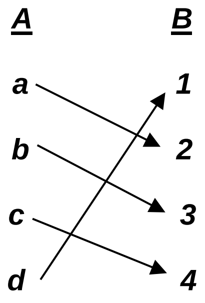
$\mathbf{f}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ הינה פונקציה חח"ע כאשר:

אם לכל $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{A}$

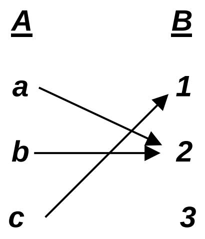
א) $\mathbf{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ (כלומר, לתמונות שוות, מקורות שווים)

ב) $\mathbf{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{f}(\boldsymbol{b})$ (למקורות שונים, תמונות שונות)

פונקציה חד חד ערכית להמחשה:



פונקציה לא חד ערכית להמחשה:



פונקציה "על"

פונקציה היא "על", אם לכל איבר בטווח (*B*) של הפונקציה,
מתאים לפחות איבר אחד בתחום שלה (*A*).

$\forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}, \exists \boldsymbol{a} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$

<u>איבר מינימלי ואיבר מקסימלי (בסדר חלקי)</u>

[3.7] הגדרה – איבר $\boldsymbol{a}$ הינו **איבר מינימלי**

איבר שהינו הקטן ביותר בהשוואה לכל האיברים שיש לו איתם רלציה**.**

[3.9] הגדרה – איבר $\boldsymbol{a \in X}$ הינו **מקסימלי**

איבר שהינו הגדול ביותר, בהשוואה לכל האיברים שיש לו איתם רלציה.

[3.8] משפט - בקבוצה סדורה חלקית סופית, חייב להיות איבר מינימלי אחד לפחות ואיבר מקסימלי אחד לפחות

<u>[3.10] האיבר הקטן ביותר והאיבר הגדול ביותר (בסדר חלקי)</u>

איבר $\boldsymbol{a}$, האיבר הקטן ביותר:

אם הוא האיבר הקטן ביותר מבין כל האיברים בקבוצה, וגם יש לו קשר עם כל האיברים בקבוצה.

איבר $\boldsymbol{b}$, האיבר הגדול ביותר:

אם הוא האיבר הגדול ביותר מבין כל האיברים בקבוצה, וגם יש לו קשר עם כל האיברים בקבוצה.

עוצמת קבוצות – מספרים קרדינליים

הגדרה: יהיו A,B שתי קבוצות, אזי:

אם"ם קיימת $f: A \to B$ חח"ע ועל אז אומרים של A ולB יש אותה עוצמה.
סימון $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$

אם"ם קיימת $f: A \to B$ חח"ע אז אומרים כי העוצמה של A קטנה או שווה לזו של B.
סימון $|\boldsymbol{A}| \leq |\boldsymbol{B}|$

אם"ם $|\boldsymbol{A}| \leq |\boldsymbol{B}|$ **וגם** $|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$ אזי אומרים כי העוצמה של A קטנה ממש מהעצמה של B

סימון $|\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{B}|$

מתקיים: $|N| = |N \times N| = |Z| = |Z \times Z|$ $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

משפט (קנטור- שרדר-ברנשטיין): אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$

קבוצה A המקיימת $|A| \leq \aleph_0$ נקראת בת מנייה.

באריתמטיקה של עוצמות, אם נעזרים בבחירה שרירותית של "נציגים" צריך להוכיח שהמושג שהוגדר אינו תלוי בבחירת הנציגים.

<u>חלק מהמשפטים:</u>

לכל קבוצה A $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$, עמ' 22

לכל עוצמה k $k < 2^k$, עמ' 24

$C = 2^{\aleph_0}$ עמ' 24

$C = |P(N)|$ עמ' 24

לכן עוצמת הטבעיים קטנה ממש מעוצמת הממשיים.

$C = C^{\aleph_0}$ עמ' 26

קומבינטוריקה

עקרון החיבור – כאשר יש יותר מאופן אחד לבצע משימה, אתה מחבר את מספר האפשרויות של כל אופן ביצוע יחדיו, כדי לקבל את כל מספר האופנים האפשריים לביצוע המשימה.

עקרון הכפל – אם אפשר לבחור את האיבר a_1 ב-n_1 אופנים, ולאחר כל בחירה כזו אפשר לבחור את האיבר a_2 ב-n_2 אופנים, אזי לבחירת שניהם בסדר הנ"ל a_1 ולאחריו a_2 יש $n_1 n_2$ אפשרויות.

תמורות

תמורות, בעצם, לקחת *n* איברים, לסדר *n*-יה סדורה. זה תמורה. והחישוב די פשוט.

מסמנים ב $\mathbf{p_{(n)}}$ $\qquad$ $\mathbf{P_{(n)} = n!}$

חליפות(פרמוטציה)

k-יה סדורה מתוך *n* איברים שונים, נקראת **חליפה** של *k* איברים מתוך *n*. כאשר תמיד $k \le n$.
הסבר נוסף: חליפות מכיוון שיש **חליפות** בין האיברים שיכולים להבחר או לא להבחר להיות ב*k*-יה הסדורה מתוך *n* האיברים הנתונים.

נוסחה לחישוב חליפות (פרמוטציה):

$$\mathbf{P(n,k) = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

2.2 צירופים(קומבינציה)

נתונה קבוצה של ***n*** איברים. נבחר <u>**קבוצה**</u> ***k*** מתוך ***n*** איברים, כאשר **ב-*k*** האיברים שנבחר **אין משמעות לסדר ביניהם**.
אם כך, בצירופים, אין משמעות לסדר האיברים. (בדומה לקבוצה בתורת הקבוצות).

מספר הצירופים של ***k*** איברים מתוך ***n*** מסומן ב $\mathbf{C(n,k)}$ או ב $\begin{bmatrix}\mathbf{n}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix}$ (קרא: ***n* מעל *k*,** או ***k* מתוך *n***).

ידוע גם כי:

$$\mathbf{C(n,k)\cdot P(k) = P(n,k)}$$

כלומר, תמורה כפול צירוף שווה לחליפות, (עם אותם *n* ו-*k* נתונים).

נוסחה קומבינציה: $\qquad \mathbf{C(n,k) = C(n,n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

ובכתיב אחר: $\qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{n-k}\end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{k!(n-k)!}}$

חליפות עם חזרות

k מסמלת סדרה מסוימת, או תאים.
n מסמלת מספר איברים לשימוש חוזר.
הנוסחה כאן מאד פשוטה, בכל ***k*** תאים אפשר לשים ***n*** איברים.
לכן אם נרצה לחשב את מספר האופנים נעשה $\mathbf{n \cdot n \cdot n \ldots = n^k}$

נוסחה זו זהה לחלוטין לנוסחה לחישוב מספר הפונקציות מ $\mathbf{f: A \rightarrow B}$,
כאשר מספר האיברים בטווח **(*B*)** הינו הבסיס, כלומר ה-***n*** , ומספר האיברים בתחום **(*A*)** הוא ה-***k*** .

$$\mathbf{n^k}$$

תמורה עם חזרות

נגיד אתה צריך לבנות סדרה אחת שלמה *k*, ויש לך סך הכל *n* איברים כדי לעשות את זה.

תמורה עם חזרות זה כאשר הסיטואציה היא כזו.

הקבוצה הכללית של האיברים מתחלקת לסוגים, כך שיש מספר קטן יותר של סוגי איברים מאשר מספרי האיברים סך הכל. למשל:

נגיד אני צריך לבנות סדרה מ 12 כדורים, זה *n=12*
מתוך הקבוצה הכללית, יש שלושה סוגי כדורים: אדומים, כחולים וצהובים,
מהאדומים יש לי 3, מהכחולים יש לי 4 ומהצהובים יש לי 5.
כלומר $n_3 = 5$, $n_2 = 4$ $n_1 = 3,$

את הבעיה הזו, אפשר לפתור בצירופים(קומבינטוריקה) או בתמורה עם חזרות.

בצירופים, אתה עושה צירוף של 3 מתוך 12 מקומות שבהן אתה יכול לשים איברים זהים בתאים שונים. ואז כפול, 4 כדורים זהים שאתה שם ב9 תאים שונים, ואז כפול חמישה כדורים זהים לשים בחמישה תאים שונים.

$$\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$$

בתמורה עם חזרות, אנו מסדרים בעצם קודם כל 12 איברים שונים בתאים שונים שזה **!12**

ואז אנחנו מבטלים את ההבדלים בסדר בין כל קבוצה של איברים זהים בדרך, על ידי חילוק המקרה הכללי בכפל של הסידור הפנימי של תת קבוצה. כך:

$$\frac{12!}{3!\,4!\,5!}$$

מבטל את הסידור של הכדורים האדומים, כפול הסידור של הכחולים כפול הסידור של הצהובים.

צירופים(קומבינציה) עם חזרות

1. בחירה של k עצמים (יצירת קבוצה k), מתוך n סוגי עצמים שונים, כאשר אפשר לחזור ולבחור עצם מאותו הסוג שוב.
2. פתרון המשוואה $x_1 + x_2 + \cdots x_n = k$, שבה הנעלמים יכולים להיות רק מספרים טבעיים.
3. פיזור של k עצמים זהים לתוך n תאים שונים.

הנוסחה:

$$\mathbf{D(n,k)} = \begin{bmatrix}\mathbf{n+k-1}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{n+k-1}\\ \mathbf{n-k}\end{bmatrix}$$

בעייה	מספר האפשרויות
מספר האפשרויות לסדר n אנשים שונים בשורה	$n!$
מספר האפשרויות לבחור קבוצה של k תלמידים מתוך כיתה של n תלמידים **(ללא משמעות לסדר, ללא חזרות)**	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
מספר האפשרויות לבנות סדרה עם k איברים מתוך קבוצה המכילה m איברים **(עם משמעות לסדר, ועם חזרות)**	n^k
מספר האפשרויות לבנות סדרה עם k איברים **שונים** מתוך קבוצה המכילה n איברים **(עם משמעות לסדר, ללא חזרות)**	$\frac{n!}{(n-k)!}$
מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים **(ללא משמעות לסדר, עם חזרות)**	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

הבינום של ניוטון

הנוסחה:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{a})^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{x}^{\mathbf{n}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\mathbf{x}^{\mathbf{n-1}}\mathbf{a} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{2}}\mathbf{x}^{\mathbf{n-2}}\mathbf{a}^{\mathbf{2}} + \ldots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-i}} + \ldots + \binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-2}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-1}} + \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-i}}$$

הבינום של ניוטון ומשולש פסקל

ראה עמ' 5, מתמטיקה דיסקרטית קומבינטוריקה – תקציר מושגים ומסקנות.

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5  10  10   5   1
        1   6  15  20  15   6   1
      1   7  21  35  35  21   7   1
    1   8  28  56  70  56  28   8   1
  1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
1  10  45 120 210 252 210 120  45  10   1
```

<u>הכלה והפרדה</u>

כאשר יש לנו קבוצות שאינן זרות זו לזו, כלומר יש להן איברים משותפים, נמצא את טכניקת ההכלה וההפרדה מאד שימושית לחישובים קומבינטורים.
ניקח לדוגמא את הביטוי הבא:

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$

ברצוננו לחשב את עוצמת קבוצת האיחוד $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|$, אז נחבר את העוצמות יחדיו.
פשוט כך : $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$
אך זהו לא הסוף הרי עם הקבוצות ***A*** ו-***B*** אינן זרות אחת לשניה, זה אומר שיש להן איברים משותפים. כלומר יש כאן קבוצת חיתוך $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$ (שהיא אינה קבוצה ריקה) שספרנו פעמיים.
פעם אחת כשהוספנו את הסיכום של ***A*** ופעם שניה כשספרנו את הסכום של ***B***. ואנחנו רוצים לספור כל איבר פעם אחת. אז אם ספרנו פעמיים, ניקח את סכום קבוצת החיתוך $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$ ונפחית אותה פעם אחת מסכום קבוצת האיחוד $|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}|$. ועכשיו חישוב העצמה מדויק ונכון.

<u>4.2.1 אי סדר מלא</u>

תמורה של ***n*** איברים שונים, המותאמים ל- ***n*** תאים שונים.
כאשר לכל איבר קיים תא אחד המיועד לו, ואף לא אחד מהאיברים ימוקם בתא המיועד לו.

לדוגמא: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

הנוסחה לחישוב אי סדר מלא:

$$\boldsymbol{D_{(n)}} = \mathbf{n}! - \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{1}}(\mathbf{n}-\mathbf{1})! + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}(\mathbf{n}-\mathbf{2})! \ldots (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{1}$$

כאשר אנו רוצים לחשב את מספר האופנים שבהם קיים אי סדר כך ש:
יש ***n* איברים שונים**, שבדיוק ***k* מתוכם** ממוקמים במקום המיועד להם,
ושאר האיברים הנותרים ***(n-k)*** , ממוקמים באי סדר מלא.

נעשה $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{D_{(n-k)}}$

כמובן שנשתמש בנוסחה לחישוב מספרי הסידורים של אי סדר מלא למעלה.

<u>רקורסיה</u>

<u>**פתרון של יחס רקורסיה** (הומוגנית ולינארית בלבד)</u>

מתחילים מההנחה כי $\boldsymbol{a_n = x^n}$

ואז מגיעים למשוואה ריבועית בעזרת שימוש בחוקי החזקות ופותרים את המשוואה.
אם מקבלים שני איקסים מהמשוואה הריבועית $\boldsymbol{(x_1, x_2)}$, מציבים כל איקס כפול איבר אחר, למשל את x_1 ב-A ואת x_2 ב-B כך:

$$\mathbf{a_n = A(x_1)^n + B(x_2)^n}$$

- **<u>אלטרנטיבה:</u>** אם מקבלים איקס אחד מהמשוואה הריבועית, מציבים את אותו האיקס בכפל עם שני האיברים ומוסיפים הכפלה של n באיבר B כך: $\mathbf{a_n = A(x_1)^n + B(x_1)^n} \cdot \boldsymbol{n}$

עכשיו מוצאים את A וB על ידי הצבת תנאי ההתחלה $\mathbf{a_0} = \boldsymbol{y_1}$, $\mathbf{a_1} = \boldsymbol{y_2}$.
(הכוונה היא לדוגמא $\mathbf{a_0 = 1}$, $\mathbf{a_1 = 2}$)
מומלץ מאד למצוא את a_0 גם אם הוא אינו אחד מתנאי ההתחלה, ובאמצעותו למצוא את A קודם ואז רק את B (כי קל מאד לחשב ביטוי בחזקת 0), עושים זאת כך:

$$\mathbf{a_0 = A(x_1)^0 + B(x_2)^0}$$

באמצעות פתירת משוואות בשני נעלמים (הצבה והשוואת מקדמים, בדרך כלל הצבה במקרה זה).
אנו מוצאים את A ואת B.

כאשר מצאנו את A וB במשוואות הנ"ל, כלומר מצאנו את x_1, x_2, A, B סך הכל, אז אנו מציבים את הכל במשווה שלמעלה וכך פתרנו את יחס הרקורסיה.
עכשיו אפשר רק להציב מספר מסוים בn ולפתור מהר(לא באופן רקורסיבי) גם אם -הn גדול מאד.

כדי ליצור יחס רקורסיה למטרת חישוב קומבינטורי, כדאי לחשוב על התרחיש המלא קודם, ואז על שני תנאי ההתחלה, ואז מה קורה לתרחיש המלא (מה פחות ממנו וכמה בדרך כלל), אם אני קובע פעולה אחת מהאפשרויות מראש, או פעולה אחרת מראש, כדי למצוא את הביטויים אפשר לשאול את עצמינו כמו לאיזה סיטואציה לאחר הפעולה הזו זה דומה? ולאיזו סיטואציה לאחר הפעולה האחרת זה דומה? ואז מחבר את הביטויים הרקורסיביים של הפעולות ביחד בפעולת חיבור (חיבור קומבינטורי) ומצאת את יחס הרקורסיה של הבעיה הקומבינטורית.

פונקציות יוצרות

טור פורמלי – בהינתן סדרת מספרים $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, נבנה טור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, כאשר המקדם של x_n הינו a_n.
בהינתן טור פורמלי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, נאמר ש הפונקציה יוצרת את הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

פעולת חיבור על טורים פורמליים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

פועל כפל על טורים פורמליים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cdot b_{n-k}) x^n$$

סכום טור הנדסי סופי:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \mathrm{S_n} = \frac{1 - \mathrm{x}^{\mathrm{n}+1}}{1 - \mathrm{x}}$$

(ממ"ן 15)

סכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \ldots = \frac{1}{1 - \mathrm{x}}$$

כאשר q הינו שבר, כלומר: $-1 < q < 1$

$$\mathrm{S_n} = \frac{a_1}{1 - \mathrm{q}}$$

(תקציר מושגים ומסקנות עמ' 13)

נוסחאות חשובות נוספות:

סכום סדרה הנדסית סופית:

$$\frac{1 - x^{m+1}}{1 - \mathrm{x}} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{x}^{\mathrm{n}} = 1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \cdots \mathrm{x}^{\mathrm{m}}$$

הפונקציה היוצרת של המקדמים הבינומיים:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

נוסחה חשובה מההרצאה ל אשר [2:06:00] נוסחה לחישוב מקדם בינומי שלילי

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} X^n$$

<u>עקרון שובך היונים (להוסיף לערך...)</u>

המונה מייצג את היונים והמכנה את השובכים.

$$1 < \frac{n+1}{n}$$

העיקרון המורחב:

$$\frac{k \cdot n + 1}{k \cdot n}$$

<u>תורת הגרפים</u>

<u>1.2 מושגים בסיסיים</u>

<u>1.1 הגדרה</u>

גרף(graph) G הינו:

- קבוצה סופית v (vertices) שאיבריה נקראים **צמתים (nodes);**
- קבוצה סופית E שאיבריה נקראים **קשתות (edges);**
- **פונקציה** המתאימה לכל קשת $e \in E$ תת-קבוצה של צמתים מתוך V ובה צומת אחד או שני צמתים.

(הצמתים יכולים להיקרא גם "קדקודים" (vertices) והקשתות נקראות לפעמים "צלעות".)

לסיכום: אוסף נקודות וקוים, המחברים זוגות של נקודות (לא בהכרח שונות). $G = \langle V, E \rangle$.
לכל קשת מתאימים קדקודים הנקראים הקצה של הקשת. לכל קשת מתאימים קדקוד אחד או שניים.

צמתים שכנים הם צמתים(קדקודים) המחוברים בקשת.

לולאה קשת המחברת צומת לעצמו, כלומר קשת היוצאת מאותו קדקוד וחוזרת אל אותו הקדקוד. (כביכול מחברת שני קדקודים זהים.)

קשתות מקבילות הן קשתות המחברות את אותו זוג צמתים, למשל: $e_5 = v_1 v_5$, $e_6 = v_1 v_5$

צומת מבודד הוא צומת שאין לו צמתים שכנים. (קדקוד שאין לו חיבור עם קשת בכלל)

גרף פשוט הוא גרף שאינו מכיל לולאות וקשתות מקבילות.

דרגה של קדקוד (degree) *v*, בגרף *G*, תסומן על ידי $\deg_G(v)$
והיא מספר הקשתות היוצאות מן הקדקוד. כאשר לולאה נספרת פעמיים.

{קבוצת הקדקודים של V={G (vertex)

{קבוצת הקשתות של E={G (edge)

ניתן לייצג את קשתות הגרף כזוגות (סדורים או בלתי סדורים) של הקדקודים.
(v_1, v_3) היא הצלע שבין הקדקודים v_1 ו- v_3.

<u>הגדרה 1.2</u>

בגרף מכוון הסדר חשוב ומציירים חצים בקשתות.

בגרף לא מכוון אין חשיבות לכיוון הקשתות והסדר אינו חשוב.

טענה 1.3

בכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים:

$$\sum_{v \in V} deg_G\,(v) = 2|E|$$

כלומר, סכום הדרגות בגרף שווה לכפליים מספר הקשתות. **(יש הוכחה בספר)**

מכך נובע כי - בכל גרף, מספר הצמתים שדרגתם הינה אי זוגית, הוא תמיד זוגי.

הגדרות שעוסקות במסלולים

מסלול בגרף (מסומן באות **P** גדולה) הינו סדרה של קדקוד רודף קשת רודף קדקוד וכך הלאה, כאשר כל קדקוד מופיע פעם.

צומתי הקצה הם הצמתים שבתחילת המסלול ובסוף המסלול.

צמתים פנימיים הם כל הצמתי שבמסלול מלבד צומתי הקצה.

אורך של מסלול *P*, המסומן ב-**|P|** הוא מספר הקשתות במסלול.

מסלול סגור(מעגל) מסלול שבו צומתי הקצה זהים. כלומר ההתחלה והסוף מתלכדים.

מסלול פשוט הינו מסלול שכל הצמתים בו הם שונים. (כלומר המסלול אינו "חותך" את עצמו.)

מעגל פשוט הוא מסלול פשוט שצומתי הקצה שלו זהים.
כלומר, מסלול שכל הצמתים בו שונים, למעט צומתי הקצה.

המרחק מסומן $dist_G(u, v)$ מ-u ל-v הוא האורך של המסלול הקצר ביותר מ-u ל-v .
המסלול הינו מעבר בין קדקודים דרך קשתות.

גרף קשיר(connected graph) הוא גרף שיש בו מסלול בין כל שני צמתים.

רכיב קשירות (רכיב קשיר, connected component) הינו תת קבוצה מקסימלית של קדקודים, שבה יש מסלול בין כל זוג קדקודים.

הגדרה 1.4

תת גרף: $\boldsymbol{G' = (V', E')}$ (עם תג), הוא תת גרף של **G (המקורית)**
אם קבוצת הקשתות חלקית לקבוצת הקשתות של G (המקורית) וקבוצת הקדקודים חלקית לקבוצת הקדקודים המקורית. באופן פורמאלי $(\mathbf{V'} \subseteq \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{C'} \subseteq \boldsymbol{C})$

תת-גרף פורש: הינו תת גרף שבו בהכרח כל הקדקודים מהגרף המקורי נמצאים
כלומר: $(\mathbf{V'} = \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{C'} \subseteq \boldsymbol{C})$

תת גרף המושרה על ידי: תת גרף H של גרף G הוא תת גרף מושרה, אם לכל זוג של צמתים x ו- y ב- H , xy היא קשת של H, אם ורק אם היא קשת של G. במילים אחרות, H הוא תת-גרף מושרה של G אם הוא מכיל את כל הקשתות של G המתאימות לצמתים של H ולא מכיל אף קשת נוספת.

הגרף המשלים: כל הקדקודים מהגרף המקורי נמצאים. קשת נמצאת אם"ם היא לא נמצאת בגרף המקורי.

<u>גרפים דו צדדיים</u>

<u>הגדרה 1.5</u>

גרף דו צדדי הוא גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות זרות, כך שכל קשת בגרף מחברת אך ורק צומת מקבוצה אחת עם צומת מהקבוצה השניה. (בדומה למבנה של פונקציה)

<u>משפט - שלילת גרף דו צדדי:</u>
אם קיים בגרף מעגל באורך אי-זוגי, הגרף אינו יכול להיות דו צדדי כלל! (משפט 1.6 עמ' 14)

גרף דו צדדי מלא הינו גרף פשוט אשר ניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות זרות, כשבאחת יש m צמתים ובאחרת n צמתים, כך שכל צומת מקבוצה אחת מחובר לכל צומת מקבוצה אחרת.
(נקרא גם גרף מתפצל שלם, פורמאלית מסומן כך $K_{m,n}$).

גרף מלא (שלם \ קליק) גרף פשוט שבו כל צומת מחובר עם כל צומת. הגרף המלא על n יסומן ב- K_n.

גרף ריק גרף המכיל רק קדקודים מבודדים נקרא גרף ריק, כלומר גרף חסר קשתות.

<u>גרף רגולרי</u>
הינו גרף שלכל קדקוד v יש אותה דרגה r .
אם לכל קדקוד v קיים: $\mathrm{d(v) = r}$ (הדרגה של צומת שווה ל-r)
אז הגרף נקרא "גרף רגולרי מסדר r", או "r - רגולרי".

<u>2.7 גרפים איזומורפיים</u>

שני גרפים $G_1 = (V_1, E_1)$ ו - $G_2 = (V_2, E_2)$ נקראים איזומורפיים ($G_1 \approx G_2$)
אם קיימת פונקציה $\mathrm{f: V_1 \to V_2}$ **חח"ע ועל**,
כך שלכל $u, v \in V_1$ מתקיים: $u, v \in E_1$ אם ורק אם $\mathrm{f(u), f(v) \in E_2}$

<u>2.9 משפט קיילי</u>

לכל $n \geq 2$, מספר העצים המתויגים השונים על קבוצה מתויגת V של n צמתים, הוא n^{n-2}.

<u>הגדרה גרף מישורי</u>

גרף **אשר ניתן** לשרטטו במישור באופן ששום שתי קשתות לא תחתכנה בנקודה שאינה צומת.

הדגשה: אם **יש גרף מישורי** שהינו **איזומורפי** לגרף שלמראית עין נראה שאינו מישורי (כי רואים הצטלבות קשתות). **הוא עדיין מישורי!** כי **ניתן** לשרטט את הגרף כך שיהיה מישורי).

<u>מסלול ומעגל אוילר</u>

יהי $\mathrm{G = (V, E)}$ גרף לא מכוון.

מסלול אוילר בגרף, הוא מסלול המכיל **כל** קשת בגרף בדיוק פעם אחת.

מעגל אוילר בגרף, הוא מעגל המכיל כל קשת בגרף בדיוק פעם אחת.

***הערה:** מותר לעבור על צומת יותר מפעם אחת. אבל לא על קשת.

משפט 3.1

זיהוי מעגל אוילר: גרף קשיר G הוא אוילרי (מקיים מעגל אוילר) אםם דרגת כל צומת בו היא זוגית.

זיהוי מסלול אוילר: בגרף G קשיר בעל מספר קשתות סופי, יש מסלול אוילר,
אםם יש בו 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית, וכל שאר הצמתים בעלי דרגה זוגית.

מעגל המילטון 3.2

מסלול המילטוני הוא מסלול בגרף בלתי מכוון, העובר בכל צומת בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטוני הוא מסלול בגרף, העובר בכל צומת פעם אחת, פרט לצומת שממנו יצא.

משפט אור 3.2

יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט על $|V| = n \geq 3$ צמתים, כך שלכל זוג צמתים u, v שאינם שכנים, מתקיים $deg_G(u) + deg_G(v) \geq n$. אז G הוא המילטוני.

עצים ויערות

יער: גרף חסר מעגלים.

עץ: יער קשיר.

עלה: צומת ביער שדרגתו 1.

טענה 2.3 : בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות עלה אחד.

משפט: גרף קשיר עם *n* צמתים ועם מספר מינימלי של קשתות הוא עץ. מכך נובע שלכל עץ עם *n* צמתים יש $n - 1$ קשתות.

משפט 2.5

יהי $\mathrm{G} = (V, E)$ גרף. הטענות שלהלן שקולות:

1. G הוא עץ.
2. בין כל שני צמתים של *G* יש מסלול יחיד.
3. *G* הוא גרף קשיר מינימלי (במובן זה שהוא גרף קשיר ועם השמטת כל קשת ממנו מתקבל גרף לא קשיר)
4. *G* קשיר ו- $|\mathrm{E}| = |\mathrm{V}| - 1$
5. *G* אינו מכיל מעגלים ו- $|\mathrm{E}| = |\mathrm{V}| - 1$
6. *G* אינו מכיל מעגלים, אבל כל קשת שנוסיף בין הצמתים הקיימים בגרף תיצור מעגל.

<u>הגדרה 6.1 (עמ' 65)</u>

צביעה של (צומתי) גרף היא פונקציה מצומתי הגרף לקבוצה שאיבריה נקראים צבעים(אות תגיות).

צביעה נאותה הינה כאשר כל שני צמתים סמוכים צבועים בצבעים שונים.
(כלומר, הפונקציה לעיל מתאימה להם צבעים שונים).

תוספת*

<u>הוכחה בשלילה</u>
(כאשר מוכיחים שבלתי אפשרי שהטענה אינה נכונה, וכך מוכיחים את נכונותה)
כלומר, מניחים שהטענה לא נכונה , ומוכיחים שזה בלתי אפשרי. מש"ל הטענה נכונה.

<u>מבנה ההוכחה:</u>

תחילה, **נניח** שהטענה הנתונה <u>לא נכונה,</u> וננסח את **הנחת השלילה.**

כעת נבדוק מה אפשר להסיק מהנחת השלילה, ונראה שהיא מובילה **לסתירה.**
כלומר, למסקנה שלא יכולה להתקיים, למשל כי היא סותרת משפטים שכבר הוכחנו, או את הנתונים וכו'.

מכאן נסיק את המסקנה: **בלתי אפשרי** שהטענה שלפנינו **לא נכונה**

ומכאן שהיא **בהכרח נכונה.**