מתמטיקה בדידה

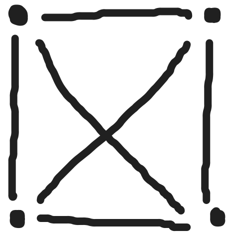
מפגש 14 (אחרון)

תורת הגרפים

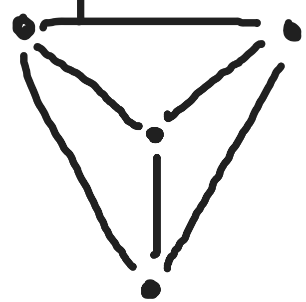
פרקים 5 - 6

הגדרה: גרף נקרא **מישורי** אם **אפשר** לשרטט אותו כך שהקשתות **לא** חותכות זו את זו.

הערה: לשים לב להדגשה של המילה **אפשר**
לדוגמא את K_4 אפשר לשרטט:

K_4  ⟶ כאן הקשתות נחתכות

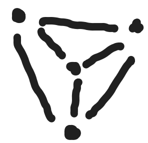
אבל אפשר לשרטט גם כך:

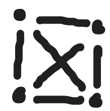
K_4 

כאן הקשתות ~~אינן~~ נחתכות

מכיוון שאפשר לשרטט את K_4 בלי שהקשתות נחתכות, האף K_4 הוא גרף מישורי.

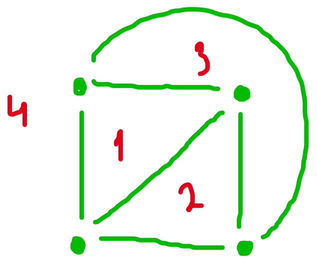
הגדרה: שרטוט של גרף מישורי כך שהקשתות לא נחתכות נקרא **שיכון מישורי**.

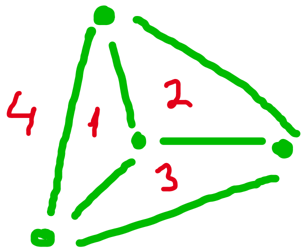
אז   הם שני שיכונים מישוריים של K_4

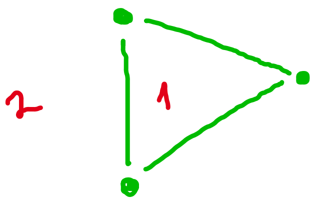
 שרטוט של K_4 **שאינו** שיכון מישורי שלו.

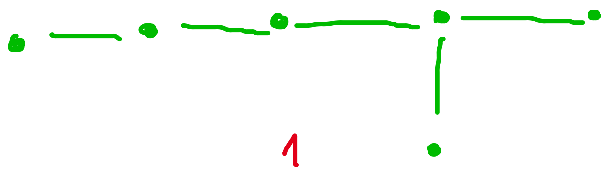
הגדרה: אם נתון שיכון מישורי של גרף G
אז הוא מחלק את המישור לחלקים.
כל חלק כזה נקרא פֵּאָה.

3 דוגמאות:



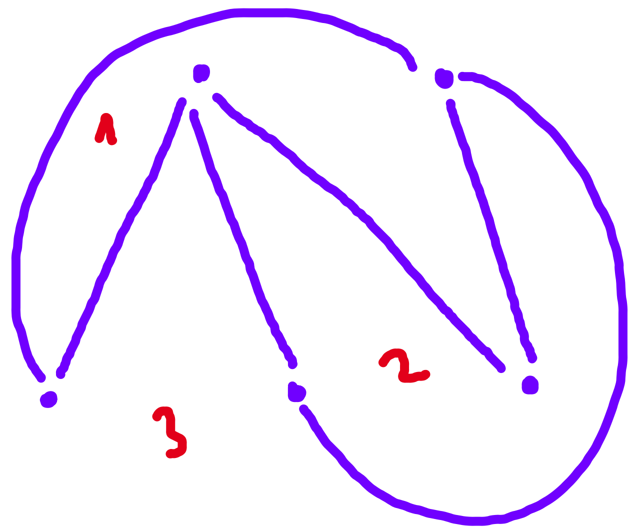






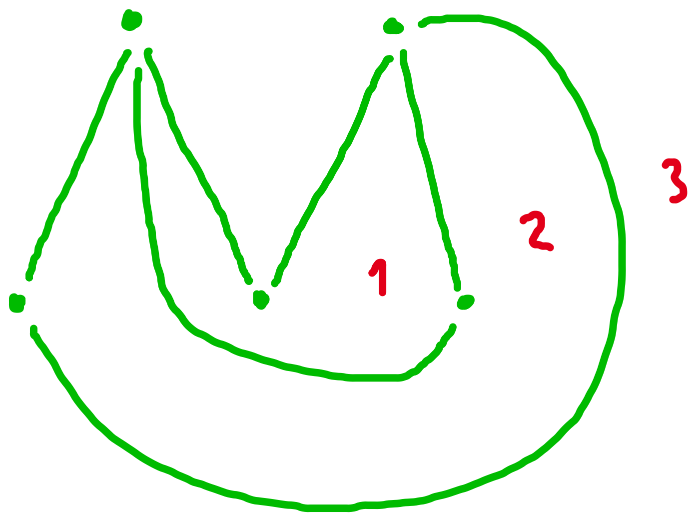
(עץ מחובר)

שאלה: האם $K_{2,3}$ מישורי?
לכמה פאות חוץ מחלק את המישור?



שאלה: האם $K_{2,3}$ מישורי?

לכמה פאות הוא מחלק את המישור?



$n=5$

$m=6$

$f = 6-5+2 = 3$

<u>טענה</u>: מספר הפאות <u>לא</u> <u>תלוי</u> באיזה שיכון מישורי בוחרים,
והוא נתון ע"י הנוסחא: (נוסחת אוילר)

$$f = m-n+2$$

מספר פאות

כאשר $m =$ מספר הקשתות

$n =$ מספר הצמתים

<u>הערה</u>: בדקו ש- f שחישבנו בדוגמאות הקודמות ע"י ספירה יוצא כמו f שאפשר לחשב ע"י הנוסחא הנ"ל.

מסקנה: מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי עם n צמתים הוא $3n-6$

(הסבר בספר בעמ' 60)

מסקנה (מהמסקנה): בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו ≤ 5.

אם כל הדרגות הם לפחות 6

$$6n = 6\cdot|V| \leq \sum_{v\in V} \deg v = 2\cdot|E| \overset{\text{נקל}}{=} 2m$$

$$3n \leq m$$

מסקנה: מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי דו-צדדי קשיר עם n צמתים הוא $2n-4$

(תרגול בספר עמ' 61)

<u>תרגיל:</u> נתון כי G הוא גרף מישורי עם 11 צמתים.
<u>הוכיחו</u> שהגרף המשלים $\bar{G}$ אינו מישורי.

<u>תרגיל:</u> נתון כי G הוא גרף מישורי עם 11 צמתים.

<u>הוכיחו</u> שהגרף המשלים $\bar{G}$ אינו מישורי.

<u>הוכחה:</u> G הוא מישורי עם 11 צמתים $(n=11)$

ולכן
$$m \leq 3n-6 = 33-6 = 27$$

נחשב כמה קשתות יש ב $\bar{G}$

ב- K_{11} יש $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ קשתות.

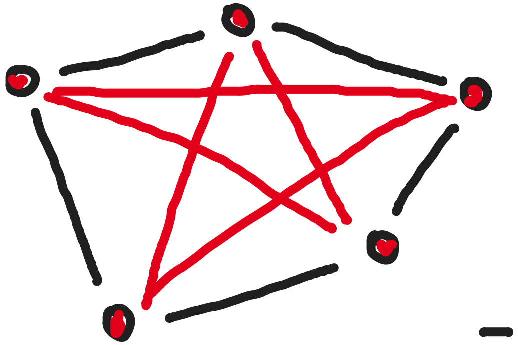
לכן ב $\bar{G}$ יש <u>לפחות</u> $55-27=28$ קשתות. כלומר $\bar{G}$ איננו מישורי.

(כי יש בו יותר מ $3n-6$ קשתות)

מש"ל.

תזכורת גרף משלים:

אם G הוא גרף עם n צמתים



אז ב $\bar{G}$ יהיו אותם n צמתים

וכל הקשתות של K_n שאינן ב G

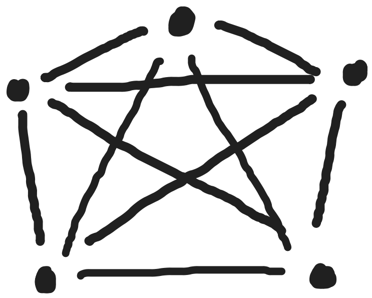
מספר הקשתות: אם ב G יש m קשתות.

אז ב $\bar{G}$ יש

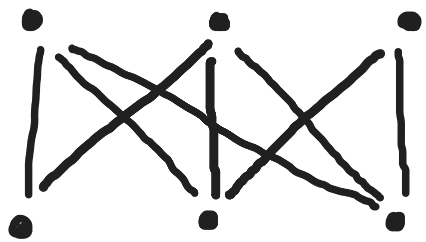
$$\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}_{\text{מספר הקשתות ב } K_n} - m$$

קשתות

<u>משפט:</u> K_5 איננו מישורי.

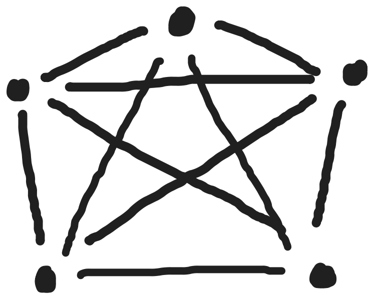
K_5 

<u>משפט:</u> $K_{3,3}$ איננו מישורי.



משפט: K_5 איננו מישורי.

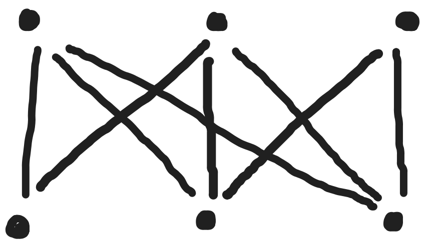
K_5



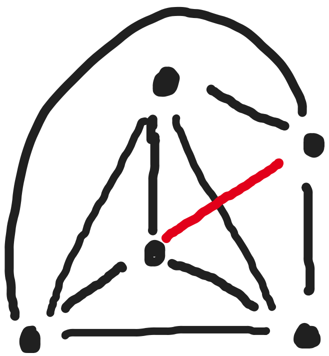
בגרף מישורי עם 5 צמתים
יש לכל היותר $3\cdot5-6=9$
קשתות
ואילו ב-K_5 יש $\frac{5\cdot4}{2}=10$
קשתות.

משפט: $K_{3,3}$ איננו מישורי.

בגרף דו-צדדי עם 6
צמתים יש לכל היותר
$2\cdot6-4=8$
קשתות.

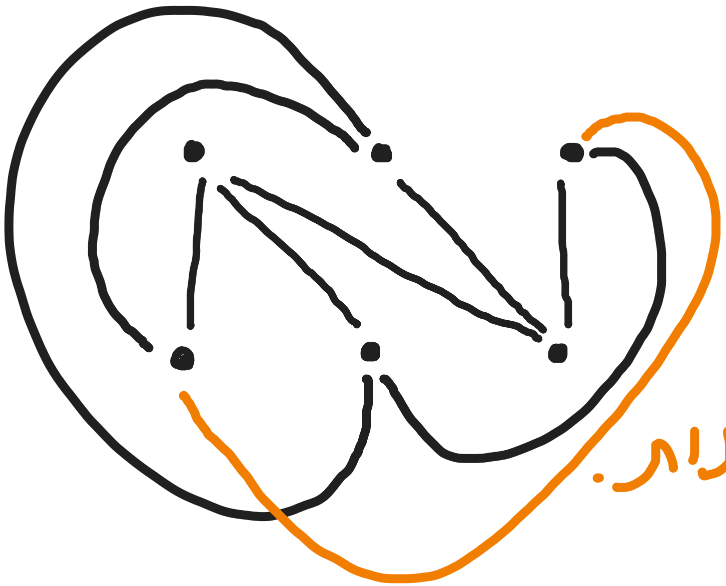


וב-$K_{3,3}$ יש $3\cdot3=9$
קשתות.



משפט: K_5 איננו מישורי.

הוכחה: בגרף מישורי עם 5 צמתים יש לכל היותר $3\cdot5-6=9$ קשתות.
ואילו ב K_5 יש $\frac{5\cdot4}{2}=10$ קשתות. מסקנה K_5 איננו מישורי. מש"ל.



משפט: $K_{3,3}$ איננו מישורי.

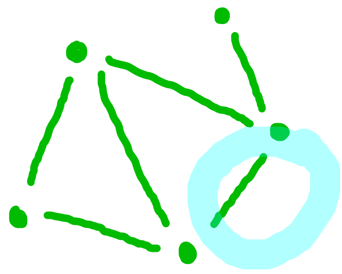
הוכחה: בגרף מישורי דו-צדדי עם 6 צמתים יש לכל היותר $2n-4$
כלו' 8 קשתות.
ואילו ב $K_{3,3}$ יש $3\cdot3=9$ קשתות.
מסקנה: $K_{3,3}$ איננו מישורי. מש"ל.

טענה: כל גרף שמכיל את K_5 כתת-גרף
אינו מישורי.
כל גרף שמכיל את $K_{3,3}$ כתת-
גרף אינו מישורי.

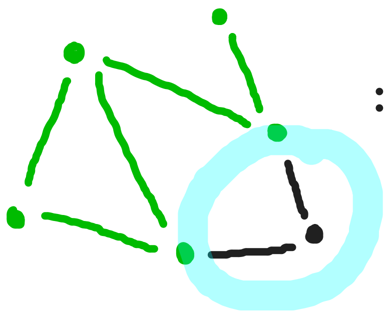
הגדרה: עידון של גרף = החלפת קשת במסלול באורך 2.

דוגמא:

גרף:



עידון אפשרי:



טענה: גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ G עידון שלו הוא מישורי.

משפט קורטובסקי גרף הוא מישורי $\Longleftrightarrow$ הוא לא מכיל
כתת-גרף עידון של K_5 או $K_{3,3}$.

תרגיל:

נגדיר גרף כעת: צומת של G הוא סדרה באורך 4 שאיבריה לקוחים מתוך הקבוצה $\{0,1\}$.

בין שני צמתים יש קשת $\Longleftrightarrow$ הם נבדלים צמ"צ בדיוק בשני מקומות.

א) כמה צמתים יש בגרף?

ב) מהי דרגת כל צומת?

ג) הוכיחו כי G אינו קשיר.

ד) הוכיחו ש G אינו דו-צדדי.

ה) הוכיחו ש G אינו מישורי.

תרגול:

נגדיר גרף הבא: צומת של G הוא סדרה באורך 4 שאיבריה לקוחים מתוך הקבוצה $\{0,1\}$.
בין שני צמתים יש קשת $\Longleftrightarrow$ הם נבדלים בנ"צ בדיוק בשני מקומות.

א) כמה צמתים יש בגרף?
ב) מהי דרגת G צומת?
ג) הוכיחו כי G אינו קשיר.
ד) הוכיחו ש G אינו דו-צדדי.
ה) הוכיחו ש G אינו מישורי.

א) מספר צמתים = מספר סדרות באורך 4 מ"1" ו"0":

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = 2^4 = 16$$

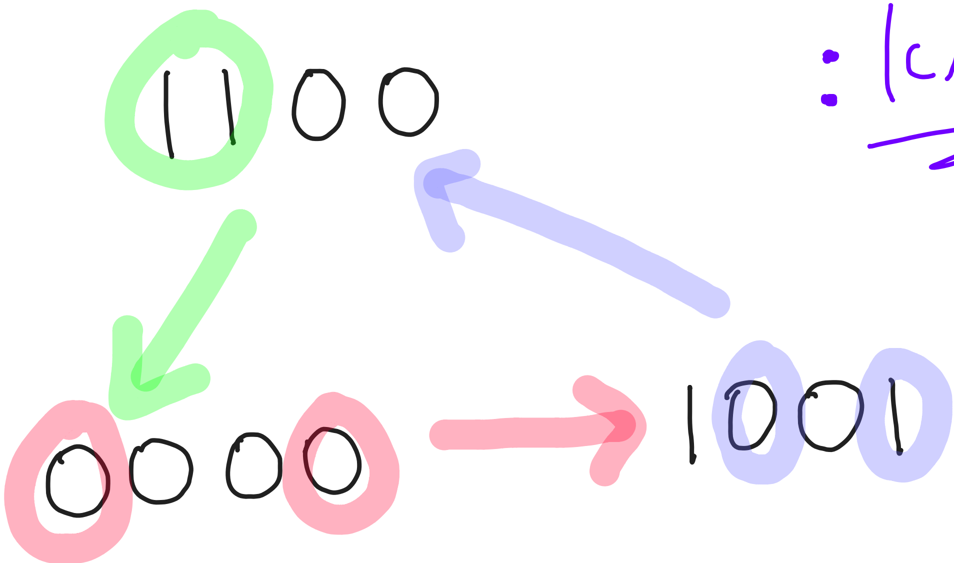
ב) $\boxed{abcd}$ מספר השכנים של הצומת
= מספר האפשרויות לבחור אילו שני מקומות לשנות ($0 \leftarrow 1$, $1 \leftarrow 0$)
= מספר " " 2 מתוך 4 = $\binom{4}{2} = 6$.

ג) דוגמא: 1100

כל שכן שלו יהיה לו מספר זוגי של "1".
וכל שכן של השכן עדיין יהיה עם מס' זוגי של "1" וכן הלאה.
ולכן אין מסלול ביניו לבין 1000. ולכן G אינו קשיר.

4) נראה שקיים מעגל באורך אי-זוגי.

דוגמה:



5) יש ב-G 16 צמתים

דרגת G צומת היא 6

לכן יש $\frac{16\cdot 6}{2}=48$ קשתות.

בגרף מישורי עם 16 צמתים יש לכל היותר

$3\cdot 16-6=42$

קשתות.

לכן G איננו מישורי.

תרגול:

נגדיר גרף באופן: צמתות של G הן סדרה באורך 4 שאיבריה לקוחים מתוך הקבוצה $\{0,1\}$.

בין שני צמתים יש קשת $\iff$ הם נבדלים במ"ג בדיוק בשני מקומות.

א) כמה צמתים יש בגרף?

כמס' הסדרות $\underbrace{\_}_{2}\underbrace{\_}_{2}\underbrace{\_}_{2}\underbrace{\_}_{2}$ $2^4=16$

ב) מהי דרגת צומת G?

כמס' האפשרויות לבחור בדיוק 2 מקומות לעשות שינוי. זה $\binom{4}{2}=6$

ג) הוכיחו כי G אינו קשיר.

בכל החלפה הזוגיות של מספר האפסים נשאר קבוע. ולכן אין מסלול בין 0000 ו-1000.

ד) הוכיחו ש G אינו דו-צדדי.

יש מעגל באורך 3.

0000 — 1010

0000 — 1100

1100 — 1010

ה) הוכיחו ש G אינו מישורי.

בגרף מישורי עם 16 צמתים יש לכל היותר $3\cdot 16-6=42$ קשתות.

ואילו בגרף G יש $\frac{16\cdot 6}{2}=48$ קשתות.

צביעת גרפים

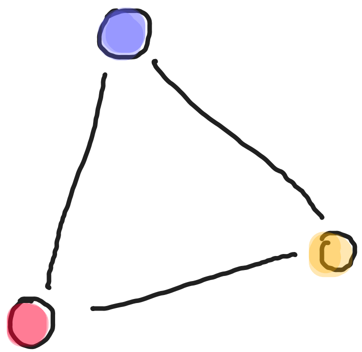
<u>הגדרה:</u> צביעה חוקית של גרף היא צביעה של הצמתים כך ששכנים צבועים בצבעים שונים.

$\chi(G)$ = מספר הצביעה של גרף, הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה חוקית של G.

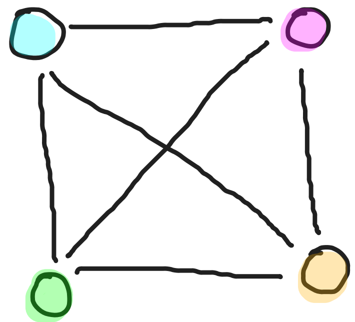
גרף G נקרא k-צביע אם $\chi(G) \le k$.

דוגמאות:
מהו $\chi(K_3)$?
מהו $\chi(K_4)$?

$\chi(K_3) = 3$

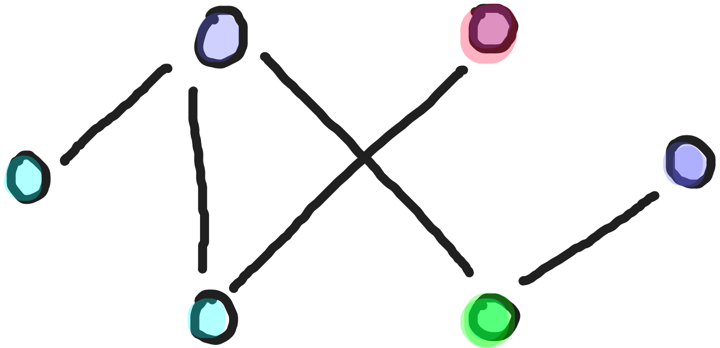


$\chi(K_4) = 4$



$\chi(K_n) = n$

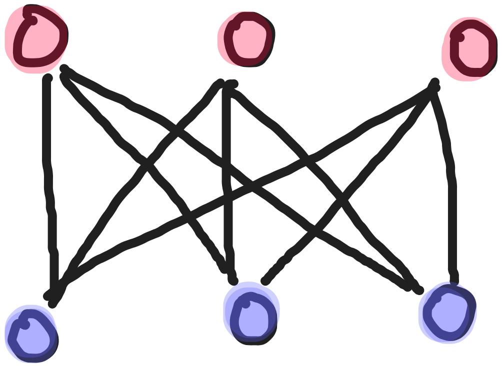
דוגמאות: מספר הצביעה כאן הוא 2.



שאלה של איתי:

מהו $\chi(K_{3,3})$

$= 2$



תרגיל נגדיר גרף $G=(V,E)$ כאשר: $V=\{1,2,\dots,12\}$

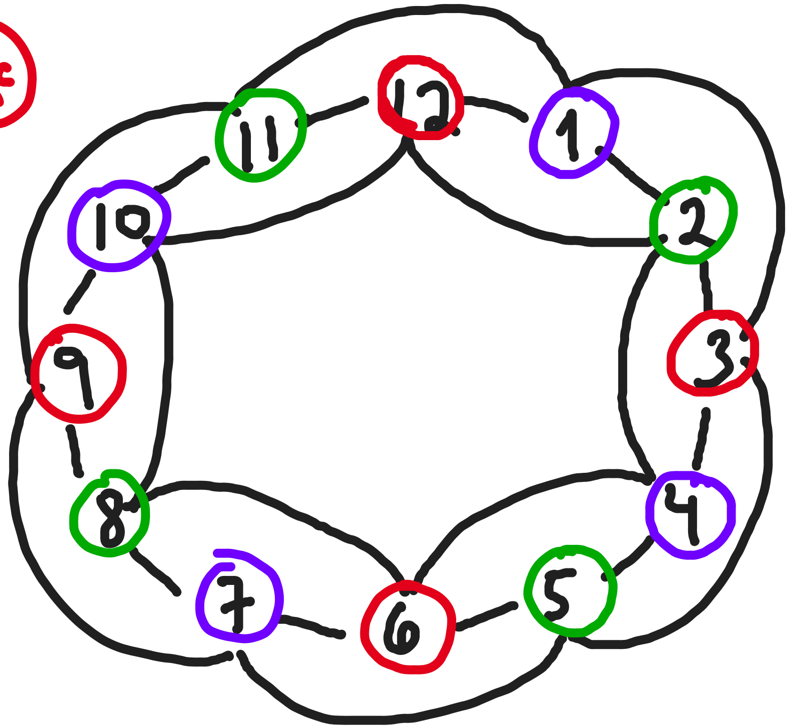
ויש קשת בין שני צמתים u,v אמ"מ $|u-v|\in\{1,2,10,11\}$

א) הוכיחו שהגרף מישורי. (אפשר ע"י שרטוט)

ב) הוכיחו כי $\bar{G}$ **אינו** מישורי.

ג) מהו $\chi(G)$?

א)



ב) מספר הקשתות ב G הוא:

$$\frac{12\cdot 4}{2}=24$$

ולכן מספר הקשתות ב $\bar{G}$ הוא:

$$\frac{12\cdot 11}{2}-24=42$$

בגרף מישורי עם 12 צמתים יש לכל היותר $3\cdot 12-6=30$ קשתות.

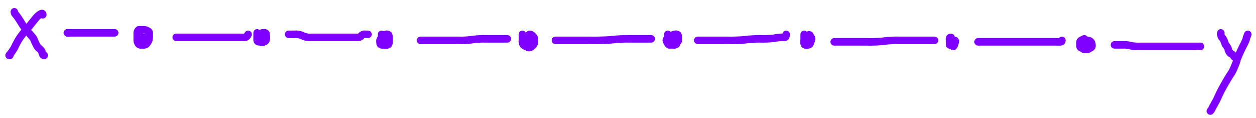
ולכן $\bar{G}$ אינו מישורי.

(ג) רואים בשרטוט שניתן לצבוע את הגרף בשלושה
צבעים ולכן $\chi(G) \le 3$.

יש ב G מעגל באורך 3. ז״א G מכיל את K_3.
ולכן $\chi(G) \ge 3$

מסקנה $\chi(G) = 3$.

תרגיל: יהי P גרף עם 10 צמתים שהוון מסלול פשוט:
x,y הם העלים של P.

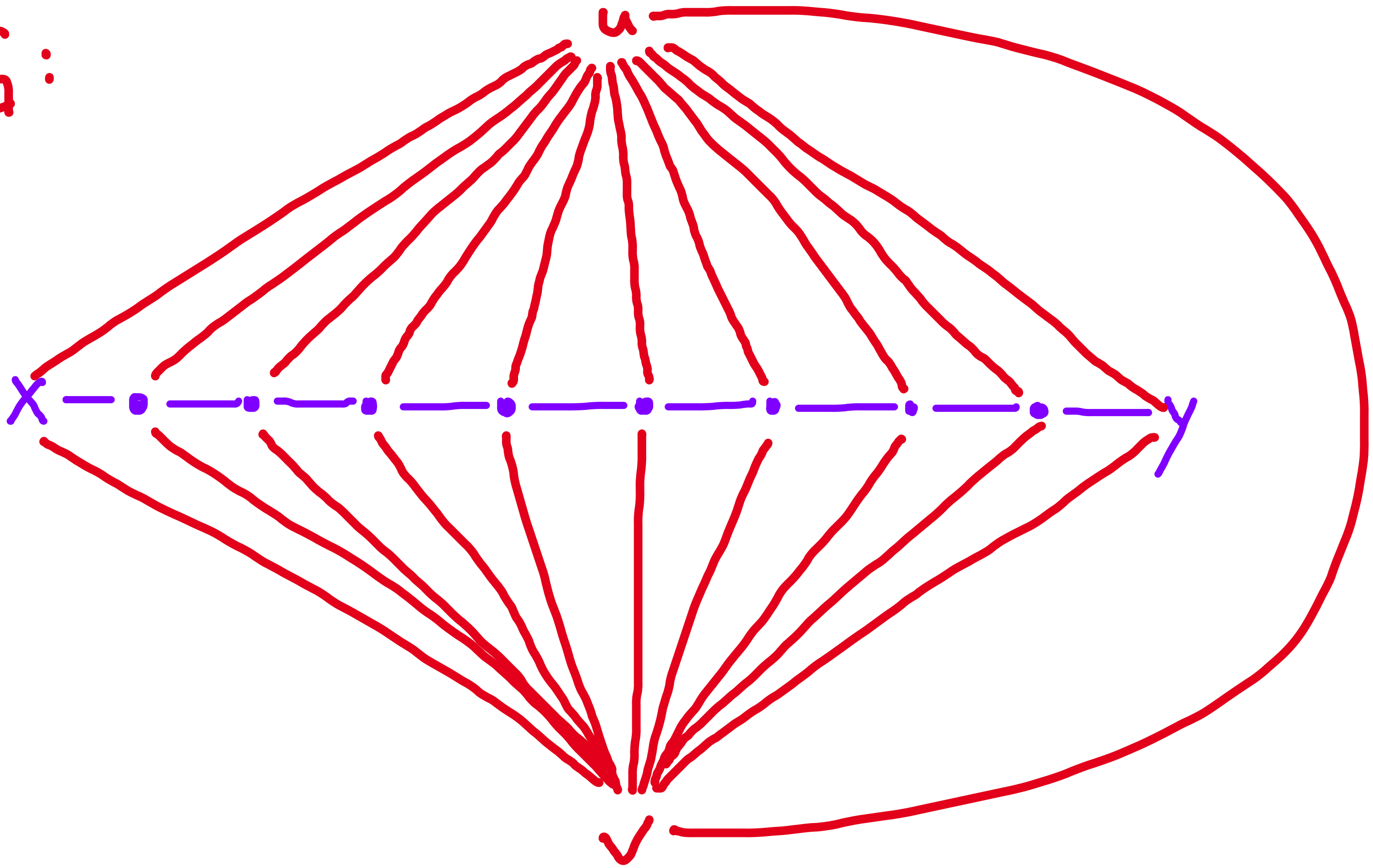


נוסיף ל P שני צמתים חדשים u ו v.
נחבר בקשת בין G אחד מהצמתים הקודשים לG 10 הצמתים
של P. וגם נוסיף קשת בין u ל v.
לגרף שהתקבל נקרא G.

א) הראו ש G הוא מישורי. (אפשר ע"י שרטוט)
ב) נוסיף צומת חדש w. נחבר את w בקשתות לכל אחד מארבעת
הצמתים x,y,u,v לגרף הזה נקרא H.
הוכיחו כי H איננו מישורי.
ג) מהו
$\chi(P)$?
$\chi(G)$?
$\chi(H)$?

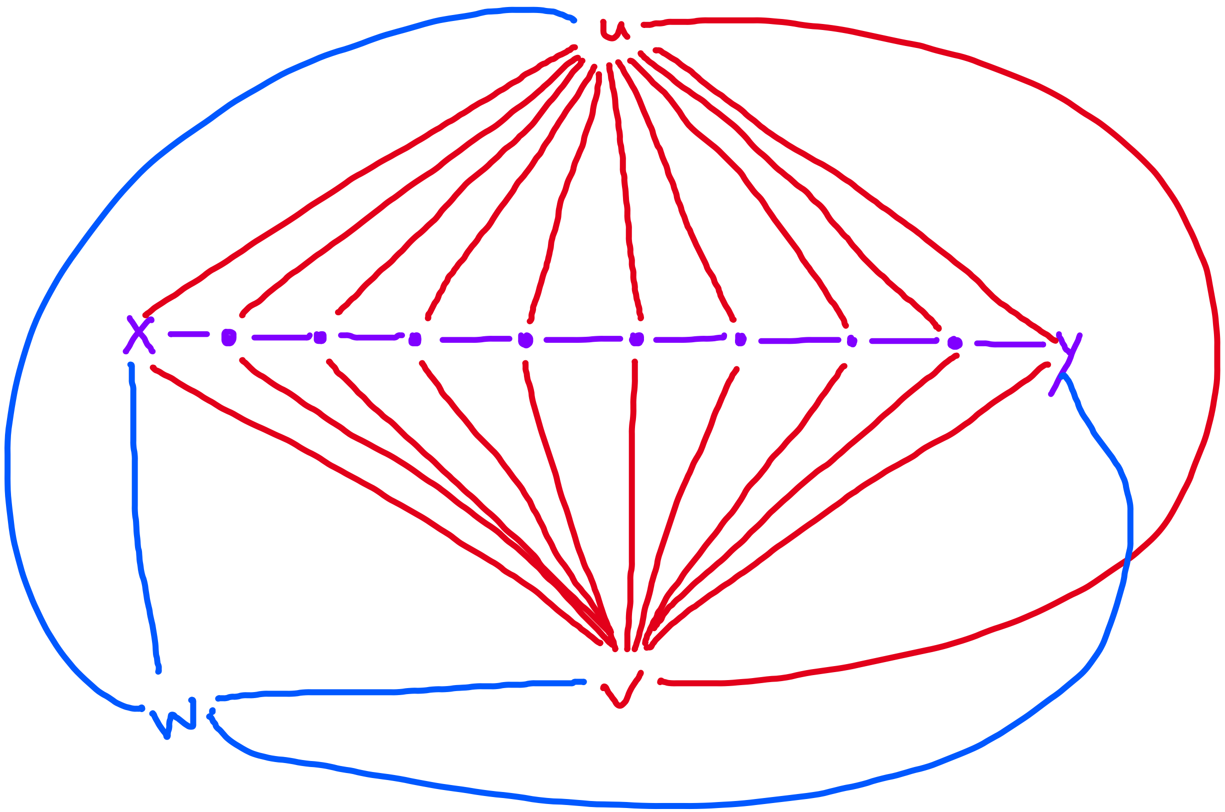
1c

G :



ב

H:



נסתכל על התת-גרף u,v,x,y,w

זהו בעצם K_5 חוץ מקשת שמחברת בין x ו y.

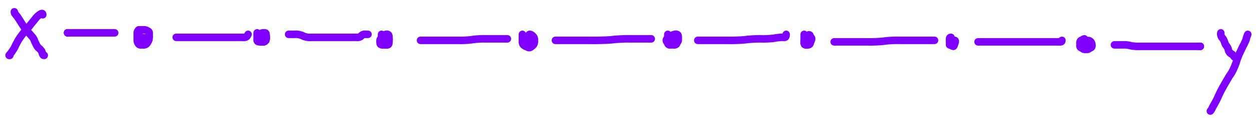
בתוך H יש מסלול שמחבר בין x ו y.

לכן H מכיל עידון של K_5.

ולכן H איננו מישורי.

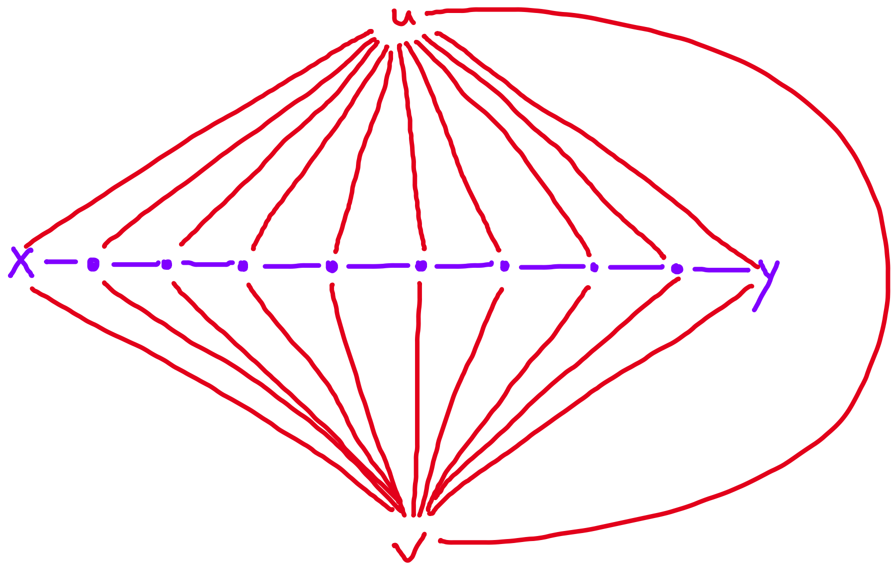
2

P :



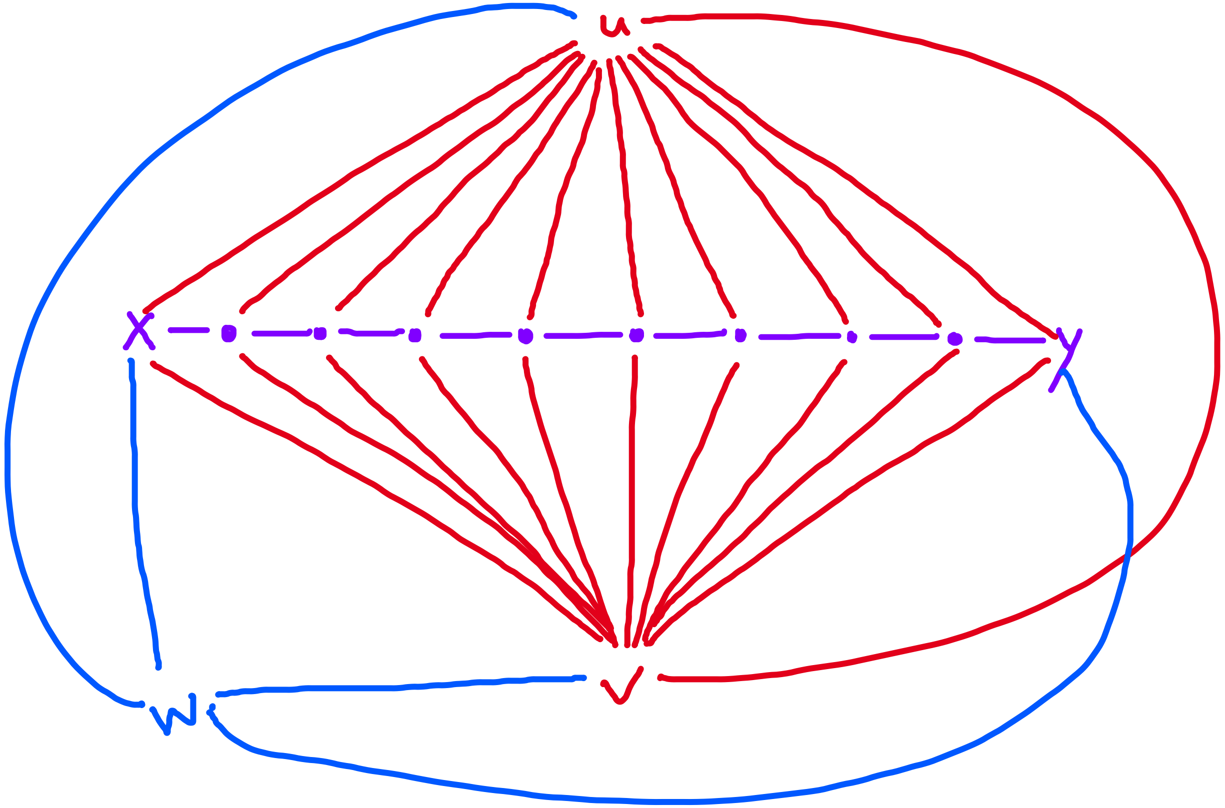
P הוא מסלול ולכן – $\chi(P) = 2$

G :



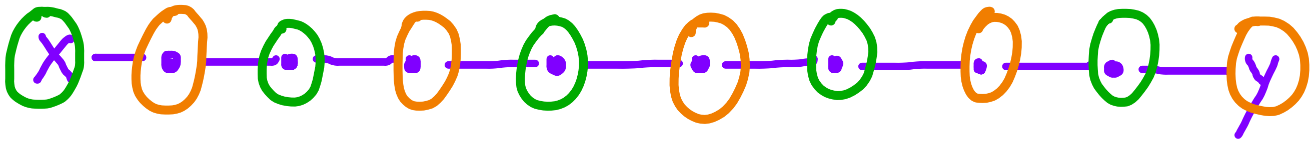
$\chi(G) = 4$

H:



$\chi(H) = 5$

$P:$



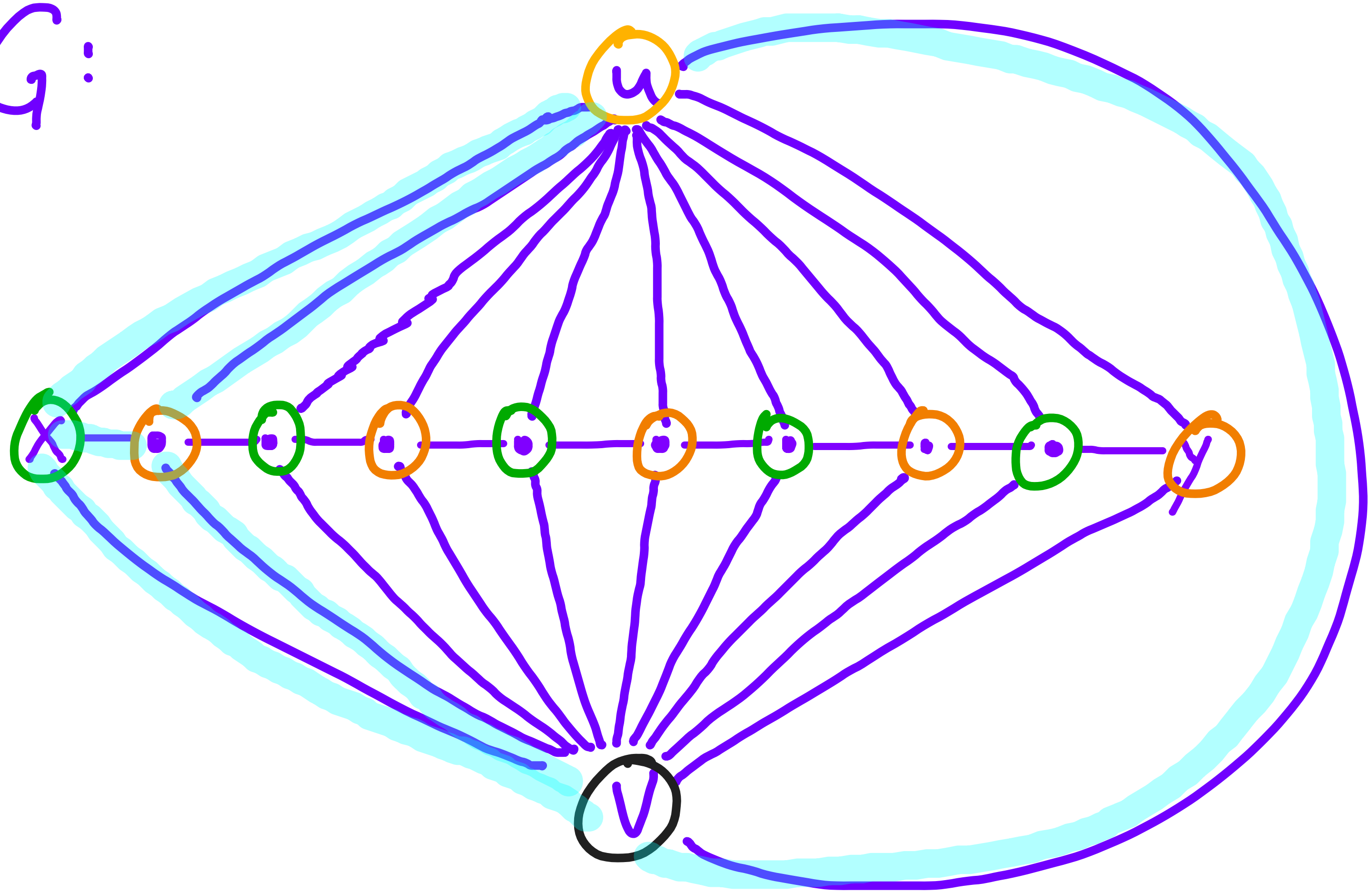
$$\chi(P) = 2$$

$\chi(P) \geq 2 \Leftarrow$ (יש קשת ב P

$\chi(P) \leq 2 \Leftarrow$ P הוא 2-צביע

$\chi(P) = 2 \Leftarrow$)

G:



$$\chi(G) = 4$$

$$\chi(H) = 5$$

תרגיל (מתוך בחינה)

G גרף פשוט עם n צמתים. $n \geq 5$.
נתון שיש ב G לפחות שני צמתים עם דרגה $n-1$.

אילו מהטענות הבאות נכונות?

1) G אינו מישורי.

2) G אינו אוילרי.

3) G אינו דו-צדדי.

4) לא קיים ב G מסלול אוילרי.

תרגיל (מתוך בחינה)

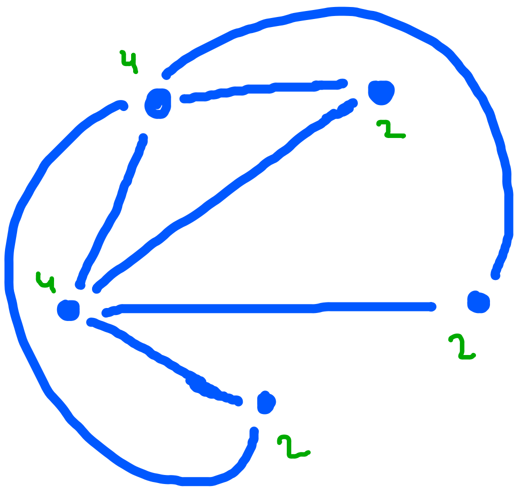
G גרף פשוט עם n צמתים. $n \geq 5$.
נתון שיש ב G לפחות שני צמתים עם דרגה $n-1$.

אילו מהטענות הבאות נכונות?

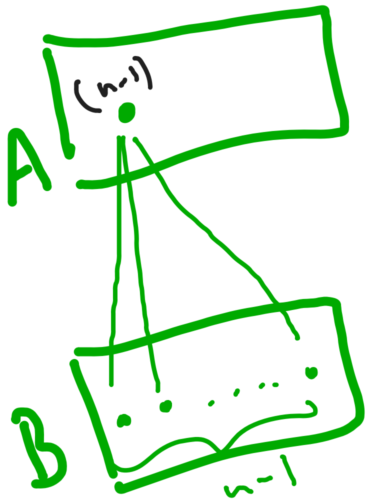
1) G אינו מישורי.
2) G אינו אוילרי.
3) G אינו דו-צדדי.
4) לא קיים ב G מסלול אוילרי.

נמצא דוגמא נגדית ל (1)

$n=5$



זו גם דוגמא
נגדית מרשימה
ל (2) ! (4)



תרגיל (מתוך בחינה)

G גרף פשוט עם n קודקודים. $n \geq 5$.
נתון שיש ב G לפחות שני קודקודים עם
דרגה $n-1$.

אילו מהטענות הבאות נכונות?

1) G אינו מישורי.
2) G אינו אוילרי.
3) G אינו דו-צדדי.
4) לא קיים ב G מסלול אוילרי.

נוכיח את ③.
נניח כי G דו-צדדי.
יש ב G צומת שהדרגה שלו היא $n-1$.
לכן באחד מהצדדים יש לפחות $n-1$ קודקודים
ויש לפחות 1 בצד השני.
$\Leftarrow$ יש בדיוק $n-1$ באחד הצדדים ו 1 בצד השני.
$\Leftarrow$ הדרגה של G שאר הקודקודים היא 1.
סתירה לנתון שיש לפחות 2 קודקודים עם דרגה $n-1$. מ.ש.ל.

עוד הוכחה ל (3).

יש לפחות שני צמתים בעלי דרגה $n-1$.

נקרא להם u ו v.

הדרגה של u היא $n-1$ כלו' יש ממנו קשת לכל אחד

מהצמתים האחרים.

כך גם לגבי v.

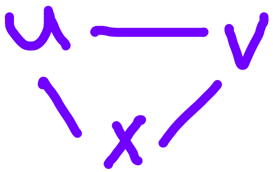
ולכן בפרט יש קשת בין u ו v.

יהי x צומת כלשהו (שונה מ u ו v).

יש קשת בין u ו x.

" " " v ו x.

ולכן יש ב G מעגל באורך 3:



ולכן G אינו דו-צדדי. מש"ל.

תרגיל

G הוא גרף דו-צדדי מלא על 7 צמתים.
ידוע ש-G הוא גרף מישורי
ושקיים בו מסלול אוילר.

א) מצאו את מספר הקשתות של G.

ב) ״ ״ ״ הפאות ״ ״ .

ג) ״ ״ ״ הצביעה ״ ״ .

תרגיל G הוא גרף דו-צדדי מלא על 7 צמתים.
ידוע שֶׁ G הוא גרף מישורי
ושקיים בו מסלול אוילר.

א) מצאו את מספר הקשתות של G. ✓

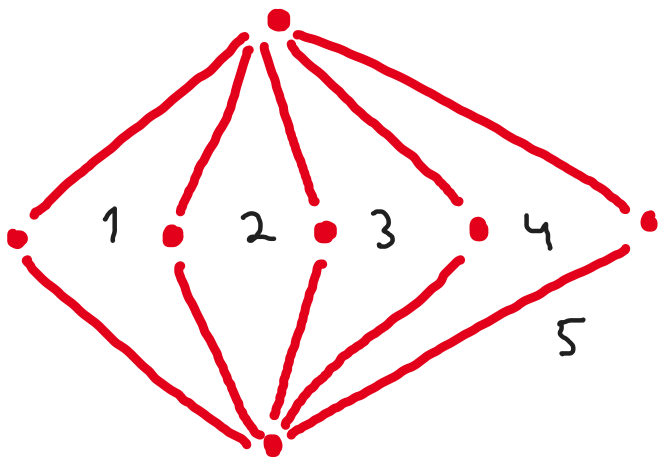
ב) " " הפאות " " . ✓

ג) " - הצביעה " " .

פתרון: (א)

$K_{1,6}$ $K_{2,5}$ $\cancel{K_{3,4}}$

$K_{2,5}$:



מספר הקשתות
הוא $2 \cdot 5$
$= 10$

(ב)

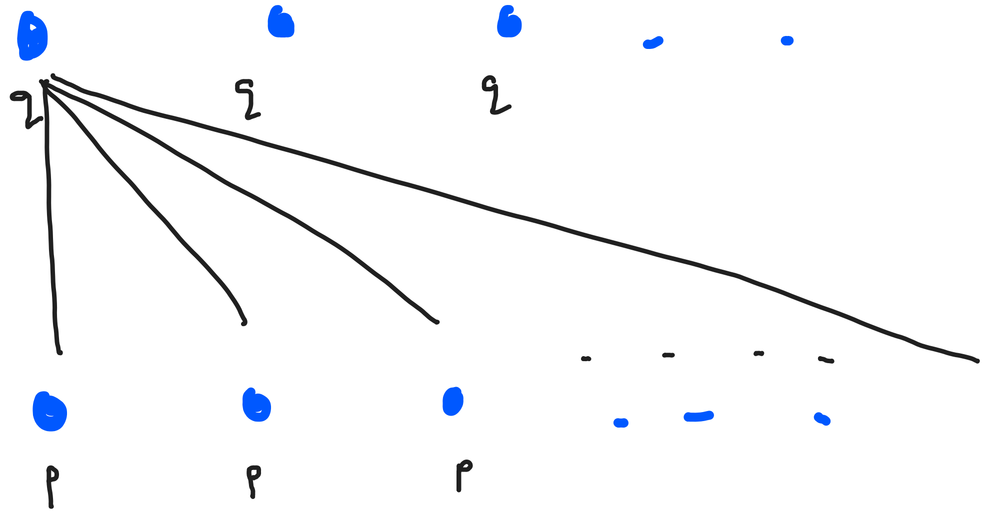
$$f = m - n + 2 = 10 - 7 + 2 = 5$$

$$\chi(G) = 2$$ (ג)

גרף דו-צדדי מלא

דרגות

$K_{p,q}$



שאלה מבחינה:

G הוא גרף פשוט וקשיר על קבוצת הצמתים $\{1,2,\ldots,7\}$

G הוא אוילרי.

נתון ש~~אין~~ קשת בין 1 ל 2

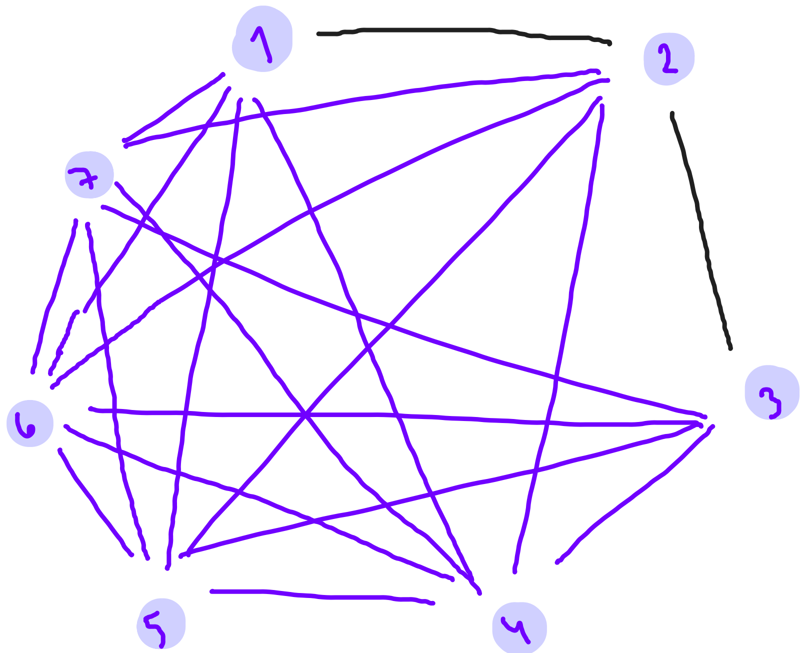
〃 〃 〃 2 ל 3

〃 〃 〃 1 ל 3

נוסיף ל G קשת בין 1 ל 2 וקשת בין 2 ל 3.

הגרף שנקבל:

1. אוילרי
2. אינו אוילרי, אך יש בו מסלול אוילר
3. 〃 〃 ואין בו מסלול אוילר
4. יתכן שהוא אוילרי ויתכן שלא, תלוי בגרף המקורי G.
5. לא יתכן. יש סתירה בנתוני השאלה.



דוגמא של
גרף
רוקויים
עם נתוני
התנגדות
הצומתיים

אפשר לפתור את כל ממ״ן 16

ואת ממ״ח 05

בהצלחה!