רשימת ההגדרות והמשפטים

1.1 אקסיומת ההיקף

היו B, A קבוצות. $A=B$ אם ורק אם כל איבר של A הוא גם איבר של B וכל איבר של B הוא גם איבר של A. $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ 20

1.2 הגדרה

קבוצה A תיקרא **קבוצה ריקה**, אם אין בה איברים, דהיינו, אם לכל x מתקיים $x \notin A$. 24

1.3 משפט

לא קיימות שתי קבוצות ריקות שונות. 24

הגדרה

יהיו B, A קבוצות. נאמר ש-A **חלקית** ל-B, או ש-A **תת-קבוצה** של $\subseteq$, אם כל איבר של A הוא איבר של B. $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ **שאלה 5: הכלה היא טרנזיטיבית** 25

1.5 הגדרה

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה A נקראת **קבוצת החזקה** של A. 28

1.6 משפט

תהי A קבוצה סופית בעלת n איברים. מספר התת-קבוצות של A הוא 2^n. 28

1.7 משפט

תהי A קבוצה סופית. אם $B \subseteq A$, אז גם B סופית, **ו-**$|B| \leq |A|$.

אם $B \subset A$, אז $|B| < |A|$. 29

1.8 הגדרה

יהיו B, A קבוצות. **האיחוד של** A **עם** B הוא קבוצת כל העצמים, הנמצאים

ב-A או **ב-**B. את **האיחוד של** A **עם** B מסמנים $A \cup B$. 31

משפט 1.9

1. פעולת האיחוד היא חילופית, דהיינו: $A \cup B = B \cup A$.

2. פעולת האיחוד היא חקיבוצית, דהיינו: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 32

משפט 1.10

א. לכל קבוצה A וקבוצה B , $A \subseteq A \cup B$ וגם $B \subseteq A \cup B$.

ב. לכל קבוצה A מתקיים: $A \cup A = A$.

ג. לכל קבוצה A מתקיים: $A \cup \varnothing = A$. 33

שאלה 12

הוכיחו את משפט 1.10

משפט 1.11

$A \subseteq B$ אם ורק אם $A \cup B = B$. 33

משפט 1.12

$A \cup B \subseteq C$ אם ורק אם $A \subseteq C$ וגם $B \subseteq C$. 33

הגדרה 1.13

החיתוך של הקבוצה A עם הקבוצה B הוא קבוצת כל העצמים, הנמצאים גם ב-A וגם ב-B. הסימון הוא $A \cap B$. בקיצור: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$. 34

הגדרה 1.14

נאמר שהקבוצות B, A הן **זרות** אם $A \cap B = \varnothing$. דהיינו, אם אין להן איברים משותפים. לחילופין נאמר ש-A זרה ל-B או ש-B זרה ל-A . 34

משפט .1.15

1.. פעולת החיתוך היא חילופית, דהיינו: $A \cap B = B \cap A$.

2.. פעולת החיתוך היא קיבוצית, דהיינו: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. 35

משפט 1.16

א. לכל קבוצה A וקבוצה B $A\cap B\subseteq A$ וגם $A\cap B\subseteq B$.

ב. לכל קבוצה A $A\cap A=A$.

ג. לכל קבוצה A $A\cap\varnothing=\varnothing$. 36

משפט 1.17

לכל B,A , $A\subseteq B$, אם ורק אם $A\cap B=A$. 36

משפט 1.18

לכל C,B,A , $C\subseteq A\cap B$, אם ורק אם $C\subseteq A$ וגם $C\subseteq B$. 37

משפט 1.19

בלי לספור
איברים פעמיים
איברי הקבוצות

אם A ו- B הן קבוצות סופיות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. שאלה20 בעמ'19 מראה הכלה והפרדה של שלוש קבוצות 37

משפט 1.20 (חוקי הפילוג של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך).

שאלה 24:
איי מוכל בבי וסי מוכל בדי, אזי:
איחוד המוכלות מוכל באיחוד המכילות.
כנ"ל לגבי חיתוכים.

א. לכל שלוש קבוצות C,B,A , $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

ב. לכל שלוש קבוצות C,B,A , $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 39

הגדרה 1.21

:27 Ûã×ð
A∩B = A / (A / B)

:28 Ûã×ð
A∪B = A∪(B / A)
A/B = A /(A∩B)
if: B ⊆ A so:B∪(A ¥ B) = A
A∩(B ¥ A) =∅

יהיו B,A קבוצות. A **פחות** B היא קבוצת איברי A , שאינם ב- B .

הסימון לקבוצה A פחות B הוא $A\setminus B$. $A\setminus B=\{x\in A|x\notin B\}$.

הפעולה שהגדרנו זה עתה נקראת בשם **פעולת ההפרש**. 41

:29 Ûã×ð
|A \ B| =|A| –|B|:אם איי מכילה את בי והן סופיות

:30 Ûã×ð
(A /B)∪(B / A) = (A∪B) / (A∩B)

:33 Ûã×ð
A∩(B/C) = (A∩B)/(A∩C)

:32 Ûã×ð
A△B = C ⇒ A△C = B & B△C = A
A△B = A△C ⇒ B = C

הגדרה 1.22

תהי A קבוצה, החלקית לקבוצה האוניברסלית U. **הקבוצה המשלימה** ל- A ביחס ל- U

היא קבוצת איברי U, שאינם ב- A. הסימון יהיה $A^{c}(U)$. 44

משפט 1.23

לכל A מתקיים: א. $A\cup A^{c}=U$ ב. $A\cap A^{c}=\varnothing$. ג. $(A^{c})^{c}=A$. 45

משפט 1.24

. $A \setminus B = A \cap B^c$ 46

משפט 1.25

$A \subseteq B$ אם ורק אם $B^c \subseteq A^c$. 46

משפט 1.26 (כללי דה-מורגן)

שאלה 42:
A \ B = Bc \ Ac
:43 Ûã×ð
(AΔB)c = AΔBc= AcΔB

א. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ב. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 47

הגדרה 1.27

תהי Γ קבוצה לא ריקה. לכל איבר α של Γ תהי A_α קבוצה.

(לאיברי Γ נקרא אינדקסים ובהקשר זה נאמר ש- α הוא האינדקס של A_α).

איחוד כל ה- A_α-ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$, הוא קבוצת העצמים, הנמצאים ב- A_α ל- α אחד, לפחות, ב- Γ. הסימון הוא $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$.

לשון אחר: $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in \Gamma \ (x \in A_\alpha)\}$.

חיתוך כל ה- A_α-ים, כאשר $\alpha \in \Gamma$, הוא קבוצת האיברים המשותפים לכל ה- A_α .

הסימון הוא $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$.

לשון אחר: $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in \Gamma \ (x \in A_\alpha)\}$. 49

משפט 1.28

תהי Γ קבוצה לא ריקה של אינדקסים ויהי $\alpha_0 \in \Gamma$.

א. $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$

ב. $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \subseteq A_{\alpha_0}$ 50

הגדרה *1.27

תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות.

$\bigcup_{A \in B} A$, איחוד כל הקבוצות ב- B היא הקבוצה $\{x \mid \exists A \in B (x \in A)\}$.

$\bigcap_{A \in B} A$, חיתוך כל הקבוצות ב- B היא הקבוצה $\{x \mid \forall A \in B (x \in A)\}$.

גם כאן נרחיב ונגדיר: $\bigcup_{A \in \varnothing} A = \varnothing$. 50

1.28* משפט

תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות ותהי $A_0 \in B$.

א. $A_0 \subseteq \bigcup_{A \in B} A$

ב. $\bigcap_{A \in B} A \subseteq A_0$ 51

1.29 משפט (כללי הפילוג)

א. $B \cap (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (B \cap A_\alpha)$

ב. $B \cup (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (B \cup A_\alpha)$ 51

1.30 משפט (כללי דה-מורגן)

א. $(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^{\ c}$

ב. $(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^{\ c}$ 51

2.1 אקסיומה אקסיומת ה-n-יות הסדורות

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל n-יה סדורה יש איבר ראשון יחיד, איבר שני יחיד וכן הלאה, ואיבר n-י יחיד. שתי n-יות סדורות הן שוות, אם ורק אם יש להן אותו איבר ראשון, אותו איבר שני, וכן הלאה, ואותו איבר n-י. 71

:3 Ûã×ð
A× B =∅ iff (A =∅ OR B =∅)

2.2 הגדרה מכפלה קרטזית

יהיו A, B קבוצות. **המכפלה הקרטזית** של A ב-B היא קבוצת הזוגות הסדורים שבהם משמאל מופיע איבר של A ומימין איבר של B.

המכפלה הקרטזית הנ"ל מסומנת $A \times B$. $A \times B = \{\langle a,b \rangle | a \in A \wedge b \in B\}$. 71

2.3 משפט

לכל C, B, A מתקיימים:

א1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ א2. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

ב1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ב2. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

ג1. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ג2. $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$ 73

2.4 הגדרה יחס

יהיו B,A קבוצות. **יחס דו-מקומי** מ-A ל-B הוא תת-קבוצה של $A\times B$.

75 יחס דו-מקומי מ-A ל-A נקרא גם יחס דו-מקומי על A

2.5 הגדרה היחס ההופכי

:11 Ûã×ð
(R–1)–1 = R
R⊆S ⇔ R–1⊆S–1
(RS)–1 = R–1∩S–1
(RS)–1 = R–1∪S–1

יהי R יחס מהקבוצה A לקבוצה B. היחס ההופכי ל-R הוא היחס הבא מ-B ל-A

79 $\{\langle y,x\rangle | \langle x,y\rangle \in R\}$. את היחס ההופכי ל-$R$ נסמן R^{-1}.

2.6 הגדרה ריבוע היחס

שאלה 23:
א׳ וב׳ לא ריקות:

יהי R יחס על קבוצה A. היחס R^2 על A הוא היחס המקיים את התכונה הבאה:

לכל $a,b\in A$ $\langle a,b\rangle \in \mathbf{R}^2$ אם ורק אם קיים $c\in A$ כך ש-$\langle a,c\rangle \in \mathbf{R}^2$ ו-$\langle c,b\rangle \in \mathbf{R}^2$.

82 לשון אחר: $aR^2b \Leftrightarrow \exists x\in \mathbf{R}(aRx\wedge xRb)$.

יחסים על A:

:18 Ûã×ð
R Reflexive Ꝃ R̥ R2

2.7 הגדרה רפלקסיביות כלומר, מכיל את I_A

:20 Ûã×ð
R Reflexive &R⊆S ⇒ S Reflexive
R Reflexive ⇔ R–1 Reflexive
R&S reflexive over A ⇒איחודם וחיתוכם גם רפלקסיבי

יחס R על קבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם לכל a ב-A מתקיים aRa.

83 תכונה זו של היחס R נקראת רפלקסיביות.

2.8 הגדרה אנטי-רפלקסיביות אם אין <u>אף</u> מקרה רפלקסיבי

בכל מקרה: השימוש במילה "אנטי" מסמל אי-קיום <u>מוחלט</u> של התופעה.

יחס R על קבוצה A נקרא **אנטי-רפלקסיבי** אם לשום a ב-A לא מתקיים aRa.

לשון אחר: אם אינו מכיל שום זוג סדור מהצורה $\langle a,a\rangle$.

84 תכונה זו נקראת **אנטי-רפלקסיביות**.

:24 Ûã×ð
R symetric ⇒R2 symetric
:23 Ûã×ð
R–1 = R⇔ R Symetric& R-1 is symetric

2.9 - הגדרה סימטריה

היחס הריק מקיים:
סימטרי
אנטירפלקסיבי
רפלקסיבי (אם על קבוצה ריקה)
טרנזיטיבי
משווה
אנטי סימטרי

יחס R על A ייקרא **סימטרי,** אם לכל b,a ב-A, המקיימים aRb, מתקיים גם bRa.

:26 Ûã×ð
.äàìïßåàè äÛ äÙ äÛãð äàâÜñàÞÛÜ äàÚÜÞà×Û ,äàìïßåàè äàèÞà àçð ä×
:27 Ûã×ð

85 תכונה זו נקראת **סימטריה.**

R over A ⇒ (R∪R–1 & R∩R–1) are symetric

2.10 הגדרה אנטי-סימטריה

אנטי סימטרי במובן הרחב:
אם לא קיימים זוגות סימטריים אחד לשני <u>פרט</u> לאלו שב I_A (רק אם איי=בי)
נקרא לו "אנטי סימטרי" אבל מפרגן לפעמים.
דוגמאות בעמ׳ 54

יחס R על A ייקרא **אנטי-סימטרי,** אם לא קיימים b,a ב-A כך ש-aRb וגם bRa.

86 לשון אחר: אם $R\cap R^{-1}=\varnothing$. תכונה זו תיקרא **אנטי-סימטריה.**

:29 Ûã×ð
R antisymetric ⇒R antireflexive
:30 Ûã×ð
R antisymetric⇒R–1 Anti symetric
same in wide sense of antisymetry

שאלה 31:
כל יחס החלקי ליחס אנטי סימטרי- גם אנטי סימטרי.
כנ"ל לגבי אנטי סימטרי במובן הרחב

2.11 הגדרה טרנזיטיביות

88 יחס R על קבוצה A ייקרא **טרנזיטיבי,** אם לכל c,b,a ב-A, $aRb\wedge bRc \Rightarrow aRc$.

שאלה 32:
נתונות שתי קבוצות אנטי סימטריות (לא משנה הסוג):
החתיוך בינהן גם הוא אנטי סימטרי (מאותו הסוג), והאיחוד ביהם לא!

שאלה 36:
חיתוך 2 יחסים על איי - טרנזיטיבי
איחודם - לא.

2.12 משפט

היחס R על A הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $R^2 \subseteq R$. 88

יחסי שקילות וחלוקות

2.13 הגדרה יחס שקילות

יחס על קבוצה A נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. 90

2.14 הגדרה חלוקה

תהי A קבוצה לא ריקה. **חלוקה** של A היא קבוצה של תת-קבוצות לא ריקות של A שכל שתיים מהן זרות זו לזו ואיחודן הוא A כולה.

כל אחת מן הקבוצות הללו נקראת **תא** של החלוקה. 91

שאלה 23:
א' וב' לא ריקות

2.15 משפט **הגדרת יחס בעזרת חלוקה**

תהי A קבוצה לא ריקה ותהי π חלוקה של A.

יהי $\equiv_\pi$ היחס הבא על A: $x \equiv_\pi y$ אם ורק אם x ו-y נמצאים באותו תא של החלוקה π.

$\equiv_\pi$ הוא יחס שקילות על A. 91

2.16 משפט **קישור בין יחס שקילות לבין חלוקה**

אם R הוא יחס שקילות על קבוצה לא ריקה A, קיימת חלוקה יחידה π של A, כך ש-

$R = \equiv_\pi$, דהיינו שהיחס R מושרה על ידי π. 93

שאלה 41:
לשני מחלקות שקילות/ איברים קיים איבר משותף אם"ם הן אותה הקבוצה
שאלה 43:
חיתוך יחסי שקילות שונים הוא יחס שקילות.
לא בהכרח נכון עבור איחוד.

2.17 הגדרה מחלקות שקילות

יהי R יחס שקילות על קבוצה A ותהי π החלוקה של A המשרה את היחס R. 94

כל תא בחלוקה π נקרא **מחלקת שקילות** של R.

עידון של חלוקה:
אם כל תא של חלוקה 1 הוא
תת קבוצה של תא מחלוקה שניה
אזי חלוקה היא עידון של חלוקה 2.

2.18 הגדרה קבוצת המנה

יהי E יחס שקילות מעל קבוצה A. קבוצת מחלקות השקילות של E נקראת **קבוצת המנה** של A מעל E, וסימונה הוא A/E.

שאלה 48:
חלוקה 2 עידון של חלוקה 1 אם"ם יחס שקילות 1 מכיל יחס שקילות.
שאלה 49:
חלוקה המכילה את כל החיתוכים הלא ריקים של שתי חלוקות- גם היא חלוקה

אם קבוצת המנה היא סופית, נכנה את מספר איבריה, דהיינו את מספר מחלקות השקילות,

בשם ה**אינדקס** של E. אם קבוצת המנה היא אינסופית, אומרים שהאינדקס אינסופי. 95

שאלה 50:
חלוקה2 עידון של חלוקה 1 אזי- מכפלת החלוקות=חלוקה 2
חלוקה כפול עצמה= עצמה
שאלה 51:
חיתוך שני יחסי שקילות על קבוצה = מכפלת החלוקות התואמות להם.

יחסי סדר:

2.19 הגדרה - יחס סדר מלא

יחס R על קבוצה A נקרא **יחס סדר מלא** אם הוא

א. אנטי-רפלקסיבי ב. טרנזיטיבי ג. משווה, כלומר <u>לכל</u> b, a aRb או bRa או $a = b$. 97

שאלה 53:
סדר מלא1-R iffסדר מלא R

שאלה 56:
כל סדר חלקי על קבוצה עם איבר אחד או פחות- הוא סדר מלא.
על כל קבוצה בעלת יותר מאיבר אחד - קיים סדר חלקי.
שאלה 58
היחס "א' מחלק את ב' " הוא יחס סדר חלקי.

2.20 הגדרה יחס סדר חלקי

יחס R על קבוצה A נקרא **יחס סדר חלקי** או בקיצור: **סדר חלקי**, אם הוא

א. אנטי-רפלקסיבי ב. טרנזיטיבי 99

קבוצות סדורות:

2.21 הגדרה קבוצה סדורה וקבוצה סדורה חלקית

קבוצה סדורה חלקית היא זוג סדור $\langle A,\prec\rangle$, כאשר A היא קבוצה ו- $\prec$ הוא סדר חלקי על A. **קבוצה סדורה** היא זוג סדור $\langle A,\prec\rangle$, כאשר A היא קבוצה ו- $\prec$ הוא סדר מלא על A.

100

שאלה 23:
א' וב' לא ריקות:

2.22 הגדרה **-** תת-קבוצה סדורה חלקית

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית. $\langle A',\prec'\rangle$ תיקרא **תת-קבוצה סדורה חלקית** של $\langle A,\prec\rangle$ אם $A'\subseteq A$ ולכל $a,b\in A'$, $a\prec' b$ אם ורק אם $a\prec' b$.

אם $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה, אז במקרה זה $\langle A',\prec'\rangle$ תיקרא **תת-קבוצה סדורה** של $\langle A,\prec\rangle$.

שאלה 61 (סדר לקסיקוגרפי):
איחוד קבוצות סדורות וזרות אחת לשניה יוצר קבוצה,
היחס המילוני על האיחוד הנ"ל ייצור זוגות אם:
יחס א' חל על איברים מ א'
יחס ב' חל על איברים מב'
נערכת השוואה בין איבר מב' לאיבר בא' (ואז ב' גדול מא')
- במקרה ומתקיים יחס מילוני:
איחוד הקבוצות יחס סדר חלקי
והקבוצות הינן תת-קבוצות סדורות חלקית שלה.
אם הקבוצות סדורות האיחוד סדור גם הוא.

100
שאלה 62:
מתואר יחס (חלקי במקרה הזה)
על מכפלה קרטזית בין שתי קבוצות סדורות

2.23 הגדרה איבר ראשון ואיבר אחרון לא יכולים להיות כמה כאלה:

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

איבר a ב- A ייקרא **איבר ראשון** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל x ב- A , $a\prec x$ או $a=x$.

איבר b ב- A ייקרא **איבר אחרון** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם לכל x ב- A , $x\prec b$ או $x=b$. 101

2.24 משפט

בקבוצה סדורה חלקית $\langle A,\prec\rangle$ אין יותר מאיבר ראשון אחד ואין יותר מאיבר אחרון אחד.

לכן, לפי שאלה 63:
איבר ראשון ברלציה אם"ם הוא אחרון ברלציה ההופכית.
וגם: אם יחס הוא יחס סדר גם היחס ההופכי לו הוא יחס סדר
ואם הוא יחס סדר מלא- גם ההופכי לו יחס סדר מלא

102

2.25 הגדרה איבר מינימלי ואיבר מקסימלי יכולים להיות כמה כאלה:

תהי $\langle A,\prec\rangle$ קבוצה סדורה חלקית.

איבר a ב- A ייקרא **איבר מינימלי** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב- A אשר $x\prec a$.

איבר b ב- A ייקרא **איבר מקסימלי** ב-$\langle A,\prec\rangle$ אם אין x ב- A אשר $a\prec x$. 102

2.26 טענה הקשר שבין מינימאלי לראשון ובין מקסימאלי לאחרון

איבר ראשון ב-$\langle A,\prec\rangle$ הוא מינימלי ואיבר אחרון ב-$\langle A,\prec\rangle$ הוא מקסימלי. 102

2.27 טענה הקשר בינהם במקרה של סדר מלא

בקבוצה סדורה (בסדר מלא) איבר הוא ראשון אם ורק אם הוא מינימלי ואיבר הוא אחרון אם ורק אם הוא מקסימלי. 103

שאלה 65:
היחס "מתחלק ב..." על המספרים הטבעיים.
שאלה 66:
שימור מינימאלי ומקסימאלי בהיפוך רלציות.

2.28 משפט

בקבוצה סדורה חלקית סופית ולא ריקה $\langle A,\prec\rangle$ <u>יש</u> איבר מינימלי ואיבר מקסימלי. 104

2.29 הגדרה <u>הרכבת יחסים</u> בתכלס- ייצור איבר משני איברים טרנזיטיביים

שאלה 69:
הרכבת היחס בין א' לב' עם היחס שבין ב' לג':
$\mathbf{R^{-1}S^{-1} = (RS)^{-1}}$

שאלה 70:
קיים יחס מא' לב'.
$\mathbf{I_A R = RI_B = R}$
ובפרט לגבי יחס מא' לא': $I_AR = RI_A = R$

יהיו C,B,A קבוצות, ויהיו R_1 יחס מ-A ל-B ו-R_2 יחס מ-B ל-C.

ההרכבה R_1R_2 היא היחס מ-A ל-C.. המוגדר כך:

$$R_1R_2 = \{\langle a,c\rangle \in A\times C \mid \exists b\in B(\langle a,b\rangle\in R_1 \wedge \langle b,c\rangle \in R_2\}\ .$$

• אחלה תמצות: לשון אחר: $aR_1R_2c \Leftrightarrow \exists b\in B(aR_1b \wedge bR_2c)$. 105

פונקציות:

3.1 הגדרה - פונקציה

פונקציה היא שלשה סדורה $\langle A,B,\mathcal{G}\rangle$ כאשר B,A הן קבוצות ו-$\mathcal{G}$ תת-קבוצה של $A\times B$,

שלכל שלכל x ב-A יש y יחיד ב-B המקיים $\langle x,y\rangle\in\mathcal{G}$. 128

שאלה 2:
גרף של פונקציה ריק אם"ם התחום שלה ריק

3.2 הגדרה מיקרו

לכל מקור - דמות אחת בלבד.
לכל דמות- יכולים להיות כמה מקורות.

תהי f פונקציה מ-A ל-B ויהיו $x\in A$ ו-$y\in B$ כך ש-$f(x)=y$, דהיינו הזוג הסדור $\langle x,y\rangle$ שייך לגרף של f. נאמר ש-y הוא ה**דמות** של x על ידי f ו-x הוא **מקור** של y על ידי f. 131

3.3 הגדרה מאקרו

יהיו $f:A\to B$ $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$. ה**תמונה** של C על ידי f (שתסומן $f[C]$) היא קבוצת הדמויות של איברי C על ידי f, דהיינו $\{f(x)|x\in C\}$.

ה**תמונה** ה**הפוכה** של D על ידי f (שתסומן $f^{-1}[D]$) היא קבוצת המקורות של איברי D על ידי f, דהיינו $\{x\in A|\ f(x)\in D\}$. 131

:7 Ûã×ð
f −1[Dc] = (f −1[D])c
f −1 [D1 \ D2] = f −1 [D1] \ f −1 [D2]

:6 Ûã×ð
C1 ⊆ C2 ⇒ f[C1]⊆ f[C2]
D1 ⊆ D2 ⇒ f−1[D]⊆ f−1[D]
f[C1]∪ f[C2] = f [C1 ∪C2]
f [C1 ∩C2]⊆ f [C1]∩ f[C2]
f−1 [D1∪D2] = f−1[D1]∪ f−1[D2]
f−1[D1∩D2] = f−1[D1]∩ f−1[D2]

שאלה 8:
תמונה הפוכה של איחוד קבוצות=
איחוד התמונות ההפוכות של אותן הקבוצות
• כנ"ל לגבי החיתוך

3.4 הגדרה

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **פונקציה מ-** A **על** B, או, בקיצור, **פונקציה על**, אם $\mathrm{Im}(f) = B$. 133

שאלה 11:
אם א׳ לא ריקה ו|ב׳|=1 אזי-
כל פונקציה א׳->ב׳ היא על.

3.5 הגדרה

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **חד-חד-ערכית**, אם לכל שני איברים שונים ב-A יש דמויות שונות.

:àãåïÜë ÞÜèàç
ꚏx1ҽ Aꚏx2 ҽ A(f (x1) = f (x2) ḱ x1 = x2)
:ä× ñàâïé-ÚÞ-ÚÞ ×ã ê×
∃x1∈ A∃x2 ∈ A(x1 ≠ x2 ∧ f (x1) = f (x2))

לשון אחר: f תיקרא חד-חד-ערכית אם מ- $f(x_1) = f(x_2)$ נובע $x_1 = x_2$. 135

3.6 משפט

שאלה 23:
א׳ וב׳ לא ריקות:

הפונקציה $f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית, אם ורק אם לכל C ו-D, החלקיות ל-A מתקיים $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$. 136

שאלה 15:
אותו עקרון כמו 3.6 מתקיים
אם משתמשים בהפרש במקום חיתוך

3.7 משפט

פונקציה $f : A \to B$ היא חד-חד-ערכית ועל אם ורק אם לכל C החלקית ל-A $f[C]^c = f[C^c]$. 137

:16 Ûã×ð
C fꞪ1[f[C]]
f[fꞪ1[D]] D
~~×ÿ ó"Þþ ô×~~
~~A , ú ä/ ý ú ýA[[~~
~~×ÿ ãó ô×~~
~~f[f 1[D]] D~~

3.8 משפט

תהי $f : A \to B$ פונקציה.

א. f חד-חד-ערכית אם ורק אם לכל תת-קבוצה C של A $C = f^{-1}[f[C]]$.

ב. f היא על אם ורק אם לכל תת-קבוצה D של B $f[f^{-1}[D]] = D$. 138

3.9 משפט

|A|≤|B|

אם A היא קבוצה סופית ו-$f : A \to B$ היא פונקציה חד-חד-ערכית, אז מספר איברי A אינו עולה על מספר איברי B. 138

3.10 משפט

|B|≤|A|

אם A היא קבוצה סופית ו-B קבוצה כלשהי ו- f היא פונקציה מ-A על B, אז B סופית ומספר איברי B אינו עולה על מספר איברי A. 138

3.11 משפט

אם A ו-B הן קבוצות סופיות אז:

$|A| = |B|$ אם ורק אם יש פונקציה חד-חד-ערכית מ-A על B.

שאלה 18: א׳ וב׳ סופיות:
פונקציה מא׳ לא׳ חח"ע אם"ם היא על.
אם |א׳|=|ב׳| אזי (פונקציה מא׳ לב׳ היא חח"ע אם"ם היא על).
אם קיימת פונקציה חח"ע ועל מא׳ לב׳
אזי כל פונקציה מא׳ לב׳ המקיימת את אחת התכונות:
מקיימת גם את השניה!

$|A| \le |B|$ אם ורק אם יש פונקציה **חד-חד-ערכית** מ-A ל-B.

139 $|A| \le |B|$ אם ורק אם יש פונקציה מ-B **על** A.

3.12 משפט לכל יחס שקילות על קבוצה קיימת פונקציה שהגרף שלה זהה לה.

תהי A קבוצה לא ריקה ויהי $\equiv$ יחס שקילות על A. קיימות קבוצה B ופונקציה $f : A \to B$,

141 כך ש- $\equiv = \equiv_f$.

:19 Ûã×ð
.Ûãð ñÜàÜåÚÛ ãð ñÜâÜëÛÛ ñÜçÜåñÛ àëã ñÜïÚÙÜå ê× ãð ñÜãàîðÛ ñÜîãÞå

כלומר: f −1[{a}]=S$_a$

שאלה 20: ניתן להסיק מכך שאם f −1[{a}]=1 לכל איבר a אז אף חח"ע.

3.13 הגדרה

פונקציות מיוחדות:

פונקציה $f : A \to B$ תיקרא **פונקציה קבועה** אם יש לה ערך אחד ויחיד, דהיינו **בתמונה** של

141 f יש רק איבר אחד.

שאלה 23:
א׳ וב׳ לא ריקות:
פונקציה מא׳ לב׳ חח"ע אם"ם |א׳|=1
פונקציה מא׳ לב׳ על אם"ם |ב׳|=1

3.14 הגדרה

יהיו B, A קבוצות לא ריקות כך ש-$A \subseteq B$. **פונקציית הזהות** מ-A ל-B היא הפונקציה

142 $f : A \to B$, שלכל x ב-A $f(x) = x$.

3.15 הגדרה הטלה:

הטלה:
פונקציה המקבלת אן-יה סדורה ומחזירה את האיבר הקיי-י בה.

יהיו $A_1, \dots, A_n$ קבוצות לא ריקות ותהי $A = \times_{i=1}^{n} A_i$. לכל k מ-1 עד n **ההטלה** של A **על**

שאלה 24:
כל הטלה היא פונקציה על.

143 **הרכיב** ה-k-י היא הפונקציה $\pi_k : A \to A_k$, שלכל $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ב-A $\pi_k(a) = a_k$.

3.16 הגדרה פונקציה אופיינית (פונקציית ה"קיים או לא קיים?")

תהי U קבוצה לא ריקה. לכל תת-קבוצה A הפונקציה האופיינית של A ביחס ל-U היא

הפונקציה $\chi_A : U \to \{0,1\}$, שלכל x ב-U מתקיים:

143
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הרחבה וצמצום:
עמ׳ 97

3.17 הגדרה מצמצמים או מרחיבים **את התחום**

יהיו C, B, A קבוצות לא ריקות, כך ש-$A \subseteq B$. יהיו $g : A \to C$ ו-$f : B \to C$ פונקציות,

שלכל x ב-A $f(x) = g(x)$, בתנאים אלה אנו אומרים ש-g הוא צמצום של f ל-A, וש-

145 f היא הרחבה של g ל-B.

3.18 הגדרה הרכבת פונקציות

יהיו $f : B \to C$ ו-$g : A \to B$ פונקציות. ההרכבה $f \circ g$ (קרי: ההרכבה של f על g היא

148 הפונקציה מ-A ל-C, המעתיקה כל x ב-A ל-$f(g(x))$.

:ä× îï ñÜàí îçÜë áâ ØàâïÛã ïðë×
Range(g)⊆Domain(f)

3.19 משפט

הרכבת פונקציות היא קיבוצית, כלומר, אם h פונקציה מ-A ל-B, g פונקציה מ-B ל-C
ו-f פונקציה מ-C ל-D, אז ההרכבות $f\circ(g\circ h),(f\circ g)\circ h$ מוגדרות והן שוות. 150

3.20 טענה הרכבת רלציית זהות של טווח ורלציית זהות של תחום עם פונקציה שווה לפונקציה

יהיו B, A קבוצות לא ריקות. אם I_A היא פונקציית הזהות מ-A ל-A (דהיינו $\mathrm{I}_A : A\to A$
ולכל x ב-A $\mathrm{I}_A(x)=x$) ו-I_B היא פונקציית הזהות מ-B ל-B, ו-f היא פונקציה מ-A ל-
B, אז $f\circ \mathrm{I}_A$ ו-$\mathrm{I}_B\circ f$ שתיהן מוגדרות ושוות שתיהן ל-f. 151

3.21 משפט שימור תכונות בהרכבה

יהיו $g : A\to B$, $f : B\to C$ פונקציות.

א. אם g, f חד-חד-ערכיות, אז גם . $f\circ g$ חד-חד-ערכית.

ב. אם g, f הן פונקציות על, אז גם . $f\circ g$ היא פונקציה על. 151
שים לב! הדבר נכון גם כששתי התכונות מתקיימות בו"ז

3.22 משפט שימור תכונות בהסקה לאחור (מההרכבה אל אחת הפונקציות)

אם $f : B\to C,\ g : A\to B$ הן פונקציות, אז:

א. אם $f\circ g$ חד-חד-ערכית, אז g חד-חד-ערכית.

ב. אם $f\circ g$ על, אז f על. 152
:ð æÜâç ×ã Úàåñ ßéåâ :36 Ûã×ð
g·f=h·f -or- f·g=f·h THEN: h=g

3.23 הגדרה

תהי $f : A\to B$ פונקציה.

נאמר ש-f **מצטמצמת משמאל** אם לכל שתי פונקציות h, g מקבוצה מסוימת ל-A,
מ-$f\circ g = f\circ h$ מתחייב $g = h$.

שאלה 37:
fמצטמצמת מימין אם"ם היא חד ערכית.
fמצטמצמת משמאל אם"ם היא על.

נאמר ש-f **מצטמצמת מימין** אם לכל שתי פונקציות h, g מ-B לקבוצה מסוימת
מ-$g\circ f = h\circ f$ מתחייב $g = h$. 153

3.24 הגדרה

תהי $f : A\to B$ פונקציה חד-חד-ערכית ועל. **הפונקציה ההופכית** ל-f היא הפונקציה
$f^{-1} : B\to A$, כך שלכל b ב-B, $f^{-1}(b)$ הוא ה-a היחיד ב-A שעבורו $f(a)=b$. 154

3.25 משפט

אם $f{:}A\to B$ חד-חד-ערכית ועל, אז $f^{-1}{:}B\to A$ חד-חד-ערכית ועל, ו-$(f^{-1})^{-1} = f$. 155

שיטת הוכחה לחח"ע ועל בעמ' 106 למטה.

3.26 משפטהרכבת פונקציות הופכיות שווה ליחס השוויון על התחום +או+ על הטווח (תלוי)

אם $f: A \to B$ חד-חד-ערכית ועל, אז $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}_A$ ו- $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}_B$.

(כזכור, I_A היא פונקציית הזהות מ-A על A, כלומר, לכל x ב-A $\mathrm{I}_A(x) = x$). 155

3.27 משפט הוכחת פונקציה ב' כפונקציה ההופכית של פונקציה א'

שני תנאים!

יהיו $f: A \to B$ ו- $g: B \to A$, כך ש- $g \circ f = \mathrm{I}_A$ ו- $f \circ g = \mathrm{I}_B$. אז f ו- g שתיהן חד-חד-

ערכיות ועל ו- $f^{-1} = g$ (וכמובן $g^{-1} = f$, לפי משפט 3.25). 156

3.28 משפט הפיכה הפוכה ושימור תכונת ה"הפיכות"

אם $f: A \to B$ ו- $g: B \to C$ ושתיהן הפיכות, אז $f^{-1} \circ g^{-1}$ הופכית ל- $g \circ f$, ובפרט, $g \circ f$

:41Ůã×ð

f:AꝀB , g:BꝀC , D C

ý×

(g·f)−1[D] = f −1[g−1[D]]

ו- $f^{-1} \circ g^{-1}$ שתיהן הפיכות. 157

3.29 משפטכמה פונקציות אפשריות יש מא' לב'?

אם B, A קבוצות סופיות, כך ש-B אינה ריקה, אז גם הקבוצה B^A היא סופית, ו-

$|B^A| = |B|^{|A|}$.

לשון אחר: מספר הפונקציות מ-A ל-B הוא מספר איברי B בחזקת מספר איברי A. 158

3.30 טענה

יהיו B, A קבוצות סופיות, שמספר האיברים בכל אחת מהן הוא n ($n > 0$). מספר

הפונקציות החד-חד-ערכיות מ-A ל-B הוא מכפלת המספרים מ-1 עד n (הסימון למכפלה

זו הוא $n!$, קרי: n עצרת). 159

3.31 הגדרה הגדרת פונקציה סופית ואינסופית

יהיו A קבוצה לא ריקה ויהי n מספר טבעי. **סדרה באורך** n של איברים מ-A היא פונקציה

מ- $\{k \in \mathbf{N} | k < n\}$ ל- A. **סדרה אינסופית** של איברים מ-A היא פונקציה מ- $\mathbf{N}$ ל- A. סדרה

באורך n, כאשר $n \in \mathbf{N}$, תיקרא **סדרה סופית**. 161

שאלה 43: איך להשוות עוצמות:
הוכיחו ששתי סדרות הן שוות זו לזו אם ורק אם יש בהן אותו מספר מקומות, ובכל אחד מן המקומות מופיע בשתי הסדרות אותו איבר.

3.32 הגדרהמכפלה קרטזית עם אינסוף איברים סדורים

לכל מספר טבעי n תהי A_n קבוצה. **המכפלה הקרטזית** של כל ה- A_n-ים (מ- 0 ואילך

בסדר הרגיל), שתסומן $\underset{n=0}{\overset{\infty}{\times}} A_n$ היא קבוצת הסדרות האינסופיות שבהן לכל n מותאם איבר

של A_n. 162

ניתן להכליל הגדרה זו ולדבר על מושג כללי יותר של מכפלות קרטזיות.

3.32* הגדרה

תהי Γ קבוצה כלשהי, ולכל i ב-Γ תהי A_i קבוצה. המכפלה הקרטזית של כל ה-A_i-ים, שתסומן $\underset{i\in\Gamma}{\times} A_i$ היא קבוצת הפונקציות מ-Γ ל-$\underset{i\in\Gamma}{\cup} A_i$, שבהן לכל i ב-Γ מותאם איבר של A_i

162

4.1 הגדרה

יהיו A ו-B קבוצות. אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית מ-A על B, נאמר ש-A **שקולה** ל-B, והסימון יהיה $A \sim B$. נאמר גם ש-A **שוות עוצמה** ל-B. 181

4.2 משפט

א. כל קבוצה שקולה לעצמה, דהיינו $A \sim A$.

ב. אם A שקולה ל-B, אז B שקולה ל-A., דהיינו: אם $A \sim B$, אז $B \sim A$.

ג. אם A שקולה ל-B ו-B שקולה ל-C, אז A שקולה ל-C.

($A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$). 181

4.3 הגדרה

קבוצה נקראת **בת-מנייה** אם היא סופית, או שהיא שקולה ל-$\mathbf{N}$. 183

4.4 משפט

$\mathbf{Z}$ - קבוצת המספרים השלמים ו-$\mathbf{Q}$ - קבוצת המספרים הרציונליים הן בנות-מנייה ועוצמת כל אחת מהן היא $\aleph_0$. 186

4.5 משפט

כל קבוצה, החלקית לקבוצה בת-מנייה היא בת-מנייה. 186

4.16 טענה

אם A היא בת-מנייה ואינסופית, אז $A\times A\sim A$. 201

4.17 טענה

לכל קבוצה A, $A^{\mathbb{N}}\times A^{\mathbb{N}}\sim A^{\mathbb{N}}$. 202

4.18 טענה

$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\sim\mathbf{R}$. 202

שאלה 23:
א׳ וב׳ לא ריקות:
פ

4.9 טענה

אם $A\lhd B$, $C\sim A$ ו-$D\sim B$, אז $C\lhd D$. 203

4.20 הגדרה

נאמר ש-$|A|\le|B|$ (קרי: עוצמת A קטנה או שווה לעוצמת B) אם $A\lhd B$. 203

במקרה זה נאמר גם ש-$|B|\ge|A|$ (קרי: עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A).

4.21 משפט

א. $|A|\le|A|$ ($\le$ הוא רפלקסיבי).

ב. $|A|\le|B|\wedge|B|\le|C|\Rightarrow|A|\le|C|$ ($\le$ הוא טרנזיטיבי). 204

4.22 הגדרה

נאמר ש-$|A|<|B|$ (קרי: עוצמת A קטנה מעוצמת B) אם $|A|\le|B|$ אבל $|A|\ne|B|$.

במקרה זה נאמר גם ש-$|B|>|A|$ (קרי: עוצמת B גדולה מעוצמת A). 204

4.23 משפט

אם A,B סופיות, $|A|<|B|$ אם ורק אם יש פונקציה חד-חד-ערכית מ-A ל-B, שאינה על.

205

4.24 טענה

לכל קבוצה A מתקיים $|A|<\left|\{0,1\}^A\right|$. 205

4.25 משפט (משפט קנטור)

לכל קבוצה A מתקיים $|A|<|\mathcal{P}(A)|$. 206

4.26 משפט (משפט קנטור, שרדר ברנשטיין)

אם λ ו- μ הן עוצמות כך ש- $\lambda \le \mu$ וגם $\mu \le \lambda$, אז $\lambda = \mu$.

לשון אחר: אם A ו- B הן קבוצות כך ש- $A \triangleleft B$ וגם $B \triangleleft A$, אז $A \sim B$. 207

4.27 מסקנה (כלל הסנדוויץ')

אם $A \subseteq B \subseteq C$ ו- $A \sim C$ (לשון אחר: $|A| = |C|$), אז $A \sim B$ ו- $B \sim C$

($|A| = |B|$ ו- $|B| = |C|$). 210

4.28 משפט

א. יהיו λ_1, λ_2 עוצמות. לא יתכן שגם $\lambda_1 < \lambda_2$ וגם $\lambda_2 < \lambda_1$.

ב. אם $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ הן עוצמות ו- $\lambda_1 < \lambda_2$ ו- $\lambda_2 < \lambda_3$, אז $\lambda_1 < \lambda_3$. (טרנזיטיביות של $<$). 212

4.29 משפט

קיימות אינסוף עוצמות אינסופיות. 212

4.30 הגדרה

יהיו κ_1, κ_2 עוצמות. יהיו A_1, A_2 קבוצות **זרות זו לזו**, כך ש- $|A_1| = \kappa_1$ ו- $|A_2| = \kappa_2$.

הסכום $\kappa_1 + \kappa_2$, דהיינו $|A_1| + |A_2|$ יוגדר כ- $|A_1 \cup A_2|$. 214

4.31 (דוגמאות לחיבור עוצמות)

א. לכל עוצמה κ, $\kappa + 0 = \kappa$.

ב. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

ג. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

ד. $\aleph + \aleph = \aleph$ 215

4.32 משפט

א. חיבור עוצמות הוא חילופי (קומוטטיבי), דהיינו: $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_2 + \kappa_1$.

ב. חיבור עוצמות הוא קיבוצי (אסוציאטיבי), דהיינו: $(\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_3 = \kappa_1 + (\kappa_2 + \kappa_3)$. 216

4.33 משפט

תהי κ עוצמה אינסופית. $\kappa + \aleph_0 = \kappa$. 216

4.34 משפט

א. יהיו B, A קבוצות, כך ש-$A \subseteq B$ ו- $|B| = \aleph_0$. אם $A \setminus B$ אינסופית, אז $|A \setminus B| = |A|$.

ב. אם A קבוצה, שאינה בת-מנייה, $B \subseteq A$ ו- $|B| = \aleph_0$, אז $|A \setminus B| = |A|$. 216

4.35 משפט

יהיו $\lambda_2, \lambda_1, \kappa_2, \kappa_1$ עוצמות. אם $\kappa_1 \le \kappa_2$ ו- $\lambda_1 \le \lambda_2$, אז $\kappa_1 + \lambda_1 \le \kappa_2 + \lambda_2$. 217

4.36 הגדרה

יהיו λ, κ עוצמות. המכפלה של κ ב- λ, שתסומן $\kappa \cdot \lambda$ או בקיצור $\kappa\lambda$ תוגדר כך:

תהי A קבוצה שעוצמתה κ ותהי B קבוצה שעוצמתה λ.

$\kappa \cdot \lambda = |A| \cdot |B| = |A \times B|$. 219

4.37 טענה (דוגמאות לכפל עוצמות)

א. לכל עוצמה κ $\kappa \cdot 0 = 0$ ו- $\kappa \cdot 1 = \kappa$.

ב.. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

ג.. $\aleph \cdot \aleph = \aleph$ 219

4.38 משפט

א. כפל עוצמות הוא חילופי: $\kappa\lambda = \lambda\kappa$.

ב. כפל עוצמות הוא קיבוצי: $(\kappa\lambda)\mu = \kappa(\lambda\mu)$. 219

4.39 משפט (חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור).

אם μ, λ, κ הן עוצמות אז $\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu$. 220

440 הגדרה

יהיו λ, κ עוצמות . יהיו B, A קבוצות בעלות העוצמות λ, κ, בהתאמה. נגדיר את העוצמה λ^κ (קרי: λ בחזקת κ) כך: $\lambda^\kappa = |B|^{|A|} = |B^A|$ (העוצמה של קבוצת הפונקציות מ-A ל-B).

221

441 טענת עזר

אם $|C| = |A|$ ו- $|D| = |B|$, אז $|D^C| = |B^A|$. (אם $C \sim A$ ו-$D \sim B$, אז $D^C \sim B^A$) 221

משפט 4.42

לכל קבוצה A $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. לשון אחר: אם $|A| = \kappa$, אז $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\kappa}$. 222

משפט 4.43

לכל עוצמה κ , $\kappa < 2^{\kappa}$. 222

משפט 4.44 (תכונות של העלאה בחזקה)

יהיו $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ עוצמות.

א. $(\kappa_1 \cdot \kappa_2)^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_3} \cdot \kappa_2^{\kappa_3}$.

ב. $\kappa_1^{\kappa_2 + \kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2} \cdot \kappa_1^{\kappa_3}$.

ג. $\kappa_1^{\kappa_2 \cdot \kappa_3} = (\kappa_1^{\kappa_2})^{\kappa_3}$. 222

Type text here

טענה 4.45

$\aleph^{\aleph_0} = \aleph$. 224