

מתמטיקה ג' בינה

מבגש 10

רקורסיה (נסיגה)

הגדרה רקורסיבית:

← (1) חזן מהאיורים מוגזרים בלוח מודגל.

(2) האיורים האחרים מוגזרים באמצעות
איורים שנגזרו.

צולגל : סורת פיקורזי

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

האיורים הואגלנים בסורה המ :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

הערבא דיאשון עלאן היום הווא יקורסיה.

נאמט ער צוריק:

← (1) אפער בדיק קאמפיוטאריזאציע
יקורסיה. - זיין אהער יחס נסיעה
זינאן געמאלד.

← (2) אפער נאמט יקורסיביות. זיין אפער אה
יחס ינסיעה וואקא נאמטאן אפער.

הלצרה ריקוסיבית :

מקרי הימנע → (1) איברים אחדים מאלגוריתם בלורה מפורשת.

יתם נסיגה → (2) האיברים הנותרים מאלגוריתם באמצעות
איברים שכבר הוגדרו.

צוללמא: למצור את סדרת פיבונצ'י.
קריקורסיה:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

ישמו את 8 האיברים הראשונים של הסדרה

שאלה: מהו האיקר במקום ה 100 בסדר בינוני?
(זהו a_{100} ?)

שאלה: מהו האיבר במקום ה-100 בסדר פידורצ'י?
(זהו a_{100} ?)

כדי אצטרך ציכ' אמש את $\sum_{k=1}^{100} a_k$ האיברים

a_1, a_2, \dots, a_n
(אל תחשבו אחר זה עכשיו...)

דוג'א דוג'א נאמר איך אפיון נוסחא רקורסיבית
ז"א למצוא נוסחא מפורשת עבור סדרה
שמחזרת בצורה רקורסיבית.

(ואם אפשר אמש ישירות - רצ' $n=100$ ונראה
אמש את a_{100})

3/8 צאגאל: נגזיר אלר העקצגלימ היינצאל"מ
ברקורסיה:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$0 < k < n$$

3/8 צאגאל: נגזיר אלר העקצגלימ היגיואל"מ
 בריקורסיה:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad 0 < k < n$$

העקצגלימ נק אלר העשולג פסקל:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 \vdots & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

הצורה: יש בעיות בקומבינטוריקה שנה לפתר בצורה
ריקורסיבית.

צאטא: מהו מספר המחרוזות באורך n .
בעזרתן מהיתורים $1, 2, 3, \dots$.
שמשפרי האבססים בהן הוא נאזי.

הצורה: יש בצורת בקווגינסטוריקה שנה לפטר בלורה
יקוויסידית.

צאמא: מהו מספר המחרוזת באורך n .

לדנאיות מהיתנים $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

שמשפר האפסיים בהן הוא נאזי.

פערון (קוויסידו). נסמן ב- a_n את מספר המחרוזות
באורך n התיקיות. (נקיימה את התינאים הנ"ל)

← אפגן אחרג קמפורה את a_0, a_1, a_2

(אמגל ד"י ספורה של פ המחרוזת התיקיות).

$$a_0 = 1$$

באופן 0 יג נק "מחוצה"
 אחר - הקבוצה הריקה
 ואכן יג לה מספר זוגי
 של אינסופי. (0).

$$a_1 = 3$$

0 "לא חוקי"
 1 - חוקי
 2 - חוקי
 3 - חוקי
 חוקיים:

$$a_2 = 10$$

$$\frac{00}{1 \cdot 1} = 1$$

$$\frac{00}{3 \cdot 3} = 9$$

נחשב את a_n - מקרה כללי.

$$a_n = 4^{n-1} - a_{n-1} + 3a_{n-1} = 4^{n-1} + 2a_{n-1}$$



מחוצה באורך $n-1$,
 עם מספר אי-זוגי של אבסיסים
 שכן יש בדיוק כמספר המחוצות
 הלא-חוקיות באורך $n-1$.

סה"כ יש 4^{n-1} מחוצות באורך
 $n-1$ מתוך הסדרה $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
 מתוכן a_{n-1} חוקיות
 ואם נחסר
 $4^{n-1} - a_{n-1}$
 באתי מחוקיות.



מחוצה עם
 מספר זוגי של
 אבסיסים

מחוצה באורך $n-1$
 שכן יש בדיוק כמספר
 מחוצות א"חוקיות
 באורך $n-1$
 שכן a_{n-1}

סה"כ
 $3a_{n-1}$

ולק הבחון על הבדיה יקואליטאריה הוא:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= 4^{n-1} + 2a_{n-1} \end{aligned}$$

לבדוק a_1 ו a_2 שלבאנו בחישוב יסיר
מיטקבלים מההשדה הנ"ל.

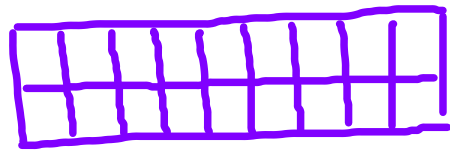
$$a_1 = 4^0 + 2 \cdot a_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$a_2 = 4^1 + 2 \cdot a_1 = 4 + 2 \cdot 3 = 10 \quad \checkmark$$

תרגיל:

בידיו מספר בלתי מוגבל של בלוקים 2×1 

בלוק ימני להיות באחד משלושה צבעים: ירוק, כחול או לבן
הבלוק כולו צבוע בצבע אחיד (לא כל משבצת בנפרד)

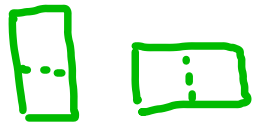


(נגמור $n=9$)

צילינו חוצץ מלפני שמימיו 2×8
כלי ימני מוגדל המלפני.

בלוק כחול אפשר להניח רק במלבן שוכן 

בלוק לבן אפשר להניח רק במלבן צמוד 

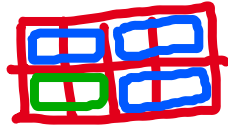


בלוק ירוק אפשר להניח במלבן שוכן או צמוד
אפשר להניח בלוק ירוק על בלוק כחול.

(א) תשבו במכונה את a_1, a_2, a_3

(ב) רשמו יחס נסיגה עבור a_n , עם תנאי היחולא מספיקים.

3/13/16 של רותם
חוקיים עבור $n=4$:



(1) נחשב יגיון את a_1, a_2, a_3 .

$n=1$ \square יש בדיוק 2 אפשרויות: בלוק ירוק אחד
או " " לבן

$a_1 = 2$

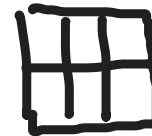
נחשב כחול \square $n=2$
כחול/ירוק \square
ירוק \square
נחשב ירוק \square
נחשב ירוק \square
נחשב ירוק \square

הערה: אנחנו מבדילים בין \square לבין \square

קבוצה

$$a_2 = 7$$

$n=3$



בהמשך יש לבדוק את כל האפשרויות
אחרת הכולל 2 $7 = 14$ אפשרויות.
הכל - נשאור אותו מלבד בגב
לא יש

בהמשך יש לבדוק שאכן
אכן יש 3 אפשרויות (ספרנו קודם)



אחרים יקראו באופן חלקי.
אכן יש 2 אפשרויות: $6 = 2 \cdot 3$ אפשרויות.
לא יש

$$a_3 = 14 + 6 = 20$$

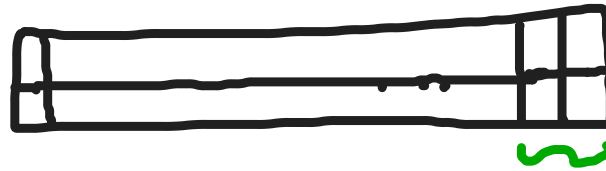
יבואו מסה

נחשג אלקרה טל. a_n י 2 אנשוריות:



(1) בהחלה
י 2 באוק
דאמדי.

אחריו י 2 זכרל מלגן באוק $n-1$
(זמן י 2 a_{n-1} אנשוריות זכרלל הגלגן)
יחיק/זין 2
בסהנ באונלית יהז $2 \cdot a_{n-1}$ אנשוריות.



(2) בהחלה
י 3 באוקים
שונדים

אחרים י 3 זכרל מלגן באוק $n-2$ (זמן י 2 a_{n-2} אנשוריות זכרלל)
בסהנ י 3 $3 \cdot a_{n-2}$ אנשוריות באונלית יהז 3
== 3

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

ולג

נדגים את הפתרון הריקורסיבי שלהלן:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 7$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

בזיקת ^{האם} a_3 בחישוב ישיר, a_3 מתקבל מנוסח
הריקורסיב, שאומר.

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3a_1 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$$

פתרון נוסחא רקורסיבית

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \quad \underline{\underline{נחמא!}}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \leftarrow$$

נניח כי הפתרון הוא מהצורה $a_n = X^n$
אם נקבל:

$$X^n = X^{n-1} + X^{n-2} \quad / : X^{n-2}$$

$$\boxed{X^2 = X + 1} \quad \Leftarrow \begin{matrix} \text{משוואה} \\ \text{אופיינית} \end{matrix}$$

נמצא את המשוואה הנכונה:

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

אנחנו צריכים למצוא את הפתרון, ונראה:

$$a_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

זהו הפתרון של יחס הרסיקה, נאשר A ו- B נקבעים לפי תנאי ההתחלה. אנחנו

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

פתרון מערכת של משוואות בשני נעלמים (A, B) נואם:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ואם נציב ונקבל

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

פתרון: נניח $a_n = x^n$:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 6$$

$$a_n = 8 \cdot a_{n-1} - 15 a_{n-2}$$

$$a_n = x^n$$

פתרון:

$$x^n = 8x^{n-1} - 15x^{n-2} \quad / : x^{n-2}$$

$$x^2 = 8x - 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 5$$

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 5^n$$

$$1 = A + B$$

$$6 = A \cdot 3 + B \cdot 5$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 1 = A + B \\ \text{II} \quad 6 = A \cdot 3 + B \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \Rightarrow \quad A &= 1 - B \\ 6 &= 3(1 - B) + 5B \\ 6 &= 3 - 3B + 5B \\ 3 &= 2B \\ \frac{3}{2} &= B \\ A &= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{3}{2} \cdot 5^n$$

3/7/13 : תאריך

$$x^n = 2x^{n-1} - x^{n-2}$$

$$x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$$

* טאגער געקוקט $x_1 = x_2 = x$

$$a_n = A \cdot x^n + B \cdot n \cdot x^n$$

וואס באקוועטן דיזע נקודות:

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n$$

$$a_n = A + Bn$$

אומגאנגענע היינטצאלע נקודות:

$$1 = A + 0$$

$$3 = A + B \cdot 1$$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2 \end{aligned}$$

$$a_n = 1 + 2n$$

7/8 ו/א | נחמה :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-2} \end{cases}$$

הסדרה שמתקבלת:

0, 3, 0, 3, 0, 3, ...

$$a_n = x^n$$

$$x^n = x^{n-2}$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n$$

$$a_n = A + (-1)^n B$$

$$0 = A + B$$

$$3 = A - B$$

$$\Rightarrow 3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -3 = 2B \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

תרגיל: נסמן a_n את מספר הלהקות באורך n
 שאיננין זקוקות מבקבוצה $\{a, b, 1, 2\}$

והמקיימת את כל התנאים הבאים:

לא מופיע הנצל a_1

לא מופיע הנצל b_2

נא מופיע נצל על גבי ספרות.

אלו מהזוגות הבאים חוקיים:

1aaa 121 116 11ab 1aaa baaa

(א) מצא יחס רשימה עבור a_n , ותנאי התחלה מספיקים.

(ב) פתרו את יחס הרשימה יקבלו ביטוי מפורט עבור a_n .

תרגיל: נסמן a_n את מספר הלהקות באורך n

שאיבריהן זקוקים מבקבוצה $\{2, 3, 4, 5, 6, a\}$

והמקיימת את כל התנאים הבאים:

a_1 לא מופיע הונף

a_2 לא מופיע הונף

לא מופיע ינף על שני ספרות.

פתרון: $a_0 = 1$

$a_1 = 5$

$a_2 = 19$

\geq

באורך 0 יש רק
להקות באורך 1
מחוצות ויפה, ϕ .
היו תגיו חוקי.

$\overline{a_1} \quad 4$

$\overline{a_2} \quad 4$

$\overline{a_3} \quad 5$

$\overline{a_4} \quad 3$

$\overline{a_5} \quad 3$

תרגיל: נסמן ב a_n את מספר הלהטות באורך n
 שאיננה זקוקים להקדמה
 והמקסימום של a הימנים הבאים:
 a_1 לא מופיע הוצף
 a_2 לא מופיע הוצף
 לא מופיע יצף של שתי ספרות.

המשקל - נחשב את המקרה השלישי. מחירות באורך n .

$$\begin{array}{c|c} a_{n-1} & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} a_{n-2} & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} a_{n-2} & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

סה"כ קיבלנו: $3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-2}$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 5$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

(א)

נבדוק כי a_2 מתקבל על ידי יישום נוסחה הנ"ל.

$$a_2 = 3a_1 + 4a_0 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 19$$

$$X^n = 3X^{n-1} + 4X^{n-2}$$

$$X^2 = 3X + 4$$

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

$$(X-4)(X+1) = 0$$

$$X_1 = 4$$

$$X_2 = -1$$

(ב)

$$a_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n$$

$$a_0 = 1$$

$$A + B = 1$$

$$a_1 = 5$$

$$A \cdot 4 - B = 5$$

$$I + II \quad 5A = 6 \quad A = \frac{6}{5}$$

$$I \quad B = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$a_n = \frac{6}{5} \cdot 4^n - \frac{1}{5} \cdot (-1)^n$$

$$a_2 = \frac{6}{5} \cdot 4^2 - \frac{1}{5} \cdot (-1)^2 = \frac{6}{5} \cdot 16 - \frac{1}{5} = 19$$

לפתור את גולה 2

בהמשך 15

ואת גולות

13-1 גולה 04

ליקרום לשידור הבא את פיר 7

בהצחה-

ואהיראות !