מתמטיקה בדידה
מפגש 8

צירופים - עם חזרות
הבינום של ניוטון

השיעור יתחיל בשעה 18:30

תזכורת - ראינו בשיעור הקודם:

טבלת סיכום

		בלי חזרות	עם חזרות
יש חשיבות לסדר	תמורות	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$
	חליפות	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר -	צירופים	$\frac{n!}{(n-k)!k!}$	

עכשיו נלמד צירופים **עם** **חזרות**

צירופים עם חזרות

<u>דוגמא:</u> נניח שיש לנו 4 סוגים של סופגניות (ריבה, ריבת חלב, שוקולד, וניל).

בכמה דרכים אפשר לבחור 6 סופגניות, כאשר ~~אין~~ אין חשיבות לסדר הבחירה, ואפשר כמובן לבחור את אותו סוג כמה פעמים. (אנו מניחים שאין הגבלה על מספר הסופגניות הקיימות מכל סוג. כנ"ל יש לפחות 6 מכל סוג)

כאן בעצם עלינו לחשב כמה צירופים של 6 סופגניות יש, מתוך 4 סוגים שונים.

אז בעצם בסופו של דבר - כל צירוף כזה
מאופיין ע"י מספר הסופגניות שיש מכל סוג.

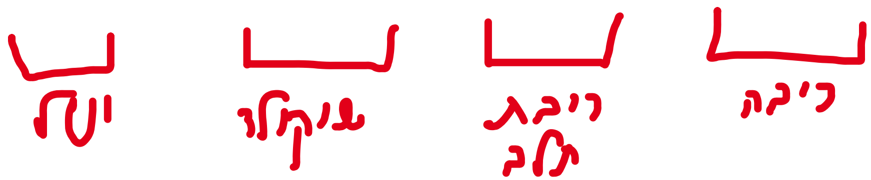
לדוגמא:

צירוף מסוים: 2 ריבה, 2 ריבת חלב, 1 שוקולד, 1 וניל

צירוף אחר: 3 ריבת חלב, 3 וניל.

צירוף אחר: 5 שוקולד, 1 וניל.

אז אם נרצה, אפשר למדל את הצירופים ע"י תאים מתויגים
כך:



שבתוכם נכניס כדורים לפי מספר הסופגניות מאותו סוג.

אז בעצם בסופו של דבר - כל צירוף כזה
מאופיין ע"י מספר הסופגניות שיש מכל סוג.

לדוגמא:

צירוף מסוים: 2 ריבה, 2 ריבת חלב, 1 שוקולד, 1 וניל

צירוף אחר: 3 ריבת חלב, 3 וניל.

צירוף אחר: 5 שוקולד, 1 וניל.

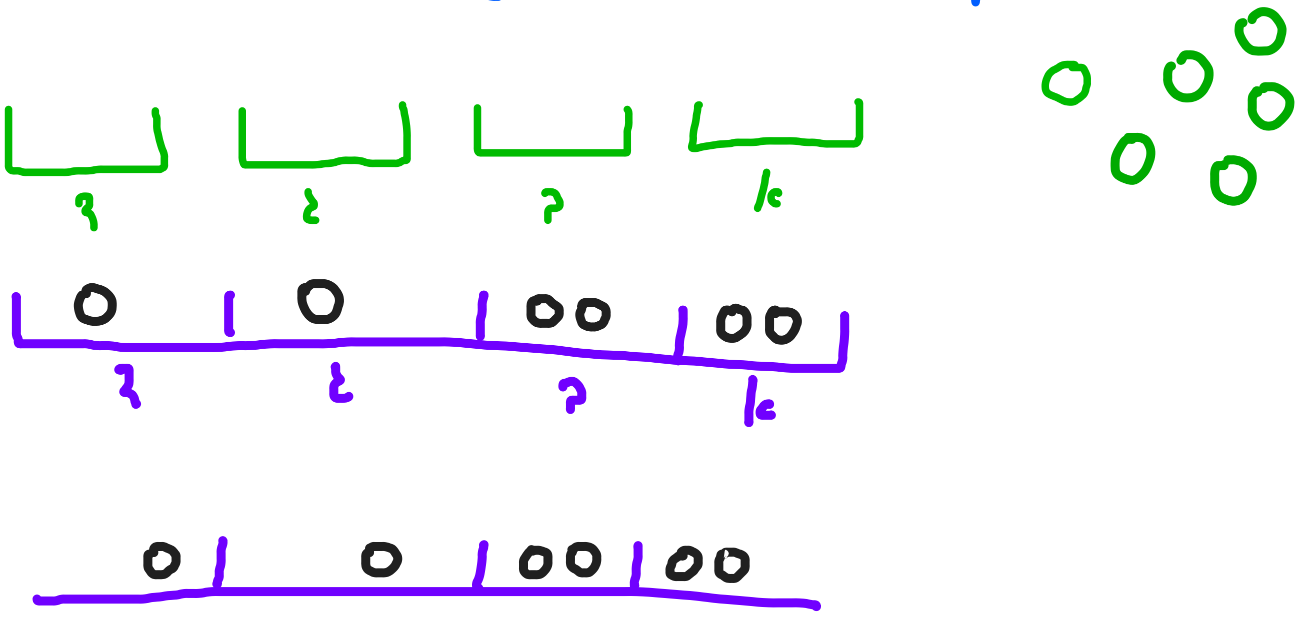
אז אם נרצה, אפשר למדל את הצירופים ע"י תאים מתויגים כך:

ריבה ריבת חלב שוקולד וניל

שבתוכם נכניס כדורים לפי מספר הסופגניות מאותו סוג.

אז עכשיו נשאל כך:

בכמה דרכים ניתן לפזר 6 כדורים זהים בתוך 4 תאים שונים?



○|○|○○|○○

אז השאלה הפעם היא:

בכמה דרכים אפשר לסדר 6 אפסים ו 3 אחדים?

ברגע שקבענו באילו מ 9 המקומות יש אחדים - באחרים יהיו אפסים. ולכן בעצם אפשר לשאול:

בכמה דרכים אפשר לבחור 3 מקומות מתוך 9.

והתשובה לשאלה הצגות היו כמובן $C(9,3)$

$$= \frac{9!}{3!\,6!}$$

הערה: (סימון)

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ואנחנו מסמנים אותו גם ע"י $\binom{n}{k}$

ז"א

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

קיבלנו נוסחא למקרה כללי:

מספר הדרכים לפזר k עצמים זהים בתוך n תאים שונים. $= D(n,k) = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$

$$= C(n-1+k,k) = C(n-1+k,n-1)$$

$=$ מספר הצירופים <u>עם</u> חזרות של k איברים מתוך n סוגים שונים.

תרגיל: בכמה אפשרויות יכולה אמא לחלק 10 מטבעות שוקולד (זהים) בין שלושה ילדים?

א) ללא הגבלה נוספת.

ב) כך שכל ילד מקבל לפחות מטבע 1.

ג) כך שאין מצב שילד אחד מקבל את כל המטבעות.

פתרון

א) ילד I ילד II ילד III

בכמה דרכים אפשר לחלק 10 מטבעות בין 3 תאים!..

$$D(3,10)=\binom{3-1+10}{2}=\frac{12!}{2!\,10!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=66$$

ב) ניתן לכל ילד מטבע ואז נשארים 7 מטבעות לחלק בין 3 ילדים.

$$D(3,7)=\binom{9}{7}=\frac{9!}{2!\,7!}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36$$

ג) יש בדיוק 3 אפשרויות שילד אחד מקבל את כל המטבעות לכן $66-3$ אפשרויות מהן לא נותנים את כל המטבעות לאותו ילד. ולכן יש 63 אפשרויות כאלה.

תרגיל:

מה מספר התוצאות השונות בסיבוב 3 סביבונים זהים?

הערה: יש 4 אפשרויות לתוצאה בסביבון:

נ, ג, ה, פ.

תשובה: השאלה היא: כמה פעמים יצא נ ?

וכמה " " ג ?

" " " ה ?

" " " פ ?

זו בדיוק שאלה של צירופים עם חזרות, כי זה כמו לפזר 3 סביבונים בין 4 תוצאות שונות.

ולכן התשובה היא

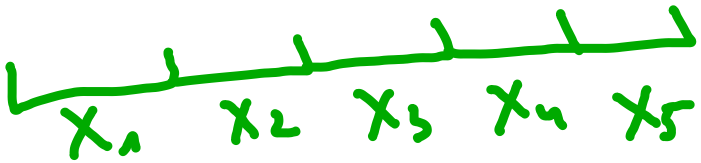
$$D(4,3)=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$

תרגיל:

א) מה מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16 \quad ?$$

תשובה: זוהי שאלה בכדורים עם חזרות- כי בעצם זה כמו לפזר 16 כדורים בתוך 5 תאים.



ולכן יש

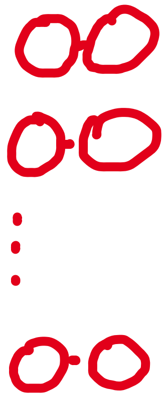
$$D(5,16)=\frac{20!}{16!\,4!}=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=5\cdot19\cdot3\cdot17$$

תרגיל:

ב) מה מספר הפתרונות הטבעיים הזוגיים למשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16 \quad ?$$

תשובה:



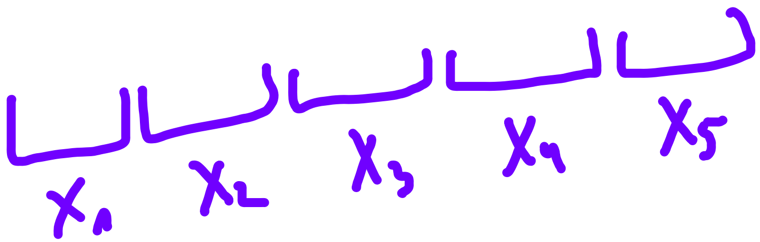
זה כמו לפזר 8 זוגות של כדורים

בין 5 תאים שונים.

זה יש

$D(5,8)$ אפשרויות.

$$D(5,8) = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 11\cdot 5\cdot 9$$



תרגיל:

ג) מה מספר הפתרונות הטבעיים האי-זוגיים למשוואה

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=16 \quad ?$$

תשובה - 0

אין אפשרות שסכום 5 מספרים אי-זוגיים

שייתן מספר זוגי כמו 16.

3) מה מספר הפיתרונות **הטבעיים** של אי-השיוויון :

$$X_1+X_2+X_3+X_4 \leq 16$$

$X_1+X_2+X_3+X_4=0$ או

$X_1+X_2+X_3+X_4=1$ או

$X_1+X_2+X_3+X_4=2$

$\vdots$

$X_1+X_2+X_3+X_4=16$ או

$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=16$$

$$D(5,16)=\frac{20!}{16!\cdot 4!}$$

טבלת סיכום

		בלי חזרות	עם חזרות
יש חשיבות לסדר	תמורות	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$
	חליפות	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר -	צירופים	$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	$\binom{n-1+k}{k}$

תזכורת: ראינו בשיעור שעבר

נוסחאות

מספר התמורות של n איברים שונים.
יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

$$P(n) = n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

מספר החליפות של k איברים שונים מתוך n איברים שונים.
יש חשיבות לסדר.
אין חזרות.

$$P(n,k) = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר צירופים של k איברים שונים מתוך n איברים שונים
אין חשיבות לסדר
אין חזרות

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

נתמקד עכשיו בביטויים מהצורה $\binom{n}{k}$.

כזכור $\binom{n}{k}$ = מספר הדרכים לבחור k איברים שונים מתוך n איברים שונים. (שימו לב אין חשיבות לסדר הבחירה).

$\binom{n}{k} = C(n,k)$

נתמקד עכשיו בקיטואים מהצורה $\binom{n}{k}$.

כזכור $\binom{n}{k}$ = מספר הדרכים לבחור k איברים שונים מתוך n איברים שונים. (סופו אין חשיבות לסדר הבחירה).

= מספר התת-קבוצות בגודל k מתוך קבוצה בגודל n.

ומכאן נקבל זהות יפה:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

- הסבר קומבינטורי מספר תתקבוצות בגודל k שווה למספר תת-קבוצות בגודל n-k.

- הוכחה אלגברית

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\qquad \binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

עוד זהויות (שנוכיח גם אלגברית וגם קומבינטורית)

$$\binom{n}{0}=1$$ *

הסבר קומבינטורי: יש קבוצה 1 בגודל 0 (שהוא $\emptyset$)

הוכחה אלגברית - <u>הערה:</u> $0!=1$

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{n!\,0!}=\frac{n!}{n!}=1$$

$$\binom{n}{n}=1$$ *

הסבר קומבינטורי: כמה תת קבוצות בגודל n יש? בדיוק אחת - היא הקבוצה.

אלגברית: לפי הזהות מקודם נקבל

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{n-n}=\binom{n}{0}=1$$

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$ *

הסבר קומבינטורי:

נסמן $A=\{0,\dots,n\}$ $\quad |A|=n+1$

ונשים $\binom{n+1}{k+1}$ זה בדיוק מספר תת-קבוצות של A בגודל $k+1$

$A=\{0,1,\dots,n\}$. $\binom{n+1}{k+1}$

נחלק את G התת-קבוצות בגודל $k+1$ לשני סוגים:

(1) אלה שמכילים את המספר 0.

(2) .. שלא מכילים את 0.

נספור כמה תת-קבוצות יש מכל סוג.

נתחיל מ-(2):

קבוצה G שלא מכילה את 0 הוא בעצם תת קבוצה בגודל $k+1$ מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots n\}$

ולכן יש בדיוק $\binom{n}{k+1}$ קבוצות כאלה.

נמשיך עם (1):

כל קבוצה שמכילה את 0 - אם נוריד ממנה את המספר 0 תשאר תת-קבוצה בגודל k, שהיא תת-קבוצה של הקב' $\{1,2,\dots n\}$.

ולכן יש $\binom{n}{k}$ כאלה.

ולכן בסה"כ

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

∎

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$n-(k+1) = n-k-1$$

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

$$(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

$$n+1-(k+1) = n-k$$

מ.ש.ל.

ע״י שימוש בזהויות האלה:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

נבנה את משולש פסקל:

$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$, $k=6$

נוסחת הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot \quad \dots \quad \cdot (a+b)}_{n \text{ גורמים}}$$

$$= \dots \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} \dots$$

דוגמאות:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

וכן הלאה...

הערה: $0! = 1$

הערה 2: $C(n,k) = \binom{n}{k} =$

מספר הדרכים לבחור k איברים שונים מתוך n איברים שונים.

ולכן יש לזה משמעות כאשר $k \le n$.

בהמשך, נגדיר $\binom{n}{k}$ ל-k טבעי כך: אם $k > n$ אז $\binom{n}{k} = 0$.

תרגיל: הוכיחו (בשתי דרכים)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

הוכחה אלגברית: נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון עבור $a=1, b=1$ ונקבל:

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

מ.ש.ל.

הוכחה קומבינטורית:

$\binom{n}{k}\equiv$ מספר תתי-קבוצות בגודל k מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$

אז:

$\binom{n}{0}=$ מס' תתי קבוצות בגודל 0

$\binom{n}{1}=$ " " " 1

$\binom{n}{2}=$ " " " 2

וכן הלאה ... עד $\binom{n}{n}$ = מספר תת-קבוצות בגודל n.

ולכן $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ = סה"כ מספר התת-קבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$.

והרי למדנו שיש 2^n תת-קבוצות של $\{1,2,\ldots,n\}$

לכן

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

מ.ש.ל.

תרגילים: הוכיחו את הזהויות הבאות בשתי דרכים:

1)

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה אלגברית:

$$\boxed{k! = k\cdot(k-1)!}$$

$$\boxed{n! = n\cdot(n-1)!}$$

$$n-k = (n-1)-(k-1)$$

$$k\cdot\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

מ.ש.ל.

תרגילים: הוכיחו את הזהויות הבאות בשתי דרכים:

1)
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה קומבינטורית:

נניח צריך לבחור נבחרת של k שחקנים מתוך n מועמדים
יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור.
ועכשיו מרשימ הנבחרת - אחד יהיה הקפטן של הנבחרת.
אז יש k אפשרויות לבחור את הקפטן.
ולכן בסה"כ יש $\binom{n}{k}\cdot k$ אפשרויות כאלה.

לחילופין - אפשר קודם לבחור קפטן - יש n אפשרויות לבחור אותו.
אח"כ צריך לבחור עוד $k-1$ שחקנים לנבחרת, מתוך $n-1$ מועמדים שנשארו. אז יש $\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות
ובסה"כ $n\cdot\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות.

2)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

הוכחה אלגברית:

לפי הבינום של ניוטון עבור

$a=1$

$b=-1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$\parallel$$

$$0$$

מ.ש.ל.

קומבינטורית:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k \text{ זוגי}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ אי-זוגי}} \binom{n}{k}$$

זוגי

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$ = מספר התת-קבוצות בגודל זוגי פחות מספר התת קבוצות בגודל אי-זוגי.

<u>טענה:</u> מספר התת-קבוצות בגודל זוגי שווה בדיוק למספר התת-קבוצות בגודל אי-זוגי.
ולכן ההפרש ביניהם שווה 0.

<u>הוכחת הטענה:</u> $A=\{1,2,...n\}$

נסמן ב P_E את קבוצת התת קבוצות בגודל זוגי מתוך A

" P_O " " " " " אי-זוגי.

$P_E \subseteq P(A)$ $\quad$ $P_O \subseteq P(A)$

נגדיר התאמה חח״ע $f: P_E \longrightarrow P_O$

ועל בין P_E ו־ P_O כך:

$$f(B) = \begin{cases} B \setminus \{1\} & : 1 \in B \\ B \cup \{1\} & : 1 \notin B \end{cases}$$

f חח״ע (הוכחנו בע״פ)

f היא על.

בעצמה.

f היא ההפוכה של עצמה

אפשר לפתור את שאלה 1 בממ"ן 14

ואת שאלות 1-5 בממ"ח 04

לקרוא למפגש הבא את פרק 4, 5

חנוכה שמח!