מתמטיקה בדידה

מפגש 9

עקרון ההכלה וההפרדה

דוגמא: נניח A ו B קבוצות זרות

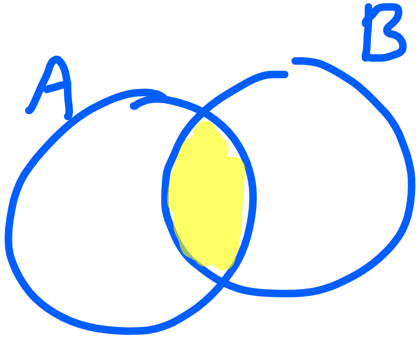
אז מתקיים

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

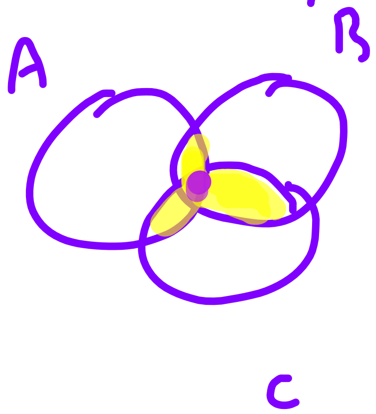
(הערה: בקומבינטוריקה הקבוצות הן סופיות)

ואם A ו B לא זרות

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



ומה נקבל עבור שלוש קבוצות ?



$$|A \cup B \cup C| =$$

$$|A| + |B| + |C|$$

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \quad = -\left(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\right)$$

$$+ |A \cap B \cap C|$$

הערה : הנוסחא הנ"ל נכונה לכל שלוש קבוצות.

עקרון ההכלה וההפרדה:

תהי U הקבוצה האוניברסלית

ו: $A_1, A_2, \dots A_n \subseteq U$.

נסמן:

מס' מחוברים

$\binom{n}{0} = 1$ $\qquad S_0 = |U|$

$\binom{n}{1} = n$ $\qquad S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

$\binom{n}{2}$ $\qquad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$

$\binom{n}{3}$ $\qquad S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$\vdots$

$\boxed{\binom{n}{k}}$ $\qquad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

$\vdots$

$\binom{n}{n} = 1$ $\qquad S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

עקרון ההכלה וההפרדה:

תהי U הקבוצה האוניברסלית

! $U \supseteq A_1, A_2, \dots A_n$.

נסמן:

מספר המחוברים

$\binom{n}{0}$ $\quad S_0 = |U|$

$\binom{n}{1}$ $\quad S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

$\binom{n}{2}$ $\quad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$

$\binom{n}{3}$ $\quad S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$\vdots$

$\binom{n}{k}$ $\quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

$\vdots$

$\binom{n}{n}$ $\quad S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

ואז מתקיים:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 -+ \dots + (-1)^{k-1} \cdot S_k + \dots + (-1)^{n-1} S_n$$

גרסת המשלים:

$$|\underbrace{U - A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}_{\substack{\shortparallel \\ (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c}}| = S_0 - S_1 + S_2 -+ \dots (-1)^n S_n$$

<u>תרגיל:</u> כמה מחרוזות של כל האותיות (א-ת) יש
שלא מכילות את המילים:
״נס גנזך היה פה״ ?

כל אות מופיעה
בדיוק פעם
אחת.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי המילה ״היה״ לא יכולה להופיע כי יש בה ״ה״ פעמיים, ומדובר בתמורות ללא חזרות.

נגדיר $U =$ כל המחרוזות של 22 האותיות. =

כל
התמורות
של 22
האותיות.

$A_1 =$ כל המחרוזות בהן <u>מופיעה</u> המילה ״נס״

$A_2 =$ ״ ״ ״ ״ ״ ״גנזך״

$A_3 =$ ״ ״ ״ ״ ״ ״פה״

עכשיו צריך לחשב את $|U - A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

נמשיך!

$S_0 = |U| = 22!$

$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

[redacted]

$A_1 =$ "נס" תו אחד + 20 אותיות נוספות.

לכן לA_1 יש $21!$ מחרוזות.

$A_2 =$ "גדון" תו אחד + 18 אותיות.

$A_3 =$ "פה" תו אחד + 20 אותיות

$|A_2| = 19!$

$|A_3| = 21!$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = 21! + 19! + 21!}$$

$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$

$A_1 \cap A_2 =$ "נס", "גדון" ועוד 16 אותיות.

$|A_1 \cap A_2| = 18!$

תזכורת:

אם $f: A \to B$ פונקציה.

אז f הינו על B אם לכל איבר ב B [illegible]

[illegible], עבור הפונ' f [illegible] איבר ב A.

$A_1 \cap A_3$ "נס" , "פה" + 18 אותיות

$|A_1 \cap A_3| = 20!$

$A_2 \cap A_3$ "לגון" "פה" + 16 אותיות

$|A_2 \cap A_3| = 18!$

$S_2 = 18! + 20! + 18!$

$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ "נס" "לגון" "פה" + 14 אותיות.

$S_3 = 17!$

$$|U - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \overset{S_0}{22!} - (\overset{S_1}{21! + 19! + 21!}) + \overset{S_2}{18! + 20! + 18!}$$

$$\underset{S_3}{-17!}$$

תרגול:

נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,2,3,4\}$

כמה פונקציות יש מ A <u>על</u> B ?

פתרון:

$U =$ כל הפו' מ A ל B.

נגדיר $A_1 =$ כל הפו' מ A ל B כך ש 1 אינו בתמונה.

$A_2 =$ ״ ״ ״ ״ ״ ״ 2 ״ ״

$A_3 =$ ״ ״ ״ ״ ״ ״ 3 ״ ״

$A_4 =$ ״ ״ ״ ״ ״ ״ 4 ״ ״

אנחנו רוצים את $U - A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \equiv$ כל הפו' מ A על B.

A	B
1 →	1
2 →	2
3 →	3
4 →	4
5 →	

$$U = \{f : A \longrightarrow B\} = B^A$$

$$S_0 = |U| = |B|^{|A|} = 4^5$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$

$$A_1 = \{f : A \to B - \{1\}\} \Rightarrow |A_1| = 3^5$$

$$A_2 = \{f : A \to B - \{2\}\} \Rightarrow |A_2| = 3^5$$

$$|A_3| = 3^5$$

$$|A_4| = 3^5$$

$$S_1 = 4 \cdot 3^5 \longleftarrow$$

$$\left. \begin{aligned} S_2 = {} & |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \end{aligned} \right\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \left\{ f : A \to B \;/\; \begin{array}{r} \text{1 לא בתמונה} \\ \underline{\text{וגם}} \text{ 2 לא בתמונה} \end{array} \right\}$$

$$= \{ f : A \to B \setminus \{1,2\} \}$$

$$= \{ f : A \to \{3,4\} \}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 2^5$$

$$\underset{i \neq j}{|A_i \cap A_j|} = |\{ f : A \to B - \{i,j\} \}|$$

$$= 2^5$$

$$S_2 = 6 \cdot 2^5$$

$$S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4|$$
$$+ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$A_i \cap A_j \cap A_k = \{f : A \to B - \{i, j, k\}\}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^5 \quad (= 1)$$

$$S_3 = 4 \cdot 1^5$$

$$S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{f : A \to \underbrace{B - \{1,2,3,4\}}_{\emptyset}\}$$

$$S_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0 \quad (= 0^5)$$

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 4^5 - 4 \cdot 3^5 + 6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 1^5 + 0^5$$
$$= 4^5 - 4 \cdot 3^5 + 6 \cdot 2^5 - 4$$

תרגיל: כמה מספרים ראשוניים

יש בין 1 ו 100 ?

<u>תזכורת:</u>

מספר ראשוני - מתחלק רק בעצמו וב-1.

1 מוגדר להיות לא ראשוני.

לכן מספר לא ראשוני - מתחלק במספר ראשוני שקטן ממש ממנו.

תרגיל: מצאו כמה מספרים ראשוניים יש
בין 1 ל 100.

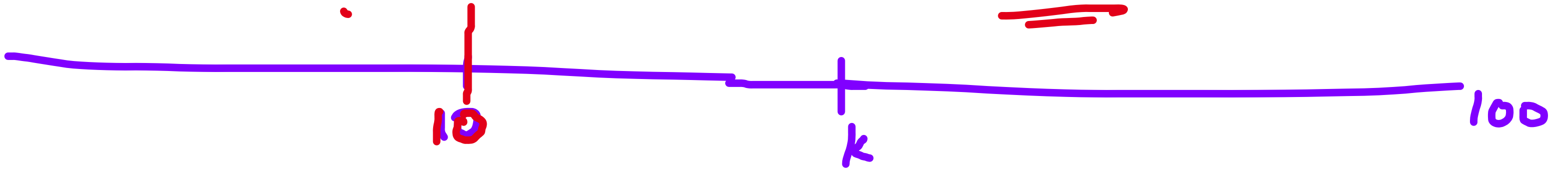
עזור עם המשלים ז"א נספור כמה מספרים הם לא ראשוניים

פתרון: אנו נחסיר אותם ונישאר עם מס' הראשוניים

נסמן U = כל המספרים בין 1 ל 100.

A = כל הכפולות של 2
B = " " " 3
C = " " " 5
D = " " " 7

כל מספר שאינו ראשוני הוא נמצא ? $A \cup B \cup C \cup D$



טענה: כל מספר (בין 1 ל 100). אם הוא מתחלק במספר שגדול
מ 10. אז יש לו מחלק שקטן מ 10.

לכן המספרים הראשוניים הם

$U - A\cup B\cup C\cup D - \{1\}\cup\{2,3,5,7\}$ נחשב:

$S_0 = |U| = 100$

$S_1 = |A| + |B| + |C| + |D|$

$= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 50 + 33 + 20 + 14$

$S_2 = \underset{\text{6מחלקים ב}}{|A\cap B|} + \underset{\text{10מ. ב}}{|A\cap C|} + \underset{\text{14 מ.}}{|A\cap D|} + \underset{\text{15 מ.}}{|B\cap C|} + \underset{\text{21 מ}}{|B\cap D|} + \underset{\text{35מחלקים ב}}{|C\cap D|}$

$= \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor$

$= 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2$

$S_3 = |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D|$

$= \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor + 0 = 3 + 2 + 1$

$S_4 = |A\cap B\cap C\cap D| = 0$

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 =$$

$$100 - (50 + 33 + 20 + 14) + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2)$$

$$-(3 + 2 + 1) + 0 =$$

$$100 - 117 + 45 - 6 = 22$$

עכשיו צריך להחסיר את המספר 1.
ולהוסיף את המספרים 2,3,5,7 שהם ראשוניים.

$$22 - 1 + 4 = \underline{\underline{25}}$$

דוגמא:

54 הינו כפולה של $10 < 18$

$$\frac{54}{18} = 3 < 10$$

עקרון שובך היונים

- אם יש יותר יונים משובכים אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו יותר מיונה אחת.

ובהרחבה:

- אם יש n שובכים ו m יונים $n \nmid m$ אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו לפחות $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ יונים.

$$\left\lceil \frac{100}{3} \right\rceil = 34 \qquad \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \qquad \lfloor \ \rfloor$$

תרגיל:

נתונים 7 מספרים טבעיים.

הוכיחו שקיים זוג מתוכם שההפרש ביניהם מתחלק ב 6 ללא שארית.

דוגמאות:

2, 7, 10, 22, 35, 41, 50

10, 22: ההפרש הוא 12

35, 41: ההפרש ביניהם הוא 6.

2, 50: ההפרש 48

הערה: נשים לב שעבור כל מספר
כשמחלקים אותו ב 6 יש כמה אפשרויות:

- הוא מתחלק ב 6 (ללא שארית)
- יש שארית של 1
- " " " 2
- " " " 3
- " " " 4
- " " " 5

אז יש 6 אפשרויות.

הערה: אם לשני מספרים יש אותה שארית בחלוקה ב 6. אז ההפרש ביניהם מתחלק ב 6.

פתרון:

כל מספר טבעי או שהוא מתחלק ב 6

או שהשארית שלו בחלוקה ב6 הוא 1 או 2 או 3 או 4 או 5

השארית בחלוקה ב6 הוא אחד מהמספרים {0,1,...,5}

נגדיר: השובכים הם השארית בחלוקה ב 6.

ז"א יש 6 שובכים.

היונים - המספרים הנתונים. (יש 7 יונים).

ולכן לפי עקרון השובך, יש (לפחות) שני מספרים שיש להם את אותה שארית בחלוקה ב6.

ההפרש בין שני המספרים האלה - מתחלק ב6.

מ.ש.ל.

תרגיל

A היא קבוצה בת n מספרים טבעיים.
הוכיחו שקיימת תת-קבוצה, לא ריקה, של A שסכום איבריה מתחלק ב n.

הערה: כאשר מחלקים מספר k -n יש n אפשרויות:
- מתחלק ב n (שארית היא 0)
- יש שארית בחלוקה k ב n: השארית יכולה להיות אחת מהמספרים הבאים:

$$\{1,2,3,\dots,n-1\}$$

פתרון: נסמן את איברי הקבוצה A כך:

4

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \dots, a_n\}$$

נגדיר תת-קבוצות של A כך:

$$\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \{a_1, a_2, a_3\} \subset \dots \subset \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

קיבלנו n תת-קבוצות.

אם באחת מהן סכום האיברים מתחלק ב-n, סיימנו.
אחרת יש כאן n תת-קבוצות שסכום האיברים שבהן לא מתחלק ב-n. כיוון שיש שארית (≠0) בחלוקה ב-n,

מסקנת ביניים - יש $\underbrace{n \text{ תת-קבוצות}}_{\text{יונים}}$, ו $\underbrace{n-1 \text{ שאריות אפשריות}}_{\text{שובכים}}$

⊛ לכן, לפי עקרון השובך - יש לפחות שובך אחד שיש בו 2 יונים. נסמן אותם ב B_1 ו B_2.

$B_1 \subseteq A$

$B_2 \subseteq A$

B_1, B_2 מתוך הדוגמה הנ"ל הן תת-קבוצות של A
B_1 ו B_2 שעונים לנ"ל ואחד מהם מוכל בשני:

בה״כ $B_1 \subset B_2$.

נסתכל על תת-קבוצה $B_2 \setminus B_1$.

זו תת-קבוצה של A.

סכום האיברים בה - מספר שמתחלק ב n.

מ.ש.ל.

$$B_1 = \{a_1, a_2 \dots a_m\}$$

$$B_2 = \{a_1, a_2 \dots\dots\dots a_k\} \qquad k > m$$

נותן שארית מסוימת בחלוקה ב n?

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m \qquad\qquad a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots + a_k$$

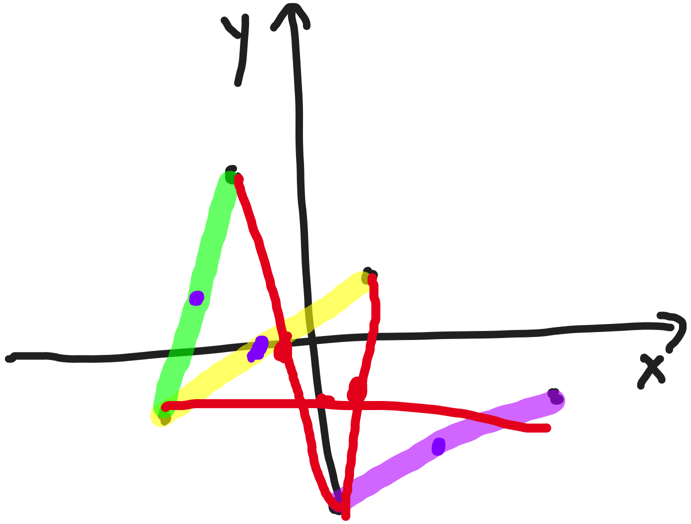
נותן את אותה שארית.

$$B_2 \setminus B_1 = \{a_{m+1}, \dots, a_k\}$$

$a_{m+1} + \dots + a_k$ מתחלק ב n.

תרגיל: נתונות 5 נקודות במישור שש״כות ל $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

$$\{(x,y) / \ x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}\}$$



הוכיחו שקיים זוג
מביניהם שאמצע
הקטע שמחבר אותם
גם הוא נקודה ב- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

הערה: נוסחת אמצע קטע: אמצע הקטע שמחבר
בין נק׳
(x_1,y_1) ו (x_2,y_2)
היא הנקודה

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

פתרון: נגדיר שובכים:

$N_1 = \{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} /$ x זוגי y זוגי $\}$

$N_2 = \{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} /$ x זוגי y אי זוגי $\}$

$N_3 = \{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} /$ x אי זוגי y אי זוגי $\}$

$N_4 = \{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} /$ x אי זוגי y זוגי $\}$

היונים- 5 הנקודות הנתונות.

לפי עקרון השובך- יש שובך אחד שיש בו (לפחות) שני יונים.

2 נקודות (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) כך ש: x_1 ו x_2 אשר זוגיות, ו y_1 ו y_2 אותה זוגיות.

ולכן x_1+x_2 זוגי. ו y_2+y_1 זוגי.

ולכן $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ מ.ש.ל. מ.ש.ל.

תרגיל:

נתונה קבוצה A המקיימת:

$$A \subseteq \{1, 2, ... 30\}$$

$$|A| = 16$$

צריך להוכיח שקיימים שני איברים של A שההפרש ביניהם הוא בדיוק 5.

פתרון: נגדיר שובכים:

$$N_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, 26\}$$
$$N_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, 27\}$$
$$N_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, 28\}$$
$$N_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$
$$N_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

$$\left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = \left\lceil 3\frac{1}{6} \right\rceil = 4$$

היונים = איברי A.

16 יונים ! 5 שובכים. לכן לפי עקרון השובך יש שובך שיש בו לפחות 4 איברים.

אז יש ערך שיש בו לפחות 4 איברים.

$N=\{\underline{*}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{*}\ \underline{\ \ }\ \underline{*}\}$

לכן יש שני איברים במקומות צמודים
בתוך N.

אז מכרח ההפרש בין השניים הצמודים
הוא בדיוק 5.

בכל שובך יש מקום לשלשה מספרים.
ולכן אם יש 4 מספרים, בהכרח יש שניים
שהם צמודים.

(דוגמא:

ה* הירוק'
בהכרח צמוד
לאחד שכבר שם.)

את זה אפשר להוכיח ע"י עקרון השובך שלך:
נגדיר את הזוגות
בתור שובכים.

יש שלושה שובכים, ! 4 יונים (המספרים) ולכן יש שובך שיש בו
שני מספרים. ⟸ שני המספרים האלה צמודים-

ההפרש בין שני המספרים האלה הוא בדיוק 5.

מ.ש.ל.

תרגיל נחמד 3

במערכת של מחשב הסיסמה חייבת להכיל לפחות 3 תווים ולכל היותר 100 תווים. התווים המותרים הם:

a-z
A-Z
0-9

סיסמה חייבת להכיל לפחות אות אחת קטנה, אות אחת גדולה, ולפחות ספרה אחת.

ביום מסוים היה באג בבדיקת הסיסמאות. לא הבחינו בסדר התווים, ולא בחזרות.

דוגמה: הסיסמאות

$$\begin{array}{c} aaba1E \\ \parallel \\ EE1ba \end{array} \neq AEb1$$

נחשבו אותה סיסמה

כמה [redacted] סיסמאות שונות היו אפשריות <u>בפועל</u> באותו יום.

נגדיר U להיות כל התת-קבוצות של הקודים:

$\{A, B, \dots Z, a, b, \dots z, 0, 1, 2, \dots 9\}$

$A_1 =$ כל התת-קבוצות שאין בהן אות גדולה.

$A_2 =$ " " " " " קטנה.

$A_3 =$ " " " " " ספרה.

$U - A_1 \cup A_2 \cup A_3 =$ כל התת-קבוצות החוקיות

$=$ כל הסיסמאות שלא ניתנות
לקיים בכלל.

$\binom{3}{0}$ $S_0 = |U| = 2^{62}$

$\binom{3}{1}$ $S_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3| =$

$2^{62-26} + 2^{62-26} + 2^{62-10} =$

$2^{36} + 2^{36} + 2^{52}$

$\binom{3}{2}$ $S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$

$2^{10} + 2^{26} + 2^{26}$

$\binom{3}{3}$ $S_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

$$|U - A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_0 - S_1 + S_2 - S_3$$

$$= 2^{62} - 2^{36} - 2^{36} - 2^{52} + 2^{10} + 2^{26} + 2^{26} - 1$$

$$= 2^{62} - 2 \cdot 5^{36} - 2^{52} + 2^{10} + 2^{26} \cdot 2 - 1$$

$$= 2^{62} - 2^{52} - 2^{37} + 2^{27} + 2^{10} - 1$$

תרגיל:

מתוך 1000 מספרים שבתחום $1 \le n \le 1000$ מישהו בחר 501 מספרים שונים.

הוכיחו שבקבוצה של 501 המספרים, בהכרח יש שני איברים x, y כך ש y מתחלק ב x ללא שארית.

הערה:

$$n = 2^k \cdot b$$

(כל מספר n ניתן להציג כך)

k טבעי

b אי - זוגי

דוגמאות:

$$15 = 2^0 \cdot 15$$

$$32 = 2^5 \cdot 1$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

יהיו השובכים המספרים האי-זוגיים בין 1 ל 1000.

היונים הם המספרים שנבחרו. יש 501 יונים.

נתאים לכל מספר n, למספר b בהצגה

$$n = 2^k \cdot b$$

יש בדיוק 500 שובכים.

ולכן לפי עקרון השובך יש לפחות שובך אחד שיש בו שני יונים.

כלומר יש שני מספרים n ו m כך ש:

$$n = 2^{k_1} \cdot b \qquad m = 2^{k_2} \cdot b$$

[redacted] נניח בה"כ ש: $k_1 < k_2 \Leftarrow n < m$

ולכן נחלק את

$$2^{k_2 - k_1} = \frac{2^{k_2} \cdot b}{2^{k_1} \cdot b} = \frac{m}{n}$$

מספר שלם [redacted]

כלומר m מתחלק ב n ללא שארית. מ.ש.ל.

לפתור את ט ממ״ן 14
לנסות לפעם הבאה את
פרק 6 בקומבינטוריקה.

שבוע טוב!!