האוניברסיטה הפתוחה

מתמטיקה בדידה

תורת הגרפים

זאב נוטוב
תמיר טסה

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

תנאי שימוש בקובץ הדיגיטלי:

1. הקובץ הוא לשימושך **האישי** בלבד. פרטים מזהים שלך מוטבעים בקובץ בצורה גלויה ובצורה סמויה.
2. השימוש בקובץ הוא אך ורק למטרות לימוד, עיון ומחקר אישי.
3. העתקה או שימוש בתכנים נבחרים מותרת בהיקף העומד בכללי השימוש ההוגן, המפורטים בסעיף 19 לחוק זכות יוצרים 2007. במקרה של שימוש כאמור חלה חובה לציין את מקור הפרסום.
4. הנך רשאי/ת להדפיס דפים מחומר הלימוד לצורכי לימוד, מחקר ועיון אישיים. אין להפיץ או למכור תדפיסים כלשהם מתוך חומר הלימוד.

מתמטיקה בדידה

תורת הגרפים

זאב נוטוב
תמיר טסה

20476
מהדורה פנימית
לא להפצה ולא למכירה
20476-5010

Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

כתיבה:

פרופ׳ זאב נוטוב

ד״ר תמיר טסה

ייעוץ:

ד״ר ענת לרנר, האוניברסיטה הפתוחה

ד״ר עופר הדס, האוניברסיטה הפתוחה

איתי הר-אבן, האוניברסיטה הפתוחה

עריכה:

חוה ניומן

הדפסה דיגיטלית – יולי 2011

© תשע״א – 2011. כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.
בית ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע״ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת״ד 808, רעננה 43537.
The Open University of Israel, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 43537.
Printed in Israel.
אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה. שימוש מסחרי בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא ברשות מפורשת ובכתב ממדור זכויות יוצרים של האוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

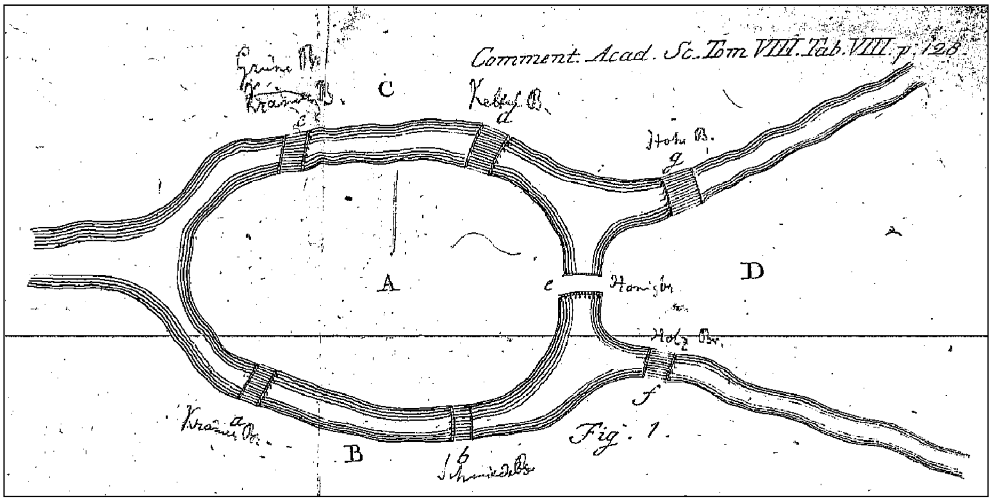
File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

פרק 1:
מבוא ומושגים בסיסיים

1.1 בעיית הגשרים של קניגסברג

אפשר לומר כי ראשיתה של תורת הגרפים בשנת 1736, שבה פתר **לאונרד אוילר (Leonhard Euler)** בעיה שהטרידה את תושבי העיר קניגסברג וזכתה לכינוי **בעיית הגשרים של קניגסברג**[1] (Königsberg bridge problem):

האם קיים מסלול הליכה העובר בכל אחד משבעת הגשרים של העיר קניגסברג (ראו איור 1) בדיוק פעם אחת?



איור 1: תרשים הגשרים של העיר קניגסברג

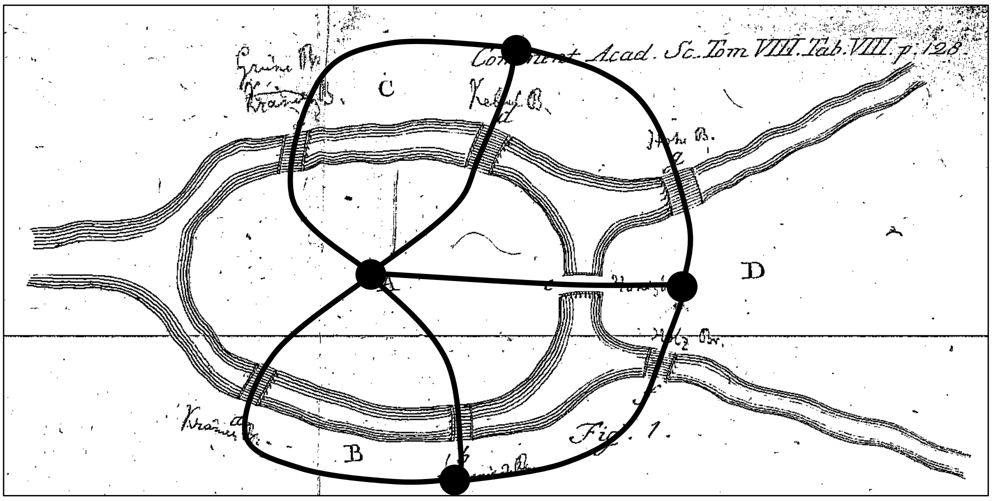
אוילר הוכיח כי מסלול כזה לא קיים. אנו נתחיל בכך שנתאר בקצרה ובאופן לא פורמאלי את ההוכחה שלו; לאחר מכן, בפרק 3, נוכיח באופן פורמאלי משפט כללי יותר.

1 בשנת 1736 הייתה העיר קניגסברג תחת ריבונות פרוסיה. עתה היא תחת ריבונות רוסיה ונקראת קלינינגרד.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

הדבר הראשון שעשה אוילר הוא לפשט את ניסוח הבעיה תוך כדי השמטת המידע הלא רלוונטי. נייצג כל חלקת יבשה על ידי נקודה או עיגול קטן (שנקרא לו בהמשך "צומת"), וכל גשר על ידי קו (שנקרא לו בהמשך "קשת"), כאשר כל קו (גשר) מחבר בין שתי הנקודות (חלקות היבשה) המתאימות; ראו איור 2.



איור 2: תרגום בעיית הגשרים של קניגסברג לבעיה בגרפים

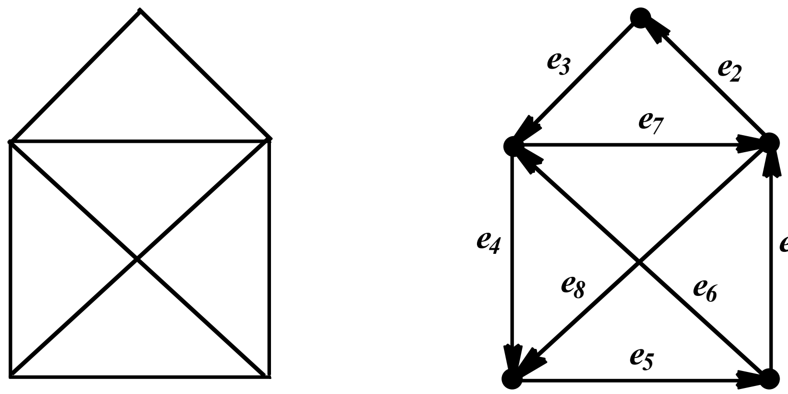
המבנה שמתקבל (ראו איור 2) נקרא **גרף**[1]. שימו לב כי המידע הרלוונטי היחיד הוא אילו שני חלקי יבשה מחבר כל גשר, ולכן לא משנה מהי צורת הקווים ואיפה בדיוק נמקם את הנקודות במישור.

אוילר הבחין בעובדה כי אם קיים מסלול העובר בכל גשר בדיוק פעם אחת, אזי פרט לנקודת ההתחלה והסיום של המסלול, מכל צומת (חלקת יבשה) שנכנסים אליו חייבים גם לצאת. במילים אחרות, במהלך המסלול מספר הפעמים שנכנסים לכל צומת ביניים שווה למספר הפעמים שיוצאים ממנו, ולכן סך הכניסות והיציאות הוא זוגי. לכן, אילו היה מסלול העובר בכל גשר בדיוק פעם אחת, אזי בגרף המתאים מספר הקשתות שנוגעות בכל צומת היה חייב להיות זוגי, פרט אולי לשני צמתים (התחלת המסלול וסיום המסלול). אבל בגרף שבאיור 2 יש יותר משני צמתים שמספר הקשתות שנוגעות בהם הוא אי-זוגי. למעשה, מספר הקשתות הנוגעות בכל אחד מארבעת הצמתים הוא אי-זוגי; יש צומת אחד שנוגעות בו 5 קשתות, ואילו בכל צומת אחר נוגעות 3 קשתות. מכאן שהמסלול המבוקש אינו קיים.

מתברר שבעיית הגשרים של קניגסברג קשורה לבעיה אחרת שבה אולי כבר נתקלתם כילדים:

1 אין קשר בין המושג "גרף" ביחידה זו לבין המושג "גרף של פונקציה".

האם ניתן לצייר את "הבית" שמשמאל (באיור 3) בלי להרים את העיפרון מהדף ובלי לחזור על אותו הקו פעמיים?



איור 3: האם ניתן לצייר את "הבית" שמשמאל במשיכת קולמוס אחת?

חלק מכם ודאי יודעים שהתשובה לשאלה הזאת חיובית. פתרון אחד מודגם בצד ימין של איור 3. מתחילים מהקצה התחתון הימני של "הבית", מציירים את הקו e_1, אחריו את הקו e_2, וכך הלאה. אחרי שמציירים את הקו e_5, חוזרים שוב לקצה התחתון הימני, ולאחריו מציירים את הקו האלכסוני e_6. מסיימים בקצה התחתון השמאלי. נשים לב כי כאן, בניגוד לגרף של בעיית הגשרים של קניגסברג, יש בדיוק שני צמתים שמספר הקשתות שנוגעות בהם הוא אי-זוגי. בשלב זה גם כנראה לא תופתעו מהאבחנה כי אחד הצמתים האלה הוא צומת ההתחלה של המסלול המבוקש, והשני הוא צומת הסיום שלו.

1.2 מושגים בסיסיים בתורת הגרפים

בסעיף זה נגדיר באופן פורמלי כמה מושגים בסיסיים בתורת הגרפים, ובכללם את המושגים שהוזכרו בסעיף הקודם.

הגדרה 1.1

גרף (graph) G הוא שלשה:

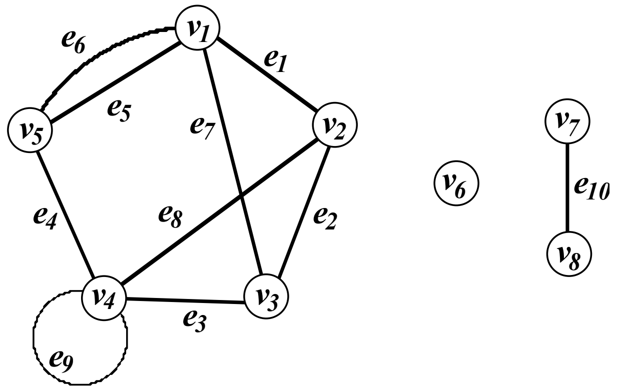
- קבוצה סופית V שאיבריה נקראים **צמתים (nodes)**;
- קבוצה סופית E שאיבריה נקראים **קשתות (edges)**[1];
- **פונקציה** המתאימה לכל קשת $e \in E$ תת-קבוצה של צמתים מתוך V ובה צומת אחד או שני צמתים.

---

1 בספרות נקראים לפעמים הצמתים "קדקודים" (vertices), והקשתות נקראות לפעמים "צלעות".

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute



איור 4: דוגמה לתיאור ציורי של גרף

אפשר לתאר גרפים על ידי ציור מתאים במישור, כמודגם באיור 4. הצמתים מוצגים כנקודות או כעיגולים במישור, והקשתות מוצגות כקווים, כאשר כל קו (קשת) מחבר שני צמתים שמתאימים לו. כך למשל, באיור 4:

- $V=\{v_1,\ldots,v_8\}$ היא קבוצת הצמתים;
- $E=\{e_1,\ldots,e_{10}\}$ היא קבוצת הקשתות;
- אם הפונקציה מתאימה לקשת $e\in E$ את קבוצת הצמתים $\{v_i,v_j\}$ אנו נרשום בקיצור $e=v_iv_j$ (או $e=v_jv_i$, שכן בקבוצה אין חשיבות לסדר האיברים). אנו נאמר שהקשת e מקשרת בין הצמתים v_i ו- v_j.
- במקרה שהפונקציה מתאימה לקשת $e\in E$ קבוצה בת צומת בודד $\{v_i\}$, אנו נרשום באופן דומה $e=v_iv_i$. במקרה כזה, נאמר שהקשת e מקשרת את הצומת v_i לעצמו.

  באיור 4 , למשל:

  $e_1=v_1v_2,\ e_2=v_2v_3,\ e_5=v_1v_5,\ e_6=v_1v_5,\ e_9=v_4v_4,\ e_{10}=v_7v_8$.

הערה

קבוצת הקשתות יכולה להיות ריקה; במקרה זה הגרף יתואר על ידי אוסף צמתים מבודדים במישור, שאין כל קו המקשר ביניהם.

עבור גרף G נסמן ב-$V(G)$ את קבוצת הצמתים של G, וב-$E(G)$ – את קבוצת הקשתות שלו.

נדגים כמה מושגים נוספים באמצעות איור 4.

- **צמתים שכנים** הם צמתים המחוברים בקשת; למשל, v_1 ו- v_2.
- אם $e=v_iv_j$, אז נאמר שהקשת $e=v_iv_j$ **סמוכה** לצומת v_i וגם לצומת v_j; למשל, e_2 סמוכה לצמתים v_2 ו- v_3.
- **לולאה** היא קשת המחברת צומת לעצמו; למשל, $e_9=v_4v_4$.

- **קשתות מקבילות** הן קשתות המחברות את אותו זוג צמתים; למשל, $e_5 = v_1v_5,\ e_6 = v_1v_5$.
- **צומת מבודד** הוא צומת שאין לו צמתים שכנים; למשל, v_6.
- **גרף פשוט** הוא גרף שאינו מכיל לולאות וקשתות מקבילות.
- **הדרגה** של צומת v ב- G תסומן על ידי $\deg_G(v)$ והיא מספר הקשתות ב- E הסמוכות ל- v, כאשר לולאה נספרת פעמיים.

  למשל: $\deg_G(v_1)=4, \deg_G(v_4)=5, \deg_G(v_6)=0$.

  באופן דומה, אם $M \subseteq E$ היא קבוצת קשתות בגרף $G=(V,E)$, אז $\deg_M(v)$ הוא מספר הקשתות ב- M הסמוכות ל- v, כאשר לולאה נספרת פעמיים.

הערה

כל קשת בגרף שאיננה לולאה מחברת בין שני צמתים. בקורס זה לא נייחס משמעות לסדר שבין הצמתים; כלומר, נדון בגרפים שבהם אין הבדל בין הקשת $e = v_iv_j$ לקשת $e' = v_jv_i$. עם זאת, במצבים מסוימים נידרש להבדיל בין שתי קשתות כאלה. לצורך כך נגדיר את המושג גרף מכוון:

הגדרה 1.2

גרף מכוון (directed graph) G הוא שלשה:

- קבוצה סופית V שאיבריה נקראים **צמתים**;
- קבוצה סופית E שאיבריה נקראים **קשתות**;
- **פונקציה** $f: E \to V \times V$ המתאימה לכל קשת $e \in E$ זוג סדור של צמתים מתוך V.

בגרף מכוון יש אפוא הבדל בין הקשת $e = v_iv_j$ לקשת $e' = v_jv_i$. שתיהן מקשרות את הצמתים v_i ו- v_j, אך בעוד e מכוונת מ- v_i אל v_j, הקשת e' מכוונת לכיוון הנגדי. למשל, באיור 3 הגרף השמאלי איננו מכוון, ואילו הגרף הימני מכוון, משום שלכל קשת בגרף זה מתואר כיוון התנועה של העט המצייר את הגרף במשיכת קולמוס אחת.

אם קבוצת הצמתים בגרף G היא V וקבוצת הקשתות היא E אז נציין זאת כך: $G=(V,E)$. (שימו לב: הסימון E טומן בחובו לא רק את שמות הקשתות אלא גם את זוג הצמתים שמחברת כל קשת.)

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

טענה 1.3

בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים: $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$. כלומר, סכום הדרגות בגרף שווה לכפליים מספר הקשתות.

הוכחה

כל קשת $e=uv\in E$ תורמת בדיוק 1 ל- $\deg_G(u)$ ובדיוק 1 ל- $\deg_G(v)$. לכן כל קשת תורמת בדיוק 2 לסכום הדרגות. מכאן נובע ש- $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$. ■

▼ שאלה 1

הראו כי בכל גרף מספר הצמתים שדרגתם אי-זוגית הוא תמיד מספר זוגי.

תשובה 1

אנו יודעים כי בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים: $\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$. לכן, סכום הדרגות בכל גרף הוא מספר זוגי. אילו מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית היה מספר אי-זוגי, אזי היינו מקבלים שסכום הדרגות בגרף הוא סכום של מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים (מספר אי-זוגי) ועוד מספר כלשהו של מספרים זוגיים (מספר זוגי), ולכן בסיכומו של דבר היינו מקבלים מספר אי-זוגי. זאת בסתירה לכך שסכום הדרגות הוא מספר זוגי. ▲

ההגדרות שלהלן עוסקות במסלולים בגרפים.

- **מסלול** בגרף הוא סדרה $P=v_0,e_1,v_1,\ldots,e_k,v_k$, כאשר v_i הם צמתים, e_i הן קשתות, $e_i=v_{i-1}v_i$ לכל $1\le i\le k$, וכל קשת מופיעה בסדרה לכל היותר פעם אחת. v_0,v_k הם **צומתי הקצה** של המסלול, ואילו שאר הצמתים נקראים **צמתים פנימיים**. v_0 הוא צומת ההתחלה של המסלול ו- v_k הוא צומת הסיום של המסלול, ונאמר כי המסלול נמשך מ- v_0 ל- v_k. מכיוון שבקורס זה נתרכז בגרפים פשוטים (שבהם, כאמור, אין קשתות מקבילות או לולאות), נוכל לאפיין מסלול רק על ידי סדרת הצמתים או הקשתות שבו. למשל, $v_1-v_2-v_4-v_3$.
- **אורך של מסלול** P, המסומן ב- $|P|$, הוא מספר הקשתות במסלול.
- **מסלול סגור**, **או מעגל**, הוא מסלול שבו צומתי הקצה זהים, כלומר $v_0=v_k$.
- **מסלול פשוט** הוא מסלול שבו כל הצמתים הם שונים. (כלומר, המסלול אינו "חותך" את עצמו.)
- **מעגל פשוט** הוא מסלול פשוט שצומתי הקצה שלו זהים.

- **המרחק** $\mathrm{dist}_G(u,v)$ מ- u ל- v ב- G הוא האורך של המסלול הקצר ביותר מ- u ל- v; $\mathrm{dist}_G(u,v)=\infty$ אם אין מסלול מ- u ל- v (למשל, $\mathrm{dist}_G(v_1,v_6)=\infty$ בגרף שבאיור 4); $\mathrm{dist}_G(u,v)=0$ אם $u=v$.
- **גרף קשיר (connected graph)** הוא גרף שיש בו מסלול בין כל שני צמתים.
- **רכיב קשירות** (או רכיב קשיר, **connected component**) של גרף $G=(V,E)$ הוא תת-קבוצה מקסימלית של V שבין כל שני צמתים בה יש מסלול. המקסימליות כאן פירושה שאין אפשרות להוסיף לתת-קבוצה שום צומת נוסף מבלי להפר את התנאי שכל שני צמתים בה יהיו מקושרים על ידי מסלול. למשל, בקבוצת הצמתים $\{v_1,v_2,v_3\}$ בגרף שבאיור 4 קיים מסלול בין כל שני צמתים, אך קבוצה זו איננה מקסימלית, מכיוון שניתן להוסיף לה גם את v_4 ו- v_5. $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ כבר מהווה רכיב קשירות בגרף זה. שני רכיבי הקשירות האחרים בגרף זה הם $\{v_6\}$ ו- $\{v_7,v_8\}$. שימו לב כי היחס "יש מסלול בין u ל- v" הוא יחס שקילות (ראו שאלה 2), וכל רכיב קשירות הוא מחלקת שקילות של יחס זה.

▼ שאלה 2

כל גרף $G=(V,E)$ מגדיר את היחס R הבא על קבוצת הצמתים V: $(u,v)\in R$ אם ורק אם יש מסלול מ- u ל- v ב- G. הוכיחו שזהו יחס שקילות על V (זכרו שאנו עוסקים כאן בגרפים לא מכוונים).

תשובה 2

- רפלקסיביות: ברור כי מכל צומת יש מסלול באורך אפס לעצמו.
- סימטריות: ברור כי אם P הוא מסלול מ- u ל- v ב- G, אז היפוך הסדרה שמגדירה את P הוא גם מסלול מ- v ל- u ב- G. כאן אנו מסתמכים על כך שהגרף איננו מכוון, ולכן אם אנו יכולים "ללכת" לאורך מסלול מ- u ל- v, אנו יכולים גם לחזור לאורך אותו מסלול ממש, מ- v ל- u. טענה זו איננה נכונה בגרפים מכוונים שבהם הקשתות מכוונות ולכן הן משולות ל"דרך חד-סיטרית".
- טרנזיטיביות: נניח כי יש ב- G מסלול $P_{u\to v}$ בין u ל- v ומסלול $P_{v\to w}$ בין v ל- w. נוכיח כי אז יש ב- G מסלול בין u ל- w. ננוע על המסלול $P_{u\to v}$ מ- u ל- v עד אשר ניתקל בפעם הראשונה בצומת של המסלול $P_{v\to w}$. יהי z צומת זה (ייתכן ש- $z=u$ או ש- $z=v$ או ש- z הוא צומת פנימי של המסלול $P_{v\to w}$). אז התת-מסלול של $P_{u\to v}$ בין u ל- z יחד עם התת-מסלול של $P_{v\to w}$ בין z ל- w יוצרים מסלול בין u ל- w, כנדרש. ▲

בפרט, נובע משאלה 2 כי בגרף יש מסלול מ- u ל- v אם ורק אם יש בו מסלול מ- v ל- u, ולכן לעיתים קרובות נאמר פשוט "מסלול בין u ל- v". כמו כן נובע משאלה 2 שפונקציית המרחק היא סימטרית, כלומר תמיד מתקיים $\mathrm{dist}_G(u,v)=\mathrm{dist}_G(v,u)$.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

ההגדרה שלפניכם כוללת מושגים נוספים שבהם נשתמש.

הגדרה 1.4

יהי $G=(V,E)$ גרף.

- גרף $G'=(V',E')$ הוא **תת-גרף (sub-graph)** של G, אם $E'\subseteq E, V'\subseteq V$ וכל קשת ב- E' מחברת בין שני צמתים של V'.
- $G'=(V',E')$ הוא **תת-גרף פורש (spanning sub-graph)** של G, אם הוא תת-גרף של G ומתקיים $V'=V$.
- בהינתן תת-קבוצה $U\subseteq V$ של צומתי G, **התת-גרף המושרה על ידי U ב-** G הוא תת-גרף של G שקבוצת הצמתים שלו היא U ושקבוצת הקשתות שלו היא כל הקשתות של G ששני הקצוות שלהם ב- U.
- G הוא **גרף מלא (complete graph)** או קליק **(clique)**, אם הוא גרף פשוט שכל זוג צמתים בו מחובר על ידי קשת. הגרף המלא על n צמתים יסומן ב- K_n.
- **הגרף המשלים** של G, שיסומן ב- $\overline{G}=(V,\overline{E})$, הוא בעל קבוצת צמתים V כמו G, וקבוצת הקשתות שלו היא $\overline{E}=\{uv : uv\notin E, u\neq v\in V\}$. כלומר, שני צמתים יהיו מחוברים בקשת ב- $\overline{G}$, אם ורק אם הם אינם מחוברים בקשת ב- G.

בהמשך נשתמש בסימון נוסף: בהינתן גרף $G=(V,E)$ וקבוצה H של צמתים או של קשתות, הגרף $G\setminus H$ מתקבל על ידי השמטת איברי H מ- G, כאשר השמטה של צומת גוררת גם השמטת כל הקשתות הסמוכות לצומת זה. באופן דומה, הגרף $G\cup H$ מתקבל על ידי הוספת הצמתים והקשתות שב- H ל- G.

שאלות

שאלה 3

א. הוכיחו שבגרף פשוט שבו דרגת כל צומת היא לפחות k קיים מסלול פשוט שאינו סגור בעל $k+1$ צמתים, ואם $k\geq 2$ אז קיים גם מעגל פשוט בעל לפחות $k+1$ צמתים.

ב. תנו דוגמה לגרף פשוט שבו דרגת כל צומת היא לפחות k ושאינו מכיל מסלול פשוט בעל $k+2$ צמתים.

שאלה 4

יהי G גרף פשוט **לא** קשיר. הוכיחו כי $\overline{G}$ (הגרף המשלים של G) הוא קשיר.

הדרכה: נצלו את העובדה כי ב- G יש לפחות שני רכיבי קשירות.

תשובות

תשובה 3

א. יהי P המסלול הפשוט הארוך ביותר בגרף. יהיו $s,v_1,\ldots,v_t$ הצמתים של P.
מאחר ש- P הוא המסלול הארוך ביותר, כל השכנים של s הם ב- P (אחרת היינו יכולים להמשיך את המסלול, והרי הנחנו שהוא הארוך ביותר). אחד השכנים האלו, נניח v_j, הוא בעל אינדקס גדול או שווה ל- k (כלומר, $j \geq k$), כי ל- s יש לפחות k שכנים. לפיכך, המסלול המבוקש הוא $s-v_1-\cdots-v_k$. אם $k \geq 2$, המעגל המבוקש הוא $s-v_1-\cdots-v_j-s$ (שימו לב שאם $k=1$ ו- $j=k$, אז נקבל כאן $s-v_1-s$ וזה איננו מעגל, כי אם קשת בודדת).

ב. בגרף המלא על $k+1$ צמתים, דרגת כל צומת היא k, אבל אין בו מסלול בעל $k+2$ צמתים.

▲

תשובה 4

נוכיח טענה חזקה יותר: בין כל שני צמתים ב- $\bar{G}$ יש מסלול שאורכו לכל היותר 2. יהיו u,v שני צמתים של $\bar{G}$; הם גם צמתים של G. אם u,v שייכים לרכיבי קשירות שונים של G, אז יש ביניהם קשת ב- $\bar{G}$. אם u,v שייכים לאותו רכיב קשירות של G, אז יש צומת w שנמצא ברכיב קשירות אחר של G. אז הקשתות uw,wv הן ב- $\bar{G}$. במקרה זה יש מסלול באורך 2 בין u ל- v.

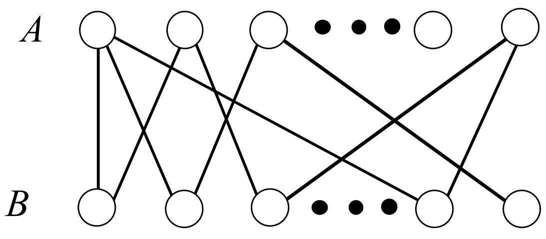
▲

1.3 גרפים דו-צדדיים

הגדרה 1.5

גרף דו-צדדי (bipartite graph) הוא גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות לא ריקות A,B כך שלכל קשת של G יש קצה אחד ב- A וקצה שני ב- B (ראו איור 5). לשתי הקבוצות נקרא **הצדדים** של הגרף.

גרף דו-צדדי מלא $K_{p,q}$ הוא גרף דו-צדדי פשוט בעל p צמתים בצד אחד ובעל q צמתים בצד השני, אשר מכיל את כל $p \cdot q$ הקשתות האפשריות.



איור 5: גרף דו-צדדי

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

שימו לב כי החלוקה לשתי קבוצות A,B שבהגדרת גרף דו-צדדי אינה חייבת להיות יחידה. למשל, אם באחד הצדדים יש לפחות שני צמתים ואחד מהם מבודד, אזי ניתן להעביר צומת זה לצד השני. עם זאת, אם גרף דו-צדדי הוא קשיר, אזי החלוקה לשני צדדים היא יחידה. בשאלה 5 שבסוף הפרק תתבקשו להוכיח זאת.

בהינתן גרף G, האם נוכל לקבוע (בזמן סביר) אם הוא דו-צדדי או לא? כדי לענות על שאלה זו, אנו זקוקים לאפיון פשוט, מעין "מסמך אישור", שיעזור לנו להחליט במהירות אם התשובה היא "כן" או "לא"[1]. ובכן, "מסמך" המאשר כי G הוא דו-צדדי הוא חלוקה של צומתי G לשתי קבוצות A,B, כך שקצה אחד של כל קשת של G נמצא ב-A והקצה השני שלה נמצא ב-B. בהינתן חלוקה כזו, נוכל לוודא במהירות שהיא מהווה "מסמך אישור" להיותו של G דו-צדדי, כלומר, שהחלוקה המוצעת אכן מקיימת את הנדרש.

אבל כיצד נוכל להשתכנע כי G אינו דו-צדדי? ובכן, קל לראות כי תנאי הכרחי לכך שגרף יהיה דו-צדדי הוא שלא יהיה בגרף מעגל באורך אי-זוגי. נניח ש-C הוא מעגל בגרף דו-צדדי $G=\left(A\cup B,E\right)$ המורכב מהצמתים $v_1-v_2-\cdots-v_n-v_1$. לפיכך, אם v_i נמצא בצד אחד של הגרף, אז v_{i+1} חייב להימצא בצדו השני. כלומר, כל הצמתים בעלי אינדקס זוגי נמצאים בצד אחד, ואילו כל הצמתים בעלי אינדקס אי-זוגי נמצאים בצד השני. על כן, אם n אי-זוגי, יוצא ש-v_1 ו-v_n מצויים באותו צד. אך מכיוון שקיימת קשת בין שני צמתים אלה, אנו מקבלים סתירה לדו-צדדיות של הגרף. מכאן שאם יש ב-G מעגל C באורך אי-זוגי, אזי נוכל לקבוע בוודאות כי הגרף אינו דו-צדדי. מתברר שזהו גם תנאי מספיק, כפי שנובע מהמשפט הבא.

משפט 1.6

גרף G בעל שני צמתים לפחות הוא דו-צדדי, אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי-זוגי.

הוכחה

נוכל להניח כי G קשיר, כי נכונות המשפט לכל רכיב קשירות של G גוררת את נכונות המשפט עבור G (הבהירו לעצמכם כי אכן זה כך). עתה נוכיח כל כיוון בנפרד.

---

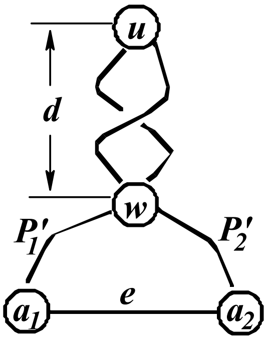
1 באופן כללי יותר, בבעיות הכרעה אלגוריתמיות, אנו מעוניינים לענות על השאלה האם קלט נתון מקיים תכונה מסוימת; כלומר, הפלט הוא "כן" או "לא". מחד, קיומם של "מסמכי אישור" קצרים גם לתשובה "כן" וגם לתשובה "לא" הוא בדרך כלל סימן לכך שקיים אלגוריתם יעיל (הרץ בזמן פולינומיאלי בגודל הקלט) הפותר את הבעיה. ומאידך, אי-קיומם של "מסמכי אישור" כאלה הוא סימן לכך שהבעיה קשה לחישוב.

את אחד הכיוונים (G הוא דו-צדדי $\Leftarrow$ אין ב- G מעגל באורך אי-זוגי) כבר הוכחנו בדיון שלפני המשפט. כעת נוכיח את הכיוון השני (אין מעגל באורך אי-זוגי ב- $G \Leftarrow G$ הוא דו-צדדי). יהי u צומת כלשהו. נגדיר:

A = כל הצמתים שמרחקם מ- u זוגי;
B = כל הצמתים שמרחקם מ- u אי-זוגי.

בבירור, $A \cap B = \varnothing$ וגם $A \cup B = V$ (מכיוון שהנחנו שהגרף קשיר). כמו כן, A מכילה את u ו- B מכילה את כל שכניו של u.

לכן A, B היא חלוקה של V לשתי תת-קבוצות לא ריקות. אנו טוענים שחלוקה זו מגדירה את שני צדי הגרף הדו-צדדי. לפיכך, כדי לסיים את ההוכחה, נוכיח כי אין קשת בין שני צמתים של A. (ההוכחה כי אין קשת בין שני צמתים של B דומה.)



איור 6: התת-מסלולים P_1', P_2', עם הקשת a_1a_2 יוצרים מעגל באורך אי-זוגי

נניח בשלילה כי קיימת קשת $e = a_1a_2$ בין שני צמתים ב- A (ראו איור 6).
יהי P_i המסלול הקצר ביותר מ- u ל- a_i, $i = 1, 2$.

מבין הצמתים המשותפים ל- P_1, P_2, יהי w הצומת הרחוק ביותר מ- u (ייתכן $w = u$).

יהי P_i' התת-מסלול של P_i שמחבר בין w ל- a_i.
עתה נתבונן בתת-מסלולים הנותרים של P_1, P_2, שמחברים את u ל- w. התת-מסלולים האלה הם בעלי אורך זהה (אחרת, אחד מהמסלולים P_1, P_2 לא היה המסלול הקצר ביותר). נסמן אורך זה ב- d. שימו לב כי $d + |P_1'| = |P_1|, d + |P_2'| = |P_2|$ ושניהם זוגיים. לכן:

אם d זוגי, אזי $|P_1'|, |P_2'|$ – שניהם זוגיים.
אם d אי-זוגי, אזי $|P_1'|, |P_2'|$ – שניהם אי-זוגיים.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

בכל אחד מהמקרים, $|P_1'|+|P_2'|$ הוא מספר זוגי. לכן הקשתות של P_1' ושל P_2', ביחד עם הקשת e, יוצרות מעגל באורך אי-זוגי $|P_1'|+|P_2'|+1$. זו סתירה להנחה כי אין מעגל באורך אי-זוגי ב- G. ■

▼ שאלה 5

הוכיחו כי אם גרף דו-צדדי G הוא קשיר, אזי יש חלוקה יחידה של צמתיו לשתי קבוצות לא ריקות A,B כך שהקצה של כל קשת של G נמצא ב- A והקצה השני שלה נמצא ב- B.

תשובה 5

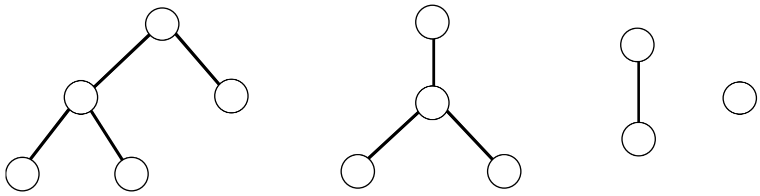
יהי $s\in V$ צומת כלשהו. לכל חלוקה A,B כמתואר בשאלה, כל הצמתים המרוחקים מרחק זוגי מ- s חייבים להיות בחלק שבו נמצא s, ואילו כל הצמתים המרוחקים מרחק אי-זוגי מ- s חייבים להיות בחלק האחר. מאחר ש- G הוא קשיר, מרחקו של כל צומת מ- s הוא זוגי או אי-זוגי (אין מרחקים שהם ∞). לכן החלוקה לצדדים נקבעת באופן יחיד: צד אחד מכיל את כל הצמתים שבמרחק זוגי מ- s (כולל s שהוא במרחק אפס מעצמו), ואילו הצד האחר מכיל את כל הצמתים שבמרחק אי-זוגי מ- s (כולל השכנים של s שהם במרחק 1 מ- s). ▲

פרק 2: עצים

2.1 תכונות בסיסיות של עצים

הגדרה 2.1

גרף נקרא **יער** אם אין בו מעגל. יער קשיר נקרא **עץ**. באופן שקול, אפשר להגדיר תחילה **עץ** כגרף קשיר ללא מעגלים, ואילו **יער** יוגדר כגרף שבו כל רכיב קשירות הוא עץ. באיור 7 מוצגת דוגמה ליער כזה.



איור 7: דוגמה ליער המוגדר כאוסף רכיבי הקשירות שלו, שהם עצים

הגדרה 2.2

צומת בעץ נקרא **עלה**, אם דרגתו בגרף היא בדיוק 1.

הטענה שלהלן לכאורה פשוטה מאוד, אבל היא מספקת כלי חשוב המאפשר להפעיל אינדוקציה כדי להוכיח טענות הקשורות לעצים.

טענה 2.3

בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות עלה אחד.

הוכחה

נניח בשלילה שאין בעץ אף לא עלה אחד. לפיכך, מכיוון שהעץ קשיר ויש בו לפחות שני צמתים, דרגתם של כל הצמתים בעץ היא לפחות 2. בפרק 1 הוכחנו (שאלה 3) שבגרף פשוט שדרגת כל צומת בו היא לפחות k, קיים מעגל פשוט בעל לפחות $k+1$ צמתים. לפיכך, העץ יהיה צריך לכלול מעגל פשוט בעל שלושה צמתים לכל הפחות. זו סתירה מכיוון שבעץ אין מעגלים. לפיכך, חייב להיות בעץ לפחות צומת אחד מדרגה 1, כלומר עלה. ■

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

הטענה הבאה פשוטה מאוד ועל כן אתם מוזמנים להוכיח אותה.

טענה 2.4
יהי v צומת בעץ T.
- אם נוסיף ל- T צומת חדש u וקשת בודדת uv, נקבל עץ.
- אם v הוא עלה ב- T, אז $T\setminus\{v\}$ גם הוא עץ. ■

שאלות

שאלה 1
הוכיחו את טענה 2.4.

שאלה 2
יהיו u,v שני צמתים בגרף ויהיו P,Q שני מסלולים המקשרים בין u ל- v. הוכיחו שאם שני המסלולים שונים, אז האיחוד שלהם מכיל מעגל.

תשובות

תשובה 1
- נניח בשלילה שהגרף המורחב המתקבל לאחר הוספת הקשת uv איננו עץ. מכיוון שהוספת צומת וקשת המקשרת אליו איננה פוגעת בקשירות הגרף, עלינו לבדוק את האפשרות שהוספה זו יצרה בגרף מעגל. אך מכיוון שבעץ המקורי לא היה מעגל, הרי שהמעגל שאנו מניחים שנוצר בגרף המורחב חייב להכיל את הקשת uv שנוספה. אם כך, מעגל זה חייב להכיל את הצומת החדש u. אבל דרגת הצומת הזה היא 1. זו סתירה. לפיכך, לא ייתכן שבגרף המורחב יש מעגל. אם כך, הגרף המורחב הוא גרף קשיר ללא מעגלים, ועל כן הוא עץ.
- הורדת הצומת v והקשת שחיברה אליו ודאי לא יכולה ליצור מעגל בגרף $T\setminus\{v\}$, שכן בגרף המקורי T לא היה מעגל. יתר על כן, הגרף $T\setminus\{v\}$ נותר קשיר. על מנת להראות זאת, נניח שהקשת שהורדנו היא uv. מכיוון שהגרף T קשיר, קיים מסלול בין u לבין כל צומת אחר בגרף $T\setminus\{v\}$. מסלול זה לא יכול לעבור דרך הקשת uv משום שהצומת v היה עלה. לפיכך, המסלול שבין u לבין כל צומת אחר בגרף $T\setminus\{v\}$ נותר בשלמותו גם לאחר הורדת הקשת uv. לכן, $T\setminus\{v\}$ הוא גרף קשיר, ומכיוון שהוא גם חסר מעגלים, הרי שהוא עץ. ▲

תשובה 2

נניח שהמסלול P מורכב מהקשתות $e_1,\dots,e_s$ והמסלול Q מורכב מהקשתות $f_1,\dots,f_t$ (אורכי המסלולים אינם שווים בהכרח).

נגדיר את j כמספר המקסימלי בטווח $0 \le j \le \min(s,t)$ שעבורו מתקיים $e_i = f_i$ לכל $i=1,\dots,j$. למשל, אם $e_1 = f_1, e_2 = f_2$ אך $e_3 \ne f_3$, אז $j=2$, ואילו אם $e_1 \ne f_1$ אז $j=0$. כלומר, j הוא אורך הרישא המקסימלית של שני המסלולים שלאורכה הם זהים.

באופן דומה נגדיר את k כמספר המקסימלי בטווח $0 \le k \le \min(s,t)$ שעבורו מתקיים $e_{s+1-i} = f_{t+1-i}$ לכל $i=1,\dots,k$. למשל, אם $e_s = f_t, e_{s-1} = f_{t-1}$ אך $e_{s-2} \ne f_{t-2}$, אז $k=2$, ואילו אם $e_s \ne f_t$, אז $k=0$. כלומר, k הוא אורך הסיפא המקסימלית של שני המסלולים שלאורכה הם זהים.

כעת נתייחס למסלולים P',Q' המתקבלים מ- P,Q על ידי הורדה של j הקשתות הראשונות ושל k הקשתות האחרונות מכל אחד מהם. לפחות אחד מבין המסלולים הללו חייב להיות לא ריק (משום שאילו שניהם היו ריקים, היינו מקבלים $P=Q$, בסתירה להנחה). כמו כן, קיימים צמתים u',v' כך שגם P' וגם Q' הם מסלולים המקשרים בין שני צמתים אלה (ייתכן, אגב, ש- $u'=v'$).

יהי H התת-גרף המתקבל מאיחוד שני מסלולים אלה. אנו טוענים שדרגת כל צומת ב- H היא לפחות 2 ולכן, על פי שאלה 3א' בפרק 1, הוא חייב להכיל מעגל. אכן, אם מדובר בצומת פנימי של אחד משני המסלולים האלה, אז בהכרח דרגתו היא לפחות 2; ואילו אם מדובר בצומת הקצה של שני המסלולים האלה, אז מכיוון שהמסלולים מתחילים (וגם מסתיימים) בקשתות שונות, אז דרגת צומת זה באיחוד שני המסלולים היא לפחות 2. ▲

המשפט הבא נותן כמה אפיונים שקולים של עצים.

משפט 2.5

יהי $G=(V,E)$ גרף. הטענות שלהלן שקולות:

1. G הוא עץ.
2. בין כל שני צמתים של G יש מסלול יחיד.
3. G הוא גרף קשיר מינימלי (במובן זה שהוא גרף קשיר ועם השמטת כל קשת ממנו מתקבל גרף לא קשיר).
4. G קשיר ו- $|E|=|V|-1$.
5. G אינו מכיל מעגלים ו- $|E|=|V|-1$.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

6. G אינו מכיל מעגלים, אבל כל קשת שנוסיף בין הצמתים הקיימים בגרף תיצור מעגל.

הוכחה

(1) $\Leftarrow$ (2) אם בין שני צמתים של G יש שני מסלולים שונים, אזי איחוד המסלולים מכיל מעגל (על פי שאלה 2 לעיל), בסתירה לכך ש- G הוא עץ.

(2) $\Leftarrow$ (3) ראשית, ברור שהגרף קשיר משום שבין כל שני צמתים קיים מסלול. נותר להראות שמאחר שהמסלול יחיד, אז כל קשת בגרף חיונית לצורך קשירותו. נניח בשלילה כי עם השמטת קשת $e=uv$ מ- G הגרף נותר קשיר. אז ב- $G-e$ יש מסלול בין u ל- v. אך אז המסלול הזה, מחד גיסא, והקשת e, מאידך גיסא, הם שני מסלולים שונים ב- G המקשרים בין u ל- v, בסתירה להנחה.

(3) $\Leftarrow$ (4) נוכיח זאת באינדוקציה על $|E|$. עבור $|E|=0$ הטענה ברורה, משום שאז הגרף יכול להיות קשיר רק אם $|V|=1$. נניח $|E|\ge 1$. נוריד קשת כלשהי מ- G. מתקבל גרף לא קשיר; מכיוון שהורדנו בדיוק קשת אחת, גרף לא קשיר זה מכיל שני רכיבי קשירות, שנסמן אותם כ- V_1,V_2. קל להראות שכל אחד מהרכיבים האלה הוא גרף קשיר מינימלי ועל כן ניתן להחיל על כל אחד מהם את הנחת האינדוקציה. על פי הנחת האינדוקציה, בגרף המושרה על ידי $|V_i|$ יש $|V_i|-1$ קשתות, $i=1,2$. לפיכך, סך הקשתות ב- G הוא:

$$\left(|V_1|-1\right)+\left(|V_2|-1\right)+1=|V_1|+|V_2|-1=|V|-1$$

(4) $\Leftarrow$ (5) נוכיח באינדוקציה על $|V|$. המקרה $|V|=1$ ברור. נניח $|V|\ge 2$. ההנחה (4) מחייבת שיש ב- G צומת v בעל דרגה 1, אחרת, אם לכל הצמתים יש דרגה גדולה או שווה ל-2, נקבל כי $2|E|=\sum_v \deg(v)\ge 2|V|$ ואז $|E|\ge|V|$. כעת נסתכל בגרף $G\setminus\{v\}$. גרף זה מקיים את (4) (כי גם $|V|$ וגם $|E|$ ירדו ב-1 ולכן גם בגרף זה נשמר הקשר $|E|=|V|-1$). לכן, על פי הנחת האינדוקציה, $G\setminus\{v\}$ מקיים גם את (5). קל להראות כי אם נחזיר את v, (5) ימשיך להתקיים (הוכחת הטענה האחרונה זהה להוכחת החלק הראשון בשאלה 1 לעיל).

(5) $\Leftarrow$ (6) מספיק להראות כי (5) גורר כי G קשיר, ואז ברור שכל הוספת קשת בין שני צמתים תיצור מעגל. נסמן ב- k את מספר רכיבי הקשירות ב- G. מאחר שאין ב- G מעגלים, הוא מהווה יער המורכב מ- k עצים. מכיוון שכבר הוכחנו ש-(1) $\Leftarrow$ (4), אז בכל אחד מן העצים האלה מספר הקשתות שווה למספר הצמתים פחות 1. על כן בגרף כולו

מתקיים $|E|=|V|-k$. אבל הנחנו ש- $|E|=|V|-1$, ולכן $k=1$. כלומר, יש רכיב קשירות אחד, ולפיכך G קשיר.

(6) ⇐ (1) מספיק להראות כי (6) גורר כי G קשיר. נניח בשלילה ש- G אינו קשיר. אז יש ב- G לפחות שני רכיבי קשירות שונים, V_1,V_2. אם נוסיף קשת בין צומת ב- V_1 לצומת ב- V_2 לא ייווצר מעגל, מכיוון שמעגל כזה חייב לעבור מ- V_1 ל- V_2 ואז לחזור ל- V_1. הדבר בלתי אפשרי מכיוון שבין V_1 ל- V_2 קיימת רק הקשת הבודדת שהוספנו. הגענו לסתירה להנחה שלנו שכל הוספת קשת יוצרת מעגל. לכן G קשיר. ■

שאלה 3 ▼

הוכיחו כי בכל עץ בעל לפחות שני צמתים יש לפחות שני עלים.

תשובה 3

ניתן שתי הוכחות שונות.
ההוכחה הראשונה דומה לתשובה לשאלה 3א' בפרק 1. נתבונן במסלול פשוט בעל אורך מקסימלי בעץ. אנו טוענים כי צומתי הקצה של המסלול הם עלים. לצומת קצה אין שכן שאינו במסלול (נובע ממקסימליות המסלול) וגם יש רק שכן אחד במסלול (אחרת יש מעגל). כלומר, לכל צומת קצה יש שכן יחיד, ולכן הוא עלה.

ההוכחה השנייה היא באינדוקציה על מספר הצמתים, n. עבור $n=2$ הטענה ברורה. נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n, $n\geq 3$. יהי T עץ בעל n צמתים. יהי v עלה של T. אז $T'=T\setminus\{v\}$ הוא עץ, ועל פי הנחת האינדוקציה יש ל- T' לפחות 2 עלים, נניח u,w. בעץ T יש לצומת v שכן יחיד, ולכן u או w אינו שכן של v. נניח ש- u אינו שכן של v. מכאן נובע כי u הוא עלה של T, וביחד עם v אנחנו מקבלים של- T יש לפחות שני עלים. ▲

טענה 2.6

כל גרף קשיר מכיל תת-גרף פורש שהוא עץ.

הוכחה

נסמן את הגרף ב- G. נגדיר סדרת תת-גרפים של G, שכולם יהיו תת-גרפים פורשים של G והאחרון שבהם יהיה עץ.

הגרף הראשון בסדרה הוא $G_0=G$ (מובן שהוא תת-גרף פורש והוא קשיר). כעת, אם ב- G_0 יש מעגל, אז נוכל להוריד ממנו קשת מבלי להפר את הקשירות שלו ולקבל תת-גרף פורש קשיר שבו מספר הקשתות קטן ב-1. נסמן תת-גרף זה ב- G_1. נמשיך באופן

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

דומה – אם ב- G_i יש מעגל, אז נוכל להוריד ממנו קשת מבלי להפר את הקשירות שלו ולקבל תת-גרף פורש קשיר, מצומצם יותר, G_{i+1}. תהליך זה חייב להסתיים בתת-גרף קשיר שאיננו מכיל מעגלים (על פי משפט 2.5, זה יקרה כאשר מספר הקשתות בתת-גרף יהיה $|V|-1$). תת-גרף כזה הוא עץ. ■

שאלות

שאלה 4

יהיו $A_1,\ldots,A_n$ n תת-קבוצות שונות של $\{1,\ldots,n\}$. הוכיחו כי קיים $y\in\{1,\ldots,n\}$ כך שאם נוסיף את y לכל אחת מהקבוצות, נקבל שוב קבוצות שונות.

שאלה 5

הראו כי בעץ בעל 100 צמתים, שמתוכם בדיוק 20 צמתים הם מדרגה 2, יש לפחות 41 עלים.

תשובות

תשובה 4

נגדיר גרף G שצמתיו $A_1,\ldots,A_n$ ויש קשת עם סימון y בין A_i ל- A_j אם ורק אם $A_i\cup\{y\}=A_j$ או $A_j\cup\{y\}=A_i$, כלומר אם ורק אם A_i,A_j נבדלות בדיוק באיבר אחד והוא y.

ברור כי G לא מכיל קשתות מקבילות ולולאות, כלומר G הוא גרף פשוט.

נניח שנצליח להוכיח שקיים $y\in\{1,\ldots,n\}$ כך שאין ב- G קשת בעלת סימון y. אנו טוענים שבמקרה זה y הוא הערך שחיפשנו. אכן, נניח בשלילה ש- y איננו הערך שחיפשנו. כלומר, קיימות A_i,A_j כך ש- $A_i\cup\{y\}=A_j\cup\{y\}$. מכיוון ש- A_i,A_j שונות, זה ייתכן רק אם $A_i\cup\{y\}=A_j$ או אם $A_j\cup\{y\}=A_i$. על כן, יש קשת בעלת סימון y בין A_i ל- A_j, בסתירה להנחה.

אם כן, נותר להוכיח שקיים $y\in\{1,\ldots,n\}$ כך שאין ב- G קשת בעלת סימון y. יהי עתה $C=A_1,y_1,A_2,y_2,\ldots,y_{k-1},A_k,y_k,A_1$ מעגל כלשהו ב- G. אנו טוענים כי לכל קשת ב- C יש קשת אחרת ב- C בעלת אותו הסימון. שימו לב כי A_2 מתקבלת מ- A_1 על ידי השמטת או הוספת y_1, A_3 מתקבלת מ- A_2 על ידי השמטת או הוספת y_2, וכך הלאה. כיוון שבסוף אנו חוזרים ל- A_1, הרי שנצטרך גם להוסיף כל איבר שהשמטנו,

וגם להשמיט כל איבר שהוספנו. לכן, אם מכל קבוצת קשתות בעלות אותו הסימון נשאיר רק נציג אחד, נקבל גרף חסר מעגלים, כלומר יער. ביער זה יש לכל היותר $n-1$ קשתות, ולכן קיים $y\in\{1,\ldots,n\}$ שאין לו קשת מתאימה ביער, ולכן גם לא ב- G. ▲

תשובה 5

בעץ בעל 100 צמתים יש 99 קשתות. יהיו $v_1,\ldots,v_{100}$ צומתי העץ, ונניח כי $v_{81},\ldots,v_{100}$ הם 20 הצמתים מדרגה 2. יהי α מספר הצמתים מדרגה 1 ב- T, כלומר α הוא מספר העלים של T. כיוון שסכום הדרגות הוא כפליים מספר הקשתות, נקבל:

$$2\cdot 99=\sum_{i=1}^{100}\deg_T(v_i)=\sum_{i=1}^{80}\deg_T(v_i)+\sum_{i=81}^{100}\deg_T(v_i)=\sum_{i=1}^{80}\deg_T(v_i)+2\cdot 20$$

ולכן: $\sum_{i=1}^{80}\deg_T(v_i)=158$.

עתה אם α הוא מספר הצמתים מדרגה 1, אזי $80-\alpha$ הוא מספר הצמתים מדרגה ≥ 3. לכן:

$$158=\sum_{i=1}^{80}\deg_T(v_i)\geq\alpha\cdot 1+(80-\alpha)\cdot 3$$

ומכאן, בעזרת חשבון אלמנטרי, נובע ש- $\alpha\geq 41$. ▲

2.2 נוסחת קיילי וסדרות פרופר

כמה עצים שונים בעלי שלושה צמתים קיימים? התשובה לכך תלויה במידה רבה באופן שבו אנו מפרשים את המושג "עצים שונים". כל עץ בעל שלושה צמתים הוא למעשה מסלול באורך 2. תשובה אפשרית לשאלה היא "עץ אחד", אם כל שני מסלולים באורך 2 הם עצים זהים מבחינתנו.

הגדרה 2.7

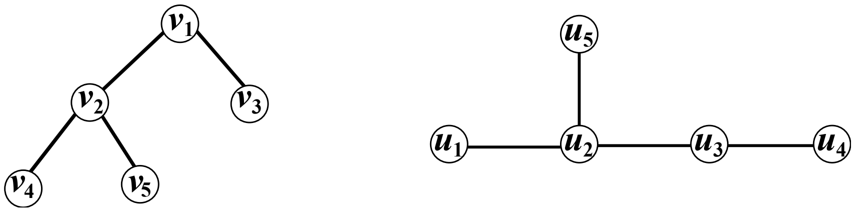
שני גרפים $G=(V,E)$ ו- $G'=(V',E')$ נקראים **איזומורפיים**, אם קיימת העתקה $f:V\to V'$ חד-חד-ערכית ועל, כך שלכל $u,v\in V$ מתקיים: $uv\in E$ אם ורק אם $f(u)f(v)\in E'$.

למשל, שני הגרפים שבאיור 8 הם איזומורפיים תחת ההעתקה הזאת:

$$f(u_1)=v_4\,,\quad f(u_2)=v_2\,,\quad f(u_3)=v_1\,,\quad f(u_4)=v_3\,,\quad f(u_5)=v_5$$

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute



איור 8: גרפים איזומורפיים

לעיתים נרצה לדבר על **גרפים מתויגים** שבהם לכל צומת u יש **תג** $t(u)$ שהוא מספר טבעי, ולשני צמתים שונים יש תגים שונים. במקרה זה הגדרת האיזומורפיזם מביאה בחשבון גם את ערכי התגים כדלקמן:

הגדרה 2.8

שני גרפים מתויגים $G=(V,E)$ ו- $G'=(V',E')$ נקראים **איזומורפיים**, אם קיימת העתקה $f:V\to V'$ חד-חד-ערכית ועל, כך שלכל $u\in V$, התג של u שווה לתג של $f(u)$, ובנוסף מתקיים: $uv\in E$ אם ורק אם $f(u)f(v)\in E'$.

למשל, אם הגרף הימני באיור 8 מתויג כך שהתג של u_i הוא המספר הטבעי i ($1\le i\le 5$), ואילו הגרף השמאלי מתויג כך:

$$t(v_4)=1,\ t(v_2)=2, t(v_1)=3, t(v_3)=4, t(v_5)=5$$

אז הגרפים המתויגים האלה איזומורפיים. גם אם התגים יהיו:

$$t(v_5)=1,\ t(v_2)=2, t(v_1)=3, t(v_3)=4, t(v_4)=5$$

(כלומר, אם נחליף בין התגים של v_4 ו- v_5), הגרפים יהיו איזומורפיים. אבל כל בחירה אחרת של תגים לגרף השמאלי תהפוך את שני הגרפים המתויגים ללא איזומורפיים (למרות היותם איזומורפיים אם מתעלמים מהתגים).

בסעיף זה נתעניין בשאלה הבאה: בהינתן קבוצה של n תגים (דהיינו, קבוצה של n מספרים טבעיים), כמה עצים מתויגים שונים (כלומר, לא איזומורפיים) בעלי n צמתים קיימים כך שתגיהם לקוחים מהקבוצה הזו. בדרך כלל נניח שקבוצת התגים היא $\{1,2,\ldots n\}$.

נוכל לחשב את התשובה בקלות עבור $n=4$. במקרה זה יש שני סוגי עצים: מסלול באורך 3, או "כוכב" בעל שלושה עלים. מספר המסלולים השונים באורך 3 הוא $4!/2=12$ (זאת משום שיש $4!$ סידורים של התגים בשורה, אבל שני סידורים הנבדלים זה מזה רק בכיוון, למשל $4-3-2-1$ לעומת $1-2-3-4$, מובילים

לגרפים זהים). לעומת זאת, מספר הכוכבים השונים הוא כמובן 4, כמספר האפשרויות לבחירת הצומת המרכזי של הכוכב. לכן התשובה במקרה זה היא 16.

המשפט הבא מספק תשובה כללית לשאלה זו. את המשפט ניסח לראשונה ארתור קיילי[1] (Arthur Cayley) ב-1889, והוא גם הוכיח אותו למקרה $n \le 6$. ההוכחה המלאה הראשונה ניתנה על ידי היינץ פרופר (Heinz Prüfer) בשנת 1918.

משפט 2.9 (משפט קיילי)

לכל $n \ge 2$ מספר העצים המתויגים השונים על קבוצה מתויגת V של n צמתים הוא n^{n-2}.

הוכחת משפט קיילי

תהי V קבוצה מתויגת בגודל n. כדי להוכיח את המשפט, נראה שקיימת התאמה חד-חד ערכית ועל בין קבוצת העצים המתויגים על V לקבוצת הסדרות באורך $n-2$ (עם חזרות) של איברים מתוך V. לכן, מספר העצים המתויגים על V שווה למספר הסדרות באורך $n-2$ מתוך V. כיוון שמספר הסדרות באורך k מתוך V הוא n^k, נקבל (עבור $k = n-2$) כי מספר העצים המתויגים על V הוא n^{n-2}.

באופן יותר פורמאלי, נסמן ב- $\mathbf{T}_V$ את קבוצת כל העצים מעל הקבוצה המתויגת V וב- $\mathbf{S}_V$ את קבוצת כל הסדרות (עם חזרות) באורך $n-2$ של איברים מתוך V (מכאן ואילך אנו נזהה בין צמתים ובין התגים המזהים אותם). גודלה של $\mathbf{S}_V$ הוא n^{n-2}. (שימו לב כי במקרה $n=2$, הקבוצה $\mathbf{S}_V$ מכילה סדרה אחת בדיוק, היא הסדרה הריקה $S = (\ )$, שיש בה אפס איברים.) על כן, אם נראה ששתי הקבוצות לעיל שוות בגודלן, הרי שהמשפט הוכח. לצורך כך נגדיר שתי העתקות (פונקציות) f, g כדלקמן:

- $f : \mathbf{T}_V \to \mathbf{S}_V$. כלומר, f מתאימה לכל עץ T על V סדרה יחידה $S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2})$ מתוך V.
- $g : \mathbf{S}_V \to \mathbf{T}_V$. כלומר, g מתאימה לכל סדרה $S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2})$ של איברים מתוך V עץ יחיד T על V.

אחרי שנגדיר את שתי הפונקציות, נוכיח כי הן מקיימות את התכונה הבאה: לכל $T \in \mathbf{T}_V$ ולכל $S \in \mathbf{S}_V$,

$$(*) \quad T = g(S) \ \Leftrightarrow\ S = f(T)$$

1 קיילי (Arthur Cayley, 1821-1895) היה מתמטיקאי בריטי. עם הישגיו במתמטיקה נמנים הוכחת המשפט כי כל מטריצה ריבועית היא שורש של הפולינום האופייני שלה, וההגדרה המקובלת היום למושג "חבורה".

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

מכאן נובע שהפונקציות f,g הן פונקציות הופכיות זו לזו, ובפרט – שכל אחת מהן היא פונקציה חד-חד-ערכית ועל. לפיכך, $\left|\mathbf{T}_V\right|=\left|\mathbf{S}_V\right|$.

בהמשך, נסמן ב-$L(T)$ את קבוצת העלים של עץ T, ונסמן ב-$V\setminus S$ את קבוצת האיברים ב-V שאינם מופיעים בסדרה S.

תיאור ההעתקה f

לכל עץ T על V נתאים סדרה $S=\left(s_1,s_2,\ldots,s_{n-2}\right)$ מתוך V, הנקראת **סדרת פרופר** (Prüfer sequence) של T, באופן הבא. יהי v_1 העלה בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$; נגדיר את האיבר הראשון s_1 בסדרה S כשכן היחיד של v_1. עתה, נוציא את v_1 מ-T ונחזור על התהליך עם העץ $T\setminus\{v_1\}$: יהי v_2 העלה בעל התג הקטן ביותר ב-$L\left(T\setminus\{v_1\}\right)$; נגדיר את האיבר השני s_2 בסדרה S כשכן היחיד של v_2. נחזור על תהליך זה עד אשר נקבל סדרה $S=\left(s_1,s_2,\ldots,s_{n-2}\right)$ באורך $n-2$, כלומר עד אשר נקבל עץ בעל שני צמתים בלבד. את הבנייה הזאת אפשר גם לתאר באינדוקציה, באופן הבא:

- אם T הוא עץ על 2 צמתים, אז $f(T)$ היא הסדרה הריקה.
- אם T הוא עץ על לפחות 3 צמתים, אז $f(T)=\left(s_1,f\left(T\setminus\{v\}\right)\right)$, כאשר v הוא האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$, ו-s_1 הוא השכן היחיד של v ב-T. על כן, במקרה זה אנו מגדירים $f(T)$ כסדרה המתקבלת על ידי שרשור s_1 עם הסדרה $f\left(T\setminus\{v\}\right)$.

הבנייה המתוארת לעיל מוגדרת היטב. אפשר גם לרשום תהליך זה כאלגוריתם, ללא שימוש באינדוקציה. שימו לב שבאלגוריתם, העץ T והקבוצה V משמשים כמשתנים, ותוכנם משתנה במהלך הלולאה. (להמחשת הבנייה ראו איור 9, שבו $V=\{1,\ldots,8\}$.)

קלט: עץ T על קבוצת צמתים מתויגת V.

אתחול: $S\leftarrow(\ )$.

לולאה: כל עוד $|V|\geq 2$ בצע:

1. אם $|V|=2$ עצור והחזר את S.
2. יהי v העלה בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$.
3. הוסף את השכן s של v לסוף הסדרה S, והוצא את v מ-T ומ-V.

בטרם ניגש לתיאור ההעתקה ההופכית g, נוכיח טענת עזר פשוטה.

טענה 2.10

אם $S=f(T)$ אז $L(T)=V\setminus S$.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על $n=|V|$.

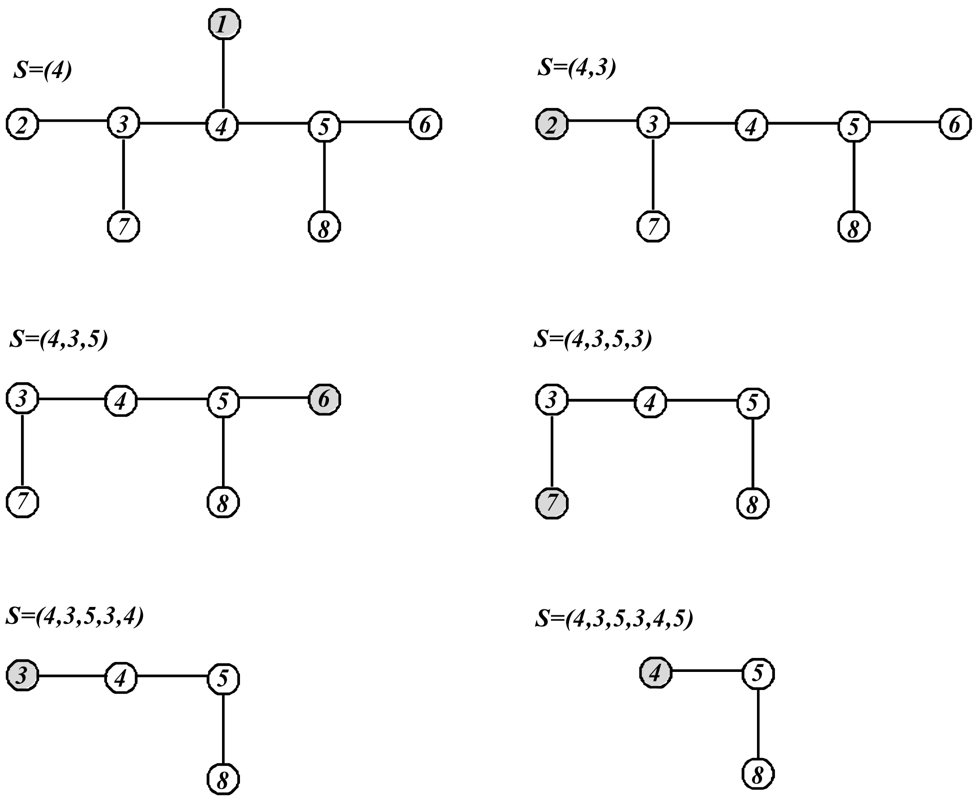
אם $n=2$ הטענה ברורה: במקרה זה כל הצמתים בעץ הם עלים והסדרה המתאימה לו היא סדרה ריקה.

אם כן, נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n, כאשר $n\geq 3$.

יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$, ויהיו $T'=T\setminus\{v\}$, $V'=V\setminus\{v\}$, $S'=f(T')$. אז הסדרה $S=f(T)$ מתקבלת מהסדרה S' (שהיא סדרה מתוך V'), על ידי שרשור של s_1 (השכן של v ב-T) עם S'. על פי הנחת האינדוקציה, $L(T')=V'\setminus S'$. כמו כן, כיוון ש-$n\geq 3$, s_1 אינו עלה של T, ולכן $L(T)=\left(L(T')\cup\{v\}\right)\setminus\{s_1\}$. מכאן נקבל

$$L(T)=\left(L(T')\cup\{v\}\right)\setminus\{s_1\}=\left((V'\setminus S')\cup\{v\}\right)\setminus\{s_1\}=(V\setminus S')\setminus\{s_1\}=V\setminus S$$

כפי שרצינו להוכיח. ■



איור 9: בניית סדרת פרופר מעץ נתון; בכל שלב, העלה בעל המספר הקטן ביותר מודגש באפור.

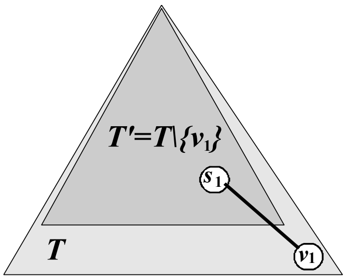
האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

תיאור ההעתקה g

עתה נתאר את ההעתקה g, שאנו רוצים שהיא תהיה ההעתקה ההופכית של f. תהי $S=(s_1,s_2,\dots,s_{n-2})$ סדרת פרופר של עץ T. נזכיר כי על פי טענה 2.10, $L(T)=V\setminus S$. יהי v_1 האיבר הקטן ביותר ב- $V\setminus S$. בצעד הראשון של בניית הסדרה S הסרנו את האיבר v_1 בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$, ואילו בסדרה S רשמנו כאיבר הראשון את השכן s_1 של v_1. לכן, כצעד ראשון לשחזור העץ T מתוך הסדרה S, יש לחבר את v_1 ל- s_1. כיוון שאנו כבר יודעים שהעלה v_1 מחובר ל- s_1, אנו יכולים להתרכז בבניית העץ $T'=T\setminus\{v_1\}$ מתוך הסדרה $S'=(s_2,\dots,s_{n-2})$ המתקבלת מ- S על ידי הסרת s_1. ברגע שנבנה את העץ T', נוכל לשחזר ממנו את העץ T על ידי חיבור v_1 ל- s_1 (להמחשה, ראו איור 10).

אם כן, בשלב השני אנו חוזרים על התהליך, בניסיון לבנות את העץ T' מתוך הסדרה S': מבין איברי $L(T')=V'\setminus S'$, נבחר את האיבר הקטן ביותר v_2, ונחבר אותו בקשת ל- s_2, וכך נמשיך.



איור 10

בנייה זו אפשר גם לתאר באינדוקציה באופן הבא. אם $S=(\ )$ היא הסדרה הריקה, אז $g(S)$ הוא העץ T בעל קשת אחת בלבד. אם $S=(s_1\dots,s_{n-2})$ היא סדרה לא ריקה, יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$V\setminus S$, ונגדיר $V'=V\setminus\{v\}$, $S'=(s_2,\dots,s_{n-2})$; אז העץ $T=g(S)$ מתקבל מהעץ $T'=g(S')$ (שהוא בעל קבוצת הצמתים V'), על ידי חיבור v ל- s_1, ונרשום בכתיב מקוצר $g(S)=g(S')+vs_1$. מהגדרה זו של g נובע כי $g(S)$ הוא אכן עץ; את זה קל להוכיח באינדוקציה על ידי שימוש בטענה 2.4, כי $g(S)$ מתקבל מ- $g(S')$ (שהוא עץ על פי הנחת האינדוקציה) על ידי חיבור צומת חדש v בקשת לאחד מהצמתים ב- $g(S')$.

הבנייה שתוארה לעיל מוגדרת היטב. אפשר לרשום גם תהליך זה כאלגוריתם, ללא שימוש באינדוקציה. שימו לב שבאלגוריתם הסדרה S והקבוצה V משמשות כמשתנים, ותוכנן משתנה במהלך הלולאה. להמחשת הבנייה ראו איור 11 שבו $V=\{1,\dots,8\}$ והסדרה היא זו שהתקבלה בדוגמה שבאיור 9. שימו לב כי האלגוריתם אכן שחזר את העץ המקורי מאיור 9.

קלט: סדרה $S=(s_1,s_2,\ldots,s_{n-2})$ שאיבריה שייכים לקבוצה מתויגת V.

אתחול: $T \leftarrow (V,\varnothing)$.

לולאה: כל עוד $|V|\geq 2$ בצע:

1. אם $|V|=2$, הוסף ל- T קשת המחברת את שני הצמתים ב- V ועצור.
2. יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב- $V \setminus S$, ויהי s האיבר הראשון ב- S.
3. הוסף ל- T את הקשת vs, הוצא את v מ- V, והוצא את s מ- S.

טענה 2.11

אם $T=g(S)$ אז $L(T)=V\setminus S$.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על $n=|V|$.

אם $n=2$ הטענה ברורה.

נניח אם כן כי הטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n, כאשר $n\geq 3$.

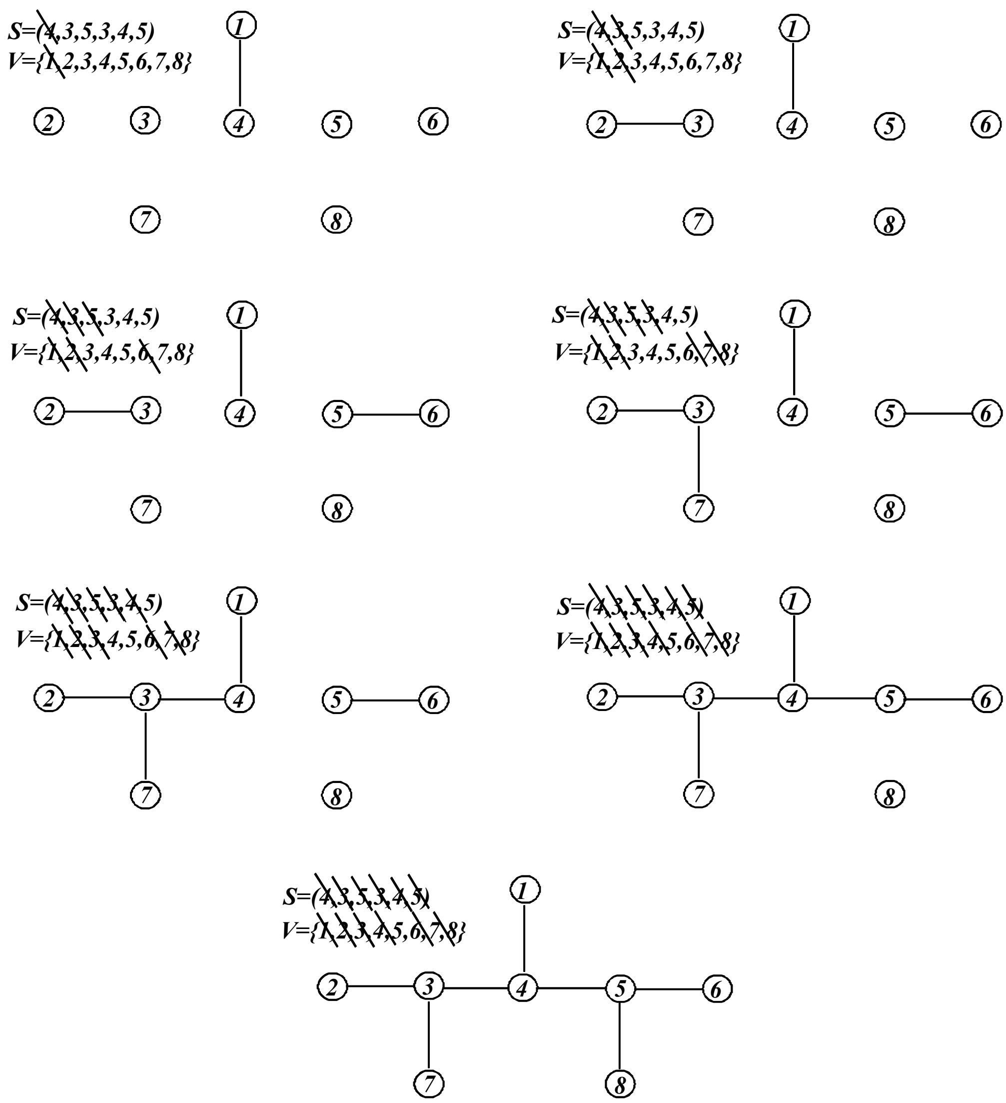
נסמן כרגיל את איברי הסדרה ב- $S=(s_1,s_2,\ldots,s_{n-2})$. יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב- $V\setminus S$, ונגדיר $S'=(s_2,\ldots,s_{n-2})$, $V'=V\setminus\{v\}$, ו- $T'=g(S')$. אז העץ $T=g(S)$ מתקבל מהעץ $T'=g(S')$ (שהוא בעל קבוצת הצמתים V'), על ידי חיבור v ל- s_1. על פי הנחת האינדוקציה, $L(T')=V'\setminus S'$. כמו כן, מהבנייה של T מ- T' נובע כי $L(T)=L(T')\cup\{v\}\setminus\{s_1\}$. לכן

$$L(T)=\left(L(T')\cup\{v\}\right)\setminus\{s_1\}=\left((V'\setminus S')\cup\{v\}\right)\setminus\{s_1\}=(V\setminus S')\setminus\{s_1\}=V\setminus S$$

כפי שרצינו להוכיח ■

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute



איור 11: דוגמה לבניית עץ מסדרה נתונה

כדי לסיים את הוכחת משפט קיילי, נותר להוכיח את הטענה הבאה.

טענה 2.12

עבור ההעתקות f,g שהוגדרו לעיל מתקיימת התכונה $(*)$, כלומר

$$(*) \quad T=g(S) \Leftrightarrow S=f(T)$$

הוכחה

ההוכחה היא באינדוקציה על $n=|V|$. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n=2$. במקרה זה, על פי ההגדרה, $f(T)$ היא הסדרה הריקה, ואילו g מעתיקה את הסדרה

הריקה לעץ יחיד על שני צמתים. לפיכך, תכונה $(*)$, על שני הכיוונים שבה, מתקיימת במקרה זה.

נניח עתה כי תכונה $(*)$ מתקיימת עבור $|V| = n-1$ ונוכיח כי היא מתקיימת עבור $|V| = n$, כאשר $n \geq 3$.

הכיוון $S = f(T) \Rightarrow T = g(S)$ **:**

נניח $S = f(T)$. עלינו להוכיח כי אז $T = g(S)$. יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$. נסמן $T' = T \setminus \{v\}$, $S' = (s_2, \ldots, s_{n-2})$. על פי הגדרת f, $S' = f(T')$, ולכן על פי הנחת האינדוקציה

$$g(S') = T'$$

על פי טענה 2.10, v הוא גם האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$V \setminus S$. לפיכך, על פי הגדרת ההעתקה g נקבל

$$g(S) = g(S') + vs_1 = T' + vs_1 = T$$

כנדרש.

הכיוון $T = g(S) \Rightarrow S = f(T)$ **:**

נניח $T = g(S)$. עלינו להוכיח כי אז $S = f(T)$. יהי v האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$V \setminus S$, ונסמן $T' = T \setminus \{v\}$, $S' = (s_2, \ldots, s_{n-2})$. על פי הגדרת g, $T' = g(S')$, ולכן על פי הנחת האינדוקציה

$$f(T') = S'$$

על פי טענה 2.11, v הוא גם האיבר בעל התג הקטן ביותר ב-$L(T)$. לפיכך, על פי הגדרת ההעתקה f נקבל

$$f(T) = (s_1, f(T')) = (s_1, S') = S$$

כנדרש.

הוכחנו את שני הכיוונים של תכונה $(*)$, ועל כן הוכחת טענה 2.12 הסתיימה. ■

בזאת מסתיימת הוכחת משפט קיילי. ■

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

שאלות

שאלה 6

הוכיחו את הטענה הבאה: כל צומת v של T מופיע בסדרת פרופר המתאימה $S=(s_1,s_2,\dots,s_{n-2})$ המיוצרת על ידי f בדיוק $\deg_T(v)-1$ פעמים. הסיקו מטענה זו את טענה 2.10.

שאלה 7

א. נתונה סדרת פרופר $(8,7,5,4,2,1)$. בנו את העץ המתאים.

ב. אפיינו את סדרות פרופר של עצים בעלי 8 צמתים, שכל צומת בהם שאינו עלה – דרגתו בדיוק 3.

ג. כמה עצים מתויגים כמו אלה שבסעיף ב׳ קיימים?

שאלה 8

א. נתונה סדרת פרופר $(4,4,3,4,4,2)$. בנו את העץ המתאים.

ב. אפיינו את העצים בעלי 8 צמתים שסדרת פרופר שלהם מכילה בדיוק 3 מספרים שונים.

תשובות

תשובה 6

תחילה ניתן הסבר לא פורמאלי לטענה. נשים לב כי במהלך בניית סדרת פרופר S של T, מתקיימות לכל $v\in V$ הטענות הבאות:

1. ברגע ש-v נהיה עלה, הוא לא יופיע יותר בסדרה (כי בכל פעם אנו רושמים בסדרה שכן של עלה, ולא את העלה עצמו).
2. v הוא עלה באחד העצים הנבנים במהלך האלגוריתם (כי אנו מסירים רק עלים, ובסוף נשאר עץ בגודל 2, ובעץ כזה כל הצמתים הם עלים). מכיוון שדרגתו של עלה היא 1, אז במהלך בניית הסדרה יוסרו בדיוק $\deg_T(v)-1$ שכנים של v (כדי להופכו מצומת עם $\deg_T(v)$ שכנים לצומת עם שכן אחד).
3. בכל פעם שמסירים שכן של v, רושמים את v בסדרה.

במילים אחרות, אם v הוסר במהלך בניית הסדרה, אז v הוסר כאשר היה עלה בעץ שנותר באותו שלב, כלומר כאשר דרגתו הייתה 1, ולכן הוסרו $\deg_T(v)-1$ שכנים שלו עד שלב זה. אם, לעומת זאת, v אינו אחד הצמתים שהוסרו במהלך בניית

הסדרה, אז v הוא אחד משני הצמתים שנותרו בשלב האחרון, ולפיכך v הוא עלה בשלב זה, ולכן גם במקרה זה כל שכניו פרט לאחד הוסרו בתהליך.

פורמאלית יותר, נוכל להוכיח את הטענה באינדוקציה על גודל העץ T. העץ הקטן ביותר מכיל שני צמתים המקושרים בקשת. סדרת פרופר המתאימה היא $S=(\ )$. אכן, כל אחד משני הצמתים בעץ, שדרגתו 1, מופיע בסדרה אפס פעמים.

נמשיך כעת באינדוקציה. יהי T עץ עם לפחות 3 צמתים. יהי v העלה הקטן ביותר בעץ ויהי s_1 שכנו. איבר זה הוא האיבר הראשון בסדרת פרופר המתאימה S. יהי T' העץ המתקבל מ-T על ידי הורדת העלה v. סדרת פרופר של T' היא $S'=\left(s_2,\dots,s_{n-2}\right)$. על פי הנחת האינדוקציה לגבי T', כל צומת u ב-T' מופיע ב-S' בדיוק $\deg_{T'}(u)-1$ פעמים. לכן, כל צומת u ב-T' מופיע ב-S (הכוללת את S' בתוספת האיבר s_1) בדיוק $\deg_{T'}(u)-1$ פעמים אם $u\neq s_1$, או $\deg_{T'}(u)$ פעמים אם $u=s_1$.

- אם u הוא צומת ב-T' שאיננו s_1, אז $\deg_{T'}(u)=\deg_T(u)$ משום שדרגת צומת כזה לא משתנה בעקבות הורדת הקשת vs_1. לפיכך, צמתים אלה מופיעים ב-S בדיוק $\deg_T(u)-1$ פעמים, כפי שנטען בטענה.
- אם $u=s_1$ אז $\deg_{T'}(u)=\deg_T(u)-1$ משום שדרגת צומת זה פוחתת ב-1 בעקבות הורדת הקשת vs_1. על כן צומת זה מופיע ב-S בדיוק $\deg_{T'}(u)=\deg_T(u)-1$, כפי שנטען בטענה.
- אם $u=v$ אז הוא איננו מופיע כלל ב-S, כלומר, מספר מופעיו ב-S הוא אכן $\deg_T(u)-1$, מכיוון שדרגת עלה היא 1.

כמסקנה מטענה זו אנו מקבלים שכל עלה של T איננו מופיע ב-S, משום שדרגת עלה היא 1. מצד שני, כל צומת ב-T שאיננו עלה מופיע ב-S, משום שדרגת צומת כזה היא לפחות 2 ולכן $\deg_T(u)-1\geq 1$. מכאן נובע $L\left(T\right)=V\setminus S$. ▲

תשובה 7

א. העץ הוא מסלול המכיל את כל צומתי הגרף בסדר הבא:

$$3-8-1-2-4-5-7-6$$

ב. צומתי העץ מתחלקים בין t צמתים שדרגתם 3 ו-$8-t$ צמתים שהם עלים. סכום הדרגות הוא לפיכך $3t+(8-t)=2t+8$. סכום זה שווה לפעמיים מספר הקשתות בעץ. מכיוון שבעץ בעל 8 צמתים יש 7 קשתות, אנו מסיקים ש-$2t+8=14$ ולכן $t=3$. משאלה 6 נובע כי מספר המופעים בסדרת פרופר של צומת בעץ שווה לדרגת הצומת פחות 1. לפיכך, כל אחד מהצמתים בדרגה 3 יופיע בסדרה בדיוק פעמיים, אבל אף אחד מהעלים לא יופיע בה.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

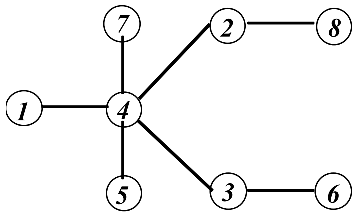
על כן, הסדרה מורכבת משלוש התגיות של הצמתים בדרגה 3 כאשר כל אחת מהן מופיעה פעמיים.

ג. יש $\binom{8}{3}$ אפשרויות לבחור את שלוש התגיות שבסדרה. מספר האפשרויות לסדר אותן בסדרה כך שכל אחת מהן תופיע בדיוק פעמיים הוא $\frac{6!}{2\cdot2\cdot2}=90$. לכן התשובה היא $\binom{8}{3}\cdot 90 = 5040$.

▲

תשובה 8

א. העץ הוא:



ב. עצים אלה הם בעלי 5 עלים בדיוק (העלים הם כל הצמתים שלא מופיעים בסדרה).

▲

פרק 3: מעגלי אוילר ומעגלי המילטון

הגדרה

- **מסלול (מעגל) אוילר** בגרף G הוא מסלול (מעגל) שבו כל קשת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.
- **מסלול (מעגל) המילטון**[1] בגרף G הוא מסלול (מעגל) שבו כל צומת של G מופיע בדיוק פעם אחת.

גרף נקרא אוילרי/המילטוני אם יש בו מעגל אוילר/המילטון.

3.1 מעגלי אוילר

בבעיית הגשרים של קניגסברג שבה דנו בפרק 1, רצינו לבדוק אם יש בגרף המתאים מסלול אוילר. הגענו למסקנה כי אם בגרף יש יותר משני צמתים מדרגה אי-זוגית, אזי אין מסלול כזה, ומכאן הסקנו כי התשובה לשאלה שעליה מבוססת בעיית הגשרים של קניגסברג היא שלילית. עתה נשאל שאלה נוספת: מהם התנאים שמבטיחים כי בגרף יש מסלול או מעגל אוילר? כפי שראינו בפרק 1, תנאי הכרחי לקיום מסלול אוילר הוא שמספר הצמתים מדרגה אי-זוגית יהיה 0 או 2. למעשה, כדי שיהיה בגרף מעגל אוילר, אסור שיהיו צמתים מדרגה אי-זוגית כלל, כלומר כל הצמתים חייבים להיות מדרגה זוגית. לפיכך – זהו תנאי הכרחי לקיומו של מעגל אוילר. אך האם הוא גם מספיק? המשפט הבא מספק תשובה חיובית לשאלה זו, עבור גרפים קשירים (לא בהכרח פשוטים).

משפט 3.1[2]

גרף קשיר G הוא אוילרי אם ורק אם דרגת כל צומת בו היא זוגית.

---

1 המילטון (**Sir William Rowan Hamilton**, 1805-1865) היה פיזיקאי אירי, שעסק גם באסטרונומיה ובמתמטיקה. מחקריו במכניקה ובאופטיקה הובילו אותו להגדרת מושגים ושיטות חדשות במתמטיקה.

2 משפט זה נוסח על ידי אוילר בשנת 1736 ללא הוכחה, כאשר פתר את בעיית הגשרים של קניגסברג. הוכחה פורמאלית פורסמה לראשונה על ידי המתמטיקאי הירהולצר (**Carl Hierholzer**) בשנת 1873.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

הוכחה

הכיוון: G קשיר ואוילרי $\Leftarrow$ דרגת כל צומת ב- G היא זוגית.
למעשה, כבר הוכחנו כיוון זה בפרק 1. ננוע לאורך מעגל אוילר ב- G. כל צומת שנכנסים אליו, גם יוצאים ממנו. מכיוון שהמעגל מכיל את כל הקשתות, ושכל קשת מופיעה במעגל בדיוק פעם אחת, הרי שדרגת כל צומת היא זוגית.

הכיוון: G קשיר ודרגת כל צומת ב- G היא זוגית $\Leftarrow$ G אוילרי.

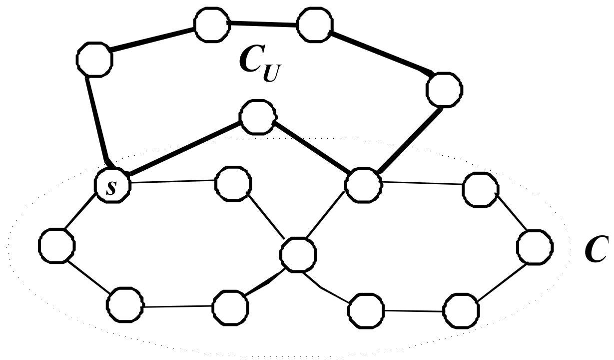
מכיוון שהגרף קשיר, מספר הקשתות בגרף הוא לפחות $n-1$, כאשר n הוא מספר הצמתים. מספר הקשתות לא יכול להיות $n-1$ משום שאז הגרף היה עץ, ובעץ יש לפחות שני עלים שהם צמתים בדרגה 1, שהיא דרגה אי-זוגית. על כן, ההנחות שלנו קובעות שמספר הקשתות בגרף הוא לפחות n.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקשתות. כבסיס האינדוקציה, נראה שאם יש בגרף n קשתות, אז הגרף הוא מעגל. נסמן ב- d_i את דרגת הצומת ה- i. מכיוון שהגרף קשיר, אז $d_i > 0$ לכל i. מכיוון שנתון שהדרגות זוגיות, אז בהכרח $d_i \geq 2$. אבל $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = 2n$. לכן $d_i = 2$ לכל i. מכיוון שהגרף קשיר, דבר זה יכול לקרות רק אם הגרף מורכב ממעגל יחיד, שהוא מעגל אוילר. (טענה זו אנו משאירים כתרגיל בהמשך).

כעת נמשיך ונוכיח את הטענה עבור מספר קשתות גדול יותר. נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, כלומר כי קיים גרף $G=(V,E)$ שהוא קשיר ושדרגת כל צומת בו היא זוגית, אבל הוא אינו אוילרי. מכיוון שאין ב- G צמתים שדרגתם 1, אז G אינו עץ, ולכן יש בו לפחות מעגל אחד. יהי C מעגל (לאו דווקא פשוט) ארוך ביותר ב- G. נוריד את קשתות C מ- G, ונקבל גרף H. (שימו לב, אנו מורידים רק את הקשתות של C אך לא את הצמתים שלו; כלומר, קבוצת הצמתים של H זהה לזו של G.)

דרגת כל צומת ב- H היא זוגית, כי $\deg_H(v) = \deg_G(v) - \deg_C(v)$, ושני הגורמים באגף ימין הם זוגיים (לכל צומת, מספר הקשתות של C הסמוכות לצומת הוא זוגי כיוון ש- C הוא מעגל). יתר על כן, יש ב- H רכיב קשירות U בעל לפחות שני צמתים (כי אחרת H מורכב מצמתים מבודדים ועל כן קשתות C שהורדנו היו כל קשתות הגרף G, מה שאומר ש- C הוא מעגל אוילר ב- G). על כן, U הוא גרף קשיר שדרגת כל צומת בו זוגית. מכיוון שמספר הקשתות ב- U קטן ממש ממספר הקשתות ב- G, חלה עליו הנחת האינדוקציה, ולכן הוא מכיל מעגל אוילר C_U (ראו איור 12).

למעגל זה חייב להיות לפחות צומת אחד משותף עם C, כפי שמוסבר להלן: אם U מכיל את כל הצמתים בגרף המקורי, כך גם מעגל אוילר שלו, C_U, ועל כן ברור שיש ל- C_U ול- C לפחות צומת אחד משותף. אם U אינו מכיל את כל הצמתים של הגרף המקורי, שהיה גרף קשיר, אז הורדת קשתות המעגל C ניתקה את U מיתר הגרף. לפיכך, המעגל C חייב לעבור לפחות דרך אחד מהצמתים ב- U. על כן יש ל- C ול- C_U לפחות צומת אחד משותף, המסומן באיור 12 ב- s. אנו טוענים כי אז האיחוד של C ו- C_U יוצרים מעגל ארוך יותר מ- C, בסתירה למקסימליות של C.



איור 12: המחשה להוכחת משפט 3.1:
קשתות המעגל C מוצגים בקווים דקים, ואילו קשתות המעגל C_U מוצגים בקווים עבים.

אכן, נתחיל לנוע על המעגל C מהצומת s עד אשר נעבור על כל קשתות C (ייתכן שנבקר ב- s מספר פעמים). לאחר מכן, ננוע על המעגל C_U מהצומת s עד אשר נעבור על כל קשתות C_U. קיבלנו מעגל המתחיל ומסתיים ב- s והעובר על כל קשתות האיחוד של C ו- C_U. ■

שאלות

▼ שאלה 1

בפרק 1 הוכחנו שאם גרף קשיר מכיל מסלול אוילר שאיננו מעגל, אז דרגת שניים מצמתיו היא אי-זוגית, ואילו דרגת כל יתר הצמתים שלו היא זוגית. כעת הוכיחו את הכיוון ההפוך: כלומר, אם G הוא גרף קשיר שדרגת שניים מצמתיו היא אי-זוגית ואילו דרגת כל יתר צמתיו היא זוגית, אז הגרף מכיל מסלול אוילר.

▼ שאלה 2

יהי G גרף קשיר שדרגת כל צומת בו היא 2. הוכיחו ש- G הוא מעגל.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

שאלה 3

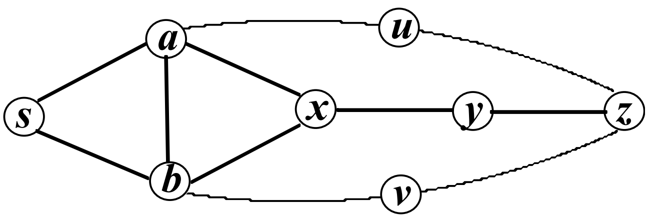
יהי $G=(V,E)$ גרף המכיל בדיוק 4 צמתים $\{u_1,v_1,u_2,v_2\}$ אשר דרגתם אי-זוגית. הראו כי ניתן לחלק את קשתות G לשני מסלולים P_1,P_2 זרים בקשתות, שאיחוד הקשתות שלהם הוא E.

שאלה 4

הגרף שבאיור 13 מייצג מפת רחובות של שכונה בעיר. אורכו של כל רחוב 1 ק"מ. דוור מתחיל ומסיים את מסלולו בצומת s, וצריך לחלק דואר בכל אחד מהרחובות שבמפה.

א. הוכיחו כי הדוור יעבור פעמיים בשני רחובות לפחות.

ב. מהו אורכו של המסלול הקצר ביותר שעליו לעבור? נמקו היטב.



איור 13

שאלה 5

גרף נקרא d **-רגולרי** אם דרגת כל צומת בו היא בדיוק d.

יהי $G=(V,E)$ גרף d-רגולרי, ויהי $\bar{G}$ הגרף המשלים של G.

הוכיחו: אם $|V|$ אי-זוגי, אזי לפחות אחד מהגרפים $G,\bar{G}$ הוא אוילרי.

תשובות

תשובה 1

נוסיף לגרף הנתון קשת המחברת בין שני הצמתים בעלי הדרגה האי-זוגית. קיבלנו גרף קשיר (לאו דווקא פשוט), שדרגת כל צמתיו זוגית. על פי המשפט שהוכחנו, גרף כזה מכיל מעגל אוילר. אם נסיר מהמעגל הזה את הקשת שהוספנו, נקבל מסלול אוילר בגרף המקורי, המתחיל באחד משני הצמתים בעלי הדרגה האי-זוגית ומסתיים בצומת האחר.

תשובה 2

נסמן ב- n את מספר הצמתים בגרף. נבחר את אחת מקשתות הגרף ונסמן את שני הצמתים שהיא מחברת ב- v_1,v_2. מכיוון שדרגתו של v_2 היא 2, הרי הוא מחובר לצומת

נוסף, השונה מהצומת v_1. נסמן צומת זה ב- v_3. מכיוון שדרגתו של v_3 היא 2, הרי הוא מחובר לצומת נוסף, השונה מהצומת v_2. נסמן צומת זה ב- v_4. נמשיך בתהליך הסימון הזה עד הפעם הראשונה שבה נגיע לצומת שכבר סומן בעבר. נקבל כך סדרת צמתים $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ כאשר k הצמתים הראשונים בסדרה שונים זה מזה, ואילו v_{k+1} שווה לאחד מ- $k-2$ הצמתים $v_1, v_2, \ldots, v_{k-2}$.

ראשית, אנו טוענים ש- v_{k+1} חייב להיות שווה ל- v_1; זאת משום שאם v_{k+1} שווה לצומת v_i עבור $2 \le i \le k-2$, אז נקבל שדרגת v_i היא 3 (שכן v_i מחובר ל- v_{i-1} וגם ל- v_{i+1} וגם ל- v_k). לכן קיבלנו כאן מעגל $v_1 - v_2 - \cdots - v_k - v_1$. כעת אנו טוענים ש- $k = n$. אכן, אם $k < n$ אז קיימים צמתים בגרף שאינם חלק מהמעגל הזה. דבר זה סותר את קשירות הגרף מכיוון שדרגת כל צומת במעגל היא 2 ועל כן לא ייתכן שיש קשת נוספת המחברת צומת כזה לצומת מחוץ למעגל, משום שאז דרגת הצומת הזה תהיה חייבת להיות לפחות 3. על כן, קיבלנו מעגל העובר דרך כל הצמתים בגרף שגם מכיל את כל קשתות הגרף. על כן הגרף כולו הוא מעגל. ▲

תשובה 3

נוסיף ל- G קשתות חדשות u_1v_1, u_2v_2. לפיכך, דרגת כל צומת תהפוך לזוגית ומתקבל גרף שיש בו מעגל אוילר. אם נוריד את הקשתות שהוספנו, המעגל יתפרק לשני מסלולים זרים בקשתות, כנדרש. ▲

תשובה 4

א. הבעיה שקולה לבעיה הבאה: מהו מספר הקשתות המינימלי שיש להוסיף לגרף כדי שיתקבל גרף אוילרי, כאשר מותר להוסיף רק קשתות מקבילות לאלה הקיימות; כל קשת מקבילה לקשת קיימת שנוסיף מסמלת מעבר נוסף של הדוור באותו הרחוב. בגרף יש רק שני צמתים מדרגה אי-זוגית, x, z. לכן יש בגרף מסלול אוילר, אך אין בו מעגל אוילר, כפי שנדרש מהאילוצים של הדוור. על מנת ליצור מעגל אוילר, יש להוסיף קשתות כך שדרגת x, z תהפוך לזוגית. הקשתות החדשות צריכות להיות מקבילות לקשתות הקיימות. ברור שצריך להוסיף לפחות שתי קשתות, כי x, z אינם שכנים. עם זאת, הוספת הקשתות xy, yz גורמת לכל הדרגות להיות זוגיות. לפיכך יש להוסיף שתי קשתות. אם כן, המסלול הקצר ביותר שיעבור הדוור יוביל אותו דרך כל רחובות השכונה, ויהיה עליו לעבור פעמיים דרך הרחובות xy, yz.

ב. בגרף יש 11 קשתות, ואם נוסיף עוד שתי קשתות xy, yz כדי לקבל גרף אוילרי, יהיו בו 13 קשתות (ק״מ). ▲

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

תשובה 5

נוכיח כי אם G אינו אוילרי, אזי $\bar{G}$ הוא אוילרי.

נזכיר כי בכל גרף, מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא תמיד מספר זוגי. לכן, אם $|V|$ אי-זוגי, אזי d חייב להיות זוגי. כמו כן, G לא יכול להיות קשיר (כי אז הוא היה אוילרי), ולכן $\bar{G}$ הוא קשיר, על פי שאלה 4 בפרק 1. עתה, הדרגה של כל צומת ב- $\bar{G}$ היא $\bar{d}=|V|-1-d$, שהוא מספר זוגי. לסיכום, $\bar{G}$ הוא גרף קשיר שדרגת כל צומת בו היא זוגית, ולכן הוא גרף אוילרי. ▲

3.2 מעגלי המילטון

כפי שראינו, קיים אפיון פשוט המאפשר לקבוע בקלות אם גרף הוא אוילרי, אך לא ידוע על אפיון כזה לגבי גרפים המילטוניים. למעשה, ישנן סיבות טובות להאמין שאפיון כזה אינו קיים. עם זאת, יש כמה משפטים הנותנים תנאי פשוט, שהוא תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לקיום מעגל המילטוני; בסעיף זה נוכיח אחד מהתנאים האלה.

משפט 3.2 (משפט אור[1])

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט על $|V|=n\geq 3$ צמתים כך שלכל זוג צמתים u,v שאינם שכנים מתקיים $\deg_G(u)+\deg_G(v)\geq n$. אז G הוא המילטוני.

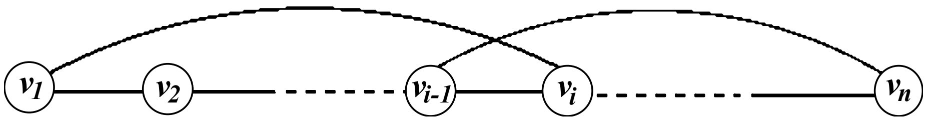
הוכחה

נניח בשלילה כי המשפט אינו נכון. כלומר, קיים מספר טבעי n וקיים גרף בעל n צמתים המפר את המשפט (כלומר, הוא מקיים את התנאי במשפט אך הוא אינו המילטוני). נסתכל כעת על קבוצת כל הגרפים על n צמתים המפרים את המשפט. לפי הנחת השלילה שלנו, זוהי קבוצה לא ריקה (שכן קיים בה לפחות הגרף שהנחת השלילה הניחה את קיומו), ועל כן נוכל לבחור מתוכה את הגרף בעל המספר המקסימלי של קשתות. נסמן גרף זה ב- G. ברור שאם נוסיף קשת כלשהי ל- G, נקבל גרף המילטוני שכן אחרת היינו מקבלים סתירה להנחתנו ש- G הוא מקסימלי מבחינת מספר הקשתות שבו.

נתבונן בשני צמתים s,t בגרף G שלא מחוברים על ידי קשת (אם אין כאלה, אזי G הוא גרף מלא, ולכן – המילטוני). מהמקסימליות של G, יש מסלול המילטון $P=(s=v_1,v_2,\ldots v_n=t)$ בין s ל- t ב- G (מכיוון שמתוך המקסימליות של G נובע שהוספת הקשת st ל- G יוצרת גרף המילטוני). כיוון שמתקיים

1 אור (Øystein Ore, 1899-1968) היה מתמטיקאי נורווגי.

$\deg_G(s)+\deg_G(t)\ge n$, אזי ניתן להראות שקיים $2\le i\le n-1$ כך שמתקיים: $sv_i\in E$ וגם $v_{i-1}t\in E$; ראו איור 14 (אנו דוחים את הוכחת הטענה הזו לסוף).



איור 14

זה גורר סתירה, כי אז G יכיל מעגל המילטוני המורכב מהקשתות של $P\cup\{sv_i,tv_{i-1}\}\setminus\{v_{i-1}v_i\}$, כמודגם באיור 14.

נותר להוכיח את הטענה שהעלינו לעיל שקיים $2\le i\le n-1$ כך שמתקיים: $sv_i\in E$ וגם $v_{i-1}t\in E$. נסמן ב- $\Gamma(s)$ את אוסף השכנים של s וב- $\Gamma(t)$ את אוסף השכנים של t. מכיוון ש- s ו- t אינם שכנים, אז $\Gamma(s),\Gamma(t)\subseteq\{v_2,\ldots,v_{n-1}\}$. נניח ש- $\Gamma(s)=\{v_{i_1},\ldots,v_{i_k}\}$, כאשר $i_1<\cdots<i_k$, ונגדיר $\Gamma^-(s)=\{v_{i_2-1},\ldots,v_{i_k-1}\}$. כלומר, $\Gamma^-(s)$ מכיל את כל הצמתים שיש להם אינדקס הקטן ב-1 מאיזשהו צומת הנמצא ב- $\Gamma(s)$ שאיננו הצומת הראשון ב- $\Gamma(s)$ (שימו לב שב- $\Gamma(s)$ יש k צמתים, ואילו ב- $\Gamma^-(s)$ יש רק $k-1$ צמתים). ברצוננו להראות ש- $\Gamma(t)\cap\Gamma^-(s)\neq\varnothing$; כלומר, שקיים צומת שכן ל- t שהוא בעל אינדקס הנמוך ב-1 מצומת השכן ל- s. נניח בשלילה ש- $\Gamma(t)\cap\Gamma^-(s)=\varnothing$. על כן, $\Gamma(t)$ מוכלת כולה בקבוצה $\{v_2,\ldots,v_{n-1}\}\setminus\Gamma^-(s)$. זוהי קבוצה שגודלה $(n-2)-(k-1)=n-k-1$; זאת משום שכל איברי $\Gamma^-(s)$ נמצאים בתוך $\{v_2,\ldots,v_{n-2}\}$ (וזו הסיבה שלא כללנו ב- $\Gamma^-(s)$ את הצומת v_{i_1-1} שעלול היה להיות שווה ל- v_1). על כן $|\Gamma(t)|\le n-k-1$. אבל אז $|\Gamma(s)|+|\Gamma(t)|\le k+n-k-1=n-1$, בסתירה להנחתנו ש-

$$|\Gamma(s)|+|\Gamma(t)|=\deg_G(s)+\deg_G(t)\ge n \qquad \blacksquare$$

נשים לב שאי-אפשר לשפר את התנאי במשפט אור בדבר החסם התחתון על סכום הדרגות של צמתים שאינם סמוכים. בפרט, התנאי $\deg_G(u)+\deg_G(v)\ge n-1$ אינו מספיק כדי להבטיח את קיומו של מעגל המילטוני. למשל, ניקח שני עותקים של הגרף המלא על $\frac{n+1}{2}$ צמתים, נבחר בכל אחד מהם צומת ונמזג את שני הצמתים שנבחרו לצומת אחד. בגרף המתקבל, דרגת כל צומת היא לפחות $\frac{n-1}{2}$, ועל כן $\deg_G(u)+\deg_G(v)\ge n-1$ לכל שני צמתים; אבל הגרף הזה אינו המילטוני.

מקרה פרטי של משפט אור הוא המשפט הידוע הבא:

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

משפט 3.3 (משפט דירק[1])

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט על $|V|=n\geq 3$ צמתים. אם הדרגה של כל צומת היא לפחות $n/2$, אז G הוא המילטוני.

הוכחה

אם דרגת כל צומת היא לפחות $n/2$, אז G מקיים את תנאי הדרגות במשפט אור, ועל כן הטענה נובעת ממשפט אור. ■

שאלות

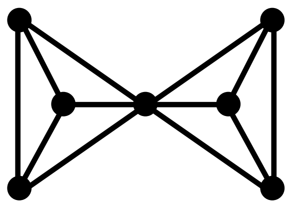
▼ שאלה 6

יהי G גרף פשוט על $n\geq 3$ צמתים כך שדרגת כל צומת בו היא לפחות $n/2-1$.

א. הוכיחו כי אם n אי-זוגי, אזי G מכיל מסלול המילטוני.

ב. הביאו דוגמה המראה כי עבור n זוגי הטענה בסעיף א' איננה נכונה.

ג. האם הגרף באיור שלהלן מכיל מסלול המילטוני?



▼ שאלה 7

הוכיחו כי הגרף הדו-צדדי המלא $K_{p,q}$ (כלומר, בצד אחד p צמתים, ובשני– q, וכל $p\cdot q$ הקשתות קיימות) מכיל מעגל המילטוני אם ורק אם $p,q\geq 2$ ו- $p=q$.

תשובות

תשובה 6

א. יהי H הגרף המתקבל מ- G על ידי הוספת צומת חדש, s, וחיבורו לכל הצמתים. ב- H יש $n+1$ צמתים. דרגת כל צומת ב- H היא לפחות $n/2$, ולכן לפחות $\lceil n/2\rceil=(n+1)/2$, אם n אי-זוגי. לכן, על פי משפט דירק יש ב- H מעגל המילטוני C. לפיכך, $C\setminus\{s\}$ מהווה מסלול המילטוני ב- G.

1 דירק (Gabriel Andrew Dirac, 1925-1984) היה מתמטיקאי הונגרי שעסק במחקריו העיקריים בתורת הגרפים.

ב. בגרף שהוא איחוד של שני קליקים זרים על $n/2$ צמתים כל אחד, דרגת כל צומת היא בדיוק $n/2-1$, אבל אין בו מסלול המילטוני.

ג. כן (על פי חלק א' לעיל). ▲

תשובה 7

כל מעגל פשוט בגרף דו-צדדי, ובפרט מעגל המילטוני, חייב להכיל אותו מספר צמתים מכל צד, משום שכל קשת בגרף עוברת מצד לצד. אבל מעגל המילטוני מכיל את כל הצמתים, ולכן אם $K_{p,q}$ מכיל מעגל המילטוני, אזי $p=q$.

עתה נראה כי אם $p=q$, אזי $K_{p,q}$ המילטוני. יהיו

$$A=\{a_1,\ldots,a_p\},B=\{b_1,\ldots,b_p\}$$

צדי הגרף. אז $a_1-b_1-a_2-b_2-\cdots-a_p-b_p-a_1$ הוא מעגל המילטוני, כנדרש. ▲

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

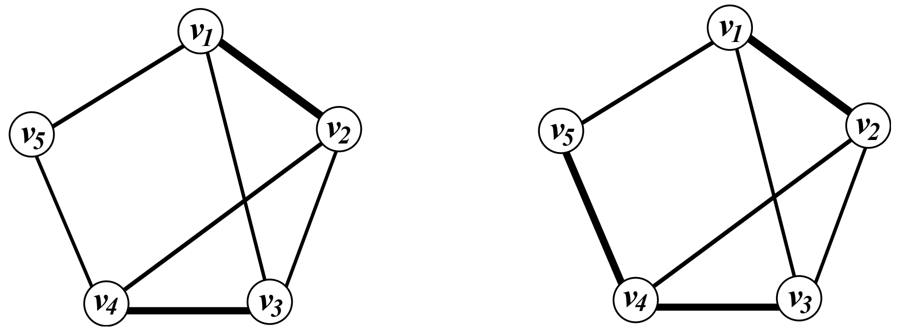
פרק 4:
זיווגים, כיסויים, קליקים וקבוצות בלתי תלויות

4.1 זיווגים וכיסויים בקשתות

בבעיות זיווג נתון אוסף זוגות של איברים מתוך קבוצה כלשהי, ואנו מחפשים תת-אוסף גדול ככל האפשר של זוגות, כך שאף איבר אינו מופיע בשני זוגות שונים בתת-אוסף. נמחיש זאת על ידי סיפור קצר: במשרד שידוכים רשומות קבוצה A של גברים וקבוצה B של נשים, וישנה רשימה של זוגות (גבר ואישה) המוכנים להשתדך זה לזה. אפשר לשדך כל גבר לאישה אחת לכל היותר, וכל אישה לגבר אחד לכל היותר. מטרת המשרד היא, כמובן, לארגן מספר מקסימלי של שידוכים. ניתן לתרגם את הבעיה לבעיה בתורת הגרפים, שנקראת **בעיית זיווג המקסימום בגרף דו-צדדי**. בעיות זיווג מופיעות בבעיות השמה רבות, למשל אם רוצים להתאים מועמדים למשרות.

הגדרה 4.1

זיווג (matching) בגרף $G=(V,E)$ הוא קבוצת קשתות M שאין בה שתי קשתות הסמוכות לאותו הצומת (ראו איור 15). כלומר, אם $G'=(V,M)$ הוא הצמצום של הגרף המקורי לקבוצת קשתות זו, אז $\deg_{G'}(v)\le 1$ לכל $v\in V$.



איור 15:
$\{v_1v_2, v_3v_4\}$ הוא זיווג (באיור שמשמאל בקווים מודגשים),
$\{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5\}$ איננו זיווג (באיור שמימין בקווים מודגשים), כי v_4 מופיע בשתי קשתות.

הגדרה 4.2

נאמר כי צומת v **מכוסה** על ידי קבוצת קשתות F (לא בהכרח זיווג), אם יש קשת ב- F שסמוכה ל-v. אם זיווג M מכסה צומת v, אז גם נאמר כי הצומת v **מזווג** על ידי M.

הגדרה 4.3

זיווג M הוא **זיווג מקסימום (maximum matching)** בגרף, אם אין זיווג גדול יותר בגרף, כלומר אם $|M|\ge|M'|$ לכל זיווג M' בגרף. זיווג M הוא **זיווג מושלם (perfect matching)**, אם הוא מזווג את כל הצמתים בגרף, כלומר אם $|M|=|V|/2$.

בבירור, כל זיווג מושלם הוא זיווג מקסימום, אבל ההיפך אינו נכון. למשל, $M=\{v_1v_2,v_3v_4\}$ הוא זיווג מקסימום בגרף שבאיור 15, אבל הוא אינו זיווג מושלם.

שאלה 1

לאילו ערכים של n יש למעגל בעל n צמתים זיווג מושלם?

תשובה 1

ראשית, ברור שאם n אי-זוגי, לא ייתכן זיווג מושלם (זיווג מושלם קיים רק בגרפים שבהם מספר הצמתים זוגי). כעת נראה שאם n זוגי, אז קיים זיווג מושלם. אכן, בהינתן מעגל זוגי, ניתן לחלק את קשתותיו לשתי קבוצות, כך שבין כל שתי קשתות של קבוצה אחת תהיה קשת מהקבוצה השנייה. כל אחת מקבוצות אלה היא זיווג המכסה את כל צומתי המעגל, כלומר זיווג מושלם. ובכך הוכחנו למעשה כי במעגל בעל אורך זוגי יש שני זיווגים מושלמים שונים.

הגדרה 4.4

יהי M זיווג ו- P מסלול פשוט בגרף G.

P הוא **מסלול M-מתחלף**, אם מבין כל שתי קשתות סמוכות ב- P בדיוק קשת אחת היא מ- M. (שימו לב שעל פי הגדרה זו, כל מסלול באורך 1 הוא מסלול M-מתחלף.)

מסלול M-מתחלף נקרא **מסלול שיפור ביחס ל- M** אם שני צומתי הקצה במסלול אינם מזווגים על ידי M.

זיווג שיש לו מסלול שיפור איננו זיווג מקסימום, כפי שנובע מהטענה הבאה:

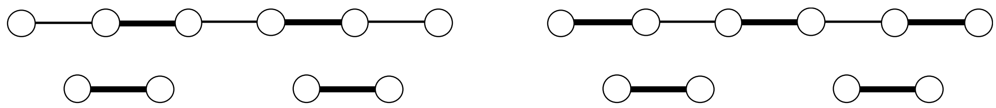
האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

טענה 4.5

אם P היא קבוצת הקשתות של מסלול שיפור ביחס לזיווג M, אז קבוצת הקשתות $M\Delta P=(M\setminus P)\cup(P\setminus M)=(M\cup P)\setminus(M\cap P)$ היא זיווג שמכיל קשת אחת יותר מ- M. בפרט, M אינו זיווג מקסימום. ■

הטענה פשוטה מאוד להוכחה ועל כן נסתפק באיור 16 להמחשתה. משמאל מוצג הזיווג M המזווג 8 צמתים על ידי 4 קשתות המודגשות בקווים עבים, ומסלול שיפור P ביחס ל- M שאורכו 5. שימו לב שבמסלול P כל זוג קשתות סמוכות מכיל בדיוק קשת אחת מ- M, אך קצות המסלול אינם מזווגים על ידי M. מימין מוצג הזיווג $M\Delta P$. זיווג זה כבר מזווג 10 צמתים, ולכן הוא מהווה שיפור של M. ובאופן כללי, הזיווג $M\Delta P$ מזווג את כל הצמתים שמזווג M, ובנוסף – גם את צומתי הקצה של המסלול P שלא זווגו על ידי M.



איור 16

הטענה לעיל מספקת תנאי הכרחי לכך ש- M יהיה זיווג מקסימום: אם M הוא זיווג מקסימום בגרף, אז לא ייתכן שיש בגרף מסלול שיפור ביחס ל- M. אך האם זהו תנאי מספיק? המשפט הבא מספק תשובה חיובית לשאלה זו.

משפט 4.6 (משפט ברג'[1])

M הוא זיווג מקסימום אם ורק אם אין מסלול שיפור ביחס ל- M.

הוכחה

כיוון אחד נתון בטענה 4.5 לעיל: M זיווג מקסימום $\Rightarrow$ אין מסלול שיפור ביחס ל- M.

נוכיח את הכיוון השני: אין מסלול שיפור ביחס ל- M $\Leftarrow$ M זיווג מקסימום. לצורך כך נראה שאם M אינו זיווג מקסימום, אז יש לו מסלול שיפור.

יהי אפוא M זיווג שאינו זיווג מקסימום ויהי M^* זיווג כלשהו בעל יותר קשתות מאשר ב- M, כלומר M^* הוא זיווג המקיים $|M^*|>|M|$. נתבונן בגרף H המוגדר על

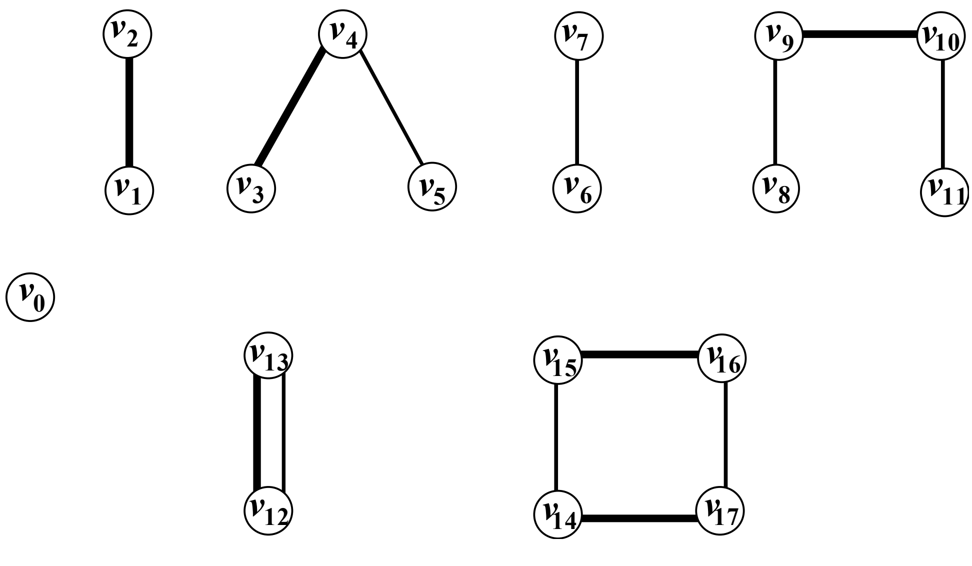
1 ברג' (**Claude Berge**, 1926-2002) היה מתמטיקאי צרפתי, ממייסדי הקומבינטוריקה ותורת הגרפים; הוא התפרסם, בין היתר, הודות למשפט שאנו מוכיחים כאן.

V שקבוצת קשתותיו היא $M \cup M^*$, כאשר קשת ב- $M \cap M^*$ תוכפל, כלומר תהפוך לשתי קשתות מקבילות. (איור 17 מדגים את H על גרף בעל 18 צמתים כאשר הקשתות של M מצוינות בקו עבה, ואלו של M^* מצוינות בקו דק. שימו לב כי H אינו בהכרח גרף פשוט.) כיוון שקבוצת הקשתות של הגרף H היא איחוד של שני זיווגים, דרגת כל צומת בו היא לכל היותר 2. נראה כי מכך נובע שכל רכיב קשירות של H הוא מעגל או מסלול פשוט (מסלול גם יכול להיות באורך 0, כלומר צומת בודד).

יהי $H' = (V', E')$ התת-גרף של H המושרה על ידי רכיב קשירות V'. אם H' מכיל זוג קשתות מקבילות, אז קל להראות כי H' הוא בהכרח מעגל באורך 2 המורכב מקשתות אלה. אם כך נניח ש- H' הוא גרף פשוט. יהי P המסלול הפשוט (סגור או לא) הארוך ביותר ב- H'. אנו טוענים כי $H' = P$. אחרת, כיוון ש- H' קשיר, יש ב- H' קשת e שאינה ב- P אבל היא סמוכה לאיזשהו צומת של P. הקשת e אינה יכולה להיות סמוכה לצומת שדרגתו ב- P היא 2, כי אז הדרגה של צומת זה ב- H' היא לפחות 3. מכאן נובע כי עם הוספת e ל- P נקבל מסלול (סגור או לא) ארוך יותר מ- P, בסתירה למקסימליות של P. לכן כל רכיב קשירות של H הוא מעגל או מסלול פשוט.

ברכיבים שהם מעגלים, כל שתי קשתות סמוכות חייבות להיות האחת מ- M והאחרת מ- M^*. על כן, ברכיבים כאלה יש מספר זהה של קשתות מ- M ומ- M^*. איור 17 מדגים שני רכיבים כאלה - $\{v_{12}, v_{13}\}$ ו- $\{v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$.

גם ברכיבים שהם מסלולים, כל שתי קשתות סמוכות חייבות להיות האחת מ- M והאחרת מ- M^*. אך כאן ייתכן שההפרש בין מספר הקשתות מ- M ומ- M^* יהיה 0, 1 או -1. למשל, במסלולים v_0 ו- $v_3v_4v_5$ באיור 17 יש מספר זהה של קשתות משני הזיווגים. אך במסלול v_1v_2 יש קשת אחת יותר מאשר ב- M ואילו במסלולים v_6v_7 ו- $v_8v_9v_{10}v_{11}$ יש קשת אחת יותר מאשר ב- M^*.



איור 17: המחשה לגרף H בהוכחת משפט ברג'.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

מכיוון ש- $|M^*|>|M|$, אז H חייב להכיל לפחות מסלול אחד שבו יש יותר קשתות של M^* מאשר קשתות של M. מסלול כזה הוא מסלול שיפור ביחס ל- M, שכן במסלול זה הקשתות מתחלפות בין M ל- M^* ושתי הקשתות החיצוניות שייכות ל- M^*. לפיכך, אם M אינו זיווג מקסימום, אז יש לו מסלול שיפור. ■

הערה

ישנו גם אלגוריתם למציאת זיווג מקסימום שמסתמך על משפט ברג', אם כי מציאת מסלול שיפור בגרף כללי בזמן סביר אינה משימה קלה.

סימון

נזכיר כי בהינתן תת-קבוצה X של צמתים בגרף $G=(V,E)$, **קבוצת השכנים של** X ב- G מורכבת מהצמתים ב- $V\setminus X$ שמחוברים על ידי קשת לאיזשהו צומת ב- X. נסמן את קבוצת השכנים של X ב- $\Gamma_G(X)$, כלומר,

$$\Gamma_G(X)=\{v\in V\setminus X : \exists x\in X \text{ such that } xv\in E\}$$

נתעניין בשאלה הבאה. בהינתן גרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$, איך נוכל לקבוע אם קיים זיווג המזווג את כל צומתי A? כדי לענות על שאלה זו, אנו זקוקים לאפיון פשוט ("מסמך אישור"), שיוכל לשכנע אותנו בקיומו של זיווג כזה. ובכן, זיווג המזווג את כל צומתי A הוא "מסמך" פשוט המאשר כי ניתן לזווג את כל צומתי A. אבל כיצד נוכל להשתכנע כי זיווג כזה אינו קיים? ובכן, קל להשתכנע כי תנאי הכרחי לכך שיהיה זיווג כזה הוא כי לכל תת-קבוצה X של A, מספר השכנים של X בגרף הוא לפחות כמספר הצמתים ב- X, כלומר $|\Gamma_G(X)|\ge|X|$. במילים אחרות, אם קיימת $X\subseteq A$ כך שמתקיים $|\Gamma_G(X)|<|X|$, אזי נוכל לקבוע בוודאות כי אין בגרף זיווג המזווג את כל צומתי A. זהו תנאי מספיק לאי-קיומו של זיווג המזווג את כל צומתי A, אבל האם הוא גם הכרחי? התשובה חיובית, כפי שטוען המשפט הבא.

משפט 4.7 (משפט הול[1])

בגרף דו-צדדי $G=(A\cup B,E)$ יש זיווג המזווג את כל צומתי A אם ורק אם לכל $X\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma_G(X)|\ge|X|$.

הוכחה

הכיוון שלפיו אם יש ב- G זיווג המכסה את כל צומתי A, אז $|\Gamma_G(X)|\ge|X|$ לכל $X\subseteq A$ הוא קל, כיוון שאם M הוא זיווג המכסה את כל צומתי A, אזי $\Gamma_G(X)$ מכיל את "בני הזוג" של כל אחד מצומתי X, לכל $X\subseteq A$.

1 הול (Philip Hall, 1904-1982) היה מתמטיקאי בריטי. המשפט הזה נקרא לפעמים גם "משפט החתונה של הול".

כעת נוכיח את הכיוון ההפוך. נניח כי $|\Gamma_G(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq A$, ונוכיח שיש ב-G זיווג המכסה את כל צומתי A. ההוכחה היא באינדוקציה על $|A|$.
אם $|A|=1$ הטענה ברורה. לכן נניח כי $|A| \geq 2$, ונבחין בין שני מקרים.

מקרה 1

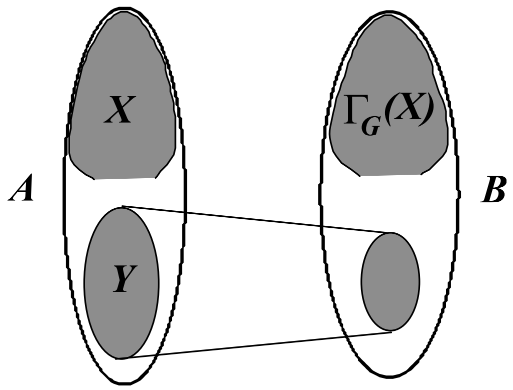
לכל $\emptyset \neq X \subset A$ מתקיים $|\Gamma_G(X)| > |X|$, כלומר $|\Gamma_G(X)| \geq |X|+1$.
נבחר קשת כלשהי ab, כאשר $a \in A$, ונוריד את הצמתים a,b מהגרף. נקבל גרף $H = G \setminus \{a,b\}$ שבו לכל $X \subseteq A \setminus \{a\}$ מתקיים:

$$|\Gamma_H(X)| \geq |\Gamma_G(X) \setminus \{b\}| \geq |\Gamma_G(X)| - 1 \geq |X|$$

על פי הנחת האינדוקציה, יש ב-H זיווג המזווג את כל צומתי $A \setminus \{a\}$. נוסיף לזיווג זה את הקשת ab ונקבל זיווג ב-G המזווג את כל צומתי A.

מקרה 2

קיימת תת-קבוצה $\emptyset \neq X \subset A$ כך ש-$|\Gamma_G(X)| = |X|$.
על פי הנחת האינדוקציה, יש זיווג מושלם המזווג את X עם $\Gamma_G(X)$ (ראו איור 18).



איור 18

נתבונן בגרף $H = G \setminus (X \cup \Gamma_G(X))$ המתקבל לאחר הורדת $X \cup \Gamma_G(X)$ מ-G.
אנו טוענים כי לכל $Y \subseteq A \setminus X$, מספר השכנים של Y ב-$B \setminus \Gamma_G(X)$ הוא לפחות $|Y|$, כלומר כי $|\Gamma_H(Y)| \geq |Y|$. אחרת, אם $|\Gamma_H(Y)| < |Y|$ עבור $Y \subseteq A \setminus X$ אז

$$|\Gamma_G(X \cup Y)| = |\Gamma_G(X) \cup (\Gamma_G(Y) \setminus \Gamma_G(X))| = |\Gamma_G(X) \cup \Gamma_H(Y)| =$$
$$= |\Gamma_G(X)| + |\Gamma_H(Y)| < |X| + |Y|$$

כלומר, לקבוצה $X \cup Y$ (שהיא תת-קבוצה של A) יש ב-G פחות מ-$|X|+|Y|$ שכנים, בסתירה להנחה.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

לכן, על פי הנחת האינדוקציה, בגרף H יש זיווג המזווג את כל צומתי $A \setminus X$. זיווג זה, יחד עם הזיווג שמזווג את X עם $\Gamma_G(X)$, הוא זיווג בגרף G המזווג את כל צומתי A. ■

ממשפט הול נקבל באופן מיידי את המסקנה שלהלן:

מסקנה 4.8

בגרף דו-צדדי $G=(A \cup B, E)$ יש זיווג מושלם אם ורק אם $|A|=|B|$ וגם לכל $A \supseteq X$ מתקיים $|X| \le |\Gamma_G(X)|$. ■

הגדרה 4.9

כיסוי בקשתות (edge-cover) הוא קבוצת קשתות F המכסה את כל צומתי הגרף.

למשל, $\{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5\}$ הוא כיסוי בקשתות בגרף שבאיור 15.

סימון

$\nu(G)$ = הגודל המקסימלי של זיווג ב-G (כלומר, הגודל של זיווג מקסימום ב-G);

$\rho(G)$ = הגודל המינימלי של כיסוי בקשתות ב-G.

משפט 4.10

לכל גרף $G=(V,E)$ ללא צמתים מבודדים מתקיים: $\rho(G)=|V|-\nu(G)$.

הוכחה

תחילה נוכיח כי $\rho(G) \le |V|-\nu(G)$.

יהי M זיווג מקסימום ב-G. אז $|M|=\nu(G)$ ומספר הצמתים שאינם מכוסים על ידי M הוא:

$$|V|-2|M|=|V|-2\nu(G)$$

נכסה כל צומת שאינו מכוסה על ידי M בקשת כלשהי הסמוכה אליו. נקבל כיסוי בקשתות F שגודלו:

$$|F| \le \nu(G)+(|V|-2\nu(G))=|V|-\nu(G)$$

כלומר, יש בגרף כיסוי בקשתות F בגודל $|F| \le |V|-\nu(G)$ ולכן:

$$\rho(G) \le |F| \le |V|-\nu(G)$$

עתה נוכיח כי $\rho(G) \geq |V| - \nu(G)$.

יהי F כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי, ויהי M זיווג מקסימום בגרף (V,F). כלומר, M הוא אוסף מקסימלי של קשתות מתוך F שאינן נוגעות זו בזו. נסמן ב- A את קבוצת הצמתים שאינם מזווגים על ידי M. אם כן $|A| = |V| - 2|M|$. ברור שכל אחד מן הצמתים ב- A מכוסה ב- F על ידי קשת המחברת אותו לאחד הצמתים המכוסים על ידי M (לא ייתכן ש- F מכיל קשת המחברת בין שני צמתים ב- A, משום שאז היה אפשר להוסיף קשת כזו ל- M וכך להגדיל אותו, בסתירה להנחה שהוא זיווג מקסימום בתוך F). על כן,

$$\rho(G) = |F| \geq |M| + (|V| - 2|M|) = |V| - |M| \geq |V| - \nu(G)$$

האי-שוויון האחרון נובע מכך שגודלו של M קטן או שווה לגודל זיווג המקסימום ב- G. ■

מסקנה 4.11

יהי M זיווג מקסימום. נכסה כל צומת שאינו מכוסה על ידי M על ידי קשת כלשהי הסמוכה אליו, ותהי I קבוצת הקשתות המתקבלת. אזי $M \cup I$ הוא כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי. יתר על כן, בדרך זו ניתן לקבל כל כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי.

שאלות

▼ שאלה 2

גרף הוא d-רגולרי אם דרגת כל צומת בו היא בדיוק d.

א. הוכיחו כי בכל גרף פשוט דו-צדדי d-רגולרי, $d \geq 1$, יש זיווג מושלם.

ב. תנו דוגמה לכך שהטענה בסעיף א' אינה נכונה עבור גרפים שאינם דו-צדדיים.

▼ שאלה 3

יהי F כיסוי בקשתות מינימלי בגרף $G = (V,E)$.

א. הראו כי בגרף (V,F) אין מסלולים באורך 3, ובפרט כי (V,F) הוא יער.

ב. הראו כי מספר רכיבי הקשירות בגרף (V,F) הוא בדיוק $\nu(G)$.

▼ שאלה 4

זיווג בגרף G הוא **מקסימלי להכלה** אם אין זיווג אחר בגרף שמכיל אותו.

יהי M זיווג מקסימלי להכלה בגרף G, ויהי M^* זיווג מקסימום ב- G.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

א. הוכיחו כי $|M^*| \le 2|M|$.
ב. תנו דוגמה המראה כי האי-שוויון ב-(א) הוא הדוק (כלומר, תנו דוגמה שעבורה מתקיים $|M^*| = 2|M|$).

תשובות

תשובה 2

א. תחילה, נשים לב כי

$$|E| = \sum_{v\in A} \deg_G(v) = d\cdot|A|$$

כיוון שלכל קשת יש בדיוק קצה אחד ב- A. מאותה הסיבה $|E| = d\cdot|B|$. מכאן נקבל $d|A| = |E| = d|B|$, ולכן $|A| = |B|$. עתה, נוכיח כי ב- G יש זיווג המזווג את כל צומתי A ; זיווג כזה בהכרח מושלם, כי הגרף דו-צדדי ו- $|A| = |B|$.
כדי להוכיח כי ב- G יש זיווג המזווג את כל צומתי A, נשתמש במשפט הול. כלומר, נוכיח כי $|\Gamma_G(X)| \ge |X|$ לכל $X \subseteq A$. תהי $X \subseteq A$, ונתבונן בתת-גרף H של G המושרה על ידי $X \cup \Gamma_G(X)$. H הוא דו-צדדי ומתקיים: $\deg_H(x) = d$ לכל $x \in X$, ולכן

$$|E(H)| = d\cdot|X|$$

עם זאת, $\deg_H(y) \le d$ לכל $y \in \Gamma_G(X)$, ולכן

$$|E(H)| = \sum_{y\in\Gamma_G(X)} \deg_H(y) \le d\cdot|\Gamma_G(X)|$$

מכאן אנו מסיקים ש- $|X| \le |\Gamma_G(X)|$, כנדרש.

ב. נתבונן בגרף K_3 שהוא הגרף המלא על 3 צמתים. K_3 הוא 2-רגולרי, אבל אין בו זיווג מושלם, כיוון שמספר הצמתים בו הוא מספר אי-זוגי. ▲

תשובה 3

א. נניח בשלילה ש-(V,F) מכיל מסלול באורך 3. אזי אם נוריד את הקשת האמצעית של מסלול כזה, יישאר עדיין F כיסוי בקשתות. אך זה סותר את ההנחה ש- F הוא כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי. כיוון שהגרף (V,F) לא מכיל מסלולים באורך 3, אז הוא גם לא מכיל מעגלים (כי בגרף פשוט כל מעגל מכיל מסלול באורך 3), ולכן (V,F) הוא יער.

ב. יהי k מספר רכיבי הקשירות בגרף (V,F). מסעיף א' נובע $|F| = |V| - k$, כי (V,F) הוא יער. עם זאת, אנו יודעים כי אם F הוא כיסוי בקשתות בעל גודל מינימלי, אז $|F| = |V| - \nu(G)$. מכאן נובע ש- $k = \nu(G)$. ▲

תשובה 4

א. נתבונן בגרף H המוגדר על V שקבוצת קשתותיו היא $M \cup M^*$, כאשר קשת ב- $M \cap M^*$ תוכפל, כלומר תהפוך לשתי קשתות מקבילות. כפי שהראינו בהוכחת משפט ברג' (זוהי למעשה הבנייה שבה השתמשנו בהוכחה), אפשר להראות כי כל רכיב קשירות של H משרה מעגל באורך זוגי או מסלול פשוט, כך שכל שתי קשתות סמוכות חייבות להיות האחת מ- M והשנייה מ- M^*. לא ייתכן שיש רכיב קשירות המשרה גרף בעל בדיוק קשת אחת e, כך ש- $e \in M^*$; אחרת, $M \cup \{e\}$ הוא גם זיווג, בסתירה לכך ש- M הוא זיווג מקסימלי להכלה. (מאותה הסיבה, גם לא ייתכן שיש רכיב קשירות בעל בדיוק קשת אחת כך שקשת זו שייכת ל- M^*, אבל זה לא רלוונטי להוכחה.) לכן, בכל רכיב קשירות של H, מספר קשתות M^* הוא לכל היותר כפליים ממספר קשתות M. כלומר, אם M_i ו- M_i^* היא קבוצת הקשתות של M ו- M^* בגרף המושרה על ידי רכיב הקשירות ה- i של H, אזי $|M_i| \le 2|M_i^*|$ לכל $i = 1,\ldots,k$, כאשר k הוא מספר רכיבי הקשירות. לכן, כיוון שכל קשת שייכת לרכיב קשירות יחיד, נקבל

$$|M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i| \le \sum_{i=1}^{k} 2|M_i^*| = 2\sum_{i=1}^{k} |M_i^*| = 2|M^*|$$

ב. נסתכל על הגרף באיור הבא. הזיווג $M = \{v_2 v_3\}$ הוא זיווג מקסימלי להכלה. מצד שני, הזיווג $M^* = \{v_1 v_2, v_3 v_4\}$ הוא זיווג מקסימום. בדוגמה זו מתקיים $|M^*| = 2|M|$.

▲

4.2 קבוצות בלתי תלויות, קליקים וכיסויים בצמתים

הגדרה 4.12

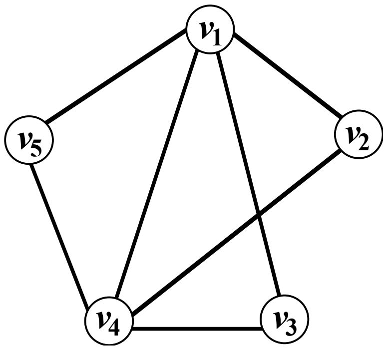
תהי S קבוצת צמתים בגרף G.

- S היא **קבוצה בלתי תלויה** (**independent set**), אם אין בה שני צמתים שהם שכנים ב- G.
- S היא **קליק** (**clique**), אם כל שני צמתים ב- S מחוברים על ידי קשת של G.
- S היא **כיסוי בצמתים** (**vertex-cover**), אם כל קשת של G סמוכה לצומת כלשהו ב- S.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

למשל, בגרף שבאיור 19, $\{v_2, v_3, v_5\}$ היא קבוצה בלתי תלויה, $\{v_1, v_4, v_5\}$ היא קליק, ואילו $\{v_1, v_4\}$ היא כיסוי בצמתים.



איור 19

בבירור, S היא קבוצה בלתי תלויה בגרף (פשוט) G, אם ורק אם S היא קליק בגרף המשלים $\bar{G}$.

טענה 4.13

$S \subseteq V$ היא קבוצה בלתי תלויה בגרף $G=(V,E)$, אם ורק אם $V \setminus S$ הוא כיסוי בצמתים של G.

הוכחה

על פי ההגדרה, S היא קבוצה בלתי תלויה ב-G, אם ורק אם אין ב-G קשת ששני הקצוות שלה ב-S. כלומר, אם ורק אם לכל קשת של G יש לפחות קצה אחד ב-$V \setminus S$. אבל, זה שקול לכך ש-$V \setminus S$ היא כיסוי בצמתים. ■

נסמן

$\alpha(G) =$ הגודל המקסימלי של קבוצה בלתי תלויה ב-G.

$\beta(G) =$ הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים ב-G.

טענה 4.14

בכל גרף G על n צמתים מתקיים: $\alpha(G)+\beta(G)=n$.

הוכחה

תהי S קבוצה בלתי תלויה בעלת גודל מקסימלי $\alpha(G)$, ויהי C כיסוי בצמתים בעל גודל מינימלי $\beta(G)$. על פי טענה 4.13, $V \setminus C$ היא קבוצה בלתי תלויה, ואילו $V \setminus S$ הוא כיסוי בצמתים.

לכן:

$$n-\beta(G)=|V\setminus C|\le\alpha(G)$$

$$n-\alpha(G)=|V\setminus S|\ge\beta(G)$$

מהאי-שוויון הראשון נובע $n\le\alpha(G)+\beta(G)$, ומהאי-שוויון השני נובע $n\ge\alpha(G)+\beta(G)$. לכן $n=\alpha(G)+\beta(G)$, כנדרש. ■

עד עתה חקרנו את הקשר בין המושגים שהוגדרו בסעיף זה (קבוצה בלתי תלויה, קליק וכיסוי בצמתים), אבל האם הם קשורים לזיווגים שעליהם דנו בסעיף הקודם?

טענה 4.15

לכל גרף G, הגודל של כל כיסוי בצמתים גדול או שווה לגודל של כל זיווג ב- G. ובפרט, $\beta(G)\ge\nu(G)$.

הוכחה

יהי M זיווג ב- G, ויהי S כיסוי בצמתים ב- G. בפרט, S חייב לכסות את כל הקשתות ב- M, ולכן S מכיל לפחות קצה אחד של כל קשת של M. כיוון שאין ב- M שתי קשתות הסמוכות לאותו הצומת, נקבל $|S|\ge|M|$. ובפרט, אם $|S|=\beta(G)$ ו- $|M|=\nu(G)$, נקבל $\beta(G)=|S|\ge|M|=\nu(G)$. ■

קל לראות כי קיימים גרפים שבהם $\beta(G)>\nu(G)$. למשל, אם G הוא מעגל באורך אי-זוגי $2k+1$, אז תוכלו לוודא בקלות כי $\nu(G)=k$ ואילו $\beta(G)=k+1$. האם מעגלים באורך אי-זוגי הם אלה שגורמים שיתקיים אי-שוויון ממש? כלומר, אולי $\beta(G)=\nu(G)$ לכל גרף דו-צדדי? (נזכיר כי הוכחנו בפרק 1 שגרף הוא דו-צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי-זוגי.)

משפט 4.16 (משפט קניג[1])

לכל גרף דו-צדדי G, הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים ב- G שווה לגודל המקסימלי של זיווג ב- G, כלומר: $\beta(G)=\nu(G)$.

לא נוכיח את משפט קניג, בשל מורכבות ההוכחה. את ההוכחה תוכלו למצוא בקורסים אחרים של האוניברסיטה (למשל, בקורס **אלגוריתמים** או בקורס **תורת הגרפים**).

1 קניג (**Dénes Kőnig**, 1884-1944) היה מתמטיקאי הונגרי יהודי. הוא כתב את ספר הלימוד הראשון בתורת הגרפים, והתפרסם בין היתר הודות למשפט הזה שהוכיח בשנת 1931 (בשנת 1916 כבר הוכיח גרסה חלשה יותר שלו). קניג שם קץ לחייו במהלך הפרעות ביהודי בודפשט, בשנת 1944.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

שאלות

שאלה 5

הוכיחו כי גרף G הוא דו-צדדי, אם ורק אם כל תת-גרף H של G מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $\frac{1}{2}\left|V(H)\right|$ לפחות, כאשר $\left|V(H)\right|$ מסמל את מספר הצמתים ב- H.

שאלה 6

יהי $G=(V,E)$ גרף. תת-קבוצה $D \subseteq V$ של צמתים היא **קבוצה שלטת** (Dominating Set) אם כל צומת ב-$V \setminus D$ הוא שכן של איזשהו צומת ב-D (כלומר, $D \cup \Gamma_G(D)=V$).

א. תהי I קבוצה בלתי תלויה מקסימלית להכלה. הוכיחו כי I היא קבוצה שלטת, ואם G לא מכיל צמתים מבודדים אז גם $V \setminus I$ היא קבוצה שלטת.

ב. יהי $\alpha(G)$ הגודל המקסימלי של קבוצה בלתי תלויה ב-G ויהי $\omega(G)$ הגודל המינימלי של קבוצה שלטת ב-G. הוכיחו כי $\alpha(G) \geq \omega(G)$.

תשובות

תשובה 5

אם G הוא דו-צדדי, אז כל תת-גרף H של G הוא גם דו-צדדי, והצד הגדול יותר הוא קבוצה בלתי תלויה בגודל $\frac{1}{2}\left|V(H)\right|$ לפחות.

בכיוון השני, נוכיח שאם G איננו דו-צדדי, אז יש לו תת-גרף H שאיננו מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $\frac{1}{2}\left|V(H)\right|$ לפחות. אכן, מכיוון ש-G איננו דו-צדדי, אז הוא מכיל מעגל באורך אי-זוגי כתת-גרף. אנו טוענים כי מעגל H בעל מספר אי-זוגי n של צמתים איננו מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל $\frac{1}{2}(n+1)$. קל לראות שכל קבוצה של $\frac{1}{2}(n+1)$ צמתים ב-H מכילה שני צמתים שהם שכנים ב-H, ולכן קבוצה כזו לא יכולה להיות בלתי תלויה.

▲

תשובה 6

א. אם I איננה קבוצה שלטת, אזי יש צומת $v \in V \setminus I$ שאינו שכן של שום צומת ב-I. לכן $I \cup \{v\}$ היא גם קבוצה בלתי תלויה, בסתירה למקסימליות של I.
כעת נניח ש-G אינו מכיל צמתים מבודדים. במקרה זה עלינו להראות שגם $V \setminus I$ היא קבוצה שלטת. אם $V \setminus I$ איננה קבוצה שלטת, אזי יש צומת $v \in I$ שאינו שכן של שום צומת ב-$V \setminus I$. אבל v גם כן אינו שכן של שום צומת ב-I, כי I היא קבוצה בלתי תלויה. לכן v הוא צומת מבודד, וזו סתירה להנחה כי G אינו מכיל צמתים מבודדים.

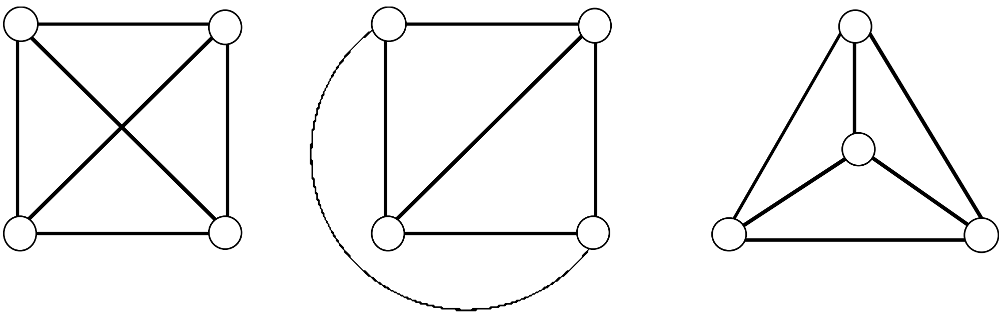
ב. סעיף זה נובע ישירות מסעיף א'.

▲

פרק 5:
גרפים מישוריים

5.1 הגדרה

גרף נקרא **מישורי (planar)** אם ניתן לציירו במישור ("על דף") כך שלא יהיו שתי קשתות שיצטלבו.



איור 20

למשל, הגרף שמשמאל באיור 20 הוא מישורי, כי **ניתן** לציירו במישור ללא קשתות מצטלבות, כמודגם בשני הגרפים שמימינו. שימו לב ששלושת הגרפים באיור 20 הם גרפים איזומורפיים, על פי הגדרה 2.7.

האם קיימים גרפים לא מישוריים? על מנת לענות על שאלה זו, נזכיר כי **גרף מלא** (או **קליק**) הוא גרף פשוט שבו כל זוג צמתים מחובר על ידי קשת, וכי גרף מלא על n צמתים מסומן ב- K_n. באופן דומה, **גרף דו-צדדי מלא** $K_{p,q}$ הוא גרף דו-צדדי פשוט בעל p צמתים בצד אחד ו- q צמתים בצד השני, המכיל את כל $p \cdot q$ הקשתות האפשריות. הגרף שבאיור 20 הוא הגרף K_4. אם כן, K_4 הוא גרף מישורי.

5.2 טענה

K_5 אינו מישורי.

הוכחה

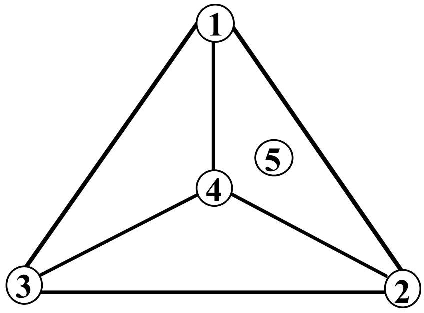
נניח ללא הגבלת הכלליות כי צומתי K_5 הם $\{1,\ldots,5\}$.

נתבונן במשולש בעל צמתים $1,2,3$ של K_5 (ראו איור 21).

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

אם K_5 מישורי, יש בדיוק שתי אפשרויות: או שהצמתים $4,5$ נמצאים שניהם בתוך המשולש, או ששניהם מחוצה לו. ראו איור 21. (לא ייתכן שאחד הצמתים יהיה בתוך המשולש ושהשני יהיה מחוצה לו, משום שהגרף מכיל קשת המחברת אותם, וקשת זו אינה חותכת אף אחת מצלעות המשולש $3-2-1$.)



איור 21: המחשה להוכחת טענה 5.2

אם $4,5$ בתוך המשולש, אזי לאחר שנחבר את 4 לכל אחד מהצמתים $1,2,3$ ייווצרו שלושה משולשים, ש-5 חייב להיות באחד מהם. אבל, אם למשל, 5 נמצא בתוך המשולש שצמתיו הם $1,2,4$, אזי לא ניתן לחברו לצומת 3 בקשת שאינה חותכת את אחת מצלעות המשולש.

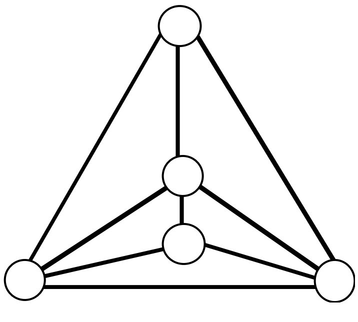
המקרים האחרים מטופלים באופן דומה. ■

▼ שאלה 1

הוכיחו כי הגרף המתקבל מ-K_5 על ידי השמטת קשת כלשהי הוא מישורי.

תשובה 1

הגרף המתקבל מ-K_5 על ידי השמטת קשת הוא גם הגרף המתקבל מ-K_4 על ידי הוספת צומת וחיבורו על ידי קשתות לכל הצמתים של K_4 פרט לצומת אחד. אם נבצע זאת עם השיכון המישורי של K_4 שבגרף הימני באיור 20, נקבל את השיכון המישורי של הגרף המבוקש, כפי שמודגם באיור 22.



איור 22: שיכון מישורי של K_5 פחות קשת אחת ▲

נניח שנתון **שיכון מישורי** של גרף מישורי G, כלומר שרטוט של G ללא קשתות מצטלבות. **הפאות (faces)** של (השיכון המישורי של) G הן חלקי המישור שהגרף מפריד. שימו לב כי המושג "פאות" תלוי בשיכון המישורי של G, ושיכון זה, כמודגם באיור 20, איננו יחיד בהכרח. כמו כן, תמיד אחת מהפאות אינה חסומה – זהו חלק המישור שמחוץ לגרף.

דוגמאות

1. למעגל יש שתי פאות: אחת פנימית ואחת חיצונית.
2. לכל אחד משני השיכונים המישוריים של K_4 שבאיור 20 יש ארבע פאות.
3. כל עץ הוא גרף מישורי, היוצר פאה אחת בלבד, שהיא הפאה הלא חסומה; זאת משום שקשתות העץ אינן יוצרות שום מעגל, ועל כן אינן יוצרות שום פאה חסומה.

המשפט שלהלן מראה כי מספר הפאות אינו תלוי בשיכון המישורי של הגרף.

משפט 5.3 (נוסחת אוילר)

יהי G גרף מישורי קשיר (לאו דווקא פשוט) בעל n צמתים ו-m קשתות. אז מספר הפאות בכל שיכון מישורי של G הוא:

$$f = m - n + 2$$

הוכחה

תחילה נוכיח שהמשפט תקף לכל עץ $G' = (V, E')$ על ידי כך שנראה שעבור עצים שני אגפי הנוסחה שווים ל-1. אגף ימין בנוסחה הוא $|E'| - |V| + 2 = (|V| - 1) - |V| + 2 = 1$ (כאן הסתמכנו על כך שמספר הקשתות בעץ שווה למספר הצמתים פחות 1). עם זאת, בכל שיכון מישורי של G' יש בדיוק פאה אחת.

עתה נוכיח את המשפט לכל גרף קשיר מישורי G. גרף כזה מכיל עץ פורש $G' = (V, E')$. נניח שנתון שיכון מישורי כלשהו של G. שיכון זה משרה שיכון מישורי של G'. כעת נוסיף לשיכון המישורי הזה של G' את הקשתות שב-$E \setminus E'$, זו אחר זו (בסדר שרירותי כלשהו). כל קשת שנוסיף מגדילה את אגף ימין בנוסחה ב-1. אנו טוענים שהוספת קשת כזו גם מגדילה את אגף שמאל בנוסחה (מספר הפאות) ב-1, זאת משום שכל קשת שנוספת עוברת בתוך אחת מהפאות הקיימות ומחלקת אותה לשתי פאות חדשות. מכאן נובע שנוסחת אוילר ממשיכה להתקיים לכל אורך התהליך, ובפרט – גם בסופו. ■

מסקנה 5.4

בגרף מישורי פשוט בעל $n \geq 3$ צמתים יש לכל היותר $3n - 6$ קשתות.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

הוכחה

מספיק להוכיח את הטענה למקרה ש-G הוא גרף מישורי מקסימלי, כלומר, G מישורי, אבל עם הוספת קשת כלשהי ל-G (ללא שינוי קבוצת הצמתים) מתקבל גרף לא מישורי. כמו כן, קל לוודא כי הטענה נכונה עבור $n=3$ ולכן נניח כי $n \geq 4$.
נתבונן בשיכון מישורי כלשהו של G. קל לוודא כי המקסימליות של G גוררת כי G קשיר (אחרת נוכל להוסיף קשת המחברת שני רכיבי קשירות של G, והגרף המתקבל עדיין יהיה מישורי). כמו כן, מכיוון שהגרף פשוט, אז כל פאה של השיכון מוקפת בשלוש קשתות לפחות (משום שאילו הפאה הייתה מוקפת על ידי שתי קשתות בלבד, אז הקשתות האלה היו מחברות את אותם שני צמתים, דבר שהוא בלתי אפשרי בגרף פשוט). לפיכך, אם נרשום לכל פאה את מספר הקשתות המקיפות אותה ונחבר את כל המספרים, הסכום יהיה לפחות $3f$. בסכום המתקבל, כל קשת השוכנת על היקף של פאה תיספר בדיוק פעמיים (כי קשת כזו משותפת בדיוק לשתי פאות). על כן, תוצאת הסכום היא לכל היותר $2m$. לפיכך,

$$3f \leq 2m$$

עתה, על פי נוסחת אוילר, $m = n + f - 2$. לכן

$$3f \leq 2m = 2n + 2f - 4$$

מכאן נובע ש- $f \leq 2n - 4$. על ידי שימוש חוזר בנוסחת אוילר, נקבל:

$$m = n + f - 2 \leq n + (2n - 4) - 2 = 3n - 6$$ ■

מסקנה 5.5

בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו קטנה או שווה ל-5.

הוכחה

בכל גרף, סכום הדרגות שווה לפעמיים מספר הקשתות. לכן בגרף G, שבו דרגת כל צומת היא לפחות 6, מתקיים:

$$m = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot 6 = 3n$$

זה לא ייתכן בגרף מישורי, כי בו $m \leq 3n - 6$. לכן חייב להיות בגרף לפחות צומת אחד שדרגתו לכל היותר 5. ■

שאלות

שאלה 2

נתון גרף מישורי פשוט וקשיר G בעל $n \geq 6$ צמתים, שבו האורך של כל מעגל הוא לפחות 5.

א. הוכיחו כי ב- G יש לכל היותר $(5n-10)/3$ קשתות.

ב. הוכיחו כי אם דרגת כל צומת ב- G היא לפחות 3, אז מספר הצמתים ב- G בעלי דרגה 3 גדול ממש מ- $2n/3$.

שאלה 3

א. הוכיחו כי בגרף מישורי דו-צדדי פשוט וקשיר בעל n צמתים יש לכל היותר $2n-4$ קשתות.

הדרכה: שימו לב כי בגרף דו-צדדי אין מעגלים באורך 3 ולכן $2m \geq 4f$.

ב. בהסתמך על סעיף א׳, הוכיחו כי $K_{3,3}$ אינו מישורי.

תשובות

תשובה 2

א. נתבונן בשיכון מישורי כלשהו של G. בשיכון זה, ההיקף של כל פאה (כלומר, אוסף הקשתות התוחמות אותה), פרט אולי זה של הפאה החיצונית, הוא מעגל, ולכן הוא מכיל לפחות 5 קשתות, כיוון שהאורך של כל מעגל ב- G הוא לפחות 5. ההיקף של הפאה החיצונית הוא עץ (אם G הוא עץ), או שהוא מכיל מעגל, ולכן גם הוא מכיל לפחות 5 קשתות. לכן סכום ההיקפים של הפאות הוא לפחות $5f$, כאשר f הוא מספר הפאות. עם זאת, בסכימה כזו נספרת כל קשת בדיוק פעמיים, ולכן $5f \leq 2m$. כמו כן, $m = n + f - 2$ (נוסחת אוילר). לכן

$$5f \leq 2m = 2n + 2f - 4 \ \Rightarrow \ f \leq \tfrac{2}{3}n - \tfrac{4}{3}$$

מכאן, על ידי שימוש חוזר בנוסחת אוילר, נקבל:

$$m = n + f - 2 \leq n + \left(\tfrac{2}{3}n - \tfrac{4}{3}\right) - 2 = \tfrac{5}{3}n - 3\tfrac{1}{3}$$

ב. יהי p מספר הצמתים ב- G שדרגתם בדיוק 3. לכן כל יתר $n-p$ הצמתים בגרף – דרגתם לפחות 4. מכיוון שסכום הדרגות שווה לכפליים מספר הקשתות, נקבל:

$$3p + 4(n-p) \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

אבל $2m \leq \tfrac{10}{3}n - \tfrac{20}{3}$. לכן $4n - p \leq \tfrac{10}{3}n - \tfrac{20}{3}$ ולפיכך $p \geq \tfrac{2}{3}n + \tfrac{20}{3}$.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

תשובה 3

א. כיוון שבגרף דו-צדדי אין מעגלים שאורכם 3, אז המעגל הקצר ביותר – אורכו 4. לפיכך, בדומה לטיעון שלנו בתרגיל הקודם, $2m \geq 4f$ ולפיכך $m \geq 2f$. לכן נקבל ממשפט אוילר:

$$f \leq n-2 \Leftarrow m = n+f-2 \geq 2f$$

מכאן, על ידי שימוש חוזר במשפט אוילר, נקבל:

$$m = n+f-2 \leq n+\left(n-2\right)-2 = 2n-4$$

ב. ב- $K_{3,3}$ יש 9 קשתות ו-6 צמתים. לכן הוא לא מישורי, אחרת מסעיף א׳ נקבל $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$, וזו סתירה. ▲

הגדרה 5.6

עידון של קשת uv של גרף G הוא פעולת ההחלפה של הקשת במסלול $u-x-v$ שאורכו 2, כאשר הצומת x הוא צומת חדש שמוסיפים לגרף. גרף G' הוא **העדנה של גרף** G אם ניתן לקבל את G' מ-G על ידי סדרה של עידוני קשתות, כאשר מותר לעדן גם קשתות חדשות שלא היו בגרף ההתחלתי. (שימו לב כי כל גרף מהווה העדנה של עצמו, כאשר סדרת העידונים המתאימה היא הסדרה הריקה.)

לא קשה לוודא כי עידון אחד של קשת בודדת של גרף מישורי נותן שוב גרף מישורי. מכאן נקבל את הטענה שלהלן.

טענה 5.7

גרף הוא מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא גרף מישורי.

עד עתה ראינו שני גרפים לא מישוריים: K_5 ו-$K_{3,3}$. מטענה 5.7 נובע כי גם כל ההעדנות של K_5 ו-$K_{3,3}$ הם גרפים שאינם מישוריים. האם קיימים גרפים לא מישוריים נוספים? ובכן, די ברור שגרף לא יכול להיות מישורי אם יש לו תת-גרף לא מישורי. מכאן נובע כי תנאי הכרחי לכך שגרף יהיה מישורי הוא שהגרף לא יכיל כתת-גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$. אחד ממשפטי הפנינה בתורת הגרפים אומר שזהו גם תנאי מספיק לכך שגרף יהיה מישורי.

משפט 5.8 (משפט קורטובסקי[1])

גרף הוא מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל כתת-גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$.

את הכיוון הקל של משפט קורטובסקי – גרף לא יכול להיות מישורי אם הוא מכיל כתת-גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$ – כבר הוכחנו. הכיוון השני אומר שגרף שאינו מישורי חייב להכיל כתת-גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$. לא נוכיח אותו כאן; תוכלו למצוא את ההוכחה בקורס **תורת הגרפים**.

1 קורטובסקי (**Kazimierz Kuratowski**, 1896-1980) היה מתמטיקאי פולני. את המשפט הזה הוכיח בשנת 1930. למעשה, המשפט הוכח כבר בשנת 1927 על ידי המתמטיקאי הסובייטי לב פונטריאגין (**Lev Pontryagin**, 1908-1988), אבל הוא לא פרסם את ההוכחה בעיתון מדעי.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

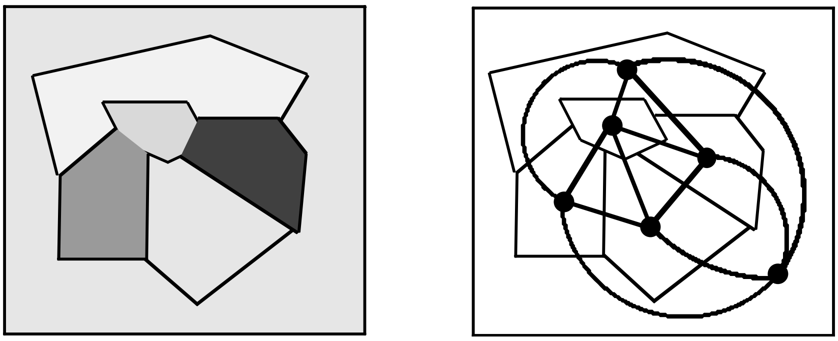
פרק 6:
צביעת גרפים

6.1 צביעת גרפים כלליים

בעיית הצביעה של מפה מדינית

נתונה מפה של מדינות. יש לצבוע את המדינות שבה כך שלא יהיו שתי מדינות שכנות הצבועות באותו הצבע. נרצה להשתמש במספר מינימלי של צבעים. לשם פשטות הדיון, הבה נניח ששטחה של כל מדינה הוא רציף, כלומר שהמדינה מורכבת מ"חתיכה אחת". (ארצות-הברית היא דוגמה למדינה ששטחה אינו רציף.)

ניתן לתרגם את הבעיה לבעיית צביעה (של צמתים) של גרף מישורי, כמודגם באיור 23.



איור 23: תרגום הצביעה של מפה מדינית לבעיית צביעה של צמתים בגרף.

צומתי הגרף הם המדינות, ויש עוד צומת אחד "חיצוני" עבור "הרקע" (ההנחה היא שהרקע צריך להיות צבוע בצבע שונה מזה של המדינות שיש להן גבול משותף עם הרקע). שני צמתים מחוברים על ידי קשת אם הם מייצגים מדינות שכנות (כלומר, אם למדינות יש קו גבול משותף). רואים שמתקבל גרף מישורי.

בעיית הקצאת התדרים

נתונה קבוצה של תחנות רדיו. ישנן תחנות הממוקמות, פיזית, קרוב זו לזו, ולכן אם הן ישדרו על אותו התדר הן יפריעו זו לזו. לכן לתחנות הממוקמות קרוב זו לזו יש להקצות תדרי שידור שונים. נרצה להשתמש במספר מינימלי של תדרים.

גם את הבעיה הזאת ניתן לתרגם לבעיית צביעה (של צמתים) של גרף, לאו דווקא מישורי. צומתי הגרף הם התחנות. שני צמתים מחוברים על ידי קשת אם הם מייצגים תחנות שהשידור של אחת מהן מפריע לשידור של האחרת. אנו מעוניינים להקצות לכל צומת תדר (צבע) כך שלשני צמתים שכנים יוקצו תדרים שונים, ושסך התדרים שיוקצו יהיה מינימלי.

בשתי הדוגמאות שהבאנו, רצינו לצבוע את צומתי הגרף המתקבל במספר מינימלי של צבעים, כך שכל שני צמתים שכנים יהיו צבועים בצבעים שונים. זה מוביל אותנו להגדרה הבאה.

הגדרה 6.1

צביעה של (צומתי) גרף היא פונקציה מצומתי הגרף לקבוצה שאיבריה נקראים צבעים (או תגיות).

צביעה של גרף היא **צביעה נאותה** אם כל שני צמתים סמוכים צבועים בצבעים שונים (כלומר, הפונקציה לעיל מתאימה להם צבעים שונים).

מספר הצביעה (chromatic number) של גרף G הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה נאותה של G, והוא מסומן ב-$\chi(G)$. נאמר כי G הוא **k-צביע (k-colorable)** אם $\chi(G) \le k$.

לא קשה לראות כי:

1. $\chi(K_n) = n$.
2. $\chi(G) = 2$ אם ורק אם G הוא גרף דו-צדדי המכיל לפחות קשת אחת.
3. אם G מעגל, אזי: $\chi(G) = 2$ אם $|V(G)|$ זוגי, ואילו $\chi(G) = 3$ אם $|V(G)|$ אי-זוגי.

בתרגילים הבאים נחקור את הקשר בין מספר הצביעה לדרגה המקסימלית ולגודל המקסימלי של קבוצה בלתי תלויה בגרף.

סימון: נסמן ב-$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית של צומת בגרף G.

שאלה 1 ▼

הוכיחו כי כל גרף G ניתן לצביעה בצורה נאותה ב-$\Delta(G)+1$ צבעים, כלומר: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

תשובה 1

נוכיח באינדוקציה על n, כאשר n הוא מספר הצמתים בגרף.

בסיס האינדוקציה הוא $n=1$, ובמקרה זה הטענה ברורה.

נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n, $n\geq 2$.

יהי v צומת כלשהו של G. בגרף $G\setminus\{v\}$, דרגת כל צומת היא גם לכל היותר $\Delta=\Delta(G)$, ולכן על פי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את $G\setminus\{v\}$ ב-$\Delta+1$ צבעים. כיוון שדרגת v ב-G היא לכל היותר Δ, אחד מתוך $\Delta+1$ הצבעים אינו מופיע באף אחד משכני v. נוכל לצבוע את v בצבע זה ולקבל צביעה חוקית של G ב-$\Delta+1$ צבעים. ▲

ניתן להוכיח טענה חזקה יותר מזו הנתונה בתרגיל לעיל. לא קשה לראות כי $\chi(G)=\Delta(G)+1$ אם G הוא קליק על $\Delta(G)+1$ צמתים או אם $\Delta(G)=2$ ו-G הוא מעגל באורך אי-זוגי. את המשפט הבא נציג ללא הוכחה.

משפט 6.2 (משפט ברוקס[1])

$\chi(G)\leq\Delta(G)$ פרט לשני המקרים הבאים, שבהם $\chi(G)=\Delta(G)+1$:

- ל-G יש רכיב קשירות המשרה גרף מלא (קליק) על $\Delta(G)+1$ צמתים ;
- $\Delta(G)=2$ ויש ל-G רכיב קשירות המשרה מעגל באורך אי-זוגי.

שאלות

▼ שאלה 2

גרף הוא d-**מנוון** (**d-degenerate**) אם בכל תת-גרף שלו יש צומת מדרגה d לכל היותר.

הוכיחו כי ניתן לצבוע באופן חוקי כל גרף d-מנוון ב-$d+1$ צבעים.

▼ שאלה 3

הוכיחו כי אם גרף G הוא k-צביע, אז ב-G יש קבוצה בלתי תלויה בגודל $\lceil |V(G)|/k \rceil$.

1 ברוקס (**Leonard Brooks**, 1916-1993) היה מתמטיקאי אנגלי שפרסם בשנת 1941 את ההוכחה למשפט המובא כאן.

תשובות

תשובה 2

ההוכחה כאן מכלילה את זו שבתשובה 1 (שימו לב כי כל גרף G הוא $\Delta(G)$-מנוון).
כמו בתשובה 1, נוכיח באינדוקציה על n, כאשר n הוא מספר הצמתים בגרף.
בסיס האינדוקציה הוא $n=1$, ובמקרה זה הטענה ברורה.
נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n, $n\geq 2$.
יהי v צומת בעל דרגה מינימלית ב-G. כיוון ש-G הוא תת-גרף של עצמו וכיוון ש-G הוא d-מנוון, $\deg_G(v)\leq d$. הגרף $G\setminus\{v\}$ גם הוא d-מנוון, כי כל תת-גרף שלו הוא תת-גרף של G (ובאופן כללי, כל תת-גרף של גרף d-מנוון גם הוא d-מנוון).
לכן, על פי הנחת האינדוקציה, ניתן לצבוע את $G\setminus\{v\}$ ב-$d+1$ צבעים. כיוון שדרגת v ב-G היא לכל היותר d, אחד מתוך $d+1$ הצבעים אינו מופיע באף אחד משכני v.
נוכל לצבוע את v בצבע זה ולקבל צביעה חוקית של G ב-$d+1$ צבעים. ▲

תשובה 3

נסמן את מספר הצמתים בגרף ב-n. בצביעה חוקית, אין קשת בין שני צמתים הצבועים באותו הצבע, ולכן כל מחלקת צבע היא קבוצה בלתי תלויה. לכן, אם G הוא k-צביע, אזי קיימת חלוקה של צומתי G ל-k קבוצות בלתי תלויות; אחת מהקבוצות האלה – גודלה לפחות n/k, כלומר, לפחות $\lceil n/k\rceil$. ובפרט, אם $\chi(G)=k$ אזי $\alpha(G)\geq\lceil |V(G)|/k\rceil$, ולכן $\alpha(G)\cdot\chi(G)\geq|V(G)|$. ▲

6.2 צביעת גרפים מישוריים

מכיוון שמספר הצביעה של הגרף המלא K_n הוא n אז קיימים גרפים בעלי מספרי צביעה גדולים כרצוננו. אך בעוד מספר הצביעה של גרף כללי איננו חסום, מתברר שהמצב שונה עבור משפחות מסוימות של גרפים. אנו נדון כאן בגרפים מישוריים.
מתברר שקיים מספר טבעי k כך שלכל **גרף מישורי** ניתן לצביעה חוקית ב-k צבעים.
K_4 הוא מישורי ומתקיים עבורו $\chi(K_4)=4$. האם ארבעה צבעים יספיקו לכל גרף מישורי?

משפט 6.3 (משפט ארבעת הצבעים – The Four Color Theorem)

כל גרף מישורי הוא 4-צביע (כלומר $\chi(G)\leq 4$ לכל גרף מישורי G).

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

למשפט ארבעת הצבעים היסטוריה ארוכה ומעניינת. בשנת 1890 הוכיח המתמטיקאי היווד (Heawood, 1861-1955) תוצאה חלשה יותר הידועה בשם **משפט חמשת הצבעים**, ולפיו כל גרף מישורי הוא 5-צביע. היווד הקדיש את רוב חייו לניסיונות להוכיח את משפט ארבעת הצבעים שנוסח לראשונה ב-1852. לאורך השנים הוצגו הוכחות שווא וגם דוגמאות נגדיות שגויות בניסיונות (בלתי מוצלחים) להפריכו. המשפט הוכח לראשונה, בעזרת מחשב, ב-1976 על ידי זוג המתמטיקאים הקן ואפל (Wolfgang Haken & Kenneth Appel). בהוכחה שהתפרסה על פני מאות עמודים, הם הוכיחו שיש "רק" 1,936 סוגים של "דוגמאות נגדיות מינימליות" אפשריות. לאחר מכן, הם הפעילו תוכנת מחשב שבדקה כי כל אחד מ-1,936 סוגי הגרפים ניתן לצביעה בארבעה צבעים. קהילת המתמטיקאים לא הכירה מייד בתקפותה של הוכחה מסוג זה, ואולם לבסוף התקבלה הוכחתם. מאז פורסמו הוכחות "פשוטות" יותר, אם כי כולן עדיין לא אנליטיות טהורות, אלא משתמשות במחשב.

לסיכום, הוכחת משפט ארבעת הצבעים מסובכת מאוד, ולא נביא אותה כאן. אבל נוכיח כי כל גרף מישורי ניתן לצביעה חוקית ב-5 צבעים. כדי להקל על הבנת ההוכחה, נוכיח תחילה טענה חלשה יותר.

▼ שאלה 4

הוכיחו כי כל גרף מישורי הוא 6-צביע.

תשובה 4

בפרק 5 הוכחנו את נוסחת אוילר. אחת המסקנות מנוסחה זו הייתה שבגרף מישורי פשוט יש צומת מדרגה קטנה או שווה ל-5. מכאן נובע כי כל גרף מישורי הוא 5-מנוון, ולכן על פי שאלה 2 הוא 6-צביע.

אפשר להוכיח גם ישירות באינדוקציה על מספר הצמתים n. עבור $n=1$ הטענה ברורה. נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. יהי v צומת מדרגה שאינה עולה על 5 ב-G. על פי הנחת האינדוקציה, את $G\setminus\{v\}$ ניתן לצבוע חוקית ב-6 צבעים. כיוון ש-$\deg_G(v)\le 5$, אזי בצביעה זו (ולמעשה בכל צביעה) שכניו של v ב-G צבועים ב-5 צבעים לכל היותר. נצבע את v בצבע שלא מופיע בשכניו. נקבל צביעה חוקית של G ב-6 צבעים. ▲

שימו לב: ההוכחה כי כל גרף מישורי הוא 6-צביע עשתה שימוש מזערי במישוריות הגרף, והשתמשה בעיקר בעובדה כי בכל תת-גרף שלו צומת מדרגה 5 לכל היותר, כלומר כי כל גרף מישורי הוא 5-מנוון. ההוכחה של משפט חמשת הצבעים גם כן משתמשת בעובדה זו, אבל גם משתמשת באופן מפורש במישוריות הגרף, כדי שבטיעון

אינדוקטיבי הדומה לזה שבתשובה 2 לא נזדקק לצבע שישי. עתה, כפי שהובטח, נוכיח את משפט חמשת הצבעים.

משפט 6.4 (משפט חמשת הצבעים)

כל גרף מישורי הוא 5-צביע.

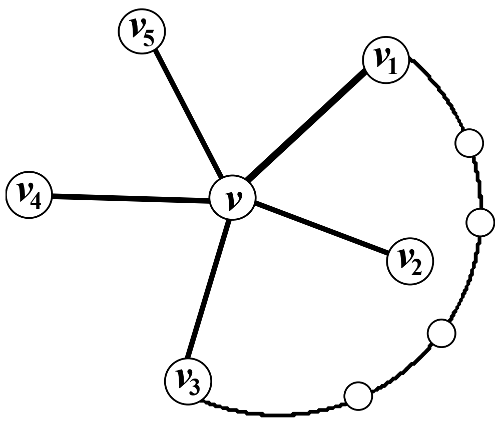
הוכחה

ההוכחה באינדוקציה על מספר הצמתים n.

עבור $n=1$ המשפט ברור.

נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.

נתבונן בשיכון מישורי כלשהו של G. ב-G יש צומת v מדרגה ≤ 5. על פי הנחת האינדוקציה, את $G\setminus\{v\}$ ניתן לצבוע חוקית בחמישה צבעים, נניח $1,\ldots,5$. אם הדרגה של v קטנה ממש מ-5, או אם ל-v יש שני שכנים הצבועים באותו הצבע, אזי שכניו של v משתמשים בארבעה צבעים לכל היותר, ולכן נוכל לצבוע את v באחד מחמשת הצבעים שלא מופיע בשכניו, ולקבל צביעה חוקית של G בחמישה צבעים. לכן המצב היחיד שבו לא נוכל לצבוע חוקית את v באחד הצבעים $1,\ldots,5$ ולקבל צביעה חוקית של G הוא זה שבו הדרגה של v היא בדיוק 5, וכל שכניו ב-G צבועים בצבעים שונים. מצב זה מודגם באיור 24, כאשר הצבע של השכן v_i הוא i עבור $1\leq i\leq 5$, והשכנים של v ממוספרים לפי כיוון השעון בשיכון המישורי של G.



איור 24

נתבונן בתת-גרף המושרה על ידי כל הצמתים בגרף שצבועים בצבעים 1,3 והקשתות שמחברות ביניהם. אם שני השכנים של v שצבועים בצבעים 1,3, דהיינו v_1 ו-v_3, נמצאים ברכיבי קשירות שונים בתת-גרף זה, אז נוכל להחליף בין הצבעים 1 ו-3 ברכיב הקשירות שמכיל את v_1, ולקבל צביעה חוקית שבה v_1 צבוע בצבע 3; במצב כזה אנו יכולים לצבוע את v בצבע 1, ולקבל צביעה חוקית של G ב-5 צבעים.

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

לכן נוכל להניח כי שני השכנים של v שצבועים בצבעים $1,3$, דהיינו v_1 ו- v_3, נמצאים באותו רכיב קשירות בתת-גרף זה, ובפרט שיש מסלול ביניהם. טיעון דומה תקף לגבי שכני v שצבועים בצבעים $2,4$, כלומר v_2 ו- v_4.

לסיכום, נוכל להניח כי יש מסלול P בין v_1 ל- v_3 המורכב כולו מצמתים הצבועים בצבעים 1 ו-3, וגם כי יש מסלול Q בין v_2 ל- v_4 המורכב כולו מצמתים הצבועים בצבעים 2 ו-4. לשני מסלולים אלה אין צומת משותף, שכן כל צומת צבוע רק בצבע אחד.

אנו טוענים כי מצב זה הוא בלתי אפשרי. נתבונן במעגל C הנוצר על ידי המסלול P והקשתות vv_1, vv_3. קל לוודא כי התחום במישור שאותו חוסם המעגל C מכיל בדיוק אחד מהצמתים v_2, v_4 ; באיור 24 מודגם מצב שבו הצומת v_2 נמצא בתוך התחום ואילו הצומת v_4 נמצא מחוץ לתחום. למסלול Q בין v_2 ל- v_4 אין צומת משותף עם המעגל C, והוא מחבר צומת הנמצא בתוך התחום שאותו חוסם C עם צומת שמחוץ לתחום זה. מכאן נובע כי קשת של C מצטלבת עם קשת של Q. זו סתירה, כיוון שבחרנו שיכון מישורי של הגרף. ■

▼ שאלה 5

נתון גרף מישורי פשוט G בעל n צמתים. יהי t מספר המשולשים (מעגלים באורך 3) ב- G.

א. הוכיחו כי ב- G יש לכל היותר $2n+\frac{1}{2}t-4$ קשתות.

ב. הוכיחו כי אם $t \le 7$ אז G הוא גרף 3-מנוון והסיקו כי הוא 4-צביע.

תשובה 5

נוכל להניח כי G קשיר; אחרת, כמו בהוכחת המסקנה ממשפט אוילר, נוכל להוסיף קשת המחברת שני רכיבי קשירות של G, והגרף המתקבל עדיין יהיה מישורי (שימו לב כי פעולה זו אינה מגדילה את מספר המשולשים ב- G). כמו כן, נניח כי ב- G אין צמתים מדרגה 1; אחרת נוכל להוריד צומת כזה ולהמשיך באינדוקציה. יהי f_3 מספר הפאות שההיקף שלהן מכיל בדיוק 3 קשתות. ברור כי $f_3 \le t$. בהיקף של כל פאה, פרט ל- f_3 פאות, יש לפחות 4 קשתות, ולכן סכום הקשתות של היקפי הפאות הוא לפחות:

$$4\left(f-f_3\right)+3\cdot f_3 = 4f-f_3 \ge 4f-t$$

כאשר f הוא מספר הפאות. בסכימה כזו, כל קשת נספרה בדיוק פעמיים ולכן $4f-t \le 2m$. כמו כן, $m=n+f-2$ (נוסחת אוילר). לכן:

$$4f-t \le 2m = 2n+2f-4 \;\Rightarrow\; f \le n+\tfrac{t}{2}-2$$

מכאן, על ידי שימוש חוזר בנוסחת אוילר, נקבל:

$$m = n + f - 2 \le n + \left(n + \tfrac{t}{2} - 2\right) - 2 = 2n + \tfrac{t}{2} - 4$$

זה מוכיח את סעיף א'.

כעת נפנה להוכחת סעיף ב'. ראשית נראה שאם $t \le 7$, אז יש בגרף צומת שדרגתו 3 לכל היותר. מסעיף א' נובע כי $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m \le 4n + t - 8$. לכן אם $t \le 7$ אז $\sum_{v \in V} \deg(v) \le 4n - 1$. לפיכך, הדרגה הממוצעת בגרף חסומה מלעיל על ידי $4 - \frac{1}{n}$. על כן, קיים בגרף צומת v שדרגתו מקיימת $\deg_G(v) \le 4 - \frac{1}{n} < 4$, כלומר $\deg_G(v) \le 3$.
כיוון שגם כל תת-גרף של G הוא גרף מישורי פשוט עם לכל היותר 7 משולשים, אז זה נכון לכל תת-גרף של G, כלומר גם כל תת-גרף של G מכיל צומת מדרגה 3 לכל היותר. לכן G הוא 3-מנוון, ועל-פי תרגיל 2 G הוא 4-צביע. ▲

האוניברסיטה הפתוחה
Aviv Buhbut

File #0002911 belongs to Aviv Buhbut- do not distribute

מהדורה פנימית
לא להפצה ולא למכירה
מק"ט 20476-5010