

## לוגיקה

### הגדרות:

- פסוק - 7
- ערך אמת - 7
- משתנים פסוקיים - 8
- קשר השלילה  $\neg$  - 9
- הקשר "וגם"  $\wedge$  - 10
- הקשר "או"  $\vee$  - 11
- הקשר "אם...אז..."  $\rightarrow$  - 15
- הקשר "אם ורק אם"  $\leftrightarrow$  - 15
- הצרנה - 16
- פסוק פורמאלי - 16
- פסוק פורמאלי מורכב - 17
- לוח אמת - 17
- לוח אמת מורחב - 18
- טאוטולוגיה - 19
- סתירה - 19
- שקילות טאוטולוגית (שקילות) - 21
- נביעה טאוטולוגית - 30
- גרירה טאוטולוגית - 30
- הכמת "קיים"  $\exists$  - 33
- הכמת "לכל"  $\forall$  - 33

( $t$  טאוטולוגיה כלשהי,  $f$  סתירה כלשהי,  $\alpha, \beta$  פסוקים פורמאליים,  $p, q, r$  משתנים פסוקיים)

### טאוטולוגיות:

- $p \vee (\neg p)$
- $p \rightarrow p$
- $p \leftrightarrow p$
- $f \rightarrow p$
- $p \rightarrow t$

### סתירות:

- $p \wedge (\neg p)$
- $p \leftrightarrow (\neg p)$
- $t \rightarrow f$

שקילויות:

- $p \equiv \neg\neg p \equiv p \wedge p \equiv p \vee p \equiv p \wedge t \equiv p \vee f$
- $p \wedge f \equiv f$
- $p \vee t \equiv t$
- $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) \equiv \neg(p \wedge (\neg q)) \equiv (\neg p) \vee q$
- חילוף, קיבוץ ופילוג (לשני הכיוונים) הקשרים  $\wedge, \vee$
- $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
- $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$
- $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

גרירות/נביעות:

- $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$
- $p, q \Rightarrow p \vee q$
- $p \wedge q \Rightarrow p, q$
- $(p \vee q) \wedge (\neg p) \Rightarrow q$
- $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

משפט דה-מורגן לכמתים:

- $\neg \forall x \psi \equiv \exists x \neg \psi$
- $\neg \exists x \psi \equiv \forall x \neg \psi$

שאלות שימושיות:

9.  $t_1 \equiv t_2, f_1 \equiv f_2$  p22

18.  $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \alpha$  p31

משפטים נוספים:

3.  $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \beta \equiv t$  p26

5.  $\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta \equiv t$  p31

7. p32

- $\alpha \Rightarrow t$
- $t \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \equiv t$
- $f \Rightarrow \alpha$
- $\alpha \Rightarrow f \Rightarrow \alpha \equiv f$

- $\alpha \Rightarrow f \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$
- $\alpha \wedge (\neg \beta) \Rightarrow f \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$

## תורת הקבוצות

### הגדרות:

#### **פרק 1**

- קבוצה - 1
- איבר - 1
- איבר של (שייך ל...) -  $\in$  - 1
- לא איבר של (לא שייך ל...) -  $\notin$  - 1
- קבוצה מוגדרת (נתונה) - 2
- שוויון של קבוצות -  $=$  - 5
- תת-קבוצה (קבוצה חלקית, קבוצה מוכלת ב...) -  $\subseteq$  - 6
- הקבוצה הריקה -  $\emptyset$  - 7
- קבוצת החזקה  $P(A)$  - 8
- איחוד קבוצות  $\cup$  - 9
- איחוד על קבוצת אינדקסים  $\bigcup_{i \in I} A_i$  - 12
- חיתוך קבוצות  $\cap$  - 15
- קבוצות זרות - 15
- חיתוך על קבוצת אינדקסים  $\bigcap_{i \in I} A_i$  - 16
- קבוצה של קבוצות זרות - 16
- הפרש קבוצות -  $/$  - 20
- הקבוצה האוניברסלית - 22
- משלים של קבוצה  $A'$  - 22
- הפרש סימטרי  $\oplus$  - 27

#### **פרק 2**

- זוג סדור  $(a,b)$  - 29
- מכפלה קרטזית  $X$  - 30
- מכפלה קרטזית של  $n$  קבוצות - 31
- רלציה - 31
- תחום של רלציה  $\text{Domain}(R)$  - 35
- טווח של רלציה  $\text{Range}(R)$  - 35
- רלציה הופכית  $R^{-1}$  - 36
- מכפלת רלציות  $RS$  - 37
- רלציה מעל קבוצה - 43

- רלציית היחידה (האלכסון)  $I_A$  - 44
- חזקת רלציה מעל קבוצה  $R^n$  - 46
- רלציה רפלקסיבית - 48
- רלציה סימטרית - 49
- רלציה אנטיסימטרית - 50
- רלציה טרנזיטיבית - 52
- סגור של רלציה - 55
- חלוקה של קבוצה - 58
- מחלקות (בלוקים) - 60
- רלצית שקילות (שקילות) - 61
- מחלקת שקילות - 62
- קבוצת המנה  $A/E$  - 67
- אינדקס של שקילות - 67
- עידון של חלוקה - 68

### פרק 3

- פונקציה (התאמה) - 76
- תמונה - 76
- פונקציה של (פונקציה מלאה) - 76
- פונקציה חלקית - 76
- פונקציה על - 78
- פונקציה חד-חד-ערכית - 79
- התאמה בין - 80
- פונקצית הזהות - 81
- תמורה - 83
- העתק טבעי - 85
- פונקציה אופיינית  $\varphi_A$  - 85
- סדר חלקי - 86
- קבוצה סדורה חלקית - 86
- סדר מלא - 87
- מכסה - 88
- צמצום של רלציה - 90
- קבוצה סדורה לינארית (שרשרת) - 91
- איבר מינימלי - 91
- איבר קטן ביותר - 93
- איבר גדול ביותר - 93
- רלצית כמו-סדר - 94
- רלציה אנטי-רפלקסיבית - 94
- מלה - 95

- אורך של מלה - 95
- סדר לקסיקוגרפי (מילוני) - 96

## פרק 4

- עוצמה שווה (אותה קרדינליות, שקולות)  $\sim$  - 116
- מספר קרדינלי (עוצמה)  $|A|$ ,  $\text{card}(A)$  - 117
- קבוצה סופית - 117
- מספר קרדינלי בן-מנייה (ניתן להימנות)  $\aleph_0$  - 118
- קבוצה בת-מנייה (ניתנת להימנות) - 118
- קבוצה אינסופית - 121

## פרק 5

- עוצמה שונה (לא שקולות) - 5
- היחס "קטן/שווה" בין עוצמות - 7
- היחס "קטן-ממש" בין עוצמות - 8
- חיבור עוצמות  $+$  - 16
- מכפלת עוצמות  $\cdot$  - 20
- חזקת קבוצות - 22
- חזקת עוצמות - 23

$(A, B, C, D)$  קבוצות כלשהן,  $x$  איבר כלשהו של הקבוצה האוניברסלית  $U$ ,  $V, S, T, R$  הן רלציות כלשהן.

$E_1, E_2$  רלציות שקילות.  $\psi, \phi$  פונקציות כלשהן.  $k_1, k_2, k_3, k, m$  עוצמות.

### תכונות ההכלה:

- $A \subseteq A$
- $A=B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

### תכונות האיחוד:

- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \subseteq A \cup B$
- $B \subseteq A \cup B$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \rightarrow A \cup B \subseteq C$
- $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$
- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

תכונות החיתוך:

- $A \cap B \subseteq A$
- $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \leftrightarrow C \subseteq A \cap B$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \leftrightarrow B \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$

תכונות המקשרות בין האיחוד לחיתוך:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \rightarrow B = C$

תכונות ההפרש:

- $A - \emptyset = A$
- $A - A = \emptyset$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$
- $A - B = A \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- $(A \cup B) - B = A - B$
- $A \cap (B - A) = \emptyset$
- $A \cup (B - A) = A \cup B$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - B = B - A \leftrightarrow A = B$

תכונות המשלים:

- $x \notin A \leftrightarrow x \in A'$
- $x \notin A' \leftrightarrow x \in A$
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$

- $U' = \emptyset$
- $\emptyset' = U$
- $(A')' = A$
- $A - B = A \cap B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $A \cup B = U \wedge A \cap B = \emptyset \leftrightarrow B = A'$
- $U = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$

### תכונות ההפרש הסימטרי:

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- $A \oplus \emptyset = A$
- $A \oplus A = \emptyset$
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$

### תכונות המכפלה הקרטזית:

- $A \neq B \rightarrow A \times B \neq B \times A$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

### תכונות בסיסיות של רלציות:

- $\text{Domain}(R) \subseteq A$
- $\text{Range}(R) \subseteq B$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $\text{Domain}(R^{-1}) = \text{Range}(R)$
- $\text{Range}(R^{-1}) = \text{Domain}(R)$
- $R \subseteq S \leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

### תכונות של מכפלת רלציות: (מניחים כאן כי כל המכפלות מוגדרות)

- $R \emptyset = \emptyset R = \emptyset$
- $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$
- $R(S \cup T) = RS \cup RT$
- $R \subseteq S \rightarrow RT \subseteq ST \wedge VR \subseteq VS$

- $R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$
- $R(ST) = (RS)T$
- $RI_A = I_AR = R$
- $\text{Domain}(R)=A \rightarrow I_A \subseteq RR^{-1}$
- $\text{Range}(R)=A \rightarrow I_A \subseteq R^{-1}R$

### רלציות רפלקסיביות:

- $R$  is reflexive  $\Rightarrow R \subseteq R^2$
- $R$  is reflexive  $\Rightarrow R^{-1}$  is reflexive  $\wedge \forall n \in \mathbb{N}: R^n$  is reflexive
- $R$  is reflexive  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: R^n \subseteq R^{n+1}$
- $S, R$  are reflexive  $\Rightarrow RS, R \cup S, R \cap S$  are reflexive

### רלציות סימטריות:

- $\forall a, b \in A: aRb \rightarrow bRa \Rightarrow R$  is symmetric
- $R$  is symmetric  $\Rightarrow R^{-1}$  is symmetric  $\wedge \forall n \in \mathbb{N}: R^n$  is symmetric
- $R, S$  are symmetric  $\Rightarrow (RS \text{ is symmetric} \leftrightarrow RS=SR)$
- $R, S$  are symmetric  $\Rightarrow R \cup S, R \cap S$  are symmetric
- $R \cap R^{-1}, R \cup R^{-1}$  are symmetric

### רלציות אנטיסימטריות:

- $R$  is antisymmetric  $\Rightarrow R^{-1}$  is antisymmetric
- $R, S$  are antisymmetric  $\Rightarrow R \cap S$  is antisymmetric

### רלציות טרנזיטיביות:

- $R$  is transitive  $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
- $R$  is transitive  $\Rightarrow R^{-1}$  is transitive  $\wedge \forall n \in \mathbb{N}: R^n$  is transitive
- $R$  is transitive  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: R^{n+1} \subseteq R^n$
- $R, S$  are transitive  $\Rightarrow R \cap S$  is transitive

### רלציות שקילות:

$E_1, E_2$  רלציות שקילות.

- $E_1 \cap E_2$  is an equivalence relation
- $E_1 E_2$  is an equivalence relation  $\Leftrightarrow E_1 E_2 = E_2 E_1$
- $E_1 \cup E_2$  is an equivalence relation  $\Rightarrow E_1 \cup E_2 = E_1 E_2 = E_2 E_1$



סגור:

( $R^s$  - הסגור הסימטרי של  $R$ , וכו')

- $R^r = R \cup I_A$
- $R^s = R \cup R^{-1}$
- $R^t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
- $|A|=n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (R^t = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \wedge (R \text{ is reflexive} \rightarrow R^t = R^{n-1}))$
- $R^{rt} = R^t \cup I_A$
- $(R^t)^t = R^t$
- $(R^{rt})^{rt} = R^{rt}$
- $RR^{rt} = R^{rt}R = R^t$

פונקציות:

$\text{על} = \text{surjective}$

$\text{חד-חד-ערכית} = \text{injective}$

$\text{תמורה} = \text{permutation}$

- $\varphi^{-1}$  is a function  $\Leftrightarrow \varphi$  is injective
- $\varphi$  is injective  $\Rightarrow \varphi^{-1}$  is injective
- $\varphi$  is injective and surjective  $\Rightarrow \varphi^{-1}$  is injective and surjective
- $\varphi$  is injective  $\Rightarrow \varphi\varphi^{-1} = I_A \wedge \varphi^{-1}\varphi = I_B$
- $\varphi, \psi$  are surjective  $\Rightarrow \varphi\psi$  is surjective
- $\varphi, \psi$  are injective  $\Rightarrow \varphi\psi$  is injective
- $\varphi, \psi$  are permutations  $\Rightarrow \varphi\psi, \varphi^{-1}$  are permutations
- $\varphi$  is a permutation  $\Rightarrow I_A\varphi = \varphi I_A = \varphi \wedge \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = I_A$

תכונות הפונקציה האופיינית:

- $\varphi_A = \varphi_B \leftrightarrow A = B$
- $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
- $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
- $\varphi_{U-A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

- $\varphi_{A-B}(x) = \varphi_A(x) \cdot (1 - \varphi_B(x))$

### סדר חלקי:

- $R$  is a partial order  $\Rightarrow R^{-1}$  is a partial order
- $A$  is partially ordered  $\wedge A$  is finite  $\Rightarrow (\exists x \in A : x \text{ is minimal}) \wedge (\exists y \in A : y \text{ is maximal})$

### טענות על עוצמות:

- $(|A| = \aleph_0 \wedge B \subseteq A \wedge B \text{ is infinite}) \rightarrow |B| = \aleph_0$
- $(\forall n, k \in \mathbb{N} : (|A_n| \in \mathbb{N} \wedge A_n \cap A_k = \emptyset)) \rightarrow |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = \aleph_0$
- $(\forall n, k \in \mathbb{N} : (|A_n| = \aleph_0 \wedge A_n \cap A_k = \emptyset)) \rightarrow |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = \aleph_0$
- $|Z| = \aleph_0$
- $|Q| = \aleph_0$
- $|P(\mathbb{N})| = c$
- $|\{x | x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\}| = c$
- $|\{x | x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\}| = c$
- $A \subseteq B \rightarrow |A| \leq |B|$
- $\aleph_0 < c$
- $k \leq k$
- $(k_1 \leq k_2 \wedge k_2 \leq k_3) \rightarrow k_1 \leq k_3$
- $(k_1 \leq k_2 \wedge k_2 \leq k_1) \rightarrow k_1 = k_2$
- $\neg(k_1 < k_2 \wedge k_2 > k_1)$
- $(k_1 < k_2 \wedge k_2 < k_3) \rightarrow k_1 < k_3$
- $|A| < |P(A)|$
- $k < 2^k$
- $(B \subseteq A \wedge |B| = \aleph_0 \wedge A-B \text{ is infinite}) \rightarrow |A-B| = |A|$
- $(A \text{ is infinite} \wedge |A| \neq \aleph_0 \wedge B \subseteq A \wedge |B| = \aleph_0) \rightarrow |A-B| = |A|$

### אריתמטיקה של עוצמות:

- $|P(A)| = 2^{|A|} = |\{0,1\}^A|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $k+0 = k$
- $k \text{ is finite} \rightarrow \aleph_0 + k = \aleph_0$
- $k \text{ is infinite} \rightarrow \aleph_0 + k = k$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $C+C = C$
- $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$
- $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$
- $k \cdot 0 = 0$
- $k \cdot 1 = k$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $C \cdot C = C$
- $k_1 k_2 = k_2 k_1$
- $(k_1 k_2) k_3 = k_1 (k_2 k_3)$
- $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$
- $2^{\aleph_0} = C$
- $C^{\aleph_0} = C$
- $(k_1 \cdot k_2)^{k_3} = k_1^{k_3} \cdot k_2^{k_3}$
- $k_1^{k_2+k_3} = k_1^{k_2} \cdot k_1^{k_3}$
- $k_1^{k_2 \cdot k_3} = (k_1^{k_2})^{k_3}$

### משפטים נוספים:

**2.19** אם  $\pi$  היא חלוקה של  $A$ , ו- $E$  היא הרלציה המוגדרת על ידי:

$$\forall x, y \in A : (xEy \leftrightarrow \exists a \in \pi : x, y \in a)$$

אז  $E$  היא רלצית שקילות מעל  $A$ .

**2.20** אם  $E$  היא רלצית שקילות מעל  $A$ , ו- $\pi$  היא הקבוצה המוגדרת על ידי:

$$\pi = \{a | a \subseteq A \wedge (\forall x, y \in a : xEy) \wedge (\forall x, y \in A : ((x \in a \wedge y \notin a) \rightarrow (x, y) \notin E))\}$$

אז  $\pi$  היא חלוקה של  $A$ .

**4.1** רלצית השקילות בין קבוצות היא רלצית שקילות.

**5.7** היחס  $\leq$  בין עוצמות הוא סדר חלקי מעל קבוצה כלשהי של עוצמות.

**5.18** אם  $A, B$  סופיות אז מספר הפונקציות של  $A$  ל- $B$  הוא  $|B|^{|A|}$ .

### שאלות שימושיות:

**2.15** אם  $R$  רלציה סופית ו- $R^m$  החזקה הקטנה ביותר של  $R$  ששווה לחזקה הקודמת לה, אז מספר החזקות השונות של  $R$  הוא  $m-1$ .

**2.45-2.50** טענות על עידונים ומכפלות של חלוקות. עמ' 69-70

### **3.21**

- $A$  סדורה חלקית  $\Leftrightarrow$  יש ב- $A$  לכל היותר איבר קטן ביותר אחד.
- $A$  סדורה חלקית  $\Leftrightarrow$  יש ב- $A$  לכל היותר איבר גדול ביותר אחד.
- $A$  סדורה חלקית ו- $a \in A$  הוא איבר קטן ביותר  $\Leftrightarrow a$  הוא האיבר המינימלי היחיד ב- $A$ .
- $A$  סדורה חלקית ו- $b \in A$  הוא איבר גדול ביותר  $\Leftrightarrow b$  הוא האיבר המקסימלי היחיד ב- $A$ .

### **3.22**

- $A$  סדורה בסדר מלא ו- $a \in A$  הוא מינימלי  $\Leftrightarrow a$  הוא האיבר המינימלי היחיד, ו- $a$  הוא האיבר הקטן ביותר.
- $A$  סדורה בסדר מלא ו- $b \in A$  הוא מקסימלי  $\Leftrightarrow b$  הוא האיבר המקסימלי היחיד, ו- $b$  הוא האיבר הגדול ביותר.

### **5.5**

- עוצמת כל קטע (פתוח, סגור או חצי-פתוח) היא  $\mathfrak{c}$ .
- קבוצה של מספרים ממשיים שמכילה קטע, עוצמתה היא  $\mathfrak{c}$ .

## תורת הגרפים

הגדרות:

### פרק 1

- גרף - 7
- צומת - 7
- קשת - 7
- צמתים שכנים - 8
- קשת סמוכה לצומת - 8
- לולאה - 8
- קשתות מקבילות - 9
- צומת מבודד - 9
- דרך פשוט - 9
- דרגה של צומת  $\deg_G(v)$  - 9
- גרף מכוון - 9
- מסלול - 10
- צומתי קצה - 10
- צמתים פנימיים - 10
- אורך של מסלול - 10
- מעגל (מסלול סגור) - 10
- מסלול פשוט - 10
- מעגל פשוט - 10
- מרחק בין שני צמתים  $\text{dist}_G(u, v)$  - 11
- גרף קשיר - 11
- רכיב קשירות - 11
- תת-גרף - 12
- תת-גרף גרף פורש - 12
- התת-גרף המושרה על ידי קבוצת צמתים - 12
- גרף מלא (קליק)  $K_n$  - 12
- גרף משלים  $\overline{G}$  - 12
- גרף דו-צדדי - 13
- גרף דו-צדדי מלא  $K_{p,q}$  - 13

### פרק 2

- יער - 17
- עץ - 17
- עלה - 17
- גרפים איזומורפיים - 23
- גרפים מתויגים - 24
- גרפים מתויגים איזומורפיים - 24
- סדרת פרופר של עץ - 26
- בנית עץ מסדרת פרופר - 29

### פרק 3

- מסלול אוילר - 35
- מעגל אוילר - 35
- מסלול המילטון - 35
- מעגל המילטון - 35
- גרף אוילרי - 35
- גרף המילטוני - 35
- גרף d-רגולרי - 38

### פרק 4

- זיווג - 44
- צומת מכוסה - 45
- צומת מזווג - 45
- זיווג מקסימום - 45
- זיווג מושלם - 45
- מסלול M-מתחלף - 45
- מסלול שיפור ביחס לזיווג - 45
- קבוצת השכנים של קבוצת צמתים  $\Gamma_G(X)$  - 48

### פרק 5

- גרף מישורי - 57
- שיכון מישורי - 59
- פאות - 59
- עידון של קשת - 62
- העדנה של גרף - 62

### פרק 6

- צביעה של גרף - 65
- צביאה נאותה - 65
- מספר הצביעה  $\chi(G)$  - 65
- גרף k-צביע - 65
- $\Delta(G)$  - 65

• גרף d-מנוון - 66

( $G = (V, E)$  גרף כלשהו,  $u, v$  צמתים ב- $G$ )

תכונות של גרפים:

- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$
- מספר הצמתים שדרגתם אי זוגית הוא זוגי
- $\overline{G}$  קשיר  $\vee$   $G$  קשיר
- $|V| \geq 2 \Rightarrow G \leftrightarrow G$  (דו-צדדי) אי זוגי
- $G$  מעגל  $\Rightarrow G$  קשיר  $\wedge (\forall v \in V: \deg_G(v) = 2)$

יערות ועצים:

- $|V| \geq 2 \wedge G$  עץ  $\Rightarrow \exists v, u \in V: v, u \wedge u \neq v$
- $G$  עץ  $\wedge v \in V \Rightarrow G \cup \{u, uv\}$  עץ
- $G$  עץ  $\wedge v \in V$  עלה  $\Rightarrow G \setminus \{v\}$  עץ
- $G$  גרף קשיר מינימלי  $\Leftrightarrow$  יש מסלול יחיד בין כל 2 צמתים של  $G \Leftrightarrow G$  עץ
- $|E| = |V| - 1 \wedge G$  אין ב- $G$  מעגלים  $\Leftrightarrow G$  קשיר  $\Leftrightarrow$  כל קשת שמוסיפים ל- $G$  יוצרת מעגל  $\wedge$  אין ב- $G$  מעגלים

גרפים אולריים, המילטוניים:

- $G$  קשיר  $\Rightarrow (\forall v \in V: \deg_G(v) \text{ זוגי} \Leftrightarrow G \text{ אולרי})$
- $\Leftrightarrow$  יש בגרף שני צמתים שדרגתם אי-זוגית, ודרגת שאר הצמתים זוגית
- יש בגרף מסלול אולר שאינו מעגל  $\Leftrightarrow$
- $\overline{G}$  אולרי  $\vee G$  אולרי  $\Rightarrow G$  d-רגולרי  $\wedge |V|$  אי זוגי
- $G$  המילטוני  $\Rightarrow (\forall u, v \in V (uv \notin E \rightarrow \deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|)) \wedge |V| \geq 3 \wedge G$  פשוט
- $G$  המילטוני  $\Rightarrow (\forall v \in V (\deg_G(v) \geq \frac{|V|}{2})) \wedge |V| \geq 3 \wedge G$  פשוט
- $K_{p,q}$  המילטוני  $\Leftrightarrow p=q \geq 2$

זיווגים:

- יש זיווג מושלם ב- $G \Rightarrow |V|$  זוגי  $\wedge G$  מעגל
- $M$  זיווג מקסימום  $\Leftrightarrow M$  ביחס ל- $M$  אין מסלול שיפור
- $G = (A \cup B, E) \Rightarrow$  יש זיווג המזווג את כל צמתי  $A \Leftrightarrow \forall X \subseteq A: |\Gamma_G(X)| \geq |X|$
- $G = (A \cup B, E) \Rightarrow$  יש זיווג מושלם ב- $G \Leftrightarrow (|A| = |B| \wedge \forall X \subseteq A: |\Gamma_G(X)| \geq |X|)$

- יש זיווג מקסימום ב- $G \wedge d \geq 1 \Rightarrow G$  d-רגולרי  $\wedge G$  פשוט

### גרפים מישוריים:

- $K_5$  אינו מישורי
- $K_{3,3}$  אינו מישורי
- $K_5 \setminus \{uv\}$  מישורי
- $G \Rightarrow$  מישורי  $G$  עץ
- $G \Rightarrow f = |E| - |V| + 2$  קשיר  $G \wedge$  מישורי
- $|V| \geq 3 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6$  פשוט  $G \wedge$  מישורי
- $\exists v \in V : \deg_G(v) \leq 5$  פשוט  $G \wedge$  מישורי
- $|E| \leq 2|V| - 4$  דו-צדדי  $G \wedge$  קשיר  $G \wedge$  פשוט  $G \wedge$  מישורי

### צביעת גרפים:

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$  דו צדדי  $\wedge |E| \geq 1$
- $|V|$  זוגי  $G \wedge$  מעגל  $\Rightarrow \chi(G) = 2$
- $|V|$  אי זוגי  $G \wedge$  מעגל  $\Rightarrow \chi(G) = 3$
- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
- $G \Rightarrow \chi(G) \leq d+1$  d-מנוון
- $G \Rightarrow \chi(G) \leq 4$  מישורי

### משפטים נוספים:

**2.6** כל גרף קשיר מכיל תת-גרף שהוא עץ.

**2.9** מספר העצים על קבוצה של  $n \geq 2$  צמתים מתויגים הוא  $n^{n-2}$ .

**5.7** גרף מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא מישורית.

**5.8** גרף הוא מישורי אם ורק אם אין לו תת-גרף שהוא העדנה של  $K_5$  או  $K_{3,3}$ .

**6.2**  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  פרט לשני המקרים הבאים, שבהם  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ :

- ל- $G$  יש רכיב קשירות שהוא  $K_{\Delta(G)+1}$ .
- $\Delta(G) = 2$  ול- $G$  יש רכיב קשירות שהוא מעגל באורך אי-זוגי.



## שאלות שימושיות:

### פרק 1 שאלה 3

- בגרף פשוט, אם דרגת כל צומת היא לפחות  $k$ , קיים מסלול פשוט ולא סגור שבו  $k+1$  צמתים.
- בגרף פשוט, אם דרגת כל צומת היא לפחות  $k$ , ו- $k \geq 2$ , קיים מעגל פשוט בעל לפחות  $k+1$  צמתים.

**פרק 1 שאלה 5** - אם גרף הוא דו צדדי וקשיר, ניתן לחלק את צמתיו לשני "צדדים" רק בדרך אחת.

**פרק 2 שאלה 2** - אם  $P, Q$  שני מסלולים שונים המקשרים בין אותם שני צמתים, באיחוד של  $P, Q$  יש מעגל.

**פרק 6 שאלה 5** - קשר בין מספר המשולשים (מעגלים באורך 3) למספר הקשתות בגרף מישורי פשוט. עמ' 70

## פתרון שאלות

### פתרון באינדוקסיה

יש להוכיח טענה מהסוג:  $\forall n \in N, n \geq k : \alpha$  מקיים  $n$   
ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

#### עקרון האינדוקסיה:

1. מוכיחים כי  $k$  מקיים  $\alpha$
2. מניחים כי  $k \leq n$  מקיים  $\alpha$
3. מוכיחים כי  $n+1$  מקיים  $\alpha$

#### עקרון האינדוקסיה השלמה:

1. מוכיחים כי  $k$  מקיים  $\alpha$
2. מניחים כי כל  $k < n$  מקיים  $\alpha$
3. מוכיחים כי  $n$  מקיים  $\alpha$

### פתרון יחסי רקורסיה (נסיגה) לינאריים

אם יש לפתור נוסחה מהצורה:

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2)$$

1. מניחים כי קיים פתרון מהצורה  $f(k) = q^k$ , ומציבים זאת בנוסחה שלמעלה:

$$q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2}$$

2. מחלקים בחזקה הכי קטנה:

$$q^2 = c_1 q + c_2$$

3. פותרים את המשוואה הזאת. נסמן את הפתרונות של המשוואה ב-  $q_1, q_2$ .

4. אם הפתרונות האלו שונים, מציבים אותם בנוסחה הזאת:

$$f(n) = Aq_1^n + Bq_2^n$$

5. אם הפתרונות זהים (יש רק פתרון אחד), מציבים בנוסחה הזאת:

$$f(n) = Aq_1^n + Bnq_1^n$$

6. מוצאים את A, B על ידי הצבת הערכים התחיליים הנתונים ב-n, ופתרון המשוואה המתקבלת.

7. מציבים את ערכי A, B שנמצאו. הפתרון הסתיים.

אם צריך לפתור יחס עם יותר מ-2 מחוברים, ראה תקציר מושגים ומסקנות בקומבינטוריקה.

## נוסחאות בנושא פונקציות יוצרות

• סכום המספרים מ-1 עד n:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

• הבינום של ניוטון:

$$(a + b)^n = b^n + nab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + a^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

• סכום טור הנדסי סופי:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

• סכום טור הנדסי אינסופי:

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

• כפל פונקציות יוצרות:

אם:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

אז:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \dots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$$

• העלאה בחזקה של טור הנדסי אינסופי:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1 + x + x^2 + \dots)^n = 1 + nx + D(n, 2)x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} D(n, k)x^k$$