

לגדל 13

תורת הגרפים II

תוצאות:

$\phi =$  גודל קשרי אלא מעגלים

יצר = גודל אלא מעגלים (כא יחיד קשירות עליו  
הוא צל).

מספר הקשתות בצל ודיגור:  
עבור צל מתקיים -

$$|E| = |V| - 1$$

ואכן עבור יצר מתקיים:

נניח שיש בו  $k$  יחיד קשורות. אזי גם אחרי  
מהם מתקיים

$$|E_i| = |V_i| - 1$$

חכמה גסה -

$$|E| = \sum_{i=1}^k |E_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = |V| - k$$

תרגיל:

יהי  $G$  הגרף הממוקד הבא:



יהי  $\bar{G}$  הגרף המלא של  $G$ .

האם  $G$  !  $\bar{G}$  איזומורפיים?

שילמו רק אחרי צדקה 2.7 ! 2.8.

פתרון:

$G =$



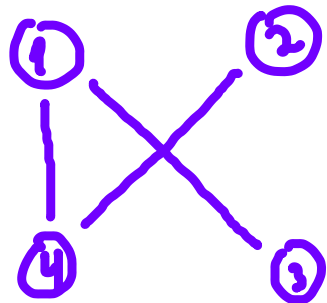
בגורמים לא מתאימים הם איזומורפיים.

(2.7)

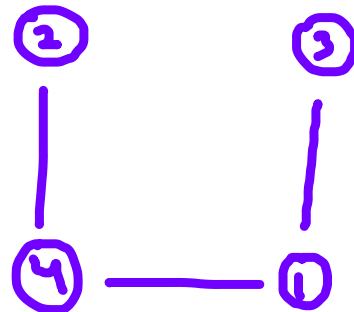
בגורמים מתאימים הם לא איזומורפיים.

(2.8)

$\bar{G} =$



$\equiv$



מסורת פירור (יאלנו גולוצ גלדר)

מסקנה: v יש התאמה חתץ ואל בין צלים צמ ח

צמחים וסדרות באורן 2-n הקלויור להלספרים

$\{n, \dots, 2, 1\}$  . (= חל'פור צמ חזר באורן 2-n)  
למשך ח אידרים גורנים

מסקנה (מלפס קיילי): יש  $n^{n-2}$  צלים למח'ג'ים גורנים  
צמ ח צמחים.

תרגיל: נתון  $T = (V, E)$  הוא עץ.

נתון  $n$  מס צומת פנימי (שאינו צלה) יש דוגה מס  
יפניות 3.

הוכיחו כי מספר הצללים בדף זנוב למס מספר הצללים  
הפנימיים.

- הוכיחו בעזרת זינים - כל מס באמצעות ניתוח סכום הזוגות  
ובלם באמצעות סדרת כרוב.

פתרון א) לפי סכום הזוגות.

נסמן את קבוצת הצללים באות  $L$ .  
ואת קבוצת הצללים הפנימיים באות  $I$ .  $\left( \begin{smallmatrix} n \\ |L|+|I| \end{smallmatrix} \right)$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in L} \deg(v) + \sum_{v \in I} \deg(v)$$

$\parallel$   $\parallel$   $\checkmark$

$2 \cdot |E|$   $|L|$   $3 \cdot |I|$

$\parallel$

$2(n-1)$

קיבלנו

$$2(|V|-1) \geq |E| + 3$$

$$2(|V|+|E|-1) \geq |E| + 3$$

$$2|V| + 2|E| - 2 \geq |E| + 3$$

$$|V| - 2 \geq |E| \quad /+2$$

$$|V| \geq |E| + 2 > |E|$$

(כ)

נשאל:  $n$  איז מספר הקצוות הכולל.  $(n = |V| + |E|)$   
סוגר פורנו על  $n$  זה הוא באופן  $n-2$ .  
מסורה מנוצצים כל אחד מהקצוות הפנימיים לפחות פעם אחת.  
(ובצדדים מנוצצים).  
$$n-2 \geq 2 \cdot |E| \quad /:2$$

$$|E| \leq \frac{n}{2} - 1$$

כל הקצוות הפנימיים הם פחות מהצדדים מהקצוות.  
כלומר צדדים מהקצוות פחות מהקצוות.

צוגאבן:

לרית ט 2 ז 5 הם צוגרין פריגיים.  
(נזל אחר יורה  $\leq 3$ )

553322

הגדרה:

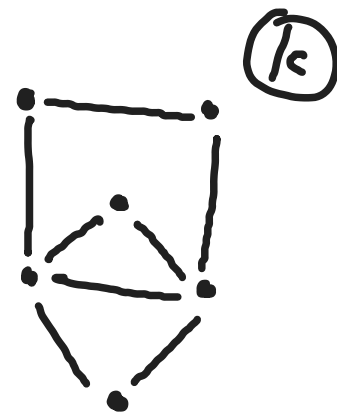
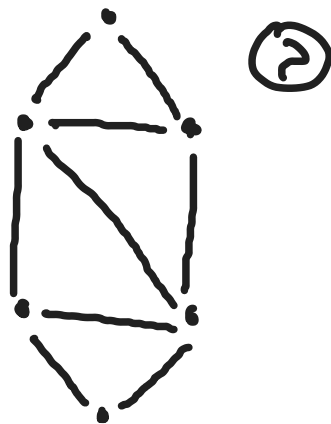
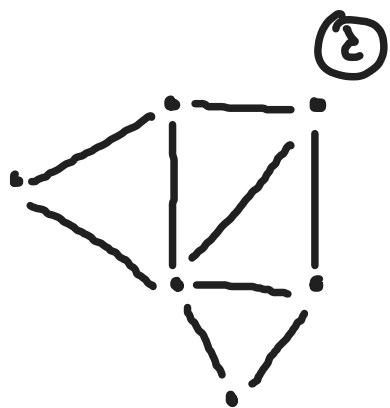
מסלול אוליבר גיף  $G$  הוא מסלול בו כל קטע של  $G$  מופיע בדיוק פעם אחת.

מעגל אוליבר - הוא מעגל שצדדי לא הקטע של  $G$ .

מסלול המילטון גיף  $G$  הוא מסלול שצדדי לא הצמתים של  $G$  בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטון הוא מעגל שצדדי לא הצמתים של  $G$  בדיוק פעם אחת.

3/2-גלגל: בגרפים הבאים קבוצה האם קיים מסלול/מעגל אוליבר/המילטון



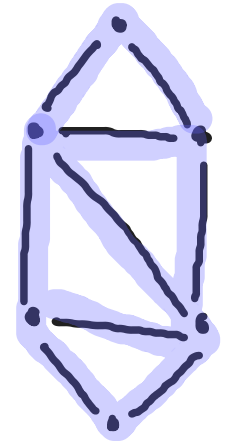


א/



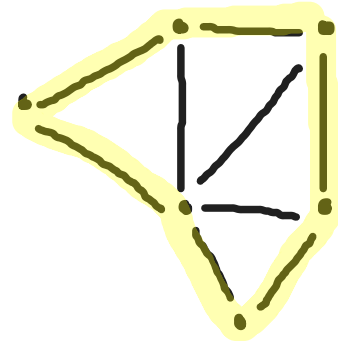
יש  
מצגה  
אנליזה

ב/



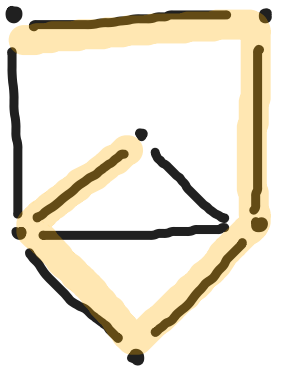
יש  
מסלול  
אנליזה  
אין מצגה  
אנליזה

ג/

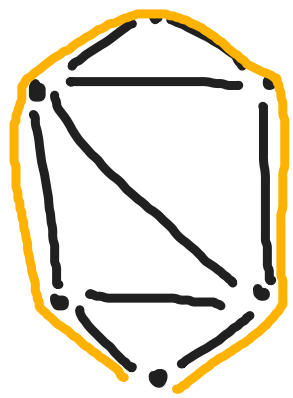


אין מסלול  
(אין מצגה)  
אנליזה

יש מסלול  
המיטות  
אין מצגה  
המיטות



יש  
מצגה  
המיטות



יש מצגה  
המיטות

זרף נקרא אנוארי אם יש בו מעגל אנוארי.  
משפט 3.1 זרף קטור הוא אנוארי אם  
 הוא צומת.

זרף נקרא המילטוני אם יש בו מעגל המילטוני.  
משפט אור עבור זרף עם  $n$  צמתים  $n \geq 3$  :  
 אם זרף ישן צמתים שאינם שכינים

אז  $G$  הוא המילטוני.  
 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$

מסקנה (משפט דירק) : עבור זרף עם  $n$  צמתים  $n \geq 3$   
 אם זרף צומת למתקיים  $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$  אז  $G$  המילטוני.

הרעיון:

האם  $K_{q,2}$  אוניטרי?    האם  $K_{q,1}$ ?  
האם  $K_{2,2}$  אוניטרי?    האם  $K_{2,1}$ ?

המשוואה:

$K_{q,2}$  איננו אוניטרי כי יש בו 2 צמתים קדמי דרגה

של  $q$ .  
הצורה: יש בו מסלול אוניטרי.

$K_{2,2}$  אוניטרי כי הצימוד טאג'וואר.

גרפים:

האל  $K_{2,9}$  אוילרי? גרף סטאר?

האל  $K_{6,2}$  אוילרי? גרף סטאר?

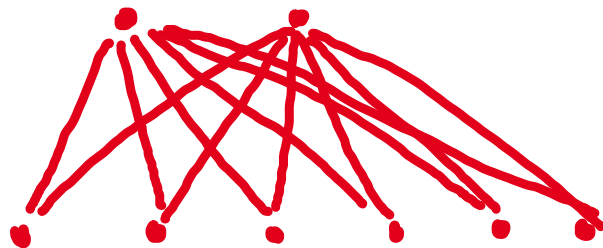
גרפים:

הצורה: גרף  $K_{m,n}$  הוא גרף סטאר אם

ולכן  $K_{2,9}$  איננו גרף סטאר.

$K_{6,2}$  .. ..

$2 \leq m, m=n$



תרגול: נניח  $G$  כך:

הזוגות הם תת קבוצות בגודל 3 מתוך  $\{1, 2, \dots, 7\}$ .  
הן שני זוגות  $A$  ו- $B$  יש קשת יחידה  
 $|A \cap B| = 1$

א) כמה זוגות כאלה?

ב) מהי הדרגה של  $G$  צומת כאלה?

ג) הוכיחו כי הגרף קשיר.

ד) הוכיחו כי  $G$  איננו 3-צבוע.

ה) האם  $G$  אנונימי?

ו) האם  $G$  גמילטוני?

תשובה: לשיר אנל G כך:

הכמותים הם תת קבוצות בגודל 3 מתוך  $\{1, 2, \dots, 7\}$ .  
 בין שני צמות A : B יש קשת יחידה  
 $|A \cap B| = 1$

א) כמה צמות בגודל 3?

ב) מהי הגודל של כל צומת בגודל 3?

ג) הוכחו כי הגרף קשיר.

ד) הוכחו כי G אינו חצי-צמוד.

ה) האם G אופייני?

ו) האם G גמיילסוני?

א) מספר התת-קבוצות בגודל 3 מתוך  $1, 2, \dots, 7$  נל  $\binom{7}{3}$ .

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

ב) נקח צומת כלשהו  $A = \{a, b, c\}$

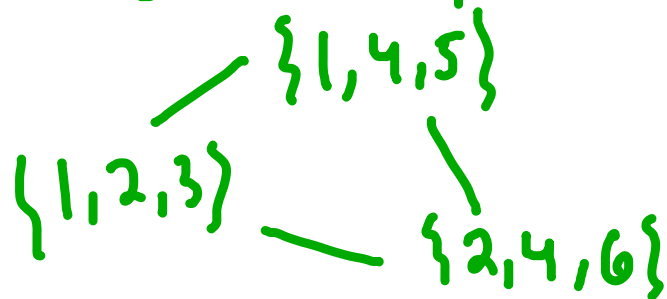
מהם הצמות של A?

- תת קבוצות ערשיות אחר  $a$  ין  $\frac{1}{2}$  יאר ב c נל  
 $3 \cdot \binom{4}{2}$   $\left\{ \begin{array}{c} c \\ c \\ b \end{array} \right\}$   $\left\{ \begin{array}{c} a \\ a \\ c \end{array} \right\}$   $\left\{ \begin{array}{c} b \\ b \\ a \end{array} \right\}$

$\left[ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right] \text{ כי ים אכחונו טט מסכנים מתוך } A \setminus \{1, 2, \dots, 7\}$   
 ואם קיבלנו מסה 18  
 גוף הורחה טא טא לומר חיו 18.

(2) מסה ים 35 צמחים.  
 נניח בגלילי שהגוף יאננו קטור. טא ים נו אכחונו 2 וכלי  
 קטיו. נסמך זא וכלי קטיו קטן גילי - ים בו זא יא  
 מ 7 צמחים. גוף הורחה הגדולה גילי האכחונו חיו  
 טא, אכל הורחה גילי לומר חיו גילי 18.  
 טיה אכחה  $\Rightarrow$  הגוף קטור.

(3) ים ב 6 גלילי באוין 3, אכ חיו אנו 11-333.  
לכאנא:



ה) העל קטני, וכל הדומה הן לא, וז"ל דאגיתר.  
וזמן העל אניארי.

ו) הדומה על ט צומת היי 18 ומתקיים  
 $18 > \frac{35}{2}$

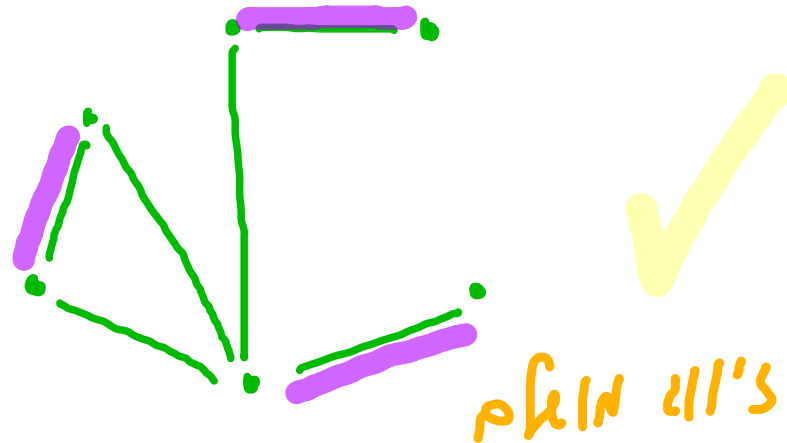
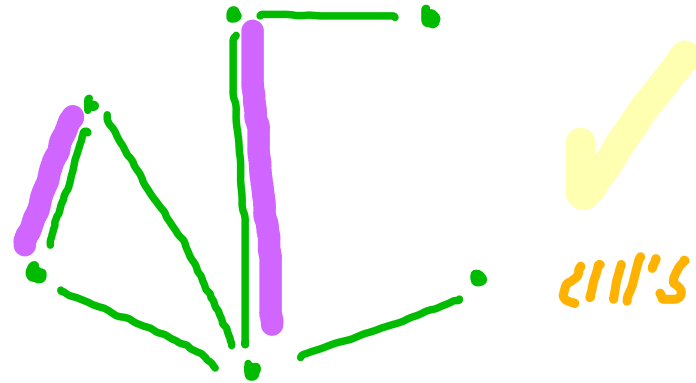
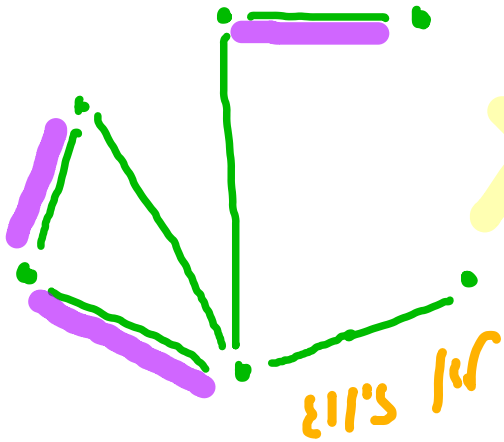
וזמן הוא המתאני.

.



ציון גורף הוא תת-קבוצה של קשתות בגרף שאם  
אנחנו ניקח אותן יחדיו נקבל גרף.

צילום גרף:



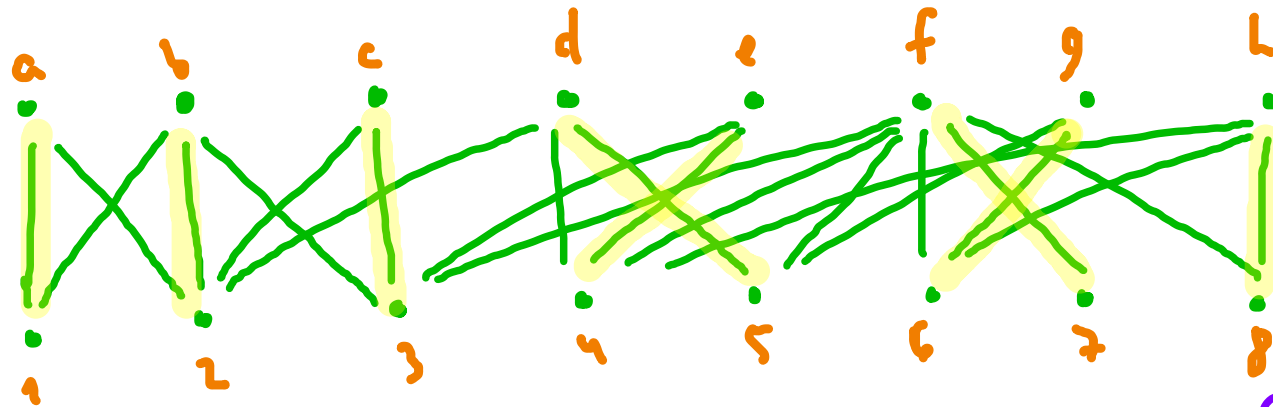
הערה: ציון מושלם הוא ציון שמוצא את  $G$  הולמים דרך.  
 בדוג כ'  $\frac{|V|}{2} = |M|$

האם יאילו בדוגמאות הר' ציון מושלם?

הערה: עבור  $X$  מתקבולה על צלמים  $G$ , יא  $\Gamma_G(X)$ ,  
 קבוצת השברים על  $X$  מוצות אה'ר  $G$  הולמים  
 מחוקרים בקשת איזטגו צלמת  $X$ .

משפט הול: הגוף  $G$  צו-צצו  $G=(A \cup B, E)$  י ציון מושלם  
 אם  $X \subseteq A$  מתק'ם  
 $|\Gamma_G(X)| \geq |X|$

תרגיל: הולם בגדל הבין יש ציור מושלם ?



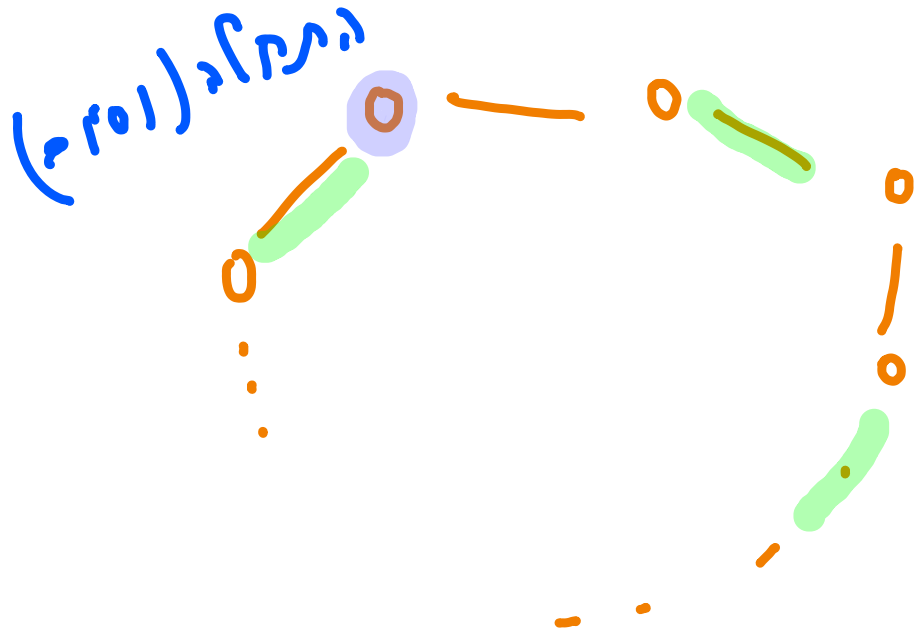
תרגיל הוכח/הפוך :

(1) אם  $G$  אוליטרי עם מספר זוגי של צמתים אז יש בו ציור מושלם  
אז נכון. צאגמא נגדיר

(2) אם  $G$  ימיוטטוני עם מספר זוגי של צמתים אז יש בו ציור מושלם.  
 $K_{2,4}$

נכון. הוכחה: יש ב  $G$  מצול המיוטטון (קאורן זוגי)  
 אם ניקח כל קטע במיקומ זוגי כמצול - קידאנו  
 ציור מושלם.

התחלה של -



שאלה אחרונה:

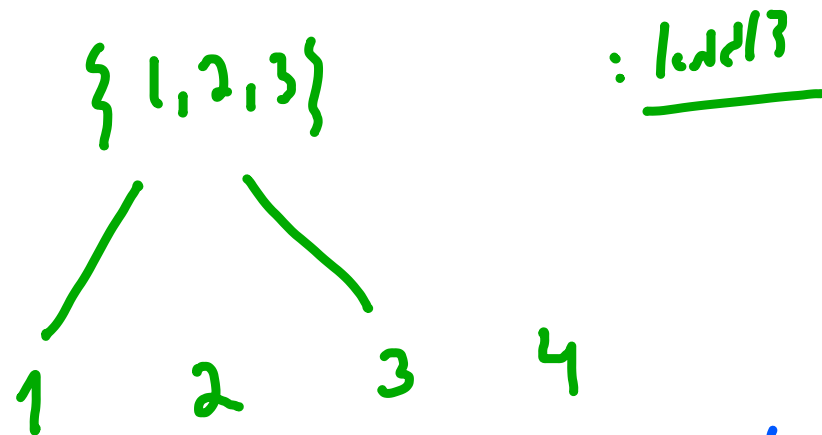
אם  $G$  זרן  $n$ -נודי גרף  $K_{m,n}$   
יש ב- $G$  צינור מושלם. מה מתקיים אז?  $m, n$ ?

תשובה:  $m=n$

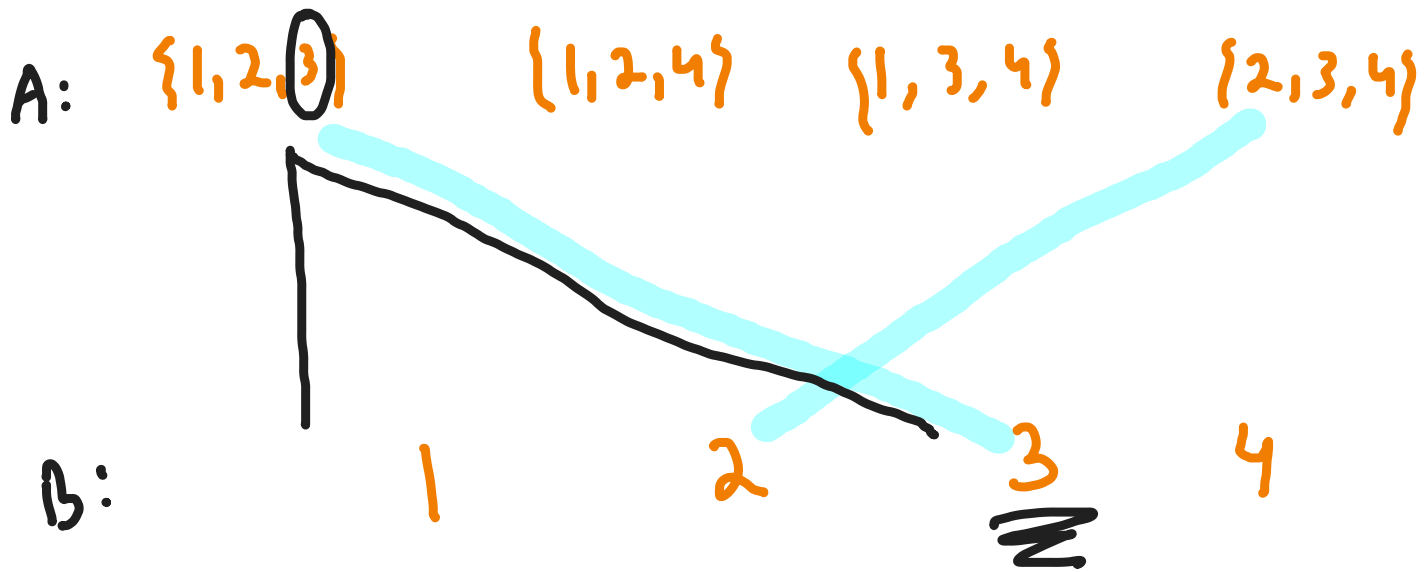
נימך ב- $G$  צינור  $n$  הקטרת  $n$  בין  $A$  ל- $B$   
נא טא איז  $A$  גודל איז  $B$  נא  
וגם  $G$  איז  $B$  גודל איז  $A$  נא  
ולכן  $|A|=|B|$   
 $|A| \leq |B|$   
 $|B| \leq |A|$

הוכח רסמן  $A$  איז קדולגר יחיד-קדולגר דנר 3 גסבייג  
 מתוך  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

רסמן  $G = (A \cup B, E)$  איז הייל היי-לונדי המוגד  $\mathcal{P}$ :  
 $A \in \mathcal{P}$  יג קטע בין  $S$  זיין גמסער הייזל דימער  
 $S$  וואסני הייזל דימער  $S$ .



- (א) האט יג צייל גמאמ  $G$ ?
- (ב) איהי גמאמ  $\{1, 2, 3, 4\}$  (אמ יג צייל)?
- (ג) האט יג ימער גמאמ גמאמ איהי?



הרשקה:

- יש ציוד מוגמר. יש שני ציודים מוגמרים אבסורדיים.  
 במנהל  $\{1, 2, 3\}$  מוגמר מוכח אחר 3.

תרגיל: רשום את הוצת בצל ס' צללים התלמיד

שקדם 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

(ייתכן וזו צללים שלם צלם)

א) מלוא את הוצת בצל סדר פרק (5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100)

(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100)

ב) מלוא את מספר הוצת ד המקימים את תנאי הגוף.

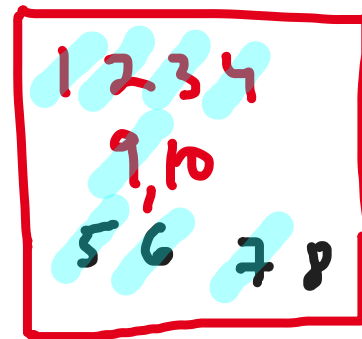
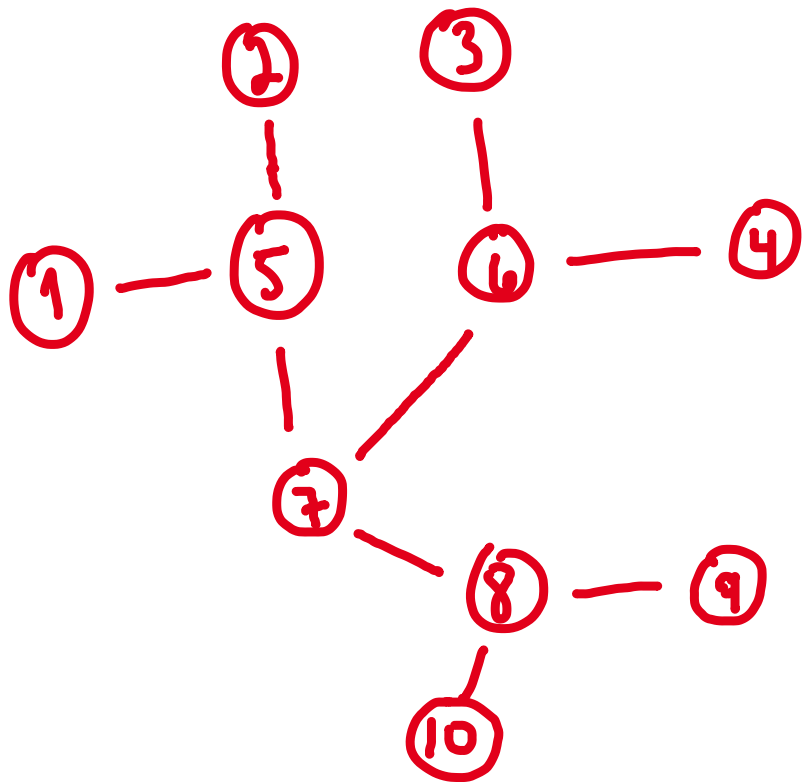
ג) .. .. .. .. .. עקב 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

ד) הנכחו פאזל ד גוף סדר פרק 556788  
אין ציור מולם.



תרגיל: נניחם אם הוצלם בחצי סו צללים התלמידים  
 שקהם 4, 5, 6, 7 הם צללים.  
 (ייתכנו צו צללים עומ צללים)  
 (1, 2, ..., 10)

(א) הוכיחו כי קיים סדרת פראפר  
 55667788  
 אין ציור מושלם.  
 נדנה את העל:



אִירֵאוּ אֶלֶם הַבֵּא אֶת פִּירְאֵם

6-5 בִּירוֹת הַזֶּנִּים.

אֶשֶׁר אֶתֶּר בִּמְחֵי<sup>ס</sup> שְׂמֹלֶת

1-7

בִּמְחֵי<sup>ס</sup> 6 - שְׂמֹלֶת 1, 2, 3, 4

אנשי אפרודיט 05  
ובמקום 6 אנשי אפרודיט 1 ! 2

אקרוס אשדוד הבא (המפגש האחרון בסנסטור 11)  
אפרודיט 5 ! 6 דמיון הגורמים