האוניברסיטה
הפתוחה

מתמטיקה בדידה

מבוא מהיר ללוגיקה

איתי הראבן

האוניברסיטה
הפתוחה

מתמטיקה בדידה

מבוא מהיר ללוגיקה

איתי הראבן

20476
מהדורה פנימית
דצמבר 2011
לא למכירה ולא להפצה
מק"ט 20476-1043

כותבים:
איתי הראבן
אילון בן שמואל (תשובות לשאלות)

יועצים:
פרופ׳ דניאלה ליבוביץ, האוניברסיטה הפתוחה
ד״ר שמואל ברגר, האוניברסיטה הפתוחה
ד״ר מנור מנדל, האוניברסיטה הפתוחה
ד״ר גיל אלון, האוניברסיטה הפתוחה

עורכת לשון:
חוה ניומן

הדפסה דיגיטלית מתוקנת – דצמבר 2011

בית ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע״ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת״ד 808, רעננה 43537.
The Open University of Israel, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 43537.
Printed in Israel.

תוכן העניינים

הקדמה

בפרק זה נסקור בקצרה כמה מושגים בלוגיקה, אשר ישמשו ליצירת שפה משותפת בקורס זה ובקורסים הבאים. למעוניינים, נושאי הפרק הזה מוצגים בהרחבה בקורסים **נושאים במתמטיקה למדעי החברה 10444**, **לוגיקה מתמטית 20327**, **לוגיקה למדעי המחשב 20466**, וכן בקורס **מבוא ללוגיקה 10703** השייך למחלקה למדעי הרוח.

1 פסוקים וערכי אמת. משתנים פסוקיים

פסוק (proposition) הוא משפט בשפת הדיבור או בשפה מתמטית, המביע טענה, שהיא **אמת** או **שקר**. הנה כמה דוגמאות:

א. ביולי 2011 היה ברק אובאמה נשיא ארצות-הברית.
ב. $10 + 18 = 4$
ג. $3 \times 4 > 10$
ד. חצוצרה היא כלי נשיפה וגיטרה היא כלי מיתר.
ה. בפיתוח העשרוני של π, הספרה שנמצאת בַּמָּקום המאה-טריליון היא 4.

הפסוקים א׳, ג׳ ו-ד׳ הם אמת. פסוק ב׳ הוא שקר. גם טענה ה׳ היא פסוק: הקביעה שמוצגת בסעיף ה׳ היא אמת או שקר, גם אם איננו יודעים כרגע מהי הספרה שבה מדובר.

למושגים **אמת** ו**שקר** אין כאן משמעות ערכית: במילה ״שקר״ כוונתנו פשוט לטענה שאינה נכונה, שאינה תואמת את המציאות. בשפות רבות יש מילה ניטרלית עבור טענה כזו: באנגלית משמשת המילה **False**, בערבית– **باطل**. אם בשבת בבוקר שמעון קם מבולבל ואמר למשפחתו ״היום יום ראשון״, האמירה שלו היא False (היא אינה משקפת את המציאות), אך אינה Lie (הוא לא מסר מידע שגוי בכוונה). בהיעדר כינוי פשוט וקצר בעברית לטענה שאינה נכונה, נהוג, בדיון בלוגיקה בעברית, לתרגם את המילה **False** ל״**שקר**״. איננו מתייחסים בכך לכוונה של הדובר או למצב הידע שלו על העולם, אלא פשוט לכך שהאמירה אינה נכונה.

את המושגים **אמת** ו**שקר** נייצג בעזרת האותיות T ו- F בהתאמה (True, False).
ייצוג מקובל אחר הוא: הספרה 1 עבור אמת, והספרה 0 עבור שקר.
על פסוק שהוא אמת אומרים ש**ערך האמת** (Truth value) שלו הוא T או 1.
על פסוק שהוא שקר אומרים שערך האמת שלו הוא F או 0.
לכל פסוק יש ערך אמת **יחיד**: אחד משני הערכים T או F.
למשל, ערך האמת של הפסוק $3 \times 4 > 10$ הוא T.
ערך האמת של הפסוק $10 + 18 = 4$ הוא F.

המושג ״פסוק״ חופף במידה רבה (אך לא מלאה) למושג ״משפט חיווי״ בלשון.
הנה דוגמאות למשפטים ולחלקי משפטים **שאינם** פסוקים:
(*i*) מה השעה?
(*ii*) לך הבייתה מוטי, שלום ותודה!
(*iii*) $x + 2 = 5$
(*iv*) $3 \times 2 + 4$
(*v*) שכונת תלפיות
(*vi*) החשבון ברח יבֵש.

אף אחת מן הדוגמאות האלה אינה פסוק, כי עבור אף אחת מהן לא ניתן לומר שהיא אמת או שקר: דוגמה (i) היא שאלה. דוגמה (ii) היא שילוב של ציווי וברכה, ואף אחת מהן אינה טענה.

לגבי דוגמה (iii), לפני שנוכל לשאול אם היא אמת או שקר, עלינו להציב ערך מספרי במקום x.

גם הדוגמאות (iv) ו-(v) אינן טענות: לא ניתן לשאול אם נכון ש- $3 \times 2 + 4$. במילים אחרות, אין משמעות לשאלה "האם נכון ש-10?". בדומה, לא ניתן לשאול אם נכון ששכונת תלפיות*.

דוגמה (vi) היא משפט חיווי בעברית, תקין מבחינה תחבירית, אבל הוא חסר משמעות, ולא ניתן לייחס לו ערך אמת.(1)

לגבי טענות מסוימות, נחוץ לדעת את ההֶקשר שבו הן נאמרו כדי לייחס להן ערך אמת. למשל:

א. אני נפוליאון.

ב. היום יום ראשון.

ג. קיים מספר שאם נכפול אותו ב-2 נקבל 5.

טענה א׳ היא אמת אם נאמרה על-ידי נפוליאון, אך היא שקר אם נאמרה על-ידי אדם אחר.
טענה ב׳ היא אמת אם נאמרה ביום ראשון, אך היא שקר אם נאמרה ביום אחר.
טענה ג׳ היא אמת אם מפרשים את המילה "מספר" כמספר ממשי או כמספר רציונלי. היא שקר אם מפרשים את המילה "מספר" כ"מספר שלם".

לגבי טענות כאלה, נניח שנתון ההֶקשר שבו הן נאמרו, ואז נוכל להתייחס אליהן כאל פסוק. למעשה, גם עבור חלק מהפסוקים שהבאנו לדוגמה בתחילת הסעיף, הנחנו שאנו מדברים על הֶקשר מסוים. אמרנו שהפסוק $10 + 18 = 4$ הוא שקר. הוא אכן שקר כאשר מתייחסים לפירוש המקובל שלו, אבל הוא אמת אם הוא נועד להביע את העובדה ש-18 שעות אחרי השעה 10 מגיעה השעה 4.

ציינו שהפסוק $3 \times 4 > 10$ הוא אמת. פסוק זה הוא שקר אם נניח שהמספרים כתובים בבסיס הקסָדֶצימלי (Hexadecimal), שבו הסימן "10" מייצג את המספר העשרוני 16.

כדי לא להזדקק לייעוץ של עורך-דין בכל פעם שאנו מציינים שפסוק מסוים הוא אמת ושפסוק אחר הוא שקר, נסכים שבכל מקרה שבו יש למושגים פירוש או הֶקשר מקובל, נניח (בלי לציין זאת) שמדובר על הפירוש או על ההֶקשר הזה, בדיוק כפי שעשינו בתחילת הסעיף.

כאשר נרצה לדבר על פסוק כלשהו, בלי להתחייב מהו, נשתמש לרוב באחת האותיות p,q,r,s. אותיות אלה ייצגו פסוקים, בדומה לאופן שבו השתמשנו בבית-הספר ב-x,y,z לייצוג מספרים. לאותיות המסמנות פסוקים נקרא **משתנים פסוקיים**.

---

* בשפות תכנות מסוימות, כל ערך שאינו 0 או **null** נחשב "אמת". בלוגיקה מתמטית אין מוסכמה כזאת.

האות p יכולה, למשל, לייצג את הפסוק $4 = 18 + 10$, היא יכולה לייצג את הפסוק
חצוצרה היא כלי נשיפה וגיטרה היא כלי מיתר, והיא יכולה גם לייצג את הפסוק
היום בבוקר שמעון אמר ש-511 הוא מספר ראשוני, אבל אני חושב שהוא טועה.

במקרים רבים נרצה לנתח אמירות מורכבות למרכיבים הלוגיים שלהן.
בסעיפים הבאים נבנה כלים שיאפשרו לנו לעשות זאת.

2 קַשָּׁר השלילה

שלילת הפסוק $4 = 18 + 10$ היא הפסוק $4 \neq 18 + 10$.
שלילת הפסוק $2 < 5$ היא הפסוק 2 אינו קטן מ-5.
שלילת הפסוק חצוצרה היא כלי נשיפה היא הפסוק חצוצרה אינה כלי נשיפה.
שלילתו של פסוק p פירושה: לא p. שלילת p מסומנת: $\neg p$. באנגלית: Negation. יש ספרים שבהם שלילה מסומנת על-ידי ~. (בשפות תכנות שונות, שלילה מסומנת על-ידי המילה NOT או על-ידי סימן קריאה.)

שימו לב ששלילה של פסוק אינה "ההיפך" מהפסוק. למשל, שלילת הפסוק שמעון הוא הסטודנט הגבוה ביותר בכיתה **אינה** הפסוק שמעון הוא הסטודנט הנמוך ביותר בכיתה אלא הפסוק שמעון אינו הסטודנט הגבוה ביותר בכיתה. לעניין זה נחזור לקראת סוף הפרק.

אם p הוא אמת, $\neg p$ הוא שקר, ולהיפך:

p	$\neg p$
T	F
F	T

לוח 1: לוח האמת של $\neg$

סימן השלילה הוא קַשָּׁר חד-מקומי, כלומר קַשָּׁר הפועל על פסוק בודד.
בסעיף הבא נציג שני קַשָּׁרים דו-מקומיים.

3 הקַשָּׁרים "וגם", "או"

מיליות קישור מסוימות בעברית מאפשרות לנו לשלב שני פסוקים וליצור מהם פסוק אחד.
למשל, הפסוק חצוצרה היא כלי נשיפה וגיטרה היא כלי מיתר בנוי משני פסוקים:
מן הפסוק חצוצרה היא כלי נשיפה ומן הפסוק גיטרה היא כלי מיתר.

מילית הקישור "ו-" משלבת את שני הפסוקים לפסוק אחד:
חצוצרה היא כלי נשיפה **ו**גיטרה היא כלי מיתר.
בלוגיקה ובמתמטיקה בכלל, פעולת השילוב הזו מיוצגת על-ידי הסימן $\wedge$.
אם p מייצג את הפסוק חצוצרה היא כלי נשיפה ו-q מייצג את הפסוק גיטרה היא כלי מיתר, אזי את הפסוק חצוצרה היא כלי נשיפה **ו**גיטרה היא כלי מיתר נוכל לייצג כך: $p \wedge q$.

למילית "ו-" יש בעברית משמעויות שונות. נתבונן למשל במשפט:
רון והרמיוני נפגשו לראשונה ברכבת.
המשפט הזה כמובן **אינו** שילוב של שתי האמירות המוזרות:
רון נפגש לראשונה ברכבת ו- הרמיוני נפגשה לראשונה ברכבת.
השימוש במילית "ו-" בפסוק רון והרמיוני נפגשו לראשונה ברכבת אינו יכול להיות מיוצג על-ידי הסימן $\wedge$. לעומת זאת, האמירה, שנשמעת דומה מבחינה תחבירית:
רון והרמיוני נמצאו מתאימים לגריפינדור, פירושה בדיוק:
רון נמצא מתאים לגריפינדור $\wedge$ הרמיוני נמצאה מתאימה לגריפינדור.

בשפה המדוברת, המילית "ו-" עשויה גם לתאר סדר התרחשויות. למשל:
באמצע הספר השביעי נמאס לי והלכתי לישון פירושו בדרך-כלל שהלכתי לישון אחרי שנמאס לי ולא להיפך.
לסימן $\wedge$ אין משמעות כזו:
הוא אינו מתייחס לקֶשֶר סיבתי או לקֶשֶר בזמנים בין חלקי הפסוק.

כדי להבהיר את המשמעות של הסימן $\wedge$ בצורה שאינה תלויה במוסכמות לשוניות כאלו או אחרות, נגדיר אותה בצורה מפורשת:

כאשר הפסוקים q, p שניהם אמת, הפסוק $p \wedge q$ הוא אמת.
כאשר לפחות אחד מבין הפסוקים q, p הוא שקר, הפסוק $p \wedge q$ הוא שקר.

זו **ההגדרה** של משמעות הסימן $\wedge$. נסכם אותה בטבלה:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

לוח 2: לוח האמת של $\wedge$

טבלה זו נקראת **לוח האמת** של הקֶשֶר $\wedge$. את הסימן $\wedge$ קוראים "**וגם**" או בקיצור "**ו–**".
בלוגיקה כינויו הרשמי הוא "קוֹניוּנקְציה" (Conjunction).*
הקֶשֶר $\wedge$ הוא **דו-מקומי**, כלומר זהו קֶשֶר הפועל על זוג פסוקים.

קֶשֶר דו-מקומי אחר הוא הסימן $\vee$, המוגדר כך:

כאשר **לפחות** אחד מהפסוקים q, p הוא אמת, $p \vee q$ הוא אמת.
כאשר שני הפסוקים q, p הם שקר, $p \vee q$ הוא שקר.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

לוח 3: לוח האמת של $\vee$

את הסימן $\vee$ קוראים "**או**".

לדוגמה, אהד, בנו של שמעון, חזר הביתה ביום גשום. שמעון הביט בו ואמר לעצמו:
אהד נפל לתוך שלולית **או** מישהו השליך על אהד בוץ.
שימו לב שאם אהד נפל לתוך שלולית ובנוסף לכך מישהו השליך עליו בוץ, לא נגיד ששמעון טעה באבחנתו. פירוש זה של "או" בא לידי ביטוי בשורה הראשונה בלוח האמת של "או" המוצג למעלה.

בשפה המדוברת, הביטוי "או" משמש לעתים במשמעות של "או-או", כלומר נועד לציין שבדיוק אחת משתי האפשרויות נכונה. "או" כזה נקרא "**או מוציא**" (**Exclusive OR**): נכונות אחד הרכיבים מוציאה מכלל אפשרות את נכונות הרכיב האחר. ה"**או**" המתמטי, $\vee$, אינו כזה. ה-"**או**" המתמטי הוא "**או כולל**" (**Inclusive OR**): **ב-"או" המתמטי, כאשר שני הרכיבים יחד הם אמת, הפסוק כולו הוא אמת.**

בקֶרב לוגיקאים, שמו הרשמי של ה"**או**" המתמטי הוא "דיסיוּנקְציה" (Disjunction).†
הסימן $\vee$ לקוח מהאות הראשונה של המילה הלטינית Vel, שפירושה "או" במובן המתמטי, הכולל. (אגב, בלטינית יש מילה נפרדת לציון "או מוציא": המילה Aut).

* בשפות תכנות מסוימות סימנו הוא AND, ובאחרות סימנו הוא &&.
† בכמה שפות תכנות סימנו הוא OR, בשפות אחרות הוא מסומן על-ידי שני קווים אנכיים: ||

4 מהו קַשָּׁר לוגי

בשיר "פטעוני" (Jabberwocky), מתוך "מבעד למראה ומה שעליסה מצאה שם" של לואיס קרול, בתרגומו של אהרן אמיר, מוזכר כי בזמן מסוים חִילְכֵּן היה נִמְזַר וּמְתֵי עָרָן כֵּרדוּ.
איננו מבינים את רוב המילים באמירה זו, אבל אנו רואים שהיא מורכבת משתי טענות:
(i) חִילְכֵּן היה נִמְזַר. (ii) מְתֵי עָרָן כֵּרדוּ.
השימוש במילית "ו-" באמירה הנתונה נראה מתאים לייצוג על-ידי $\wedge$.

כעת נניח שמישהו אמין מדווח לנו שבדק את הנושא וגילה שחילכן אכן היה נמזר, אבל מתי ערן לא כרדו כלל וכלל. במצב זה ברור שהפסוק חִילְכֵּן היה נִמְזַר וּמְתֵי עָרָן כֵּרדוּ הוא שקר. הסקנו זאת מתוך ערכי האמת של שני הרכיבים, **בלי להבין כלל את משמעותם של הרכיבים**. זה התאפשר בזכות העובדה שלמילית "ו-", כלומר לקַשָּׁר $\wedge$, יש **לוח אמת**.

בשפה המדוברת קיימות דרכים רבות לצרף זוג פסוקים ולקבל מהם פסוק חדש. בלוגיקה מעניינות אותנו רק חלק מהדרכים האלה: ביטוי המייצר מתוך כל שני פסוקים פסוק חדש נקרא קַשָּׁר **לוגי** דו-מקומי, אם ורק אם ערך האמת של כל פסוק מורכב שנקבל בעזרתו תלוי רק בערכי האמת של הפסוקים המרכיבים.

במילים אחרות, ביטוי המייצר מתוך כל שני פסוקים פסוק חדש הוא **קַשָּׁר לוגי דו-מקומי** אם ורק אם יש לו לוח אמת.

בדומה, ביטוי המייצר פסוק מתוך פסוק בודד, ויש לו לוח אמת, הוא **קַשָּׁר לוגי חד-מקומי**.

כדי להבהיר את הדרישה מקַשָּׁר לוגי, הנה דוגמה לביטוי **שאינו** קַשָּׁר לוגי:
לכל פסוק אפשר להוסיף את הפתיח "**שמעון אמר ש...**". למשל:

שמעון אמר שחצוצרה היא כלי נשיפה.
שמעון אמר ש- $3 \times 4 > 10$.

הוספת הפתיח "**שמעון אמר ש**..." לפסוק – נותנת לנו פסוק חדש. למרות זאת, הפתיח הזה אינו קשר לוגי:
אם p הוא אמת, הטענה "**שמעון אמר ש-**p" יכולה להיות אמת או שקר.
בדומה, אם p הוא שקר, הטענה "**שמעון אמר ש-**p" יכולה להיות אמת או שקר.
מובן אפוא שלא ניתן לכתוב לוח אמת עבור "**שמעון אמר ש**...".לפיכך ביטוי זה אינו קַשָּׁר לוגי.

לקַשָּׁר השלילה יש לוח אמת, לכן הוא קשר לוגי חד-מקומי. בדומה, הקַשָּׁרים $\wedge,\vee$ הם קַשָּׁרים לוגיים דו-מקומיים. בלוח האמת של קַשָּׁר לוגי חד-מקומי יש שתי שורות, ואילו בלוח

האמת של קֶשֶׁר לוגי דו-מקומי יש ארבע שורות. בהמשך הפרק נזכיר בחטף גם קְשָׁרִים לוגיים תלת-מקומיים וכן הלאה.

▼ שאלה 1

הביטוי "**לפנֵי ש**..." יכול לשלב זוג פסוקים לפסוק אחד. למשל:
סיימתי לכתוב את המטלה **לפנֵי ש**שוחחתי בצ'אט עם שמעון.
חִילְכֵּן היה נִמְזַר **לפנֵי ש**מְתֵי עֲרַן כֵּרדוּ.
נתחו דוגמאות אלה או דוגמאות אחרות פרי דמיונכם, והראו שהביטוי "לפנֵי ש..." **אינו** (!) קֶשֶׁר לוגי.(2)

התשובה בעמ' 37

5 הקֶשֶׁר "אם...אז..." והקֶשֶׁר "אם ורק אם..."

הצירוף "**אם**... **אז**..." נפוץ מאוד הן במתמטיקה והן בשפה המדוברת.
האם הוא קֶשֶׁר לוגי, ואם כן, מהו לוח האמת שלו? נתבונן למשל באמירות שלהלן:

(*) **אם** חצוצרה היא כלי נשיפה, **אז** 4 = 18 + 10.
(**) **אם** לסבתא יש גלגלים, **אז** היא אוטובוס.
(***) **אם** לסבתא יש גלגלים, **אז** היא סבתא.

האם אלה בכלל פסוקים? אם הם פסוקים, מהם ערכי האמת שלהם? גם אם נסכים על ערכי אמת עבורם, לא ברור איך ניתן לכתוב **לוח אמת** לביטוי "**אם**... **אז**...", שיביע את המשמעות שלו בצורה שתלויה רק בערכי האמת של הרכיבים.

האם הקושי נובע מהניסיון שלנו לשלב אמירות שאינן קשורות זו לזו לפסוק אחד, או שהוא קשור ספציפית לביטוי "**אם**... **אז**..."? בשאלה הבאה ננסה לברר זאת.

▼ שאלה 2

א. בכל אחת מהאמירות (*), (**), (***) שלמעלה, החליפו את הביטוי "**אם**... **אז**..." בקֶשֶׁר הלוגי "...**וגם**...". קבעו אם הפסוק שקיבלתם הוא אמת או שקר.
ב. חזרו על סעיף א', אלא שהפעם במקום "**וגם**" השתמשו בקֶשֶׁר הלוגי "**או**".

התשובה בעמ' 38

כפי שראינו בשאלה 2, לוחות האמת של הקְשָׁרִים $\wedge,\vee$ מגדירים את ערכי האמת של הפסוקים המורכבים המתאימים, והתוצאה מתקבלת על הדעת, גם אם הפסוקים נשמעים קצת מוזרים. שורש הבעיה באמירות (*), (**), (***) הוא הביטוי "**אם**... **אז**...". המשמעות המקובלת של ביטוי זה בעברית (ובשפות אחרות שאינן שפות פורמאליות) אינה מאפשרת

לראותו כקֶשֶׁר לוגי: אנו מתקשים לייחס ערך אמת לרבים מהפסוקים שניתן לבנות בעזרתו, קל וחומר – לבנות לוח אמת עבורו.

בשפת הדיבור הביטוי "**אם**... **אז**..." אינו קֶשֶׁר לוגי.
למרות זאת, במתמטיקה ובהֶקְשֵׁרים פורמאליים אחרים ניתנת לו משמעות של קֶשֶׁר לוגי.

משמעותו מוגדרת בלוח האמת הזה:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

לוח 4: לוח האמת של $\to$

כדי להבין את התפקיד של לוח האמת הזה ואת משמעותו, נחשוב על התסריט הבא:
תכננתם ללמוד עם שמעון לבחינה. מזג האוויר קצת סוער, ושמעון לא ממש רוצה לצאת מהבית. התקשרתם אליו, ואחרי דברי שכנוע הוא אמר: **אם** ייפסק הגשם, (**אז**) אבוא אליכם**.**

נניח שהגשם פסק ושמעון לא בא. במצב זה ברור ששמעון לא עמד בדיבורו. ההבטחה שלו התגלתה כשקר. זה מביא אותנו לקבוע שכאשר p אמת ו-q שקר, הפסוק $p \to q$ הוא שקר.

נניח שהגשם פסק ושמעון התייצב אצלכם. במצב זה שמעון עמד בדיבורו.
זה מביא אותנו לקבוע שכאשר p אמת ו-q אמת, הפסוק $p \to q$ הוא אמת.

כעת נניח שהגשם לא פסק. במצב זה שמעון משוחרר מהתחייבות. משמע, במצב שבו הגשם לא פסק, שמעון יעמוד בדיבורו בין שיגיע אליכם ובין שלא יגיע.
זה מביא אותנו לקבוע שכאשר p הוא שקר, הפסוק $p \to q$ הוא אמת, בלי תלות בערך האמת של q.

ייתכן שחלקכם אינו מסכים לכמה מן הקביעות שלנו כאן, ובפרט לקביעה שבשורה השלישית בלוח: שמעון אמר "**אם** ייפסק הגשם, אבוא אליכם"**.** נניח שהגשם לא פסק וששמעון בכל זאת הגיע. האם סביר לומר שהוא עמד בדיבורו? מה עם התנאי שהתייחס להפסקת הגשם? אנו טוענים ששמעון דיבר אמת, וכדי להבהיר זאת נזכיר שיש בעברית אפשרות להתנַיה אחרת, שבה הפסקת הגשם היא תנאי הכרחי לבואו של שמעון:
אילו שמעון היה אומר: **רק אם** ייפסק הגשם, אבוא אליכם, פירושו שהתחייב שלא יבוא כל עוד יורד גשם.
אבל שמעון לא אמר זאת. הוא אמר: **אם** ייפסק הגשם, אבוא אליכם.

אמירה זו, שאין בה "**רק אם**", משאירה אותו חופשי מהתחייבות במקרה שהגשם לא פסק.

לסיכום:
הפסוק $q \to p$ הוא שקר כאשר p הוא אמת ו-q הוא שקר. בכל מקרה אחר, $q \to p$ הוא אמת.

זהו הפירוש המקובל של "**אם...אז...**" בלוגיקה ובמתמטיקה בכלל.* כאשר אנו מדברים וחושבים מתמטיקה, אנו מחילים פירוש זה גם על מקרים שבהם בשפה המדוברת לא ברור לנו מהו ערך האמת של הפסוק. הסיבה שחשוב לנו להפוך את "אם... אז..." לקַשָר לוגי תתברר יותר בסוף הפרק, בסעיף 11.

▼ שאלה 3

חשבו את ערכי האמת של הפסוקים (*), (**), (***) שבתחילת הסעיף.

התשובה בעמ' 38

קַשָר לוגי דו-מקומי נוסף, שבו מרבים להשתמש במתמטיקה, הוא "**אם ורק אם**". הנה לוח האמת שלו:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

לוח 5: לוח האמת של $\leftrightarrow$

הפסוק $q \leftrightarrow p$ הוא אמת כאשר לפסוקים p,q יש אותו ערך אמת, והוא שקר כאשר ערכי האמת של p,q שונים זה מזה. את הביטוי "**אם ורק אם**" כותבים לעתים בקיצור "**אםם**".
באנגלית מתמטית, הביטוי המקביל הוא **if and only if**, והקיצור המקביל לאםם הוא **iff**.

בשפת הדיבור, השימוש ב-"אם ורק אם" אינו נפוץ. בכל זאת נדגים:
בשיחה אחרת שמעון הודיע: אבוא אליכם **אם ורק אם** ייפסק הגשם.

---

* "אם... אז..." שהגדרנו כאן **אינו** מקביל למבנה ...if... then המוכר בתכנות. בתכנות אנו משתמשים במבנה כזה: אם (ביטוי בוליאני) אז {בצע סדרת פעולות}. לעומת זאת, בלוגיקה מדובר בביטוי מהצורה: אם A אז B, כאשר הן A והן B הם פסוקים (ביטויים בוליאניים), והביטוי כולו מקבל ערך "אמת" או "שקר", בדומה לכל ביטוי בוליאני מורכב אחר!
בלוגיקה, הביטוי "אם... אז..." הוא קַשָר לוגי בדיוק כמו AND , OR.

יש שני מצבים שבהם הוא עומד בדיבורו: המצב שבו הגשם פסק ושמעון הגיע, והמצב שבו הגשם לא פסק ושמעון לא הגיע. בשני המקרים האחרים שמעון אינו עומד בדיבורו, כלומר הפסוק שלו הוא שקר.

6 הַצְרָנָה. פסוקים פורמאליים ולוחות האמת שלהם

ייצוג טענות משפת הדיבור בשפה פורמאלית נקרא **הַצְרָנָה** (Formalization).
עסקנו בהַצְרָנָה, בלי לקרוא לה בשם, בפסקאות האחרונות של סעיף 1 ואילך.

שאלה 4

נסמן:

p: הקרנף פרש כנפיים. q: הקרנף עף לשמים.
r: העורב פרש כנפיים. s: העורב עף לשמים.

הפסוקים א׳-ו׳ שלהלן כתובים בשפה מדוברת. הַצְרִינוּ אותם:
הביעו אותם בעזרת הסימנים p,q,r,s ובעזרת הקַשָׁרים הלוגיים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$.

א. הקרנף פרש כנפיים ועף לשמים.
ב. הקרנף פרש כנפיים אבל לא עף לשמים.(3)
ג. אם הקרנף עף לשמים, אז הוא פרש כנפיים.
ד. לפחות אחד משני בעלי-החיים – הקרנף והעורב – פרש כנפיים.
ה. אם העורב עף לשמים והקרנף לא, אז העורב פרש כנפיים והקרנף לא.
ו. לא נכון ש(הקרנף עף לשמים אם ורק אם העורב לא פרש כנפיים ולא עף לשמים).

הביעו בעברית את הפסוקים הפורמאליים ז׳, ח׳ שלהלן:
ז. $(r \wedge s) \rightarrow (p \vee q)$
ח. $(p \vee r) \leftrightarrow (q \vee s)$

התשובה בעמ׳ 38

כדאי לשים לב, שבמקרים רבים דרך ההַצְרָנָה של פסוק הנתון בשפה מדוברת או בשפה מתמטית אינה מוכתבת מראש: **זכותנו לייצג בעזרת משתנה פסוקי בודד כל פסוק, גם אם הוא נראה מורכב**. למשל, את הפסוק אכלתי ושתיתי אנו יכולים לייצג כ- $p \wedge q$, אבל זכותנו גם לייצג אותו בעזרת משתנה פסוקי בודד, כגון r. הבחירה בדרך הייצוג תלויה בהֶקשר שבו אנו פועלים. אם בדיון שעל הפרק לא ייתכן שעשיתי רק אחת משתי הפעולות ולא את האחרת, יהיה זה סביר בהחלט, עבור אותו דיון, לייצג את הפסוק אכלתי ושתיתי בעזרת משתנה פסוקי בודד.

לביטוי שמתקבל מהַצְרָנָה של פסוק נקרא **פסוק פוֹרמָאלי**. למשל, הביטוי $p \vee q$ הוא פסוק פורמאלי.(4)

גם משתנה פסוקי בודד, כגון הסימן p, הוא פסוק פורמאלי.

לפסוק פורמאלי המכיל לפחות קֶשֶׁר לוגי אחד נקרא **פסוק פורמאלי מורכב**.

הנה פסוק פורמאלי מורכב:

$$((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee r) \qquad (*)$$

בדומה לדיון שבתחילת סעיף 4 (מהו קֶשֶׁר לוגי), נניח שלא ידועים או לא מובנים לנו הפסוקים שאותם מייצגים המשתנים p,q,r אבל ידועים לנו **ערכי האמת** שלהם. מתוך מידע זה נוכל בקלות לקבוע את ערך האמת של (*): נעשה זאת על-ידי שימוש חוזר בלוחות האמת של הקֶשָׁרים הלוגיים. למשל, אם p הוא אמת, q הוא אמת ו-r הוא שקר, אז הפסוק (*) הוא אמת.

לצורך חישוב ערך האמת של (*), אין זה משנה אם נציב:

p: חצוצרה היא כלי נשיפה. q: גיטרה היא כלי מיתר. r: 2 + 2 = 5

או אם נציב:

p: גיטרה היא כלי מיתר. q: 2 + 2 = 4

r: השוער של מכבי חיפה – גובהו חמישה מטרים ועשרים סנטימטרים.

באופן כללי, ערך האמת של פסוק פורמאלי אינו תלוי בפירוש של המשתנים הפסוקיים המופיעים בו אלא רק בערכי האמת שלהם: ערך האמת של הפסוק הפורמאלי נקבע מתוך ערכי האמת של המשתנים הפסוקיים, על-ידי שימוש חוזר בלוחות האמת של הקֶשָׁרים הלוגיים.

לִפסוק פורמאלי ניתן אפוא לבנות **לוח אמת**. לוח האמת של פסוק פורמאלי מפרט את כל הדרכים להקצות ערכי אמת למשתנים הפסוקיים המופיעים בו; עבור כל דרך כזו, העמודה הימנית ביותר בלוח מציגה את ערך האמת שמקבל הפסוק המורכב.

הנה לוח האמת של הפסוק הפורמאלי (*):

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$	$q \vee r$	$((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee r)$
T	**T**	**T**	T	F	F	T	**T**
T	**T**	**F**	T	T	T	T	**T**
T	**F**	**T**	T	F	F	T	**T**
T	**F**	**F**	T	T	T	F	**F**
F	**T**	**T**	T	F	F	T	**T**
F	**T**	**F**	T	T	T	T	**T**
F	**F**	**T**	F	F	F	T	**T**
F	**F**	**F**	F	T	F	F	**T**

לוח 6: דוגמה ללוח אמת של פסוק מורכב

למעשה, לוח האמת של הפסוק הפורמאלי (*) מורכב **משלוש העמודות השמאליות והעמודה הימנית**.

בשלוש העמודות השמאליות הקצֵינו ערכי אמת למשתנים, בכל דרך אפשרית. בעמודה הימנית פירטנו את ערכי האמת המתאימים של הפסוק הפורמאלי (*). העמודות שביניהן מפרטות כיצד קיבלנו את העמודה הימנית; הן אינן נחשבות חלק מלוח האמת: הן החישוב של לוח האמת, ההוכחה של נכונותו.

ללוח המלא, הכולל את עמודות החישוב שבדרך, נקרא **לוח אמת מורחב**.

שאלה 5

א. רשמו לוח אמת מורחב עבור הפסוק הפורמאלי $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (r \to (q \wedge p))$

ב. כמה שורות יש בלוח האמת של פסוק מורכב הבנוי בעזרת ארבעת המשתנים הפסוקיים p,q,r,s?

התשובה בעמ' 39

שאלה 6

א. הראו שבלוח האמת של $(p \to q) \vee (q \to p)$, העמודה הימנית מכילה רק T.

ב. הראו שבלוח האמת של $(p \wedge q) \wedge (p \to \neg q)$, העמודה הימנית מכילה רק F.

ג. הראו שלשני הפסוקים הפורמאליים $p \to (q \to r)$, $(p \wedge q) \to r$ יש אותו לוח אמת.

התשובה בעמ' 39

בסעיף זה הגדרנו **לוח אמת של פסוק פורמאלי**. בסעיפים הקודמים הגדרנו **לוחות אמת של קשָרים לוגיים**.

מה הקֶשֶר בין שני המושגים? למעשה, ניתן לחשוב על לוח אמת בשתי דרכים, שונות מעט זו מזו.

נתבונן למשל בלוח האמת הבא:

p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$
T	**T**	F	**F**
T	**F**	T	**T**
F	**T**	F	**T**
F	**F**	T	**T**

לוח 7: לוח אמת של פסוק או של פעולה?

זהו לוח אמת של פסוק פורמאלי, אבל אפשר לחשוב עליו גם אחרת: הלוח מגדיר פעולה לוגית (אפשר לקרוא לפעולה זו "**אם**... **אז לא**..."). אילו היה לנו עניין בכך, יכולנו לייצג פעולה זו על-ידי סימן חדש ולצרף אותה לקבוצת הקשָרים הלוגיים שבהם אנו נעזרים באופן שוטף. מנקודת מבט זו, הסימנים q, p הם רק "מצייני מקום" שבהם אנו נעזרים כדי לרשום לוח אמת עבור הקשֶר הלוגי "**אם**... **אז לא**...".

בדומה, נחזור ללוח האמת שבעמוד 17 (לוח 6). הצגנו אותו כלוח אמת של הפסוק הפורמאלי

(*) $((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee r)$

באותה מידה אנו יכולים לחשוב עליו כעל **לוח אמת של קֶשֶׁר לוגי תלת-מקומי**.
מובן שזהו המצב לגבי כל פסוק פורמאלי ולגבי כל לוח אמת:

אבחנה

פסוק פורמאלי שמופיעים בו בדיוק n משתנים פסוקיים – אפשר לראות אותו כקֶשֶׁר לוגי n-מקומי. (ולוח אמת של פסוק כזה אפשר לראות כלוח אמת של קֶשֶׁר לוגי n-מקומי.) [5]

לסיום הסעיף – הבהרה קצרה:
לוחות אמת נכתבים עבור פסוקים פורמאליים, הכתובים בעזרת משתנים פסוקיים.
לא נכתוב לוחות אמת עבור פסוקים שנתונים במפורש.
למשל, אין טעם בלוח אמת עבור הפסוק $1+1=2$ **או** $6 < 4$.

זה מובן ובכל זאת נסביר, כי לחוסר הטעם יש שתי סיבות:
ראשית, במקרה שלפנינו ערכי האמת של שני הרכיבים ידועים, כך שאין תועלת בלוח שמתייחס לאפשרויות אחרות. שנית, אף שאנו נוטים להתייחס אל הפסוק $1+1=2$ או $6 < 4$ כמורכב משני פסוקים (אנו נוטים להצרין אותו כ- $p \vee q$), באותה מידה זכותנו, אם הֶקְשר שבו אנו עוסקים מתאים לכך, להתייחס אל הפסוק כולו כאל טענה אחת (זכותנו להצרין אותו באות בודדת, למשל p).

ההחלטה על דרך הפירוק של פסוק למרכיביו היא חיונית, לצורך קביעת לוח אמת. בפסוק פורמאלי, קיימת חלוקה למרכיבים, ואין צורך במידע נוסף: מרכיביו של פסוק פורמאלי הם המשתנים הפסוקיים. לעומת זאת, בפסוק מפורש, חלוקה למרכיבים היא בגדר מידע נוסף, שאינו גלום בתוך הפסוק עצמו.

7 טאוטולוגיה וסתירה. שקילוּת בין פסוקים

הגדרה 1: טאוטולוגיה וסתירה

א. פסוק פורמאלי שהעמודה הימנית בלוח האמת שלו מכילה רק T נקרא טאוטולוגיה (Tautology).

ב. פסוק פורמאלי שהעמודה הימנית בלוח האמת שלו מכילה רק F נקרא סתירה (Contradiction).

טאוטולוגיה היא אפוא פסוק פורמאלי, שהצבה של פסוקים כלשהם, בשפה המדוברת או המתמטית, במקום המשתנים הפסוקיים שבו, תיתן תמיד פסוק אמת. סתירה היא פסוק פורמאלי, שהצבה של פסוקים כלשהם, בשפה המדוברת או המתמטית, במקום המשתנים הפסוקיים שבו, תיתן תמיד פסוק שקר.

דוגמאות

בשאלה 6, טענת סעיף א׳ היא שהפסוק הפורמאלי $(p \to q) \vee (q \to p)$ הוא טאוטולוגיה. טענת סעיף ב׳ של אותה שאלה היא שהפסוק הפורמאלי $(p \wedge q) \wedge (p \to (\neg q))$ הוא סתירה.

▼ שאלה 7

א. הוכיחו: $p \vee (\neg p)$ הוא טאוטולוגיה.
ב. הוכיחו: $p \wedge (\neg p)$ הוא סתירה.
ג. הוכיחו: $p \to p$ הוא טאוטולוגיה.
ד. האם $p \to (\neg p)$ הוא טאוטולוגיה? האם הוא סתירה?

התשובה בעמ׳ 40

נציג מושג נוסף:

שקילוּת טַאוּטוֹלוֹגִית (ההגדרה הבאה היא הגדרה זמנית. נוסח סופי של ההגדרה – בהמשך):
שני פסוקים פורמאליים נקראים **שקולים טַאוּטוֹלוֹגִית**, ובקיצור– **שקולים**, אם יש להם אותו לוח אמת.

דוגמאות

בשאלה 6ג ראינו שהפסוק הפורמאלי $p \to (q \to r)$ שקול לפסוק הפורמאלי $(p \wedge q) \to r$.

בעמודים האחרונים הקפדנו להשתמש בביטוי "פסוק פורמאלי", כדי להדגיש את ההבדל בינו לבין פירושיו האפשריים, שהם פסוקים בשפה טבעית או במתמטיקה. מכאן ואילך נרשה לעצמנו לעתים לקצר ולכתוב "פסוק" גם כאשר מדובר בפסוק פורמאלי כגון $p \to \neg q$. נעשה זאת רק כאשר יהיה ברור מתוך ההֶקשר שמדובר בפסוק פורמאלי.

▼ שאלה 8

א. הוכיחו שהפסוק $\neg\neg p$ שקול לפסוק p.
ב. הוכיחו שהפסוק $p \to q$ שקול לפסוק $\neg(p \wedge \neg q)$, וששניהם שקולים לפסוק $(\neg p) \vee q$
ג. הוכיחו שהפסוק $\neg(p \to q)$ אינו שקול לפסוק $p \to \neg q$ (המחשבה המוטעית ששני פסוקים אלה שקולים זה לזה היא מקור ידוע לבלבול אצל סטודנטים בראשית דרכם).

התשובה בעמ׳ 40

אף שההגדרה הזמנית שנתנו לשקילות היא הגדרה טבעית מאוד, עדיף להרחיב אותה מעט. כדי להבין מדוע, נתבונן בפסוק $q \wedge \left(p \vee (\neg p)\right)$.

כידוע לנו משאלה 7א, $p \vee (\neg p)$ הוא טאוטולוגיה. מכאן לא קשה לראות ש-$q \wedge (p \vee (\neg p))$ הוא אמת אם q אמת, ושקר – אם q שקר. במילים אחרות, ערך האמת של $q \wedge (p \vee (\neg p))$ שווה תמיד לערך האמת של q. היינו רוצים לומר ש-$q \wedge (p \vee (\neg p))$ **שקול** ל-q. ההגדרה הזמנית של שקילות אינה מאפשרת לנו לומר זאת, כי ל-$q \wedge (p \vee (\neg p))$ לוח אמת של ארבע שורות, ולפסוק q לוח אמת של שתי שורות בלבד. כדי לאפשר השוואה בין פסוקים אף-על-פי שהמשתנים הפסוקיים המופיעים בהם שונים, נשפר את ההגדרה של שקילות.

הגדרה 2: שקילוּת טַאוּטוֹלוֹגִית

בהינתן שני פסוקים פורמאליים, נבנה לוח אמת מאוחד, המכיל את כל המשתנים הפסוקיים המופיעים **לפחות באחד משני הפסוקים**. זוג פסוקים פורמאליים שיש להם אותו לוח אמת מאוחד נקראים **שקולים טאוטולוגית**, ובקיצור – **שקולים**.

דוגמאות

השוואת העמודה השנייה משמאל לעמודה הימנית בלוח שלהלן מראה כי $q \wedge (p \vee (\neg p))$ שקול ל-q:

p	q	$p \vee (\neg p)$	$q \wedge (p \vee (\neg p))$
T	**T**	T	**T**
T	**F**	T	**F**
F	**T**	T	**T**
F	**F**	T	**F**

לוח 8

בלוח האמת הבא, השוואה של עמודה 6 לעמודה 8 מראה כי הפסוק $p \wedge (q \to (r \wedge (\neg r)))$ שקול לפסוק $p \wedge (\neg q)$:

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$r \wedge (\neg r)$	$q \to (r \wedge (\neg r))$	$p \wedge (q \to (r \wedge (\neg r)))$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
T	**T**	**T**	F	F	F	F	F
T	**T**	**F**	F	F	F	F	F
T	**F**	**T**	F	T	T	T	T
T	**F**	**F**	F	T	T	T	T
F	**T**	**T**	F	F	F	F	F
F	**T**	**F**	F	F	F	F	F
F	**F**	**T**	F	T	F	T	F
F	**F**	**F**	F	T	F	T	F

לוח 9

שאלה 9

א. הוכיחו שכל שתי טאוטולוגיות שקולות זו לזו.

ב. הוכיחו שכל שתי סתירות שקולות זו לזו.

התשובה בעמ' 40

להבדיל מלוחות אמת (ראו הדיון בסוף סעיף 5), את המושגים **טאוטולוגיה, סתירה** ו**שקילות טאוטולוגית** ניתן ליישם גם עבור פסוקים הנתונים במפורש, בשפה טבעית או בשפה מתמטית:

פסוק בשפה טבעית או מתמטית נקרא טאוטולוגיה, אם ניתן להצרין אותו לפסוק פורמאלי שהוא טאוטולוגיה. כך גם לגבי סתירה. למשל,

הפסוק ניצחנו במשחק **או** לא ניצחנו במשחק הוא טאוטולוגיה: ראו שאלה 7א.

הפסוק ניצחנו במשחק **וגם** לא ניצחנו במשחק הוא סתירה: ראו שאלה 7ב.

לעומת זאת, הפסוק ניצחנו במשחק **וגם** הירח עשוי גבינה צהובה הוא שקר אבל אינו סתירה.

על זוג פסוקים בשפה טבעית או בשפה מתמטית נאמר שהם שקולים טאוטולוגית (בקיצור– שקולים), אם ניתן להצרין את שניהם יחד לזוג פסוקים פורמאליים השקולים טאוטולוגית. למשל,

הפסוק: אם הכלב נובח – החתול בורח

והפסוק: לא ייתכן ש-(הכלב נובח והחתול אינו בורח)

שקולים טאוטולוגית: ראו שאלה 8ב (אנו מפרשים את "לא ייתכן ש-" כשלילה).

שאלה 10: כללי דה־מורגן

בשאלה זו נכיר שתי שקילויות שימושיות.

א. נתבונן בטענות שלהלן:

(i) סנונית אפריקאית מסוגלת לסחוב במעופה אגוז קוקוס, וגם סנונית אירופית מסוגלת לעשות זאת.

(ii) טענה (i) אינה נכונה!

(iii) לפחות אחת משתי הסנוניות – האפריקאית או האירופית – אינה מסוגלת לסחוב במעופה אגוז קוקוס.

הַצרינו את שלוש הטענות תוך שימוש בשני משתנים פסוקיים בלבד.

הראו בעזרת לוחות אמת שטענה (ii) שקולה לטענה (iii).

ב. נתבונן בטענות שלהלן:

(iv) מהירות התעופה של סנונית אפריקאית היא 20 קשר או 30 קשר.

(v) טענה (iv) אינה נכונה!

(vi) מהירות התעופה של סנונית אפריקאית אינה 20 קשר ואינה 30 קשר.

הַצרינו את שלוש הטענות תוך שימוש בשני משתנים פסוקיים בלבד.

הראו בעזרת לוחות אמת שטענה (v) שקולה לטענה (vi).

תשובה 10 (פתרון חלקי)

א. בהתאם לדיון שלפני השאלה, כדי להראות שהטענות (ii), (iii) שקולות זו לזו, נצרין אותן ונוכיח שהפסוקים הפורמאליים המתקבלים שקולים זה לזה. נסמן אפוא:

p: סנונית אפריקאית מסוגלת לסחוב במעופה אגוז קוקוס.

q: סנונית אירופית מסוגלת לסחוב במעופה אגוז קוקוס.

נצרין את הטענות המילוליות שבשאלה:

$p \wedge q$ (i) $\quad$ $\neg(p \wedge q)$ (ii) $\quad$ $(\neg p) \vee (\neg q)$ (iii).

פתרון יתר הסעיפים מופיע בסעיף 12.

תשובה בעמ' 41

הדיון מכאן עד לסוף סעיף 7 עוסק בהצבה של פסוקים פורמאליים מורכבים במקום משתנים פסוקיים, בתוך פסוק פורמאלי. יישום מעשי של כללי הלוגיקה, שהוא היעד שלנו במבוא זה, אינו דורש הצבות כאלו [6], ולכן דיון זה הוא בגדר חומר רשות. הנושא יידון שוב בקצרה, כחומר רשות, גם בהמשך הפרק.

דיון קצר על הצבה

נתבונן בטאוטולוגיה כלשהי, כגון $p \vee (\neg p)$. כזכור, p מייצג פסוק כלשהו בשפה המדוברת או בשפה המתמטית. נפרש את p כפסוק **היום חם ולח**. הטאוטולוגיה $p \vee (\neg p)$ הופכת בכך לאמירה חסרת תועלת על מזג האוויר. נצרין את האמירה על מזג האוויר מחדש, כאשר הפעם נפרק את **היום חם ולח** למרכיביו: **היום חם**, **היום לח**. נייצג אפוא את **היום חם ולח** כ- $q \wedge r$.

במקום $p \vee (\neg p)$ נקבל את הפסוק הפורמאלי $(q \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$.

את התהליך הזה ניתן לעשות גם בלי לעבור דרך השפה המדוברת:

בפסוק הפורמאלי $p \vee (\neg p)$ **נציב** במקום המשתנה הפסוקי p את $q \wedge r$, ונקבל את הפסוק הפורמאלי $(q \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$.

טענה: הצבה בטאוטולוגיה נותנת טאוטולוגיה. הצבה בסתירה נותנת סתירה.

הוכחה מלאה של טענה זו דורשת עיסוק מפורט במושג "הצבה" (המוכר היטב בצורה אינטואיטיבית מימי בית-הספר). לא נוכיח אותה, כי כאמור הנושא אינו נכלל בחומר הלימוד של הקורס. בכל זאת, ניתן נימוק קצר, שניתן להרחיב אותו להוכחה מלאה:

בהינתן טאוטולוגיה כלשהי, נשנה את נקודת המבט ונחשוב עליה כעל קֶשֶר לוגי (ראו "אבחנה" בסעיף 6). לפנינו קֶשֶר לוגי המחזיר תמיד ערך T, בלי תלות בערכים שנמסרים לו. נוכל להפעיל את הקֶשֶר הלוגי הזה על פסוקים פורמאליים כלשהם, מורכבים ככל שנרצה – הוא מחזיר תמיד T. הפעלה של הקֶשֶר הזה על פסוקים פורמאליים כלשהם מתבצעת על-ידי **הצבה** שלהם בטאוטולוגיה הנתונה. מכיוון שערך האמת המתקבל הוא תמיד T, הרי כל פסוק המתקבל מהטאוטולוגיה הנתונה על-ידי הצבה הוא טאוטולוגיה.

ההוכחה לגבי סתירה מקבילה לגמרי, כאשר במקום T מופיע בכל מקום F.

8 טענות שימושיות

משפט 1 טאוטולוגיות וסתירות שימושיות

תהי t טאוטולוגיה כלשהי ותהי f סתירה כלשהי.

א. הפסוקים שלהלן הם טאוטולוגיות:

$p \to p \quad , \quad p \leftrightarrow p \quad , \quad p \vee (\neg p) \quad , \quad f \to p \quad , \quad p \to t$.

ב. הפסוקים שלהלן הם סתירות:

$p \leftrightarrow (\neg p) \quad , \quad p \wedge (\neg p) \quad , \quad t \to f$.

ג. שלילת טאוטולוגיה היא סתירה, שלילת סתירה היא טאוטולוגיה.

שאלה 11

הוכיחו את משפט 1.

תשובה 11

א. לפי לוח האמת של חץ, בין שערך האמת של p הוא T ובין שערך האמת שלו הוא F, ערך האמת של $p \to p$ הוא T. לכן $p \to p$ הוא טאוטולוגיה.

כך גם לגבי $p \leftrightarrow p$.

לגבי $f \to p$: מכיוון ש-f הוא סתירה, ערך האמת שלו בכל מצב הוא F. לפי לוח האמת של חץ, יוצא מכך שערך האמת של $f \to p$ הוא T, ללא תלות בערך האמת של p.

ההוכחה לגבי $p \to t$ דומה.

ב. ההוכחה קלה ודומה להוכחת סעיף א'.

ג. נובע מיידית מהגדרת טאוטולוגיה, מהגדרת סתירה ומלוח האמת של $\neg$.

משפט 2 שקילויות שימושיות

הסימן $\equiv$ מציין שהפסוקים שמשני צדיו שקולים זה לזה.

א. שלילה כפולה: $\neg\neg p \equiv p$

ב. חילוף: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

ג. קיבוץ: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ד. פילוג: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ה. כללי דה-מורגן: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

ו. עקרון ה-contrapositive: $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$

ז. הבעת חץ בעזרת קַשָׁרים אחרים: $p \to q \equiv \neg(p \wedge (\neg q)) \equiv (\neg p) \vee q$

ח. שקילויות עבור חץ כפול:

$$p \leftrightarrow q \;\equiv\; q \leftrightarrow p \;\equiv\; (p \to q) \wedge (q \to p) \;\equiv\; (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

ט. $p \wedge p \equiv p \qquad p \wedge t \equiv p \qquad p \wedge f \equiv f$

$p \vee p \equiv p \qquad p \vee t \equiv t \qquad p \vee f \equiv p$

י. $p \to (q \to r) \;\equiv\; (p \wedge q) \to r$

שאלה 12

הוכיחו את משפט 2.

תשובה 12 (פתרון חלקי)

א. הוכחנו זאת בשאלה 8א.

ב. נובע מיידית מלוחות האמת של $\wedge, \vee$.

ג. (i) ל- $(p \wedge q) \wedge r$ ול- $p \wedge (q \wedge r)$ יש אותו לוח אמת: שניהם מקבלים ערך T כאשר p,q,r – שלושתם אמת, ושניהם מקבלים F בכל שאר השורות בלוח.

(ii) ל- $(p \vee q) \vee r$ ול- $p \vee (q \vee r)$ יש אותו לוח אמת: שניהם מקבלים ערך F כאשר p,q,r – שלושתם שקר, ושניהם מקבלים T בכל שאר השורות בלוח.

ד. בעזרת לוח אמת של 8 שורות (פירוט בסעיף 12).

ה. הוכחנו זאת במהלך פתרון שאלה 10.

ו. בעזרת לוח אמת של 4 שורות (פירוט בסעיף 12).

ז. הוכחנו זאת בשאלה 8ב.

ח. בעזרת לוח אמת של 4 שורות (פירוט בסעיף 12).

ט. נובע מיידית בעזרת שיקול מילולי פשוט (פירוט בסעיף 12).

י. הוכחנו זאת בשאלה 6ג.

התשובה בעמ' 41

שאלה 13

מיינו את הפסוקים הבאים לקבוצות, כך שבכל קבוצה יהיו רק פסוקים השקולים זה לזה, וכך שפסוקים מקבוצות שונות לא יהיו שקולים זה לזה.

א. אם תרצי תפוח זהב – בפרדס אשב עד הסתיו.

ב. אם לא תרצי תפוח זהב – לא אשב בפרדס עד הסתיו.

ג. אם לא אשב בפרדס עד הסתיו, זה אומר שלא תרצי (לא רצית) תפוח זהב.

ד. אם אשב בפרדס עד הסתיו – ודאי תרצי תפוח זהב.

ה. בפרדס אשב עד הסתיו או שלא תרצי תפוח זהב.

ו. לא ייתכן ש- (תרצי תפוח זהב ואני לא אשב בפרדס עד הסתיו).

ז. לא ייתכן ש- (אשב בפרדס עד הסתיו ואת לא תרצי תפוח זהב).

ח. ודאי תרצי תפוח זהב, אבל אני לא אשב בפרדס עד הסתיו.

ט. אשב בפרדס עד הסתיו או לא אשב בפרדס עד הסתיו.

י. בין שתרצי תפוח זהב ובין שלא, אשב בפרדס עד הסתיו.

י״א. אשב בפרדס עד הסתיו !

התשובה בעמ׳ 43

משפט 3

הפסוקים הפורמאליים α, β שקולים טאוטולוגית זה לזה **אם ורק אם** $\beta \leftrightarrow \alpha$ הוא טאוטולוגיה.

הוכחה

כמות הביטויים ממשפחת ״אם ורק אם״ בטענה זו (״שקולים״, ״אם ורק אם״, ״$\leftrightarrow$״) עשויה לבלבל. ביטויים אלה שייכים לרמות דיון שונות. כדי להבהיר את משפט 3 וכדי לגשת להוכחה שלו, ננסח אותו ביתר פירוט בעזרת ההגדרה של שקילות טאוטולוגית ובעזרת ההגדרה של טאוטולוגיה:

בהינתן פסוקים פורמאליים β,α , נבנה להם לוח אמת מאוחד. באותו לוח נוסיף עמודה גם עבור הפסוק $\beta \leftrightarrow \alpha$. אנו טוענים שבלוח זה, העמודה של α זהה לעמודה של β **אם ורק אם** העמודה של $\beta \leftrightarrow \alpha$ מכילה רק T.

מכאן קל לסיים את ההוכחה: נתבונן בשורה כלשהי בלוח האמת הנדון. לפי לוח האמת של $\leftrightarrow$, הפסוק $\beta \leftrightarrow \alpha$ הוא אמת בשורה זו אם ורק אם הערך של α בשורה זו שווה לערך של β באותה שורה.

זה נכון לכל שורה בלוח; לפיכך $\beta \leftrightarrow \alpha$ הוא אמת בכל השורות **אם ורק אם** העמודה של α זהה לעמודה של β. ▲

הדיון שלהלן, עד סוף הסעיף, הוא המשכו של הדיון על הצבה שבסוף סעיף 7, וגם הוא בגדר חומר רשות.

המשך דיון על הצבה

בסעיף 7 ראינו כי הצבה בטאוטולוגיה נותנת טאוטולוגיה, וכי הצבה בסתירה נותנת סתירה.

הנה טענה דומה עבור שקילות בין פסוקים.

טענה: אם בשני פסוקים פורמאליים השקולים זה לזה נציב פסוק פורמאלי α כלשהו, במקום כל המופעים של אחד המשתנים הפסוקיים, נקבל שני פסוקים השקולים זה לזה.

הוכחה: ממשפט 3 יחד עם הטענה שבעמ׳ 24 נובע שהצבה בטאוטולוגיה נותנת טאוטולוגיה.

בעזרת טענה זו והטענות הקודמות על הצבה בטאוטולוגיה ובסתירה, נוכל להכליל את משפטים 1, 2. למשל, מתוך כך ש-$p \wedge \neg p$ הוא סתירה נובע ש-$(q \rightarrow r) \wedge \neg(q \rightarrow r)$ גם הוא סתירה, וכללית $\alpha \wedge \neg\alpha$ הוא סתירה, כאשר α פסוק פורמאלי כלשהו.

בדומה, מכך ש- $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$ נובע למשל $p \to (r \vee s) \equiv (\neg(r \vee s)) \to (\neg p)$,
וכללית $\alpha \to \beta \equiv (\neg\beta) \to (\neg\alpha)$ כאשר α, β הם פסוקים פורמאליים כלשהם.

כפי שכבר ציינו, הכללות אלו אינן דרושות לשימושים המעשיים שאליהם מכוון מבוא זה.

9 קַשָּׁרִים נוספים. הבעת קַשָּׁר לוגי בעזרת קַשָּׁרִים לוגיים אחרים.

סעיף זה כולו הוא חומר רשות.

ניתן להגדיר קַשָּׁרִים לוגיים נוספים על החמישה שכבר הגדרנו.
שלושה קַשָּׁרִים המקובלים במידה זו או אחרת הם NAND, NOR, XOR:

p	q	p NAND q	p NOR q	p XOR q
T	T	F	F	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

לוח 10: לוחות האמת של NAND, NOR, XOR

NAND נקרא גם "הקו של Sheffer" והוא מסומן לעתים $\uparrow$ ולעתים $|$.
NOR נקרא על-שם Peirce או על-שם Quine והוא מסומן לעתים $\downarrow$ ולעתים $\perp$.
XOR הוא ה-Exclusive OR שהזכרנו בסעיף 3. הוא מסומן לעתים $+$.

שאלה 14

א. הראו בעזרת לוח אמת שהפסוק p NAND q שקול טאוטולוגית לפסוק $\neg(p \wedge q)$.

ב. בדומה לסעיף א', רשמו פסוק השקול לפסוק p NOR q ופסוק אחר השקול לפסוק p XOR q, כאשר בשני הפסוקים יופיעו רק הקַשָּׁרִים $\neg, \leftrightarrow, \to, \vee, \wedge$ (כולם או חלקם).

התשובה בעמ' 44

בשאלה 14 הראינו שהקַשָּׁרִים NAND, NOR, XOR אינם חיוניים, כי ניתן להביע אותם בעזרת הקַשָּׁרִים שהגדרנו קודם לכן. לגבי כל אחד מהקַשָּׁרִים החדשים, ההחלטה אם לאמץ בעבורו סימון או להמשיך להביע אותו כהרכבה של פעולות אחרות, היא עניין של טעם. ההחלטה יכולה להתבסס על נוחות, למשל מידת התכיפות שבה אנו מצפים לעשות שימוש בפעולה הלוגית הרלוונטית, בנושא כלשהו.

כעת נראה כי אפשר לוותר גם על חלק מחמשת הקַשָרים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$.

סעיף ח׳ של משפט 2 פירושו, בין השאר: $p \leftrightarrow q \;\equiv\; (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$.

מהדיון על הצבה שבסוף סעיף 7 נקבל כי עבור פסוקים פורמאליים **כלשהם** α, β מתקיים: $\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; (\alpha \wedge \beta) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta))$.

שקילות זו מביעה את החץ הכפול $\leftrightarrow$ בעזרת הקַשָרים $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

בהינתן פסוק כלשהו נוכל אפוא, על-ידי הצבות חוזרות ונשנות, לסלק את כל המופעים של $\leftrightarrow$. נקבל פסוק שאינו מכיל $\leftrightarrow$, והוא שקול טאוטולוגית לפסוק המקורי. בכך נפטרנו מהחץ הכפול.

האם ניתן לצמצם עוד יותר את קבוצת הקַשָרים הלוגיים שאנו נזקקים להם?

משפט 4

בהינתן פסוק הבנוי בעזרת הקַשָרים הלוגיים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ (כולם או חלקם), קיים פסוק שקול לו טאוטולוגית, המכיל רק את הקַשָרים $\neg$, $\wedge$ (שניהם או רק אחד מהם).

הוכחה

ראשית נראה איך להביע כל אחד מהקַשָרים שבהם איננו מעוניינים בעזרת קשרים אחרים.

(i) הבּעַת $\leftrightarrow$ בעזרת $\neg$, $\vee$, $\wedge$:
בדיון שלפני ניסוח המשפט ראינו כי $\alpha \leftrightarrow \beta \;\equiv\; (\alpha \wedge \beta) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta))$.

(ii) הבּעַת $\vee$ בעזרת $\neg$, $\wedge$:
מכלל דה-מורגן $\neg(p \vee q) \;\equiv\; (\neg p) \wedge (\neg q)$ (משפט 2, סעיף ה׳) נקבל כי $p \vee q \equiv \neg\big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$ (אנו מזכירים שוב את הדיון על הצבה בסוף סעיף 7). שקילות זו מביעה את הקַשָר $\vee$ בעזרת הקַשָרים $\neg$, $\wedge$. אפשר כמובן לוודא את נכונותה גם בעזרת לוח אמת.

(iii) הבּעַת $\rightarrow$ בעזרת $\neg$, $\wedge$:
במשפט 2 סעיף ז׳, השקילות $p \rightarrow q \;\equiv\; \neg(p \wedge (\neg q))$ מביעה את החץ בעזרת $\neg$, $\wedge$.

כעת, בהינתן פסוק כלשהו, ניעזר בשקילות *(i)* כדי לסלק את כל המופעים של $\leftrightarrow$. קיבלנו פסוק השקול לפסוק המקורי, ובו אין מופעים של $\leftrightarrow$. ניעזר בשקילות *(ii)* ונסלק מפסוק זה את כל המופעים של $\vee$. קיבלנו פסוק שקול לקודם – ולכן שקול לפסוק המקורי – שהקַשָרים היחידים בו הם $\rightarrow$, $\wedge$,$\neg$.
ניעזר כעת ב-*(iii)* ונסלק מפסוק זה את כל המופעים של $\rightarrow$.
קיבלנו פסוק שקול לפסוק הקודם – ולכן שקול לפסוק המקורי – שהקַשָרים היחידים בו הם $\wedge$,$\neg$. ▲

שאלה 15

α הוא פסוק כלשהו הבנוי בעזרת הקַשָּׁרים הלוגיים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ (כולם או חלקם).
הוכיחו:
א. קיים פסוק שקול טאוטולוגית ל-α, המכיל רק את הקַשָּׁרים $\neg$, $\vee$ (שניהם או רק אחד מהם).
ב. קיים פסוק שקול טאוטולוגית ל-α, המכיל רק את הקַשָּׁרים $\neg$, $\rightarrow$ (שניהם או רק אחד מהם).

התשובה בעמ' 44

די אפוא בשני קַשָּׁרים לוגיים כדי להביע את כל שאר הקַשָּׁרים שהכרנו. אם מטרתנו הייתה לצמצם ככל האפשר את כמות הקַשָּׁרים הלוגיים בשפה, יכולנו לצמצם עוד יותר אילו היינו מתחילים ב-NAND או ב-NOR.

שאלה 16

א. הראו שניתן להביע כל אחד מהקַשָּׁרים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ בעזרת NAND בלבד.
ב. הראו שניתן להביע כל אחד מהקַשָּׁרים $\neg$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ בעזרת NOR בלבד.

התשובה בעמ' 45

10 גרירה / נביעה

נתבונן בפסוק $p \wedge q$ ובפסוק $p \vee q$. מהשוואת לוחות האמת שלהם ברור שהם אינם שקולים זה לזה. עם זאת, קיים ביניהם קֶשֶׁר חלש יותר: כאשר הפסוק $p \wedge q$ הוא אמת, הפסוק $p \vee q$ גם הוא אמת. במילים אחרות, בלוח האמת המשותף של שני הפסוקים האלה, בכל שורה שבה $p \wedge q$ מקבל את הערך T, גם $p \vee q$ מקבל את הערך T. הנה לוח אמת המציג את שני הפסוקים גם יחד:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

לוח 11

הפסוק $p \wedge q$ הוא אמת בשורה הראשונה, ורק בה. בשורה זו גם הפסוק $p \vee q$ הוא אמת.

הגדרה 3: נביעה טָאוּטוֹלוֹגִית, גרירה טָאוּטוֹלוֹגִית

בהינתן הפסוקים α, β,, נבנה לוח אמת מאוחד, המכיל את כל המשתנים הפסוקיים המופיעים לפחות באחד מהם. אם בכל שורה בלוח שבה α הוא אמת גם β הוא אמת, נאמר ש- α **גורר טאוטולוגית** (ובקיצור– גורר) את β, ונאמר ש- β **נובע טאוטולוגית** (ובקיצור– נובע) מ- α.

דוגמאות

א. $p \wedge q$ גורר טאוטולוגית את $p \vee q$. לעומת זאת, $p \vee q$ אינו גורר את $p \wedge q$, כי בשורה השנייה בלוח 11, $p \vee q$ הוא אמת בעוד $p \wedge q$ הוא שקר.

ב. בלוח האמת שלהלן, השוואה של עמודה 6 לעמודה 8 מראה כי הפסוק $(p \vee q) \wedge (p \to r)$ גורר את הפסוק $(\neg q) \to r$:

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$(p \vee q) \wedge (p \to r)$	$\neg q$	$(\neg q) \to r$
T	**T**	**T**	T	T	$\boxed{\mathbf{T}}$	F	**T**
T	**T**	**F**	T	F	**F**	F	**T**
T	**F**	**T**	T	T	$\boxed{\mathbf{T}}$	T	**T**
T	**F**	**F**	T	F	**F**	T	**F**
F	**T**	**T**	T	T	$\boxed{\mathbf{T}}$	F	**T**
F	**T**	**F**	T	T	$\boxed{\mathbf{T}}$	F	**T**
F	**F**	**T**	F	T	**F**	T	**T**
F	**F**	**F**	F	T	**F**	T	**F**

לוח 12

הפסוק $(p \vee q) \wedge (p \to r)$ הוא אמת בארבע מן השורות: בראשונה, בשלישית, בחמישית ובשישית. בארבע השורות האלה הפסוק $(\neg q) \to r$ גם הוא אמת.
הפסוק $(\neg q) \to r$ הוא אמת בשתי שורות נוספות, שבהן $(p \vee q) \wedge (p \to r)$ אינו אמת.
לכן שני הפסוקים אינם שקולים זה לזה.

▼ שאלה 17

הוכיחו:

א. $p \leftrightarrow q$ גורר טאוטולוגית את $p \to q$.

ב. p גורר טאוטולוגית את $p \vee q$.

ג. $p \wedge q$ גורר טאוטולוגית את p.

התשובה בעמ' 45

שאלה 18

הוכיחו: הפסוקים הפורמאליים α, β שקולים זה לזה (הגדרה 2) **אם ורק אם** שניהם גוררים זה את זה, כלומר α גורר את β ו-β גורר את α.

התשובה בעמ' 46

בדומה להערה שלפני שאלה 10, ניתן להגדיר נביעה עבור פסוקים מפורשים: בהינתן שני פסוקים בשפה טבעית או מתמטית, נאמר שאחד מהם גורר טאוטולוגית את האחר, אם ניתן להצרין את שניהם יחד, כך שההצרנה של האחד גוררת טאוטולוגית את ההצרנה של האחר.

שאלה 19 (לקוחה מן הקורס **מתמטיקה למדעי החברה, 10444**)

בחקירה של גניבה התברר כי:

(i) אם ראובן לא פגש את שמעון אתמול, אז שמעון הוא הגנב או שראובן משקר.

(ii) אם שמעון אינו הגנב, אז ראובן פגש את שמעון אתמול והגניבה בוצעה אחרי חצות.

(iii) אם הגניבה בוצעה אחרי חצות, אז אם שמעון אינו הגנב – ראובן משקר.

א. הצרִינו את הפסוקים (i), (ii), (iii).

ב. התובע במשפטו של שמעון קובע כי מההנחה $(i) \wedge (ii) \wedge (iii)$ נובע ששמעון הוא הגנב.
האם התובע צודק בקביעתו?

התשובה בעמ' 46

משפט 5

יהיו α ו-β פסוקים פורמאליים.

α גורר טאוטולוגית את β , **אם ורק אם** $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

שאלה 20

הוכיחו את משפט 5. הדרכה: ההוכחה דומה להוכחת טענה 1.

התשובה בעמ' 46

משפט 6 נביעות / גרירות שימושיות

א. מתוך $p \wedge q$ נובע p ונובע q.

ב. מתוך p נובע $p \vee q$. מתוך q נובע $p \vee q$.

ג. מתוך $(p \vee q) \wedge (\neg p)$ נובע q.

ד. מתוך $p \wedge (p \to q)$ נובע q

(כלל זה נקרא "כלל הניתוק". הוא מוכר גם בשמו הלטיני: Modus Ponens).

ה. מתוך $(p \to q) \wedge (\neg q)$ נובע $\neg p$.

ו. מתוך $(p \to q) \wedge (q \to r)$ נובע $p \to r$.

שאלה 21

הוכיחו את משפט 6.

תשובה 21 (פתרון חלקי)

א. עלינו להראות כי כאשר $p \wedge q$ הוא אמת (כלומר בכל שורה בלוח שבה $p \wedge q$ הוא אמת) – p הוא אמת ו- q הוא אמת. זו מסקנה מיידית מלוח האמת של $\wedge$.

פתרון יתר הסעיפים מופיע בסעיף 12.

התשובה בעמ' 47

משפט 7 טענות על טאוטולוגיות וסתירות

א. טאוטולוגיה נובעת מכל פסוק.

ב. פסוק הנובע מתוך טאוטולוגיה הוא טאוטולוגיה.

ג. כל פסוק נובע מסתירה (במילים אחרות, סתירה גוררת כל פסוק).

ד. פסוק שנובעת ממנו סתירה הוא סתירה.

ה. פסוק שנובעת ממנו סתירה – כל פסוק נובע ממנו.

ו. אם מ- $\alpha \wedge \neg\beta$ נובעת סתירה, אז מ- α נובע β.
(הטענה שבסעיף זה דומה לעיקרון של הוכחה בדרך השלילה).

שאלה 22

הוכיחו את משפט 7.

תשובה 22 (פתרון חלקי)

הוכחת סעיף ד': פסוק שנובעת ממנו סתירה, בכל שורה שבה הוא אמת – גם הסתירה היא אמת.
אך סתירה אינה אמת באף אחת מן השורות. לכן הפסוק הנתון אינו יכול להיות אמת באף אחת מן השורות.

הוכחת סעיף ו': מהנתון, בעזרת סעיף ד' שהוכחנו זה עתה, $\alpha \wedge \neg\beta$ הוא סתירה.
משמע $\alpha \wedge \neg\beta$ מקבל ערך F בכל השורות של לוח האמת המשותף של α ו- β
כדי להראות שמ-α נובע β, עלינו להראות שבכל שורה שבה α מקבל ערך T, גם β מקבל ערך T.
נתבונן בשורה כלשהי שבה α מקבל T. בשורה זו, כמו בכל השורות, $\alpha \wedge \neg\beta$ מקבל ערך F.
לפי לוח האמת של $\wedge$, כאשר ערכו של α הוא T וערכו של $\alpha \wedge \neg\beta$ הוא F, בהכרח ערך האמת של $\neg\beta$ הוא F. לכן ערך האמת של β בשורה זו הוא T, כמבוקש.
פתרון יתר הסעיפים מופיע בסעיף 12.

התשובה בעמ' 48

הערה על הצבה (רשות)**:** בהמשך ובדומה להערות הקודמות על הצבה (בסוף סעיף 7 ובסוף סעיף 8), גם בסעיפים א' – ו' של משפט 6 ניתן להציב פסוקים פורמאליים כלשהם במקום p ו- q. למעשה, הוכחת משפט 6 כולו אינה מסתמכת על כך שמדובר במשתנים פסוקיים והיא נשארת נכונה, מילה במילה, אם נרשום במקום המשתנים הפסוקיים p ו- q, פסוקים פורמאליים כלשהם α ו-β.,

11 משתנים וכַּמָּתים[7]

נתבונן בטענה: הריבוע של מספר תמיד גדול או שווה ל- 0.

מקובל לרשום אותה כך: $\forall x(x^2 \geq 0)$. קוראים זאת: **לכל** x, $x^2 \geq 0$.

אם ההֶקשר שבו מדובר הוא למשל המספרים השלמים, או הממשיים, הפסוק הוא אמת.

שימו לב שבביטוי מופיע המשתנה x, ובכל זאת זהו פסוק (השוו לנוסחה $x + 2 = 5$ שבסעיף 1, שאינה פסוק). על האמירה "**לכל** x, $x^2 \geq 0$" ניתן לשאול אם היא אמת או שקר, בהֶקשר נתון. נחדד זאת: הנוסחה $x^2 \geq 0$ אינה פסוק, ואילו הנוסחה $\forall x(x^2 \geq 0)$ היא פסוק.

למעשה, הנוסחה $\forall x(x^2 \geq 0)$ אינה אומרת משהו על ערכו של x:

היא אינה מביעה תכונה כלשהי של x, אלא מביעה תכונה של קבוצת המספרים שבה מדובר.

הפסוק $\forall x \forall y \left((x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\right)$ מביע טענה על העלאה בריבוע של סכום.

משמעותו היא: **לכל** x, **לכל** y, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

בקצרה נהוג לומר: **לכל** x, y, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

הסימן $\forall$ הוא האות A הפוכה על ראשה. הסימן נועד להזכיר את המילה All.

נתבונן בטענה: קיים מספר גדול ממיליון.

מקובל לרשום אותה כך: $\exists x(x > 1{,}000{,}000)$.

קוראים זאת: **קיים** x **כך ש-** $x > 1{,}000{,}000$.

אפשר גם לקרוא זאת: **יש** x **כך ש-** $x > 1{,}000{,}000$.

אם ההֶקשר שבו מדובר הוא למשל המספרים השלמים, או הממשיים, הפסוק הוא אמת.

הפסוק $\exists x \exists y \left(xy \neq yx\right)$ אומר: **קיים** x **כך שקיים** y **כך ש-** $xy \neq yx$.

בקצרה נהוג לקרוא: קיימים x, y כך ש- $xy \neq yx$.

בהֶקשר של מספרים שלמים, או ממשיים, ושל פעולת הכפל המוכרת מבית-הספר, פסוק זה הוא שקר.

הסימן $\exists$ הוא האות E בכתב ראי. הוא נועד להזכיר את המילה Exists.

הסימנים $\forall,\exists$ נקראים **כַּמָּתִים** (Quantifiers). כשם שבעזרת הקַשָּׁרים הלוגיים אפשר לבטא בצורה אחידה פעולות לוגיות בין פסוקים, בעזרת הכמתים אפשר להביע בצורה אחידה

אמירות "כוללות" או "ישיות". עם זאת, שימו לב להבדל מסוים בין קְשָׁרים לוגיים לכמתים: המשמעות של קֶשֶׁר לוגי קבועה לגמרי בעזרת לוח האמת שלו. המשמעות של $\forall, \exists$ **תלויה בהֶקשר שבו מדובר**, בתחום הדיון: "לכל x" פירושו "לכל x בתחום שבו אנו דנים". בדומה לכך, המשמעות של "קיים x כך ש-" היא "קיים x בתחום שבו אנו דנים, כך ש-". כדי לבדוק אם טענה כוללת או ישית נתונה היא אמת, אנו חייבים לדעת את ההֶקשר שבו מדובר. ראו למשל דוגמה ג' בעמוד 8, המתחילה במילים "קיים מספר...".

להלן דוגמאות להבעת טענות בעזרת כמתים.

זהו סוג של הַצְרָנָה, שונה מההצרנות שעשינו בסעיפים הקודמים.

א. לכל מספר יש מספר גדול ממנו.

תרגום ראשוני: לכל x יש y כך ש- $y > x$. נוסחה: $\forall x \exists y\ (y > x)$

ב. יש מספר הגדול מכל המספרים.

תרגום ראשוני: יש x כך שלכל y, $x > y$. נוסחה: $\exists x \forall y\ (x > y)$

ג. כל מספר הגדול מחמש – הריבוע שלו גדול מ- 25.

תרגום ראשוני: לכל x, אם $x > 5$ אז $x^2 > 25$. נוסחה: $\forall x(x > 5 \rightarrow x^2 > 25)$

דוגמה לתרגום בכיוון ההפוך:

ד. נוסחה: $\forall x \forall y\big(x \neq y \rightarrow \exists z(x \neq z \wedge y \neq z)\big)$

תרגום ראשוני: לכל x, y אם $x \neq y$, אז קיים z כך ש- $x \neq z$ ו- $y \neq z$.

נוסח חופשי בעברית: לכל שני מספרים שונים קיים מספר שלישי השונה משניהם.

שימו לב לשימוש בקֶשֶׁר הלוגי "חץ" בדוגמאות ג', ד'. הצורך בחץ במקרים אלה ובמקרים רבים אחרים מסביר מדוע התעקשנו בסעיף 5 להפוך את "אם... אז..." לקֶשֶׁר לוגי.

הערה: בתרגום לעברית של פסוקים מורכבים, כדאי תמיד לזכור שפירוש הסימן $\exists x$ אינו "קיים x..." אלא "קיים x כך ש...". בתרגום של ביטוי פשוט כגון $\exists x(x > 1{,}000{,}000)$ אפשר לשכוח זאת בלי להיכנס לצרות. בפסוקים מורכבים יותר, הַשמטַת "כך ש..." היא מקור ידוע לבלבול בהיכרות ראשונה עם הכמת הזה.

שאלה 23

הצרינו את הטענות הבאות תוך שימוש בכמתים.

א. קיים מספר שהריבוע שלו שווה ל- 2.

ב. קיימים שני מספרים שסכומם שווה למכפלתם.

ג. פעולת החיבור היא חילופית: סכום שני מספרים אינו תלוי בסדר שבו מחברים אותם.

ד. קיום נגדי בחיבור: לכל מספר שנבחר, קיים מספר שהסכום שלו ושל המספר המקורי הוא 0.

ה. קיום הופכי בכפל:

לכל מספר השונה מאפס שנבחר, קיים מספר שהמכפלה שלו ושל המספר המקורי היא 1.

ו. לכל מספר הקטן מ-10 יש מספר גדול ממנו וקטן גם הוא מ-10.

ז. קיים מספר בעל התכונה הבאה:

הוא קטן מכל מספר הגדול מאפס והוא גדול מכל מספר הקטן מאפס.

ח. קיים מספר בעל התכונה הבאה:
הוא גדול מכל מספר חיובי שהריבוע שלו קטן מ-2, והוא קטן מכל מספר חיובי שהריבוע שלו גדול מ-2.

התשובה בעמ' 48

כעת נראה קֶשֶר בין הסימנים $\exists, \forall$, בעזרת קַשָּר השלילה. נתבונן בפסוק

(*) **לא כל הסטודנטים הגישו את המטלה.**

נניח שזה נאמר בהֶקשר נתון: מטלה מסוימת שניתנה לסטודנטים בקורס מסוים בסמסטר מסוים.
שימו לב שהפסוק (*) אינו אומר שכל הסטודנטים **לא** הגישו את המטלה.
ניתן לומר את (*) במילים אחרות:

(**) **יש לפחות סטודנט אחד שלא הגיש את המטלה.**

התרגום הראשוני של (*), (**) לשפה פורמאלית הוא:

(*) **לא לכל** x מתקיים: x הגיש את המטלה.
(**) **יש** x **כך שלא** מתקיים: x הגיש את המטלה.

לפסוקים (*), (**) יש אותה משמעות.

שימו לב שמשמעותה של האמירה "x הגיש את המטלה" אינה מהותית לקֶשֶר בין (*) ל- (**):
במקום "x הגיש את המטלה", יכולנו לכתוב "x הוא ממושקף", "x גדול מ-7" או אפילו אמירה מורכבת כגון "קיים y כך ש-x קטן מ-y". בכל מקרה, לאמירה "**לא כל** x מקיים..." ולאמירה "**יש** x **שאינו** מקיים..." יש אותה משמעות.

נצרין את שתי האמירות האלה. במקום שלוש הנקודות, נרשום סימן עבור נוסחה כלשהי; סימן מקובל הוא האות היוונית ψ (פְּסִי). בחרנו סימן חדש ולא את אחת האותיות r, q, p, כי ψ **לא חייבת להיות פסוק**: למשל בדוגמה האחרונה, ψ היא האמירה "x הגיש את המטלה", שכידוע אינה פסוק.
שתי האמירות הן: $\neg\forall x\, \psi$, $\exists x\, \neg\psi$. אנו קובעים אפוא כי לנוסחה $\neg\forall x\, \psi$ ולנוסחה $\exists x\, \neg\psi$ יש אותה משמעות.

בסעיפים הקודמים דנו בשקילות טאוטולוגית, שלה קראנו בקיצור "שקילות".
פסוקים שקולים טאוטולוגית הם בעלי אותו לוח אמת, ולכן יש להם אותה משמעות.
כעת קבענו שלנוסחה $\neg\forall x\, \psi$ ולנוסחה $\exists x \neg\psi$ יש אותה משמעות. גם אם נוסחאות אלה הן פסוקים, לא נוכל לומר שאלה פסוקים שקולים טאוטולוגית; כדי לזהות שיש להם אותה משמעות, לא התייחסנו כלל ללוחות אמת אלא ניתחנו את משמעות הכמתים "לכל" ו- "קיים".
הנוסחאות $\neg\forall x\, \psi$, $\exists x\, \neg\psi$ הן דוגמה לנוסחאות **שקולות לוגית**.

כמו פסוקים שקולים טאוטולוגית, גם לנוסחאות (שיכולות להיות פסוקים) השקולות לוגית זו לזו יש אותה משמעות, אבל העובדה שיש להן אותה משמעות עשויה לדרוש התייחסות לא רק ללוחות אמת של קַשָּׁרים לוגיים אלא גם למשמעות של סימני הכמתים (ולמשמעות של סמלים נוספים, שלא נדון בהם כאן).

לא נגדיר כאן במדויק את המושג "שקילות לוגית".

טענה (כללי דה–מורגן עבור הכמתים)

א. לנוסחה $\neg\forall x\,\psi$ ולנוסחה $\exists x\neg\psi$ יש אותה משמעות.

ב. לנוסחה $\neg\exists x\psi$ ולנוסחה $\forall x\neg\psi$ יש אותה משמעות.

הוכחה

את סעיף א' נימקנו בדיון שקדם לו. את סעיף ב' נוכיח בשאלה הבאה. ▲

שאלה 24

הוכיחו את סעיף ב' של הטענה בהסתמך על סעיף א', ותוך שימוש בעקרון השלילה הכפולה.
נוסף לכך, תנו הסבר מילולי לסעיף ב', כפי שנימקנו את סעיף א' בדיון קודם לכן.

התשובה בעמ' 48

שאלה 25

נתרגל את השימוש בכללי דה-מורגן. **שלילת** סעיף א' של שאלה 23 היא הטענה:
לא קיים מספר שהריבוע שלו הוא 2.
בעזרת כלל דה-מורגן נוכל לנסח טענה זו כך: לכל מספר – הריבוע שלו שונה מ-2.
נבצע זאת בכתיב פורמאלי, עבור כל סעיפי שאלה 23.
עבור כל אחד מסעיפי שאלה 23 בצעו שני צעדים:
הצעד הראשון: כתבו נוסחה המביעה את השלילה שלו. היעזרו בתשובה לשאלה 23, ופשוט רשמו סימן שלילה בראש כל אחת מהנוסחאות שקיבלתם שם.
הצעד השני: היעזרו בכללי דה-מורגן והכניסו את סימן השלילה פנימה ככל האפשר, כלומר רשמו נוסחה בעלת **משמעות זהה לזו שרשמתם בצעד הראשון**, המקיימת את התנאי הבא: אם מופיע בה סימן השלילה, הוא נמצא **אחרֵי** (מימין ל-) כל ההופעות של כמתים בנוסחה. במידת האפשר, המשיכו והעבירו את השלילה עוד פנימה (ימינה) בעזרת שקילויות שראינו במשפט 2.

התשובה בעמ' 49

שאלה 26

א. בהֶקשר של המספרים השלמים, הפסוק $\forall x\,(x^2 > 25 \to x > 5)$ הוא שקר:
$x = -6$ הוא דוגמה נגדית עבורו. נכתוב אפוא את שלילתו של הפסוק, שהיא אמת:
(*) $\neg\forall x\,(x^2 > 25 \to x > 5)$.

היעזרו בכללי דה-מורגן ובשאלה 8 כדי להביע את (*) בצורה שבה השלילה היחידה שמופיעה בביטוי חלה ישירות על הביטוי $x > 5$. שימו לב שבתשובה **לא מופיע** הקֶשֶר הלוגי $\rightarrow$. ודאו ש- $x = -6$ הוא אישור לנכונות הפסוק שכתבתם.

ב. הכלילו את סעיף א׳: נסחו כלל לוגי הקובע באופן כללי, שלפסוק מהצורה $\neg\forall x\,(\psi \rightarrow \varphi)$ ולפסוק אחר, בעל צורה דומה לפסוק שקיבלתם בפתרון סעיף א׳, יש אותה משמעות.

התשובה בעמ׳ 51

12 תשובות לשאלות

תשובה 1 (השאלה בעמ׳ 13)

נסמן ב-p את הפסוק סיימתי לכתוב את המטלה, וב-q את הפסוק שוחחתי בצ'אט עם שמעון.

נסמן את הביטוי ״**לפני ש**״ בסימן ״$״.

הפסוק סיימתי לכתוב את המטלה **לפני ש**שוחחתי בצ'אט עם שמעון ייוצג על-ידי הצירוף $p\$q$.

אילו $ היה קֶשֶר לוגי, היה לו לוח אמת. ננסה לרשום את השורה הראשונה בלוח.

נתאר לעצמנו את הסיטואציה הבאה:

אתמול בשעה 16.00 סיימתי לכתוב את המטלה, ובשעה 17.00 שוחחתי בצ׳אט עם שמעון.

בסיטואציה זו הפסוק p, הפסוק q והפסוק $p\$q$ – שלושתם אמת.

זה מעיד על כך שהשורה הראשונה של לוח האמת של הקֶשֶר הלוגי $ היא:

p	q	$p\$q$
T	T	T

כעת נדמיין סיטואציה אחרת: אתמול בשעה 16.00 סיימתי לכתוב את המטלה, שעה לפני כן שוחחתי בצ׳אט עם שמעון, ומאז ועד עתה לא שוחחתי אתו. בסיטואציה זו הפסוק p והפסוק q – שניהם אמת, אך הפסוק $p\$q$ הוא שקר. זה מעיד על כך שהשורה הראשונה של לוח האמת של הקֶשֶר הלוגי $ היא:

p	q	$p\$q$
T	T	F

מהשוואה בין שתי התוצאות אנו רואים שלוח האמת של $ אינו ניתן להגדרה באופן חד-משמעי. לכן $ אינו קֶשֶר לוגי.

במילים פשוטות יכולנו לומר כך: כאשר שני הפסוקים p ו-q הם אמת, לשאלה איזה משני המאורעות התרחש תחילה יכולות להיות תשובות שונות. לכן אמיתיות או שקריות הפסוק "p **לפני ש-**q" אינה נקבעת באופן חד-משמעי מתוך ערכי האמת של p ושל q. לכן "**לפני ש-**" אינו קֶשֶר לוגי.

תשובה 2 (השאלה בעמ' 13)

א. נקבל את הפסוקים:

חצוצרה היא כלי נשיפה **וגם** 4 = 18 + 10.

לסבתא יש גלגלים **וגם** היא אוטובוס.

לסבתא יש גלגלים **וגם** היא סבתא.

בפסוק הראשון, הרכיב הראשון הוא אמת והרכיב השני הוא שקר. לפי לוח האמת של "**וגם**", הפסוק המורכב הוא שקר. הפסוק השני בנוי משני רכיבים ששניהם שקר, ושוב, מלוח האמת של "**וגם**" נקבל שהפסוק המורכב הוא שקר. גם הפסוק השלישי יהיה שקר, הפעם משום שרכיבו הראשון הוא שקר, ורכיבו השני – אמת.

ב. לוח האמת של "**או**" מצביע על כך שהפסוק הראשון הוא אמת, הפסוק השני הוא שקר והפסוק השלישי – אמת.

תשובה 3 (השאלה בעמ' 15)

הפסוק (*) הוא שקר, הואיל והרכיב הראשון שלו הוא אמת והרכיב השני שלו הוא שקר (ראו השורה השנייה של לוח 4, לוח האמת של הקשר "**אם... אז...**").

הפסוק (**) והפסוק (***) – שניהם אמת, וזאת משום שהרכיב הראשון שלהם הוא שקר: לסבתא הרי אין גלגלים. לוח האמת של "**אם... אז...**" מכתיב לנו קביעת ערך אמת חיובי לפסוקים הנ"ל. פסוק (**) מתאים לשורה הרביעית בלוח, שבה שני רכיבי הפסוק הם שקר, בעוד שפסוק (***) מתאים לשורה השלישית בלוח, שבה הרכיב הראשון הוא שקר, והשני – אמת.

תשובה 4 (השאלה בעמ' 16)

א. $p \wedge q$

ב. $p \wedge \neg q$

ג. $q \rightarrow p$

ד. $p \vee r$

ה. $(s \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg p)$

ו. $\neg\big(q \leftrightarrow ((\neg r) \wedge (\neg s))\big)$

ז. אם העורב פרש כנפיים ועף לשמים, אז הקרנף פרש כנפיים או עף לשמים; כלומר, הוא עשה לפחות אחת מן הפעולות.

ח. לפחות אחד מבעלי החיים, הקרנף או העורב, פרש כנפיים, אם ורק אם לפחות אחד מהם עף לשמים.

תשובה 5 (השאלה בעמ' 18)

א.

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge p$	$(p \to q) \to r$	$r \to (q \wedge p)$	$((p \to q) \to r) \leftrightarrow (r \to (q \wedge p))$
T	**T**	**T**	T	T	T	T	**T**
T	**T**	**F**	T	T	F	T	**F**
T	**F**	**T**	F	F	T	F	**F**
T	**F**	**F**	F	F	T	T	**T**
F	**T**	**T**	T	F	T	F	**F**
F	**T**	**F**	T	F	F	T	**F**
F	**F**	**T**	T	F	T	F	**F**
F	**F**	**F**	T	F	F	T	**F**

ב. בלוח אמת הבנוי מארבעה משתנים פסוקיים יהיו 16 שורות, כי יש $16 = 2^4$ אפשרויות להקצאת ערכי אמת למשתנים בכל דרך אפשרית.

תשובה 6 (השאלה בעמ' 18)

א. $q \to p$ הוא שקר רק במצב שבו p אמת ו-q שקר. במצב זה $p \to q$ הוא אמת. לפי לוח האמת של הקַשָׁר **"או"**, הפסוק כולו אמת במצב זה.

בשאר שלושת המצבים, $q \to p$ הוא אמת, ולפי לוח האמת של **"או"** – הפסוק כולו אמת במצבים אלה.

מסקנה: הפסוק הוא אמת בכל ארבעת המצבים האפשריים, ולכן העמודה הימנית של לוח האמת, שהיא העמודה שבה רשומים ערכי האמת של הפסוק, מכילה רק T.

ב. $p \wedge q$ אמת רק במצב שבו p ו-q – שניהם אמת. במצב זה $p \wedge \neg q$ הוא שקר. לפי לוח האמת של הקַשָׁר **"וגם"**, הפסוק כולו הוא שקר במצב כזה. בשאר המצבים $p \wedge q$ שקר, ולפי לוח האמת של **"וגם"**, הפסוק כולו הוא שקר במצבים אלה.

מסקנה: הפסוק הוא שקר בכל ארבעת המצבים האפשריים, ולכן העמודה הימנית של לוח האמת, שהיא העמודה שבה רשומים ערכי האמת של הפסוק, מכילה רק F.

ג. הפסוק $p \to (q \to r)$ הוא שקר רק במצב שבו p אמת ו- $q \to r$ שקר, כלומר רק במצב שבו p ו-q שניהם אמת ו-r שקר. בכל שאר המצבים הפסוק $p \to (q \to r)$ הוא אמת.

אם נבחן את הפסוק $(p \wedge q) \to r$, ניווכח בעזרת לוח האמת של "חץ", שהוא שקר רק במצב שבו r שקר ו- $p \wedge q$ אמת, כלומר רק במצב שבו p ו-q שניהם אמת ו-r שקר. בכל שאר המצבים הפסוק $(p \wedge q) \to r$ הוא אמת.

ראינו ששני הפסוקים הנדונים מקבלים בכל מצב אפשרי אותו ערך אמת. מכאן שיש להם אותו לוח אמת.

תשובה 7 (השאלה בעמ' 20)

א. כאשר p אמת, שלילתו היא שקר, ולהיפך. לכן בכל מצב אפשרי אחד מהם הוא אמת.
לכן, מלוח האמת של "**או**", הפסוק $p \vee \neg p$ הוא אמת בכל מצב, ולכן – טאוטולוגיה.

ב. כאשר p אמת, שלילתו היא שקר, ולהיפך. לכן אין מצב שבו שניהם אמת.
אם כן, מלוח האמת של "**וגם**", הפסוק $p \wedge \neg p$ הוא שקר בכל מצב, ולכן זו סתירה.

ג. לפי לוח האמת של הקֶשֶר " **אם**... **אז**...", כאשר שני הרכיבים מקבלים אותו ערך, הפסוק הוא אמת. מכאן שהפסוק $p \rightarrow p$ הוא אמת בכל מצב, ולכן – טאוטולוגיה.

ד. הפסוק אינו טאוטולוגיה ואינו סתירה: הוא שקר כאשר p אמת, ואמת כאשר p שקר. לוח האמת שלו זהה ללוח האמת של הפסוק $\neg p$.

תשובה 8 (השאלה בעמ' 20)

א. נרשום את לוח האמת המורחב של הפסוק $\neg\neg p$:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
T	F	**T**
F	T	**F**

אנו רואים שבכל המצבים לפסוק $\neg\neg p$ יש ערך אמת זהה לזה של הפסוק p.
יש להם אפוא אותו לוח אמת, והם שקולים.

ב. נבנה לוח אמת מורחב, משולב, לשלושת הפסוקים:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(\neg p) \vee q$
T	**T**	F	F	F	**T**	**T**	**T**
T	**F**	F	T	T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	T	F	F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	T	T	F	**T**	**T**	**T**

קיבלנו עבור שלושת הפסוקים בדיוק אותו לוח אמת, לכן הם שקולים זה לזה.

ג. כאשר p הוא שקר, הפסוק $\neg(p \rightarrow q)$ הוא שקר והפסוק $p \rightarrow \neg q$ הוא אמת.
לכן פסוקים אלה אינם שקולים.

תשובה 9 (השאלה בעמ' 22)

א. בלוח אמת מאוחד לשתי הטאוטולוגיות, כזה המכיל את כל המשתנים הפסוקיים המופיעים לפחות באחת משתי הטאוטולוגיות, בעמודת התוצאות של כל אחת משתי הטאוטולוגיות תופיע האות T בלבד; הווי אומר לשתי הטאוטולוגיות אותו לוח אמת מאוחד, לכן הן שקולות זו לזו.

ב. בלוח אמת מאוחד לשתי הסתירות, כזה המכיל את כל המשתנים הפסוקיים המופיעים לפחות באחת משתי הסתירות, בעמודת התוצאות של כל אחת משתי הסתירות תופיע האות F בלבד; הווי אומר לשתי הסתירות אותו לוח אמת מאוחד, לכן הן שקולות זו לזו.

תשובה 10 (השאלה בעמ' 23)

א. בהמשך לתחילת התשובה בסעיף 7, נבנה לוח אמת מורחב משותף לשלושת הפסוקים (i), (ii), (iii).

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	**T**	F	F	**T**	**F**	**F**
T	**F**	F	T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	T	F	**F**	**T**	**T**
F	**F**	T	T	**F**	**T**	**T**

לפסוק $\neg(p \wedge q)$ ולפסוק $(\neg p) \vee (\neg q)$ אותו לוח אמת, לכן הם שקולים.

ב. בדומה לפתרון סעיף א', נצרין את הטענות המילוליות ונוכיח שהפסוקים המתקבלים שקולים זה לזה. נסמן אפוא:

p: מהירות התעופה של סנונית אפריקאית היא 20 קשר.

q: מהירות התעופה של סנונית אפריקאית היא 30 קשר.

נצרין את הטענות המילוליות שבשאלה:

(iv) $p \vee q$ $\quad$ (v) $\neg(p \vee q)$ $\quad$ (vi) $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

נבנה לוח אמת משותף לשלושת הפסוקים:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	**T**	F	F	**T**	**F**	**F**
T	**F**	F	T	**T**	**F**	**F**
F	**T**	T	F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	T	T	**F**	**T**	**T**

לפסוק $\neg(p \vee q)$ ולפסוק $(\neg p) \wedge (\neg q)$ אותו לוח אמת, לכן הם שקולים.

תשובה 12 (השאלה בעמ' 25)

פתרון לחלק מהסעיפים מופיע בצמוד לשאלה. נפתור את שאר הסעיפים.

ד. נבנה לוח אמת מורחב המשותף לשני הפסוקים $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	**T**	**T**	T	T	T	T	T
T	**T**	**F**	T	T	F	T	T
T	**F**	**T**	T	T	F	T	T
T	**F**	**F**	T	T	F	T	T
F	**T**	**T**	T	T	T	T	T
F	**T**	**F**	T	F	F	F	F
F	**F**	**T**	F	T	F	F	F
F	**F**	**F**	F	F	F	F	F

לשני הפסוקים אותו לוח אמת, לפיכך הם שקולים.

כעת נבנה לוח אמת מורחב המשותף לשני הפסוקים $p \wedge (q \vee r)$, ו- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	**T**	**T**	T	T	T	T	T
T	**T**	**F**	T	F	T	T	T
T	**F**	**T**	F	T	T	T	T
T	**F**	**F**	F	F	F	F	F
F	**T**	**T**	F	F	T	F	F
F	**T**	**F**	F	F	T	F	F
F	**F**	**T**	F	F	T	F	F
F	**F**	**F**	F	F	F	F	F

לשני הפסוקים אותו לוח אמת, לפיכך הם שקולים.

ו. בלוח אמת מאוחד לשני הפסוקים (לוח בן ארבע שורות), הפסוק שבאגף שמאל יקבל ערך F רק בשורה השנייה (ראו לוח האמת של "**אם**... **אז**..." בסעיף 5). בשאר השורות יקבל הפסוק הנ"ל ערך T.
הפסוק שבאגף ימין יקבל ערך F רק כאשר $\neg q$ אמת ו- $\neg p$ שקר, וזה קורה רק כאשר q שקר ו-p אמת, כלומר רק בשורה השנייה של הלוח. בשאר השורות יקבל הפסוק הנ"ל ערך T. לפיכך לשני הפסוקים בדיוק אותו לוח אמת, משמע – הם שקולים.

ח. נבנה לוח אמת מורחב המשותף לפסוקים $p \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow p$, $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
T	**T**	F	F	T	F	T	T	T
T	**F**	F	T	F	F	F	F	F
F	**T**	T	F	F	F	F	F	F
F	**F**	T	T	F	T	T	T	T

לשלושת הפסוקים אותו לוח אמת, לכן הם שקולים.

כעת נבנה לוח אמת מורחב עבור הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	**T**	T	T	T
T	**F**	F	T	F
F	**T**	T	F	F
F	**F**	T	T	T

כפי שאנו רואים, גם לוח האמת של פסוק זה זהה ללוחות הקודמים, ולכן הפסוק שקול לכל אחד מהפסוקים הקודמים.

ט. מלוח האמת של "**וגם**", הפסוק $p \wedge p$ אמת אם ורק אם שני רכיביו הם אמת, כלומר אם ורק אם הפסוק p הוא אמת. לכן ברור של-p ול- $p \wedge p$ יש אותו לוח אמת, ולכן הם שקולים.
גם הפסוק $p \wedge t$ הוא אמת אם ורק אם שני רכיביו הם אמת, אבל מכיוון שהרכיב הימני הוא טאוטולוגיה, תנאי זה שקול לכך שהרכיב השמאלי, דהיינו p, הוא אמת. מכאן שהפסוק $p \wedge t$ הוא אמת אם ורק אם p אמת (ומובן שמכך נובע שהפסוק $p \wedge t$ הוא שקר אם ורק אם p שקר). לכן יש להם אותו לוח אמת (מאוחד), ולכן הם שקולים.
בדומה, גם הפסוק $p \wedge f$ הוא אמת אם ורק אם שני רכיביו הם אמת. מכיוון שהרכיב הימני הוא סתירה, זה לעולם לא יקרה. לכן הפסוק $p \wedge f$ הוא תמיד שקר, לכן הוא סתירה ולכן, לפי שאלה 9ב, הוא שקול ל-f.
מלוח האמת של "**או**" הפסוק $p \vee p$ אמת אם ורק אם **לפחות** אחד מרכיביו אמת, והיות ששני הרכיבים זהים זה יקרה אם ורק אם הפסוק p הוא אמת. לכן ברור של-p ול- $p \vee p$ יש אותו לוח אמת ולכן הם שקולים. גם הפסוק $p \vee t$ הוא אמת אם ורק אם לפחות אחד מרכיביו הוא אמת, אבל מכיוון שהרכיב הימני הוא טאוטולוגיה, תנאי זה מתקיים תמיד. לכן גם $p \vee t$ הוא טאוטולוגיה ולכן, לפי שאלה 9ב, הוא שקול ל-t.
בדומה, גם הפסוק $p \vee f$ הוא אמת אם ורק אם לפחות אחד מרכיביו הוא אמת. מכיוון שהרכיב הימני הוא סתירה, זה יקרה אם ורק אם p הוא אמת. לכן הפסוקים $p \vee f$ ו-p מקבלים ערך T בדיוק באותם המצבים, ומכאן שהם מקבלים ערך F בדיוק באותם המצבים. לכן יש להם אותו לוח אמת (מאוחד) והם שקולים.

תשובה 13 (השאלה בעמ' 25)
נסמן ב-p את הפסוק "תרצי תפוח זהב" וב-q את הפסוק "אשב בפרדס עד הסתיו".
נצרין את כל האמירות המופיעות בשאלה:
א. $p \to q$
ב. $(\neg p) \to (\neg q)$
ג. $(\neg q) \to (\neg p)$
ד. $q \to p$
ה. $q \vee (\neg p)$
ו. $\neg(p \wedge (\neg q))$
ז. $\neg(q \wedge (\neg p))$
ח. $p \wedge (\neg q)$
ט. $q \vee (\neg q)$
י. $(p \vee (\neg p)) \to q$
יא. q
הפסוקים א' ו- ג' שקולים זה לזה לפי משפט 2ו. בנוסף, פסוק א' שקול לפסוק ה' ולפסוק ו' לפי משפט 2ז.
מכאן שארבעת הפסוקים א', ג', ה', ו' שקולים זה לזה.

פסוק ד׳ שקול לפסוק ב׳ לפי משפט 12ו. בנוסף, פסוק ד׳ שקול לפסוק ז׳ לפי משפט 12ז, לכן שלושת הפסוקים ב׳, ד׳, ז׳ שקולים זה לזה.

הפסוקים י׳ ו- י״א שקולים זה לזה כי הם אמת בכל מצב ש-q אמת, והם שקר – אחרת.

נבנה טבלת אמת מאוחדת, שבה נרשום נציג אחד מכל אחת משלוש הקבוצות שתיארנו עד כה, ונרשום בה גם את פסוק ח׳.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	q	$p \wedge (\neg q)$
T	**T**	T	T	T	F
T	**F**	F	T	F	T
F	**T**	T	F	T	F
F	**F**	T	T	F	F

אנו רואים שלוחות האמת של הפסוקים א׳, ד׳, ח׳, י״א שונים זה מזה. לכן אף אחד מהם אינו שקול לרעהו או לפסוק מקבוצתו של רעהו.

פסוק ט׳ הוא טאוטולוגיה (משפט 1 סעיף א׳), ולכן הוא אינו שקול לאף אחד מן האחרים, שאינם טאוטולוגיה.

לסיכום, החלוקה היא לחמש קבוצות:

הקבוצה הראשונה: א׳, ג׳, ה׳, ו׳

הקבוצה השנייה: ב׳, ד׳, ז׳

הקבוצה השלישית: ח׳

הקבוצה הרביעית: ט׳

הקבוצה החמישית: י׳, י״א

תשובה 14 (השאלה בעמ׳ 27)

א. הנה לוח אמת מורחב מאוחד, שמעיד על זהות בין לוחות האמת של שני הפסוקים:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p NAND q
T	**T**	T	F	F
T	**F**	F	T	T
F	**T**	F	T	T
F	**F**	F	T	T

ב. הפסוק p NOR q שקול לפסוק $\neg(p \vee q)$, כי שניהם אמת כאשר p ו-q שניהם שקר, והם אמת רק במצב זה. לכן יש להם אותו לוח אמת.

הפסוק p XOR q שקול לפסוק $\neg(p \leftrightarrow q)$ כי שניהם אמת כאשר ל-p ול-q ערכי אמת שונים, ושניהם שקר כאשר ל-p ול-q אותו ערך אמת. לכן יש להם אותו לוח אמת.

תשובה 15 (השאלה בעמ׳ 29)

א. לפי משפט 4 קיים פסוק השקול ל-α, המכיל רק את הקַשָרים $\neg,\wedge$. לפיכך, כדי להראות שיש פסוק שקול ל-α המכיל רק את הקַשָרים $\neg,\vee$, די שנראה כי ניתן להביע את $\wedge$

בעזרת $\neg,\vee$. מכלל דה-מורגן $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$ (משפט 2 סעיף ה'), בעזרת הדיון על הצבה שבסוף סעיף 8, נקבל כי $p\wedge q\equiv\neg((\neg p)\vee(\neg q))$. שקילות זו מביעה את $\wedge$ בעזרת הקַשָּׁרים $\neg$, $\vee$, כמבוקש.

ב. לפי סעיף א' קיים פסוק השקול ל-α, המכיל רק את הקַשָּׁרים $\neg,\vee$. לפיכך, כדי להראות שיש פסוק שקול ל-α המכיל רק את הקַשָּׁרים $\neg,\rightarrow$, די שנראה כי ניתן להביע את $\vee$ בעזרת $\neg,\rightarrow$. ממשפט 2 סעיף ז': $p\rightarrow q\equiv(\neg p)\vee q$. מכאן ומהדיון על הצבה שבסוף סעיף 8 נובעת השקילות $p\vee q\equiv(\neg p)\rightarrow q$. שקילות זו מביעה את $\vee$ בעזרת הקַשָּׁרים $\neg,\rightarrow$, כמבוקש.

תשובה 16 (השאלה בעמ' 29)

א. במהלך הוכחת משפט 4 הראינו שניתן להביע את $\leftrightarrow,\rightarrow,\vee$ בעזרת $\neg,\wedge$. די אפוא שנביע את $\neg,\wedge$ בעזרת NAND כדי להוכיח את המבוקש.

נתבונן בפסוק $\neg(p \text{ NAND } q)$: פסוק זה הוא אמת רק כאשר p ו-q שניהם אמת, והוא שקר בכל שאר המצבים. לכן לוח האמת שלו מתלכד עם לוח האמת של $p\wedge q$.

נתבונן בפסוק $p \text{ NAND } p$. פסוק זה הוא שקר כאשר p הוא אמת, והוא אמת כאשר p הוא שקר. לכן לוח האמת שלו מתלכד עם לוח האמת של $\neg p$.

הבענו את $\neg,\wedge$ בעזרת NAND בלבד. מכאן, כאמור, נובעת הטענה.

ב. בשאלה 15א הראינו שניתן להביע את $\leftrightarrow,\rightarrow,\wedge$ בעזרת $\neg,\vee$. די אפוא שנביע את $\neg,\vee$ בעזרת NOR כדי להוכיח את המבוקש.

נתבונן בפסוק $\neg(p \text{ NOR } q)$: פסוק זה הוא שקר רק כאשר p ו-q שניהם שקר, והוא אמת בכל שאר המצבים, לכן לוח האמת שלו מתלכד עם לוח האמת של $p\vee q$.

נתבונן בפסוק $p \text{ NOR } p$. פסוק זה הוא שקר כאשר p הוא אמת, והוא אמת כאשר p הוא שקר. לכן לוח האמת שלו מתלכד עם לוח האמת של $\neg p$.

הבענו את $\neg,\vee$ בעזרת NOR בלבד. מכאן, כאמור, נובעת הטענה.

תשובה 17 (השאלה בעמ' 30)

א. הפסוק $p\leftrightarrow q$ הוא אמת בשורה הראשונה ובשורה הרביעית של לוח האמת, כלומר בשורות שבהן ל-p ול-q יש אותו ערך אמת, ורק בשורות אלה. בשורות אלה גם $p\rightarrow q$ הוא אמת.

מכאן שהפסוק $p\leftrightarrow q$ גורר טאוטולוגית את הפסוק $p\rightarrow q$.

ב. נתבונן בלוח האמת של הפסוק $p\vee q$ (בעמ' 11). בכל שורה שבה p אמת, גם $p\vee q$ אמת.

לכן p גורר טאוטולוגית את $p\vee q$.

ג. נתבונן בלוח האמת של הפסוק $p\wedge q$ (בעמ' 11). הפסוק הוא אמת אך ורק בשורה הראשונה, ובשורה זו גם הפסוק p אמת.

לכן $p\wedge q$ גורר טאוטולוגית את p.

תשובה 18 (השאלה בעמ' 31)

עלינו להוכיח שתי טענות:

א. אם $\alpha \equiv \beta$ אז (α גורר טאוטולוגית את β ו- β גורר טאוטולוגית את α).

ב. אם (α גורר טאוטולוגית את β ו- β גורר טאוטולוגית את α) אז $\alpha \equiv \beta$.

הוכחת א: נניח שהפסוקים שקולים. משמע, לפי הגדרה 2ב, יש להם אותו לוח אמת מאוחד. לכן ברור שבכל שורה שבה α הוא אמת גם β הוא אמת, ובכל שורה שבה β הוא אמת גם α הוא אמת. מכאן ש- α גורר טאוטולוגית את β ו- β גורר טאוטולוגית את α.

הוכחת ב: נניח שכל אחד מהפסוקים גורר טאוטולוגית את רעהו. נתבונן בלוח אמת מאוחד של שני הפסוקים. מכך ש- α גורר טאוטולוגית את β נובע שבכל שורה בלוח שבה α הוא אמת, גם β הוא אמת, ואילו מכך ש- β גורר טאוטולוגית את α, נובע ש**בכל שורה בלוח שבה β הוא אמת גם α הוא אמת.** את האמירה האחרונה, המודגשת, ניתן לנסח גם כך: **בכל שורה בלוח שבה α הוא שקר, גם β הוא שקר** (כדאי לשים לב ששינוי הניסוח הזה נעשה על פי כלל ה-contrapositive שהוזכר במשפט 2).

קיבלנו שבכל שורה שבה α אמת – גם β אמת, ובכל שורה שבה α שקר – גם β שקר. לכן, לשני הפסוקים יש אותו לוח אמת מאוחד. לפי הגדרה 2ב, הם שקולים טאוטולוגית.

תשובה 19 (השאלה בעמ' 31)

א. נסמן:

p: ראובן פגש את שמעון אתמול.

q: שמעון הוא הגנב.

r: ראובן משקר.

s: הגניבה בוצעה אחרי חצות.

נצרין את הפסוקים המורכבים:

(i) $(\neg p) \to (q \vee r)$

(ii) $(\neg q) \to (p \wedge s)$

(iii) $s \to ((\neg q) \to r)$

ב. התובע טוען, בעצם, ש- $(i) \wedge (ii) \wedge (iii)$ גורר טאוטולוגית את q.

טענה זו שגויה, כי במצב שבו p, r, s – כולם אמת ואילו q שקר, מתקבל ששלושת הפסוקים (i), (ii), (iii) כולם אמת, ולכן גם $(i) \wedge (ii) \wedge (iii)$ אמת, בעוד q הוא שקר. פירוש הדבר שבלוח אמת מאוחד עבור כל הפסוקים הנזכרים (לוח בן 16 שורות) תהיה שורה שבה $(i) \wedge (ii) \wedge (iii)$ אמת, בעוד q הוא שקר באותה שורה. מכאן שהתובע שוגה בקביעתו.

תשובה 20 (השאלה בעמ' 31)

עלינו להוכיח שתי טענות:

א. אם α גורר טאוטולוגית את β, אז $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

ב. אם $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה, אז α גורר טאוטולוגית את β.

הוכחת א': נניח ש- α גורר טאוטולוגית את β. נתבונן בלוח האמת המאוחד לפסוקים α, β, ו- $\alpha \to \beta$. בלוח זה, בכל שורה שבה α הוא אמת, גם β הוא אמת. לכן, מתוך המשמעות הפורמאלית של הקַשָּׁר $\to$ (כלומר, מהתבוננות בשורה הראשונה של לוח האמת של הקַשָּׁר $\to$ ומהצבת הפסוקים α, β במקום המשתנים p, q בהתאמה), נקבל שבכל שורה בלוח האמת המאוחד שבה α הוא אמת, גם $\alpha \to \beta$ הוא אמת.
מה בדבר השורות, בלוח האמת המאוחד, שבהן α הוא שקר?
בשורות אלה ממילא המשמעות הפורמאלית של הקַשָּׁר $\to$ מכתיבה ש- $\alpha \to \beta$ הוא אמת. אם כן, קיבלנו שבכל שורה בלוח האמת המאוחד, $\alpha \to \beta$ הוא אמת!
מכאן ש- $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

הוכחת ב': נניח ש- $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה. נתבונן בלוח האמת המאוחד לפסוק זה ולפסוקים α ו- β. בכל שורה בלוח, הפסוק $\alpha \to \beta$ הוא אמת. מהמשמעות הפורמאלית של הקַשָּׁר $\to$ נובע שבכל שורה שבה הפסוק α הוא אמת, גם הפסוק β הוא אמת. כעת, מהגדרה 3, יוצא שהפסוק α גורר טאוטולוגית את הפסוק β.

תשובה 21 (השאלה בעמ' 32)
נפתור את יתר הסעיפים.

ב. בחלק הראשון של הסעיף עלינו להראות כי כאשר p הוא אמת (כלומר בכל שורה בלוח שבה p הוא אמת), $p \vee q$ הוא אמת. זו מסקנה מיידית מלוח האמת של $\vee$.
בחלק השני של הסעיף עלינו להראות כי כאשר q הוא אמת (כלומר בכל שורה בלוח שבה q הוא אמת), $p \vee q$ הוא אמת. גם זו מסקנה מיידית מלוח האמת של $\vee$.

ג. כאשר הפסוק $(p \vee q) \wedge (\neg p)$ הוא אמת, הרכיבים שלו, $p \vee q$ ו- $\neg p$, שניהם אמת. במצב זה p הוא שקר, ומלוח האמת של $\vee$ נקבל ש-q הוא אמת.

ד. כאשר הפסוק $p \wedge (p \to q)$ הוא אמת, הרכיבים שלו, p ו-$p \to q$, שניהם אמת.
מלוח האמת של $\to$ נקבל ש-q הוא אמת.

ה. כאשר הפסוק $(p \to q) \wedge (\neg q)$ הוא אמת, מתקיים ששני הרכיבים שלו, $p \to q$ ו- $\neg q$ הם אמת.
לכן q הוא שקר, ומלוח האמת של $\to$ נקבל שגם p הוא שקר, ולכן $\neg p$ הוא אמת.

ו. נבנה לוח אמת מאוחד ומורחב לשני הפסוקים. יהיו בו 8 שורות:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$
T	**T**	**T**	T	T	**T**	T
T	**T**	**F**	T	F	F	F
T	**F**	**T**	F	T	F	T
T	**F**	**F**	F	T	F	F
F	**T**	**T**	T	T	**T**	T
F	**T**	**F**	T	F	F	T
F	**F**	**T**	T	T	**T**	T
F	**F**	**F**	T	T	**T**	T

השורה הראשונה, החמישית, השביעית והשמינית, הן כל השורות שבהן הפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r)$ הוא אמת. בשורות אלה גם הפסוק $p \to r$ הוא אמת. לכן הפסוק $p \to r$ נובע מהפסוק $(p \to q) \wedge (q \to r)$.

תשובה 22 (השאלה בעמ' 32)

נפתור את יתר הסעיפים.

א. בלוח האמת המאוחד לפסוק α ולטאוטולוגיה t, תקבל הטאוטולוגיה ערך T בכל שורה. בפרט, היא ודאי תקבל ערך T בכל שורה שבה הפסוק α מקבל ערך T. לפיכך היא נובעת מהפסוק α.

ב. בהינתן ש- β הוא פסוק שנובע מטאוטולוגיה, הרי שהוא אמת בכל שורה שבה הטאוטולוגיה היא אמת. אבל הטאוטולוגיה היא אמת בכל שורה, ולכן גם β הוא אמת בכל שורה. לכן גם β הוא טאוטולוגיה.

ג. כאשר הפסוק α איננו נובע מסתירה, קיימת שורה שבה הסתירה היא אמת והפסוק הוא שקר. אך סתירה אינה אמת באף אחת מן השורות. לכן, לא קיים פסוק שאינו נובע מסתירה. משמע כל פסוק נובע מסתירה.

ה. מתקבל ישירות מסעיף ד' ומסעיף ג'.

תשובה 23 (השאלה בעמ' 34)

א. $\exists x(x^2 = 2)$

ב. $\exists x \exists y(x + y = xy)$

ג. $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

ד. $\forall x \exists y(y + x = 0)$

ה. $\forall x((x \neq 0) \to \exists y(yx = 1))$

ו. $\forall x((x < 10) \to \exists y((y > x) \wedge (y < 10)))$

ז. $\exists x\big((\forall y(y > 0 \to x < y)\big) \wedge \forall z(z < 0 \to x > z))$

ח. $\exists x\Big(\big(\forall y((y > 0 \wedge y^2 < 2) \to x > y)\big) \wedge \forall z((z > 0 \wedge z^2 > 2) \to x < z)\Big)$

תשובה 24 (השאלה בעמ' 36)

לפי עקרון השלילה הכפולה, לנוסחה $\forall x \neg \psi$ יש משמעות זהה לזו של הנוסחה $\neg\neg\forall x \neg \psi$. לפי סעיף א', לנוסחה האחרונה יש משמעות זהה לזו של הנוסחה $\neg\exists x \neg\neg \psi$. שוב, לפי עקרון השלילה הכפולה, לנוסחה זו יש משמעות זהה לזו של הנוסחה $\neg\exists x \psi$. בזאת הוכחנו את טענת סעיף ב' בעזרת סעיף א' ובעזרת עקרון השלילה הכפולה. נוכל גם לנמק במילים את סעיף ב', כפי שנימקנו את סעיף א':

נתבונן בפסוק:

(*) אין ולו סטודנט אחד שהגיש את המטלה.

ניתן לומר את (*) גם במילים אחרות:

(**) **כל הסטודנטים לא הגישו את המטלה.**

התרגום הראשוני של (*), (**) לשפה פורמאלית הוא:

(*) **לא קיים** x כך ש- x הגיש את המטלה.

(**) **לכל** x **מתקיים**: x **לא** הגיש את המטלה.

לפסוקים (*), (**) יש אותה משמעות.

משמעותה של האמירה "x הגיש את המטלה" אינה מהותית לקֶשֶר בין (*) ל- (**): במקום "x הגיש את המטלה" יכולנו לכתוב "x הוא ממושקף", "x גדול מ-7" או אפילו אמירה מורכבת כגון "קיים y כך ש-x קטן מ-y". בכל מקרה, לאמירה "**לא קיים** x שמקיים..." ולאמירה "**כל** x **אינו** מקיים..." יש אותה משמעות.

נצרין את שתי האמירות האלה. במקום שלוש הנקודות, נרשום את האות היוונית ψ.

שתי האמירות הן: $\neg\exists x\ \psi$, $\forall x \neg\psi$.

אנו קובעים אפוא כי לנוסחה $\neg\exists x\ \psi$ ולנוסחה $\forall x \neg\psi$ יש אותה משמעות.

תשובה 25 (השאלה בעמ' 36)

א. $\neg\exists x(x^2 = 2)$.

אחרי הפעלת כלל דה-מורגן: $\forall x\neg(x^2 = 2)$. במילים אחרות: $\forall x(x^2 \neq 2)$.

ב. $\neg\exists x\exists y(x+y=xy)$.

אחרי הפעלה חוזרת של כלל דה-מורגן: $\forall x\forall y\neg(x+y=xy)$.

במילים אחרות: $\forall x\forall y(x+y\neq xy)$.

בעברית: לכל שני מספרים, סכומם שונה ממכפלתם (טענה זו כמובן אינה נכונה).

ג. $\neg\forall x\forall y(x+y=y+x)$.

אחרי הפעלה חוזרת של כלל דה-מורגן: $\exists x\exists y\neg(x+y=y+x)$.

במילים אחרות: $\exists x\exists y(x+y\neq y+x)$.

ד. $\neg\forall x\exists y(y+x=0)$.

אחרי הפעלה חוזרת של כלל דה-מורגן: $\exists x\forall y\neg(y+x=0)$.

במילים אחרות: $\exists x\forall y(y+x\neq 0)$.

ה. $\neg\forall x\big((x\neq 0)\rightarrow\exists y(yx=1)\big)$.

אחרי הפעלת כלל דה-מורגן: $\exists x\neg\big((x\neq 0)\rightarrow\exists y(yx=1)\big)$.

נמשיך ונכניס את השלילה עוד פנימה:

בסעיף ז' של משפט 2 הוכחנו כי $p\rightarrow q$ שקול ל- $\neg(p\wedge\neg q)$.

לכן $\neg(p\rightarrow q)$ שקול ל- $p\wedge\neg q$.

לפיכך את הביטוי $\neg\big((x\neq 0)\rightarrow\exists y(yx=1)\big)$ ניתן להביע גם כ- $x\neq 0\wedge\neg\exists y(yx=1)$.

בעזרת כלל דה-מורגן, $x\neq 0\wedge\forall y\neg(yx=1)$, ובמילים אחרות: $x\neq 0\wedge\forall y(yx\neq 1)$.

תשובה סופית: $\exists x\big(x\neq 0\wedge\forall y(yx\neq 1)\big)$.

ו. $\neg\forall x\Big((x<10)\rightarrow\exists y\big((y>x)\wedge(y<10)\big)\Big)$.

אחרי הפעלת כלל דה-מורגן: $\exists x\neg\Big((x<10)\rightarrow\exists y\big((y>x)\wedge(y<10)\big)\Big)$.

כאמור בסעיף הקודם, $\neg(p\rightarrow q)$ שקול ל- $p\wedge\neg q$.

לפיכך את $\neg\Big((x<10)\rightarrow\exists y\big((y>x)\wedge(y<10)\big)\Big)$

ניתן להביע כך: $x<10\wedge\neg\exists y\big((y>x)\wedge(y<10)\big)$.

בעזרת כלל דה-מורגן: $x<10\wedge\forall y\neg\big((y>x)\wedge(y<10)\big)$.

קיבלנו את הנוסחה: $\exists x\Big(x<10\wedge\forall y\neg\big((y>x)\wedge(y<10)\big)\Big)$.

נמשיך ונכניס את השלילה פנימה:

בעזרת כלל דה-מורגן של תחשיב הפסוקים, $\neg\big((y>x)\wedge(y<10)\big)$ שקול ל-
$\big(\neg(y>x)\big)\vee\neg(y<10)$.

במילים אחרות: $y\leq x\ \vee\ y\geq 10$.

קיבלנו את הנוסחה: $\exists x\big(x<10\wedge\forall y(y\leq x\ \vee\ y\geq 10)\big)$.

ז. $\neg\exists x\Big(\big(\forall y(y>0\rightarrow x<y)\big)\wedge\forall z(z<0\rightarrow x>z)\Big)$.

אחרי הפעלת כלל דה-מורגן: $\forall x\neg\Big(\big(\forall y(y>0\rightarrow x<y)\big)\wedge\forall z(z<0\rightarrow x>z)\Big)$.

לפי כלל דה-מורגן בתחשיב הפסוקים, ניתן לכתוב את הפסוק כך:

$\forall x\Big(\big(\neg\forall y(y>0\rightarrow x<y)\big)\vee\neg\forall z(z<0\rightarrow x>z)\Big)$.

שוב לפי כלל דה-מורגן לכמתים: $\forall x\Big(\big(\exists y\neg(y>0\rightarrow x<y)\big)\vee\exists z\neg(z<0\rightarrow x>z)\Big)$.

נשתמש בשקילות בין $\neg(p\rightarrow q)$ לבין $p\wedge\neg q$ על-מנת לפשט אותו עוד יותר:

$\forall x\Big(\big(\exists y(y>0\wedge\neg x<y)\big)\vee\exists z(z<0\wedge\neg x>z)\Big)$,

כלומר $\forall x\Big(\big(\exists y(y>0\wedge x\geq y)\big)\vee\exists z(z<0\wedge x\leq z)\Big)$.

ח. $\neg\exists x\Big(\Big(\forall y\big((y>0\wedge y^2<2)\rightarrow x>y\big)\Big)\wedge\forall z\big((z>0\wedge z^2>2)\rightarrow x<z\big)\Big)$.

בעזרת כלל דה-מורגן:

$\forall x\neg\Big(\Big(\forall y\big((y>0\wedge y^2<2)\rightarrow x>y\big)\Big)\wedge\forall z\big((z>0\wedge z^2>2)\rightarrow x<z\big)\Big)$.

כעת, לפי כלל דה-מורגן בתחשיב הפסוקים, ניתן לכתוב את הפסוק כך:

$$\forall x\Big(\Big(\neg\forall y\big((y>0\wedge y^2<2)\rightarrow x>y\big)\Big)\vee\neg\forall z\big((z>0\wedge z^2>2)\rightarrow x<z\big)\Big)$$

שוב לפי כלל דה-מורגן לכמתים:

$$\forall x\Big(\Big(\exists y\neg\big((y>0\wedge y^2<2)\rightarrow x>y\big)\Big)\vee\exists z\neg\big((z>0\wedge z^2>2)\rightarrow x<z\big)\Big).$$

נמשיך ונכניס את השלילה פנימה:

בנוסחה $\neg\big((y>0\wedge y^2<2)\rightarrow x>y\big)$ ניעזר בשקילות בין $\neg(p\rightarrow q)$ לבין $p\wedge\neg q$.

נקבל:

$\forall x\Big(\Big(\exists y\big((y>0 \wedge y^2<2)\wedge\neg(x>y)\big)\Big)\vee\exists z\big((z>0\wedge z^2>2)\wedge\neg x<z\big)\Big)$,

כלומר $\forall x\Big(\Big(\exists y\big((y>0 \wedge y^2<2)\wedge x\le y\big)\Big)\vee\exists z\big((z>0\wedge z^2>2)\wedge x\ge z\big)\Big)$.

לסיום, בגלל תכונת הקיבוציות (אסוציאטיביות) של הקשר "וגם" (משפט 2 סעיף ג'), נוכל להשמיט כמה זוגות סוגריים:

$$\forall x\Big(\Big(\exists y\big(y>0\ \wedge\ y^2<2\ \wedge x\le y\big)\Big)\vee\exists z\big(z>0\ \wedge z^2>2\ \wedge x\ge z\big)\Big)$$

תשובה 26 (השאלה בעמ' 36)

א. לפי כללי דה מורגן,

לפסוק $\neg\forall x(x^2>25\rightarrow x>5)$ יש משמעות זהה לזו של הפסוק $\exists x\neg(x^2>25\rightarrow x>5)$.

לפי שאלה 8 סעיף ב', פסוק זה שקול לפסוק $\exists x\neg\neg(x^2>25\wedge\neg(x>5))$.

מעקרון השלילה הכפולה (שאלה 8 סעיף א') נקבל שזה שקול לפסוק

$\exists x\big(x^2>25\wedge\neg(x>5)\big)$.

במילים אחרות: $\exists x\big(x^2>25\ \ \wedge\ \ x\le 5\big)$.

$x=-6$ אכן מהווה אישור לנכונות הפסוק שכתבנו. הפסוק שכתבנו מתפרש בעברית כך:

קיים מספר שהריבוע שלו גדול מ-25 אך הוא עצמו קטן או שווה ל-5.

למשל, 6- הוא מספר כזה.

ב. הפסוק $\neg\forall x(\psi\rightarrow\varphi)$ שקול, לפי כלל דה מורגן, לפסוק $\exists x(\neg(\psi\rightarrow\varphi))$.

לפי שאלה 8 סעיף ב', פסוק זה שקול לפסוק $\exists x\neg\neg(\psi\wedge\neg\varphi)$.

מעקרון השלילה הכפולה, פסוק זה שקול לפסוק $\exists x(\psi\wedge\neg\varphi)$.

קיבלנו כי לפסוק $\neg\forall x(\psi\rightarrow\varphi)$ ולפסוק $\exists x(\psi\wedge\neg\varphi)$ יש אותה משמעות.

הפסוק $\exists x(\psi\wedge\neg\varphi)$ הוא מהצורה של הפסוק שקיבלנו בסעיף א', כאשר ψ מחליפה את הנוסחה $x^2>25$ ו- φ מחליפה את הנוסחה $x>5$.

13 הערות

1 אילו היינו קובעים ש"החשבון ברח יבש" הוא פסוק שהוא שקר, היינו נאלצים לקבוע שהשלילה שלו, החשבון לא ברח יבש, היא אמת. זה עלול להוביל למקומות לא רצויים.

2 יש דוגמאות קיצוניות יותר המראות כי "לפני ש-" אינו קֶשֶׁר לוגי. למשל: $2+2=4$ לפני ששֶמן צף על מים. ספק אם זהו פסוק; הוא דומה קצת לאמירה החשבון ברח יבש, שאליה התייחסנו בהערה הקודמת.

3 בהצרנה נעלמות לעתים לא רק משמעותן של הטענות המיוצגות על-ידי משתנים פסוקיים, אלא גם משמעותן המדויקת של חלק ממילות הקישור. בסעיף ב׳ של שאלה 4, המילה "אבל" מביעה ניגוד בין המאמץ שעשה הקרנף לבין אי-ההצלחה שלו לעוף. אין לנו דרך לתרגם תחושה זו לשפה פורמאלית. בהצרנה, הייצוג הטוב ביותר שאנו יכולים לתת למילה "אבל" הוא "וגם". בדומה, בהצרנת סעיף א׳ התעלמנו מההיבט של סיבה ותוצאה הנרמז בפסוק.

4 בבנייה המקובלת של תחשיב הפסוקים, השפה מכילה קבוצה של פסוקים יסודיים קבועים, שמהם בנויים כל שאר הפסוקים. **המבוא המהיר שלנו אינו מציין פסוקים יסודיים.** בפרק מבוא זה, פסוק הוא "טענה כלשהי", קצת בדומה לכך שבלימוד ראשון של תורת הקבוצות, קבוצה היא "אוסף כלשהו של עצמים".

5 טענה חשובה וסטנדרטית שלא נוכיח כאן: לכל לוח אמת שרירותי שנכתוב (עמודה באורך 2^n, שבה ערכים שרירותיים של T, F כרצוננו) קיים פסוק המייצג לוח זה, הכתוב בעזרת n משתנים פסוקיים ובעזרת הקַשָרים הלוגיים שהגדרנו.

6 בכל טענה ספציפית שבה אנו מעוניינים, בשפה מדוברת או בשפה מתמטית, ניתן לייצג בעזרת משתנים פסוקיים אמירות פשוטות או מורכבות, כרצוננו. למשל, אם שמעון טוען:

(*) לא נכון **שלא נכון** שאם הכלב נובח אז החתול בורח,

ומתגנב ללבנו חשד ששמעון יכול היה להתבטא בצורה פשוטה יותר, יש לנו כלים להראות זאת: נסמן ב- p את הפסוק אם הכלב נובח אז החתול בורח. הפסוק (*) מיוצג כעת כ- $\neg\neg p$. לפי שאלה 8א, $p \equiv \neg\neg p$. מהגדרת שקילות בין פסוקים מפורשים נקבל שהטענה לא נכון **שלא נכון** שאם הכלב נובח אז החתול בורח שקולה טאוטולוגית לטענה אם הכלב נובח אז החתול בורח.

7 החלק של לוגיקה שסקרנו עד סוף סעיף 10 נקרא תחשיב הפסוקים. סעיף 11 פותח נושא אחר, הנקרא תחשיב הפְּרֶדִיקָטים, או תחשיב היחסים. עבור תחשיב הפסוקים הצגנו במהירות את המושגים הבסיסיים. בתחשיב הפְּרֶדִיקָטים לא הצגנו אפילו את כל ההגדרות והמונחים הבסיסיים (לא הצגנו אפילו את המושג "פְּרֶדִיקָט", שעל שמו נקרא הנושא...). מי שימשיך בלימודיו יחזור ביתר פירוט הן לתחשיב הפסוקים והן לתחשיב הפְּרֶדִיקָטים באחד הקורסים שהוזכרו בעמוד הפתיחה של הפרק.

במהלך הפרק נעזרנו בציטוטים ובדמויות מפרי עטם של:

קובי אוז, ג׳יי קיי רולינג, לואיס קרול (בתרגומו של אהרן אמיר), חבורת מונטי פייתון וחיים חפר.

מהדורה פנימית
לא להפצה ולא למכירה
מק"ט 20476-1043