Hamiltonian in Fourier Space

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l Q_{ijkl}(\mathbf{S}_i.\mathbf{S}_j)(\mathbf{S}_k.\mathbf{S}_l)$$

$$H = \frac{1}{2n^2}\sum_{ijkl} Q_{ijkl}\left[\sum_{\mathbf{q}_1}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}\exp^{\iota\mathbf{q}_1.\mathbf{r}_i}.\sum_{\mathbf{q}_2}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_2}\exp^{\iota\mathbf{q}_2.\mathbf{r}_j}\right]\left[\sum_{\mathbf{q}_3}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3}\exp^{\iota\mathbf{q}_3.\mathbf{r}_k}.\sum_{\mathbf{q}_4}\mathbf{S}_{\mathbf{q}_4}\exp^{\iota\mathbf{q}_4.\mathbf{r}_l}\right]$$

$$H = \frac{1}{2n^2}\sum_{ijkl}\sum_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4} Q_{ijkl}(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{kl})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}.\mathbf{S}_{\mathbf{q}_2})(\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3}.\mathbf{S}_{\mathbf{q}_4})\exp^{\iota(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2).\mathbf{r}_i}\exp^{\iota(\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4).\mathbf{r}_k}\exp^{-\iota(\mathbf{R}_{ij}.\mathbf{q}_2+\mathbf{R}_{kl}.\mathbf{q}_4)}$$

Now, $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1$ and $\mathbf{q}_4 = -\mathbf{q}_3$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{ijkl}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3} Q_{ijkl}(\mathbf{R}_{ij},\mathbf{R}_{kl})|\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}|^2|\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3}|^2\exp^{\iota(\mathbf{R}_{ij}.\mathbf{q}_1+\mathbf{R}_{kl}.\mathbf{q}_3)}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{ijkl}\sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3} Q(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_3)|\mathbf{S}_{\mathbf{q}_1}|^2|\mathbf{S}_{\mathbf{q}_3}|^2$$