Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Курдюмова Виолетта Евгеньевна

Неопределенный интеграл.

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Курдюмова Виолетта Евгеньевна

Сургут 2024 г.

Лабораторная работа №4. Неопределенный интеграл.

Вариант №11

Задание

4. Вычислить (аналитически и используя библиотеки Python для символьных вычислений) данные неопределенные интегралы. Для каждого интеграла, используя графические пакеты Python, на одном рисунке построить: график подынтегральной функции (синий цвет), и любые три различные интегральные кривые (зелёный цвет), соответствующие подынтегральной функции. Графики строить лишь на отрезках, которые целиком лежат в области определения функций.

Аналитическое решение 4.1

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} =$$

Применем метод неопределенных коэффициентов к исходному интегралу:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} = \frac{(C+A)x^3 + (D+B)x^2 + Cx + D}{x^2(x^2+1)}$$

Приравниваем коэффиценты слагаемых с одинаковыми степенями:

$$x^0 : D = 1 => D = 1$$

$$x^1 : C = 0 => C = 0$$

$$x^2 : D + B = 0 => B = -1$$

$$x^3 : C + A = 0 => A = 0$$

Запишем дробь в виде разности дробей:

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

Разделим на два интеграла:

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

Вычислим по табличным значениям и получим ответ :

$$= -\frac{1}{x} - arctg(x) + C$$

Программное решение 4.1

```
from sympy import *

# вычисление неопределенного интеграла

x = Symbol('x')
f = 1/(x**2 * (1 + x**2))

integral1 = integrate(f, x)
print(integral1)
```

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return  1/(x**2*(1+x**2))

def f1(x):
    y = - np.arctan(x) - 1/x
    return y

def f2(x):
    y = - np.arctan(x) - 1/x + 3
    return y

def f3(x):
    y = - np.arctan(x) - 1/x - 3
    return y

x = np.linspace(0.1, 10, 400)

plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')

plt.grid(True)
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-6, 15)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
```

```
    plt.title('График функции и кривые')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Иллюстрация решения 4.1

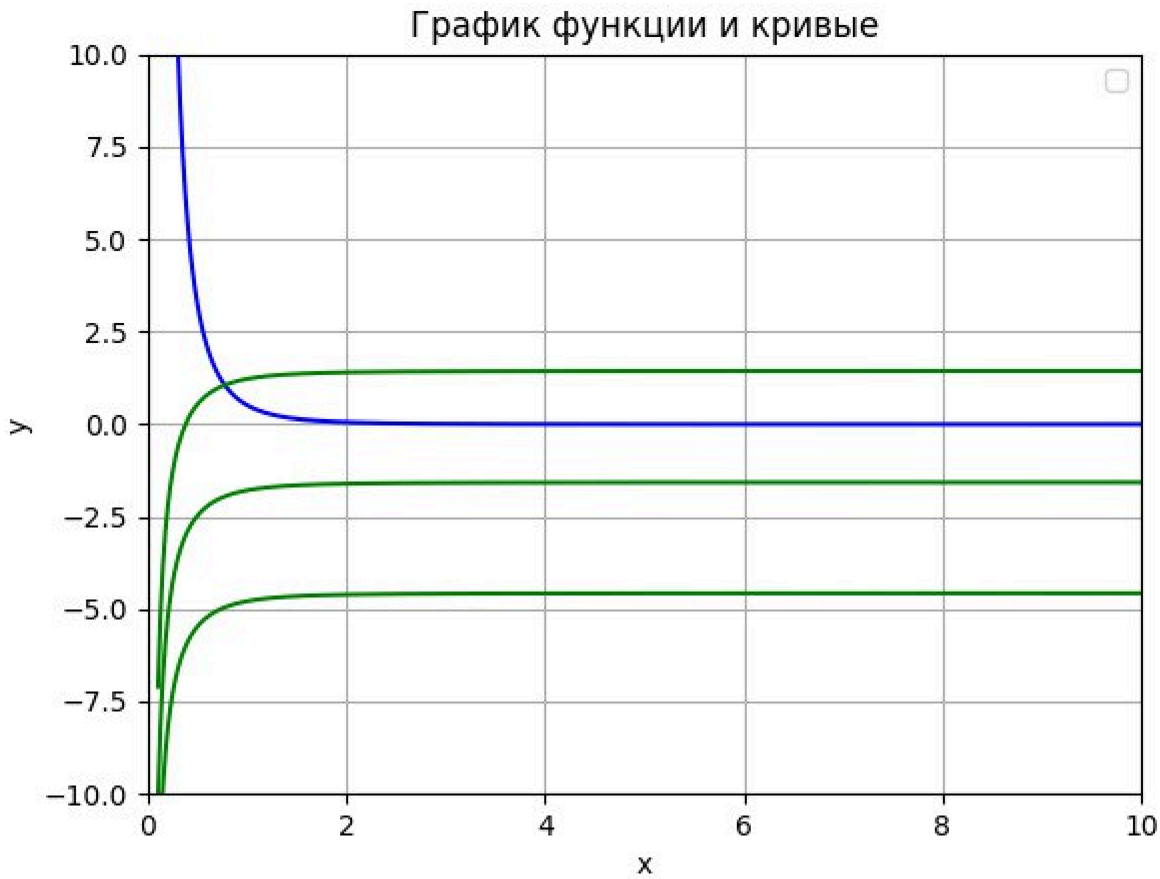

Рис. 4.1 График решения задачи.

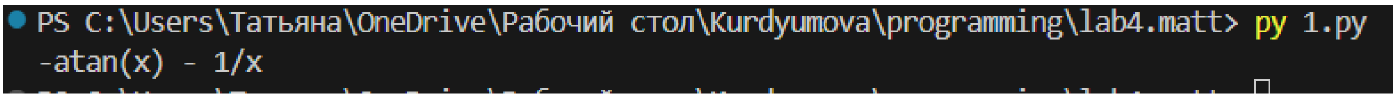

Рис. 4.1 Вывод программы в терминале.

Аналитическое решение 4.2

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx =$$

Чтобы решить данную задачу, нужно сначала применить замену:

$$t = x^2 + 1$$

$$\frac{1}{2}dt = xdx$$

Применить замену к функции:

$$= \int \frac{(t-1)\sqrt{t}}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t}) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt - \int \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

Избавимся от замены и вернем функцию в прежний вид:

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}(x^4+2x^2+1)}{5} - \frac{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}{3} =$$

Приведем дробь к общему знаменателю и получим ответ:

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}(3x^4+x^2-2)}{15} + C$$

Программное решение 4.2

```
from sympy import *

# вычисление неопределенного интеграла

x = Symbol('x')
f = (x**3) * sqrt(x**2 + 1)

integral = integrate(f, x)
print(integral)
```

```
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return  (x**3)  *(np.sqrt(x**2) + 1)

def f1(x):
    y = (np.sqrt(x**2 + 1) * (3 * x4 + x2 - 2))/15
    return y
```

```
def f2(x):
    y = (np.sqrt(x**2 + 1)*(3 * x4 + x2 - 2))/15 + 3
    return y

def f3(x):
    y = (np.sqrt(x**2 + 1)*(3 * x4 + x2 - 2))/15 - 3
    return y

x = np.linspace(-10, 10, 400)

plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')

plt.grid(True)
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-4, 15)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции и кривые')
plt.legend()
plt.show()
```

Иллюстрация решения 4.2

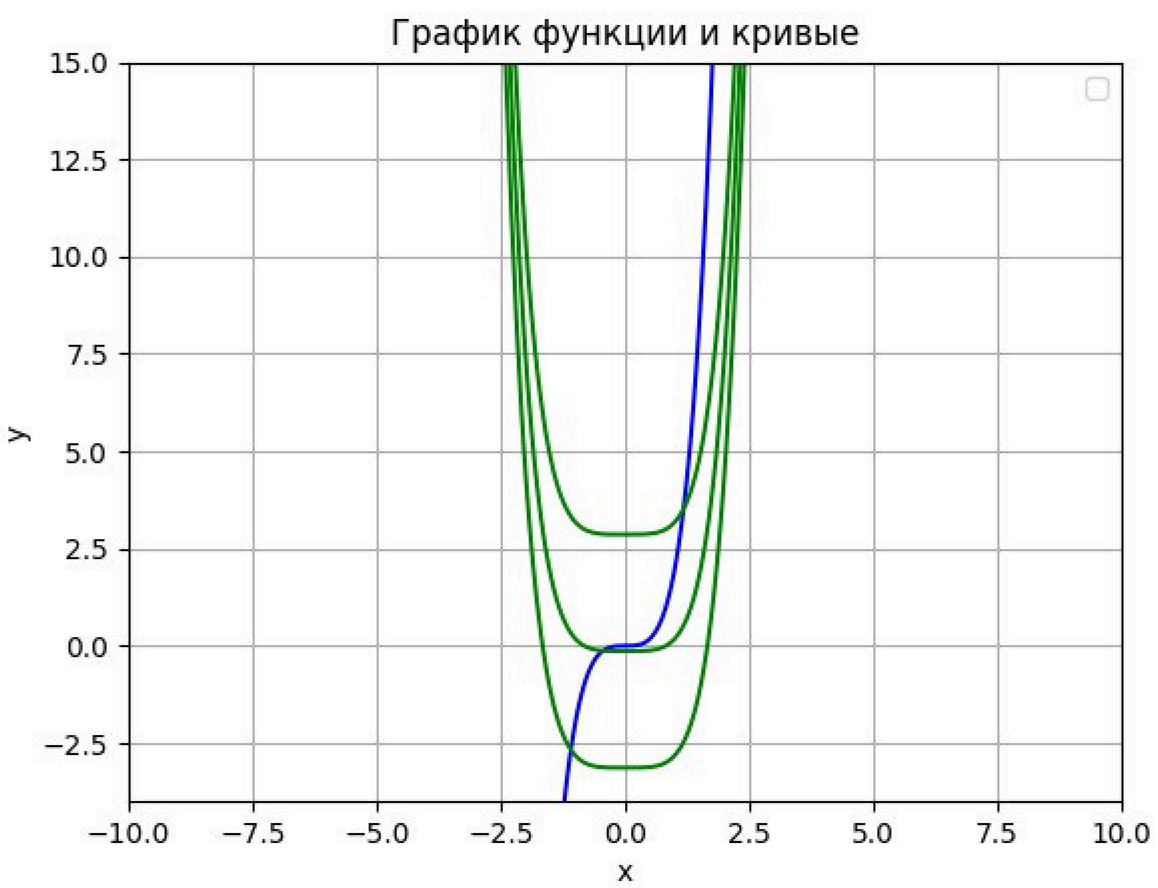

Рис. 4.2. График решения задачи.

```
PS C:\Users\Татьяна\OneDrive\Рабочий стол\Kurdyumova\programming\lab4.matt> py 2.py
x**4*sqrt(x**2 + 1)/5 + x**2*sqrt(x**2 + 1)/15 - 2*sqrt(x**2 + 1)/15
```

Рис. 4.2. Вывод программы в терминале.

Аналитическое решение 4.3

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1} dx =$$

Сделаем замену переменной:

$$t = 2x - 1$$

$$x = \frac{t + 1}{2}$$

$$dx = \frac{1}{2} dt$$

Применем замену к функции:

$$= \int \frac{\frac{(t+1)^2}{4} + \frac{3(t+1)}{2} + 1}{2t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{(t + 1)^2}{4t} + \frac{3(t + 1)}{2t} + \frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \int \frac{(t + 1)^2}{t} dt + \frac{3}{2} \int \frac{(t + 1)}{t} dt + \int \frac{1}{t} dt\right) =$$

Преобразуем интегралы поочередно:

1. $$\int \frac{(t + 1)^2}{t} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 1)}{t} dt = \int \left(t + \frac{1}{t} + 2\right) dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + 2t$$

2. $$\int \frac{(t + 1)}{t} dt = \int \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \ln|t| + t$$

3. $$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$$

Обратная замена и ответ:

$$= \frac{11 \ln|2x - 1|}{8} + \frac{x^4}{4} + \frac{7}{4} x + C$$

Программное решение 4.3

```
from sympy import *

# вычисление неопределенного интеграла

x = Symbol('x')
f = (x**2 + 3*x + 1) / (2*x - 1)

integral = integrate(f, x)
print("Неопределенный интеграл:", integral)
```

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return  (x**2 + 3*x + 1) / (2*x - 1)

def f1(x):
    y = ((x**4)/4) + ((7*x)/4) + (11/8) + np.log(2*x - 1)
    return y

def f2(x):
    y = ((x**4)/4) + ((7*x)/4) + (11/8) + np.log(2*x - 1) + 3
    return y

def f3(x):
    y = ((x**4)/4) + ((7*x)/4) + (11/8) + np.log(2*x - 1) - 3
    return y

x = np.linspace(0.6, 10, 500)

plt.plot(x, f(x), color='blue')
plt.plot(x, f1(x), color='green')
plt.plot(x, f2(x), color='green')
plt.plot(x, f3(x), color='green')

plt.grid(True)
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-15, 15)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('График функции и кривые')
plt.legend()
plt.show()
```

Иллюстрация решения 4.3

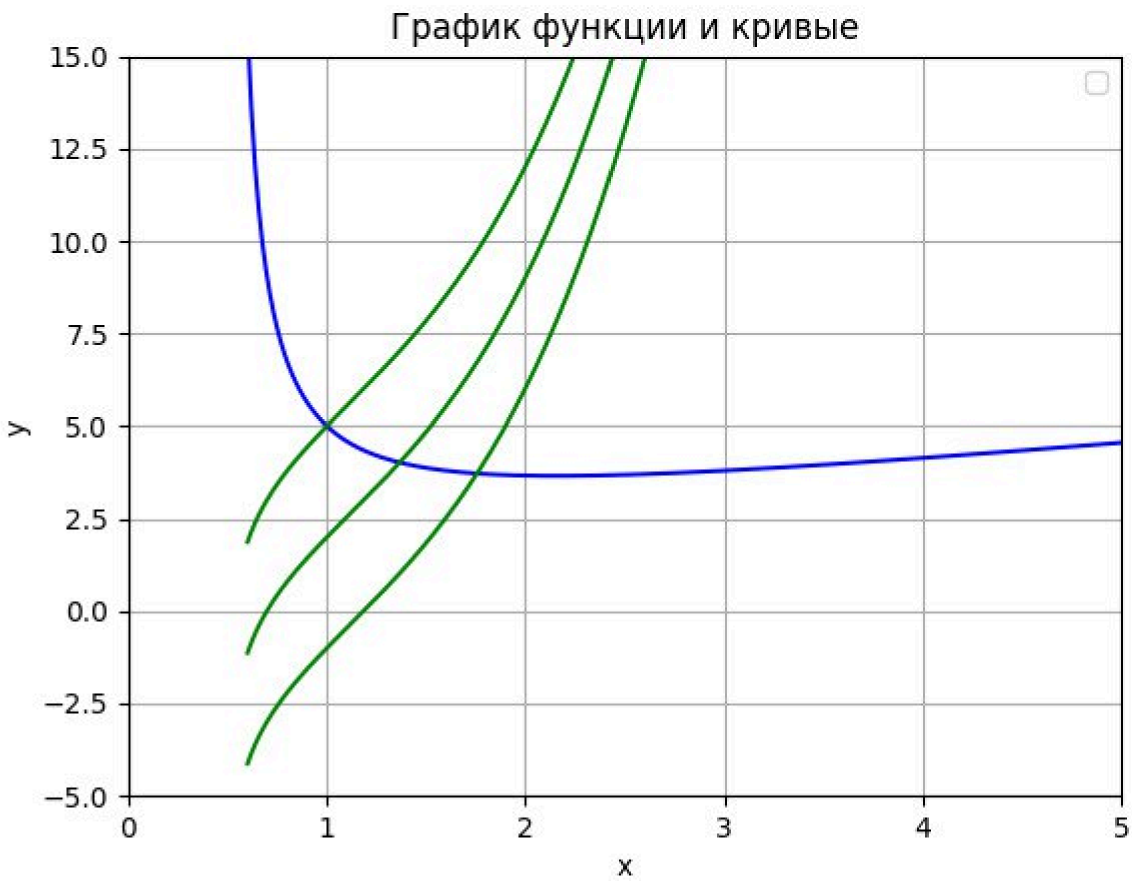

Рис. 4.3. График решения задачи.

```
PS C:\Users\Татьяна\OneDrive\Рабочий стол\Kurdyumova\programming\lab4.matt> py 3.py
x**2/4 + 7*x/4 + 11*log(2*x - 1)/8
```

Рис. 4.3. Вывод программы в терминале.