Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры

«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Кафедра прикладной математики

Курдюмова Виолетта Евгеньевна

Числовые последовательности

Дисциплина «Математический анализ»

направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

направленность (профиль): «Технологии программирования и анализ данных»

Преподаватель: Ряховский Алексей Васильевич

Доцент

Студент гр. № 601-31

Курдюмова Виолетта Евгеньевна

Сургут 2023 г.

Лабораторная работа №1. Числовые последовательности.

Вариант №12

Задание

Вычислить пределы данных числовых последовательностей двумя способами:

- аналитически
- используя библиотеки Python для символьных вычислений.

Для каждой числовой последовательности ${x_k}_{k=1}^\infty $ на одном рисунке построить (используя графические пакеты Python) следующие множества точек ($k = 1, \ldots, m$):

- (k, 0) – синий цвет
- (0, x_k) – зеленый цвет
- (k, x_k) – красный цвет

В случае, если последовательность сходится, построить на соответствующем рисунке точку (оранжевый цвет) изображающую предел последовательности ${x_k}_{k=1}^\infty $.

В задача 1 для сходящихся последовательностей, для заданного $ \varepsilon>0$ найти такой номер $ n(\varepsilon) $, начиная с которого $ |x_k-A|<\varepsilon, \forall k\geq n(\varepsilon) $

Аналитическое решение 1

Рассмотрим предел:

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\sqrt {n^2 + 11} - n} $

Вычислич предел каждого слагаемого отдельно:

- $ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\sqrt {n^2 + 11}} =\infty $
- $ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{n} = \infty $

Поскольку выражение $\infty-\infty$ является неопределенностью, преобразуем его, умножим выражение на $ \frac{\sqrt {n^2 + 11} + n}{ \sqrt {n + 11} + n} $:

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{(\sqrt {n^2 + 11} - n)(\sqrt {n^2 + 11} + n)}{{\sqrt {n^2 + 11} + n}}} $

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{n^2 + 11 - n^2}{{\sqrt {n^2 + 11} + n}}} $

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{\frac {11n}{n}}{{\sqrt {n^2 + 11} + n}}} $

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{n \frac {11}{n}}{n\sqrt {1 + {\frac{11}{n^2} + n}}}} $

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{\frac {11}{n}}{\sqrt {1 + {\frac{11}{n^2} + 1}}}} $

Следовательно:

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{ {11}*{0}}{\sqrt {1 + {{11}*{0} + 1}}}} = 0 $

Найдем предел: $ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{0} = 0 $

Найдем номер n(ε):

$ \lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\sqrt {n^2 + 11} - n} = 0 $

|$ \sqrt {n^2 + 11} - n$| = $\sqrt {n^2 + 11} - n $ < ε

$ \sqrt {n^2 + 11} $ < $ ε + n $

$ \ 11 $ < $ε^2 + 2nε $

$ \frac{ 11 - ε^2 }{2ε} $ < $ \frac{ 2nε }{2ε} $

$ n(ε) $ > $\frac{ 11 - ε^2 }{2ε} $

$ 1) $ $ε = 0,001$:

$ n(ε) = [\frac{ 11 - ε^2 }{2ε}] $ = $ [5499,9995] $, $ \forall{n} $ $ \geqslant $ $5499,9995$

все члены последовательности начиная с $ x_{5500} $ будут удовлетворять неравенству:

$ 0 - 0,001$ $ < $ $ x_n $ $ < $ $ 0 + 0,001 $

$ -0,001 $ $ < $ $ x_n $ $ < $ $ 0,001 $

Ответ: $ 0 $

Программное решение 1

```
#!/usr/bin/env python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *
n = Symbol("n")
def sequence(n):
    return (((n**2 + 11)**0.5) - n)
def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m + 1)
    y = sequence(x)
    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')
    lim_value = limit((((n**2 + 11)**0.5) - n), n, oo)
    plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$') # Точка предела
    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 20 # number of points
plot_points(m)
a = limit((((n**2 + 11)**0.5) - n), n, oo)
limit_value = sequence(m) # Вычисляем предел последовательности
plt.plot(m, limit_value, 'o', color='orange') # Строим точку предела последовательности
plt.axhline(y=limit_value, linestyle='--', color='orange')
print(a)
```

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

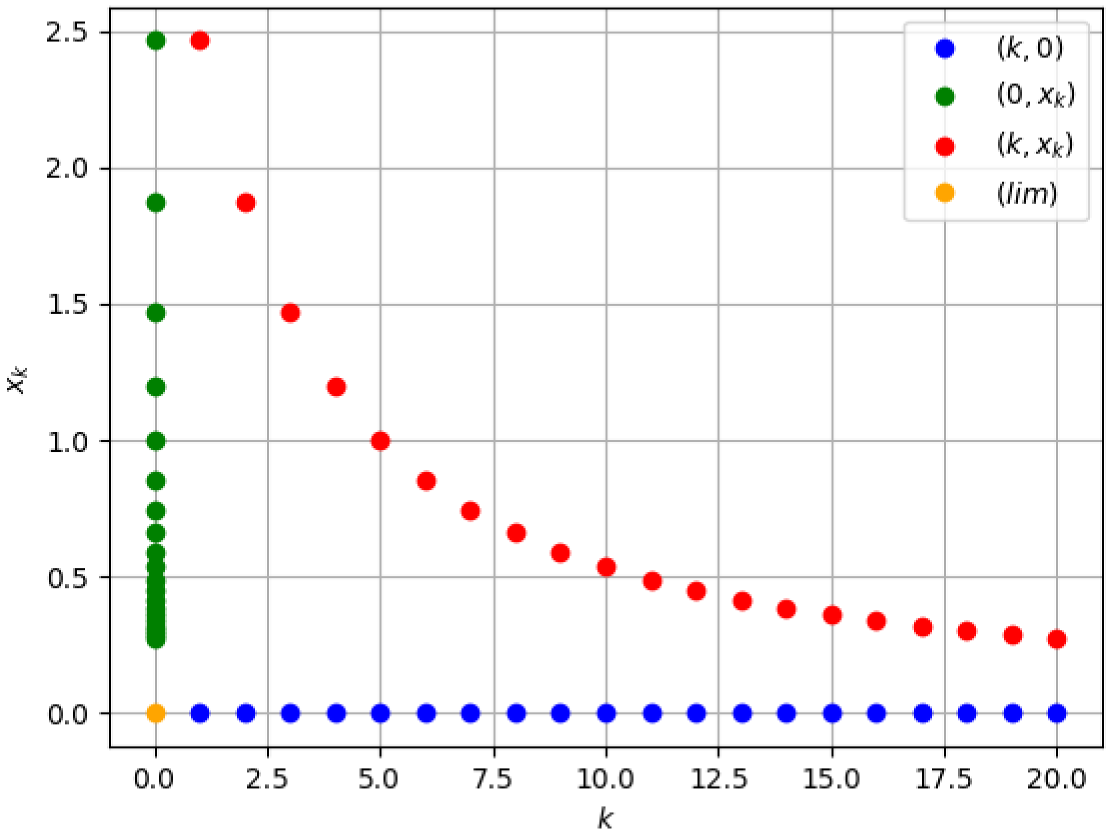

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

```
(env) violetta@debian:~/Desktop/repo/programming/Kyrdyumova/programming/lab1.matt$ python3 lab.mat.1.py
ATTENTION: default value of option mesa_glthread overridden by environment.
0
```

Аналитическое решение 2

Рассмотрим предел:

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{5n^4 + n^3 + 1} {(n + 1)^5 - n^5}$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}(5n^4 + n^3 + 1)=\infty$
- $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}((n + 1)^5 - n^5)=\infty$

Поскольку выражение $\frac{\infty}{\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это n^4:

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{5n^4 + n^3 + 1} {(n + 1)^5 - n^5}$ = $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{5n^4 + n^3 + 1} {5n^4+10n^3+10n^2+5n+1}$

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{5n^4 + n^3 + 1} {5n^4+10n^3+10n^2+5n+1}$ = $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{5n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \frac{1}{n^4}} {\frac{5n^4}{n^4}

+\frac{10n^3}{n^4} + \frac{10n^2}{n^4}+ \frac{5n}{n^4}+ \frac{1}{n^4}} $

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{5 + 0 + 0} {5 + \frac{10}{n} + \frac{10}{n^2}+ \frac{10}{n^3}+ \frac{10}{n^4}}$

Следовательно:

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}{\frac{ 5}{{5}}} = 1$

Ответ: 1

Программное решение 2

```
#!/usr/bin/env python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *
n = Symbol("n")
def sequence(n):
    return ((5*n**4 + n**3 + 1)/((n + 1)**5) - n**5)
def plot_points(m):
    x = np.arange(1, m + 1)
    y = sequence(x)
    # (k, 0) - blue colour
    plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
    # (0, x_k) - green color
    plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
    # (k, x_k) - red color
    plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')
    lim_value = limit(((5*n**4 + n**3 + 1)/((n + 5)**5) - n**5), n, oo)
    plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$') # Точка
предела
    plt.xlabel('$k$')
    plt.ylabel('$x_k$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

m = 20 # number of points
plot_points(m)
a = limit(((5*n**4 + n**3 + 1)/((n + 5)**5) - n**5), n, oo)

print(a)
```

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

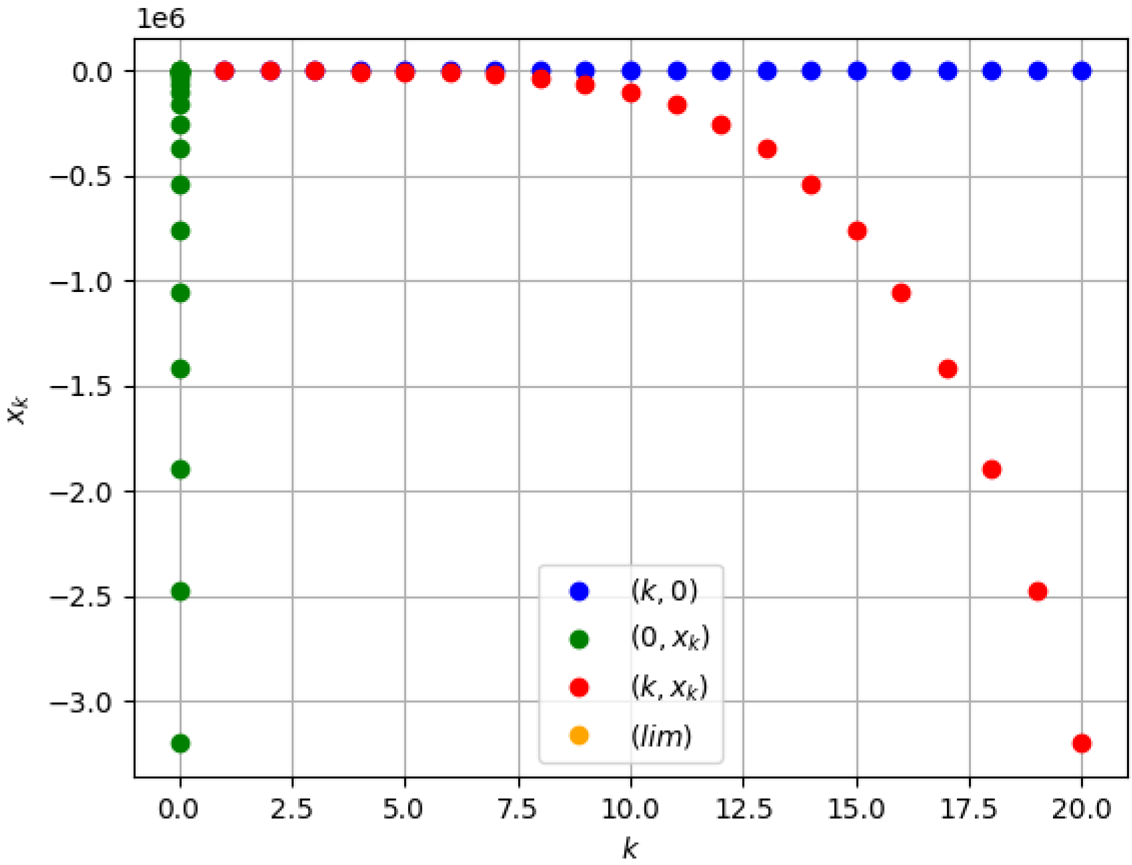

Рис. 2. Вывод программы в терминале.

```
(env) violetta@debian:~/Desktop/repo/programming/Kyrdyumova/programming/lab1.matt$ python3 lab.mat.1.py
ATTENTION: default value of option mesa_glthread overridden by environment.
1
```

Аналитическое решение 3

Рассмотрим предел:

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{3n!+n^3} {n! + 3^n}$

Найдем пределы числителя и знаменателя:

- $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}(3n!+n^3)=\infty$
- $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}(n! + 3^n)=\infty$

Поскольку выражение $\frac{\infty}{\infty}$ является неопределенностью, преобразуем его, деля каждое слагаемое в числителе и знаменателе на старшую степень, в данном случае это $n!$:

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{3n!+n^3} {n! + 3^n}$ = $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{3n!}{n!}+\frac{n^3}{n!}} {\frac{n!}{n!} + \frac{3^n}{n!}}$

$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\frac{3+0} {1 + 0}$ = 3

Ответ: 3

Программное решение 3

```
#!/usr/bin/env python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from sympy import *

def factorial(n):
    if n == 1:
        return n
    else:
        return n * factorial(n - 1)
    n = Symbol("n")
    def sequence(n):
        return ((3*(factorial(n)) + n**3)/(factorial(n) + 3**n))
    def plot_points(m):
        x = np.arange(1, m + 1)
        y = sequence(x)
        # (k, 0) - blue colour
        plt.plot(x, np.zeros_like(x), 'bo', label='$(k, 0)$')
        # (0, x_k) - green color
        plt.plot(np.zeros_like(x), y, 'go', label='$(0, x_k)$')
        # (k, x_k) - red color
        plt.plot(x, y, 'ro', label='$(k, x_k)$')
        lim_value = limit(((3*(factorial(n)) + n**3)/(factorial(n) +
3**n)), n, oo)
        plt.plot(0, lim_value, 'o', color='orange', label='$(lim)$') #
Точка предела
        plt.xlabel('$k$')
        plt.ylabel('$x_k$')
        plt.legend()
        plt.grid()
        plt.show()
    m = 20 # number of points
    plot_points(m)
    a = limit(((3*(factorial(n)) + n**3)/(factorial(n) + 3**n)), n, oo)
    print(a)
```

Рис. 1. Иллюстрация решения задачи.

Рис. 2. Вывод программы в терминале.