Problemes complementaris

La idea d'aquests problemes complementaris és, primer, aprofondir en algunes aplicacions o situacions que es donen al resoldre problemes involucrant sistemes lineals.

Com ja vem comentar, cada problema ben resolt suma el seu valor (o una part d'ell) a la nota final de pràctiques (sense poder passar del 10, és clar). En cap cas penalitza.

Són petits documents (poden ser a mà - bona lletra - o en LaTeX-) on haureu d'explicar el que se us demana, de manera breu però el més clara possible. En el primer dels casos haureu de incorporar els `m.files` que el fan possible. Feu un fitxer comprimit (`.zip`) amb tots ells i pugeu-lo a Atenea (veureu que hi ha un lliurament obert a l'apartat de l'Examen de pràctiques). El format ha de ser NomCognom-alumne1-NomCognom-alumne2.zip.

1. (+0.5 punts/10) Considereu una taula de valors (x_k, f_k), amb $k = 0 \div N$, d'abscisses $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leq 1$ i on $f_k = f(x_k)$ correspon a una certa funció f (coneguda o no). Suposarem també que N no és massa gran (per exemple, $N \leq 10$). Volem programar un algorisme numèric que ens permeti aproximar la integral definida de f entre els valors $a = x_0$ i $b = x_N$. Com ho faríeu? Expliqueu-ho i programeu-ho.

   Comproveu la *bondat* de l'aproximació (òbviament, dependrà en general de com sigui la funció f i les seves derivades) amb algun cas concret. Per exemple, preneu $f(x) = \mathrm{e}^x$, les abscises $x_k = kh$, $k = 0 \div N$ amb pas $h = 1/N$ i compareu la vostra aproximació amb el valor de

   $$\int_0^1 \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e} - 1.$$

   Incorporeu algún gràfic al vostre document que ajudi a la comprensió del que esteu fent. Pugeu els m.files corresponents.

2. (+0.5 punts/10) Ja sabeu que tinguem una descomposició LU molt acurada d'una matriu A (és a dir, $\|R\| = \|PA - LU\|$, per a una norma fixada, molt petita) no sempre implica una bona precisió en la resolució del sistema $Ax = b$. Com ja hem vist al llarg del curs, l'anomenat *nombre de condició* de la matriu A pot ser gran i amplificar de manera dramàtica qualsevol petit error d'arrodoniment a les dades inicials, provocant resultats erronis.

   La idea d'aquesta pregunta és que comproveu aquest fet amb les anomenades *matrius de Hilbert*, matrius $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on els coeficients venen donats per la fórmula

   $$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

   Seguirem l'esquema plantejat al llibre *Quarteroni-Saleri-Gervasio*, *Scientific Computing with Octave (Third Edition)* (que teniu disponible a la biblioteca de la UPC), a les pàgines 147–150.

   Volem resoldre el sistema $A_n x = b_n$, amb A_n matriu de Hilbert, $n \times n$. Per comparar l'efecte del nombre de condició d'aquestes matrius fem

   (a) Donada A_n, calculeu b_n de manera que $x_n = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ sigui solució. És a dir, $b_n = A_n x_n$.

(b) Feu la descomposició $P_n A_n = L_n U_n$. Calculeu $R_n = \|P_n A_n - L_n U_n\|_\infty$.

(c) Amb l'ajut d'aquesta descomposició, calculeu $\hat{x}_n$, solució de $A_n x = b_n$. Definiu $E_n = \|x_n - \hat{x}_n\|_\infty / \|x_n\|_\infty$, estimació de l'error relatiu comés.

(d) Feu aquest càlcul per a $n = 1, \ldots, 100$ i dibuixeu en una gràfica (en escala logarítmica) ambdós valors, R_n i E_n.

(e) Representeu també en el mateix gràfic el nombre de condició de la matriu A_n.

Heu de presentar un petit document on comenteu aquest fenomen, adjuntant també les gràfiques anteriors.