Pràctica 7. Dispersió de partícules.

Guillem Fígols, Adrià Vilanova (T1)

Tardor 2019

Q1. [1 punt] Mesureu el radi de 10 balins, doneu-ne el valor mitjà i l'error associat. Doneu el valor del radi del centre dispersiu i el seu error.

En comptes de mesurar el radi, hem mesurat el diàmetre de 10 balins amb el peu de rei, per ser més fàcil de mesurar. Hem obtingut les següents mesures:

$(d \pm 0.004)$ mm
5.98
5.98
5.97
6.00
5.97
5.98
5.98
5.98
5.98
5.97

Taula 1: Taula amb les mesures del radi de 10 balins, r_i.

Aleshores, trivialment, tenim que

$$\boxed{\begin{cases} \overline{d} = 5.979\,\text{mm} \\ \sigma_d = 0.009\,\text{mm} \end{cases}}$$

Per calcular la incertesa associada, considerem tant l'error de dispersió com l'experimental, i doncs obtenim:

$$\delta d = \sqrt{\delta d^2_{\text{dispersió}} + \delta d^2_{\text{experimental}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta d_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta d_i\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n} + k^2}$$

on k és la incertesa individual de cada d_i, que és constant, ja que prenem dues vegades la resolució del peu de rei.

D'aquí obtenim que $\delta\overline{d} = 0.005$

Per tant, com $\overline{r} = \frac{\overline{d}}{2}$ i sabem que la seva incertesa es la meitat (les incerteses compleixen $\delta(\lambda x) = |\lambda|\delta x$), obtenim finalment:

$$\boxed{\overline{r} = 2.990 \pm 0.002 \text{ mm}}$$

En quant al radi del centre dispersiu, a partir de la mesura del diàmetre (feta amb regle), i anàlogament al càlcul anterior (sense tenir en compte les parts en què es té en compte que abans s'han fet diverses mesures) obtenim:

$$\boxed{r_c = 40 \pm 1 \text{ mm}}$$

Q2. [2.5 punts] Ompliu la taula següent.

b (mm)	$\overline{\phi}$ (rad)	σ_ϕ (rad)	$\delta\phi$ (rad)	$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$	$\delta\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$
40	1.5	5.4	0.5	0.7	0.2
35	1.8	5.1	0.6	0.6	0.2
30	2.1	3.9	0.6	0.5	0.3
25	2.3	3.4	0.6	0.4	0.3
20	2.7	2.0	0.7	0.2	0.3
15	2.9	3.7	0.7	0.1	0.3
10	2.9	17.4	0.8	0.1	0.4

Taula 2: Dades obtingudes a partir de la mesura de l'angle de dispersió dels balins en funció del paràmetre d'impacte, b. $\delta b = 0.1$ mm const.

Per calcular la incertesa de ϕ, hem considerat tant l'error de dispersió com l'experimental, i doncs hem obtingut:

$$\delta\phi = \sqrt{\delta\phi^2_{\text{dispersió}} + \delta\phi^2_{\text{experimental}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\phi}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta\phi_i}{n}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma_\phi^2}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\delta\phi_i)^2} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\delta\phi_i = k\,\forall i} \delta\phi = \sqrt{\frac{\sigma_\phi^2 + k^2}{n}}$$

on n és el nombre d'angles que hem detectat[1] i k és la incertesa experimental en cadascun dels angles ϕ, que és constant ja que hem pres com a incertesa la resolució de l'aparell de mesura.

[1]Vam prendre 30 mesures en tots els casos excepte quan $b = 10$ mm, perquè només en vam poder detectar 22 degut al fet que la majoria tornaven cap enrere i no colpejaven cap botó. Això es veu reflectit a la gràfica de la qüestió 3, on la barra d'error del paràmetre d'impacte més petit és més gran degut a l'alta incertesa de dispersió.

Per la incertesa de $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$, utilitzem la fórmula de propagació d'errors (i tenint en compte que ja tenim les dades en radians):

$$\delta\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] = \left|\frac{d\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{d\phi}\right|\delta\phi = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right|\delta\phi$$

Q3. [2.5 punts] Representeu gràficament $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ **en funció del paràmetre d'impacte,** b**. Ajusteu una regressió lineal a la gràfica anterior i doneu-ne el pendent i l'ordenada a l'origen i les seves incerteses.**

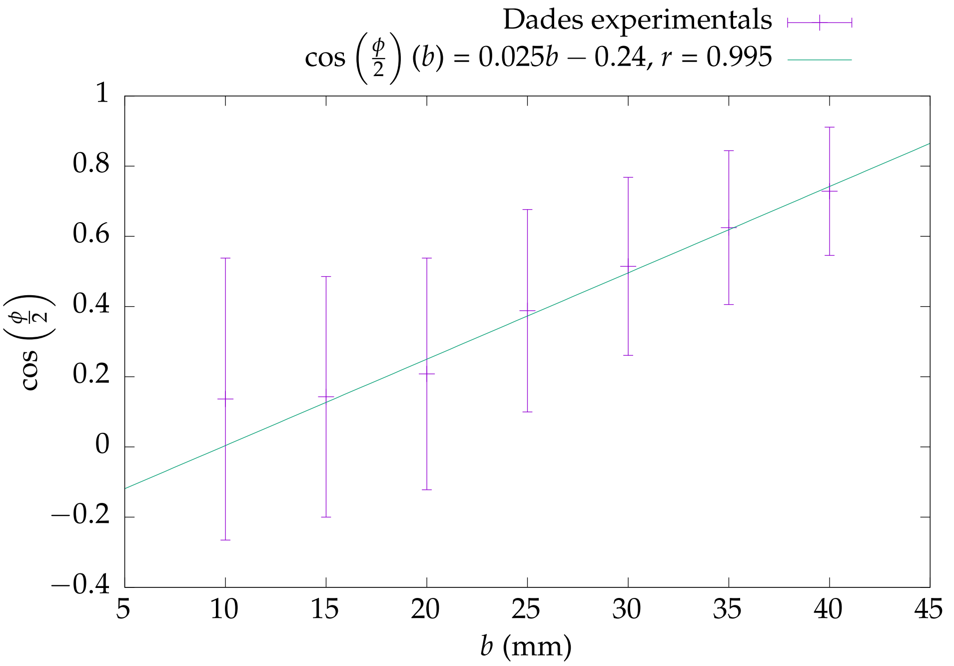

Figura 1: Gràfica que mostra la relació entre el cosinus de la meitat de l'angle de dispersió (ϕ) amb el paràmetre d'impacte (b). No s'ha considerat el punt amb $b = 10$ mm per fer la regressió lineal perquè quedava massa allunyat.

A la figura 1 es pot veure la regressió lineal, que hem fet mitjançant el programa *gnuplot*. Aquest programa és molt convenient ja que, mitjançant les fòrmules que donen les incerteses dels paràmetres en una regressió lineal,[2] ja ens dona directament les expressions de les incerteses.

Així doncs, els paràmetres de la regressió $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = m \cdot b + a$ són:

$$\boxed{\begin{cases} m = 0.025 \pm 0.001 \text{ mm}^{-1} \\ a = -0.24 \pm 0.04 \end{cases}}$$

[2]Es poden consultar aquestes fòrmules a *Daniel Arteaga. "Introducció a l'anàlisi d'incerteses experimentals". Secció 4.3.*

Q4. [1.5 punts] Calculeu, a partir de la relació anterior, el valor del radi R del cilindre dispersiu i doneu el seu error.

Segons la fòrmula de la teoria $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx \frac{b}{r+R}$, i per tant si ignorem el terme independent de la regressió lineal que hem fet abans (cosa que podem fer com justificarem a l'apartat 6) obtenim la següent igualtat:

$$m = \frac{1}{r+R} \implies R = \frac{1}{m} - r$$

A més, la incertesa es pot calcular per la fòrmula de propagació d'errors:

$$\delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial m}\right| \delta m + \left|\frac{\partial R}{\partial r}\right| \delta r = \frac{\delta m}{m^2} + \delta r$$

Fent aquests càlculs, obtenim el següent valor:

$$\boxed{R = 37.7 \pm 1.6 \text{ mm}}$$

Q5. [1.5 punts] Compareu el resultat experimental amb el valor obtingut per mesura directa. Doneu la diferència relativa entre ambdós valors i també les seves incerteses relatives. Considereu satisfactori l'acord entre ambdós resultats?

Tenim els següents resultats:

- **Valor experimental:** $R_e = 37.7 \pm 1.6$ mm
- **Valor obtingut per mesura directa:** $R_m = 40 \pm 1$ mm

Aleshores, tenint en compte que per sentit comú la mesura directa serà més fiable, la discrepància (o diferència) relativa serà:

$$\boxed{d_{\text{rel}} = \left|\frac{R_e - R_m}{R_m}\right| \approx 0.06 = 6\%}$$

Els errors relatius d'ambdues magnituds són els següents:

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_e = \left|\frac{\delta R_e}{R_e}\right| \approx 0.04 = 4\% \\ \varepsilon_m = \left|\frac{\delta R_m}{R_m}\right| \approx 0.03 = 3\% \end{cases}}$$

Com que els dos valors tenen aproximadament la mateixa incertesa (no hagués sigut així si haguéssim utilitzat el peu de rei per mesurar el radi del cilindre en comptes d'un regle, però malauradament ja és massa tard per rectificar), per comparar-los caldrà comparar el valor diferència amb el zero. Per això, calculem $R_e - R_m = -2.3 \pm 2.6$ mm. El zero cau evidentment dins d'una desviació típica de $R_e - R_m$ (l'interval de confiança), i per tant, les mesures són compatibles, i trobem satisfactori l'acord entre ambdós resultats.

Q6. [1 punts] Discutiu el possible efecte sobre resultats obtinguts de la presència d'un error de zero en la mesura del paràmetre d'impacte i estimeu el valor d'aquest error.

Suposem que $\exists$ una bijecció entre el nostre paràmetre d'impacte mesurat (b) i el paràmetre d'impacte real (anomenem-lo $\widetilde{b}$), degut a un desplaçament del zero. Aleshores, $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{b} = b + k$.

$\widetilde{b}$ és el paràmetre d'impacte real i, per tant, compleix la relació de la teoria:

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\widetilde{b}}{r+R} = \frac{b+k}{r+R} = \frac{1}{r+R} \cdot b + \frac{k}{r+R}$$

Com és d'esperar, en el cas que no hi hagi un desplaçament del zero ($k = 0$) la relació es compleix íntegrament per b. Però en el cas que hi hagi un desplaçament del zero, això tindrà l'efecte que apareixerà un terme independent a l'expressió. Tot i així, és precís observar que això no afecta en cap cas al valor de la pendent, que roman igual. Així doncs, tot i que les mesures tinguin un error sistemàtic, tot el procediment fet a partir de calcular el valor de la pendent és igual de correcte que si no hi hagués hagut aquest error sistemàtic.

Aleshores, a partir d'aquí i els valors que hem obtingut a la qüestió 3 podem estimar aquest desplaçament del zero:

$$\boxed{\frac{k}{r+R} = a \implies k = a(r+R) = -10 \pm 2 \text{ mm}}$$

La seva incertesa ha estat calculada mitjançant la fórmula de propagació de l'error:

$$\delta k = \left|\frac{\partial k}{\partial a}\right| \delta a + \left|\frac{\partial k}{\partial r}\right| \delta r + \left|\frac{\partial k}{\partial R}\right| \delta R = (r+R)\delta a + |a|(\delta r + \delta R)$$

Com a observació, voldríem explicar que aquest error del desplaçament del zero té molt sentit, ja que quan fèiem els tirs amb $b = 10$ mm, bastants tirs rebotaven cap enrere i sortien pel forat per on entraven (ens vam adonar quan vam rebre 3 impactes seguits a la panxa del que estava disparant), cosa que hauria de passar quan el paràmetre d'impacte fos 0. Però justament, amb el desplaçament del zero que hem trobat, sabem que el paràmetre d'impacte real és $\widetilde{b} = 0 \pm 2$ mm i, per tant, tot i que de per si mateix l'argument exposat a dalt ens calcula el desplaçament del zero d'una manera correcta, el fet que la nostra experiència quadri amb el resultat ens fa tenir més tranquilitat d'espíritu.

Bonus track.

40 mm	35 mm	30 mm	25 mm	20 mm	15 mm	10 mm
87.5	105	117.5	132.5	155	167.5	170
80	100	117.5	132.5	152.5	162.5	162.5
92.5	97.5	122.5	137.5	155	160	162.5
85	102.5	120	132.5	150	157.5	167.5
82.5	105	110	137.5	155	162.5	170
90	92.5	117.5	132.5	157.5	160	167.5
85	107.5	112.5	132.5	157.5	167.5	152.5
85	97.5	117.5	132.5	157.5	162.5	162.5
85	100	125	130	157.5	160	162.5
92.5	105	120	137.5	155	162.5	172.5
90	105	117.5	132.5	155	162.5	167.5
80	112.5	122.5	132.5	157.5	167.5	162.5
80	105	117.5	132.5	157.5	160	172.5
87.5	107.5	112.5	140	152.5	172.5	167.5
82.5	105	120	132.5	157.5	162.5	172.5
80	97.5	120	140	155	162.5	170
80	102.5	117.5	130	157.5	167.5	172.5
87.5	102.5	120	130	155	160	172.5
80	97.5	117.5	137.5	157.5	160	172.5
100	100	122.5	132.5	157.5	167.5	90
92.5	97.5	117.5	132.5	157.5	160	172.5
92.5	92.5	110	137.5	155	162.5	172.5
82.5	102.5	120	132.5	152.5	162.5	
97.5	100	117.5	137.5	157.5	162.5	
90	107.5	122.5	137.5	157.5	162.5	
80	102.5	112.5	132.5	155	160	
87.5	100	117.5	140	157.5	167.5	
87.5	112.5	122.5	137.5	157.5	167.5	
85	110	122.5	127.5	157.5	170	
87.5	107.5	112.5	137.5	157.5	167.5	

Taula 3: Angles registrats (en graus) per cadascun dels paràmetres d'impacte b (en milímetres).