

PRÀCTICA I

RODA DE MAXWELL: Rotació, translació i moment d'inèrcia

Objectius: Es pretén estudiar la cinemàtica implicada en la roda de Maxwell mitjançant les velocitats de translació, de rotació i el moment d'inèrcia.

1. Introducció teòrica

La roda de Maxwell va ser dissenyada originàriament per a observar la conversió, mitjançant un balanceig continu, entre energia gravitatòria i energia cinètica. L'objectiu, però, d'aquesta pràctica és un altre. Aquí es pretén estudiar la cinemàtica implicada en la roda de Maxwell mitjançant el moment d'inèrcia i les velocitats de translació i rotació d'un disc.

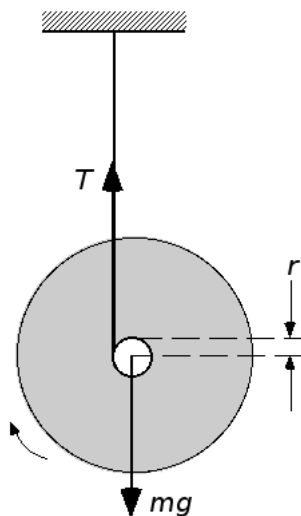
Estudiem primer la cinemàtica implicada en la caiguda lliure de la roda de Maxwell. Les equacions de translació que manipularem corresponen a les de qualsevol moviment uniformement accelerat. Línies més avall veurem que aquest és el cas de la roda de Maxwell. Així doncs, partim de les conegudes expressions:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a \cdot t \\ x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{cases} \quad (1)$$

on donem respectivament la velocitat i la posició en funció del temps tenint en compte que $x_0 = x(0)$ i $v_0 = v(0)$ són la posició i la velocitat a $t = 0$, respectivament i que a és l'acceleració del centre de masses. Des d'aquesta expressió podem obtenir experimentalment, encara que de forma indirecta, l'acceleració. Ho farem mitjançant el dispositiu experimental que s'explica a la secció següent.

Fixem-nos ara amb el moment d'inèrcia i el moviment de rotació del disc. Si apliquem la llei de Newton de les forces al nostre sistema de massa m obtenim

$$\sum F = m \cdot g - T = m \cdot a. \quad (2)$$



Podem veure gràficament les forces que intervenen en el sistema a la figura de l'esquerra. En l'expressió, tenim en compte el fet que la força de la gravetat a la Terra representada per l'acceleració g ve en part compensada per la tensió T de les cordes que subjecten la roda de Maxwell i la fan girar. D'altra banda, l'equació del moment angular respecte a l'eix que coincideix amb el centre de masses ens permet escriure

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = T \cdot r \quad (3)$$

on T és la tensió de les cordes, r és el radi de l'eix, ω és la velocitat angular i finalment I és el moment d'inèrcia. Si ara fem la hipòtesi que la corda es desplega sense lliscar, també podem afirmar que l'acceleració de translació del centre de masses es relaciona amb l'acceleració angular mitjançant

$$a = r \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (4)$$

Recopilem finalment les equacions (2), (3) i (4) per finalment obtenir

$$T = \frac{m \cdot g}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}, \quad (5)$$

i

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{m \cdot r^2}}. \quad (6)$$

Noteu que l'acceleració és constant al llarg del temps tal i com havíem anticipat en la parella d'equacions (1).

Fixeu-vos ara en el moment d'inèrcia de la roda de Maxwell. Aquest es compon de dues contribucions: la de l'eix de la roda i la del disc. Donat que el disc és molt més pesat que l'eix i que els seus radis intern i extern també són molt més grans que el de l'eix, podem assumir que el moment d'inèrcia de la roda és bàsicament el del disc. Aquest val

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2). \quad (7)$$

On R_1 i R_2 són respectivament el radi extern i intern de la roda (veure Fig. 2). Fixeu-vos que en aquest càlcul hem negligit la contribució provinent de l'eix per ser aquest molt lleuger i tenir un radi sensiblement inferior.

Si a més $m \cdot r^2 \ll I$, l'equació (5) es redueix a $T \approx m \cdot g$ i l'equació (6) a

$$a \approx g \cdot \frac{m \cdot r^2}{I} \ll g. \quad (8)$$

És a dir, el disc cau amb una acceleració molt inferior a la de la gravetat donat que la tensió de la corda compensa en gran mesura la força de la gravetat. Noteu que l'aproximació és vàlida en el cas que els radis del disc siguin molt més grans que el radi de l'eix de la roda.

2. Realització experimental

Per a la realització de la pràctica disposem d'un disc que penja de dues cordes que parteixen del seu eix (veure figures 1 i 2). En començar la pràctica heu de comprovar que aquest eix està disposat horitzontalment. Un cop fet això podeu anar enrotllant la corda per aixecar el disc (com si es tractés d'un io-io) fins a l'alçada desitjada. Per fer-ho, gireu el disc tal com us mostra la figura 2, de manera que la corda quedi cap enfora. Vigileu també que la corda s'enrotlli uniformement per tots dos costats.

Un cop a dalt, heu de deixar anar suaument el disc (haureu de procurar de fer-ho sempre igual, des de la mateixa posició aproximadament). Fixeu-vos que el dispositiu (veure figura 1) té dos sensors (dues cèl·lules fotoelèctriques) que mesuren: (a) el temps transcorregut t des que l'eix creua el primer sensor fins que arriba al segon i (b) el temps t' de pas de l'eix de la roda a través del segon sensor (també anomenat d'obturació de la cèl·lula fotoelèctrica). Les magnituds es llegiran respectivament en el cronòmetre de sobre la taula i en la cèl·lula fotoelèctrica inferior (RECORDEU QUE PER A PODER FER UNA NOVA MESURA HEU DE PRÈMER EL BOTÓ DE LA FOTOCÈL·LA). D'aquesta manera, podreu mesurar (a) el temps t que triga el disc en recórrer una distància h i (b) la velocitat de translació de la roda $v(t) = 2r/t'$ quan travessa la cèl·lula situada a la part més baixa. Convé que mesureu quatre vegades el temps total de caiguda i el temps d'obturació de la barrera fotoelèctrica. Un cop tingueu les observacions registrades, feu els càlculs posteriors amb les mitjanes

d'aquests temps. També s'ha de tenir en compte que cada cop que deixeu anar el disc heu de d'esperar que reboti per segona vegada per tal d'enrotllar la corda en el mateix sentit. Finalment, per calcular la velocitat de caiguda, cal agafar el valor del diàmetre de l'eix 6 mm que ja té en compte la mida finita del feix de llum de la cèl·lula fotoelèctrica.

Repetiu l'experiment variant la posició **de la cèl·lula inferior** i mesureu l'alçada corresponent amb un regle. Cal que repetiu l'experiment per a 6 alçades diferents començant per 10 cm fins arribar aproximament als 40 cm (cal prendre les mesures a punts d'alçada equidistants). Altres detalls sobre les característiques tècniques de la roda estan descrits en la Taula 1.

Massa m	Radi extern R_1	Radi intern R_2	Radi eix r
$525 \pm 1 \text{ g}$	$65.0 \pm 0.2 \text{ mm}$	$50.0 \pm 0.2 \text{ mm}$	$3.0 \pm 0.1 \text{ mm}$

Taula 1: Característiques tècniques de la Roda de Maxwell

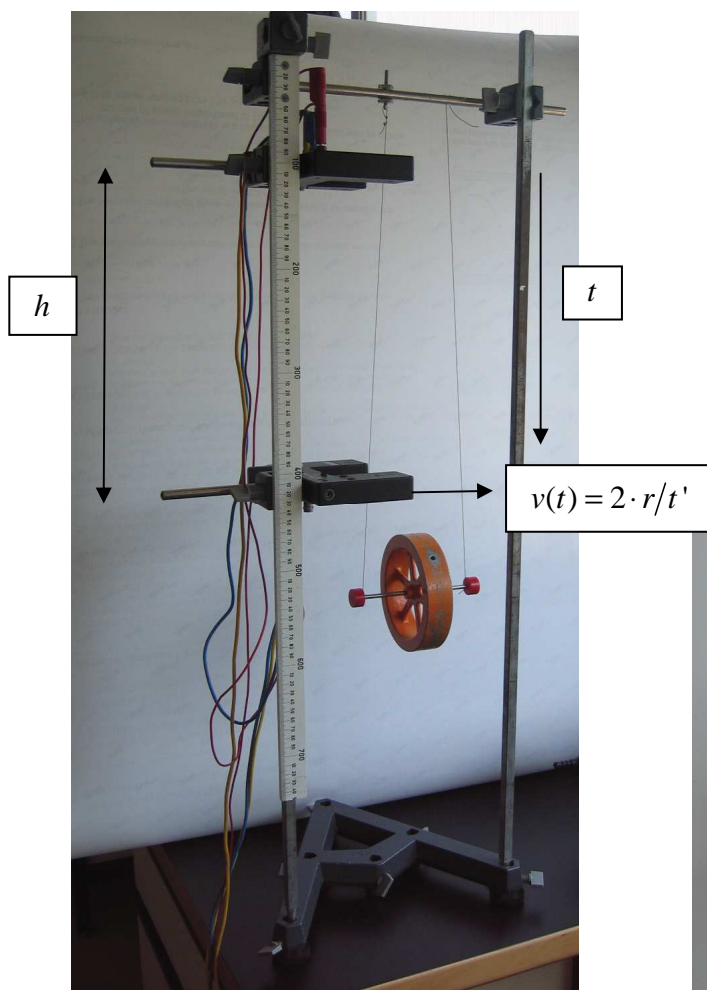


Fig 1. Dispositiu de la pràctica de la Roda de Maxwell.

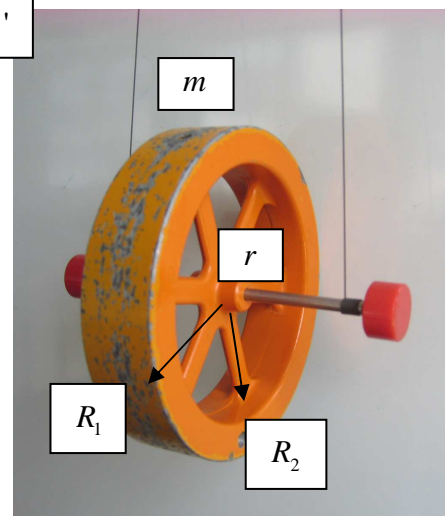


Fig 2. Detall de la Roda de Maxwell.

Qüestions

- Q.1. [2 punts] Repetiu quatre vegades l'experiment per a cada alçada. Ompliu la taula següent amb els valors experimentals per l'alçada, els temps de caiguda, t , els temps d'obturació de la barrera fotoelèctrica, t' , i els estadístics corresponents. Indiqueu les expressions que heu emprat per fer el càlcul de les incerteses.

Alçada (cm)	Temps caiguda (ms)						Temps obturació (ms)					
$h \pm \dots\dots$	t_1	t_2	t_3	t_4	$\langle t \rangle$	δt	t_1'	t_2'	t_3'	t_4'	$\langle t' \rangle$	$\delta t'$

- Q.2. [2 punts] Calculeu v a partir de t' . Ompliu la taula següent i representeu gràficament la velocitat lineal del disc al travessar la segona barrera fotoelèctrica en funció del temps de caiguda, incloent les barres d'incertesa en la representació. Feu l'ajust lineal $v = A_1 \cdot t + B_1$ sobre el conjunt de punts representats i doneu els valors per A_1 i B_1 amb les seves incerteses.

Vel lineal		Temps	
v (cm/s)	δv (cm/s)	$\langle t \rangle$ (s)	δt (s)

- Q.3. [2 punts] Ompliu ara la taula següent i representeu gràficament la velocitat lineal al quadrat en funció de l'alçada. Feu la regressió lineal: $v^2 = A_2 \cdot h + B_2$ i doneu els valors per A_2 i B_2 amb les seves incerteses.

Vel al quadrat		Alçada
v^2 (cm ² /s ²)	δv^2 (cm ² /s ²)	$h \pm \dots\dots\dots$ (cm)

- Q.4. [1.5 punts] A quines magnituds físiques del model teòric corresponen els valors A_1, B_1, A_2 i B_2 ? Raoneu la resposta donant les expressions corresponents. Relacioneu els resultats obtinguts de les rectes de regressió de les dues darreres qüestions. Tenint en compte els valors i les incerteses de les magnituds implicades, podem considerar que són resultats coherents?

- Q.5. [1 punt] Quin valor obtenim per a l'acceleració lineal? Relaciona la magnitud amb l'acceleració gravitatòria g .

- Q.6. [1.5 punts] Calculeu el moment d'inèrcia I_{exp} del disc a partir de l'acceleració obtinguda de la gràfica de la qüestió 2. Calculeu ara el moment d'inèrcia, I_{teo} , a partir de la fórmula (7). Compareu aquests dos resultats tenint en compte les seves incerteses. Discutiu si podem efectivament aproximar la relació tal com hem fet en l'equació (8)? Per què (doneu una resposta quantitativa)?