

Pràctica 6. Llei de Hooke per a una molla espiral. Moments d'inèrcia i teorema d'Steiner.

Guillem Fígols, Adrià Vilanova (T1)

Tardor 2019

1.- [1.5 punts] Ompliu amb les magnituds corresponents i les seves incerteses la taula següent:

α (rad)	$F_1 \pm 0.1$ (N)	M_1 (N cm)	δM_1 (N cm)	$F_2 \pm 0.1$ (N)	M_2 (N cm)	δM_2 (N cm)	$F_3 \pm 0.1$ (N)	M_3 (N cm)	δM_3 (N cm)	$\langle M \rangle$ (N cm)	σ_M (N cm)	$\delta \langle M \rangle$ (N cm)
$-6\pi/2$	2.3	23.0	1.5	1.1	22	2	0.8	24	3	23.0	1.0	1.4
$-5\pi/2$	1.8	18.0	1.3	0.9	18	2	0.6	18	3	18.0	0.0	1.3
$-4\pi/2$	1.5	15.0	1.3	0.8	16	2	0.5	15	3	15.3	0.6	1.3
$-3\pi/2$	1.1	11.0	1.1	0.6	12	2	0.4	12	3	11.7	0.6	1.3
$-2\pi/2$	0.8	8.0	1.1	0.4	8	2	0.3	9	3	8.3	0.6	1.3
$-\pi/2$	0.5	5.0	1.0	0.2	4	2	0.2	6	3	5.0	1.0	1.4
$+\pi/2$	0.5	5.0	1.0	0.2	4	2	0.2	6	3	5.0	1.0	1.4
$+2\pi/2$	0.8	8.0	1.1	0.4	8	2	0.3	9	3	8.3	0.6	1.3
$+3\pi/2$	1.1	11.0	1.1	0.6	12	2	0.4	12	3	11.7	0.6	1.3
$+4\pi/2$	1.5	15.0	1.3	0.8	16	2	0.5	15	3	15.3	0.6	1.3
$+5\pi/2$	1.8	18.0	1.3	0.9	18	2	0.6	18	3	18.0	0.0	1.3
$+6\pi/2$	2.3	23.0	1.5	1.1	22	2	0.8	24	3	23.0	1.0	1.4

Taula 1: Mesures corresponents a la força i el moment segons l'angle girat i la distància del dinamòmetre a l'eix de gir. La incertesa de la força correspon a la resolució del dinamòmetre. A sota de la taula hi ha les dades corresponents a la distància del dinamòmetre a l'eix de gir.

Les forces F_i han estat mesurades des de les següents distàncies a l'eix de gir d_i corresponents:

$$\begin{cases} d_1 = (10.0 \pm 0.5) \text{ cm} \\ d_2 = (20.0 \pm 0.5) \text{ cm} \\ d_3 = (30.0 \pm 0.5) \text{ cm} \end{cases}$$

Per calcular les incerteses del moment, propagarem l'error en la distància i en la força:

$$\delta M_i = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial M_i}{\partial F_i}\right| \delta F_i\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial M_i}{\partial d_i}\right| \delta d_i\right)^2} = M_i \sqrt{\left(\frac{\delta F_i}{F_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_i}{d_i}\right)^2} \quad (1)$$

Per calcular l'error en els moments una vegada hem trobat la mitjana, hem de considerar l'error de la dispersió i l'error experimental:

$$\delta M = \sqrt{\delta M_{\text{dispersió}}^2 + \delta M_{\text{experimental}}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta M_i}{n}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \delta M_i^2} \quad (2)$$

En aquest cas tenim 3 moments ($n = 3$), per tant:

$$\delta M = \sqrt{\frac{\sigma^2}{3} + \frac{\delta M_1^2 + \delta M_2^2 + \delta M_3^2}{9}} \quad (3)$$

2.- [2 punts] Representeu gràficament el valor del moment, $\langle M \rangle$, mesurat a l'aparat anterior en funció de l'angle, α . Determineu la k de la molla amb la seva incertesa (Vigileu amb els signes de les forces i els moments).

En el següent gràfic hem representat el moment en funció de l'angle girat:

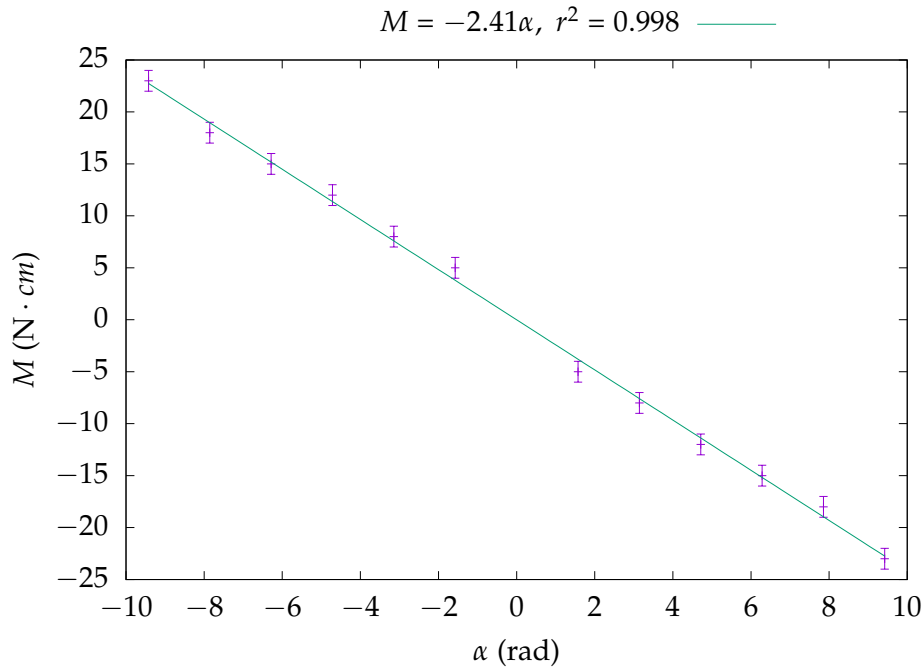


Figura 1: Moment en funció de l'angle girat.

Realitzem un *fit* de les dades amb la funció $f(x) = mx + b$ utilitzant *Gnuplot* per tal de trobar el pendent i l'ordenada a l'origen, amb les seves corresponents incerteses. Obtenim els següents valors:

$$\begin{cases} m = (-2.41 \pm 0.04) \text{ N cm rad}^{-1} \\ b = (0.0 \pm 0.2) \text{ N cm} \end{cases}$$

A partir de l'expressió que relaciona el moment amb l'angle girat trobem la constant k :

$$M = -k\alpha \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{M}{\alpha} = -m \quad (4)$$

Per tant obtenim:

$$k = (2.41 \pm 0.04) \text{ N} \cdot \text{cm}$$

3.- [1.5 punts] Ompliu la taula següent:

T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	T_4 (s)	T_5 (s)	$\langle T \rangle$ (s)	σ_T (s)	δT (s)
2.624	2.626	2.625	2.623	2.623	2.6242	0.0013	0.0007

Taula 2: Mesures corresponents als períodes mesurats de les oscil·lacions que realitzava el disc amb el seu centre a una distància d de l'eix de gir i amb una amplitud inicial d'un quart de tau radians. La incertesa del temps és de 0.001 s, que correspon a la resolució del cronòmetre de la barrera fotoelèctrica.

d (cm)	T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	T_4 (s)	T_5 (s)	$\langle T \rangle$ (s)	σ_T (s)	δT (s)
0	2.783	2.782	2.785	2.784	2.784	2.7836	0.0011	0.0007
3	2.886	2.888	2.885	2.884	2.881	2.8848	0.003	0.0012
6	3.164	3.157	3.168	3.171	3.164	3.165	0.005	0.002
9	3.588	3.590	3.588	3.596	3.594	3.5912	0.004	0.0017
12	4.095	4.096	4.083	4.092	4.097	4.093	0.006	0.003

Taula 3: Mesures corresponents als períodes mesurats de les oscil·lacions que realitzava la barra amb una amplitud inicial d'un quart de tau radians. La incertesa del temps és de 0.001 s, que correspon a la resolució del cronòmetre de la barrera fotoelèctrica.

També hem obtingut les següents mesures per la massa i longitud de la barra:

$$\begin{cases} m_b = (130.97 \pm 0.01) \text{ g} \\ l_b = (60.0 \pm 0.1) \text{ cm} \end{cases}$$

I les següents mesures per la massa i radi del disc:

$$\begin{cases} m_d = (391.05 \pm 0.01) \text{ g} \\ r_d = (15.0 \pm 0.1) \text{ cm} \end{cases}$$

Per calcular l'error en el període mig ($T \equiv \langle T \rangle$), hem de considerar l'error de la dispersió i l'error experimental:

$$\delta T = \sqrt{\delta T_{\text{dispersió}}^2 + \delta T_{\text{experimental}}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta T_i}{n}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \delta T_i^2} \quad (5)$$

En aquest cas tenim 5 mesures del període ($n = 5$), per tant:

$$\delta T = \sqrt{\frac{\sigma^2}{5} + \frac{\sum_{i=1}^5 \delta T_i^2}{25}} \quad (6)$$

4.- [2 punts] Calculeu experimental i teòricament I_{CM} per a la barra i el disc amb les respectives incerteses. Són compatibles els resultats? És una bona aproximació considerar la barra metàl·lica com un cos unidimensional? I el disc com un cos bidimensional?

A partir de les dades experimentals de les oscil·lacions, la teoria ens diu:

$$I_{CM_E} = \frac{T^2 K}{4\pi^2}$$

La incertesa d'aquest valor serà:

$$\delta I_{CM_E} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{CM_E}}{\partial T} \cdot \delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{CM_E}}{\partial K} \cdot \delta K\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{TK}{2\pi^2} \cdot \delta T\right)^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \delta K\right)^2} \quad (7)$$

A més, per la definició de moment d'inèrcia, obtenim els següents moments d'inèrcia teòrics per la barra i el disc respectivament: $I_{CM_T \text{ barra}} = \frac{1}{12} ml^2$, $I_{CM_T \text{ disc}} = \frac{1}{2} mr^2$. Així doncs, les seves corresponents incerteses seran $\delta I_{CM_T \text{ barra}} = \frac{1}{12} \sqrt{(l^2 \cdot \delta m)^2 + (2ml \cdot \delta l)^2}$ i $\delta I_{CM_T \text{ disc}} = \frac{1}{2} \sqrt{(r^2 \cdot \delta m)^2 + (2mr \cdot \delta r)^2}$

Per tant, obtenim els següents resultats a partir de tot el que hem deduït fins ara:

I_{CM} ($10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$)	Experimental	Teòric
Barra	4.20 ± 0.07	3.929 ± 0.013
Disc	4.73 ± 0.08	4.40 ± 0.06

Taula 4: Resultats dels moments d'inèrcia respecte del centre de masses.

Veiem pel cas de la barra si els dos valors del moment d'inèrcia (l'obtingut experimentalment i l'obtingut teòricament) són compatibles:

Si restem un valor de l'altre, tenim el valor 0.27 ± 0.08 . Aleshores, podem dir que els dos valors del moment d'inèrcia són compatibles si i només si aquest nou valor és compatible amb 0. La discrepància del nou valor és $0.27 > 3 \cdot 0.08$ i, per tant, la discrepància és molt significativa i malauradament els valors no són compatibles.

Pel cas del disc, fent el mateix procediment que abans, obtenim el nou valor 0.33 ± 0.14 . En aquest cas, la discrepància del nou valor és $0.33 \in [2 \cdot 0.14, 3 \cdot 0.14]$, i per tant en aquest cas la discrepància és també significativa, tot i que no sabem amb seguretat si els valors són compatibles o no (tot i això, és probable que no).

Tot i això, ens agradaria observar que durant la major part de l'informe hem estat calculant les incerteses de manera molt poc conservadora, utilitzant el fet que diverses variables eren independents i, per tant, hem estat usant la fórmula de l'arrel quadrada de les discrepàncies en comptes de sumar-les directament. És per això i pel fet que les discrepàncies no superen 3.5 vegades la incertesa, que creiem que si haguéssim sigut

més conservatius, haguéssim obtingut que els valors són de fet compatibles.¹ I és per aquest motiu que, per tant, considerem que les aproximacions de la barra com a cos unidimensional i el disc com a cos bidimensional són suficientment bones.

5.- [3 punts] Representeu gràficament el moment d'inèrcia del disc, I , en funció de la distància a l'eix de rotació del centre de masses al quadrat, d^2 . Feu l'ajust adient i valoreu si es verifica el teorema de Steiner utilitzant tota la informació proporcionada per l'ajust.

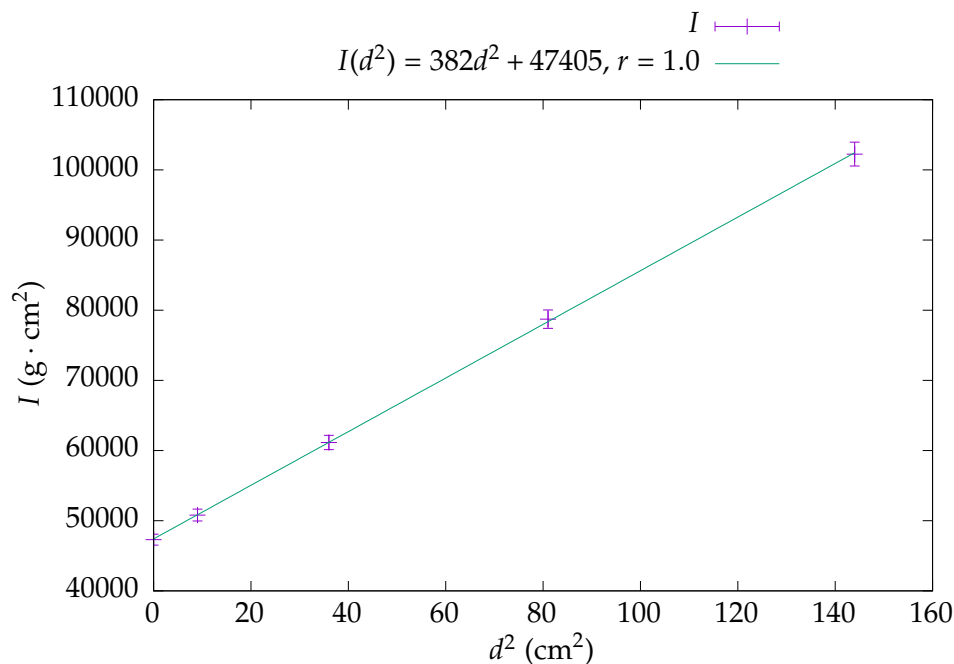


Figura 2: Moment d'inèrcia en funció de la distància del centre del disc a l'eix de rotació al quadrat.

Hem trobat els valors següents per la regressió $I(d^2) = a \cdot d^2 + b$:

$$\begin{cases} a = (382 \pm 2) \text{ g} \\ b = (4.741 \pm 0.016) \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \end{cases}$$

Com el valor del coeficient de correlació és 1,² això vol dir que el moment d'inèrcia segueix clarament una llei lineal respecte d^2 . I això és justament el que diu la Llei de Steiner.

Però la Llei de Steiner diu també que $a = m$ i que $b = I_{CM}$, així que veurem si per cada una d'aquestes dues parelles els valors són compatibles o no, i ho farem com a l'apartat 4.

¹Si multipliquem les incerteses per $\sqrt{2}$, que és aproximadament el que ens hagués sortit sent conservatius, obtenim que els moments d'inèrcia de la barra són bastant probablement compatibles i els moments d'inèrcia del disc són clarament compatibles.

²De fet no és exactament 1 perquè els punts no estan completament alineats, però com la precisió dels nombres flotants de l'ordinador no pot distingir entre el valor real del coeficient i 1 perquè estan massa a prop, tracta r com si fos 1.

Per $a = m$, veiem si $a - m$ és compatible amb el zero. La discrepància de $a - m$ és 9 ± 2 , així que $9 > 3 \cdot 2$ i, per tant, la discrepància és molt significativa i els valors són incompatibles. Fixem-nos, però, que l'error relatiu comès entre la massa teòrica i la massa experimental és d'un 2% i, per tant, l'error comès és considerablement petit.

Per $b = I_{CM}$, veiem que la discrepància de $b - I_{CM}$ és de $(0.01 \pm 0.10) \cdot 10^4$ i, per tant, clarament els valors són compatibles.

Així doncs, tot i que a i m no són compatibles, probablement perquè hem infravalorat alguna incertesa, valorem que hem pogut comprovar que es compleix la Llei de Steiner.