PRÀCTICA II
CORDA VIBRANT: Ones estacionàries

Objectius: Es pretén visualitzar les ones estacionàries sobre una corda vibrant. Estudiarem la velocitat de propagació de les ones en funció de les característiques físiques de la corda.

1. Introducció teòrica

Una ona consisteix en la propagació d'una pertorbació a través d'un medi. El fenomen resultant és periòdic en l'espai i en el temps i queda caracteritzat per la longitud d'ona, la freqüència i l'amplitud. Així, en cada punt de l'espai sotmès a la pertorbació hi ha una magnitud que oscil·la al voltant del seu valor d'equilibri. El fenomen s'observa en una gran diversitat de contextos com ara el desplaçament d'un punt d'un sòlid elàstic, la pressió d'un gas o el valor dels camps elèctric i magnètic en un medi. En el cas d'un sòlid elàstic, per exemple, aquesta vibració pot donar-se en la mateixa direcció en què es propaga l'ona (ones longitudinals), o bé en una direcció perpendicular a la direcció de propagació de l'ona (ones transversals).

L'equació general d'una ona amb una única freqüència i longitud d'ona (una ona harmònica) que es propaga cap a la dreta de l'eix x té la forma següent:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t), \qquad (1)$$

on A és l'amplitud de l'ona, $k = 2\pi/\lambda$ és el número d'ones i $\omega = 2\pi/T$ és la freqüència angular o pulsació. A la seva vegada, λ és la longitud d'ona i T és el seu període.

Aleshores, en un punt x_0 de l'eix, l'ona descriurà el següent moviment harmònic:

$$y(x_0,t) = A \cdot \sin(\varphi_0 - \omega \cdot t), \qquad (2)$$

on $\varphi_0 = k \cdot x_0$. Per altra banda, si el que volem és descriure el desplaçament de l'ona al llarg de l'eix x, resulta més convenient escriure l'equació (1) de la manera següent:

$$y(x,t) = A \cdot \sin[k(x - \mathrm{v} \cdot t)], \qquad (3)$$

on apareix un nou paràmetre $\mathrm{v} = \omega/k = \lambda/T$. Fixeu-vos ara amb els nodes de l'ona (el punts on $y = 0$) a partir de l'expressió (3). Observeu que els nodes es propaguen linealment amb el temps cap a valors de x creixents amb una velocitat donada per v. Per aquesta raó, v es considera la velocitat de propagació de l'ona.

Imaginem ara que una ona harmònica que viatja cap a la dreta interfereix amb una altra d'idèntica amplitud però que viatja cap a l'esquerra (en sentit contrari però amb la mateixa fase). És a dir composarem les ones

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t), \\ y_2(x,t) &= A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t), \end{aligned} \qquad (4)$$

i obtindrem mitjançant un càlcul gairebé directe

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x)\cos(\omega \cdot t). \qquad (5)$$

Noteu com el punt d'abscissa x segueix un moviment harmònic d'amplitud $2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x)$ que no depèn del temps. Hi ha uns punts per als quals l'amplitud és màxima i val $y(x_i) = \pm 2 \cdot A\cos(\omega \cdot t)$:

$$k \cdot x_i = \pi \cdot (i + 1/2)$$

on i és qualsevol nombre enter. El punts de màxima amplitud s'anomenen ventres i nombre de ventres visibles vindrà donat pel nombre enter i. No obstant també existeixen altres punts de l'abscissa on l'amplitud és sempre zero. És a dir, són punts que compleixen la relació $y(x_n) = 0$:

$$k \cdot x_n = n \cdot \pi$$

on n és qualsevol nombre enter. Els punts reben el nom de nodes i el nombre de nodes visibles vindrà donat pel valor n. Al llarg de tot l'eix no hi ha doncs transmissió d'energia. L'ona resultant (5) s'anomena estacionària.

Quan la regió en què es propaga l'ona està delimitada per uns extrems amb unes lleis de reflexió, aquesta interferència d'ones d'igual amplitud que viatgen en sentits oposats es dóna d'una manera natural. No obstant, les dimensions de la regió i les condicions de reflexió en el contorn seleccionen l'espectre de les ones estacionàries que hi poden existir. Suposem un cas senzill on tenim una corda amb els extrems $x = 0$ i $x = L$ fixats. Donat que els extrems de la corda no poden vibrar, aquests punts hauran de ser necessàriament nodes. Aleshores, tindrem que les úniques ones físicament plausibles són les que compleixin les condicions de contorn:

$$y(x = 0, t) = 0, \qquad y(x = L, t) = 0. \tag{6}$$

D'acord amb (5) i (6) les úniques ones estacionàries que es poden donar en una corda amb extrems fixos (nodes) han de satisfer:

$$k_n \cdot L = n \cdot \pi.$$

La restricció ens dóna una col·lecció discreta (no pas un conjunt continu de zero a infinit) de longituds d'ona permeses. La més gran serà $\lambda_1 = 2 \cdot L$ que correspon al mode fonamental i d'aquí es generen els digerents harmònics de longituds d'ona:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{2 \cdot L}{n} \;; \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

De fet, la velocitat de propagació de l'ona dependrà de les propietats elàstiques del medi i de la manera com aquest respon a la força F sotmesa des d'un dels caps de la corda. Es pot demostrar (vegeu per exemple Tipler volum I) que la velocitat de propagació d'una ona transversal en una corda depèn de la força de tensió de la corda en qüestió de la manera següent:

$$\mathrm{v}^2 = \frac{F}{\mu} \tag{7}$$

on μ és la densitat lineal de massa de la corda.

2. Realització experimental

En aquesta pràctica teniu una corda de longitud finita amb un extrem fixat i l'altre que també es pot considerar fixat (mireu-vos les Figs 1 i 2). Aquest segon està connectat a un motor que proporciona un moviment vibratori harmònic de freqüència constant. L'altre extrem està connectat a un dinamòmetre que mesura la tensió de la corda i que ve a donar-vos la força F exercida sobre la corda. Accionant el motor la corda queda sotmesa a l'acció d'una força de tipus sinusoïdal de freqüència constant. Ara bé, per a certs valors de la tensió controlada des de l'altre extrem, les ones resultants de les diverses reflexions interfereixen constructivament generant ones estacionàries. Per contra, si la tensió no adquireix algun d'aquests valors, les ones resultants de les successives reflexions en els extrems interfereixen aleatòriament. Aleshores, no veureu les ones estacionàries.

En concret, treballareu amb dues cordes de densitat diferent i amb dos muntatges experimentals de longituds, L, diferents que haureu d'intercanviar-vos amb l'altra parella de pràctiques. Un cop fixada la corda, poseu en marxa el motor i col·loqueu el braç que aguanta el dinamòmetre de forma que aquest marqui zero, és a dir, que la tensió a la corda sigui nul·la. Vegeu la Fig. 2 per a més detalls. Procediu ara amb les mesures. Aixecant molt lentament el braç, canviareu la tensió de la corda i podreu assolir una ona estacionària amb un únic màxim o ventre. Fixeu aleshores el braç i anoteu la tensió i longitud d'ona observades. Repetiu l'operació observant dos, tres, quatre, cinc....màxims (fins el nombre on pugueu, demaneu ajut a un professor). Anoteu les corresponents tensions i longituds d'ona. Repetiu l'operació amb l'altra corda i després tot el mateix procediment amb el muntatge de l'altra longitud. D'aquesta forma aconseguireu quatre conjunts de diferents mesures. Considereu que la sensibilitat del dinamòmetre és 0,02 N i determineu la incertesa en la mesura de la força.

Fig. 1: Dispositiu de la pràctica en funcionament. L'ona estacionària té en aquest cas dos ventres

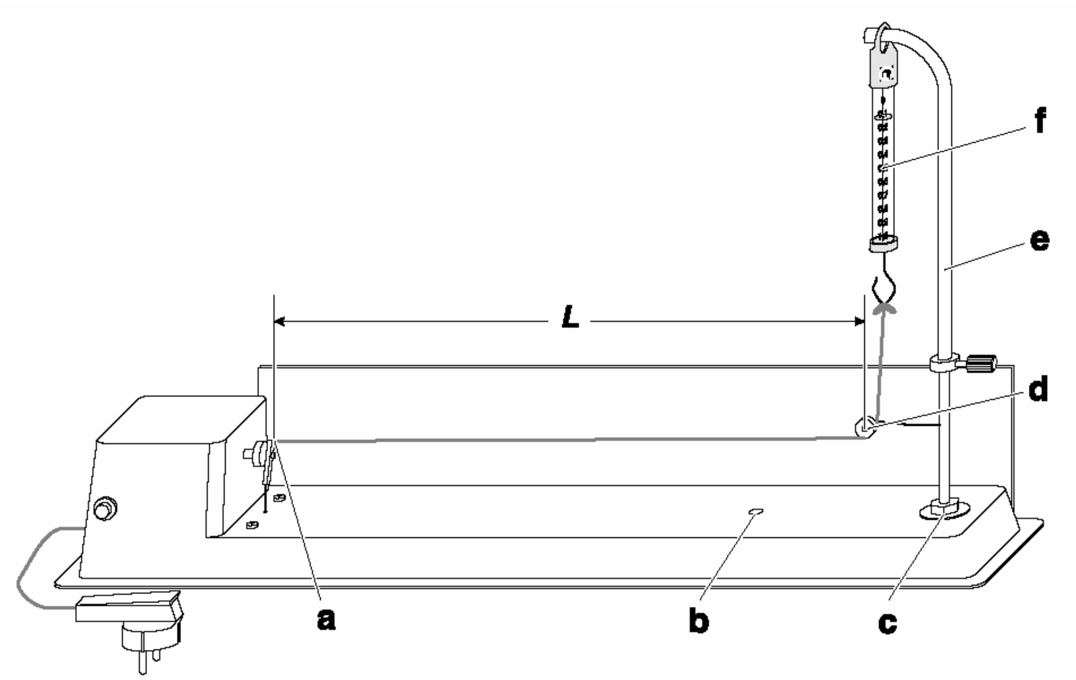

Fig 2: Descripció dels elements del dispositiu. **(a)** Eix del motor on es lliga un dels caps de la corda. **(b)** Posició on collar el braç de l'altre extrem de la corda. **(c)** Segona posició on collar el braç de l'altre extrem de la corda (es descargola per sota de la base). **(d)** Politja que redirecciona la tensió a mesurar pel dinamòmetre. **(e)** Braç que sustenta el dinamòmetre i un dels extrems de la corda i que pot regular-se a l'alçada desitjada per a observar les ones estacionàries per mitja d'un cargol. **(f)** Dinamòmetre. **(L)** Llargada de la part vibrant de la corda

Qüestions

Q.1. **[2 punts]** Anoteu els resultats obtinguts en les diverses mesures. Comenceu per la corda més gruixuda. No oblideu d'incloure les incerteses de totes les magnituds.

(A) $L_1 =$ .... $\pm$ .... (cm) CORDA GRUIXUDA

Nombre de ventres n	F (N)	λ (cm)	$\ln(\lambda/(1\text{cm}))$	$\ln(F_T/(1\text{N}))$

(B) $L_1 =$ .... $\pm$ .... (cm) CORDA PRIMA

Nombre de ventres n	F (N)	λ (cm)	$\ln(\lambda/(1\text{cm}))$	$\ln(F_T/(1\text{N}))$

(C) $L_2 =$ .... $\pm$ .... (cm) CORDA GRUIXUDA

Nombre de ventres n	F (N)	λ (cm)	$\ln(\lambda/(1\text{cm}))$	$\ln(F_T/(1\text{N}))$

(D) $L_2 =$ .... $\pm$ .... (cm) CORDA PRIMA

Nombre de ventres n	F (N)	λ (cm)	$\ln(\lambda / (1\text{cm}))$	$\ln(F_T / (1\,\text{N}))$

Q.2. **[2 punts]** Feu dues gràfiques on representeu $\ln(F)$ en funció de $\ln(\lambda)$. A la primera poseu els punts corresponents a les dues cordes gruixudes (apartats (A) i (C) de la pregunta 1) i a la segona els les cordes primes (apartats (B) i (D) de la pregunta 1). Ajusteu els punts experimentals de cada gràfica amb una regressió lineal tipus $\ln(F) = A_i \cdot \ln(\lambda) + B_i \quad (i = \text{gruixuda}, \text{prima})$. Dibuixeu les rectes de regressió i doneu els paràmetres dels ajusts amb les incerteses corresponents.

Q.3. **[2 punts]** Donada l'equació (7), quins valors haurien de prendre els pendents de les rectes, A_{gruixuda} i A_{prima}? Es compleix?

Q.4. **[1 punt]** Donada l'equació (7), amb quines magnituds físiques està relacionada l'ordenada a l'origen de les rectes de regressió, B_{gruixuda} i B_{prima}? Quina relació hi ha entre aquestes i les densitats lineals de massa, μ_{gruixuda} i μ_{prima}? Quant val el quocient $\mu_{\text{gruixuda}} / \mu_{\text{prima}}$ entre aquestes densitats?

Q.5. **[1.5 punts]** Determineu de manera directa la densitat lineal de les dues cordes, μ_{gruixuda} i μ_{prima}, amb la seva incertesa. Per a fer-ho, cal que peseu les cordes a la balança que hi ha en el laboratori i mesureu la seva longitud total. Doneu la incertesa associada a cada mesura.

Q.6. **[1.5 punts]** Calculeu, a partir de les mesures realitzades a l'apartat anterior, el quocient entre densitats $\mu_{\text{gruixuda}} / \mu_{\text{prima}}$ amb la seva incertesa. Compareu aquest valor amb el resultat obtingut experimentalment i de forma indirecta a la qüestió 4 i comenteu si concorden o no.