Pràctica 1. La roda de Maxwell: rotació, translació i moment d'inèrcia.

Guillem Fígols, Adrià Vilanova (T1)

Tardor 2019

Q1. [2 punts] Repetiu quatre vegades l'experiment per a cada alçada. Ompliu la taula següent amb els valors experimentals per l'alçada, el temps de caiguda, t, els temps d'obturació de la barrera fotoelèctrica, t', i els estadístics corresponents. Indiqueu les expressions que heu emprat per fer el càlcul de les incerteses.

Alçada	**Temps de caiguda (s)**						**Temps obturació (ms)**					
($h \pm 0.5$) (cm)	t_1	t_2	t_3	t_4	$\langle t \rangle$	δt	t'_1	t'_2	t'_3	t'_4	$\langle t' \rangle$	$\delta t'$
10.0	1.332	1.310	1.324	1.326	1.323	0.005	73	73	72	71	72.3	1.1
16.0	1.926	1.926	1.923	1.927	1.926	0.001	52	55	53	54	53.5	1.2
22.0	2.466	2.455	2.463	2.464	2.462	0.003	48	47	48	46	47.3	1.1
28.0	2.941	2.946	2.933	2.943	2.941	0.003	44	45	43	44	44.0	1.1
34.0	3.367	3.368	3.366	3.375	3.369	0.002	39	38	39	40	39.0	1.1
40.0	3.777	3.778	3.775	3.779	3.777	0.001[1]	37	37	37	37	37.0	1.0

Taula 1: Taula amb els valors experimentals demanats.

Per calcular la incertesa del temps de caiguda, hem calculat la desviació típica de les rèpliques realitzades i hem calculat l'error tenint en compte aquest error de dispersió (el que prové de la desviació típica) i l'error que ve donat per la resolució de l'aparell, ja que ambdós són del mateix ordre i no es pot menysprear cap d'ells:

$$\delta x = \sqrt{\delta x^2_{\text{dispersió}} + \delta x^2_{\text{experimental}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 + (0.001)^2} \overset{n=4}{\Longrightarrow} \delta x = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + 10^{-6}}$$

Q2. [2 punts] Calculeu v a partir de t'. Ompliu la taula següent i representeu gràficament la velocitat lineal del disc al travessar la segona barra fotoelèctrica en funció del temps de caiguda, incloent les barres d'incertesa en la representació. Feu l'ajust lineal $v = A_1 \cdot t + B_1$ sobre el conjunt de punts representats i doneu els valors per A_1 i B_1 amb les seves incerteses.

Per calcular la velocitat hem utilitzat l'expressió $v = \frac{2r}{t'}$.

Per calcular la incertesa de la velocitat s'ha tingut en compte que l'error en el radi de l'eix i el temps no estan correlacionats. Per tant:

$$\delta v = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| \delta r\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial v}{\partial t'}\right| \delta t'\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t'}\delta r\right)^2 + \left(\frac{2r}{t'^2} \cdot \delta t'\right)^2}$$

[1] Durant tot l'informe, quan la incertesa d'una mesura directa de temps s'arrodoneix a 0.001 s no mostrem la següent xifra ni del valor de la mesura ni de la incertesa, ja que la resolució de l'aparell és de 0.001 s i no tindria sentit mostrar més xifres significatives que les que sabem que són correctes.

Així doncs, obtenim la següent taula:

Velocitat (cm/s)		**Temps de caiguda (s)**	
v	δv	$\langle t \rangle$	δt
8.3	0.3	1.323	0.005
11.2	0.4	1.926	0.001
12.7	0.5	2.462	0.003
13.6	0.6	2.941	0.003
15.4	0.7	3.369	0.002
16.2	0.7	3.777	0.001

Taula 2: Taula amb la velocitat en funció del temps de caiguda.

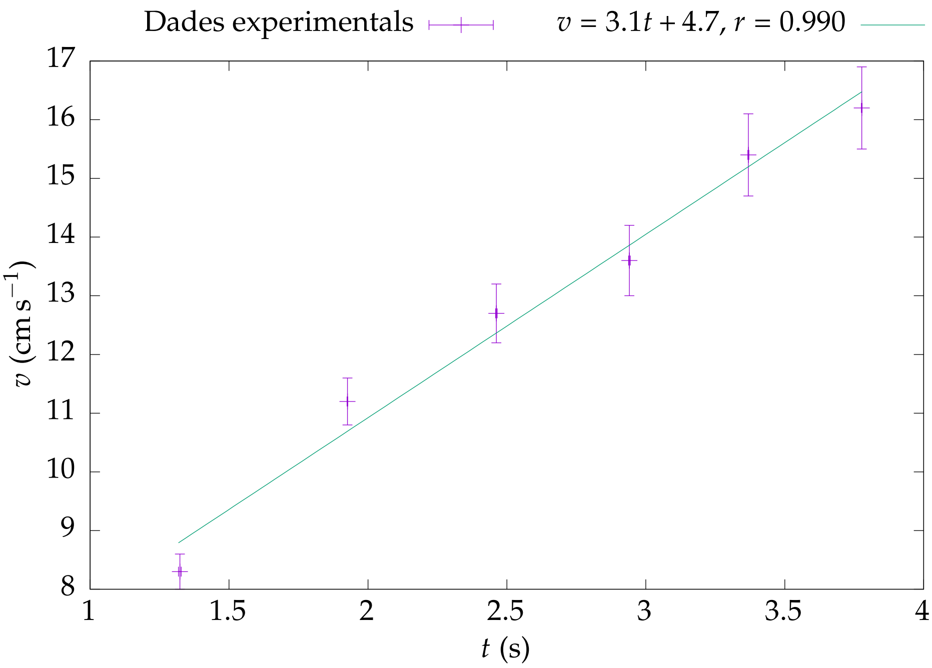

Figura 1: Velocitat lineal en funció del temps de caiguda.[2]

A continuació podem trobar les incerteses corresponents a l'ajust. Per calcular-les hem utilitzat les següents expressions:

$$\delta a = \sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}\,\delta y_{reg}$$

$$\delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}\,\delta y_{reg}$$

$$\delta y_{reg} = \sigma_y \sqrt{\frac{N-1}{N-2}}\sqrt{1-R^2}$$

[2] S'han *plotejat* les barres d'error en els dos eixos, tot i que en l'eix del temps són despreciables.

Per tant ara l'ajust el podem escriure com:

$$\boxed{v = (3.1 \pm 0.2)\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot t + (4.7 \pm 0.6)\ \mathrm{cm\,s^{-1}}}$$

Q3. [2 punts] Ompliu ara la taula següent i representeu gràficament la velocitat lineal al quadrat en funció de l'alçada. Feu la regressió lineal: $v^2 = A_2 \cdot h + B_2$ i doneu els valors per A_2 i B_2 amb les seves incerteses.

Alçada	**Quadrat de la velocitat lineal ($\mathrm{cm^2/s^2}$)**	
$(h \pm 0.5)$ cm	v^2	δv^2
10.0	69	5
16.0	126	10
22.0	161	13
28.0	186	15
34.0	237	21
40.0	263	23

Taula 3: Velocitat lineal al quadrat en funció de l'alçada.

Per calcular la incertesa de la velocitat al quadrat, s'ha aplicat propagació d'errors:

$$\delta v^2 = \left| \frac{\partial \left(v^2\right)}{\partial v} \right| \delta v = 2v \cdot \delta v \tag{1}$$

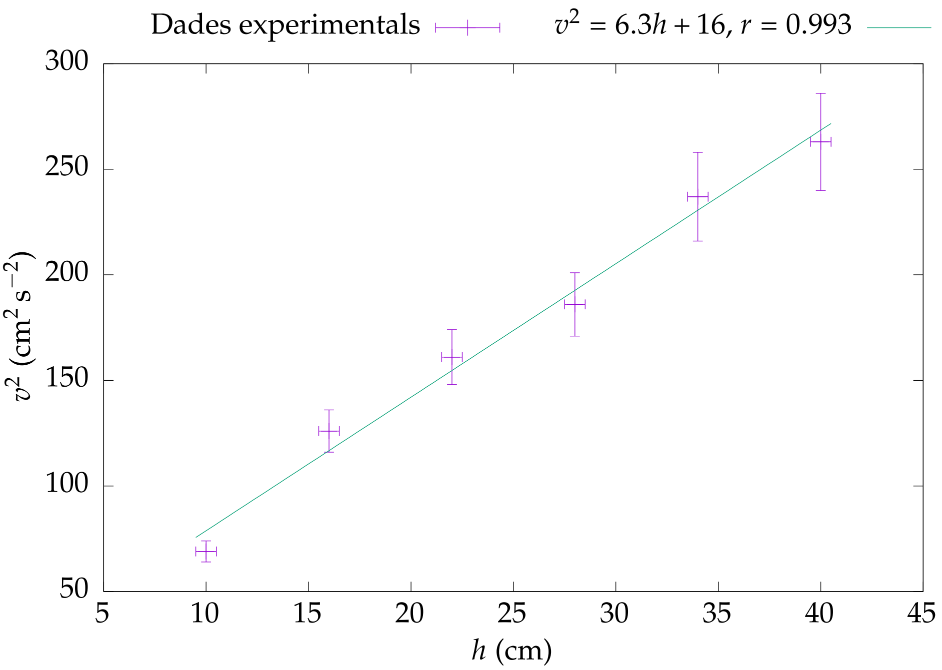

Figura 2: Velocitat lineal al quadrat en funció de l'alçada de caiguda.

Utilitzant les expressions (3), (4) i (5) per calcular les incerteses dels paràmetres de l'ajust, hem obtingut:

$$\boxed{v^2 = (6.3 \pm 0.4)\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot h + (16 \pm 10)\ \mathrm{cm^2\,s^{-2}}}$$

Q4. [1.5 punts] A quines magnituds físiques del model teòric corresponen els valors A_1, B_1, A_2 i B_2? Raoneu la resposta donant les expressions corresponents. Relacioneu els resultats obtinguts de les rectes de regressió de les dues darreres qüestions. Tenint en compte els valors i les incerteses de les magnituds implicades, podem considerar que són resultats coherents?

Com està explicat i justificat a la teoria del guió de la pràctica, el moviment de translació vertical de la roda es tracta d'un moviment rectilini uniformement accelerat (MRUA). Aleshores, tenim la següent expressió:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Com les velocitats v calculades són les velocitats instantànies passats t segons de caiguda, tenim que la regressió que fèiem ($v = A_1 \cdot t + B_1$) es correspon exactament a l'expressió anterior. Per tant:

$$\boxed{\begin{cases} A_1 = a \\ B_1 = v_0 \end{cases}}$$

Per ser aquest moviment un MRUA, tenim doncs, el següent:

$$\left.\begin{aligned} x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v(t) = v_0 + a \cdot t \overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} t = \tfrac{v(t)-v_0}{a} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2}a\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right) + x_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{1}{2a}\left(v(t)^2 + v_0^2 - 2v(t)v_0\right) + \frac{v_0 v(t)}{a} - \frac{v_0^2}{a} + x_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{v(t)^2 + v_0^2}{2a} - \cancel{\frac{v(t)v_0}{a}} + \cancel{\frac{v_0 v(t)}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + x_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v(t)^2 = v_0^2 + 2a\left(x(t) - x_0\right)$$

Per tant, de la regressió $v^2 = A_2 \cdot h + B_2$ i tenint en compte que en aquest cas $h(t) = x(t) - x_0$, tenim:

$$\boxed{\begin{cases} A_2 = 2a \\ B_2 = v_0^2 \end{cases}}$$

Així doncs, a partir dels paràmetres de les regressions que hem trobat, podem trobar dos valors per a i dos més per v_0:

$$\begin{cases} A_1 = a \Longrightarrow a = 3.1 \pm 0.2 \text{ cm s}^{-2} \\ B_1 = v_0 \Longrightarrow v_0 = 4.7 \pm 0.6 \text{ cm s}^{-1} \\ A_2 = 2a \Longrightarrow a = \frac{A_2}{2} = 3.2 \pm 0.2 \text{ cm s}^{-2} \\ B_2 = v_0^2 \Longrightarrow v_0 = \sqrt{B_2} = 4.0 \pm 1.3 \text{ cm s}^{-1} \end{cases}$$

Hem calculat les dues últimes incerteses de la manera següent:

$$\delta\left(\frac{A_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta A_2$$

$$\delta\left(\sqrt{B_2}\right) = \left|\frac{dB_2}{dv_0}\right| \delta v_0 = \frac{1}{2\sqrt{v_0}}\delta v_0$$

Tot i que podríem calcular les incerteses i aplicar el criteri de compatibilitat amb el zero per calcular si els valors d'a i v_0 són compatibles, en aquest cas no fa falta, perquè els intervals de confiança de cada parella es trepitgen ($[2.9, 3.1] \cap [3.0, 3.2] \neq \emptyset$ i $[4.1, 5.3] \cap [3.7, 5.3] \neq \emptyset$) i, per tant, sabem que el criteri de compatibilitat ens dirà que cada parella de valors són compatibles.

Així doncs, podem concloure que els resultats obtinguts són efectivament coherents.

Q5. [1 punt] Quin valor obtenim per a l'acceleració lineal? Relaciona la magnitud amb l'acceleració gravitatòria g.

Sense pèrdua de generalitat, prenem com a valor de l'acceleració el primer que hem obtingut, ja que ambdós tenen la mateixa incertesa i són molt semblants i, per tant, per aquest anàlisi qualitatiu ens és indiferent prendre un o l'altre. Així doncs, tenim:

$$\boxed{a = 3.1 \pm 0.2\ \mathrm{cm\,s^{-2}}}$$

Calculem la ràtio entre l'acceleració obtinguda i la gravetat, que és el que ens permetrà comparar ambdós valors:

$$\frac{a}{g} = \frac{3.1}{981} \approx 3.2 \cdot 10^{-3} \implies a \approx 3.2 \cdot 10^{-3} g$$

Així doncs, com és d'esperar, l'acceleració és més petita que la de la gravetat, degut al moment de forces que crea la força de tensió a la roda.

Q6. [1.5 punts] Calculeu el moment d'inèrcia I_{exp} del disc a partir de l'acceleració obtinguda de la gràfica de la qüestió 2. Calculeu ara el moment d'inèrcia, I_{teo}, a partir de la fórmula (7). Compareu aquests dos resultats tenint en compte les seves incerteses. Discutiu si podem efectivament aproximar la relació tal com hem fet en l'equació (8). Per què (doneu una resposta quantitativa)?

Segons la teoria, $a = \frac{g}{1+\frac{I_{exp}}{mr^2}}$. Aleshores:

$$I_{\mathrm{exp}} = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) \approx 14\,790\ \mathrm{g\,cm^2}$$

Calculem la incertesa corresponent mitjançant propagació d'errors:[3]

$$\delta I_{\mathrm{exp}} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{\mathrm{exp}}}{\partial m}\delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{\mathrm{exp}}}{\partial r}\delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{\mathrm{exp}}}{\partial a}\delta a\right)^2} \implies$$

$$\implies \delta I_{\mathrm{exp}} = \sqrt{\left(r^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)\delta m\right)^2 + \left(2mr\left(\frac{g}{a} - 1\right)\delta r\right)^2 + \left(mr^2\frac{g}{a^2}\delta a\right)^2} \implies$$

[3] Prenem com a acceleració de la gravetat terrestre la gravetat estàndard, que per definició no té incertesa associada. Si no ho féssim així, hauríem de calcular una gravetat promig a la terra i obtenir la incertesa/variància associada a aquesta.

$$\implies \delta I_{\text{exp}} \approx 1436\,\text{g}\,\text{cm}^2$$

Ara calculem el moment d'inèrcia teòric, segons el que diu la teoria:

$$I_{\text{teo}} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \approx 17\,653\,\text{g}\,\text{cm}^2$$

La seva incertesa associada serà, per propagació d'errors:

$$\delta I_{\text{teo}} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{\text{teo}}}{\partial m}\delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{\text{teo}}}{\partial R_1}\delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{\text{teo}}}{\partial R_2}\delta R_2\right)^2} \implies$$

$$\implies \delta I_{\text{teo}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)\delta m\right)^2 + (m \cdot R_1 \cdot \delta R_1)^2 + (m \cdot R_2 \cdot \delta R_2)^2} \implies$$

$$\implies \delta I_{\text{teo}} \approx 92\,\text{g}\,\text{cm}^2$$

Resumint, hem obtingut els següents valors:

$$\boxed{\begin{cases} I_{\text{exp}} = (1.47 \pm 0.14) \cdot 10^4\ \text{g}\,\text{cm}^2 \\ I_{\text{teo}} = (1.765 \pm 0.009) \cdot 10^4\ \text{g}\,\text{cm}^2 \end{cases}}$$

Apliquem el criteri de compatibilitat amb el 0: Definim $X = |I_{\text{exp}} - I_{\text{teo}}| = (0.3 \pm 0.15) \cdot 10^4\ \text{g}\,\text{cm}^2$, i veiem si és compatible amb el 0.

La discrepància (0.3) és justament dues vegades el valor de la incertesa (0.15), i doncs està just en el límit entre el que el criteri determina que és compatible o probablement no és. Si observem que la majoria de l'estona hem estat utilitzant que les fonts d'incertesa eren independents (i per tant en sumar la contribució de les incerteses ho hem fet mitjançant la norma $||\cdot||_2$, que fa que la incertesa resultat sigui més ajustada), és factible argumentar que si haguéssim sigut una mica més conservadors i haguéssim fet la suma directa de les incerteses, això hagués fet que sortíssim d'aquesta situació límit i el criteri determinés que les mesures són compatibles.

Per tant, és per tot això que els dos valors són compatibles i, per tant, els resultats són coherents.

Per altra banda, si calculem l'acceleració lineal amb l'equació (8) de la teoria, obtenim el següent resultat: $a_{\text{approx}} = g\frac{mr^2}{I_{\text{exp}}} \approx 3.2\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$. La discrepància entre aquest valor i el que hem especificat a l'apartat 5 és $D \approx 0 \leq 2\delta a = 0.4\ \text{cm}\,\text{s}^{-2}$ i, per tant, els valors són compatibles. Això ens diu que l'aproximació de la relació que hem fet a l'equació (8) és efectivament bona.