PRÀCTICA IV

PÈNDOL DE POHL: Oscil·lacions esmorteïdes i forçades.

Objectius: Es pretenen estudiar les oscil·lacions en un pèndol, tant en el cas esmorteït com en el forçat. En el primer cas determinareu la freqüència natural i la constant d'esmorteïment del pèndol i en el segon cas trobareu la corba de ressonància.

1 Introducció teòrica

En un sistema oscil·lant hi ha sempre fregament i conseqüentment l'amplitud de l'oscil·lador disminueix amb el temps. Per mantenir l'amplitud és necessari aplicar una força externa. En aquesta pràctica estudiarem els dos casos.

1.1 Oscil·lador esmorteït

En un pèndol de torsió el moment recuperador, M_R, i el moment de fregament, M_F, vénen donats per

$$M_R = -D\varphi \qquad \text{i} \qquad M_F = -C\dot{\varphi} \tag{1}$$

on φ és l'angle de rotació, D és la constant recuperadora de la molla espiral i C és un factor que ens dóna la magnitud del fregament (en el nostre cas depèn de la posició del fre magnètic). Això resulta en la següent equació del moviment

$$I\ddot{\varphi} + C\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \tag{2}$$

on I és el moment d'inèrcia del disc respecte el seu eix de rotació i φ és l'acceleració angular.

Dividint l'equació anterior per I obtenim

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0{}^2\varphi = 0 \tag{3}$$

on $\beta = \dfrac{C}{2I}$ i $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{I}}$

β és l'anomenada constant d'esmorteïment i ω_0 és la freqüència natural del pèndol.

Si rotem el pèndol cap a un costat des de la seva posició d'equilibri, i el deixem anar, des del repòs a t = 0, de manera que $\varphi(0) = \varphi_{ini}$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$, llavors la solució de l'equació del moviment és

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) \tag{4}$$

on $\varphi_0 = \varphi_{ini}\sqrt{1 + \beta^2/\omega^2}$ i $\delta = \arctan\left(-\beta/\omega\right)$, amb $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$

La solució de l'equació (3) mostra que les amplituds de les oscil·lacions, en el cas sub-esmorteït, decreixen exponencialment amb el temps (vegeu la fig. 1).

Es defineix com a decrement logarítmic el logaritme neperià de la relació entre les amplituds successives.

$$\lambda = \ln\left(\varphi_n/\varphi_{n+1}\right) = \beta\, T \tag{5}$$

on $T = 2\pi / \omega$, és el període de les oscil·lacions.

En el cas que $\omega_0 = \beta$, el pèndol retorna fins a la seva posició d'equilibri en el mínim temps possible sense oscil·lar (esmorteïment crític). Per $\omega_0 < \beta$, el pèndol retorna asimptòticament a la seva posició inicial més lentament com més gran sigui β, és el cas sobre-esmorteït

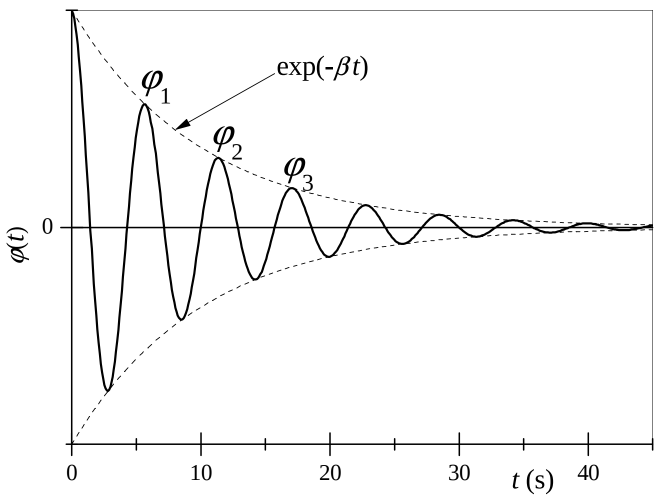


Figura 1. Oscil·lacions sub-esmorteïdes mostrant les successives amplituds.

1.2. Oscil·lacions forçades

Si sobre el pèndol hi actua un moment extern $M_{ext} = M_0 \cos(\omega_a t)$, llavors l'equació (3) es transforma en

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^{\,2}\varphi = F_0 \cos(\omega_a t) \tag{6}$$

on $F_0 = M_0/I$.

En l'estat estacionari la solució d'aquesta equació diferencial és

$$\varphi(t) = \varphi_a \cos(\omega_a t - \alpha) \tag{7}$$

a on l'amplitud de l'oscil·lació i la fase vénen donades per les expressions

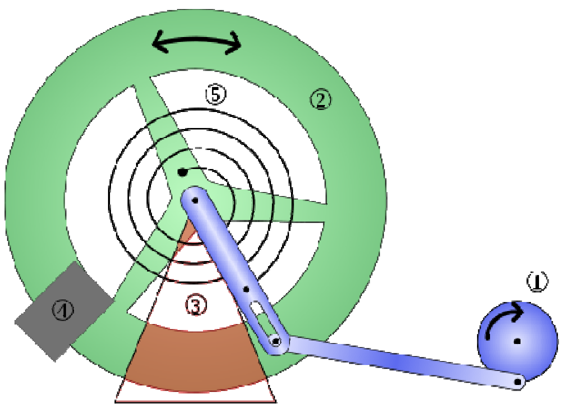
$$\varphi_a = \frac{F_a}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega_a^{\,2}) + 4\beta^2\omega_a^{\,2}}} \qquad \text{i} \qquad \tan(\alpha) = \frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^{\,2} - \omega_a^{\,2}} \tag{8}$$

Una anàlisi detallada de l'equació (8) evidencia que:

- L'amplitud augmenta en augmentar F_a.
- Per a un valor constant d'F_a, l'amplitud presenta un màxim quan la freqüència de la força externa, ω_a, és igual a la freqüència ressonant $\omega_r = \omega_0$
- Com més gran és el fregament, β, més petita és l'amplitud.

2. Realització experimental

El pèndol de Pohl és un sistema constituït per un disc (2 a la figura 2) que en estar unit a una molla espiral (5) presenta oscil·lacions. Si bé, el sistema ja té un esmorteïment per causa del fregament de les parts mecàniques, aquest es pot augmentar atansant un fre magnètic o imant (4) al disc. Això es deu a què, en moure's el disc metàl·lic en el si d'un camp magnètic, se n'indueixen corrents elèctrics de Foucault. Aquests en dissipar-se (per efecte Joule) provoquen una pèrdua d'energia en el sistema que en definitiva actua com un fregament proporcional a la velocitat del disc (és el mateix fenomen que es veu a la pràctica 3). Finalment un motor (1) de velocitat variable provoca oscil·lacions a l'extrem fixat de la molla , originant un moviment forçat.



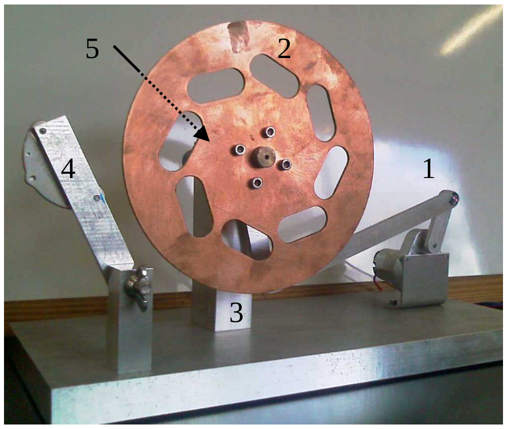


Figura 2. Esquema de funcionament (esquerra) i imatge real (dreta) del pèndol de Pohl on es mostren les diferents parts: (1) motor , (2) disc, (3) base de l'estructura, (4) Imant responsable de l'esmorteïment, (5) molla espiral.

Per estudiar les oscil·lacions enregistrarem l'angle de deflexió (en unitats arbitràries) en funció del temps gràcies a una targeta d'adquisició connectada a un PC. El programa emprat, anomenat ConPohl, s'haurà iniciat en engegar l'ordinador. A la figura 3 en podeu veure l'aspecte de la finestra principal amb una mesura.

2.1 Oscil·lacions esmorteïdes.

Per realitzar l'estudi de les oscil·lacions esmorteïdes, separeu el disc de la seva posició d'equilibri fent-lo girar. Amb una volta n'hi ha prou per obtenir uns resultats correctes (NO feu girar el pèndol més d'una volta). Pitgeu el botó "Captura" (o premeu la tecla de funció ***F5***) de l'aplicació i seguidament deixeu anar el disc. El programa enregistrarà uns 15 segons de l'evolució del disc, finalitzats els quals apareixerà la gràfica a la pantalla. Si voleu podeu aturar la captura de dades abans d'haver finalitzar aquest temps premeu la tecla de funció ***F6***. Ara podeu gravar l'evolució en un arxiu de text per si voleu fer l'anàlisi i les gràfiques fora del laboratori. Si voleu conèixer les coordenades d'un punt a la gràfica, cliqueu-hi al damunt amb el ratolí. A la barra d'estat (a baix i a l'esquerra) podreu llegir les coordenades del punt. D'aquesta manera podeu determinar el període, T, i l'amplitud de les oscil·lacions. La freqüència de l'oscil·lació vindrà donada per $\omega = 2\pi/T$.

En analitzar l'amplitud de les oscil·lacions comproveu que l'estat final d'equilibri correspon a angle zero. Si no és així haureu de recalibrar el zero mitjançant l'opció "Ajustar zero" del menú "Eines" i repetir l'experiment.

Repetiu l'experiment per a diferents posicions del fre magnètic fins que arribeu a observar el cas sobre-esmorteït en què el disc no oscil·la.

Abans de començar el següent apartat, situeu el fre magnètic bastant a prop del disc per induir un esmorteïment moderat. Comproveu que el pèndol experimenta unes quatre oscil·lacions completes abans d'aturar-se. Captureu l'evolució amb el programa i graveu-vos les dades. Amb aquestes dades haureu de respondre a les primeres qüestions de l'informe. A partir d'aquest moment no modifiqueu la posició del fre magnètic.

NOTA: El programa desa les dades en format "anglès": posa punts com a separadors decimals i comes com a separadors de les columnes. Si voleu fer servir l'Excel o l'Open Office en castellà o català, primer haureu de transformar les dades.

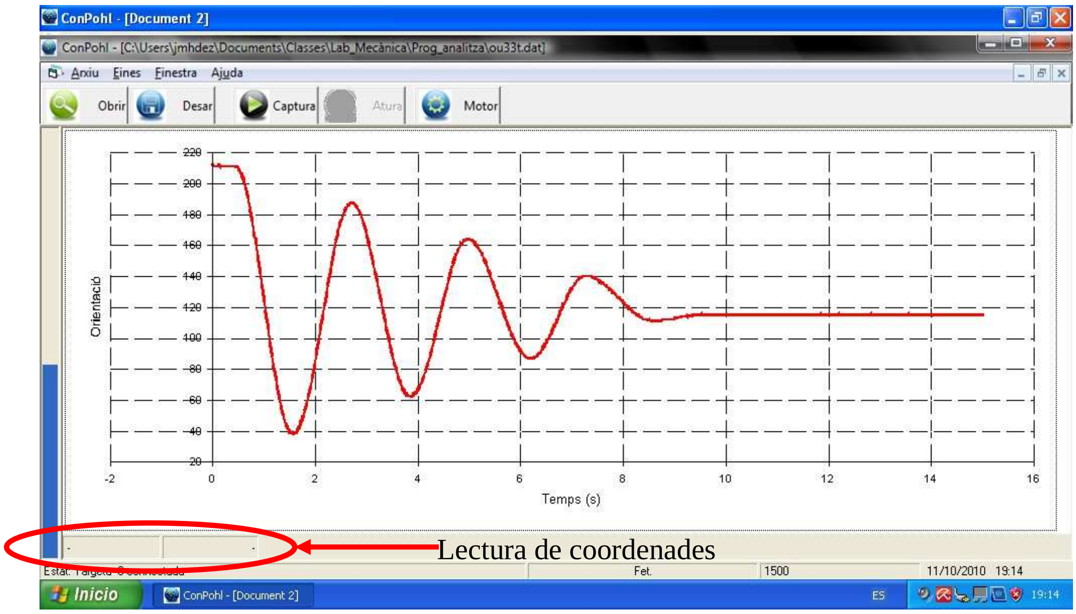


Figura 3. Finestra principal de l'aplicació ConPohl. A la barra d'eines podeu trobar les funcions més importants, com desar les dades, fer una nova captura de dades, o variar la velocitat del motor.

2.2 Oscil·lacions forçades

El moviment forçat s'aconsegueix mitjançant el motor de corrent continu, la velocitat del qual es pot controlar amb el PC. Per fer-ho, cliqueu damunt del botó "Motor" de la barra d'eines i apareixerà la finestra de la figura 4. Pitgeu el botó "Engega" i fixeu, amb el control lliscant, la potència del motor a un 40% del valor màxim. Passat uns segons, les oscil·lacions del disc hauran assolit el seu estat estacionari. En aquest punt ja les podeu enregistrar amb el botó "Captura". Amb l'ajut de la gràfica a la pantalla determineu l'amplitud i la freqüència de les oscil·lacions.

Figura 4. Finestra de control del motor.

Estudieu la freqüència i l'amplitud de les oscil·lacions en l'estat estacionari per a diferents potències del motor fins a poder construir la corba de ressonància (recomanem estudiar el rang de potències entre 20% i 80% amb una separació entre les dades més petita a prop de la freqüència ressonant (màxima amplitud).

3. Qüestions

1. [1 Punt] Per al cas de les oscil·lacions feblement esmorteïdes (**allunyant al màxim el fre magnètic del disc**), doneu la gràfica de l'evolució de l'angle que heu obtingut amb el PC. Determineu el període d'oscil·lació, T_0, i la freqüència, ω_0, de les oscil·lacions. Per obtenir valors prou precisos, mesureu el temps corresponent al major nombre d'oscil·lacions possible.

2. [1 Punts] Poseu ara **el fre magnètic en una posició intermèdia** i torneu a repetir la mesura de de l'evolució de l'angle. Determineu en aquest cas el període d'oscil·lació, T_1, i la freqüència, ω_1, de les oscil·lacions esmorteïdes.

3. [1.5 Punts] A partir de les dades de la gràfica de la pregunta anterior, ompliu la taula següent amb les posicions (temps) i amplituds de cada una de les oscil·lacions (com a la figura 1).

Posició del màxim (o mínim) t_n (segons)	Amplitud del màxim (o mínim) φ_n

4. [2 Punts] Amb les dades de la taula anterior, representeu $\ln(\varphi_n)$ en funció de t_n. Determineu a partir de la gràfica, la constant d'esmorteïment, β, i, a partir d'ella, el decrement logarítmic, λ. Expliqueu com heu obtingut aquests valors (recordeu que l'envolvent de l'evolució ve donada per la funció $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t}$).

5. [2 Punts] En el cas de les oscil·lacions forçades, ompliu la taula següent amb els valors de la potència del motor, el període, la freqüència i l'amplitud de les oscil·lacions.

Potència (%)	T_a (s)	ω_a (rad/s)	φ_a

6. [2.5 Punts] Representeu les amplituds obtingudes a la pregunta anterior en funció de la freqüència de les oscil·lacions. Determineu el valor de la freqüència de ressonància, ω_R, i compareu-la amb els valors de les freqüències, ω_0 *i* ω_1,, del pèndol que heu obtingut a la primera i a la segona preguntes respectivament. Tenint en compte, les expressions de la teoria, digueu com haurien d'estar relacionats aquests valors i si es compleix o no aquesta predicció teòrica.