PRÀCTICA V

PÈNDOLS ACOBLATS: Modes normals d'oscil·lació.

Objectius: Determinació experimental dels modes normals de vibració de dos pèndols idèntics. Estudi de la dependència de la freqüència del mode polsant amb la distància d'acoblament.

1 Introducció teòrica

Disposem de dos pèndols de característiques idèntiques, és a dir, de masses i longituds iguals, que oscil·len en un mateix pla vertical. Aquests pèndols estan acoblats mitjançant un lligam elàstic, que pot situar-se a alçades diferents. L'acoblament és més gran com més baix estigui el lligam.

1.1 Càlcul de les equacions del moviment.

A la figura següent es mostra l'esquema de dos pènduls de gravitació de massa *m* i longitud *L*, acoblats per una molla de constant recuperadora *k* situada a una distància l dels punts de subjecció dels pèndols.

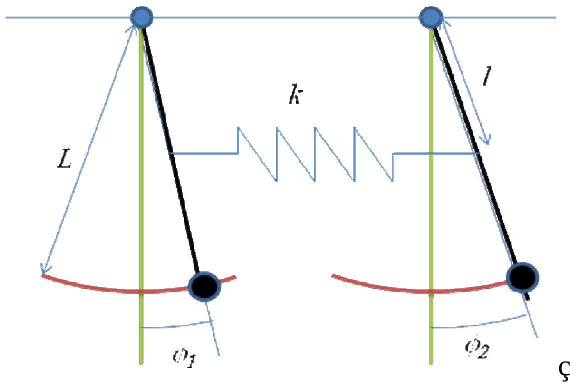

Figura 1. Esquema de l'acoblament entre els pèndols.

En aquesta situació el moment que actua sobre el pèndol 1 tindrà dues contribucions:

- Moment originat per la força de la gravetat

$$M_g = -mgL\sin(\phi_1)$$

- Moment causat per la força recuperadora de la molla:

$$M_k = -kl^2(\phi_1 - \phi_2)$$

De la mateixa manera tindríem equacions similars per al segon pèndol.

Tenint en compte l'equació fonamental de la dinàmica de les rotacions: $\sum M = I\ddot{\phi}_1$ i si considerem el límit de petites oscil·lacions ($\sin(\phi) \approx \phi$) les equacions del moviment es podran escriure com

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi}_1 &= -mgL\phi_1 + kl^2(\phi_2 - \phi_1) \\ I\ddot{\phi}_2 &= -mgL\phi_2 + kl^2(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \qquad (1)$$

Si definim les constants

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} = \frac{g}{L} \qquad \text{i} \qquad \Omega^2 = \frac{kl^2}{I} \tag{2}$$

podem reescriure les equacions del moviment com

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 &= -(\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_1 + \Omega^2\phi_2 \\ \ddot{\phi}_2 &= \Omega^2\phi_1 - (\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Sumant i restant aquestes equacions, obtenim les equacions de dos moviments harmònics

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 &= -\omega_0^2(\phi_1 + \phi_2) \\ \ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 &=_1 -(\omega_0^2 + \Omega^2)(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \tag{4}$$

de freqüències angulars

$$\omega_a = \omega_0 \qquad \text{i} \qquad \omega_b = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \tag{5}$$

Noteu que aquestes magnituds són freqüències angulars (o pulsacions) i les seves unitats seran radians per segon. Si volem relacionar-les amb el període, haurem de fer-ho mitjançant l'expressió $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, on f i T són la freqüència i el període, respectivament.

Finalment es pot comprovar que les trajectòries que seguiran els dos pèndols es poden escriure com

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= A\cos(\omega_a t) + A'\sin(\omega_a t) + B\cos(\omega_b t) + B'\sin(\omega_b t) \\ \phi_2(t) &= A\cos(\omega_a t) + A'\sin(\omega_a t) - B\cos(\omega_b t) - B'\sin(\omega_b t) \end{aligned} \tag{6}$$

Les solucions particulars per al moviment d'ambdós pèndols dependran de les condicions inicials. Estudiarem tres casos particulars en què iniciarem el moviment amb els pèndols en repòs. Això implica que $A' = B' = 0$ ja que en cas contrari les velocitats dels pèndols a l'estat inicial no s'anul·larien. Llavors

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= A\cos(\omega_a t) + B\cos(\omega_b t) \\ \phi_2(t) &= A\cos(\omega_a t) - B\cos(\omega_b t) \end{aligned} \tag{7}$$

a) **<u>Mode concordant</u>**.

En l'instant inicial els dos pèndols parteixen en repòs del mateix angle i sentit. Llavors $B = 0$.

I per tant $\phi_1(t) = \phi_2(t) = A\cos(\omega_a t)$. Els dos pèndols efectuen oscil·lacions iguals, concordants en el temps i amb una pulsació igual a la pulsació natural sense acoblament ($\omega_a = \omega_0$).

b) **<u>Mode contraposat.</u>**

En l'instant inicial separem els dos pèndols de la posició d'equilibri, el mateix angle però en sentits oposats. Llavors els deixem anar des del repòs. Introduint aquesta condició inicial a l'equació (7) s'obté $A = 0$; amb què les equacions del moviment queden $\phi_1(t) = B\cos(\omega_b t)$ i $\phi_2(t) = -\phi_1(t)$. En aquest cas els pèndols efectuen oscil·lacions simètriques amb una pulsació $\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$.

c) **Mode polsant**.

Inicialment els dos pèndols estan quiets, un en la posició d'equilibri i l'altre desplaçat un petit angle, ϕ_0. Llavors $A = B = \phi_0 / 2$. Substituint en l'equació (7) podrem escriure:

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_0}{2}(\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)) = \phi_0 \cos\left(\tfrac{\omega_b - \omega_a}{2} t\right)\cos\left(\tfrac{\omega_a + \omega_b}{2} t\right)$$
$$\phi_2(t) = \frac{\phi_0}{2}(\cos(\omega_a t) - \cos(\omega_b t)) = \phi_0 \sin\left(\tfrac{\omega_b - \omega_a}{2} t\right)\sin\left(\tfrac{\omega_a + \omega_b}{2} t\right)$$

Aquestes dues últimes equacions posen de manifest que, en aquest mode, ambdós pèndols oscil·len amb una freqüència angular $\omega_+ = \frac{\omega_b + \omega_a}{2}$ i amb una amplitud que també varia amb el temps (més lentament) amb una freqüència angular $\omega_- = \frac{\omega_b - \omega_a}{2}$.

A més, en el cas que l'acoblament sigui feble, es pot comprovar que

$$\omega_- = \tfrac{1}{2}(\omega_b - \omega_a) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0\right) = \tfrac{1}{2}\omega_0\left(\sqrt{1 + 2\tfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}} - 1\right) \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0}$$

Aquesta darrera expressió ens diu, tenint en compte que $\Omega^2 = \frac{kl^2}{I}$, que la freqüència angular ha de ser proporcional al quadrat de la distància d'acoblament, *l*.

$$\omega_- \propto l^2$$

Un dels objectius d'aquesta pràctica és verificar aquesta dependència.

2. Realització experimental

2.1 Dispositius experimentals

- Dos pèndols simples "idèntics".
- Sistema d'acoblament. Molla amb suports.
- Sistema d'enregistrament de les oscil·lacions: transductor d'angle de rotació a voltatge, sistema d'adquisició del senyals (basat en ARDUINO UNO) i PC de control.

2.2 Realització de la pràctica

1) Amb els dos pèndols sense acoblar (sense posar la molla d'acoblament), enregistreu l'evolució dels dos pèndols amb l'ordinador i determineu el període natural d'ambdós, T_0 Per tal de reduir la incertesa de la mesura, mesureu el temps total corresponent a un bon nombre d'oscil·lacions (mínim 60 segons).

2) Fixeu la molla a 50 cm dels punts de fixació dels pèndols.

3) Enregistreu el mode concordant (en fase) i determineu el període d'aquestes oscil·lacions, T_a. Pareu atenció que la gràfica corresponent a aquest (i també al següent) apartat corresponguí a oscil·lacions d'amplitud constant (o lleugerament decreixent per causa del fregament).

4) Enregistreu el mode contraposat (en oposició de fase) i determineu-ne el període, T_b.

5) Enregistreu el model polsant i determineu el període de les oscil·lacions, T_+ i el període de la pulsació de l'amplitud, T_-.

6) Modifiqueu la posició de la molla i determineu el període de la pulsació de l'amplitud, T_-, en el mode polsant per a diferents distàncies d'acoblament, *l*, (entre 20 i 80 cm en intervals de 10 o 15 cm).

Apèndix: Sistema d'enregistrament de les posicions dels pèndols

Per enregistrar les posicions del pèndols disposem d'un sistema basat en ordinador que ens donarà l'evolució dels angles de deflexió dels pèndols (en unitats arbitràries) en funció del temps com a un full d'Excel.

En primer lloc connectarem l'ordinador i iniciarem la sessió amb l'usuari "Alumne". Automàticament hauria d'iniciar-se l'aplicació "Pèndols" i l'Excel.

Les diferents evolucions que enregistreu s'aniran carregant en fulls diferents d'un únic arxiu anomenat "Pendols.xlsx". Quan comenceu us preguntarà si voleu eliminar les dades anteriors. Haureu d'indicar que SÍ. Per iniciar l'enregistrament pitgeu el botó "INICIA" i, quan ja tingueu prou dades, per aturar-lo "ATURA". Si no pitgeu el botó ATURA el sistema s'atura automàticament passats uns 130 segons. A mida que el sistema enregistra la mesura, les columnes del nou full de càlcul de l'Excel s'aniran omplint amb els nous valors i la gràfica s'anirà construint. Preneu nota del nom del full de càlcul ("Nou_1", "Nou_2", etc) que correspon a cadascuna de les rondes de mesures (mode concordant, mode contraposant, mode polsant amb L = 50cm , etc.). Quan acabeu de prendre dels mesures i abans de tancar cap programa, deseu el full de l'Excel en una memòria USB.

Qüestions

1.- [1.5 punt] Determineu, a partir de les gràfiques, la freqüència angular natural de cadascun dels pèndols, ω_0, amb la seva incertesa. Comproveu que les freqüències naturals dels dos pèndols coincideixen dins 1'error experimental.

2.- [1.5 punt] Determineu les freqüències dels dos modes normals de vibració: ω_a , la del mode concordant i ω_b, la del mode contraposat o en oposició de fase. Determineu 1es incerteses d'ambdues magnituds. Comproveu que ω_0 i ω_a , coincideixen dins 1'error experimental, mentre que ω_0 i ω_b no ho fan.

3.- [1.5 punt] En el cas en què els pèndols es moguin de manera que hi apareguin pulsacions, determineu la freqüència d'oscil·lació dels pèndols ω_+ i la freqüència corresponent a la variació de l'amplitud amb el temps ω_- . Determineu la incertesa d'ambdues magnituds.

4.- [1 punt] Comproveu, tenint en compte les incerteses, que $\omega_+ = \frac{\omega_b + \omega_a}{2}$ i $\omega_- = \frac{\omega_b - \omega_a}{2}$.

5.- [1.5 punt] Ompliu la següent taula per al mode polsant observat amb diferents distàncies d'acoblament, *l*.

l (cm)	T_- (s)	ω_- (rad/s)	$\sqrt{\omega_-}$

6.- (2 punts) Representeu $\sqrt{\omega_-}$ en funció de la distància d'acoblament, *l*. Quin tipus de comportament observeu? Feu la regressió lineal de les dades i indiqueu els paràmetres de l'ajust.

7.- (1 punt) Per quins valors del paràmetre d'acoblament, *l*, espereu que les dades s'allunyin del comportament lineal i per què?