Pràctica 4: Pèndol de Pohl.

Guillem Fígols, Adrià Vilanova (T1)

12 de novembre de 2019

Q1. [1 punt] Per al cas de les oscil·lacions feblement esmorteïdes (allunyant al màxim el fre magnètic del disc), doneu la gràfica de l'evolució de l'angle que heu obtingut amb el PC. Determineu el període d'oscil·lació, T_0, i la freqüència, ω_0, de les oscil·lacions. Per obtenir valors prou precisos, mesureu el temps corresponent al major nombre d'oscil·lacions possible.

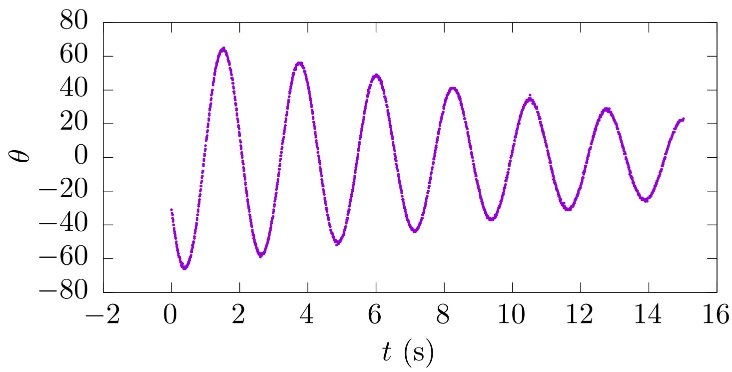

Figura 1: Gràfica que mostra l'angle de rotació del pèndol (θ) en funció del temps (t).

Suposant que el rellotge de l'ordinador té una incertesa de 0.0001 s (el nombre de xifres decimals que apareixen al fitxer de dades són 4), podem calcular el període i la freqüència angular de la següent manera:

$$\boxed{T_0} = \frac{t_{6\text{ oscil·lacions}}}{6} = \frac{13.8743 - 0.3903}{6} = \boxed{2.24733 \pm 0.00003\text{ s}}$$

$$\boxed{\omega_0} = \frac{2\pi}{T_0} = \boxed{2.79584 \pm 0.00003\text{ rad s}^{-1}}$$

Per calcular les incerteses hem usat que $\delta(\lambda x) = |\lambda|\delta x$ i $\delta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\delta x}{x^2}$.

Q2. [1 punt] Poseu ara el fre magnètic en una posició intermèdia i torneu a repetir la mesura de l'evolució de l'angle. Determineu en aquest cas el període d'oscil·lació, T_1, i la freqüència, ω_1, de les oscil·lacions esmorteïdes.

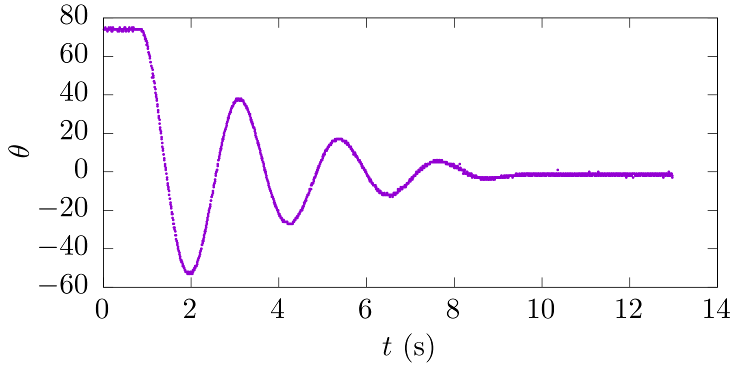

Figura 2: Gràfica que mostra l'angle de rotació del pèndol (θ) en funció del temps (t).

Fem el mateix càlcul que abans:

$$\boxed{T_1} = \frac{t_{2\text{ oscil·lacions}}}{2} = \frac{6.4993 - 1.9683}{2} = \boxed{2.26550 \pm 0.00005 \text{ s}}$$

$$\boxed{\omega_1} = \frac{2\pi}{T_0} = \boxed{2.77342 \pm 0.00006 \text{ rad s}^{-1}}$$

Q3. [1.5 punts] A partir de les dades de la gràfica de la pregunta anterior, ompliu la taula següent amb les posicions (temps) i amplituds de cada una de les oscil·lacions.

Posició del màxim (o mínim) t_n (s)	Amplitud del màxim (o mínim) φ_n
0.8593	74.0217
1.9683	−52.9783
3.0933	38.0217
4.2653	−26.9783
5.3743	17.0217
6.4993	−11.9783

Taula 1: Valors de la parametrització del pèndol quan la amplitud és màxima o mínima.

Q4. [2 punts] Amb les dades de la taula anterior, representeu $\ln(\varphi_n)$ en funció de t_n. Determineu, a partir de la gràfica, la constant d'esmorteïment, β, i, a partir d'ella, el decrement logarítmic, λ. Expliqueu com heu obtingut aquests valors (recordeu que l'envolvent de la funció ve donada per la funció $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t}$).

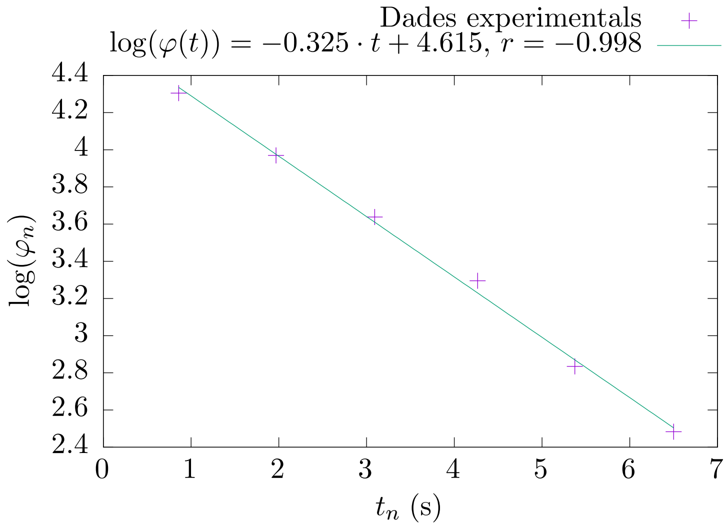

Figura 3: Gràfica que mostra la relació entre el logaritme de les amplituds màximes/mínimes locals (φ_n) i el temps en què tenen lloc (t_n).

Segons l'enunciat, $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \implies \frac{\varphi(t)}{\varphi_0} = e^{-\beta t} \implies \log\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi_0}\right) = -\beta t \implies \log(\varphi(t)) = \log(\varphi_0) - \beta t$

Aleshores, observem que els punts dels màxims i mínims estan sobre l'envolvent de la gràfica (ja que $\sin(\omega t+\delta) = \pm 1$) i doncs només queda la part de l'expressió de l'envolvent.

Així doncs, comparant aquesta expressió amb la de la regressió lineal que hem realitzat, i també gràcies a la unicitat dels coeficients de polinomis, podem assegurar que

$$\boxed{\beta = 0.325 \pm 0.009 \text{ s}^{-1}}$$

(la incertesa indicada és retornada pel *gnuplot* després de calcular la regressió lineal).

A més, segons la teoria, (equació (5) del guió de pràctiques), sabem que

$$\boxed{\lambda} = \beta T_1 = \boxed{0.74 \pm 0.02}$$

on hem calculat la incertesa mitjançant la fòrmula $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \implies \delta(xy) = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y$.

Q5. [2 punts] En el cas de les oscil·lacions forçades, ompliu la taula següent amb els valors de la potència del motor, el període, la freqüència i l'amplitud de les oscil·lacions.

P (%)	T_a (s)	δT_a	ω_a ($\mathrm{rad\,s^{-1}}$)	$\delta\omega_a$	φ_a	$\delta\varphi_a$
20	6.3286	0.0095	0.9928	0.0015	5.03	0.03
25	4.4939	0.0035	1.3982	0.0011	5.90	0.03
30	3.6062	0.0017	1.7423	0.0008	7.04	0.03
33	3.0662	0.0008	2.0492	0.0006	8.96	0.02
35	2.9978	0.0011	2.0959	0.0007	9.19	0.03
37	2.7366	0.0006	2.2960	0.0005	11.55	0.02
39	2.5460	0.0004	2.4679	0.0004	14.89	0.02
40	2.7146	0.0005	2.3146	0.0005	11.78	0.02
41	2.4703	0.0003	2.5435	0.0004	16.74	0.03
43	2.3401	0.0003	2.6851	0.0003	19.48	0.03
45	2.2408	0.0002	2.8040	0.0003	20.07	0.03
47	2.0820	0.0003	3.0179	0.0004	15.30	0.03
50	1.8595	0.0003	3.3790	0.0006	8.77	0.02
55	1.6033	0.0004	3.9188	0.0011	4.92	0.02
60	1.4681	0.0005	4.2798	0.0016	3.70	0.03
65	1.2631	0.0006	4.9745	0.0024	2.39	0.02
70	1.1815	0.0006	5.3178	0.0028	1.95	0.02
75	1.0836	0.0006	5.7983	0.0031	1.57	0.02

Taula 2: Paràmetres de les oscil·lacions en funció de la potència de la força exercida.

Per omplir aquesta taula, s'han aproximat a *gnuplot* mitjançant mínims quadrats els punts experimentals dels fitxers `.dat` a funcions del tipus $\varphi(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$. Per fer això, s'han escollit prèviament per a cada potència valors de a, b i c semblants als de l'aproximació que volíem[1]. Després, el *gnuplot* ens ha donat els coeficients de la regressió i les seves incerteses, que ens han permès determinar cadascun dels paràmetres de les oscil·lacions ($\omega_a = b$, $\varphi_a = a$, $T_a = \frac{2\pi}{b}$).

Es poden veure els arxius que ens han permès fer l'aproximació de la funció sinusoïdal a l'annex.

[1]Si no l'algorisme convergia a una altra funció que minimitzava localment l'error quadràtic però que no el minimitzava globalment. En el cas d'una regressió lineal no hi ha cap problema perquè només existeix un mínim local (i per tant global) de l'error quadràtic, i a més no faria falta usar un algorisme iteratiu perquè tenim mètodes directes per calcular la regressió lineal. Així doncs, pel nostre cas no ens quedava més remei que imposar unes condicions inicials prou bones per tal que el mètode iteratiu convergeixi a la millor aproximació global.

Q6. [2.5 punts] Representeu les amplituds obtingudes a la pregunta anterior en funció de la freqüència de les oscil·lacions. Determineu el valor de la freqüència de ressonància, ω_R, i compareu-la amb els valors de les freqüències, ω_0 i ω_1, del pèndol que heu obtingut a la primera i a la segona preguntes respectivament. Tenint en compte les expressions de la teoria, digueu com haurien d'estar relacionats aquests valors i si es compleix o no aquesta predicció teòrica.

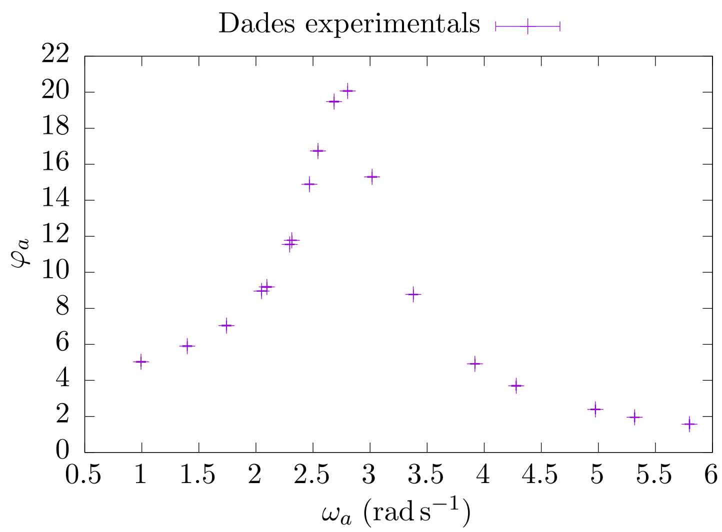

Figura 4: Gràfica que mostra la relació entre les amplituds de les oscil·lacions (φ_a) i la freqüència angular corresponent (ω_a) per diferents valors de la potència.

De la figura 4 i la taula 2 podem observar, aproximadament, que:[2]

$$\boxed{\omega_R = 2.8 \pm 0.2 \text{ rad s}^{-1}}$$

Recordem que:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0 = 2.79584 \pm 0.00003 \text{ rad s}^{-1} \\ \omega_1 = 2.77342 \pm 0.00006 \text{ rad s}^{-1} \end{array}\right\}, \quad \varphi_a = \frac{F_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2) + 4\beta^2\omega_a^2}}$$

Segons l'equació (8) de la teoria, $\omega_R = \omega_0$. Veiem que efectivament es compleix això, ja que ω_0 està al marge de confiança de ω_R, que és qui té la incertesa més gran (dit d'una altra manera, la discrepància de ω_R i ω_0 és més petita que dues vegades (i de fet, molt menys que una vegada) la incertesa de ω_R).

Finalment, per l'equació (4) de la teoria, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, i això ens diu que $\omega < \omega_0$, fet que podem veure que es compleix amb els valors que hem obtingut nosaltres.

Una cosa que s'ha d'observar és el fet que ω_1, pel mateix argument que hem fet per ω_0, també és compatible amb ω_R. Això és desafortunat, i pot ser que signifiqui que la incertesa de ω_R és massa gran.

[2] La incertesa és ± 0.2 rad s^{-1} perquè és la distància màxima a les dues freqüències adjacents de la freqüència que dona amplitud màxima dins del conjunt de dades experimentals.

1 Annex

1.1 Exemple de plot amb la regressió

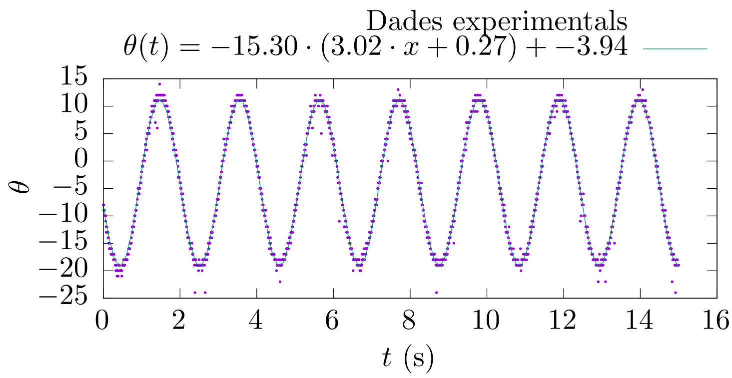

Figura 5: Parametrització de l'estat del pèndol quan està sotmès a una força de potència 43%.

1.2 `fitgraph.bash`

```
#!/bin/bash
for f in data/f*; do
  filename=$(basename -- "$f")
  name=${filename%.*}
  echo "Processing $filename...";
  extrapars=$(cat initialconditions/$filename)
  ./fitgraph.gnu $f $name $extrapars
done
```

Per generar les gràfiques, primer s'han de guardar en una carpeta `data/` tots els fitxers de dades que ha generat la màquina del laboratori. Després, a una carpeta `initialconditions/` s'han de crear diversos fitxers amb els mateixos noms que els fitxers de dades de la carpeta `data/` que continguin tres nombres separats per un espai: les aproximacions inicials que utilitzarà el mètode iteratiu per a, b i c.

Finalment, cal crear la carpeta `fitoutputs/` on es guardaran els resultats de les regressions i les gràfiques resultants (en format `svg` i també en un altre format llest per inserir-ho en un document LaTeX), i després s'ha d'executar el programa cridant-lo mitjançant la següent comanda a una terminal: `bash fitgraph.bash`. Aquest programa executarà el programa `fitgraph.gnu` per cada un dels arxius de dades que existeixin.

1.3 fitgraph.gnu

```
#!/usr/bin/gnuplot -c
# File name definition
outputsdir = 'fitoutputs/'
filename = ARG2
datafile = ARG1

# Output in TEX
set terminal cairolatex size 10cm, 5cm
set output outputsdir.filename.'.tex'

# PLOT SETTINGS
set xlabel "$t$ (s)"
set ylabel "$\\theta$"
set key above

# FIT SETTINGS
set fit quiet
set fit logfile outputsdir.filename.'_fit.log'
if (exists("ARG3")) { a = ARG3 + 0 }
if (exists("ARG4")) { b = ARG4 + 0 }
if (exists("ARG5")) { c = ARG5 + 0 }
f(x) = a*sin(b*x + c) + d
fit f(x) datafile u 1:2 via a, b, c, d
title_f(a, b, r) = sprintf('$\theta(t) = %.2f\cdot(%.2f \cdot x + %.2f)
    + %.2f$', a, b, c, d);

# PLOT THE DATA
plot datafile u 1:2 with dots t "Dades experimentals", f(x) t
    title_f(a, b, A_correlation)

# Output in SVG
set terminal svg dashed size 600, 300 font "Computer
    Modern,Tinos,Helvetica,15"
set output outputsdir.filename.'.svg'

replot
```