PRÀCTICA VI

Llei de Hooke per a una molla espiral. Moments d'inèrcia i teorema d'Steiner.

Objectius: Comprovar la validesa de la llei de Hooke per a les oscil·lacions de torsió. Avaluar els moments d'inèrcia de diversos sòlids rígids a partir de la freqüència de les seves oscil·lacions. Verificar experimentalment el teorema de Steiner o teorema de l'eix paral·lel.

1 Introducció teòrica

La llei de Hooke per a la torsió d'un fil o per a 1'enrotllament d'una molla en espiral, ens diu que el moment recuperador és proporcional a 1'angle girat:

$$M = -k\alpha \tag{1}$$

Per altra banda, sabem que aquest moment recuperador és precisament la variació per unitat de temps del moment angular del sòlid en què està aplicat:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\alpha \tag{2}$$

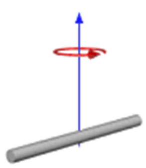
L'angle a obeeix, així, a 1'equació de 1'oscil·lador harmònic i té per solució:

$$\alpha(t) = A\sin\left(\sqrt{k/I}\,t + \delta_0\right) \tag{3}$$

El període d'oscil·lació serà, per tant:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{4}$$

A continuació recordarem les expressions per als moments d'inèrcia obtinguts per integració dels dos sòlids rígids amb els que treballarem:

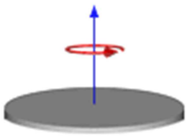


1.- Moment d'inèrcia d'un cilindre de longitud l, radi r i massa m a través d'un eix perpendicular al cilindre que passa pel seu CM:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}m\left(l^2 + 3r^2\right) \tag{5}$$

En el cas de que $l \gg r$, obtenim el moment d'inèrcia d'una vareta unidimensional través d'un eix perpendicular a la vareta que passa pel seu CM:

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ml^2 \tag{6}$$



2.- Moment d'inèrcia d'un cilindre de longitud l, radi r i massa m a través d'un eix paral·lel a l'eix del cilindre que passa pel seu CM:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m r^2 \tag{7}$$

Noteu que aquest moment d'inèrcia no depèn de la longitud del cilindre, per tant, el moment d'inèrcia d'un disc bidimensional a través d'un eix paral·lel a l'eix del disc que passa pel seu CM serà idèntic.

A més, recordem que el moment d'inèrcia respecte d'un eix que no passi pel centre de masses del cos està relacionat amb el calculat respecte d'un eix paral·lel que passi per l'esmentat centre mitjançant el teorema de Steiner o de l'eix paral•lel:

$$I = I_{CM} + md^2 \tag{8}$$

a on m és la massa del cos i d és distància de l'eix de gir al centre de masses.

2. Realització experimental

2.1 Llei de Hooke

En primer lloc determinarem la k de la molla mesurant el moment exercit sobre la barra metàl·lica. Per a cada angle es determinarà M a partir de la mesura de la força a 10, 20 i 30 cm de l'eix de gir. Les mesures es faran des de $-6\pi/2$ rad fins a $+6\pi/2$ rad en increments de $\pi/2$ rad. Es representaran gràficament els resultats i es determinarà la k de la molla per regressió lineal.

2.2 Moment d'inèrcia d'una barra.

Un cop determinada la k de la molla estem en disposició de determinar el I_{CM} de la mitjançant la equació (4). Aconseguirem això mesurant els períodes d'oscil·lació T respecte els centre de la barra amb l'ajut de la barrera fotoelèctrica. Les oscil·lacions han de ser preferentment d'amplitud propera a un quart de volta. Els valor final per a I_{CM} resultarà de l'anàlisi estadística (mitjana i dispersió) de 5 determinacions independents. Es compararan el valor d'I_{CM} obtingut amb el valor "teòric" per al moment d'inèrcia obtingut a partir de l'equació (5) (heu de mesurar les dimensions i la massa de la barra).

2.3 Moment d'inèrcia d'un disc. Teorema d'Steiner.

Igual que a l'apartat anterior determinarem del moment d'inèrcia I_{CM} en aquest cas del disc mitjançant la equació (4). Per mesurar el període de les oscil·lacions utilitzarem la barrera fotoelèctrica i "l'agulla indicadora" que està adherida al disc. Les oscil·lacions han de ser preferentment d'amplitud propera a un quart de volta. Els valor final resultarà de l'anàlisi estadística (mitjana i dispersió) de 5 determinacions independents. Es compararan el valor del moment d'inèrcia obtingut amb els valor obtinguts amb l'equacion (7) (heu de mesurar les dimensions i la massa del disc).
Finalment verificarem el teorema de Steiner per al disc, fixant el centre de gir en els diversos forats situats al llarg del seu radi. Com abans, procedirem a fer cinc determinacions de cada període, T, i el corresponent tractament estadístic. Fent la representació gràfica adient dels resultats es comprovarà el teorema d'Steiner tot i determinant els valors d'I_{CM} i m. Compararem aquests valors amb els obtinguts anteriorment.

3. Qüestions

1) **[1.5 punts]** Ompliu amb les magnituds corresponents i les seves incerteses, la taula següent :

	$d_1 = \quad \pm \quad cm$		$d_2 = \quad \pm \quad cm$		$d_3 = \quad \pm \quad cm$				
α (rad)	F_1 (N)	M_1 (Ncm)	F_2 (N)	M_2 (Ncm)	F_3 (N)	M_3 (Ncm)	$\langle M \rangle$ (Ncm)	σ_M (Ncm)	δM (Ncm)
-6 $\pi/2$									
-5 $\pi/2$									
-4 $\pi/2$									
-3 $\pi/2$									
-2 $\pi/2$									
- $\pi/2$									
+ $\pi/2$									
+2 $\pi/2$									
+3 $\pi/2$									
+4 $\pi/2$									
+5 $\pi/2$									
+6 $\pi/2$									

2) **[2 punts]** Representeu gràficament el valor del moment, <*M*>, mesurat a l'apartat anterior en funció de l'angle, α. Determineu la k de la molla amb la seva incertesa (Vigileu amb els signes del les forces i els moments).

3) **[1.5 punts]** Ompliu la taula següent:

	d (cm)	T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	T_4 (s)	T_5 (s)	$\langle T \rangle$ (s)	σ_T (s)	δT (s)	m (g)	δm (g)	l (cm)	δl (cm)	r (cm)	δr (cm)
Barra	**0**														
Disc	**0**														
	3														
	6														
	9														
	12														

4) **[2 punts]** Calculeu experimental i teòricament I_{CM} per a la barra i el disc amb les respectives incerteses. Son compatibles els resultats? És una bona aproximació considerar la barra metàl·lica com un cos unidimensional? I el disc com un cos bidimensional?

5) **[3 punts]** Representeu gràficament el moment d'inèrcia del disc, *I*, en funció de la distància de l'eix de rotació al centre de masses al quadrat, d^2. Feu l'ajust adient i valoreu si es verifica el teorema de Steiner utilitzant tota la informació proporcionada per l'ajust.