HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

Gliederung

Gliederung

Quanten Algorithmen

Wir haben schon viel über die wichtigsten Algorithmen gehört

- Shors-Algorithmus
- Grover-Algorithmus

Der HHL-Algorithmus

- erstellt von Aram Harrow, Avinatan Hassidim und Seht Lloyd
- lösen von sehr großen linearen Gleichungen

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Motivation

Es löst grundlegendes Probleme in der Mathematik

- Least square fitting
- Optimierungs Probleme
- Simulationen und Imageprocessing
- ...

Kleine Revolution insbesondere bei Quantum Machine Learning

- HHL als Subroutine oder in erweiterten Form benutzt
- Abschätzung mit Computern brauchen mind N Zeitschritte!

Das Problem

Gegeben:

- A Matrix der Form $n \times n$
- $\vec{b}$

Löse das System

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

HHL verspricht uns einen exponentiellen Speedup!!

Gliederung

Hermitsche Matrix

Sei:

- A eine $n \times n$ Matrix
- A^T das transponierte von A
- $\overline{A}$ das komplex konjugierter von A
- $A^\dagger$ die Hermitsche Matrix von A

Dann:

$$A = \overline{A^T} = A^\dagger$$

Hermitsche Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A^T} \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix} = A$$

Die Matrix $A^\dagger$ ist Hermitisch.

Hermitsche Matrix

Falls eines Matrix nicht Hermitisch ist:

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \hline A^{T} & 0 \end{pmatrix}$$

Spektralzerlegung

Sei:

- A eine $n \times n$ Matrix
- D ist eine Diagonalmatrix aus den Eigenwerten
- U besteht aus den Eigenvektoren von A

$$A = UDU^T$$

$$= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & ... & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ ... \\ U_n^T \end{bmatrix}$$

Spektralzerlegung

Dann:

$$A^{-1} = U^T D^{-1} U$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \dots \\ U_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{bmatrix}$$

- A^{-1} nur durch Eigenwerten und Eigenvektoren bestimmbar!
- Methode im klassischen nicht schneller
- für HHL Algorithmus sehr wichtig

Entangled States

Verschränkte Zustände können nicht durch einzelne Zustände dargestellt werden

$$|\Phi\rangle \neq |\phi\rangle\,|\psi\rangle$$

Entangled States

Beispiel

Verschränkt

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$$

$$= |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |1\rangle\,|+\rangle$$

Nicht Verschränkt

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$\neq |\alpha\rangle\,|\beta\rangle$$