HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

Gliederung

Gliederung

Einführung

Wir haben schon viel über die wichtigsten Algorithmen gehört

- Shors-Algorithmus
- Grover-Algorithmus

Einführung

Wir haben schon viel über die wichtigsten Algorithmen gehört

- Shors-Algorithmus
- Grover-Algorithmus

Der HHL-Algorithmus

- erstellt von Aram Harrow, Avinatan Hassidim und Seth Lloyd
- lösen von sehr großen linearen Gleichungen

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Motivation

Es löst grundlegendes Probleme in der Mathematik

- Least square fitting
- Optimierungs Probleme
- Simulationen und Imageprocessing
- ...

Das Problem

Gegeben:

- Matrix A der Form $n \times n$
- Vektor $\vec{b}$

Das Problem

Gegeben:

- Matrix A der Form $n \times n$
- Vektor $\vec{b}$

Löse das System:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Das Problem

Gegeben:

- Matrix A der Form $n \times n$
- Vektor $\vec{b}$

Löse das System:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Wir sind also daran interessiert das Inverse A^{-1} zu finden

Gliederung

Übersicht

Unser Ziel:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle$$

Übersicht

Unser Ziel:

$$|x\rangle = A^{-1}\,|b\rangle$$

Wenn $A = \overline{A^T} = A^\dagger$:

$$|x\rangle = e^{-iAt}\,|b\rangle$$

Übersicht

Unser Ziel:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle$$

Wenn $A = \overline{A^T} = A^\dagger$:

$$|x\rangle = e^{-iAt}|b\rangle$$

Wenn $A \neq A^\dagger$:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A^T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übersicht

Unser Ziel:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle$$

Wenn $A = \overline{A^T} = A^\dagger$:

$$|x\rangle = e^{-iAt}|b\rangle$$

Wenn $A \neq A^\dagger$:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A^T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können A diagonalisieren

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

$$\Rightarrow A^{-1} = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} U$$

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
   - löst verschränkte Qubits auf

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
   - löst verschränkte Qubits auf
5. Messung

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiert Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittelt Eigenwerte
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
   - löst verschränkte Qubits auf
5. Messung
   - liest das Ergebnis $|x\rangle$ aus

Gliederung

Einfaches Beispiel

Matrix A und Vektor $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einfaches Beispiel

Matrix A und Vektor $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Klassische Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeits Verhältnis der Lösung:

$$\frac{|x_0|^2}{|x_1|^2} = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{81}{64}} = \frac{1}{9}$$

Einfach Beispiel

Eigenvektoren von A sind:

$$\vec{u_0} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Einfach Beispiel

Eigenvektoren von A sind:

$$\vec{u_0} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Enkodiert

$$|u_0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2}} |1\rangle \qquad |u_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Einfach Beispiel

Eigenvon A sind:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3} \qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}$$

Einfach Beispiel

Eigenvon A sind:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3} \qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}$$

Enkodierungsschema:

$$\widetilde{\lambda_j} = N\lambda_j t/2\pi$$

Einfach Beispiel

Eigenvon A sind:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3} \qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}$$

Enkodierungsschema:

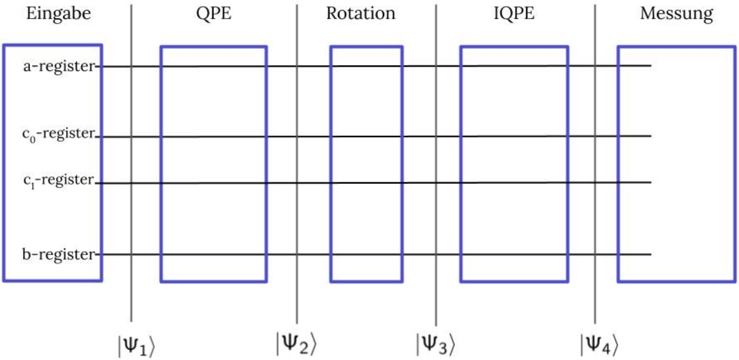
$$\widetilde{\lambda_j} = N\lambda_j t/2\pi$$

Einkodiert:

$$\widetilde{\lambda_0} = 1 \qquad \widetilde{\lambda_1} = 2$$

$$|\widetilde{\lambda_0}\rangle = |01\rangle \qquad |\widetilde{\lambda_1}\rangle = |10\rangle$$

Ablauf/Quantum Circuit



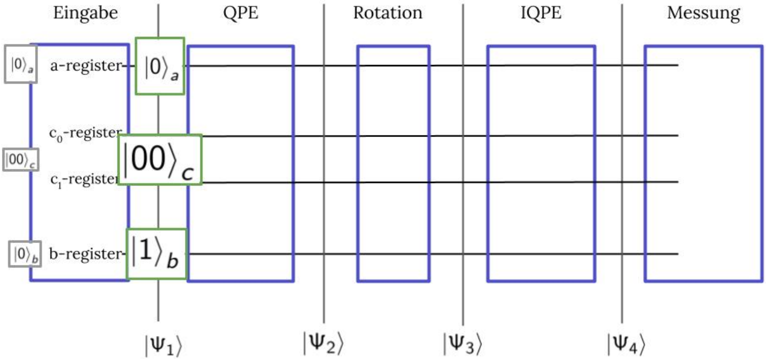
1. Anzahl Qubit for a-register: 1
2. Anzahl Qubits für das c-Register: N = 2
3. Anzahl Qubits für $\vec{b}$: $n_b = log_2(N) = log_2(2) = 1$

State Preparation

- $\vec{b}$ wird als Quantenzustand $|b\rangle$ kodiert
- in unserem Fall ist es sehr einfach

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |b\rangle = 0\,|0\rangle + 1\,|1\rangle = |1\rangle$$

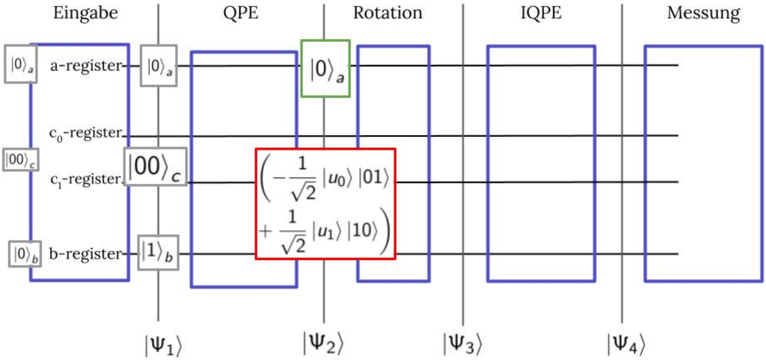
State Preparation



Wir starten im 1 Zustand

$$|\Psi_1\rangle = |1\rangle_b \; |00\rangle_c \; |0\rangle_a = |1000\rangle$$

Quantum Phase Estimation



Wir erhalten:

$$|\Psi_2\rangle = |b\rangle_b |\widetilde{\lambda}\rangle_c |0\rangle_a$$

$$|\Psi_2\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|u_0\rangle|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle|10\rangle\right)|0\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Wir rotieren das Ancilla Qubit:

$$|\Psi_3\rangle = \sum_{j=0}^{2^1-1} b_j \, |u_j\rangle \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\widetilde{\lambda}_j^2}} \, |0\rangle + \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j} \, |1\rangle \right)$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Wir rotieren das Ancilla Qubit:

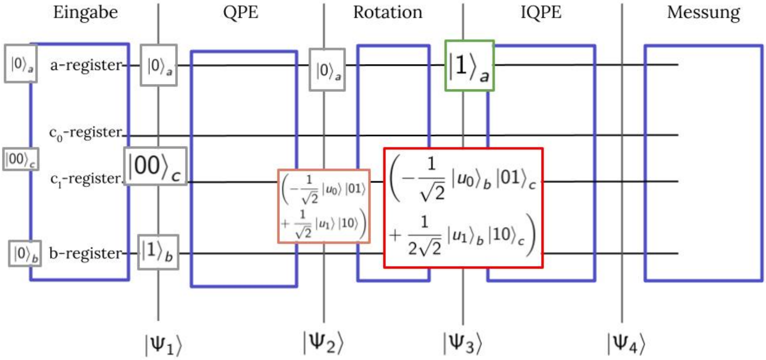
$$|\Psi_3\rangle = \sum_{j=0}^{2^1-1} b_j \,|u_j\rangle \,|\widetilde{\lambda}_j\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\widetilde{\lambda}_j^2}}\,|0\rangle + \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j}\,|1\rangle \right)$$

Wir gehen davon aus, dass wir $|1\rangle$ messen.

$$|\Psi_3\rangle = \sqrt{\frac{8}{5}} \left(\frac{1}{\widetilde{\lambda_0}} * -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_0\rangle_b\,|01\rangle_c + \frac{1}{\widetilde{\lambda_1}} * \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle_b\,|10\rangle_c \right) |1\rangle_a$$

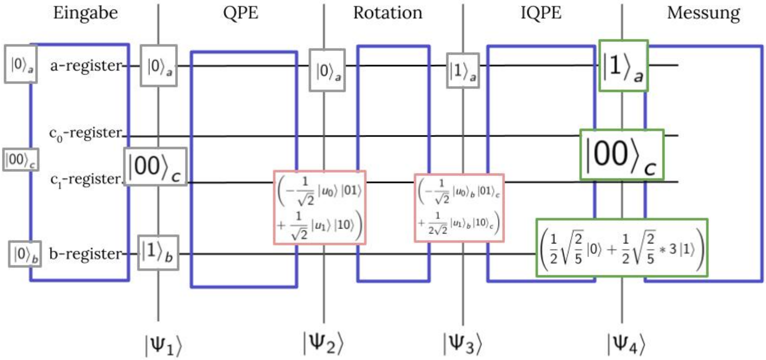
$$|\Psi_3\rangle = \sqrt{\frac{8}{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_0\rangle_b\,|01\rangle_c + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_1\rangle_b\,|10\rangle_c \right) |1\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren



$$|\Psi_3\rangle = \sqrt{\frac{8}{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|u_0\rangle|01\rangle|1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle|10\rangle\right)|1\rangle_a$$

Inverse Quantum Phase Estimation



Wir erhalten:

$$|\Psi_4\rangle = |x\rangle_b |00\rangle_c |1\rangle_a$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\left(|0\rangle + 3|1\rangle\right)|00\rangle_b |1\rangle_a$$

Messung

Um die Wahrscheinlichkeit von x_0 und x_1 zu erhalten, müssen wir ihre Koeffizienten quadrieren

$$Pr[x_0] = \left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 1 \right|^2 = \frac{1}{20}$$

$$Pr[x_1] = \left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 3 \right|^2 = \frac{9}{20}$$

Das Verhältnis im b-Register ist wie erwartet $1 : 9$.

Gliederung

Laufzeit

Gauß Verfahren

$$\mathcal{O}(N^3)$$

- nicht der schnellste Algorithmus
- gleiche constraints sind zu beachten!!

Laufzeit

Klassisch
Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa slog\left(\frac{1}{\epsilon}\right)N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

Quanten Version
HHL

Laufzeit

Klassisch
Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa s log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

Quanten Version
HHL

$$\mathcal{O}(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} logN)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(log(N))$$

Laufzeit

Klassisch
Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa s log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

- $N :=$ Anzahl an unbekannten
- $\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$: condition number

Quanten Version
HHL

$$\mathcal{O}(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} logN)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(log(N))$$

- $\epsilon :=$ Fehler des Ergebnisses
- $s :=$ s-sparse Matrix: jede Zeile hat max. s Einträge

Laufzeit

Klassisch

Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa s log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

Quanten Version

HHL

$$\mathcal{O}(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} log N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(log(N))$$

Laufzeit

Klassisch

Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa s log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

Quanten Version

HHL

$$\mathcal{O}(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} log N)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(log(N))$$

Takeaway

- exponentialer speed up $\mathcal{O}(N)$ vs $\mathcal{O}(log(N))$
- klassischer algorithmus hat bessere Fehlerabhängigkeit: $log(\frac{1}{\epsilon})$ vs $\frac{1}{\epsilon}$

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ

2. A muss s-sparse sein

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ
2. A muss s-sparse sein
3. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ
2. A muss s-sparse sein
3. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar
4. einfache Zustandsvorbereitung des Vektors $\vec{b}$ zum Quantenzustand $|b\rangle$

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ
2. A muss s-sparse sein
3. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar
4. einfache Zustandsvorbereitung des Vektors $\vec{b}$ zum Quantenzustand $|b\rangle$
5. Der Ressourcenbedarf ist hoch

Gliederung

Anwendungen

Hauptproblem

- Hauptproblem: gibt keinen vollständigen Vektor aus
- Aber einige Probleme können mit dieser Methode gelöst werden:

Anwendungen

Machine Learning: Least-Square-Fitting

- Datenanpassung mit Least Square Fitting
- durch Berechnung einer Schätzung der inversen Matrix

Anwendungen

Machine Learning: Least-Square-Fitting

- Datenanpassung mit Least Square Fitting
- durch Berechnung einer Schätzung der inversen Matrix

Simulationen von großen Systemen

- Elektrizitätsnetz vielen verbundenen Komponenten
- geringe Anzahl Verbindungen zwischen den Komponenten
- Berechnung des Widerstands durch approximation von Erwartungswerten

Anwendung in IT-Security

HHL in der IT-Security

- in erster Linie nur für Lösen von linearen Systemen
- nicht direkt mit IT-Security verbunden
- aber Potenzial als Subroutine angewendet zu werden

Anwendung in IT-Security

HHL in der IT-Security

- in erster Linie nur für Lösen von linearen Systemen
- nicht direkt mit IT-Security verbunden
- aber Potenzial als Subroutine angewendet zu werden

Mögliche Anwendungen

- secure multi-party computation
- zero-knowledge proofs
- big data analysis/pattern recognition (für Betrugserkennung)

Anwendung in IT-Security

HHL in der IT-Security

- in erster Linie nur für Lösen von linearen Systemen
- nicht direkt mit IT-Security verbunden
- aber Potenzial als Subroutine angewendet zu werden

Mögliche Anwendungen

- secure multi-party computation
- zero-knowledge proofs
- big data analysis/pattern recognition (für Betrugserkennung)

Es wäre wichtig, mehr Anwendungen zu finden, welche den Anforderungen entsprechen.

Optimierungen

Modifikationen und Optimierung

- QRAM zur Vorbereitung von $|b\rangle$

Optimierungen

Modifikationen und Optimierung

- QRAM zur Vorbereitung von $|b\rangle$
- kein Ancilla-Bit erforderlich unter bestimmten Voraussetzungen

Optimierungen

Modifikationen und Optimierung

- QRAM zur Vorbereitung von $|b\rangle$
- kein Ancilla-Bit erforderlich unter bestimmten Voraussetzungen
- Variable time amplitude amplification um condition number κ zu verbessern

Perspektive

- Großer Einfluss im Bereich Quantum Machine Learning

Perspektive

- Großer Einfluss im Bereich Quantum Machine Learning
- noch keine bahnbrechenden Anwendungen (wie z.B. Shors Algorithmus zum Brechen von RSA)

Perspektive

- Großer Einfluss im Bereich Quantum Machine Learning
- noch keine bahnbrechenden Anwendungen (wie z.B. Shors Algorithmus zum Brechen von RSA)
- aber viel aktive Forschung um neue Verbesserungen im Algorithmus zu finden

Perspektive

- Großer Einfluss im Bereich Quantum Machine Learning
- noch keine bahnbrechenden Anwendungen (wie z.B. Shors Algorithmus zum Brechen von RSA)
- aber viel aktive Forschung um neue Verbesserungen im Algorithmus zu finden
- zeigt deutlichen Fortschritt in der Quantencomputing Welt

Danke für Eure Aufmerksamkeit:)

Misc Folien

Übersicht

Man kann A auch in der Spektralzerlegung darstellen

$$A = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

- n_b ist die Länge $\vec{b}$
- λ_i sind Eigenwerte von A
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

$\vec{b}$ kann in der Eigenbasis von A dargestellt werden

$$\left|b\right\rangle = \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j \left|u_j\right\rangle$$

- b_i sind die koeffizienten von $\vec{b}$
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

Übersicht

Setzen wir nun alles ein:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1}|u_i\rangle\langle u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j|u_j\rangle\right)$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1}|u_i\rangle\langle u_i|\, b_j|u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j|u_i\rangle\langle u_i|u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j|u_i\rangle\,\delta_{ij}$$

Übersicht

Setzen wir nun alles ein (Fort.):

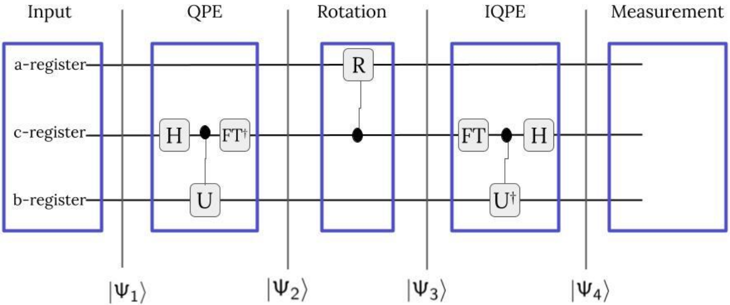
$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_i\rangle \, \delta_{ij}$$

$$|x\rangle = A^{-1} \, |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_j\rangle$$

Übersicht

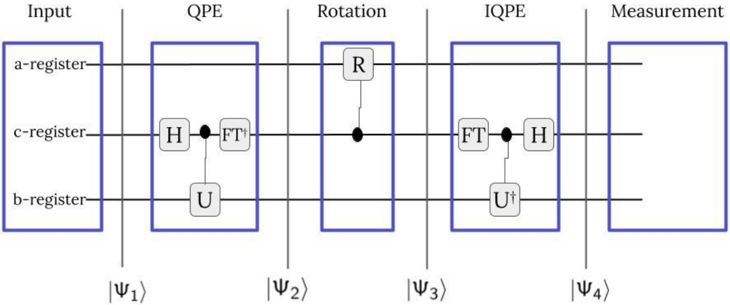
1. Ermittle die Eigenwerte und Eigenvektoren von A
2. bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Invertiert Eigenwerte
4. lies das Ergebnis $|x\rangle$ aus

Quantum Circuit



1. Ancilla (Helfer): a-register
   - Indikator qubit, zeigt ob Zustände verschränkt sind
2. Register: c-register
   - beinhaltet die Eigenwerte
3. Input: b-register
   - beinhaltet den Vektor $\vec{b}$

Quantum Circuit

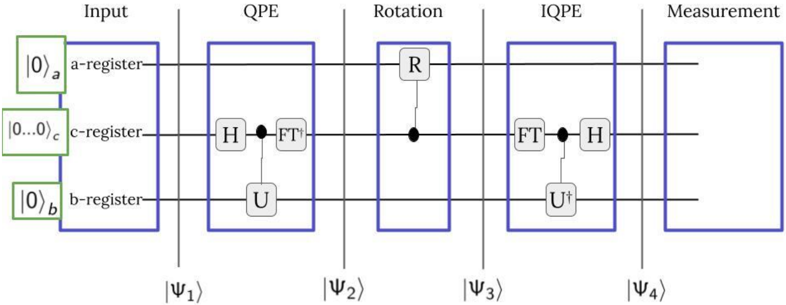


Wo befindet sich die Matrix A?

Da A hermitisch ist kann es als Unitary in die Phase Estimation enkodiert werden.

$$U = e^{iAt}$$

State Preparation



Wir starten im 0 Zustand

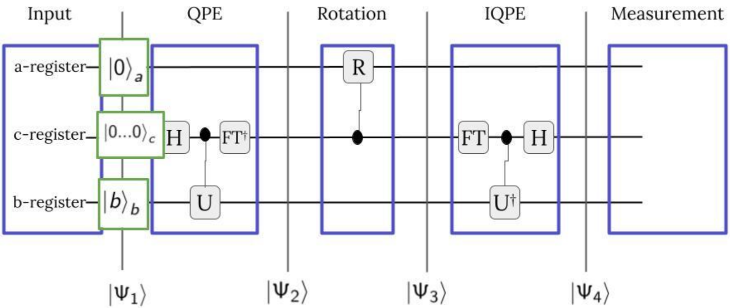
$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle_b \; |0\rangle_c \; |0\rangle_a$$

State Preparation

Nun werden wir $\vec{b}$ als Quantenzustand $|b\rangle$ kodieren, indem wir die Elementen von $\vec{b}$ den Amplituden von $|b\rangle$ zuordnen.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle + ... + b_n |n\rangle = |b\rangle$$

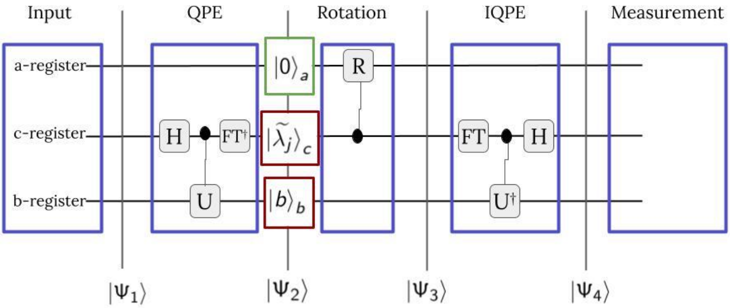
State Preparation



Dann erhalten wir:

$$|\Psi_1\rangle = |b\rangle_b \; |0...0\rangle_c \; |0\rangle_a$$

Quantum Phase Estimation



Wir wenden QPE an, um die Eigenwerte von A zu erhalten. Dann erhalten wir:

$$|\Psi_2\rangle = |b\rangle_b |\widetilde{\lambda_j}\rangle_c |0\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Rotation des Ancilla Bits

- Ancilla-Bit $|0\rangle_a$ wird anhand der Eigenwerte $|\widetilde{\lambda}_j\rangle$ rotiert
- hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit, da Operation nicht unitär

Ancilla-Qubit wird gemessen und kollabiert zu

1. $|0\rangle$: Ergebnis wird verworfen, Berechnung wird wiederholt
    - wir haben verschränkte Qubits
    - dies wird Amplitudenverstärkung genannt (wie Grover)
2. $|1\rangle$: Ergebnis wird akzeptiert

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Rotation des Ancilla Bits

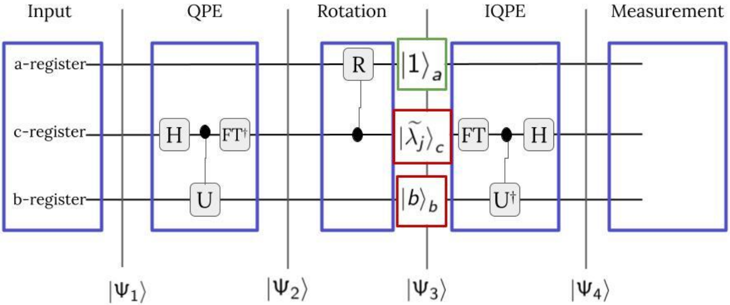
$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b |\widetilde{\lambda}\rangle_c \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\widetilde{\lambda}_j^2}} |0\rangle_a + \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j} |1\rangle_a \right)$$

Das a-Register befindet sich nun in einer Superposition und wir erhalten Inverse der Eigenwerte.

Gehen wir davon aus, dass unsere Ancilla-Qubit auf $|1\rangle$ kollabiert.

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b |\widetilde{\lambda}\rangle_c \widetilde{\lambda^{-1}} |1\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren



Dann erhalten wir:

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda}\rangle_c \, \widetilde{\lambda^{-1}} \, |1\rangle_a$$

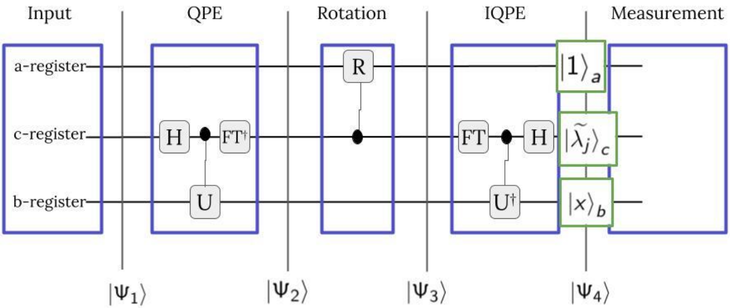
Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Uns fällt auf, dass wir schon sehr nah an unserem Ergebnis sind

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda}\rangle_c \, \widetilde{\lambda^{-1}} \, |1\rangle_a \qquad |x\rangle = A^{-1} |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_i \, |u_i\rangle$$

- Eigenwerte sind invertiert λ^{-1}.
- aber b-Register mit c-Register verschränkt
- müssen den Zustand auflösen
- alle bisherigen Schritte rückgäng machen (IQPE)

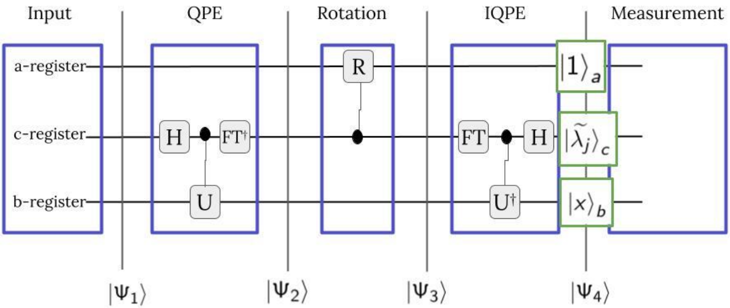
Inverse Quantum Phase Estimation



Dann erhalten wir:

$$|\Psi_4\rangle = |x\rangle_b \, |0...0\rangle_c \, |1\rangle_a$$

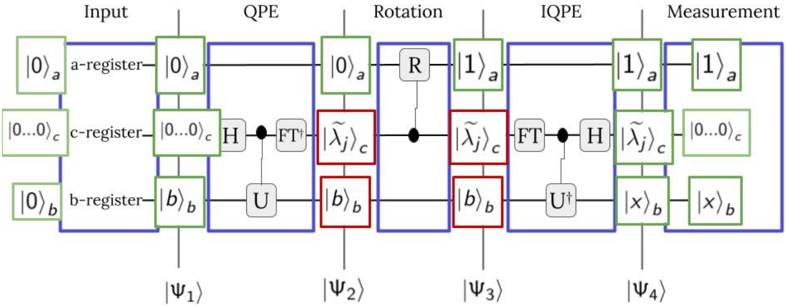
Measurment



- $|x\rangle_b$ kann nicht elemntweise ausgelesen werden
- können Informationen durch eine Messung M ermittlen

$$E(x) := \langle x| M |x\rangle$$

Überblick



Unsere gesamtes Vorgehen

Enkodierung von Eigenwert

Eigenvektoren von A sind:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3} \qquad \lambda_1 = \frac{4}{3}$$

Enkodierung

$$N = 4$$

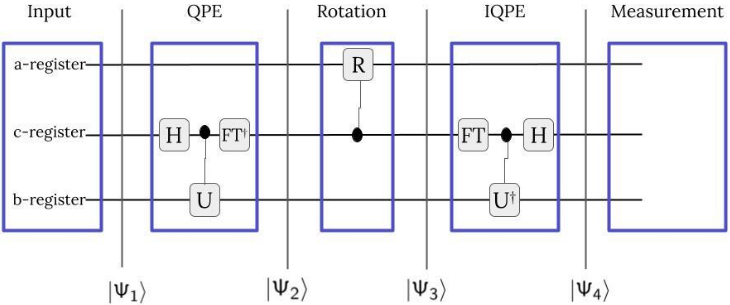
$$\widetilde{\lambda_j} = N\lambda_j t/2\pi \qquad t = 3\pi/4$$

Einkodiert

$$\widetilde{\lambda_0} = \frac{4 * \frac{2}{3} * \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = \frac{4 * 2 * 3\pi}{3 * 4 * 2\pi} = 1 \qquad \widetilde{\lambda_1} = \frac{4 * \frac{4}{3} * \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = \frac{4 * 4 * 3\pi}{3 * 4 * 2\pi} = 2$$

$$|\widetilde{\lambda_0}\rangle = |01\rangle \qquad |\widetilde{\lambda_1}\rangle = |10\rangle$$

Quantum Circuit



1. Ancilla (Helfer): a-register
   - Indikator qubit, zeigt ob Zustände verschränkt sind
2. Register: c-register
   - beinhaltet die Eigenwerte
3. Input: b-register
   - beinhaltet den Vektor $\vec{b}$

Inverse Quantum Phase Estimation

Wir führen IQPE aus:

$$|x\rangle_b = A^{-1}|b\rangle = \sum_{i=0}^{2^1-1} \lambda_i^{-1} b_i |u_i\rangle$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{5}}\left(-\frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}|u_0\rangle + \frac{1}{\frac{4}{3}\sqrt{2}}|u_1\rangle\right)|00\rangle_b |1\rangle_a$$

Wir erinnern uns an unsere Eigenvektoren:

- $|u_0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- $|u_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

$$|\Psi_4\rangle = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}|0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 3|1\rangle\right)|00\rangle_b |1\rangle_a$$

Einschränkungen

1. niedrige condition number (es ist außerdem nicht einfach κ im vorhinein zu ermitteln)
2. muss s-sparse sein
3. einfache Zustandsvorbereitung des Vektors $\vec{b}$ zum Quantenzustand $|b\rangle$
    - wenn man $|b\rangle$ klassisch lesen/schreiben muss, ist der Geschwindigkeitsgewinn weg, da $|b\rangle$ N Einträge hat$\rightarrow$ qram
4. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar
    - Nachbearbeitung muss erfolgen
    - nur $log_2(n)$ Qubits -¿ nur eine Näherung
    - statistische Informationen möglich (Verhältnis, Bereiche großer Einträge, ...)
5. Der Ressourcenbedarf sehr hoch
    - Shors Algorithmus ist dem HHL-Algorithmus sehr ähnlich (aufgrund von QPE)
    - untere Grenze von 4000 logischen Qubits (2048bit RSA)
    - d.h. millionen physikalischer Qubits (für Fehlerkorrektur)