

HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

Gliederung

Evaluierung

- Laufzeit

- Laufzeit

- Einschränkungen

Gliederung

Evaluierung

- Laufzeit

- Laufzeit

- Einschränkungen

Gauß Verfahren

$$\mathcal{O}(N^3)$$

- ▶ nicht der schnellste Algorithmus
- ▶ selben constraints sind zu beachten!!

Classical

Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}(\kappa s \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) N)$$

- ▶ $N :=$ is number of variables in linear system
- ▶ $\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$: condition number

Quanten Version

HHL

$$\mathcal{O}\left(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} \log N\right)$$

- ▶ $\epsilon :=$ is the accuracy
- ▶ $s :=$ is s-sparse matrix: each row has at most s nonzero entries

Laufzeit

Classical

Conjugate gradient descent

$$\mathcal{O}\left(\kappa s \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) N\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(N)$$

Quanten Version

HHL

$$\mathcal{O}\left(\frac{\kappa^2 s^2}{\epsilon} \log N\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(\log(N))$$

Takeaway

- ▶ exponential speed up $\mathcal{O}(N)$ vs $\mathcal{O}(\log(N))$
- ▶ klassischer algorithmus hat bessere Fehlerabhängigkeit:
 $\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ vs $\frac{1}{\epsilon}$

Einschränkungen

1. einfache Zustandsvorbereitung des Vektors \vec{b} zum Quantenzustand $|b\rangle$
2. niedrige condition number κ
3. und muss s-sparse sein
4. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar
5. Der Ressourcenbedarf sehr hoch

Einschränkungen

1. niedrige condition number κ
2. muss s-sparse sein
3. einfache Zustandsvorbereitung des Vektors \vec{b} zum Quantenzustand $|b\rangle$
 - ▶ wenn man $|b\rangle$ klassisch lesen/schreiben muss, ist der Geschwindigkeitsgewinn weg, da $|b\rangle$ N Einträge hat \rightarrow qram
4. nicht jeder Eintrag von $|x\rangle$ auslesbar
 - ▶ Nachbearbeitung muss erfolgen
 - ▶ nur $\log_2(n)$ Qubits - $\hat{=}$ nur eine Näherung
 - ▶ statistische Informationen möglich (Verhältnis, Bereiche großer Einträge, ...)
5. Der Ressourcenbedarf sehr hoch
 - ▶ Shors Algorithmus ist dem HHL-Algorithmus sehr ähnlich (aufgrund von QPE)
 - ▶ untere Grenze von 4000 logischen Qubits (2048bit RSA)
 - ▶ d.h. millionen physikalischer Qubits (für Fehlerkorrektur)

Was das

Ablauf

1. State Preparation
 - ▶ Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
 - ▶ ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
 - ▶ bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Ancilla Bit Rotation - Invertieren der Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
5. Messung