# HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

# Gliederung

# Gliederung

# Einfaches Beispiel

Matrix $A$ und Vektor $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Klassisch Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Verhältnis der Lösung:

$$\frac{|x_0|^2}{|x_1|^2} = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{81}{64}} = \frac{1}{9}$$

# Einfach Beispiel

Eigenvektoren von $A$ sind:

$$\vec{u_0} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$|u_0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$|u_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

# Einfach Beispiel

Eigenvektoren enkodiert in die Quanten Version

$$\widetilde{\lambda_j} = N\lambda_j t/2\pi$$

$$N = 4$$

$$t = 3\pi/4$$

Eigenvektoren von $A$ sind:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3}$$

$$\widetilde{\lambda_0} = \frac{4 * \frac{2}{3} * \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = \frac{4 * 2 * 3\pi}{3 * 4 * 2\pi} = 1$$

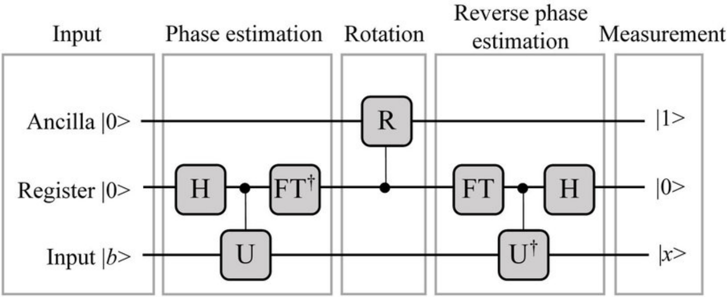
$$|\widetilde{\lambda_0}\rangle = |01\rangle$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}$$

$$\widetilde{\lambda_1} = \frac{4 * \frac{4}{3} * \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = \frac{4 * 4 * 3\pi}{3 * 4 * 2\pi} = 2$$

$$|\widetilde{\lambda_1}\rangle = |10\rangle$$

# State Preparation



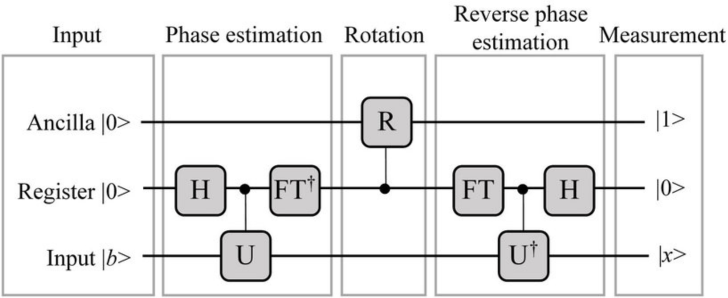

1. Anzahl Qubit for a-register: 1
2. Anzahl Qubits für das c-Register: N = 2
3. Anzahl Qubits für $\vec{b}$: $n_b = log_2(N) = log_2(2) = 1$

# State Preparation

- $\vec{b}$ wird als Quantenzustand $|b\rangle$ kodiert
- in unserem Fall ist es sehr einfach

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |b\rangle = 0\,|0\rangle + 1\,|1\rangle = |1\rangle$$

# State Preparation




Wir starten im 1 Zustand

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle_b \; |00\rangle_c \; |0\rangle_a = |1000\rangle$$

# Quantum Phase Estimation

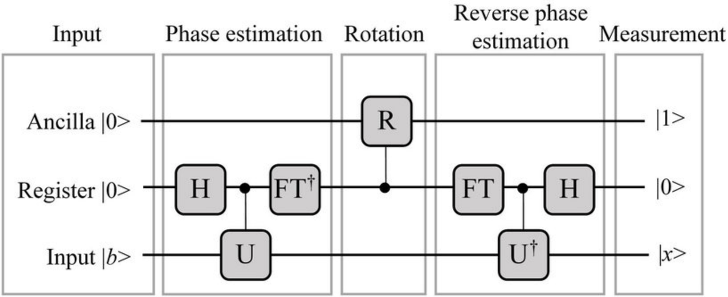
Wir führen QPE aus:

$$|\Psi_2\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle_c \, |0\rangle_a = \sum_{j=0}^{2^1-1} b_j \, |u_j\rangle \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle \, |0\rangle$$

$$= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \, |u_0\rangle \, |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \, |u_1\rangle \, |10\rangle \right) |0\rangle$$

- b-register encodes $|b\rangle$ in eigenbasis of A: $|u_0\rangle$ or $|u_1\rangle$
- c-register: eigenvalues $|\widetilde{\lambda}_0>$ and $|\widetilde{\lambda}_1>$ encoded as \$$ket$01 and $|10\rangle$
- a-register: ancilla qubit $|0\rangle$
- and its respective eigenvalues: $b_0 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ and $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

# Quantum Phase Estimation




Wir erhalten:

$$|\Psi_2\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}|u_0\rangle|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle|10\rangle\right)|0\rangle$$

# Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

$$\sum_{j=0}^{2^1-1} b_j \left|u_j\right\rangle \left|\widetilde{\lambda}_j\right\rangle \left(\sqrt{1-\frac{C^2}{\widetilde{\lambda}_j^2}}\left|0\right\rangle + \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j}\left|1\right\rangle\right)$$

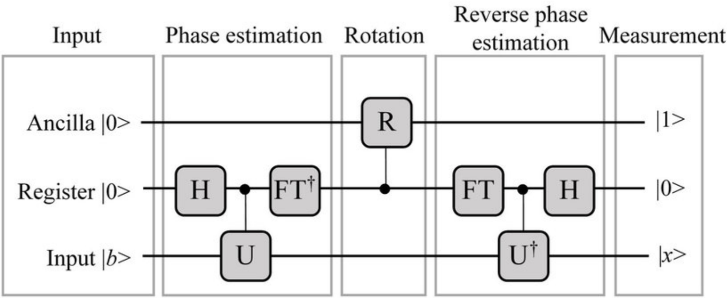
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_0\right\rangle\left|01\right\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{1^2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{1}\left|1\right\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_1\right\rangle\left|10\right\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}\left|0\right\rangle +\right.$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_0\right\rangle\left|01\right\rangle\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_1\right\rangle\left|10\right\rangle\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|1\right\rangle\right)$$

Lets say we measure $\left|1\right\rangle$ in the ancilla qubit, then:

$$= \sqrt{\frac{8}{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|u_0\right\rangle\left|01\right\rangle\left|1\right\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_1\right\rangle\left|10\right\rangle\right)\left|1\right\rangle$$

# Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren




$$= \sqrt{\frac{8}{5}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \left| u_0 \right\rangle \left| 01 \right\rangle \left| 1 \right\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left| u_1 \right\rangle \left| 10 \right\rangle \right) \left| 1 \right\rangle$$

# Inverse Quantum Phase Estimation

$$= |x\rangle_b |00\rangle_c |1\rangle_a$$

$$|x\rangle_b = A^{-1}|b\rangle = \sum_{i=0}^{2^1-1} \lambda_i^{-1} b_i |u_i\rangle$$

$$= \lambda_0^{-1} b_0 \ |u_0\rangle + \lambda_1^{-1} b_1 |u_1\rangle$$

$$= -\frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} |u_0\rangle + \frac{1}{\frac{4}{3}\sqrt{2}} |u_1\rangle$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{5}} \left( -\frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} |u_0\rangle + \frac{1}{\frac{4}{3}\sqrt{2}} |u_1\rangle \right) |00\rangle |1\rangle$$

# Inverse Quantum Phase Estimation

Wegen Normalisierung der Eigenvektoren können wir

- $|u_0\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2}} |1\rangle$
- $|u_1\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \left(|0\rangle + 3\,|1\rangle\right) |00\rangle\,|1\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 3\,|1\rangle\right) |00\rangle\,|1\rangle$$

# Measurment

Um die Wahrscheinlichkeit von $|u_0\rangle$ und $|u_1\rangle$ zu erhalten, müssen wir ihre Koeffizienten quadrieren

$$c_0 = \left|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 1\right|^2 = \frac{1}{20}$$

$$c_1 = \left|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} * 3\right|^2 = \frac{9}{20}$$

Das Verhältnis im b-Register ist wie erwartet $1 : 9$.

# Was das

**Ablauf**

1. State Preparation
   - Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
   - bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis $A$ ab
3. Ancilla Bit Rotation - Invertieren der Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
5. Messung