HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

Gliederung

Gliederung

Übersicht

Vergleich klassische zur quanten Version

Klassisch	Quanten Version
$A\vec{x} = \vec{b}$	$A\left\vert x\right\rangle = \left\vert b\right\rangle$
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$	$\left\vert x\right\rangle = A^{-1}\left\vert b\right\rangle$

Übersicht

A kann man auch in der Spektralzerlegung darstellen

$$A = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

- λ_i sind Eigenwerte von A
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

$\vec{b}$ kann in der Eigenbasis von A dargestellt werden

$$\left|b\right\rangle = \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j \left|u_j\right\rangle$$

- b_i sind die koeffizienten von $\vec{b}$
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

Übersicht

Setzen wir nun alles ein:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} |u_i\rangle \langle u_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j |u_j\rangle\right)$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} |u_i\rangle \langle u_i| b_j |u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j |u_i\rangle \langle u_i|u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j |u_i\rangle \delta_{ij}$$

Übersicht

Setzen wir nun alles ein (Fort.):

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_i\rangle \, \delta_{ij}$$

$$|x\rangle = A^{-1} \, |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_j\rangle$$

$$|x\rangle = A^{-1} \, |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_j\rangle$$

Übersicht

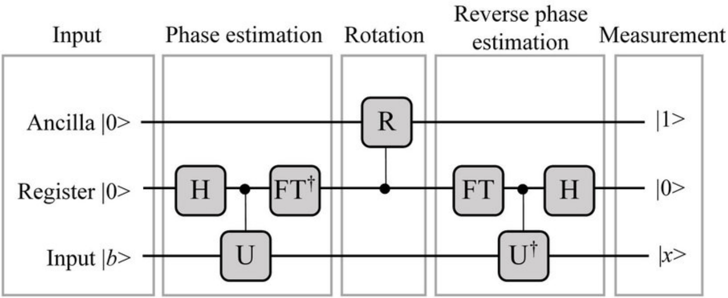
1. Ermittle die Eigenwerte und Eigenvektoren von A
2. bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Invertiert Eigenwerte
4. lies das Ergebnis $|x\rangle$ aus

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
   - bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
   - löst verschränkte Qubits auf
5. Messung
   - liest das Ergebnis $|x\rangle$ aus

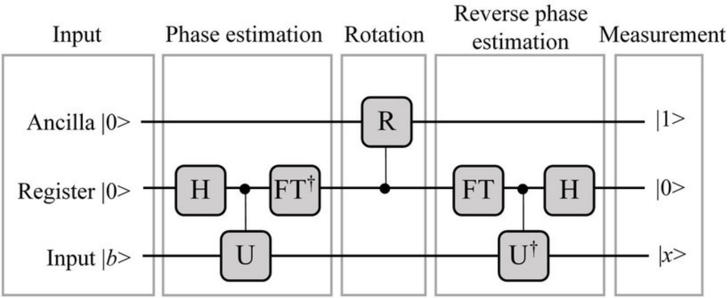
Quantum Circuit



1. Ancilla (Helfer): a-register
   - Indikator qubit - zeigt an ob Zustände verschränkt sind
2. Register: c-register
   - beinhaltet später die eigenwerte
3. Input: b-register
   - beinhaltet den Vektor $\vec{b}$

Quantum Circuit

Wo befindet sich die Matrix A?

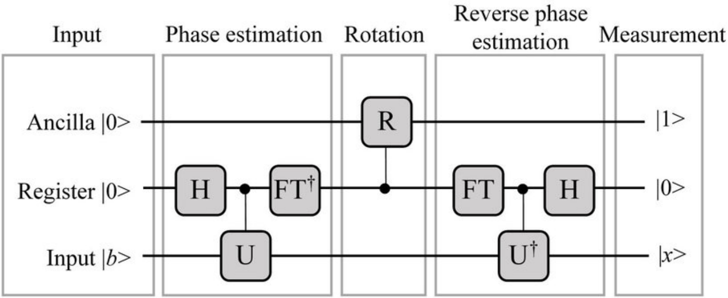


Wir als Unitary (Einheitsmatrix) in die Phase Estimation enkodiert.

$$U = e^{iAt}$$

State

Wo befindet sich die Matrix A?



Wir als Unitary (Einheitsmatrix) in die Phase Estimation enkodiert.

$$U = e^{iAt}$$

Was das

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
   - bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Ancilla Bit Rotation - Invertieren der Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
5. Messung