HHL - Algorithmus

Alfred Nguyen

Fakultät der Informatik
Technische Universität München
85758 Garching, Bavaria

June 2023

Gliederung

Gliederung

Übersicht

Vergleich klassische zur quanten Version

Klassisch	Quanten Version
$A\vec{x} = \vec{b}$	$A\left\|x\right\rangle = \left\|b\right\rangle$
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$	$\left\|x\right\rangle = A^{-1}\left\|b\right\rangle$

Übersicht

A kann man auch in der Spektralzerlegung darstellen

$$A = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} \left|u_i\right\rangle \left\langle u_i\right|$$

- λ_i sind Eigenwerte von A
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

$\vec{b}$ kann in der Eigenbasis von A dargestellt werden

$$\left|b\right\rangle = \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j \left|u_j\right\rangle$$

- b_i sind die koeffizienten von $\vec{b}$
- $\left|u_i\right\rangle$ sind Eigenvektoren von A

Übersicht

Setzen wir nun alles ein:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle = \left(\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} |u_i\rangle \langle u_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j |u_j\rangle\right)$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} |u_i\rangle \langle u_i| b_j |u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j |u_i\rangle \langle u_i|u_j\rangle$$

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j |u_i\rangle \delta_{ij}$$

Übersicht

Setzen wir nun alles ein (Fort.):

$$|x\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_i\rangle \, \delta_{ij}$$

$$|x\rangle = A^{-1} \, |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_j\rangle$$

$$|x\rangle = A^{-1} \, |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_j \, |u_j\rangle$$

Übersicht

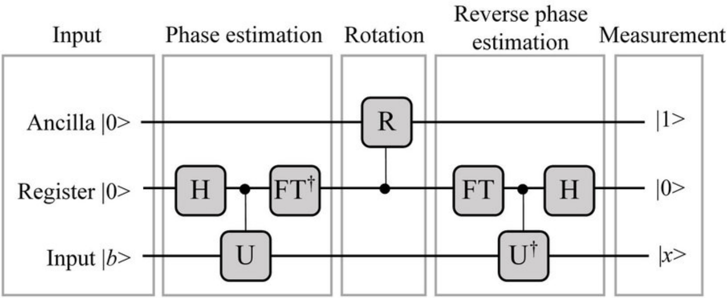
1. Ermittle die Eigenwerte und Eigenvektoren von A
2. bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Invertiert Eigenwerte
4. lies das Ergebnis $|x\rangle$ aus

Der Algorithmus

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
   - bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Ancilla Bit Rotation
   - Invertiert Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
   - löst verschränkte Qubits auf
5. Messung
   - liest das Ergebnis $|x\rangle$ aus

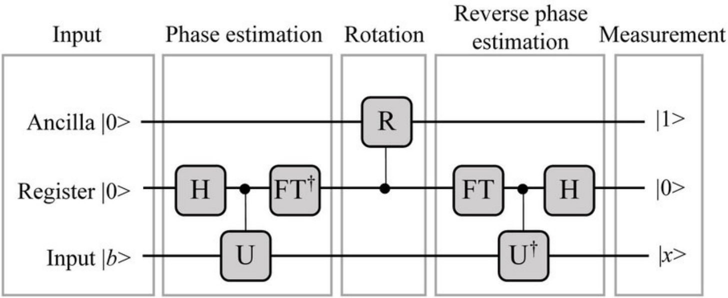
Quantum Circuit



1. Ancilla (Helfer): a-register
    - Indikator qubit - zeigt an ob Zustände verschränkt sind
2. Register: c-register
    - beinhaltet später die eigenwerte
3. Input: b-register
    - beinhaltet den Vektor $\vec{b}$

Quantum Circuit

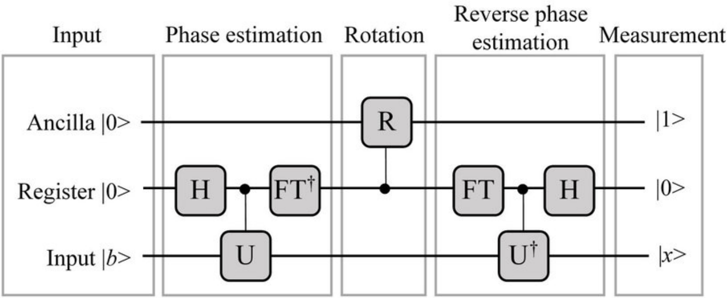
Wo befindet sich die Matrix A?



Wir als Unitary (Einheitsmatrix) in die Phase Estimation enkodiert.

$$U = e^{iAt}$$

Quantum Circuit



Wir starten im 0 Zustand

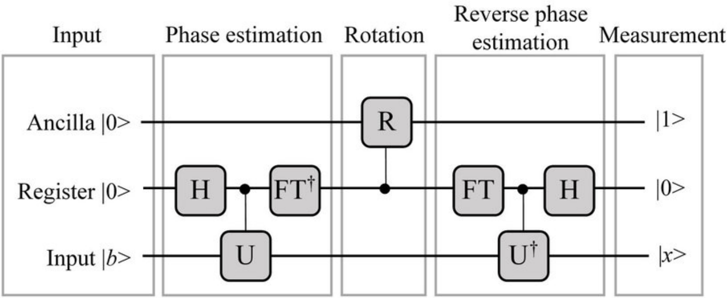
$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle_b \ |0\rangle_c \ |0\rangle_a$$

State Preparation

Nun werden wir $\vec{b}$ als Quantenzustand $|b\rangle$ kodieren, indem wir die Elementen von $\vec{b}$ den Amplituden von $|b\rangle$ zuordnen.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle + ... + b_n |n\rangle = |b\rangle$$

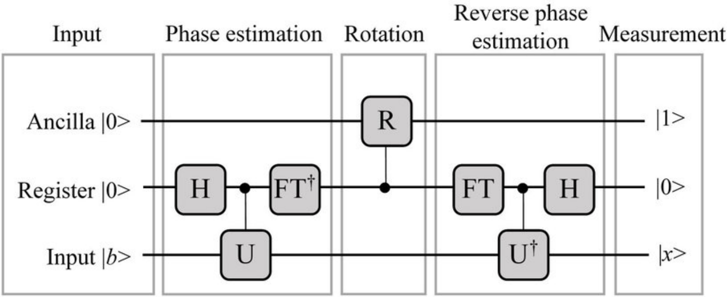
State Preparation



Dann erhalten wir:

$$|\Psi_1\rangle = |b\rangle_b \ |0...0\rangle_c \ |0\rangle_a$$

Quantum Phase Estimation



Wir wenden QPE an, um die Eigenwerte von A zu erhalten. Dann erhalten wir:

$$|\Psi_2\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda_j}\rangle_c \, |0\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Rotation des Ancilla Bits

- Ancilla-Bit $|0\rangle_a$ wird anhand der Eigenwerte $|\widetilde{\lambda}_j\rangle$ rotiert
- hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit, da Operation nicht unitär

Ancilla-Qubit wird gemessen und kollabiert zu

1. $|0\rangle$: Ergebnis wird verworfen, Berechnung wird wiederholt
   - wir haben verschränkte Qubits
   - dies wird Amplitudenverstärkung genannt (wie Grover)
2. $|1\rangle$: Ergebnis wird akzeptiert

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Rotation des Ancilla Bits

$$|\Psi_3\rangle = \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j \, |u\rangle_j \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{C^2}{\widetilde{\lambda}_j^2}} \, |0\rangle_a + \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j} \, |1\rangle_a \right)$$

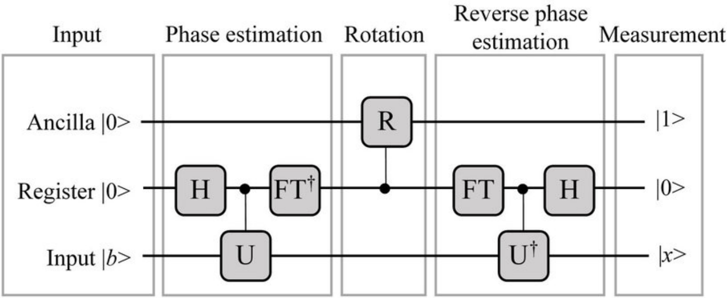
$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle_c \, |??\rangle_a$$

Gehen wir davon aus, dass unsere Ancilla-Qubit auf $|1\rangle$ kollabiert.

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} |\frac{b_j C}{\widetilde{\lambda}_j}|^2}} \sum_{j=0}^{2^{n_b}-1} b_j \, |u_j\rangle \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle \, \frac{C}{\widetilde{\lambda}_j} \, |1\rangle_a$$

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda}_j\rangle_c \, \widetilde{\lambda^{-1}} \, |1\rangle_a$$

Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren



Dann erhalten wir:

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b \, |\widetilde{\lambda_j}\rangle_c \, \widetilde{\lambda^{-1}} \, |1\rangle_a$$

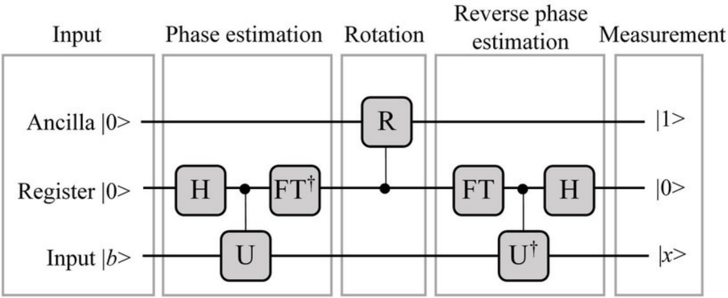
Ancilla Roation - Eigenwerte invertieren

Uns fällt auf, dass wir schon sehr nah an unserem Ergebnis sind

$$|\Psi_3\rangle = |b\rangle_b |\widetilde{\lambda_j}\rangle_c \widetilde{\lambda^{-1}} |1\rangle_a \qquad |x\rangle = A^{-1} |b\rangle = \sum_{i=0}^{2^{n_b}-1} \lambda_i^{-1} b_i |u_i\rangle$$

- Eigenwerte sind invertiert.
- aber b-Register mit c-Register verschränkt, $|\widetilde{\lambda_j}\rangle$.
- müssen den Zustand auflösen (alle bisherigen Schritte rückgäng machen)

Inverse Quantum Phase Estimation



Dann erhalten wir:

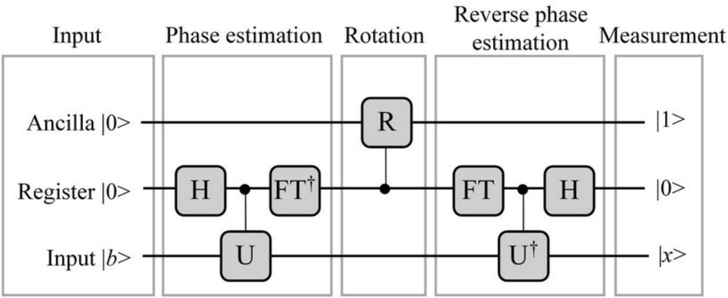
$$|\Psi_4\rangle = |x\rangle_b \, |0 \ldots 0\rangle_c \, |1\rangle_a$$

Measurment

- $|x\rangle_b$ kann nicht ausgelesen werden, da nur $log_2(n)$ Einträge
- können Erwartungswert durch Messungen M ermitteln

$$E(x) := \langle x| M |x\rangle$$

Measurment



Dann erhalten wir:

$$|x\rangle \Rightarrow E(x) = \langle x| \, M \, |x\rangle$$

Was das

Ablauf

1. State Preparation
   - Enkodiere Vektor und Matrix in Quanten Computer
2. Quantum Phase Estimation
   - ermittle Eigenwerte und Eigenvektoren
   - bilde $|b\rangle$ in Eigenbasis A ab
3. Ancilla Bit Rotation - Invertieren der Eigenwerte
4. Inverse Quantum Phase Estimation
5. Messung