Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

Mihir, Noah, Alfred

June 30, 2022

Contents

1 Kontinuierliche Zufallsvariablen

1.1 Definition 79

Eine kontinuierliche oder auch stetige Zufallsvariable X und ihr zugrunde liegender kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitsraum sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion)
$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft
$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

1.1.1 Verteilungsfunktion:

$F_X(x) := Pr[X \leq x] = Pr[\{t \in R | t \leq x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

1.2 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

1.2.1 σ-Algebren

1. Definition 82 Sei Ω eine Menge. Eine Menge $A \subseteq P(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

   - (E1) $\Omega \in A$.
   - (E2) Wenn $A \in A$, dann folgt $\bar{A} \in A$.
   - (E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in A$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$

1.2.2 1.3.2 Kolmogorov-Axiome

Sei Ω eine beliebige Menge und A eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung
$Pr[.] : A \to [0, 1]$
heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf A, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (W1) $Pr[\Omega] = 1$

- (W2) A1, A2, . . . seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt $Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$

1.2.3 Lemma 84

Sei (Ω, A, Pr) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, ..., A_n$ gilt

- $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1Pr[A]$
- Wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$.
- Bei paarweisen disjunkten Ereignissen A,B gilt $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$

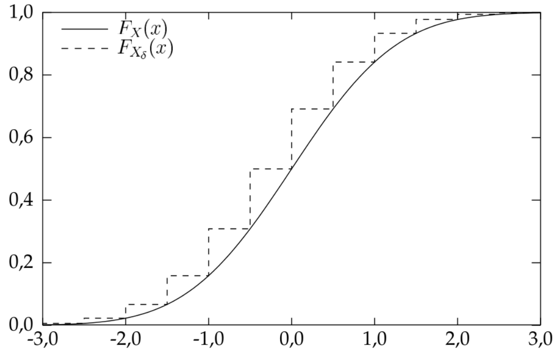
1.3 Rechnen mit Kontinuierlichen Zufallsvariablen

1.3.1 1.4.1 Funktionen kontinuierlicher Zufallsvariablen

Sei $Y := g(X)$ mit einer Funktion $g : R \to R$.
Die Verteilung von Y erhalten wir durch
$F_Y(y) = Pr[Y \leq y] = Pr[g(X) \leq y] = \int_C f_X(t)dt$
Hierbei bezeichnet $C := t \in R | g(t) \leq y$

1.3.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Wir können aus einer kontinuierlichen Zufallsvariable X leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes $\delta > 0$ definieren
$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[$ für $n \in \mathbb{Z}$.
Für X$_\delta$ gilt
$Pr[X_\delta = n_\delta] = F_X((n+1)\delta)F_X(n\delta)$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an.

1.3.3 Erwartungswert und Varianz:

- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t * f_X(t)dt$ sofern $\int_{-\infty}^{\infty} |t| * f_X(t)dt$ endlich ist
- $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E[X])^2 * f_X(t)dt$ sofern $E[(X - E[X])^2]$ existiert

Für $Y = g(X)$ gilt:
$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) * f_X(t)dt$

2 Wichtige Stetige Verteilungen

2.1 Gleichverteilung

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & sonst \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$
$Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$

2.2 Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = R$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) =: \varphi(x;\mu,\sigma)$
In Zeichen schreiben wir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x;0,1)$ kürzen wir $\varphi(x)$ ab

2.2.1 Verteilungsfunktion:

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2})dt =: \Phi(x;\mu,\sigma)$

2.2.2 Satz 93 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges
$a \in \mathbb{R}\backslash 0$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

2.2.3 Satz 94

X sei $N(0,1)$ -verteilt. Dann gilt $E[X] = 0$ und $Var[X] = 1$.

2.2.4 Satz 95

X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann gilt $E[X] = \mu$ und $Var[X] = \sigma^2$.

2.3 2.3 Exponentialverteilung

$f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$
$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

2.3.1 Satz 97 (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Wenn X exponentialvertielt ist mit λ, so ist auch $Y = aX$ mit $a > 0$ exponentialvertielt mit Parameter λ/a

2.4 Satz 98 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass
$Pr[X > x + y|X > y] = Pr[X > x]$

3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

3.1 Mehrdimensionale Dichten

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx\ dy = 1$

3.1.1 Randverteilung

$F_X(x) = Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)dv]du$
analog
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v)dv$

3.1.2 Unabhängigkeit

$Pr[X \leq x, Y \leq y] = Pr[X \leq x] * Pr[Y \leq y]$
gleichbedeutend
$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) * F_Y(y)$
Differentiation ergibt
$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) * f_Y(y)$

3.2 3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann ist auch $X := min\{X_1, ..., X_n\}$ exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda_1 + ... + \lambda_n$.

3.3 Poisson-Prozess

- Wenn der zeitliche Abstand der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist ihre Anzahl in einer festen Zeitspanne binomialverteilt.
- Wenn man Ereignisse zählt, deren zeitlicher Abstand exponentialverteilt ist, so ist die Anzahl dieser Ereignisse in einer festen Zeitspanne Poisson-verteilt.

3.4 Summen von Zufallsvariablen

Seien X und Y unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen. Für die Dichte von $Z := X + Y$ gilt
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) * f_Y(zx)dx$

3.4.1 Satz 106 (Additivit¨at der Normalverteilung)

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern $\mu_i, \sigma_i (1 \leq i \leq n)$
Es gilt: Die Zufallsvariable
$Z := a_1X_1 + ... + a_nX_n$
ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$ und Varianz $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$

3.5 3.5 Momenterzeugende Funktionen f¨ur kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen X haben wir die momenterzeugende Funktion $M_X(s) = E[e^{Xs}]$ eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für $M_X(s)$ gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.
$M_X^{(k)}(0) = E[X^k]$

4 Zentraler Grenzwertsatz

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, ..., n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$). Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Yn := X_1 + ... + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen
$Z_n := \frac{Y_n n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim N(0, 1)$ für $n \to \infty$