

# Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mihir Mahajan, Alfred Nguyen, Noah Kiefer Diaz

August 9, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>3</b>
1.1	Grundlagen . . . . .	3
1.1.1	Definition 1 . . . . .	3
1.1.2	Lemma 8 . . . . .	3
1.1.3	Satz 9 Siebformel . . . . .	4
1.1.4	Wahl der Wahrscheinlichkeiten . . . . .	4
1.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	4
1.2.1	Definition 12 . . . . .	4
1.2.2	Baba Beispiele . . . . .	5
1.2.3	Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) . . .	5
1.2.4	Satz 19 (Satz von Bayes) . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Unabhängigkeit</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>5</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	5
3.2	Erwartungswert und Varianz . . . . .	6
3.2.1	Definition 29 . . . . .	6
3.2.2	Satz 32 Monotonie des Erwartungswerts . . . . .	6
3.2.3	Rechenregeln für Erwartungswert . . . . .	6
3.2.4	Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Ver- sion) . . . . .	6
3.2.5	Satz 34 . . . . .	6
3.2.6	Satz 35 . . . . .	6
3.2.7	Satz 36 . . . . .	6
3.2.8	Varianz . . . . .	7
3.3	Mehrere Zufallsvariablen . . . . .	7
3.3.1	hypergeometrische Verteilung . . . . .	7

3.3.2	Gemeinsame Dichte . . . . .	7
3.3.3	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	8
3.3.4	Zusammengesetzte Zufallsvariablen . . . . .	8
3.3.5	Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Wichtige diskrete Verteilungen</b>	<b>8</b>
4.1	Bernoulli Verteilung . . . . .	8
4.2	Binomialverteilung . . . . .	9
4.2.1	Definition 55 . . . . .	9
4.2.2	Satz 56 . . . . .	9
4.3	5.3 Geometrische Verteilung . . . . .	9
4.3.1	Definition 57 . . . . .	9
4.3.2	Wegen gedächtnislosigkeit: . . . . .	9
4.3.3	Warten auf n-ten Erfolg . . . . .	10
4.4	Poisson-Verteilung . . . . .	10
4.4.1	5.4.1 Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung	10
4.4.2	Satz 59 . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>10</b>
5.1	Satz 60: Markov-Ungleichung . . . . .	10
5.2	Satz 61: Chebyshev-Ungleichung . . . . .	11
5.3	Satz 62: Gesetz der großen Zahlen . . . . .	11
5.3.1	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit . . . . .	11
5.4	Chernoff-Schranken . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Erzeugende Funktionen</b>	<b>11</b>
6.1	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion . . . . .	11
6.1.1	Satz 71 (Eindeutigkeit der w.e. Funktion) . . . . .	11
6.1.2	Bernoulliverteilung . . . . .	11
6.1.3	Binomialverteilung . . . . .	12
6.1.4	Geometrische Verteilung . . . . .	12
6.1.5	Poisson Verteilung . . . . .	12
6.2	Momenterzeugende Funktion . . . . .	12
6.2.1	Summe von Zufallsvariablen . . . . .	12
6.3	Zufällige Summen . . . . .	12
6.3.1	Satz 77 . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Formelsammlung</b>	<b>13</b>
7.1	Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen . . . . .	13
7.2	Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen . . . . .	13

## 1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

### 1.1 Grundlagen

#### 1.1.1 Definition 1

- Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine **Ergebnismenge**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  von Elementarereignissen gegeben
- Jedem Ereignis  $\omega_i$  ist eine Wahrscheinlichkeit  $0 \leq Pr[\omega_i] \leq 1$  zugeordnet  

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$$
- Die Menge  $E \subseteq \Omega$  heißt Ereignis.  $Pr[E] = \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$
- $\bar{E}$  ist komplement zu  $E$

Man kann standard Mengenoperationen auf Ereignisse machen, also bei Ereignissen  $A, B$  dann auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

#### 1.1.2 Lemma 8

Für Ereignisse  $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$  gilt

- $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
- Wenn  $A \subseteq B$  so folgt  $Pr[A] \leq Pr[B]$
- Additionssatz: Bei **paarweise disjunkten** Ereignissen gilt:  

$$Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$$
 Insbesondere gilt also:  

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$$
 Und für unendliche Menge von **disjunkten** Ereignissen:  

$$Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

### 1.1.3 Satz 9 Siebformel

Lemma 8, gilt nur für **disjunkte** Mengen. Das geht auch für nicht disjunkte!

1. Zwei Mengen  $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$
2. Drei Mengen  $Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] =$   
 $Pr[A_1] + Pr[A_2] + Pr[A_3]$   
 $- Pr[A_1 \cap A_2] - Pr[A_1 \cap A_3] - Pr[A_2 \cap A_3]$   
 $+ Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$
3. n Mengen Veranschaulichen an Venn-Diagramm
  - (a) Alle aufaddieren
  - (b) Paarweise schnitte subtrahieren
  - (c) Dreifache schnitte dazuaddieren
  - (d) 4- fache schritte subtrahieren
  - (e) ...
4. für nerds:  $Pr[\bigcup_{i=0}^n A_i] = \sum_{\emptyset \subset I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} Pr[\bigcap_{i \in I} A_i]$

### 1.1.4 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)): Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.  $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

## 1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

### 1.2.1 Definition 12

$A$  und  $B$  seien Ereignisse mit  $Pr[B] > 0$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $Pr[A|B]$  von  $A$  gegeben  $B$  ist definiert als:  $Pr[A|B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$

Umgangssprachlich:  $Pr[A|B]$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt wenn  $B$  eintritt.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $Pr[|B]$  bilden für ein beliebiges Ereignis  $B \subseteq \Omega$  mit  $Pr[B] > 0$  einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über  $\Omega$ .

### 1.2.2 Baba Beispiele

1. **TODO** Töchterproblem
2. **TODO** Ziegenproblem
3. **TODO** Geburtstagsproblem

### 1.2.3 Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt und es gelte  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B|A_i] * Pr[A_i]$$

analog für  $n \rightarrow \infty$

### 1.2.4 Satz 19 (Satz von Bayes)

Es seien  $A_1, \dots, A_n$  paarweise disjunkt, mit  $Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Außerdem sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $Pr[B] > 0$ . Dann gilt für beliebiges  $i \in [n]$

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] * Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n Pr[B|A_j] * Pr[A_j]}$$

## 2 Unabhängigkeit

Wenn das auftreten von Ereignissen unabhängig ist.

- $Pr[A \cap B] = Pr[A] * Pr[B]$
- $Pr[A|B] = Pr[A]$

## 3 Zufallsvariablen

### 3.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an "Auswirkungen" oder "Merkmalen" der (Elementarereignisse) interessiert

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge  $\Omega$  gegeben. Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow R$  heißt (numerische) Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable  $X$  über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt **diskret**

## 3.2 Erwartungswert und Varianz

### 3.2.1 Definition 29

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den **Erwartungswert**  $E[X]$  durch  $E[X] := \sum_{x \in W_X} x * Pr[X = x] = \sum x * f_X(x)$  sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| * Pr[X = x]$  konvergiert

### 3.2.2 Satz 32 Monotonie des Erwartungswerts

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $\omega$  mit  $X(\omega) \leq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt  $E[X] \leq E[Y]$   $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) * Pr[\omega] = E[Y]$

### 3.2.3 Rechenregeln für Erwartungswert

Oft betrachtet man eine Zufallsvariable  $X$  nicht direkt, sondern wendet noch eine Funktion darauf an:  $Y := f(X) = f \circ X$ , wobei  $f : D \rightarrow R$  eine beliebige Funktion sei mit  $W_X \subseteq D \subseteq R$ . Beobachtung:  $f(X)$  ist wieder eine Zufallsvariable.

### 3.2.4 Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in R$  gilt  $E[a * X + b] = a * E[X] + b$

### 3.2.5 Satz 34

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $W_x \subseteq \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$

### 3.2.6 Satz 35

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $A$  ein Ereignis mit  $Pr[A] > 0$ . Die **bedingte Zufallsvariable**  $X|A$  besitzt die Dichte:

$$f_{X|A}(x) := Pr[X = x|A] = \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]}$$

Die Definition ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_x} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_x} \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]} = 1$$

Somit ist  $E[X|A] = \sum_{x \in W_x} x * f_{X|A}(x)$

### 3.2.7 Satz 36

TODO

### 3.2.8 Varianz

1. Definition 38 Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $\mu = E[X]$  definieren wir die Varianz  $Var[X]$  durch
$$Var[X] := E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 * Pr[X = x]$$
Die Größe  $\sigma := \sqrt{Var[X]}$   
 $Var[X]$  heißt Standardabweichung von  $X$ .
2. Satz 39 Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  gilt
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
3. Satz 41 Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:
$$Var[a * X + b] = a^2 * Var[X]$$

### 3.3 Mehrere Zufallsvariablen

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind? Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art
$$Pr[X = x, Y = y] = Pr[\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y]$$

#### 3.3.1 hypergeometrische Verteilung

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte  $Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} * \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$

**hypergeometrisch verteilt.** Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem  $r$  Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit  $a + b$  mit  $b$  besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.

#### 3.3.2 Gemeinsame Dichte

Die Funktion

$f_{X,Y}(x, y) := Pr[X = x, Y = y]$  heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X,Y}$  kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y)$$

Die Funktionen  $f_X$  und  $f_Y$  nennt man Randdichten.

### 3.3.3 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

1. Definition 45 Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen unabhängig, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$  gilt:  
$$Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] * \dots * Pr[X_n = x_n]$$
  
Analog: Gesamte Dichte ist Produkt aus einzelnen Dichten. Analog: Gesamte Verteilung ist Produkt aus einzelnen Verteilungen.

### 3.3.4 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

1. Satz 49 Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei  $Z := X + Y$ . Es gilt  $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) * f_Y(z - x)$

### 3.3.5 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

1. Satz 50 (Linearität des Erwartungswerts) Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in R$  gilt  
$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$$
2. Satz 52 (Multiplikativität des Erwartungswerts) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt  $E[X_1 * \dots * X_n] = E[X_1] * \dots * E[X_n]$
3. Definition 53 Zu einem Ereignis  $A$  heißt die Zufallsvariable  
$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  
**Indikatorvariable** des Ereigniss  $A$

## 4 Wichtige diskrete Verteilungen

### 4.1 Bernoulli Verteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X = 0, 1$  und der Dichte  $f_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p & x = 0 \end{cases}$  heißt Bernoulli-verteilt. Den Parameter  $p$  nennen wir Erfolgswahrscheinlichkeit. Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen. Es gilt mit  $q := 1 - p$   $E[X] = p$  und  $Var[X] = pq$ , wegen  $E[X^2] = p$  und  $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2$ .



## 4.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung einer Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

### 4.2.1 Definition 55

Sei  $X := X_1 + \dots + X_n$  als Summe von  $n$  unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  definiert. Dann heißt  $X$  binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . In Zeichen schreiben wir  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$\Pr[X = k] = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}[X] = np$$

$$\text{Var}[X] = npq$$

### 4.2.2 Satz 56

Wenn  $X \sim \text{Bin}(n_x, p)$  und  $Y \sim \text{Bin}(n_y, p)$  unabhängig sind, dann gilt für  $Z := X + Y$ , dass  $Z \sim \text{Bin}(n_x + n_y, p)$ .

## 4.3 5.3 Geometrische Verteilung

Man betrachte ein Experiment, das so lange wiederholt wird, bis Erfolg eintritt. Gelingt ein einzelner Versuch mit Wahrscheinlichkeit  $p$ , so ist die Anzahl der Versuche bis zum Erfolg geometrisch verteilt.

### 4.3.1 Definition 57

Eine geometrisch verteilte Zufallsvariable  $X$  mit Parameter (Erfolgswahrscheinlichkeit)  $p \in (0, 1]$  und  $q := 1 - p$  hat die Dichte  $f_X(i) = pq^{i-1}$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{q}{p^2}$$

### 4.3.2 Wegen gedächtnislosigkeit:

$$\Pr[X = n + k | X > n] = \Pr[X = k]$$

$$\Pr[X > n + k | X > n] = \Pr[X > k]$$

### 4.3.3 Warten auf n-ten Erfolg

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} * p^n (1-p)^{z-n}$$

## 4.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung kann verwendet werden, um die Anzahl von Ereignissen zu modellieren, welche mit konstanter Rate und unabhängig voneinander in einem Zeitintervall auftreten. Eine Poisson-verteilte Zufallsvariable  $X$  mit dem Parameter  $\lambda \geq 0$  hat den Wertebereich  $W_X = \mathbb{N}_0$  und besitzt die Dichte  $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ .

Als Erwartungswert ergibt sich:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

Und für die Varianz:

$$\text{Var}[X] = \lambda$$

### 4.4.1 5.4.1 Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen  $X_n$  mit  $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ , wobei  $p_n = \lambda/n$ . Für ein beliebiges  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_n$  den Wert  $k$  annimmt gleich:

$$b(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!} * \frac{n^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Damit folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(k; n, p_n) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}$$

### 4.4.2 Satz 59

Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  und  $Y \sim \text{Po}(\mu)$ , dann gilt

$$Z := X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$$

## 5 Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

### 5.1 Satz 60: Markov-Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable die nur nicht negative Werte annimmt. Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $t > 0$ , dass

$$\text{Pr}[X > t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Äquivalent dazu:  $\text{Pr}[X > t \bullet \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$

## 5.2 Satz 61: Chebyshev-Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, und sei  $t \in \mathbb{R}$  mit  $t > 0$ . Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

Äquivalent dazu:  $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}] \leq 1/t^2$

## 5.3 Satz 62: Gesetz der großen Zahlen

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  & seien  $\epsilon, \delta > 0$  beliebig aber fest. Dann gilt für alle  $n \geq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon\delta^2}$

Sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie  $X$  und setzt man  $Z := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  so gilt  $\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \epsilon$

### 5.3.1 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

TODO: slide 161

## 5.4 Chernoff-Schranken

# 6 Erzeugende Funktionen

## 6.1 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$  ist die **wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion** definiert durch

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] * s^k = \mathbb{E}[s^X]$$

### 6.1.1 Satz 71 (Eindeutigkeit der w.e. Funktion)

Die Dichte und die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}$  sind durch ihre *wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion bestimmt*

### 6.1.2 Bernoulliverteilung

1. Für binäre zufallsvariable  $X$ :  $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = (1p) * s_0 + p * s_1 = 1 - p + ps$
2. Gleichverteilung auf  $0, \dots, n$  Dann gilt  $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} * s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{s - 1} (s_1)$

### 6.1.3 Binomialverteilung

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (1-p+ps)^n$$

### 6.1.4 Geometrische Verteilung

$$G_X(s) = E[s^X] = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

### 6.1.5 Poisson Verteilung

$$G_X(s) = E[s^X] = e^{\lambda(s-1)}$$

## 6.2 Momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Xs)^i}{i!}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!}\right]$$

und für Zufallsvariablen  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$

$$MX(s) = E[e^{Xs}] = E[(e^s)^X] = G_X(e^s)$$

### 6.2.1 Summe von Zufallsvariablen

Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und die Zufallsvariable

$Z := X_1 + \dots + X_n$  gilt

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) * \dots * G_{X_n}(s)$$

Ebenso gilt  $M_Z(s) = M_{X_1}(s) * \dots * M_{X_n}(s)$

## 6.3 Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass  $Z := X_1 + \dots + X_N$ , wobei  $N$  ebenfalls eine Zufallsvariable ist

### 6.3.1 Satz 77

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_X(s)$ .

$N$  sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_N(s)$ . Dann besitzt die Zufallsvariable  $Z := X_1 + \dots + X_N$  die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$

## 7 Formelsammlung

### 7.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

$(A \uplus B \hat{=} \text{disjunkte Vereinigung})$

- $Pr[\emptyset] = 0$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
- $A \subseteq B \implies Pr[A] \leq Pr[B]$
- $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$  (Additionssatz)
- $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$  (Siebformel)
- $Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$  (Boolsche Ungleichung)
- $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$  für  $Pr[B] > 0$  (Def. bedingte ws.)
- $B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B|A_i] * Pr[A_i]$  (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)
- $Pr[B] > 0, B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies Pr[A_i|B] = \frac{Pr[B|A_i] * Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^n Pr[B|A_i] * Pr[A_i]}$  (Satz von Bayes)
- $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = Pr[A_1] * Pr[A_2|A_1] * Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$  (Multiplikationssatz)
- $A$  und  $B$  unabhängig  $\iff Pr[A \cap B] = Pr[A] * Pr[B]$

### 7.2 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

- $E[X] = \sum_{x \in W_X} x * Pr[X = x]$   
 $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * Pr[\omega]$   
(=  $\sum_{i=1}^n Pr[X \geq i]$ , falls  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ ) (Erwartungswert)
- $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$   
 $\sum_{x \in W_X} Pr[X = x] * (x - \mathbb{E}[X])^2$  (Varianz)
- $Var[x] = E[X^2] - E[X]^2$

### 7.3 Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien  $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig

- $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  
 $\iff \forall(a_1, \dots, a_n) : Pr[X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n] = Pr[X_1 = a_1] * \dots * Pr[X_n = a_n]$
- $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  
 $\implies f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  unabhängig
- $\mathbb{E}[a * X + b] = a * \mathbb{E}[X] + b$
- $X(\omega) \leq Y(\omega) \forall \omega \in \Omega \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] * Pr[A_i]$
- $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
- $Var[a * X + b] = a^2 * Var[X]$
- $\mathbb{E}[a_1 X_1 + \dots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$  (Linearität des Erwartungswerts)
- $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $\implies \mathbb{E}[X_1 * \dots * X_n] = \mathbb{E}[X_1] * \dots * \mathbb{E}[X_n]$   
(Multiplikativität des Erwartungswerts)
- $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $\implies Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n]$  (Varianz einer Summe)
- $X \geq 0 \implies Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$  für  $t > 0$  (Markov)
- $Pr[|XE[X]| \geq t] \leq Var[X]/t^2$  für  $t > 0$