Zusammenfassung

Mihir Mahajan, Alfred Nguyen, Noah Kiefer Diaz

May 13, 2022

Contents

1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition 1

- Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine **Ergebnismenge** $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ von Elementarereignissen gegeben
- Jedem Ereignis \$$\omega_{i4}$ ist eine Wahrscheinlichkeit $0 \leq Pr[\omega_i] \leq 1$ zugeordnet
  $\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$
- Die Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. $Pr[E] = \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$
- $\bar{E}$ ist komplement zu E

Man kann standard Mengenoperationen auf Ereignisse machen, also bei Ereignissen A, B dann auch $A \cup B$, $A \cap B$

1.1.2 Lemma 8

Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, ..., A_n$ gilt

- $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
- Wenn $A \subseteq B$ so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$
- Additionssatz: Bei **paarweise disjunkten** Ereignissen gilt:
  $Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$
  Insbesondere gilt also:
  $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$
  Und für unendliche Menge von **disjunkten** Ereignissen:
  $Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$

1.1.3 Satz 9 Siebformel

Lemma 8, gilt nur für **disjunkte** Mengen. Das geht auch für nicht disjunkte!

1. Zwei Mengen $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$

2. Drei Mengen $Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] =$
   $Pr[A1] + Pr[A2] + Pr[A3]$
   $-Pr[A1 \cap A2] - Pr[A1 \cap A3] - Pr[A_2 \cap A_3$
   $+Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$

3. n Mengen Veranschaulichen an Venn-Diagramm

   (a) Alle aufaddieren

   (b) Paarweise schnitte subtrahieren

   (c) Dreifache schnitte dazuaddieren

   (d) 4- fache schritte subtrahieren

   (e) ...

4. für nerds: $Pr[\bigcup_{i=0}^{n} A_i] = \sum_{\emptyset \subset I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} Pr[\bigcap_{i \in I} A_i]$

1.1.4 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)): Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind. $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

1.2.1 Definition 12

A und B seien Ereignisse mit $Pr[B] > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert als: $Pr[A|B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$

Umgangssprachlich: $Pr[A|B]$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt wenn B eintritt.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $Pr[|B]$ bilden für ein beliebiges Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $Pr[B] > 0$ einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über Ω.

1.2.2 Baba Beispiele

1. **TODO** Töchterproblem

2. **TODO** Ziegenproblem

3. **TODO** Geburtstagsproblem

1.2.3 Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse $A_1, ..., An$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A1 \cup ... \cup An$.
$Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B|A_i] * Pr[A_i]$
analog für $n \to \infty$

1.2.4 Satz 19 (Satz von Bayes)

Es seien $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt, mit $Pr[A_j] > 0$ für alle j. Außerdem sei $B \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$ ein Ereignis mit $Pr[B] > 0$. Dann gilt für beliebiges $i \in [n]$
$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] * Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B|A_j] * Pr[A_j]}$

2 Unabhängigkeit

Wenn das auftreten von Ereignissen unabhängig ist.

- $Pr[A \cap B] = Pr[A] * Pr[B]$
- $Pr[A|B] = Pr[A]$

3 Zufallsvariablen

3.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an "Auswirkungen" oder "Merkmalen" der (Elementarereignisse) interessiert

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung $X : \Omega \to R$ heißt (numerische) Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt **diskret**

3.2 Erwartungswert und Varianz

3.2.1 Definition 29

Zu einer Zufalls variablen X definieren wir den **Erwartungswert** $E[X]$ durch $E[X] := \sum_{x \in W_X} x * Pr[X = x] = \sum x * f_X(x)$ sofern $\sum_{x \in W_X} |x| * Pr[X = x]$ konvergiert

3.2.2 Satz 32 Monotonie des Erwartungswerts

Seien X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) * Pr[\omega] = \mathbb{E}[Y]$

3.2.3 Rechenregeln für Erwartungswert

Oft betrachtet man eine Zufallsvariable X nicht direkt, sondern wendet noch eine Funktion darauf an: $Y := f(X) = f \circ X$,
wobei $f : D \to R$ eine beliebige Funktion sei mit $W_X \subseteq D \subseteq R$. Beobachtung: $f(X)$ ist wieder eine Zufallsvariable.

3.2.4 Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in R$ gilt
$\mathbb{E}[a * X + b] = a * \mathbb{E}[X] + b$

3.2.5 Satz 34

Sei X eine Zufallsvariable mit $W_x \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt
$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$

3.2.6 Satz 35

Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $Pr[A] > 0$. Die **bedingte Zufallsvariable** $X|A$ besitzt die Dichte:
$f_{X|A}(x) := Pr[X = x|A] = \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]}$
Die Definition ist zulässig, da
$\sum_{x \in W_x} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_x} \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]} = 1$
Somit ist $\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_x} x * f_{X|A}(x)$

3.2.7 Satz 36

TODO

3.2.8 Varianz