Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

Mihir, Noah, Alfred

June 30, 2022

Contents

1 Kontinuierliche Zufallsvariablen

1.1 Definition 79

Eine kontinuierliche oder auch stetige Zufallsvariable X und ihr zugrunde liegender kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitsraum sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion)
$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft
$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

1.1.1 Verteilungsfunktion:

$F_X(x) := Pr[X \leq x] = Pr[\{t \in R | t \leq x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

1.2 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

1.2.1 σ-Algebren

1. Definition 82 Sei Ω eine Menge. Eine Menge $A \subseteq P(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:
   - (E1) $\Omega \in A$.
   - (E2) Wenn $A \in A$, dann folgt $\bar{A} \in A$.
   - (E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in A$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$

1.2.2 1.3.2 Kolmogorov-Axiome

Sei Ω eine beliebige Menge und A eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung
$Pr[.] : A \to [0, 1]$
heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf A, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (W1) $Pr[\Omega] = 1$
- (W2) A1, A2, . . . seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt $Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$

1.2.3 Lemma 84

Sei (Ω, A, Pr) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, ..., A_n$ gilt

- $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1Pr[A]$
- Wenn $A \subseteq B$, so folgt $Pr[A] \leq Pr[B]$.
- Bei paarweisen disjunkten Ereignissen A,B gilt $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$

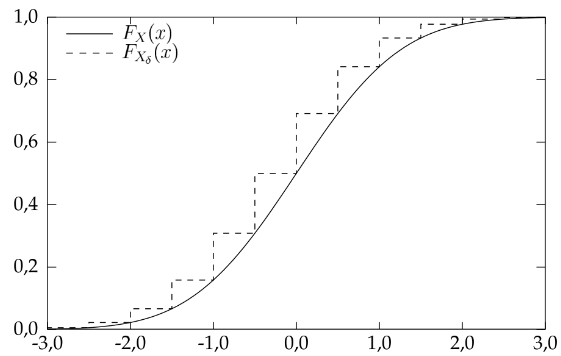
1.3 Rechnen mit Kontinuierlichen Zufallsvariablen

1.3.1 1.4.1 Funktionen kontinuierlicher Zufallsvariablen

Sei $Y := g(X)$ mit einer Funktion $g : R \to R$.
Die Verteilung von Y erhalten wir durch
$F_Y(y) = Pr[Y \leq y] = Pr[g(X) \leq y] = \int_C f_X(t)dt$
Hierbei bezeichnet $C := t \in R|g(t) \leq y$

1.3.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Wir können aus einer kontinuierlichen Zufallsvariable X leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes $\delta > 0$ definieren
$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n + 1)\delta[$ für $n \in \mathbb{Z}$.
Für X$_\delta$ gilt
$Pr[X_\delta = n_\delta] = F_X((n + 1)\delta)F_X(n\delta)$



Für $\delta \to 0$ nähert sich die Verteilung von X_δ der Verteilung von X immer mehr an.

1.3.3 Erwartungswert und Varianz:

- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t * f_X(t)dt$ sofern $\int_{-\infty}^{\infty} |t| * f_X(t)dt$ endlich ist
- $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(t - E[X])^2 * f_X(t)dt$ sofern $E[(X - E[X])^2]$ existiert

Für $Y = g(X)$ gilt:
$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) * f_X(t)dt$

2 Wichtige Stetige Verteilungen

2.1 Gleichverteilung

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & sonst \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$

$Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$

2.2 Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = R$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) =: \varphi(x;\mu,\sigma)$
In Zeichen schreiben wir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
$N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x;0,1)$ kürzen wir $\varphi(x)$ ab

2.2.1 Verteilungsfunktion:

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2})dt =: \Phi(x;\mu,\sigma)$

2.2.2 Satz 93 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges
$a \in \mathbb{R}\backslash 0$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

2.2.3 Satz 94

X sei $N(0,1)$ -verteilt. Dann gilt $E[X] = 0$ und $Var[X] = 1$.

2.2.4 Satz 95

X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann gilt $E[X] = \mu$ und $Var[X] = \sigma^2$.

2.3 2.3 Exponentialverteilung

$f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$
$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

2.3.1 Satz 97 (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Wenn X exponentialvertielt ist mit λ, so ist auch $Y = aX$ mit $a > 0$ exponentialvertielt mit Parameter λ/a

2.4 Satz 98 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass
$Pr[X > x + y | X > y] = Pr[X > x]$

3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

3.1 Mehrdimensionale Dichten

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx\ dy = 1$

3.1.1 Randverteilung

$F_X(x) = Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) dv] du$
analog
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v) dv$

3.1.2 Unabhängigkeit

$Pr[X \leq x, Y \leq y] = Pr[X \leq x] * Pr[Y \leq y]$
gleichbedeutend
$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) * F_Y(y)$
Differentiation ergibt
$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y)$

3.2 3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann ist auch $X := min\{X_1, ..., X_n\}$ exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda_1 + ... + \lambda_n$.

3.3 Poisson-Prozess

- Wenn der zeitliche Abstand der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist ihre Anzahl in einer festen Zeitspanne binomialverteilt.
- Wenn man Ereignisse zählt, deren zeitlicher Abstand exponentialverteilt ist, so ist die Anzahl dieser Ereignisse in einer festen Zeitspanne Poisson-verteilt.

3.4 Summen von Zufallsvariablen

Seien X und Y unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen. Für die Dichte von $Z := X + Y$ gilt
$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) * f_Y(zx)dx$

3.4.1 Satz 106 (Additivit¨at der Normalverteilung)

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern $\mu_i, \sigma_i (1 \leq i \leq n)$
Es gilt: Die Zufallsvariable
$Z := a_1X_1 + ... + a_nX_n$
ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$ und Varianz $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2$

3.5 3.5 Momenterzeugende Funktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen X haben wir die momenterzeugende Funktion $M_X(s) = E[e^{Xs}]$ eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für $M_X(s)$ gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.
$M_X^{(k)}(0) = E[X^k]$

4 Zentraler Grenzwertsatz

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, ..., n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$). Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Yn := X_1 + ... + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen
$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$
asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim N(0, 1)$ für $n \to \infty$

4.0.1 Intuitive Konsequenz:

Wenn eine Zufallsgröße durch lineare Kombination vieler unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen entsteht, so erhält man näherungsweise eine Normalverteilung

4.1 Korollar 109 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, ..., X_n$ seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit
$H_n := X1_+ ... + X_n$ für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen
$H^{n := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}$
für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

5 Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

5.0.1 Korollar 110

Sei $H_n \sim Bin(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von H_n/n konvergiert gegen $N(p, p(1p)/n)$ für $n \to \infty$

5.1 Verschiedene Approximationen der Binomialverteilung

Sei $H_n \sim Bin(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F_n . Für $n \to \infty$ gilt
$F_n(t) = Pr[H_n/n \leq t/n]\ \Phi(\frac{t/n-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}) = \Phi(\frac{t-np}{\sqrt{p(1-p)n}})$

Wir können F_n somit für große n durch Φ approximieren. Diese Approximation ist in der Praxis deshalb von Bedeutung, da die Auswertung der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung für große n sehr aufwändig ist, während für die Berechnung der Normalverteilung effiziente numerische Methoden vorliegen.

6 Approximationen für die Binomialverteilung

- Approximation durch die Poisson-Verteilung: $Bin(n, p)$ wird approximiert durch $Po(np)$. Diese Approximation funktioniert sehr gut für seltene Ereignisse, d. h. wenn np sehr klein gegenüber n ist. Als Faustregel fordert man $n \geq 30$ und $p \leq 0,05$.

- Approximation durch die Chernoff-Schranken: Bei der Berechnung der tails der Binomialverteilung liefern diese Ungleichungen meist sehr gute Ergebnisse. Ihre Stärke liegt darin, dass es sich bei den Schranken nicht um Approximationen, sondern um echte Abschätzungen handelt. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn man nicht nur numerische Näherungen erhalten möchte, sondern allgemeine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen beweisen möchte.

- Approximation durch die Normalverteilung: Als Faustregel sagt man, dass die Verteilungsfunktion $F_n(t)$ von $Bin(n, p)$ durch
  $F_n(t) \approx \Phi((t - np)/\sqrt{p(1-p)n})$
  approximiert werden kann, wenn $np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$ gilt.