

# Zusammenfassung

Mihir Mahajan, Alfred Nguyen, Noah Kiefer Diaz

May 24, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>2</b>
1.1	Grundlagen . . . . .	2
1.1.1	Definition 1 . . . . .	2
1.1.2	Lemma 8 . . . . .	2
1.1.3	Satz 9 Siebformel . . . . .	3
1.1.4	Wahl der Wahrscheinlichkeiten . . . . .	3
1.2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	3
1.2.1	Definition 12 . . . . .	3
1.2.2	Baba Beispiele . . . . .	4
1.2.3	Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) . . .	4
1.2.4	Satz 19 (Satz von Bayes) . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Unabhängigkeit</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>4</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	4
3.2	Erwartungswert und Varianz . . . . .	5
3.2.1	Definition 29 . . . . .	5
3.2.2	Satz 32 Monotonie des Erwartungswerts . . . . .	5
3.2.3	Rechenregeln für Erwartungswert . . . . .	5
3.2.4	Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Ver- sion) . . . . .	5
3.2.5	Satz 34 . . . . .	5
3.2.6	Satz 35 . . . . .	5
3.2.7	Satz 36 . . . . .	5
3.2.8	Varianz . . . . .	6
3.3	Mehrere Zufallsvariablen . . . . .	6
3.3.1	hypergeometrische Verteilung . . . . .	6

3.3.2	Gemeinsame Dichte . . . . .	6
3.3.3	Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . . .	7
3.3.4	Zusammengesetzte Zufallsvariablen . . . . .	7
3.3.5	Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen . . . . .	7

## 1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

### 1.1 Grundlagen

#### 1.1.1 Definition 1

- Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine **Ergebnismenge**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  von Elementarereignissen gegeben
- Jedem Ereignis  $E \subseteq \Omega$  ist eine Wahrscheinlichkeit  $0 \leq Pr[E] \leq 1$  zugeordnet  

$$\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] = 1$$
- Die Menge  $E \subseteq \Omega$  heißt Ereignis.  $Pr[E] = \sum_{\omega \in E} Pr[\omega]$
- $\bar{E}$  ist komplement zu  $E$

Man kann standard Mengenoperationen auf Ereignisse machen, also bei Ereignissen  $A, B$  dann auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$

#### 1.1.2 Lemma 8

Für Ereignisse  $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$  gilt

- $Pr[\emptyset] = 0, Pr[\Omega] = 1$
- $0 \leq Pr[A] \leq 1$
- $Pr[\bar{A}] = 1 - Pr[A]$
- Wenn  $A \subseteq B$  so folgt  $Pr[A] \leq Pr[B]$
- Additionssatz: Bei **paarweise disjunkten** Ereignissen gilt:  

$$Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$$
 Insbesondere gilt also:  

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$$
 Und für unendliche Menge von **disjunkten** Ereignissen:  

$$Pr[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[A_i]$$

### 1.1.3 Satz 9 Siebformel

Lemma 8, gilt nur für **disjunkte** Mengen. Das geht auch für nicht disjunkte!

1. Zwei Mengen  $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$
2. Drei Mengen  $Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] =$   
 $Pr[A_1] + Pr[A_2] + Pr[A_3]$   
 $- Pr[A_1 \cap A_2] - Pr[A_1 \cap A_3] - Pr[A_2 \cap A_3]$   
 $+ Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$
3. n Mengen Veranschaulichen an Venn-Diagramm
  - (a) Alle aufaddieren
  - (b) Paarweise schnitte subtrahieren
  - (c) Dreifache schnitte dazuaddieren
  - (d) 4- fache schritte subtrahieren
  - (e) ...
4. für nerds:  $Pr[\bigcup_{i=0}^n A_i] = \sum_{\emptyset \subset I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} Pr[\bigcap_{i \in I} A_i]$

### 1.1.4 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)): Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.  $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

## 1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

### 1.2.1 Definition 12

$A$  und  $B$  seien Ereignisse mit  $Pr[B] > 0$ . Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $Pr[A|B]$  von  $A$  gegeben  $B$  ist definiert als:  $Pr[A|B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$

Umgangssprachlich:  $Pr[A|B]$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt wenn  $B$  eintritt.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $Pr[|B]$  bilden für ein beliebiges Ereignis  $B \subseteq \Omega$  mit  $Pr[B] > 0$  einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über  $\Omega$ .

### 1.2.2 Baba Beispiele

1. **TODO** Töchterproblem
2. **TODO** Ziegenproblem
3. **TODO** Geburtstagsproblem

### 1.2.3 Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt und es gelte  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ .

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B|A_i] * Pr[A_i]$$

analog für  $n \rightarrow \infty$

### 1.2.4 Satz 19 (Satz von Bayes)

Es seien  $A_1, \dots, A_n$  paarweise disjunkt, mit  $Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Außerdem sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $Pr[B] > 0$ . Dann gilt für beliebiges  $i \in [n]$

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] * Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n Pr[B|A_j] * Pr[A_j]}$$

## 2 Unabhängigkeit

Wenn das auftreten von Ereignissen unabhängig ist.

- $Pr[A \cap B] = Pr[A] * Pr[B]$
- $Pr[A|B] = Pr[A]$

## 3 Zufallsvariablen

### 3.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an "Auswirkungen" oder "Merkmalen" der (Elementarereignisse) interessiert

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge  $\Omega$  gegeben. Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow R$  heißt (numerische) Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable  $X$  über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt **diskret**

## 3.2 Erwartungswert und Varianz

### 3.2.1 Definition 29

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den **Erwartungswert**  $E[X]$  durch  $E[X] := \sum_{x \in W_X} x * Pr[X = x] = \sum x * f_X(x)$  sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| * Pr[X = x]$  konvergiert

### 3.2.2 Satz 32 Monotonie des Erwartungswerts

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $\omega$  mit  $X(\omega) \leq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt  $E[X] \leq E[Y]$   $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) * Pr[\omega] = E[Y]$

### 3.2.3 Rechenregeln für Erwartungswert

Oft betrachtet man eine Zufallsvariable  $X$  nicht direkt, sondern wendet noch eine Funktion darauf an:  $Y := f(X) = f \circ X$ , wobei  $f : D \rightarrow R$  eine beliebige Funktion sei mit  $W_X \subseteq D \subseteq R$ . Beobachtung:  $f(X)$  ist wieder eine Zufallsvariable.

### 3.2.4 Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in R$  gilt  $E[a * X + b] = a * E[X] + b$

### 3.2.5 Satz 34

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $W_x \subseteq \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$

### 3.2.6 Satz 35

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $A$  ein Ereignis mit  $Pr[A] > 0$ . Die **bedingte Zufallsvariable**  $X|A$  besitzt die Dichte:

$$f_{X|A}(x) := Pr[X = x|A] = \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]}$$

Die Definition ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_x} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_x} \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]} = 1$$

Somit ist  $E[X|A] = \sum_{x \in W_x} x * f_{X|A}(x)$

### 3.2.7 Satz 36

TODO

### 3.2.8 Varianz

1. Definition 38 Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $\mu = E[X]$  definieren wir die Varianz  $Var[X]$  durch
$$Var[X] := E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 * Pr[X = x]$$
Die Größe  $\sigma := \sqrt{Var[X]}$   
 $Var[X]$  heißt Standardabweichung von  $X$ .
2. Satz 39 Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  gilt
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
3. Satz 41 Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:
$$Var[a * X + b] = a^2 * Var[X]$$

### 3.3 Mehrere Zufallsvariablen

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind? Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art
$$Pr[X = x, Y = y] = Pr[\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y]$$

#### 3.3.1 hypergeometrische Verteilung

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte  $Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} * \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$

**hypergeometrisch verteilt.** Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem  $r$  Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit  $a + b$  mit  $b$  besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.

#### 3.3.2 Gemeinsame Dichte

Die Funktion

$f_{X,Y}(x, y) := Pr[X = x, Y = y]$  heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X,Y}$  kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y)$$

Die Funktionen  $f_X$  und  $f_Y$  nennt man Randdichten.

### 3.3.3 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

1. Definition 45 Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen unabhängig, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$  gilt:  
$$Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] * \dots * Pr[X_n = x_n]$$
  
Analog: Gesamte Dichte ist Produkt aus einzelnen Dichten. Analog: Gesamte Verteilung ist Produkt aus einzelnen Verteilungen.

### 3.3.4 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

1. Satz 49 Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei  $Z := X + Y$ . Es gilt  $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) * f_Y(z-x)$

### 3.3.5 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

1. Satz 50 (Linearität des Erwartungswerts) Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt  
$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$$
2. Satz 52 (Multiplikativität des Erwartungswerts) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt  $E[X_1 * \dots * X_n] = E[X_1] * \dots * E[X_n]$
3. Definition 53 Zu einem Ereignis  $A$  heißt die Zufallsvariable  
$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  
**Indikatorvariable** des Ereigniss  $A$