Labbrapport: dämpad och driven pendel

Björn Sundin

TE18C, NTI Kronhus

28 mars 2021

1 Inledning

1.1 Syfte

I denna laboration undersöks en torsionspendel. Syftet är att ta reda på egenskaper hos pendeln från data som samlas från sensorer vid svängningar med olika dämpningskoefficient samt med och utan ett pålagt periodiskt vridmoment med varierande frekvens.

1.2 Frågeställningar

1. Vad är torsionspendelns egenfrekvens?
2. Vad är frekvensen hos drivningsenheten som ger resonans i pendeln?
3. Vad är förhållandet mellan dämpningskonstanten λ och spänningen U på dämpningsenheten?
4. Hur väl beskriver de matematiska modellerna systemet?

1.3 Teori

Den matematiska modellen som används för att beskriva svängningsrörelsen hos torsionspendeln beskrivs av denna differentialekvation:

$$\begin{gathered} I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -k\theta - \lambda\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \mu\cos(\omega t) \Leftrightarrow \\ \theta''(t) + \frac{\lambda}{I}\theta'(t) + \frac{k}{I}\theta(t) = \frac{\mu}{I}\cos(\omega t) \end{gathered} \tag{1}$$

Där:

- θ är vinkelpositionen av pendeln relativt jämviktsläget i radianer.
- I är tröghetsmomentet för pendeln med enhet $\mathrm{kg\,m^2}$. Det är vridmomentet som krävs för att skapa en vinkelacceleration på 1 $\mathrm{rad/s^2}$.
- k är vridmomentet per radian vinkelavvikelse riktat mot jämviktsläget för den specifika pendeln. Detta vridmoment orsakar den naturliga svängningen.

- λ är ett bromsande vridmoment per rad/s motriktat rörelseriktningen. Denna orsakar pendelns dämpning.
- μ är amplituden av det pålagda vridmomentet, med frekvensen ω rad/s.

I, k och λ beror alla på egenskaper hos pendeln samt pendelns radie. μ beror däremot på den radie där det pålagda vridmomentet appliceras samt kraftens maximum som orsakar vridmomentet.

Differentialekvationen har olika lösningar beroende på värdena på konstanterna:

1. Fri pendel, $\mu = 0 \wedge \lambda = 0$

$$\theta(t) = A\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{I}} + \phi\right) \tag{2}$$

2. Svagt dämpad pendel, $\mu = 0 \wedge \lambda < 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{2I}t}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{I} - \frac{\lambda^2}{4I^2}} + \phi\right) \tag{3}$$

3. Kritiskt dämpad pendel, $\mu = 0 \wedge \lambda = 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2I}t}\left(C_1 t + C_2\right) \tag{4}$$

4. Starkt dämpad pendel, $\mu = 0 \wedge \lambda > 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2I}t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\frac{\lambda^2}{4I^2} - \frac{k}{I}}} + C_2 e^{-t\sqrt{\frac{\lambda^2}{4I^2} - \frac{k}{I}}}\right) \tag{5}$$

5. Driven pendel, $\mu \neq 0 \wedge \lambda = 0$

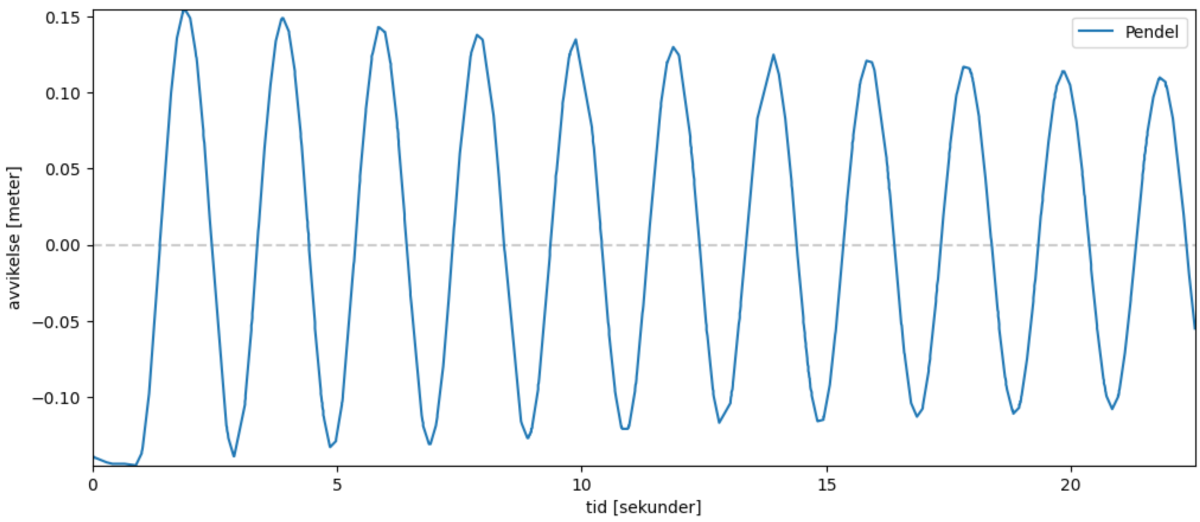
$$\theta(t) = \frac{\mu}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\left(\omega t + \phi\right) \tag{6}$$

   Där ω är den drivande frekvensen och ω_0 är egenfrekvensen.

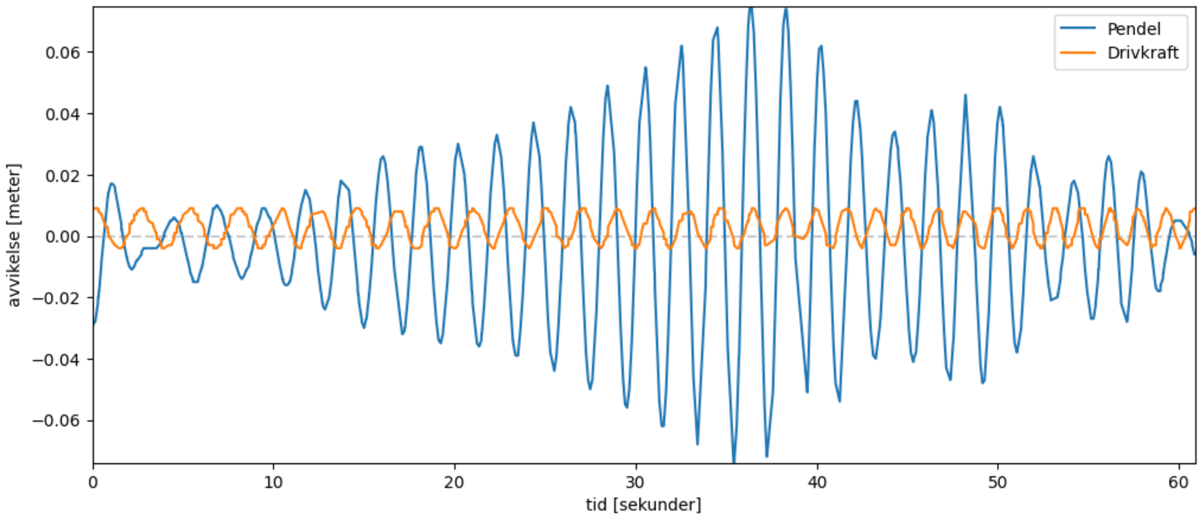
2 Metod

3 Resultat

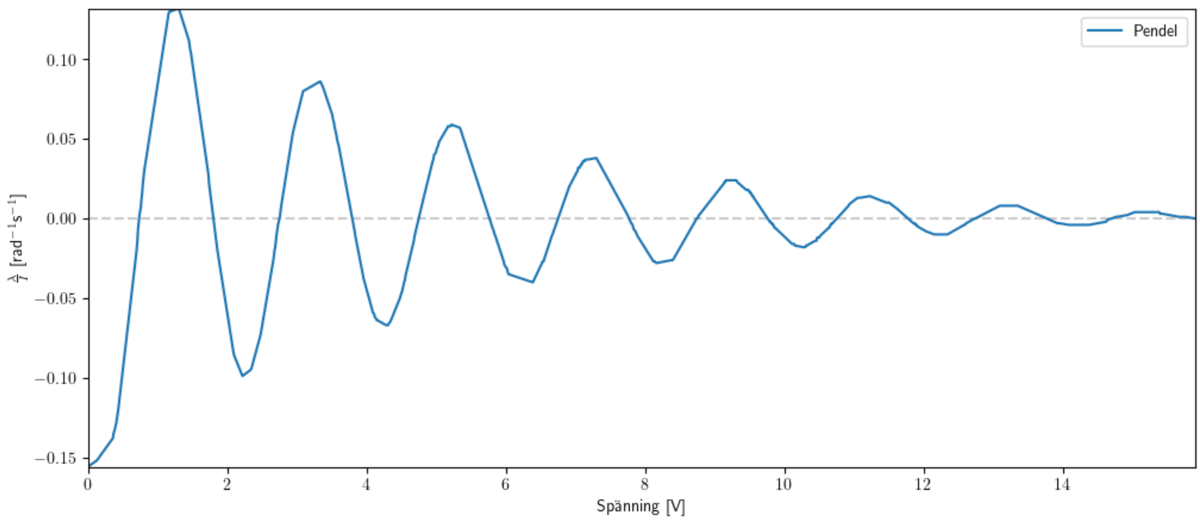
Den insamlade datan som mättes med Cassy Lab under laborationen redovisas i figurerna nedan.



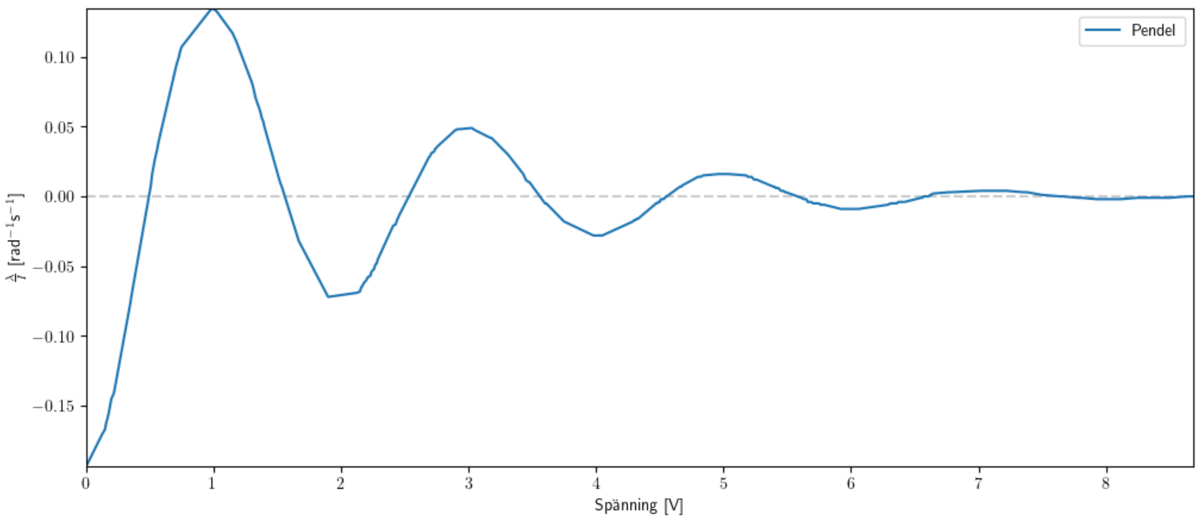
Figur 1: Datan för svängning utan pålagd dämpning.



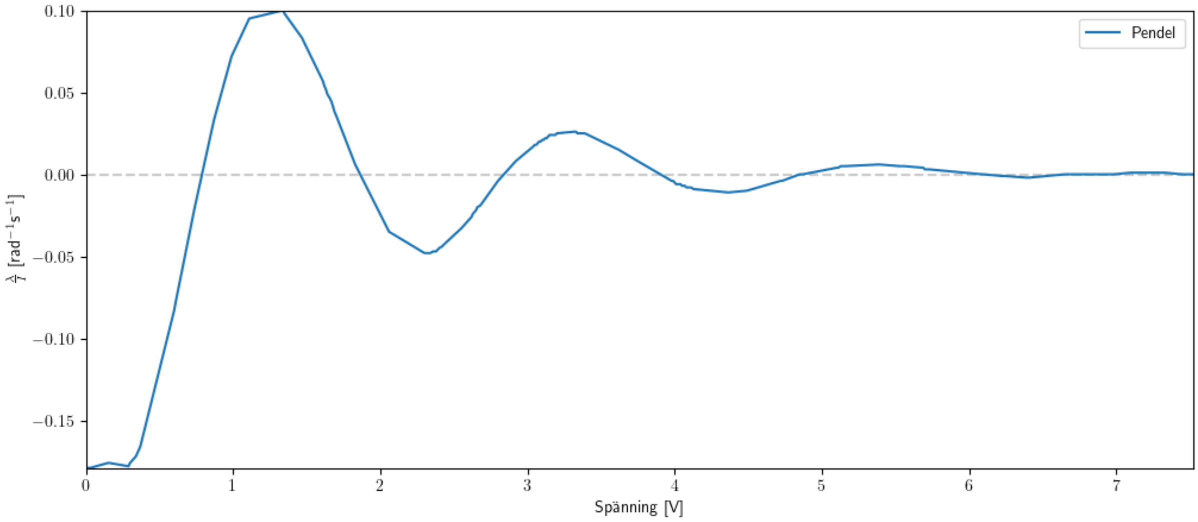
Figur 2: Datan för driven svängning runt resonansfrekvensen.



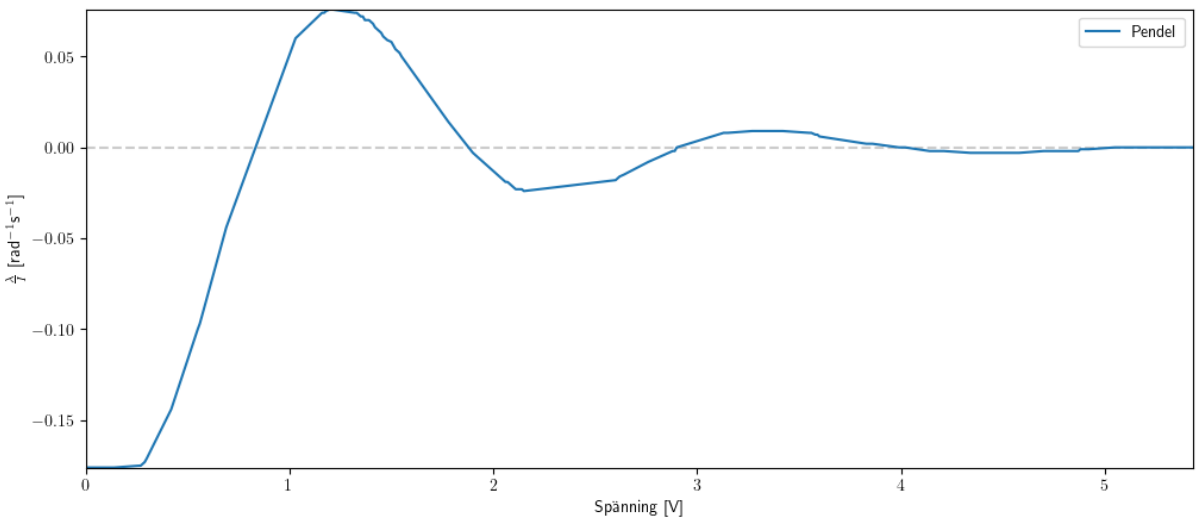
Figur 3: Datan för dämpad svängning med 1 V spänning i dämpningsenheten.



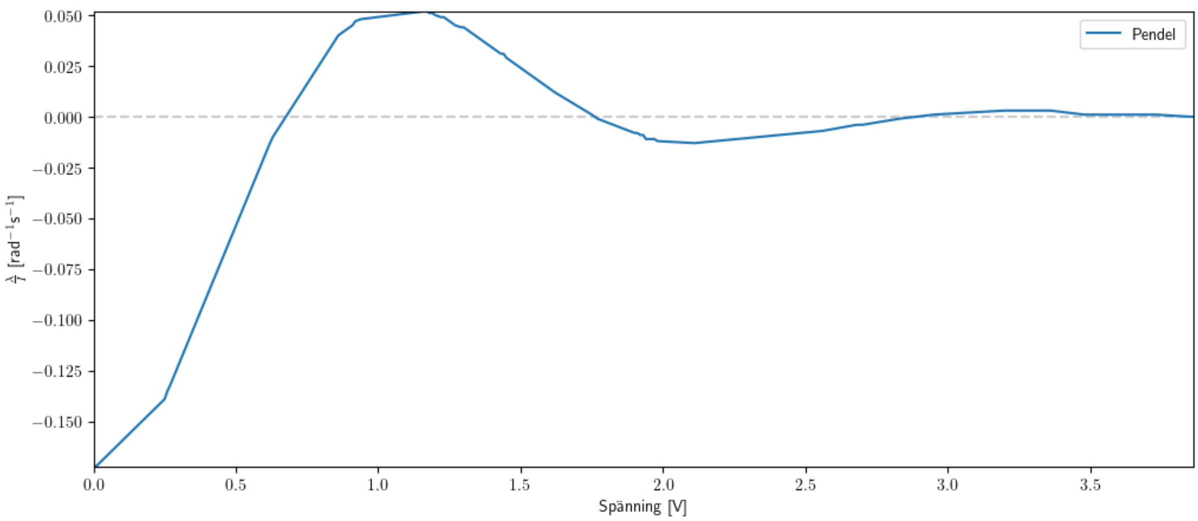
Figur 4: Datan för dämpad svängning med 4 V spänning i dämpningsenheten.



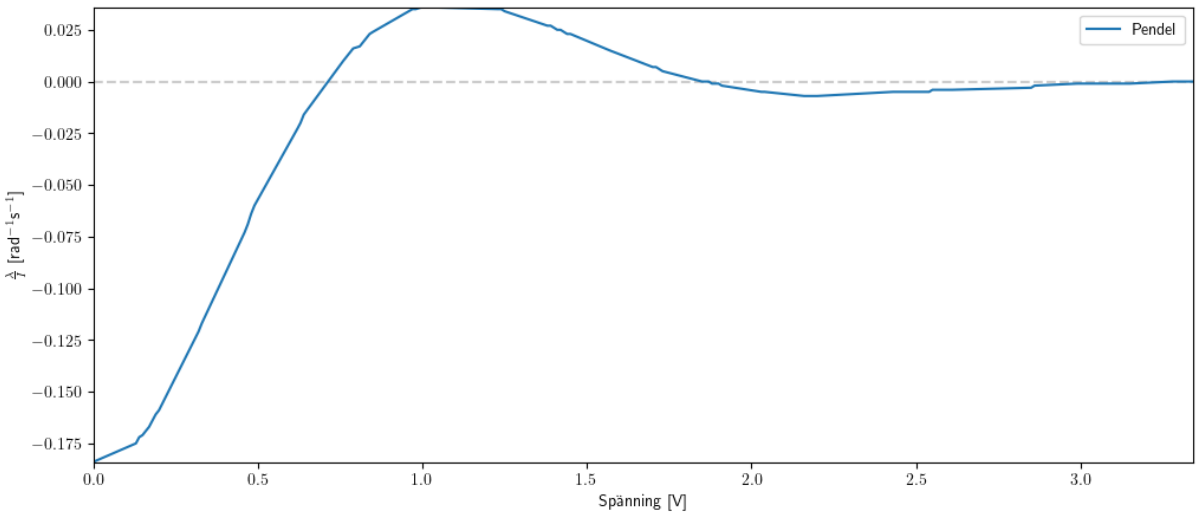
Figur 5: Datan för dämpad svängning med 5 V spänning i dämpningsenheten.



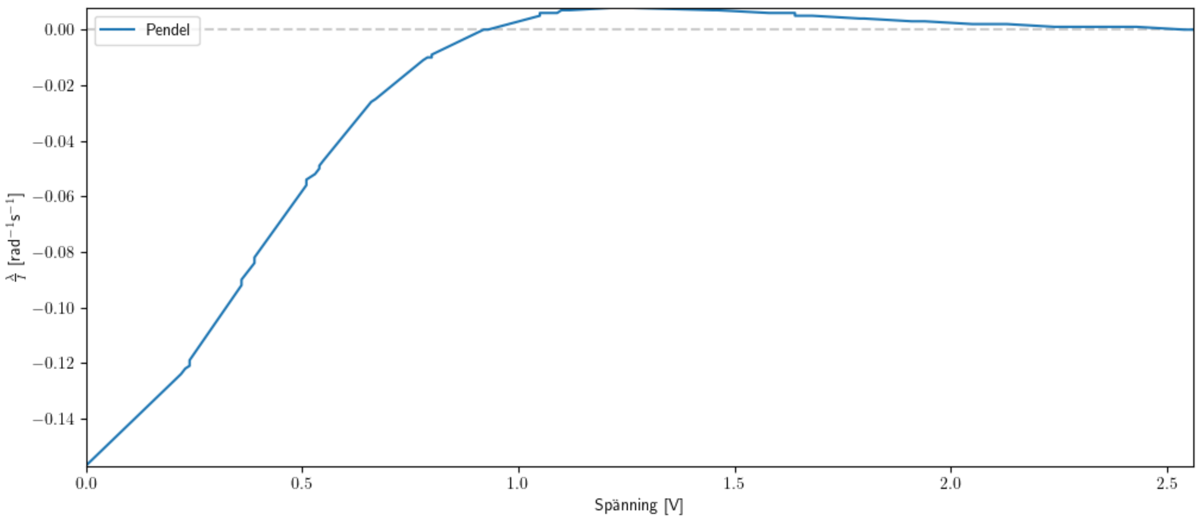
Figur 6: Datan för dämpad svängning med 6 V spänning i dämpningsenheten.



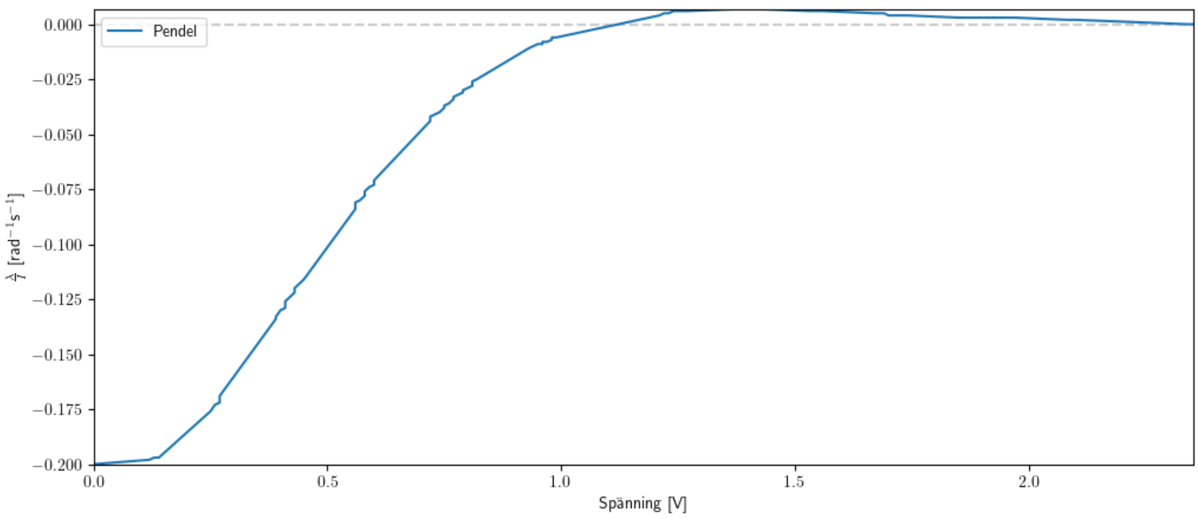
Figur 7: Datan för dämpad svängning med 7 V spänning i dämpningsenheten.



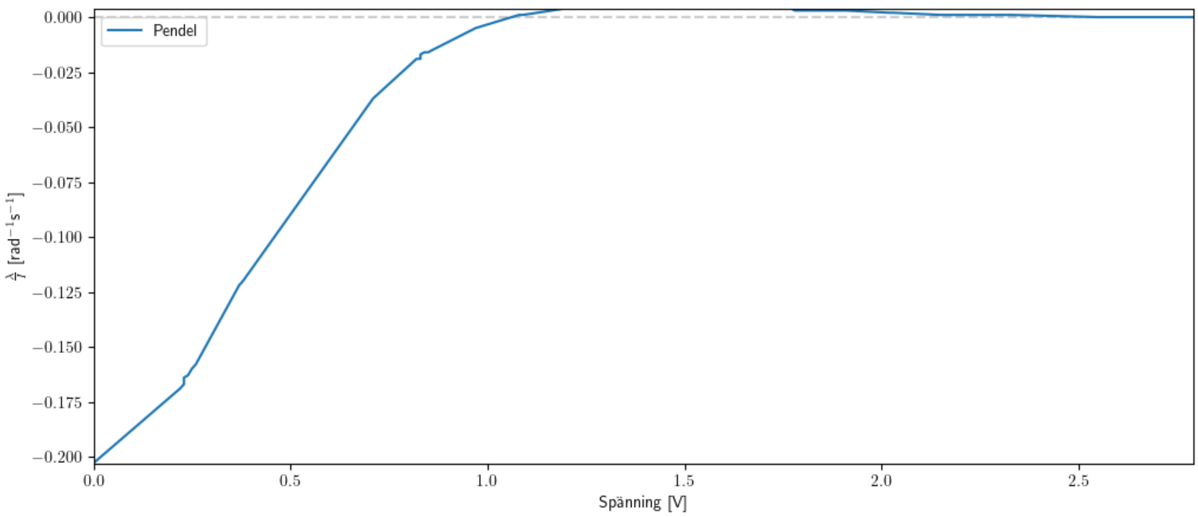
Figur 8: Datan för dämpad svängning med 8 V spänning i dämpningsenheten.



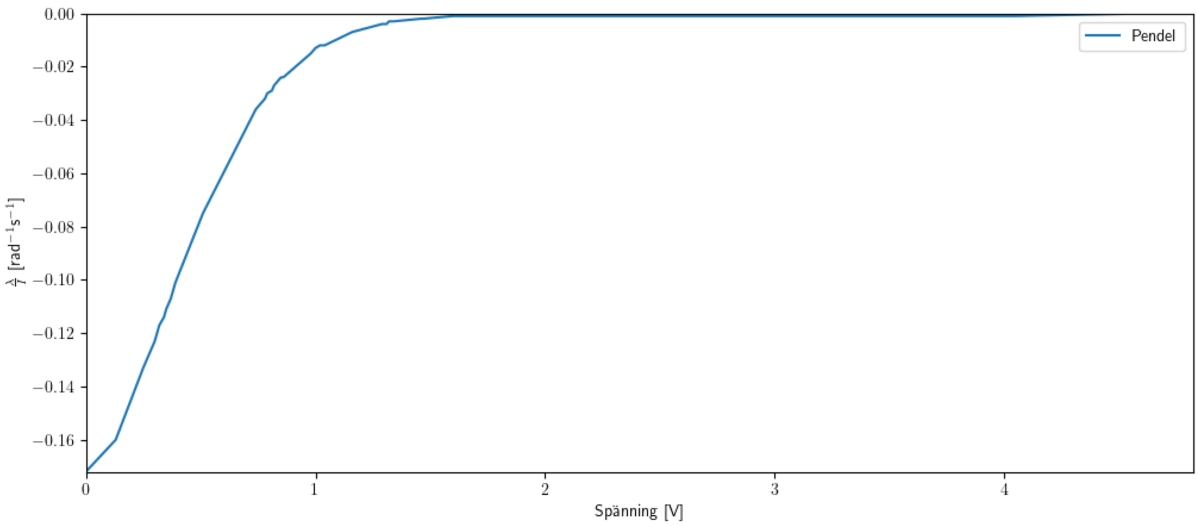
Figur 9: Datan för dämpad svängning med 9 V spänning i dämpningsenheten.



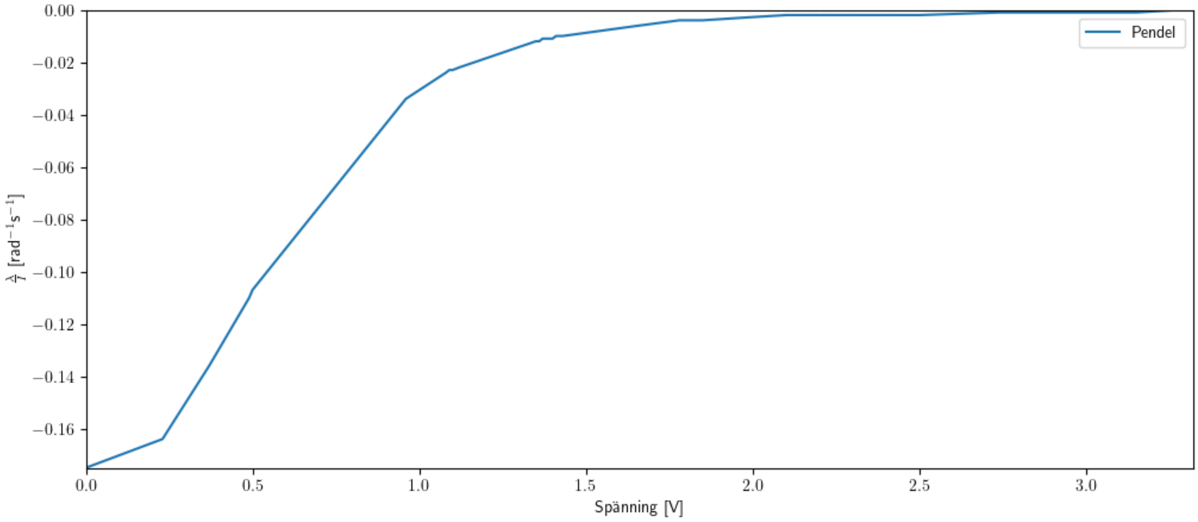
Figur 10: Datan för dämpad svängning med 10 V spänning i dämpningsenheten.



Figur 11: Datan för dämpad svängning med 11 V spänning i dämpningsenheten.



Figur 12: Datan för dämpad svängning med 13 V spänning i dämpningsenheten.



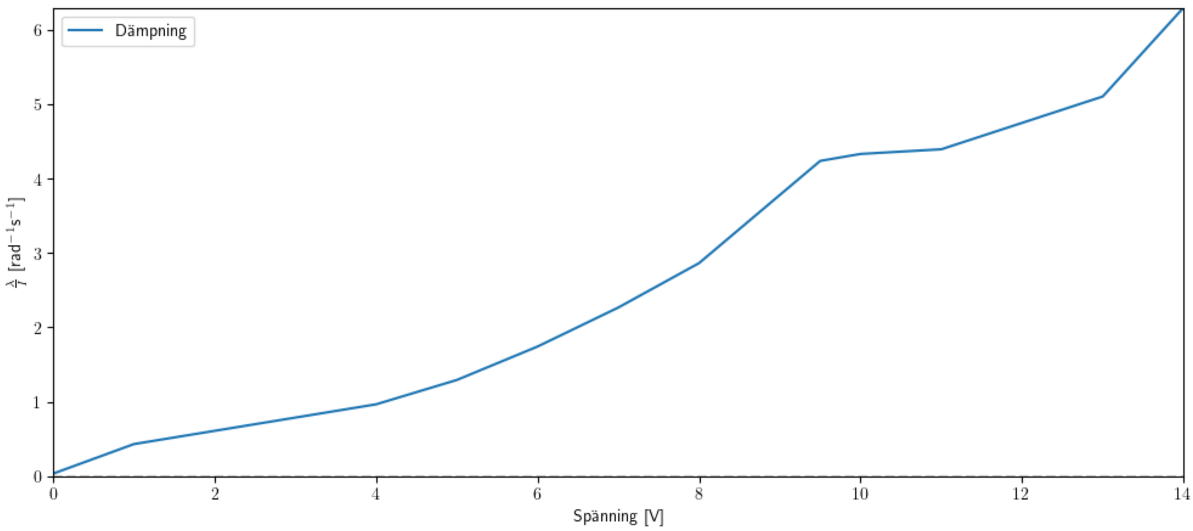
Figur 13: Datan för dämpad svängning med 14 V spänning i dämpningsenheten.

4 Analys

En funktionsanpassning av datan i Figur 1 med lösningen i ekvation 2 gav:

$$\theta(t) = 0.125665 \cdot \sin\big(3.15192t + 1.81944\big) \tag{7}$$

Egenfrekvensen är alltså $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} = 3.151\,92\,\mathrm{rad/s}$, amplituden $A = 0.125\,665\,\mathrm{m}$, och fasförskjutningen $\phi = 1.819\,44\,\mathrm{rad}$.



Figur 14: Värden på $\frac{\lambda}{I}$ för olika spänning i dämpningsenheten.

5 Slutsatser