

# Labbrapport: dämpad och driven pendel

Björn Sundin

TE18C, NTI Kronhus

2 april 2021

# 1 Inledning

## 1.1 Syfte

I denna laboration undersöks en torsionspendel. Syftet är att ta reda på egenskaper hos pendeln från data som samlas från sensorer vid svängningar med olika dämpningskoefficient samt med och utan ett pålagt periodiskt vridmoment.

## 1.2 Frågeställningar

1. Vad är torsionspendelns egenfrekvens?
2. Vad är frekvensen hos drivningsenheten som ger resonans i pendeln?
3. Vad är förhållandet mellan dämpningskonstanten  $\lambda$ , tröghetsmomentet  $I$  och spänningen  $U$  på dämpningsenheten?
4. Hur väl beskriver de matematiska modellerna systemet?

## 1.3 Teori

Den matematiska modellen som används för att beskriva svängningsrörelsen hos torsionspendeln är denna differentialekvation:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - \lambda \frac{d\theta}{dt} + \mu \cos(\omega t) \Leftrightarrow \theta''(t) + \frac{\lambda}{I} \theta'(t) + \frac{k}{I} \theta(t) = \frac{\mu}{I} \cos(\omega t)$$

Där:

- $\theta$  är vinkelpositionen av pendeln relativt jämviktsläget i radianer.
- $I$  är tröghetsmomentet för pendeln med enhet  $\text{kg m}^2$ . Det är vridmomentet som krävs för att skapa en vinkelacceleration på  $1 \text{ rad/s}^2$ .
- $k$  är vridmomentet per radian vinkelavvikelse riktat mot jämviktsläget för den specifika pendeln. Detta vridmoment orsakar den naturliga svängningen.
- $\lambda$  är ett bromsande vridmoment per rad/s motriktat rörelseriktningen. Denna orsakar pendelns dämpning.
- $\mu$  är amplituden av det pålagda vridmomentet med frekvensen  $\omega \text{ rad/s}$ .

$I$ ,  $k$  och  $\lambda$  beror alla på egenskaper hos pendeln samt pendelns radie.  $\mu$  beror däremot på den radie där det pålagda vridmomentet appliceras samt kraftens maximum som orsakar vridmomentet.

Differentialekvationen har olika lösningar beroende på värdena på konstanterna:

1. Fri pendel,  $\mu = 0 \wedge \lambda = 0$

$$\theta(t) = A \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{I}} + \phi\right) \quad (1)$$

2. Svagt dämpad pendel,  $\mu = 0 \wedge \lambda < 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{2I}t} \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{I} - \frac{\lambda^2}{4I^2}} + \phi\right) \quad (2)$$

3. Kritiskt dämpad pendel,  $\mu = 0 \wedge \lambda = 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2I}t} (C_1 t + C_2)$$

4. Starkt dämpad pendel,  $\mu = 0 \wedge \lambda > 2\sqrt{Ik}$

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2I}t} (C_1 e^{td} + C_2 e^{-td})$$

$$d = \sqrt{\frac{\lambda^2}{4I^2} - \frac{k}{I}} \quad (3)$$

5. Driven pendel,  $\mu \neq 0 \wedge \lambda = 0$

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{\mu}{I(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (4)$$

$\omega$  är den drivande kraftens frekvens och  $\omega_0$  är egenfrekvensen  $\sqrt{\frac{k}{I}}$ .

6. Dämpad, driven pendel,  $\mu \neq 0 \wedge \lambda \neq 0$

$$\theta(t) = \theta_d(t) + \operatorname{sgn}(b) \frac{\mu}{I\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right)$$

$$\begin{cases} a = \frac{\lambda}{I}\omega \\ b = \omega_0^2 - \omega^2 \end{cases} \quad (5)$$

Här är  $\theta_d(t)$  en lösning för en dämpad pendel utan drivkraft.

Det finns ett visst värde på drivkraftens vinkelfrekvens  $\omega$  som ger störst resulterande amplitud i pendelns svängning; resonansfrekvensen  $\omega_r$ . Resonansfrekvensen är:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{2I^2}} \quad (6)$$

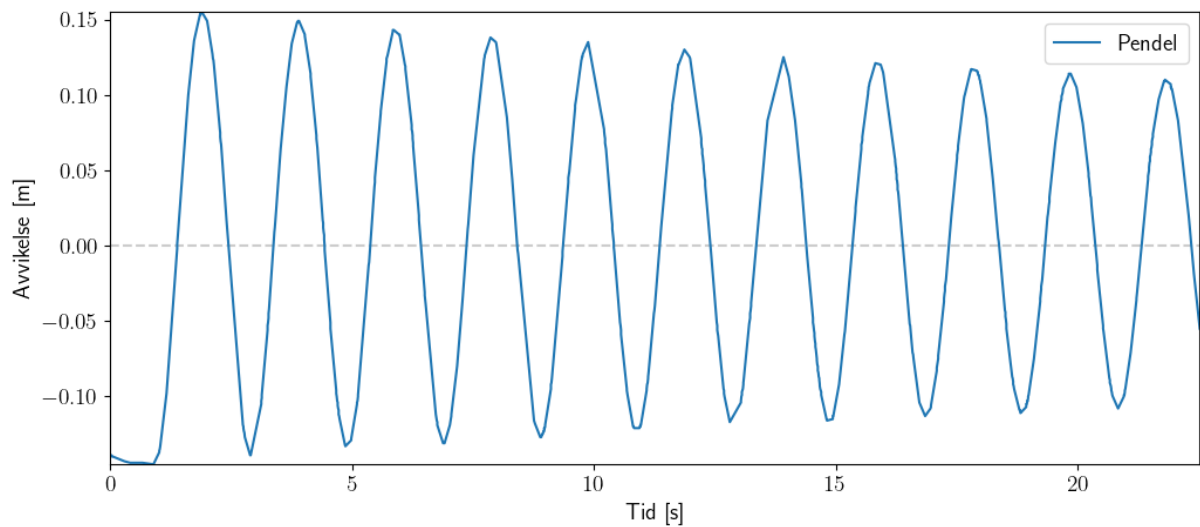
## 2 Metod

Experimenten går ut på att mäta läget av en torsionspendel över tid med hjälp av programmet Cassy Lab. Först mättes den naturliga svängningen hos en fri pendel utan pålagd dämpning eller pålagt vridmoment. Sedan sattes en drivningsenhet på som applicerar ett periodiskt vridmoment vid en viss radie på pendeln. För att undersöka vilken frekvens hos drivenheten som ger störst amplitud hos svängningen justerades frekvensen av det yttre vridmomentet långsamt, motsvarande  $\omega$  i ekvation (4) och (5).

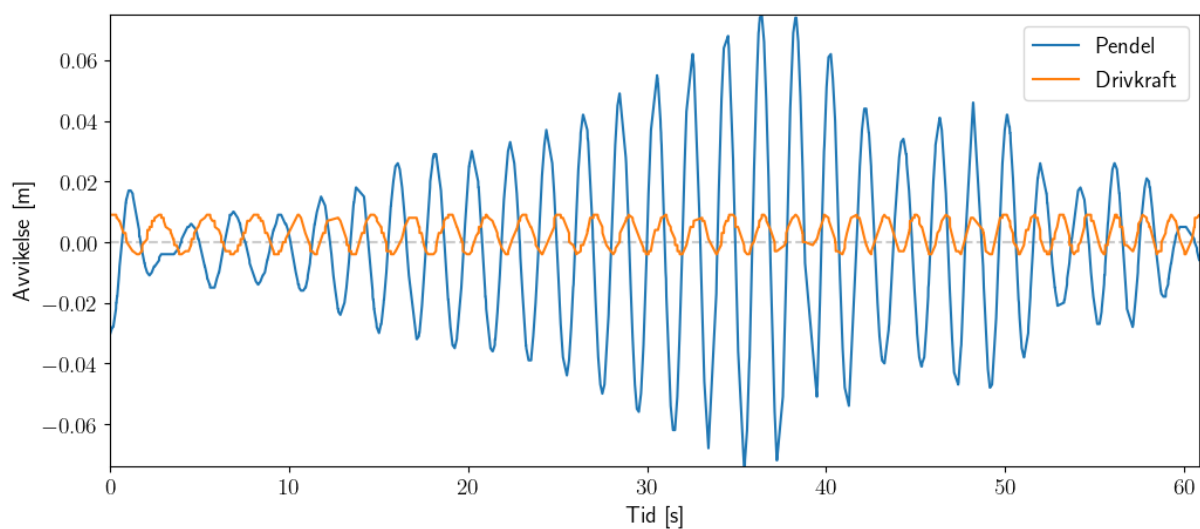
För att undersöka dämpad svängning användes en dämpningsenhet. Denna består av en elektromagnet som orsakar en inducerad ström i pendeln som enligt Lenz lag i sin tur motverkar rörelsen som orsakade induktionen. Elektromagneten är kopplad över en viss spänning  $U$ , och det är denna som justeras för att ändra på dämpningskonstanten  $\lambda$ . Mätningar gjordes för elva olika värden på spänningen, med drivningsenheten avslagen.

### 3 Resultat

Den insamlade datan som mättes med Cassy Lab under laborationen redovisas i figurerna nedan. Y-axlarna visar viktens avvikelse från jämviktsläget i meter. Denna avvikelse dividerad på pendelhjulets (okända) radie ger alltså vinkelavvikelsen  $\theta$ .

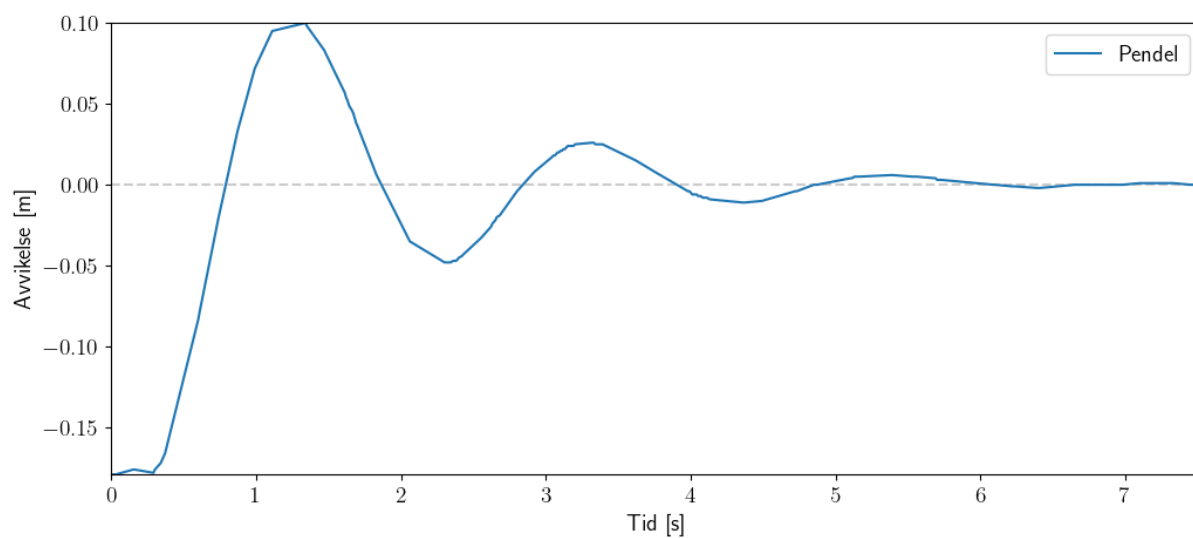


Figur 1: Datan för svängning utan pålagd dämpning.

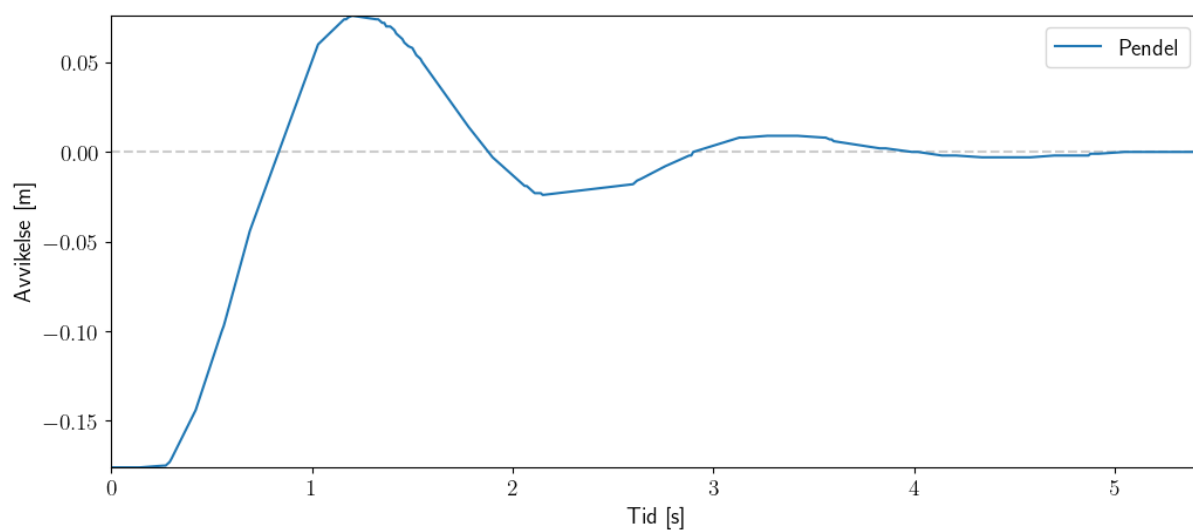


Figur 2: Datan för driven svängning runt resonansfrekvensen.

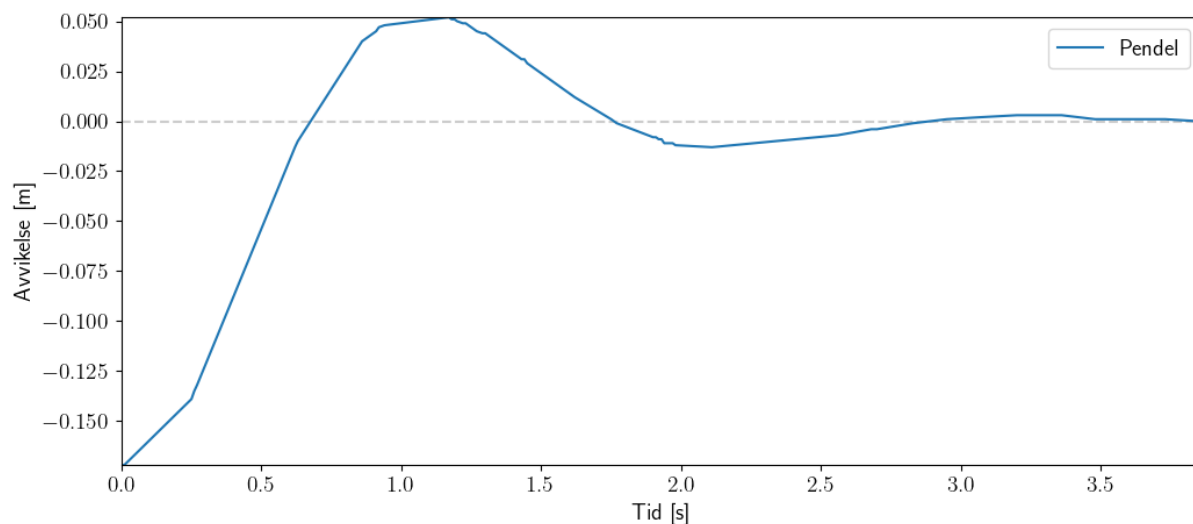




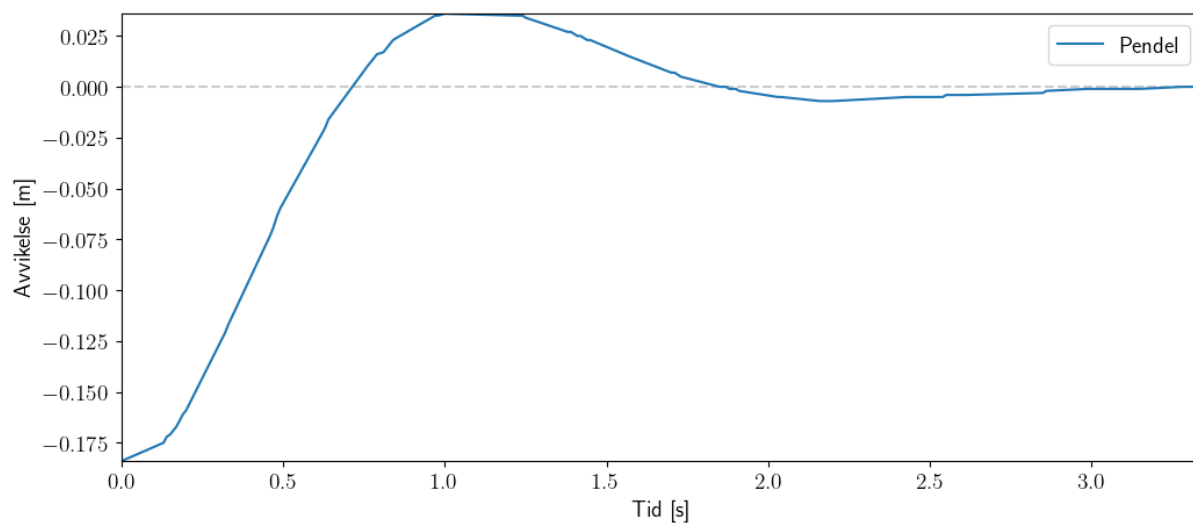
Figur 5: Datan för dämpad svängning med 5 V spänning i dämpningsenheten.



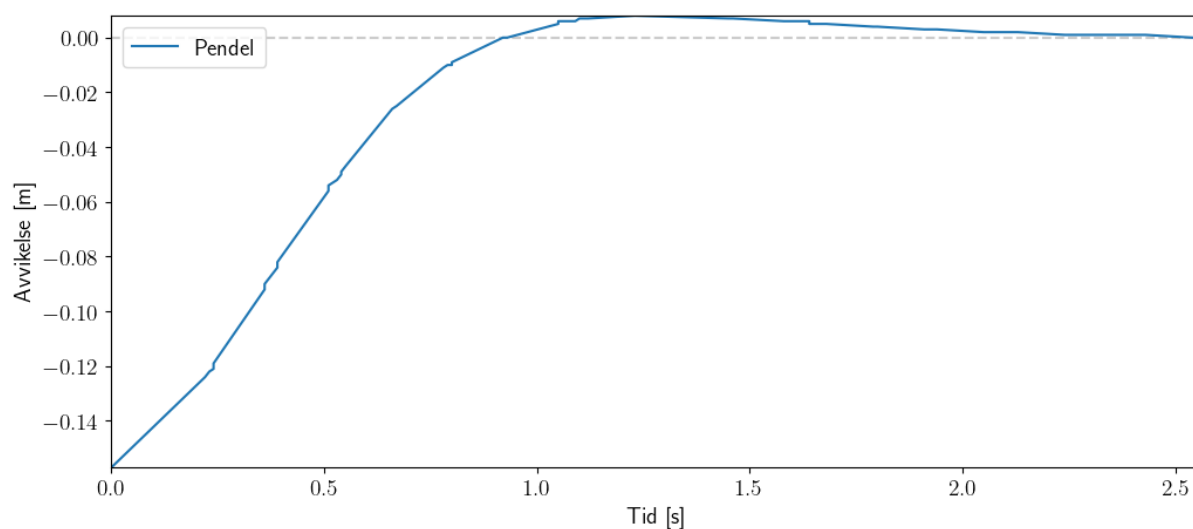
Figur 6: Datan för dämpad svängning med 6 V spänning i dämpningsenheten.



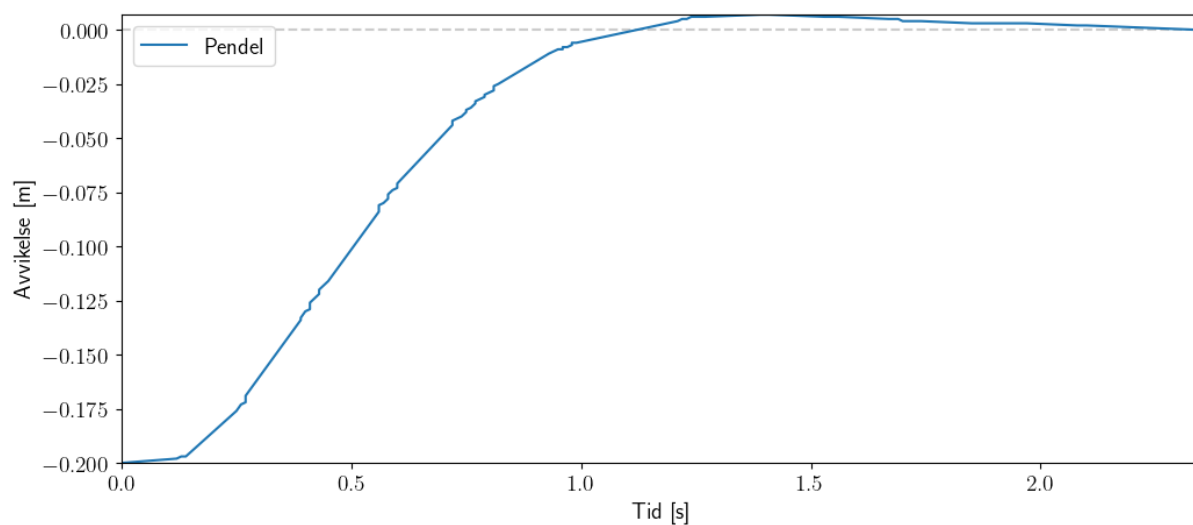
Figur 7: Datan för dämpad svängning med 7 V spänning i dämpningsenheten.



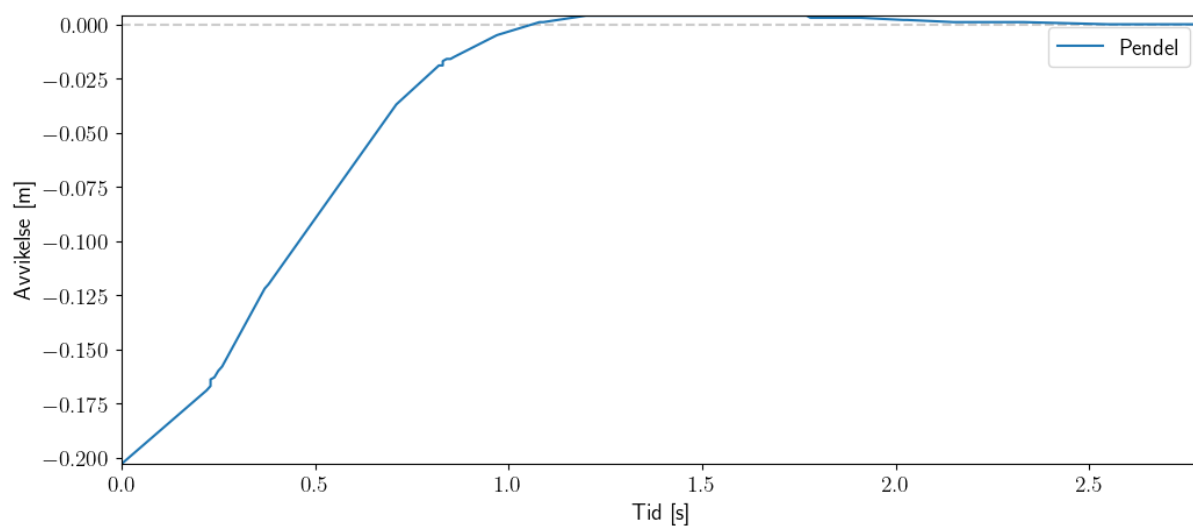
Figur 8: Datan för dämpad svängning med 8 V spänning i dämpningsenheten.



Figur 9: Datan för dämpad svängning med 9 V spänning i dämpningsenheten.

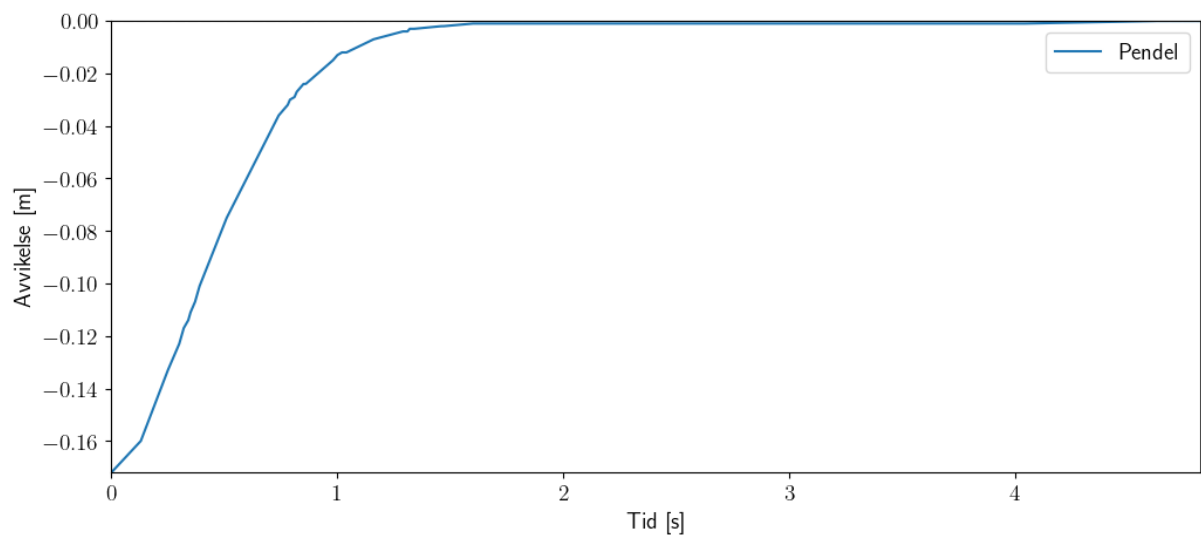


Figur 10: Datan för dämpad svängning med 10 V spänning i dämpningsenheten.

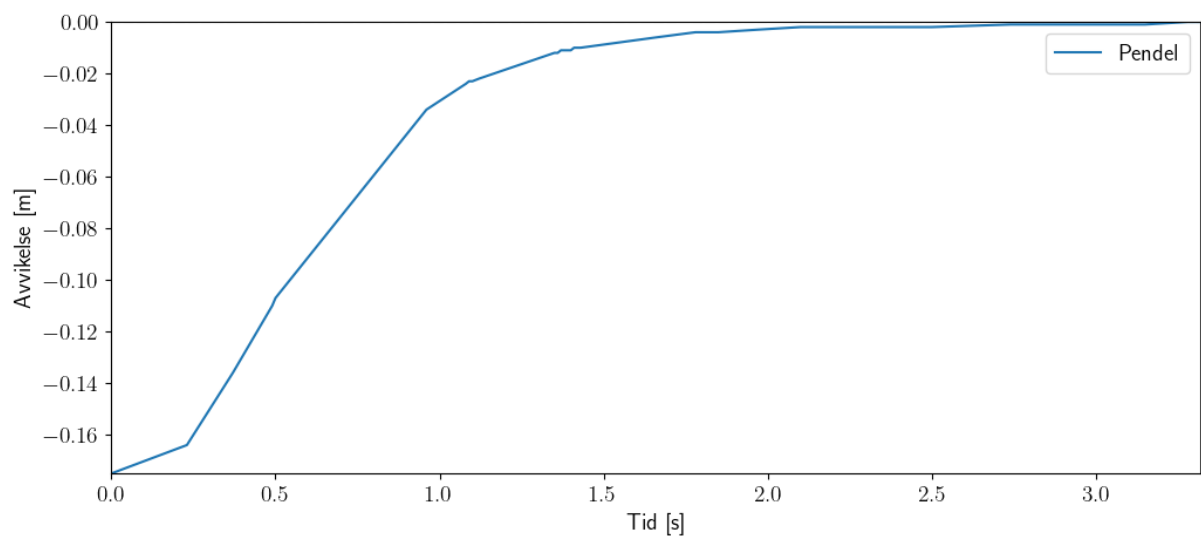


Figur 11: Datan för dämpad svängning med 11 V spänning i dämpningsenheten.





Figur 12: Datan för dämpad svängning med 13 V spänning i dämpningsenheten.



Figur 13: Datan för dämpad svängning med 14 V spänning i dämpningsenheten.

## 4 Analys

### 4.1 Egenfrekvens

Regressionsanalys av datan i figur 1 med lösningen i ekvation (1) gav:

$$\theta(t) = \frac{1}{r} 0.125665 \cdot \sin(3.15192t + 1.81944)$$

Med en determinationskoefficient  $R^2 \approx 98.92\%$ .

Egenfrekvensen är alltså  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} = 3.151\,92 \text{ rad/s}$ , amplituden  $A = \frac{1}{r} 0.125665 \text{ rad}$ , och fasförskjutningen  $\phi = 1.819\,44 \text{ rad}$ .

### 4.2 Resonansfrekvens

Regressionsanalys av drivenhetens läge (figur 2) i intervallet  $t \in (30, 36) \text{ s}$ , strax innan pendelsvängningens amplitud var som störst, med lösningen i ekvation (1) gav:

$$y(t) = 0.00631855 \cdot \sin(3.35416t - 1.75746)$$

Med en determinationskoefficient  $R^2 \approx 96.57\%$  i området. Resonansfrekvensen som beräknades genom regressionen var alltså  $\omega_r = 3.354\,16 \text{ rad/s}$ .

Ett annat sätt att beräkna resonansfrekvensen är med uttrycket i ekvation (6). Utan någon dämpning i pendeln ger ekvationen  $\omega_r = \omega_0$ . Det finns dock ett litet luftmotstånd som dämpar pendeln naturligt, och denna ska enligt den matematiska modellen sänka resonansfrekvensen. Vi antar att även denna dämpningskraft är linjärt proportionell mot  $\theta'(t)$ .

Värdet på  $\lambda$  kan inte beräknas utan att tröghetsmomentet  $I$  för pendeln är känt. Endast förhållandet mellan  $I$  och  $\lambda$  kan hittas. Som tur är behöver bara  $\frac{\lambda}{I}$  vara känt för att resonansfrekvensen ska kunna beräknas. Värdet på  $\frac{\lambda}{I}$  i svängningen visad i figur 1 hittades genom regressionsanalys med uttrycket i ekvation (2), med  $\frac{\lambda}{I}$  substituerat mot en egen variabel  $l$ . Det resulterande värdet var  $l \approx 0.031\,628\,7 \text{ rad}^{-1}\text{s}^{-1}$ , med regressionens förklaringsgrad  $R^2 \approx 99.9\%$ . Resonansfrekvensen blir då:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{l^2}{2}} \approx \sqrt{3.15192^2 - \frac{0.0316287^2}{2}} \approx 3.151\,84 \text{ rad/s}$$

Resonansfrekvensen beräknad från datan i figur 2 är  $0.202\,24 \text{ rad/s}$  större än torsionspendels egenfrekvens och  $0.202\,32 \text{ rad/s}$  större än resonansfrekvensen beräknad med ekvation (6), vilket bryter mot den matematiska modellen eftersom resonansfrekvensen måste vara lägre än egenfrekvensen.

Det kan finnas flera orsaker till detta. En skulle kunna vara brister i metoden, exempelvis att drivkraftens frekvens justerades kontinuerligt istället för stegvis. Det kan ha gjort att tidsintervallet som regressionsanalysen bör ha baserats på var otydligt. Det kan också ha gjort att modellen gav felaktiga resultat eftersom den antar att drivfrekvensen är konstant, trots att förändringen inte var särskilt hastig i experimentet.

### 4.3 Dämpad svängning

Figurerna 3-13 visar odrivna svängningar med olika spänning i dämpningsenheten och därmed olika dämpningskonstanter  $\lambda$ , eller  $l = \frac{\lambda}{I}$ . För att hitta ett samband mellan spänningen  $U$  och dämpningen  $l$  gjordes en regressionsanalys för varje spänning. För tydligt svagt dämpade svängningar användes ekvation (2). För svängningarna i figurerna 9-13 gjordes regressionsanalys med både ekvation (2) och (3), och den som gav störst förklaringsgrad användes. Detta avgjorde alltså vilka svängningar som var svagt dämpade och vilka som var starkt dämpade. Det visade sig att endast svängningen med 14 V i figur 13 var starkt dämpad, resten var svagt dämpade. Tabell 1 visar värdena på  $l$  som togs fram för olika värden på  $U$ .

Tabell 1: Avrundade värden på  $\frac{\lambda}{I}$  och förklaringsgrad för olika spänningsvärden i dämpningsenheten.

$U$ [V]	$\frac{\lambda}{I}$ [rad <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$R^2$ [%]
0	0.032	99.90
1	0.43	99.17
4	0.96	99.37
5	1.3	99.58
6	1.7	99.87
7	2.3	99.92
8	2.9	99.95
9	4.2	99.90
10	4.3	99.92
11	4.4	99.94
13	5.1	99.94
14	6.3	99.77

För att hitta modeller för  $l(U)$  gjordes även linjär- och potensregression av datan i tabell 1. Eftersom  $l$  för  $U = 0$  V är mycket exakt (dämpningsenheten avslagen, felet hos  $U$  är  $\pm 0$ ) så sattes detta värdet som ett oanpassat startvillkor i modellerna. Den linjära regressionen gav sambandet:

$$\frac{\lambda}{I} = 0.3983U + 0.03163 \quad (7)$$

Med förklaringsgrad 93.66%. Potensregressionen gav sambandet:

$$\frac{\lambda}{I} = 0.1739U^{1.352} + 0.03163 \quad (8)$$

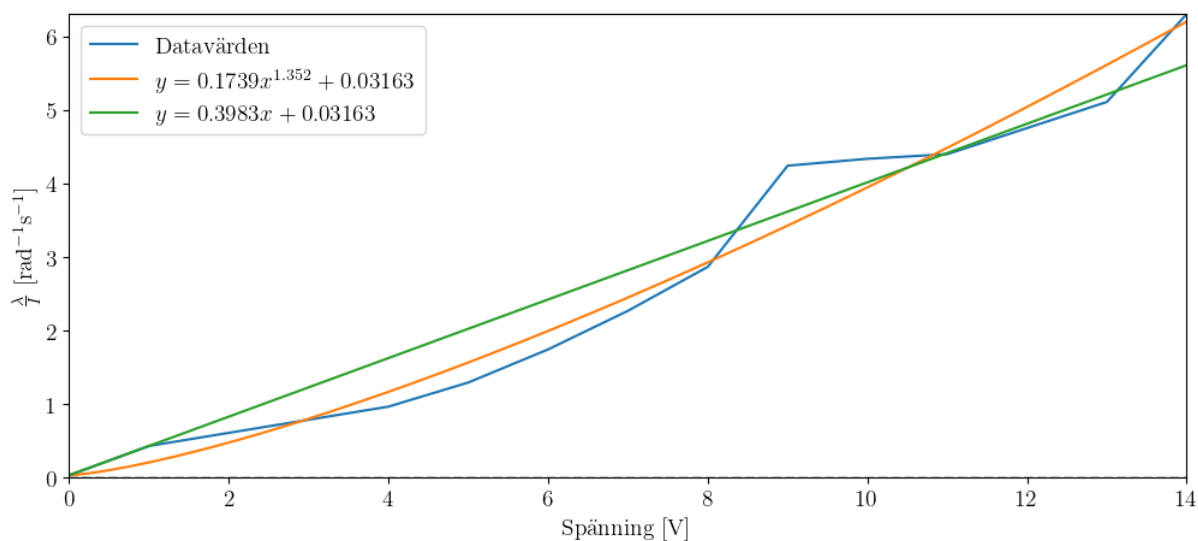
Med förklaringsgrad 96.99%. Figur 14 visar datan i tabell 1 som en graf tillsammans med de anpassade sambanden.

Ett annat sätt man hade kunnat avgöra  $l$  för en svängning är att använda koordinaterna för två extrempunkter av svängningen med samma polaritet ( $t_0, A_0$ ) och ( $t_1, A_1$ ), då

sinusfaktorn i ekvation (2) är 1:

$$\begin{cases} Ae^{-\frac{\lambda}{2}t_0} = A_0 \\ Ae^{-\frac{\lambda}{2}t_1} = A_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{t_0-t_1}} \\ \frac{\lambda}{I} = -\frac{2}{t_1-t_0} \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) \end{cases}$$

Det finns dock flera nackdelar med den tekniken. Om svängningen inte är perfekt centrerad behöver svängningens mittvärde subtraheras från  $A_0$  och  $A_1$ , medan med regressionsanalysen behöver endast en anpassad konstant adderas till funktionen för att justera y-förskjutningen. En annan nackdel är att det inte alltid finns exakta extrempunkter i den insamlade datan, då den har en relativt låg upplösning. Regressionsanalysen har fler punkter att basera uträkningen på.



Figur 14: Graf av  $\frac{\lambda}{I}$  över spänningen i dämpningsenheten med en linjär funktion och en potensfunktion anpassade till datan.

## 5 Slutsatser

Eigenfrekvensen som togs fram var 3.151 92 rad/s. Den största felkällan i experimentet för egenfrekvensen kan ha varit inexaktheten och upplösningen av den insamlade datan. Datan är kvantiserad antingen av sensorerna eller av Cassy Lab till steg av 0.001 m, vilket är tillräckligt stort för att synas på den skala som datavärdena har. Många av punkterna föll också bort, vilket innebar att datapunkterna hade oregelbundna tidsintervall. Detta gäller alla mätningar, men det finns större felkällor i de andra experimenten.

Resonansfrekvensen som togs fram genom regressionsanalys av drivenhetens läge var 3.354 16 rad/s medan resonansfrekvensen som togs fram med ekvation (6) var 3.151 84 rad/s. Kvantiseringen av lägesvärdena påverkade datan för drivenheten extra mycket eftersom dess amplitud var mycket låg, så det kan ha varit en felkälla. Jag tror dock den största felkällan var att drivfrekvensen inte var konstant, och alltså följde inte systemet den matematiska modellen.

Ett linjärt samband (ekvation 7) och ett potenssamband (ekvation 8) mellan spänning och dämpningen  $\frac{\lambda}{I}$  togs fram. Den största felkällan bör vara inexaktheten i spänningsvärdena,

eftersom funktionsanpassningarna för respektive spänning var mycket lyckade (se tabell 1). Spänningen sattes inte exakt, utan genom att vrida en knapp. Felet i spänningsvärdena kan uppskattas vara  $\pm 0.5$  V. Det syns i figur 14 att grafen fluktuerar på ett sätt som gör att systemet hade avvikt på ett mycket speciellt sätt från någon matematisk modell. Dämpningen ökade alltid för varje spänningsvärde, vilket är ett tecken på att de framtagna sambanden kan beskriva systemet ungefärligt.

De flesta regressionsanalyser gav en mycket hög förklaringsgrad, vilket betyder att den matematiska modellen beskriver systemet väl. Determinationskoefficienten för den fria svängningen med ekvationen för odämpad svängning var lägre (98.92%) än för regression med ekvationen för svagt dämpad svängning (99.9%), vilket var förväntat eftersom pendeln fortfarande dämpas av luftmotståndet.