Лекция 4 Системы линейных уравнений

4.1 Пространство решений однородной системы

А4.1.1 Определение. Однородной системой линейных алгебраических уравнений называется система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$, где a_{ij} - заданные числа.

А4.1.2 Теорема (о пространстве решений однородной системы) Множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством векторного пространства R^n.

Доказательство. Запишем систему в виде $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, или, кратко $A\vec{x} = \vec{0}$, тогда решение системы можно представлять как вектор-столбец $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Надо доказать: 1) если вектор-столбец является решением однородной системы, то этот же вектор, умноженный на любой скаляр также является решением; 2) если два вектора являются решениями, то их сумма также будет решением.

1) Пусть вектор-столбец $\vec{x}_0$ является решением системы $A\vec{x} = \vec{0}$; значит, $A\vec{x}_0 = \vec{0}$ - тождество (верное равенство). Подставим в произведение $A\vec{x}$ вектор $\alpha\vec{x}_0$, где $\alpha \in R$: $A \cdot (\alpha\vec{x}_0) = (A\alpha)\vec{x}_0 = \alpha(A\vec{x}_0) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, что и требовалось.
2) Пусть векторы-столбцы $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ являются решениями системы $A\vec{x} = \vec{0}$. Значит, $A\vec{x}_0 = \vec{0}$ и $A\vec{y}_0 = \vec{0}$ - тождества. Подставим в произведение $A\vec{x}$ вектор $\vec{x}_0 + \vec{y}_0$: $A \cdot (\vec{x}_0 + \vec{y}_0) = A\vec{x}_0 + A\vec{y}_0 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, что и требовалось.

А4.1.3. *Замечание.* Однородная система линейных уравнений всегда имеет решение (например, нулевой вектор).

4.2 Фундаментальная система решений

Поскольку множество решений однородной системы является векторным пространством, значит, в нем есть базис, через который линейно выражаются все решения системы.

А4.2.1 Определение. Любой базис пространства решений однородной системы уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой однородной системы линейных уравнений. Линейная комбинация векторов фундаментальной системы решений с произвольными (неопределенными) коэффициентами называется *общим решением* однородной системы линейных уравнений.

A4.2.2 Если применять метод Гаусса к однородной системе линейных уравнений, то возможны два случая:

1) Исключение неизвестных приведет к системе, у которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Тогда система будет иметь единственное (нулевое) решение.
2) Исключение неизвестных приведет к системе, у которой количество уравнений меньше количества неизвестных. Допустим, после исключения неизвестных получили систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{22}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Перенесем в правую часть уравнений все слагаемые, содержащие неизвестные с номерами от $m+1$ и больше:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = -a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{22}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = -a_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{mm}x_m = -a_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Если теперь придать перенесенным в правую часть неизвестным какие-либо числовые значения, то получим систему, имеющую единственное решение.

Придадим неизвестным $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ значения $x_{m+1} = 1, x_{m+2} = 0, ..., x_n = 0$ (первая неизвестная равна 1, остальные равны нулю), тогда, решив систему, получим какие-то значения остальных неизвестных $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$ и вектор $\vec{a}_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, 1, 0, ..., 0)$ будет решением системы.

Затем придадим неизвестным $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ значения $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 1, ..., x_n = 0$ (вторая неизвестная равна 1, остальные равны нулю), тогда, решив систему, получим какие-то значения остальных неизвестных $x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2$ и вектор $\vec{a}_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, 0, 1, ..., 0)$ также будет решением системы. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно независимы, так как составленная из них матрица имеет ненулевой минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Затем придадим неизвестным $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ такие значения, чтобы третья неизвестная была равна 1, остальные равны нулю. Решив систему, получим какие-то значения остальных неизвестных $x_1^3, x_2^3, ..., x_m^3$ и вектор $\vec{a}_3 = (x_1^3, x_2^3, ..., x_m^3, 0, 0, 1, ..., 0)$ также будет решением системы. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ линейно независимы, так как составленная из них матрица имеет ненулевой минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Аналогично продолжая дальше, построим вектор $\vec{a}_{n-m}$, линейно независимый со всеми предыдущими. Этот вектор будет последним, так как любой другой уже будет линейно зависеть от остальных. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_{n-m}$ образуют базис пространства решений, то есть составляют фундаментальную систему решений.

А4.2.3 Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 13x_4 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$ /

Решение. Для удобства вычислений составим матрицу из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -2 & 13 \\ 6 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Умножая первую строку последовательно на (-2), (-3), (-4), (-6) и прибавляя соответственно ко второй, третьей, четвертой, пятой строкам, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & -30 \end{pmatrix}.$$

Вычитая вторую строку из третьей и четвертой и прибавляя к пятой строке первую, умноженную на (-2), получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Поделим вторую строку на 5: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходя из полученной матрицы, записываем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Переносим две последние переменные в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Полагаем $x_3 = 1, x_4 = 0$: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$. Значит, $x_1 = 1$ и получили первый вектор фундаментальной системы решений: $\vec{a}_1 = (1; -2; 1; 0)$.

Полагаем $x_3 = 0, x_4 = 1$: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$. Значит, $x_1 = -4$ и получили второй вектор фундаментальной системы решений: $\vec{a}_2 = (-4; 3; 0; 1)$.

Фундаментальная система решений состоит из двух векторов $\vec{a}_1 = (1; -2; 1; 0)$ и $\vec{a}_2 = (-4; 3; 0; 1)$, а общее решение имеет вид $C_1 \cdot (1; -2; 1; 0) + C_2 \cdot (-4; 3; 0; 1)$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

4.3 Совместность неоднородных систем уравнений

А4.3.1 Определение. Система линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ называется *неоднородной системой линейных уравнений*, если не все числа $b_1, b_2, ..., b_m$ равны нулю.

А4.3.2 Определение. Система линейных уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение.

А4.3.3 Определение. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* уравнений, а матрица $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называется *расширенной матрицей системы* уравнений.

А4.3.4. Теорема Кронекера-Капелли (о совместности системы линейных уравнений) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Доказательство. 1) Пусть система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ совместна и $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ - ее решение. Значит, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1^0 + \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2^0 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n^0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, то есть столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A и его добавление к матрице A не изменяет ранга.

2) Пусть ранги матриц A и $\overline{A}$ совпадают, значит, столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Но это значит, что числа $C_1, C_2, ..., C_n$ являются решением системы уравнений. Что и требовалось.

А4.3.5. Пример. Проверить на совместность систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 - x_6 = 2 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 4 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 2x_5 + 5x_6 = 7 \end{cases}$.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду (тем самым мы одновременно приводим к ступенчатому виду и матрицу A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -14 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & -14 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & -14 & 8 & -7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -14 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -14 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2 ($RgA = 2$), ранг матрицы $\overline{A}$ равен 3 ($Rg\overline{A} = 3$), значит, система не совместна.

4.4 Общее решение неоднородной системы уравнений

Пусть дана система линейных неоднородных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Соответствующей ей *однородной системой* будем называть систему линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$.

А4.4.1 Теорема (о связи решений неоднородной и соответствующей однородной систем)

1) Сумма любого решения неоднородной системы с любым решением однородной системы будет решением неоднородной системы.
2) Разность любых двух решений неоднородной системы будет решением однородной системы.

Доказательство. 1) Запишем неоднородную систему в виде $Ax = b$, а соответствующую однородную систему – в виде $Ax = 0$. Пусть x_0 - решение системы $Ax = 0$, а x_b - решение системы $Ax = b$. Тогда $A(x_0 + x_b) = Ax_0 + Ax_b = 0 + b = b$, что и требовалось.

2) Пусть x_1, x_2 - решения системы $Ax = b$, тогда $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$.

А4.4.2 *Следствие.* Общее решение неоднородной системы может быть получено как сумма общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо одного решения (*частного решения*) неоднородной системы.

А4.4.2 Пример. Найти общее решение неоднородной системы $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$

Решение. 1) Преобразуем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Проверим совпадение рангов. Ранги матрицы и расширенной матрицы совпадают (равны 2), значит, система имеет решение.

3) Рассмотрим матрицу соответствующей однородной системы (последний столбец сделаем нулевым) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и найдем фундаментальную систему решений, затем – общее решение однородной системы $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$.

Полагая $x_3 = 1, x_4 = 0$, получаем $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$, $x_1 = 1$ и первый вектор фундаментальной системы решений - $(1; -2; 1; 0)$.

Полагая $x_3 = 0, x_4 = 1$, получаем $\begin{cases} x_1 - x_2 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$, $x_1 = -4$ и второй вектор фундаментальной системы решений - $(-4;3;0;1)$.

Общее решение однородной системы - $C_1(-2;1;0)+C_2(-4;3;0;1)$.

4)Рассмотрим последнюю матрицу, полученную в пункте 1) и составим по ней систему неоднородных уравнений (она будет равносильна исходной системе):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 3x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Поскольку нам нужно одно любое решение системы, то вместо неизвестных x_3, x_4 можно взять любые числовые значения, например, $x_3 = x_4 = 0$: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Частное решение неоднородной системы - $(1;0;0;0)$.

Общее решение неоднородной системы можно записать в виде $C_1(-2;1;0)+C_2(-4;3;0;1)+(1;0;0;0)$.

4.5 Собственные числа и собственные векторы матрицы

А 4.5.1 Постановка задачи. Пусть дана квадратная матрица A порядка n. В приложениях теории матриц большую важность имеет вопрос: существует ли действительное число λ и ненулевой вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такие, что

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Если это так, то число λ называется *собственным числом* матрицы A, а вектор $\vec{x}$ - *собственным вектором* матрицы A, соответствующим числу λ

А4.5.2 Теорема (свойства собственных векторов)

1) Если $\vec{x}$ - собственный вектор матицы A, то для любого числа $\alpha \neq 0$ вектор $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ также является собственным вектором той же матрицы
2) Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ - собственные векторы матрицы A, соответствующие одному и тому же собственному числу, то вектор $\vec{y} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ также является собственным вектором той же матрицы (и соответствует тому же собственному числу)

Доказательство: 1) Пусть $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, тогда $A\vec{y} = A(\alpha\vec{x}) = (A \cdot \alpha)\vec{x} = \alpha \cdot (A\vec{x}) = \alpha \cdot \lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$

1) Пусть $A\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1$ и $A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_2$, тогда

$$A\vec{y} = A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda\vec{y}.$$ *Теорема доказана.*

А4.5.3 Алгоритм нахождения собственных чисел. Поскольку $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то $A\vec{x} = \lambda E\vec{x}$, где Е – единичная матрица, то $A\vec{x} - \lambda E\vec{x} = 0$, $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$.

Последнее матричное равенство является системой линейных уравнений, в которой неизвестными являются координаты вектора $\vec{x}$. Эта система имеет очевидное решение $\vec{x} = 0$. Если определитель системы отличен от нуля, то эта система будет иметь единственное решение, а именно, $\vec{x} = 0$. Чтобы система имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен нулю:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Поскольку $\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, то

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

После раскрытия определителя в равенстве

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

получится алгебраическое уравнение степени n. Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы A.

Примеры: Найти собственные числа матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$, являющиеся собственными числами матрицы A.

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda-\lambda^2+2 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\lambda \\ \lambda-\lambda^2+2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\lambda \\ (1+\lambda)(\lambda-2) & 1+\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\lambda \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\cdot(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda-2)\cdot(1-\lambda)$$

Собственными числами матрицы В являются $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

4.6 Нахождение собственных векторов матрицы

Пусть λ - собственное число матрицы A. Рассмотрим систему линейных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$. Определитель этой системы равен нулю и система имеет бесконечно много решений. Найдем фундаментальную систему решений системы уравнений $(A - \lambda E)X = 0$. Любой вектор, являющийся линейной комбинацией векторов фундаментальной системы, является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

Пример: Найти собственные векторы матрицы $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Собственные числа матрицы B равны $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=2$.

При $\lambda_1=-1$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+2y-z=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}$$

Определитель этой системы $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$, так в нем первая и третья строки одинаковы.

Минор $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0$. Поэтому рассматриваем систему уравнений $\begin{cases}2x-y=-z\\ x+2y=z\end{cases}$. Полагая $z=1$, получим систему $\begin{cases}2x-y=-1\\ x+2y=1\end{cases}$, имеющую решение $x=-\frac{1}{5}, y=-\frac{3}{5}$. Единственный вектор фундаментальной системы равен $\left(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5},1\right)$ и любой собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1=-1$, будет иметь вид $\alpha\cdot\left(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5},1\right)$.

При $\lambda_2=1$: $\begin{cases}y+z=0\\ x-z=0\\ 2x-y-z=0\end{cases}$. Переходим к системе $\begin{cases}y+z=0\\ x-z=0\end{cases}$. При $z=1$ получим $x=1, y=-1$ и любой собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2=1$, имеет вид $\alpha\cdot(1,-1,1)$.

При $\lambda_3=2$: $\begin{cases}-x-y+z=0\\ x-y-z=0\\ 2x-y-2z=0\end{cases}$. Переходим к системе $\begin{cases}-x-y=-z\\ x-y=z\end{cases}$.

При $z=1$: $x=1, y=0$ и в этом случае все собственные векторы имеют вид $\alpha\cdot(1,0,1)$.

4.7 Некоторые важные виды матриц

А4.7.1 Определение: Квадратная матрица A называется *симметрической (симметричной) матрицей*, если для любых ее элементов выполняется равенство $a_{ij}=a_{ji}$.

Пример. Матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 8\\ 7 & 1 & -3\\ 8 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 6\\ -4 & 5 & 7 & 0\\ 1 & 6 & 0 & 9\end{pmatrix}$ - симметричные.

А4.7.2 Определение. Матрица A порядка n называется *положительно определенной матрицей*, если она имеет n действительных собственных чисел (среди которых могут быть одинаковые) и все эти числа положительны.

Контрольные вопросы:

1.Какая система линейных уравнений называется однородной? Сформулируйте теорему о пространстве решений однородной системы.

2. Что называется фундаментальной системой решений? Что называется общим решением однородной системы линейных уравнений? Сформулируйте алгоритм нахождения общего решения однородной системы.

3. Какая система линейных уравнений называется неоднородной? Какая система линейных уравнений называется совместной? Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли. Сформулируйте алгоритм нахождения общего решения неоднородной системы.

4. Что называется собственным числом и что – собственным вектором матрицы? Сформулируйте алгоритм нахождения собственных чисел матрицы.

5. Сформулируйте алгоритм нахождения собственных векторов матрицы.

6. Какая матрица называется симметрической? Какая матрица называется положительно определенной?