Лекция 16 Поверхности второго порядка

31.1 Понятие цилиндрической поверхности

Г31.1.1 Определение. Поверхность S называется *цилиндрической поверхностью* с образующей, параллельной прямой L, если она обладает следующим свойством: для любой точки $M \in S$ прямая, проходящая через эту точку параллельно прямой L, полностью лежит на поверхности S. Любая прямая, полностью лежащая на цилиндрической поверхности или параллельная ей, называется ее *образующей*.

Г31.1.2 *Замечание1.* В частности, плоскость, пара параллельных плоскостей или пара пересекающихся плоскостей являются цилиндрическими поверхностями.
Г31.1.3 *Замечание 2.* Наглядно цилиндрическую поверхность можно представить следующим образом: рассмотрим некоторую плоскую линию и из каждой ее точки проведем параллельные прямые. Полученная поверхность будет цилиндрической.

31.2 Цилиндрические поверхности в декартовой системе координат

Г31.2.1 Теорема (об уравнении цилиндрической поверхности)

1) Любое уравнение вида $F(x,y)=0$, т.е. уравнение, не содержащее переменной z, если задает какую-либо поверхность, то эта поверхность – цилиндрическая с образующей, параллельной координатной оси Oz.
2) Любое уравнение вида $F(x,z)=0$ если задает какую-либо поверхность, то эта поверхность – цилиндрическая с образующей, параллельной координатной оси Oy.
3) Любое уравнение вида $F(y,z)=0$ если задает какую-либо поверхность, то эта поверхность – цилиндрическая с образующей, параллельной координатной оси Ox.
4) Любая цилиндрическая поверхность в некоторой системе координат может быть задана уравнением $F(x,y)=0$

Доказательство: 1) Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$. Поскольку уравнение $F(x,y)=0$ не зависит от z, ему будут удовлетворять координаты любой точки $M(x_0,y_0,z)$, т.е. при одних и тех же координатах x_0, y_0 третья координата может быть любой. Значит, координаты всех точек прямой, параллельной оси Oz и проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ будут удовлетворять уравнению поверхности S.
2),3) Доказываются аналогично.
4) Направив ось Oz параллельно образующей цилиндра, получим поверхность, соответствующую первой части теоремы. *Теорема доказана*.

***Замечание*:** Система уравнений $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ определяет линию, получающуюся пересечением цилиндрической поверхности $F(x,y)=0$ и координатной плоскости xOy. Значит, для построения цилиндрической поверхности, заданной уравнением $F(x,y)=0$ достаточно построить в плоскости xOy линию, заданную тем же уравнением и провести через все ее точки прямые, параллельные оси аппликат.

31.3 Цилиндрические поверхности второго порядка

Г31.3.1 Определение. Поскольку уравнение $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, рассматриваемое как уравнение линии, задает на плоскости эллипс, то задаваемые им, а также уравнениями

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ и $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ поверхности, называются *эллиптическими цилиндрами*.

Г31.3.2 Определение. Аналогично, поверхности, задаваемые уравнениями $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$ и $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$, называются *гиперболическими цилиндрами*.

Г31.3.3 Определение. Поверхности, задаваемые уравнениями $(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$, $(y-y_0)^2=\pm 2p(z-z_0)$, $(z-z_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$, $(z-z_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$, $(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$ и $(x-x_0)^2=\pm 2p(z-z_0)$, называются *параболическими цилиндрами*.

На рисунках 85-88 показаны круговой цилиндр, эллиптический цилиндр, параболический цилиндр и одна из двух ветвей гиперболического цилиндра

Рис. 85 Круговой цилиндр

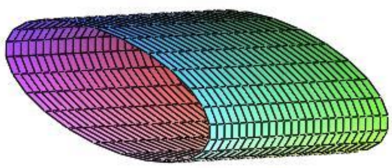


Рис. 86 Эллиптический цилиндр

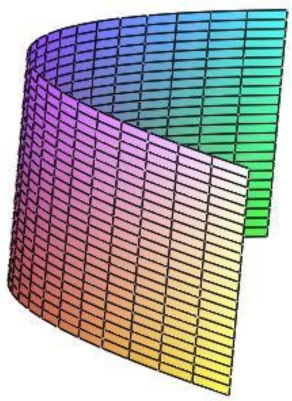


Рис. 87 Параболический цилиндр

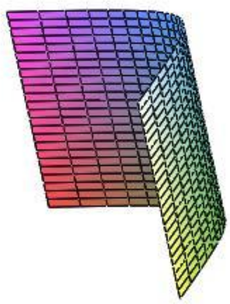


Рис.88 Ветвь гиперболического цилиндра

Г31.3.4 Пример 1. Уравнения $x^2+x+1=0$, $y^2+2y+3=0$, $z^2+3z+3=0$ задают на плоскости пару мнимых плоскостей, так как все три уравнения имеют отрицательный дискриминант (следует из Г31.1.1 и Г31.1.3).

Г31.3.5 Пример 2. Каждое из уравнений $x^2 - 2x + 1 = 0$, $y^2 + -6y + 9 = 0$, $z^2 - 4z + 4 = 0$ задает в пространстве пару совпадающих плоскостей. Первое уравнение задает плоскость $x = 1$, второе - $y = 3$, третье - $z = 2$.

Г31.3.6 Пример 3. Каждое из уравнений $x^2 - 5x + 6 = 0$, $y^2 - 6y + 8 = 0$, $z^2 - 7z + 10 = 0$ задает в пространстве пару параллельных плоскостей. Первое – плоскости $x = 2$ и $x = 3$, второе – плоскости $y = 2$ и $y = 4$, третье – плоскости $z = 2$ и $z = 5$.

Г31.3.7 Пример 4. Уравнение $x^2 + 4x + 2y + 6 = 0$ может быть приведено к виду $(x+2)^2 = -2(y+1)$. Если это уравнение рассматривать как уравнение линии на плоскости xOy, то оно задает параболу, значит, рассматриваемое как уравнение поверхности, оно задает параболический цилиндр.

Аналогично, уравнения $y^2 + 6y + 4z + 17 = 0$ и $z^2 + x + 2z + 1 = 0$ также задают параболические цилиндры.

Г31.3.8 Пример 5. Рассмотрим уравнение $x^2 + y - z = 0$. Применим преобразование координат

$$\begin{cases} y = Y\cos\alpha - Z\sin\alpha \\ z = Y\sin\alpha + Z\cos\alpha \end{cases} : \; x^2 + Y(\cos\alpha + \sin\alpha) - Z(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0.$$

Положим $\cos\alpha - \sin\alpha = 0$, тогда можно взять $\alpha = 45^\circ$ и уравнение примет вид: $x^2 + Y\sqrt{2} = 0$, т.е. снова получаем параболический цилиндр.

31.5 Понятие конической поверхности

Г31.5.1 Определение. *Однородным многочленом* порядка k от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется многочлен $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий равенству $P(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k P(x_1, x_2, ..., x_n)$ при любом $t \in R$.

Примеры: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ - однородный многочлен второго порядка от двух переменных, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ - однородный многочлен второго порядка от трех переменных, $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ - однородный многочлен третьего порядка от двух переменных.

Г31.5.2 *Замечание.* Однородные многочлены второго порядка от любого количества переменных – это квадратичные формы.

Г31.5.3 Определение. *Конической поверхностью порядка* n называется поверхность, которая в некоторой (вообще говоря, аффинной) системе координат может быть задана уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где $\Phi(x, y, z)$ - однородный многочлен порядка n.

Г31.5.4 Теорема (характеристическое свойство конических поверхностей) Пусть в некоторой системе координат с началом O коническая поверхность S задана уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где $\Phi(x, y, z)$ - однородный многочлен порядка n. Тогда, если некоторая точка M лежит на поверхности S, то и вся прямая OM лежит на поверхности S.

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in S$ и $M'(x, y, z) \in OM$. Тогда $\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0, z_0)$ и $\exists \lambda \in R$ такое, что $\overrightarrow{OM'} = (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, поскольку векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$, будучи лежащими на одной прямой, коллинеарны. Поскольку $M(x_0, y_0, z_0) \in S$, то верно равенство $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$. А поскольку $\Phi(x, y, z)$ - однородный многочлен порядка n, то

$\Phi(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = \lambda^n \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$. А это доказывает, что точка $M' = (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ лежит на поверхности S.

Г31.5.5 *Замечание 2.* Наглядно коническую поверхность можно представить следующим образом: рассмотрим некоторую плоскую линию L и точку O, не лежащую в плоскости этой линии. Соединим точку O с каждой точкой данной плоской линии лучом и продолжим эти лучи в обе стороны (до получения прямых линий). Полученная поверхность будет конической.

Г31.5.6 Определение. Линия L при этом называется *направляющей линией конуса*, а проведенные прямые – *образующими* конуса.

31.8 Конусы второго порядка

Г31.8.1 Определение. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ называют *каноническим уравнением конуса* второго порядка. Наряду с ним еще два уравнения носят такое же название: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$. В первом случае осью симметрии конуса является ось Oz, во втором – ось Ox, в третьем – ось Oy.

Г31.8.2 Пример 1. Убедиться, что уравнение $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$ задает конус, найти координаты вершины этого конуса и сечения конуса координатными плоскостями.

Решение. $(3x^2 - 6x) + (3y^2 + 4y) - (3z^2 - 4z) + 3 = 0$; $(x^2 - 2x) + \left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) - \left(z^2 - \frac{4}{3}z\right) + 1 = 0$;

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + \left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9} - \left(z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} + 1 = 0$;

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$. Получили уравнение параллельно смещенного конуса с вершиной в точке $\left(1; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

В сечении конуса координатной плоскостью $z = 0$ получим $(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$;

$(x-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ - окружность радиуса $\frac{2}{3}$.

В сечении конуса координатной плоскостью $y = 0$ получим $(x-1)^2 + \left(0 + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$;

$(x-1)^2 - \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$ - гипербола.

В сечении конуса координатной плоскостью $x = 0$ снова получим гиперболу: $(0-1)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$; $+\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = -1$.

32. 1 Уравнение поверхности вращения

Г32.1.1 Уравнение поверхности вращения Рассмотрим уравнение поверхности S вида $F(x^2 + y^2, z) = 0$ и пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности S. В плоскости $z = z_0$

рассмотрим окружность C с центром в точке $N(0;0;z_0)$, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Радиус этой окружности равен $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, е ее уравнение - $x^2+y^2=r^2, z=z_0$. Поскольку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, то $F(r^2,z)=0$. А так как во всех точках окружности C выполняется равенство $x^2+y^2=r^2$, то все точки окружности лежат на поверхности $x^2+y^2=r^2, z=z_0$.

Г32.1.2 Теорема. Если уравнение $F(x,z)=0$ задает на плоскости xOz некоторую линию L, то поверхность, полученная вращением этой линии вокруг оси Oz будет задаваться уравнением $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

Доказательство. Следует из Г32.1.1.

Г32.1.3 *Замечание*. Если уравнение $F(x,y)=0$ задает на плоскости xOy некоторую линию L, то поверхность, полученная вращением этой линии вокруг оси Ox будет задаваться уравнением $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

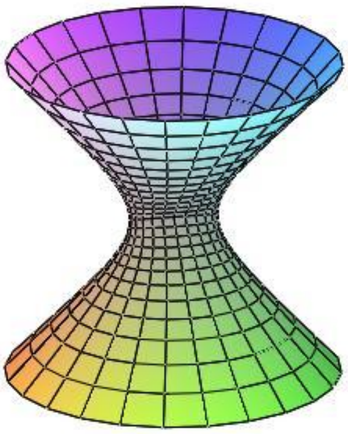
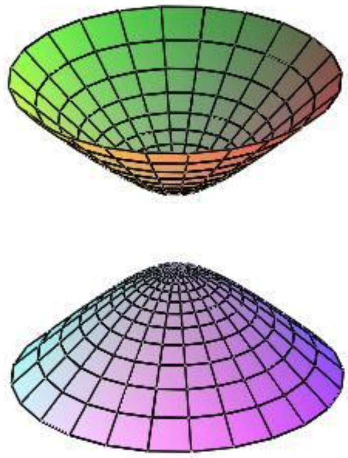
32. 3 Эллипсоиды и гиперболоиды вращения

Г32.3.1 Эллипсоид вращения. При вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси абсцисс получим поверхность, заданную уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ и называемую *эллипсоид вращения*.

Г32.3.2 Однополостный гиперболоид вращения. Аналогично при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ вокруг оси абсцисс получим поверхность, заданную уравнением $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ и называемую *однополостный гиперболоид вращения*. Поверхности, заданные уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ также являются однополостными гиперболоидами вращения, лишь иначе ориентированными в пространстве.

Рис. 95 Эллипсоид вращения

Г32.3.3 Двуполостный гиперболоид вращения. При вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси абсцисс получим поверхность, заданную уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ и называемую *двуполостный гиперболоид вращения*. Поверхности, заданные уравнениями $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ также являются однополостными гиперболоидами вращения, лишь иначе ориентированными в пространстве.

 Рис. 96 Однополостный гиперболоид вращения	 Рис. 97 Двуполостный гиперболоид вращения
Рис. 96 Однополостный гиперболоид	Рис. 97 Двуполостный гиперболоид

32. 4 Параболоид вращения и конус

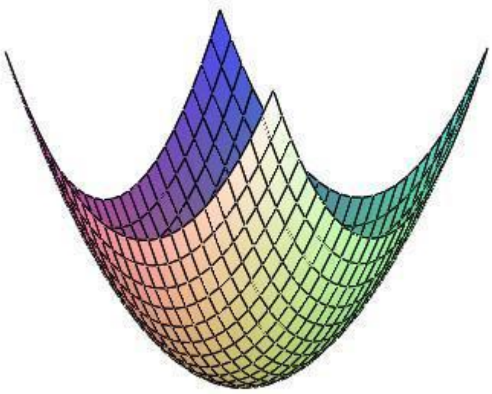


Рис. 98 Параболоид вращения

Г32.4.1 Параболоид вращения. Рассмотрим вращение параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси абсцисс. Получим уравнение $x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2p}$, задающее *параболоид вращения*. Уравнения $x = -\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p}$, $y = \frac{x^2}{2p} + \frac{z^2}{2p}$, $y = -\frac{x^2}{2p} - \frac{z^2}{2p}$, $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p}$, $z = -\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2p}$ также задают параболоиды вращения, по-другому ориентированные в пространстве.

Г32.4.2 Круговой конус. Если будем вращать прямую $y = ax$ вокруг оси абсцисс, то получим $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = ax$, $y^2 + z^2 = a^2x^2$, $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{1} = 0$ - уравнение кругового конуса, частный случай конуса второго порядка, рассмотренного в предыдущей теме.

32.5 Распадающиеся поверхности

Г32.5.1 Уравнение пары плоскостей. Пусть задано уравнение второго порядка от трех переменных $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$. Если можно представить это уравнение в виде произведения $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, где A_i, B_i, C_i, D_i $i = 1,2$ - действительные числа, то очевидно, что данное уравнение второго порядка задает две действительные плоскости (пересекающиеся, параллельные или совпадающие).

Г32.5.2 Пара пересекающихся плоскостей. Пусть уравнение второго порядка задает пару пересекающихся плоскостей и L - их общая прямая. Направим ось Oz по прямой L, а оси Ox, Oy направим перпендикулярно оси Oz в плоскостях, биссекторных для рассматриваемой пары пересекающихся плоскостей. Тем самым получим прямоугольную систему координат. Тогда пару пересекающихся плоскостей можно рассматривать по определению как цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Направляющей линией этой цилиндрической поверхности будет пара пересекающихся прямых, проходящих через начало координат по биссектрисам координатных квадрантов. Значит, эта пара прямых и пара пересекающихся плоскостей задаются уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Г32.5.3 Пара параллельных плоскостей. Пусть уравнение второго порядка задает пару параллельных плоскостей. Рассмотрим плоскость π, параллельную этой паре плоскостей и расположенную на одинаковом расстоянии a от них (то есть – строго посередине между ними). Выберем в плоскости π произвольную точку O, которую будем считать началом координат, проведем через эту точку взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, а ось Oz, проходящую через начало координат, направим перпендикулярно плоскости π. Тогда уравнение одной из плоскостей будет $z = a$, второй - $z = -a$. Уравнение пары параллельных плоскостей имеет вид $z^2 - a^2 = 0$.

Г32.5.4 Пара совпадающих плоскостей. Пусть уравнение второго порядка задает пару совпадающих плоскостей. Тогда эту пару (по существу – одну плоскость) будем считать координатной плоскостью xOy, в которой взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy направим произвольно, а ось Oz направим перпендикулярно этой паре совпадающих плоскостей. Уравнение пары совпадающих плоскостей примет вид $z = 0$.

Г32.5.5 Пара мнимых плоскостей. Если уравнение второго порядка от трех переменных $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$ можно представить в виде произведения $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, где A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,2)$ - комплексные числа и нельзя представить в виде произведения $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, где A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,2)$ - действительные числа, то говорят, что уравнение второго порядка задает пару мнимых плоскостей.

Г32.5.6 ***Замечание 1.*** Очевидно, что если можно представить уравнение второго порядка в виде произведения $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, где A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,2)$ - действительные числа, то можно его представить и в виде произведения $(A_1x + iB_1y + iC_1z + iD_1)(-iA_2x - iB_2y - iC_2z - iD_2) = 0$.

Г32.5.7 ***Замечание 2.*** В соответствии с Г32.5.2 и Г32.5.3 естественно считать, что уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ задает пару пересекающихся мнимых плоскостей, а уравнение $z^2 + a^2 = 0$ - пару параллельных мнимых плоскостей.

Г32.5.8 Примеры. 1) Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$ задает пару совпадающих плоскостей, так как $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$; 2) Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 = 0$ задает пару пересекающихся плоскостей, так как $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2z - 1 = (x + y)^2 - (z + 1)^2 = (x + y + z + 1)(x + y - z - 1)$; 3) Уравнение $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 0$ очевидно нельзя разложить на множители с действительными коэффициентами, так как $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = (x + y)^2 + z^2$, но $(x + y)^2 + z^2 = (x + y)^2 - (iz)^2 = (x + y - iz)(x + y + iz)$, значит, уравнение $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 0$ задает пару мнимых плоскостей.

32.8 Эллипсоиды

Г32.8.1 Определение. *Эллипсоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе координат может быть задана уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Г32.8.2 *Замечание 1.* Если ровно два из трех параметров a,b,c равны между собой, то уравнение задает эллипсоид вращения (Г19.3.1). Если же $a=b=c$, то получим уравнение сферы радиуса a: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Г32.8.3 *Замечание 2.* Из уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ следует, что $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$, $-c\le z\le c$. Значит, эллипсоид – ограниченная поверхность и любое ее сечение плоскостью будет ограниченной кривой второго порядка. Поэтому все сечения эллипсоида плоскостями, не вырождающиеся в точку – это эллипсы.

32.9 Гиперболоиды

Г32.9.1 Определение. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе координат может быть задана уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Г32.9.2 Определение. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе координат может быть задана уравнением $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Г32.9.3 ***Замечание 1.*** Если хотя бы два из трех параметров a,b,c равны между собой, то уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\left(-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$ задает однополостный (двуполостный) гиперболоид вращения (Г32.3.2, Г32.3.3).

Г32.9.4 ***Замечание 2.*** Поскольку уравнения гиперболоидов не меняются при замене x на $(-x)$, y, на $(-y)$, z на $(-z)$, то начало координат является центром симметрии как однополостного, так и двуполостного гиперболоидов. Форму этих гиперболоидов можно представить по форме гиперболоидов вращения (тема 19), сжатых или растянутых вдоль оси Oz.

Г32.9.5 Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. Рассмотрим однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. При $z=0$ в сечении гиперболоида получим окружность минимального возможного для этого гиперболоида радиуса (*горловая окружность* $x^2+y^2=1$ *гиперболоида*). Пусть точка M_0 лежит на горловой окружности. Повернем систему координат вокруг оси Oz так, чтобы ось Oy прошла через точку M_0: $(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-z^2=1$; $(x')^2+(y')^2-z^2=1$. Таким образом, уравнение при повороте сохранило свой вид, а точка M_0 в новой системе координат имеет координаты $M_0(0;1;0)$.

Плоскость $y'=1$ пересекает гиперболоид $(x')^2+(y')^2-z^2=1$ по линии $(x')^2-z^2=0$, являющейся парой пересекающихся прямых. Но точка M_0 была выбрана произвольно, значит, через любую точку горловой окружности проходит пара пересекающихся прямых, лежащих на однополостном гиперболоиде $x^2+y^2-z^2=1$.

Преобразование сжатия (растяжения) $x = \dfrac{X}{a}$, $y = \dfrac{Y}{b}$, $z = \dfrac{Z}{c}$, очевидно, переводит прямую в прямую, значит, через каждую точку *горлового эллипса* гиперболоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ также проходят две пересекающиеся прямые, лежащие на гиперболоиде.

32.10 Параболоиды

Г32.10.1 Определение. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе координат может быть задана уравнением $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$ при $p \cdot q > 0$.

Г32.10.2 *Замечание 1.* Форму эллиптического параболоида можно представить, сжав по одной из осей координат параболоид вращения (Рис.99).

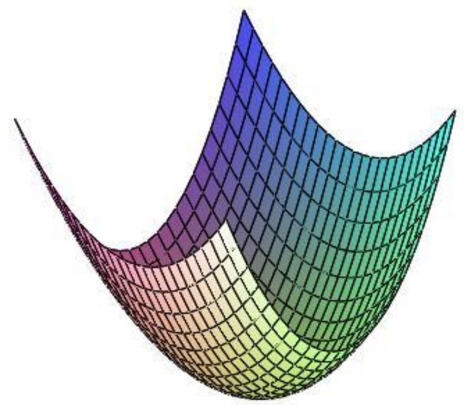
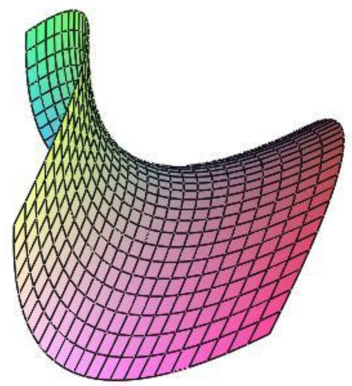
	

Рис. 99 Эллиптический параболоид	Рис. 100 Гиперболический параболоид

Г32.10.3 *Замечание 2.* Сечения эллиптического параболоида плоскостями – это эллипсы и параболы.

Г32.10.4 Определение. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе координат может быть задана уравнением $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$ при $p \cdot q > 0$.

Г32.10.5 ***Замечание 3.*** Форма гиперболического параболоида показана на рис. 100. Сечения гиперболического параболоида плоскостями – это гиперболы и параболы.

Г32.10.6 Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Рассмотрим гиперболический параболоид $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$ и преобразованием сжатия (растяжения) $x' = \dfrac{x}{\sqrt{2p}}, y' = \dfrac{y}{\sqrt{2q}}$ приведем его уравнение к виду $z = (x')^2 - (y')^2$. Рассмотрим сечения параболоида плоскостями $y' = x' + c$, $y' = -x' + c$: $\begin{cases} z = (x')^2 - (y')^2 \\ y' = x' + c \end{cases}$; $\begin{cases} z = -2cx' - c^2 \\ y' = x' + c \end{cases}$.

Получили общие уравнения прямой. Аналогично: $\begin{cases} z = (x')^2 - (y')^2 \\ y' = -x' + c \end{cases}$; $\begin{cases} z = 2cx' - c^2 \\ y' = -x' + c \end{cases}$ - снова общие уравнения прямой. Когда параметр c пробегает все значения $c \in (-\infty; \infty)$, то плоскости

$y^{'} = x^{'} + c$, $y^{'} = -x^{'} + c$ пройдут через все точки параболоида. Значит, через любую точку гиперболического параболоида проходит пара пересекающихся прямых.

Контрольные вопросы.

1. Что называется цилиндрической поверхностью? Каким уравнением может быть задана цилиндрическая поверхность?
2. Что называется эллиптическим цилиндром? Что называется гиперболическим цилиндром? Что называется параболическим цилиндром?
3. Дать определение конической поверхности. Сформулировать характеристическое свойство конических поверхностей.
4. Запишите уравнение поверхности вращения заданной линии.
5. Запишите уравнения эллипсоида вращения, однополостного и двуполостного гиперболоидов вращения.
6. Запишите уравнения параболоида вращения и кругового конуса.
7. Дать определения: эллиптического цилиндра, мнимого эллиптического цилиндра, гиперболического цилиндра, параболического цилиндра.
8. Дать определения конуса и мнимого конуса.
9. Дать определения эллипсоида и мнимого эллипсоида.
10. Дать определения однополостного и двуполостного гиперболоидов.
11. Дать определения эллиптического и гиперболического параболоидов.