Лекция 15 Производная функции

15.1 Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости.
Рассмотрим прямолинейно движущуюся материальную точку и зададимся вопросом о вычислении ее мгновенной скорости в момент времени t_0. Пусть $S(t_0)$ - путь, пройденный точкой к моменту времени $t = t_0$. Зададим приращение Δt переменной t, тогда $S(t_0 + \Delta t)$ - путь, пройденный точкой к моменту времени $t_0 + \Delta t$, а $S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ - путь, пройденный за время Δt. Средняя скорость материальной точки за время Δt равна $\dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$. Устремим $\Delta t \to 0$, тогда естественно считать, что мгновенная скорость в момент времени t_0 равна $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$

Задача о касательной.
Пусть дана линия L на плоскости и на этой линии выбрана точка M. Выберем на этой линии еще одну точку M_1 и через две выбранные точки проведем секущую. Устремим точку M_1 к точке M вдоль линии L, тогда секущая M_1M будет менять свое положение на плоскости.

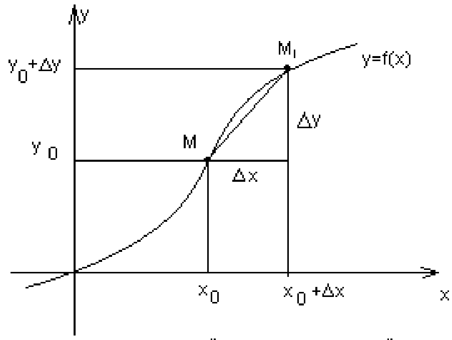

Рис. 61 Геометрический смысл производной

М15.1.1 Определение: если существует предельное положение секущей M_1M при $M_1 \to M$ вдоль линии L, то прямая, находящаяся в этом предельном положении называется *касательной* к линии L в точке M.

Вычислим тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX если линия L является графиком функции $y = f(x)$. Пусть точка M имеет координаты (x_0, y_0), а точка M_1- координаты $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, тогда тангенс угла наклона секущей M_1M равен $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, или, что то же самое, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. По определению касательной получим, что ее тангенс угла наклона равен

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

15.2. Определение производной

Сравнивая две рассмотренные задачи, видим, что в результате их решения получены сходные выражения.

М15.2.1 Определение. Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$

М15.2.2 *Замечание 1.* Иногда производную удобнее считать по формуле $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(заменив $x_0 + \Delta x$ на x).

М15.2.3 *Замечание 2.* Из определения М15.2.1 и задачи о касательной следует *геометрический смысл производной*: производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

М15.2.4 *Замечание 3.*Из замечания 1 следует, что уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

М15.2.5 *Замечание 4*. Можно определить *правую и левую производные* функции в точке как соответствующие правый и левый пределы. Производная в точке существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают правая и левая производные.

М15.2.6 *Замечание 5* Поскольку предел может быть равен бесконечности, то и производная также может быть бесконечной.

М15.2.7 Определение. Если для любой точки $x \in (a;b)$ существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то этот предел является функцией точки x промежутка $(a;b)$. Эта функция называется *производной* функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ и обозначается $f'(x)$.

15.3. Производные основных элементарных функций

М15.3.1 Производная постоянной функции $f(x) = C$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

М15.3.2 Производная степенной функции $f(x) = x^\alpha$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x}.$$

Поделим числитель и знаменатель дроби на выражение x^α :.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x^\alpha}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Воспользуемся теоремой о произведении пределов и во втором пределе заменим выражение $\dfrac{\Delta x}{x}$ на y: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} x^{\alpha-1} \cdot \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha x^{\alpha-1}$.

В последнем равенстве воспользовались тем, что выражение $x^{\alpha-1}$ не зависит от Δx, поэтому не меняется и в данном случае может считаться постоянной. Предел $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha$ был вычислен в М13.11.3 в).

М15.3.3 Производная показательной функции $f(x) = a^x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a .$$

Здесь снова применили результат вычислений М13.11.3б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ и воспользовались тем, что в пределе $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x$ величину a^x можно считать постоянной.

М15.3.4 Производная логарифмической функции $f(x) = \log_a x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

В предыдущем равенстве воспользовались тем, что разность логарифмов равна логарифму частного. Поделим теперь числитель и знаменатель дроби на x, воспользуемся теоремой о пределе произведения, независимостью выражения $\frac{1}{x}$ от величины Δx и результатом М13.11.3а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}:\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}=\frac{1}{x\ln a}.$$

М15.3.5 Тригонометрические функции

а) $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

Обозначим $\frac{\Delta x}{2}=y$, тогда

$$(\sin x)'=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cos(x+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos(x+y)=\cos x.$$

б) $(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x$$

в) $(tgx)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{tg(x+\Delta x)-tgx}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\sin x\cos(x+\Delta x)}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

г) $(ctgx)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{ctg(x+\Delta x)-ctgx}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)\sin x-\cos x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x\sin x\sin(x+\Delta x)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sin x\sin(x+\Delta x)}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

15.4. Производная и непрерывность

М15.4.1 Теорема (о непрерывности функции, имеющей производную)

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: Поскольку $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$. Значит, $f(x_0+\Delta x)-f(x)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. Если $\Delta x\to 0$, то $f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\to 0$ и, значит, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)\to 0$ и из М11.1.7, получаем, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. *Теорема доказана*.

М15.4.2 ***Следствие:*** Если некоторая функция имеет разрыв в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

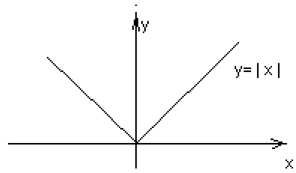

Рис. 62 График функции "модуль x"

М15.4.3 ***Замечание:*** Существуют непрерывные функции, не имеющие производной.

Пример: $y=|x|$ в точке $x_0=0$

Для доказательства непрерывности в точке $x_0=0$ воспользуемся М12.1.7: пусть $\Delta x\to 0$, тогда $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)-f(0)=|\Delta x|-0=|\Delta x|\to 0$.

Что и требовалось доказать.

Чтобы показать, что функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x_0=0$, покажем, что односторонние пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ не совпадают.

Тогда не будет существовать предел $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1,$$ что и требовалось.

Замечание. В точке $x=0$ график функции $y=|x|$ испытывает так называемый «излом». Наличие такого «излома» на графике какой-либо функции говорит об отсутствии производной в точке «излома».

15.5. Производная обратной функции

М15.5.1 Теорема (о производной обратной функции)

Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную обратную функцию и в точке x_0 существует не равная нулю производная $f'(x_0)\neq 0$, тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство: Придадим значению $y=y_0$ приращение Δy, тогда соответствующее приращение Δx получит и функция $x=f^{-1}(y)$. При этом

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Если $\Delta y \to 0$, то, в силу непрерывности функции $x = f^{-1}(y)$, $\Delta x \to 0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$ и $\frac{\Delta x}{\Delta y} \to \frac{1}{f'(x_0)}$, что и требовалось. *Теорема доказана.*

В качестве примера применения доказанной теоремы найдем производные обратных тригонометрических функций.

Пример.

М15.5.2 $y = \arcsin x$

$x = \sin y$, значит, $x' = \cos y$ и $y' = \frac{1}{\cos y}$.

По определению арксинуса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\cos y \geq 0$ и, значит, $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, откуда $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

М15.5.3 $y = \arccos x$

$x = \cos y$, $x' = -\sin y$, $y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Знак перед корнем $\sqrt{1-x^2}$ выбран положительным, поскольку по определению арккосинуса $y \in [0; \pi]$ и, значит, $\sin y \geq 0$.

М15.5.4 $y = arctgx$

$$x = tgy,\ x' = \frac{1}{\cos^2 y},\ y' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

М15.5.5 $y = arcctgx$

$$x = ctgy,\ x' = -\frac{1}{\sin^2 y},\ y' = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

15.6. Правила нахождения производной явной функции

М15.6.1 Теорема (производная и арифметические операции)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0, то их сумма, разность и произведение также имеют производную в той же точке и при этом :

1) $(f(x_0)+g(x_0))' = f'(x_0)+g'(x_0)$

2) $(f(x_0)-g(x_0))' = f'(x_0)-g'(x_0)$

3) $(f(x_0)\cdot g(x_0))' = f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет производную в точке x_0 и

4) $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Доказательство: 1) Пусть $h(x)=f(x)+g(x)$, тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-f(x_0)-g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2) аналогично

3) Пусть $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)\cdot(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))+f(x_0)\cdot(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)\cdot(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+$$

$$+f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)$$

4) Рассмотрим вспомогательную функцию $H(x)=\dfrac{1}{g(x)}$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{H(x_0+\Delta x)-H(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x_0)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

К функции $h(x)=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ теперь можно применить результат предыдущего пункта этой теоремы: $h'(x_0)=f'(x_0)\cdot\dfrac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\dfrac{1}{g(x_0)}\right)'=$

$$=f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}-f(x_0)\cdot\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ *Теорема доказана.*

M15.6.2 *Следствие 1.* Если С – постоянная, то $(Cf(x))'=C\cdot f'(x)$

Доказательство: $(Cf(x))'=C\cdot f'(x)+C'\cdot f(x)=C\cdot f'(x)$.

M15.6.3 *Следствие 2.* Для любых чисел $C_1,C_2,...,C_n$ верно равенство $(C_1f_1+C_2f_2+\ldots+C_nf_n)'=C_1f_1'+C_2f_2'+\ldots+C_nf_n'$

M15.6.4 *Следствие 3.* $(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'f_2\ldots f_n+f_1f_2'\ldots f_n+\ldots+f_1f_2\ldots f_n'$. (легко доказывается по индукции)

M15.6.5 Теорема (производная сложной функции)

Пусть функция $u=g(x)$ имеет в некоторой точке x_0 производную, а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u_0=g(x_0)$. Тогда функция $y=f(g(x))$ будет иметь в точке x_0 производную, равную $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Доказательство: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'$, значит, $\frac{\Delta y}{\Delta u}-y'=\alpha(\Delta u)$, где $\alpha(\Delta u)\to 0$ при $\Delta u\to 0$. Отсюда получаем: $\Delta y=\Delta u\cdot y'+\alpha(\Delta u)\Delta u$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot y'+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot y'=u'\cdot y'$. Что и требовалось. *Теорема доказана*.

М15.6.6 *Следствие.* Формулу можно аналогично обобщить на случай любого количества участвующих в композиции функций.

М15.6.7 Пример 1. Найти производные функций $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $chx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $thx=\frac{shx}{chx}$, $cthx=\frac{chx}{shx}$, $arshx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $archx=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. $(shx)'=\frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$, аналогично $(chx)'=shx$.

$(thx)'=\frac{(shx)'chx-shx(chx)'}{ch^2x}=\frac{1}{ch^2x}$; $(cthx)'=\frac{(chx)'shx-chx(shx)'}{sh^2x}=-\frac{1}{sh^2x}$;

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

М15.6.8 Пример 2. Найти производную функции $y=x^{\sin x}$

Решение. Из тождества $x=e^{\ln x}$ следует $y=\left(e^{\ln x}\right)^{\sin x}=e^{\ln x\cdot\sin x}$.

$$\left(e^{\ln x\cdot\sin x}\right)'=e^{\ln x\cdot\sin x}\cdot(\ln x\cdot\sin x)'=e^{\ln x\cdot\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cdot\cos x\right).$$

15.7 Дифференциал функции

М15.7.1 Определение: Если приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, где A - некоторая постоянная, $o(\Delta x)$ - бесконечно малая величина большего порядка, чем Δx при $\Delta x\to 0$, то функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, а величина $A\cdot\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy (или $df(x)$).

Примеры: 1) Найдем дифференциал функции $V(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$ (объем шара).

$$\Delta V(R)=V(R+\Delta R)-V(R)=\frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3-\frac{4}{3}\pi R^3=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(R^3+3R^2\Delta R+3R(\Delta R)^2+(\Delta R)^3-R^3\right)=$$

$$=4\pi R^2\Delta R+\frac{4}{3}\pi(3R+\Delta R)(\Delta R)^2.$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta R\to 0}\frac{(3R+\Delta R)(\Delta R)^2}{\Delta R}=\lim\limits_{\Delta R\to 0}\Delta R(3R+\Delta R)=0$, то $(3R+\Delta R)(\Delta R)^2=o(\Delta R)$ и, следовательно, $dV(R)=4\pi R^2\Delta R$.

2) Найдем дифференциал функции $S(t)=\dfrac{gt^2}{2}$ (путь, пройденный при свободном падении тела за время t).

$$\Delta S(t)=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2-t^2\right)=gt\Delta t+\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

Значит, $dS(t)=gt\Delta t$.

Замечание. В обоих примерах в дифференциале коэффициент при приращении независимой переменной равен производной от рассматриваемой функции.

M1571.2 Теорема (дифференциал и производная)

Функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную. При этом $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$.

Доказательство: 1) Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема: $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A$, т.е. производная в точке x_0 существует и равна A .

2) Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0 : $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Следовательно, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, то функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$. *Теорема доказана.*

M15.7.3 *Замечание 1:* Рассмотрим функцию $f(x)=x$; ее дифференциал равен $df(x)=dx=1\cdot\Delta x$. Таким образом, $dx=\Delta x$. В связи с этим производную функции $y=f(x)$ принято обозначать $\dfrac{dy}{dx}$.

M15.7.4 *Замечание 2.* Из определения 15.7.1 следует геометрический смысл дифференциала функции в заданной точке x_0 при заданном приращении Δx : дифференциал – это приращение касательной (как линейной функции) к графику функции в заданной точке x_0 при заданном приращении Δx .

M15.7.5 *Замечания о касательной:* 1) Касательную нельзя определять как прямую, имеющую с графиком функции единственную общую точку: под такое «определение» попадает, например, ось симметрии параболы.

2) График функции не обязательно лежит по одну сторону от касательной даже в некоторой окрестности точки касания. Простейший пример – касательная к кубической параболе $y=x^3$ в точке $x_0=0$

3) Точка касания не обязательно является единственной общей

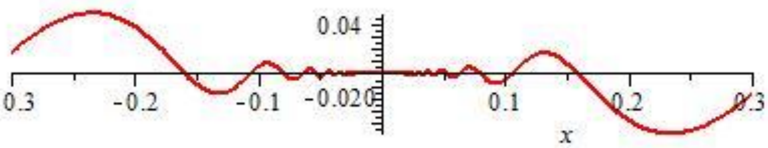

График функции $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$

точкой графика и касательной даже в некоторой окрестности точки касания. Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & при\ \ x\neq 0 \\ 0 & при\ \ x=0 \end{cases}$. Найдем производную этой функции в точке 0: $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$, значит, уравнение касательной (М15.2.3) к графику функции $f(x)$ в точке $x_0=0$ имеет вид $y=0$. Но в любой окрестности начала координат линия $y=x^2\sin\frac{1}{x}$ бесконечное количество раз пересекает ось абсцисс.

Таким образом, касательная – это всего лишь наилучшее линейное приближение функции и ничего более. Конечно, если существует предельное положение секущих (М15.1.1), то эта прямая и будет наилучшим линейным приближением.

15.8 Основные теоремы дифференциального исчисления

М15.8.1 Определение: Точка x_0 называется точкой *максимума* функции, если найдется число $\varepsilon>0$ такое, что для любой другой точки $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $f(x_0)>f(x)$.

Точка x_0 называется точкой *минимума* функции, если найдется число $\varepsilon>0$ такое, что для любой другой точки $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $f(x_0)<f(x)$.

Точка x_0 называется точкой *экстремума* функции, если она является точкой максимума или точкой минимума.

М15.8.2 Теорема (необходимое условие экстремума)

Если функция $y=f(x)$ имеет на промежутке $(a;b)$ непрерывную производную и в точке $c\in(a;b)$ локальный экстремум, то $f'(c)=0$

Схема доказательства: Пусть в точке $c\in(a;b)$ функция $y=f(x)$ имеет локальный максимум. Тогда найдется число $\varepsilon>0$ такое, что на интервале $(c-\varepsilon;c)$ функция $f(x)$ возрастает, а на интервале $(c;c+\varepsilon)$ - убывает. Значит, на интервале $(c-\varepsilon;c)$ $f'(x)\geq 0$, а на интервале $(c;c+\varepsilon)$ $f'(x)\leq 0$. Поэтому, в силу непрерывности производной $f'(x)$, эта производная в точке c не может быть ни положительной, ни отрицательной, значит, $f'(c)=0$

Для точки минимума аналогичными рассуждениями показывается, что и здесь $f'(c)=0$. *Теорема доказана*.

М15.8.3 Теорема Ролля

Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную на промежутке $(a;b)$ и $f(a)=f(b)$, то найдется точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=0$.

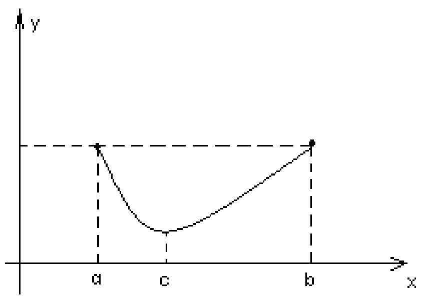

Рис. 65 Геометрический смысл теоремы Ролля

Доказательство: Поскольку функция $y=f(x)$ имеет производную на промежутке $(a;b)$, значит, она непрерывна на этом промежутке. По теореме Вейерштрасса (М14.6.4) функция $f(x)$ достигает на промежутке $[a;b]$ своих наибольшего и наименьшего значений. Обозначим наибольшее значение M, а наименьшее - m.

Если $M=m$, то функция $f(x)$ постоянна и в любой точке $c\in(a;b)$ имеет место $f'(c)=0$.

Пусть $M > m$. Поскольку $f(a) = f(b)$, то оба значения, наибольшее и наименьшее, не могут достигаться на концах промежутка $(a;b)$, и хотя бы одно из них достигается в некоторой внутренней точке c интервала.

Значит, c - точка локального экстремума и по теореме М15.8.2 $f'(c) = 0$. *Теорема доказана*.

М15.8.4 Теорема Лагранжа

Если функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$ и имеет производную на промежутке $(a;b)$, то найдется точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство: Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

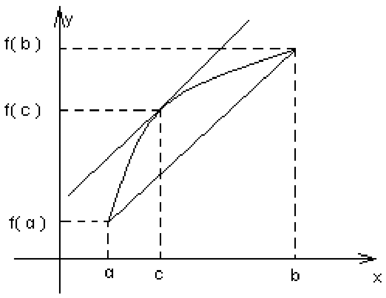

Рис. 66 Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Поскольку функция $f(x)$ имеет производную на промежутке $(a;b)$, то на этом же промежутке имеет производную и функция $F(x)$. Кроме того $F(a) = F(b) = 0$, значит, функция $F(x)$ удовлетворяет на промежутке $[a;b]$ условиям теоремы Ролля.

$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. По теореме Ролля найдется точка $c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$, значит, $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. *Теорема доказана.*

М15.8.5 ***Замечание:*** геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: для функции, имеющей производную на промежутке $(a;b)$, найдется точка $c \in (a;b)$, касательная в которой к графику функции параллельна секущей, проходящей через концы графика функции.

М15.8.6 ***Следствие (формула конечных приращений)***

Применим теорему Лагранжа к промежутку $[x_0; x_0 + \Delta x]$: $f'(c) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, значит,

$$\Delta f(x_0) = f'(c)\Delta x \quad c \in (x_0; x_0 + \Delta x).$$

15.9 Формальное нахождение производной неявной функции

Рассмотрим линию L, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

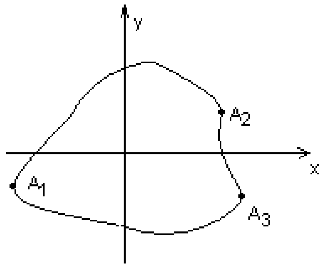

Рис. 64 Параметрически заданная функция

Вообще говоря, эта линия может не являться графиком функции. Допустим, что эту линию можно разделить точками $A_1, A_2, ..., A_n$ на конечное число линий $L_1, L_2, ..., L_n$, каждая из которых является графиком какой-либо функции.

Тогда можно говорить, что на каждой из линий $L_1, L_2, ..., L_n$ уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ определяют некоторую функцию (на каждой линии – свою).

М15.9.1 Пусть на какой-либо линии L_i функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные и при этом функция $\varphi(t)$ взаимно однозначна. Тогда существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$ и $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. По теоремам о производной сложной функции и о производной обратной функции

$y' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\,(\varphi^{-1}(x))' = \dfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Поскольку функция $y(x)$ была задана параметрически, то производную также естественно задать параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$

M15.9.2 Примеры 1)***:*** Найти производную функции $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$y' = \dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt$. Производная задается уравнениями $\begin{cases} x = \cos t \\ y' = -ctgt \end{cases}$.

2) Функция $y = y(x)$, задаваемая параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$ имеет производную $y'(x)$ при $t_0 = 0$, хотя эта производная и не может быть посчитана по формуле М16.3.1. , ввиду того, что модуль не дифференцируем в нуле (М15.4.3). Для доказательства существования производной достаточно рассмотреть односторонние пределы выражения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $t_0 = 0$ и $\Delta t \to 0$ и убедиться, что они совпадают.

M15.9.3 Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$ какой-либо линии на плоскости. Так же, как и в случае параметрически заданной линии, эта линия может не быть графиком функции. Будем предполагать, что эту линию можно разделить на участки, каждый из которых является графиком функции. Тогда можно говорить, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает одну или несколько функций. Такая функция называется неявной.

Поскольку $F(x, y) = 0$, то, вычисляя производную от обеих частей этого равенства, получим $F'(x, y) = 0$.

Замечание. Производную от левой части равенства $F(x, y) = 0$ следует вычислять в предположении, что переменная y является функцией от переменной x .

M15.9.4 ***Пример:*** Найти производную неявной функции $y^2 - e^{xy} = 1$.

$(y^2 - e^{xy})' = (1)'$; $\quad (y^2)' - (e^{xy})' = 0$; $\quad 2y \cdot y' - e^{xy} \cdot (xy)' = 0$;

$2y \cdot y' - e^{xy} \cdot (x'y + xy') = 0$; $\quad 2y \cdot y' - e^{xy} \cdot (y + xy') = 0$;

$2y \cdot y' - e^{xy} \cdot xy' = e^{xy} y$; $\quad y'(2y - e^{xy} \cdot x) = e^{xy} y$;

$$y' = \frac{e^{xy} y}{2y - e^{xy} x}$$

Замечание. в выражении для производной присутствует не только переменная x , но и y . Поскольку уравнение неявной функции может задавать не одну, а несколько функций, то этот факт является естественным, как бы «напоминая», что производная вычислялась сразу от нескольких функций.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции в точке. Каков геометрический смысл производной? Каков физический смысл производной? Запишите уравнение касательной к графику функции в заданной точке.
2. Запишите производные основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, синуса, косинуса, тангенса и котангенса).
3. Сформулируйте теорему о непрерывности функции, имеющей производную. Сформулируйте теорему о производной обратной функции. Запишите производные арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

4. Сформулируйте теорему о производной и арифметических операциях. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
5. Дайте определение дифференциала. Сформулируйте теорему о производной и дифференциале. Каков геометрический смысл дифференциала?
6. Дайте определения максимума и минимума функции. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума.
7. Сформулируйте теорему Ролля. Сформулируйте теорему Лагранжа. Запишите формулу конечных приращений.
8. Сформулируйте алгоритм нахождения производной параметрически заданной функции.
9. Сформулируйте алгоритм нахождения производной неявной функции.