Лекция 1 Введение в теорию матриц

1.1 Виды матриц

А1.1.1 Определение: *матрицей* называется математический объект с общим числом элементов $n\times m$, которые расположены в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов ($n\times m$ - размер матрицы, в общем случае $n\neq m$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Пока будем считать, что *элементами матрицы* a_{ij} $(i=1,2,...n;\ j=1,2,...m)$ могут быть только числа или функции.

Замечание1: В записи a_{ij} первый индекс i является номером строки, в которой расположен элемент a_{ij}, второй индекс j - номером столбца.

Примеры матриц: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2} & 50 & 1 \\ 0 & \frac{256}{364} & 7 & -8 & 6 \\ \frac{2}{13} & 5 & 265 & 17 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0{,}241 & 0{,}334 \\ 1{,}523 & 0{,}324 \\ 0{,}567 & 2{,}112 \\ 1{,}987 & 0{,}876 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

А1.1.2 *Замечание 2:* Если $n=m$, то матрица называется *квадратной матрицей*.

А1.1.3 *Замечание 3:* Говорят, что элементы квадратной матрицы $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ расположены на *главной диагонали* квадратной матрицы, а элементы $a_{1n},..., a_{n1}$ - на *побочной диагонали*.

Замечание 4: Матрицы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D…

А1.1.4 Определение: Если $n=1$, то матрицу называют *матрицей-строкой*. Если $m=1$, то матрицу называют *матрицей-столбцом*.

А1.1.5 Определение: Две матрицы называются *равными*, если у них одинаковые порядки $(n\times m)$ и равны элементы, стоящие на соответственных местах этих матриц (то есть, в сущности, равные матрицы – это одна и та же матрица).

А1.1.6 Определение: Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю. Нулевые матрицы будем обозначать буквой O.

Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны нулю.

Примеры единичных матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

А1.1.7 Определение: Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Примеры диагональных матриц $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

А1.1.8 Определение. *Трансвекцией* $T_{ij}(a)$ называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а среди остальных ровно один элемент a_{ij} при $i\neq j$ отличен от нуля и равен a.

Примеры трансвекций: $T_{12}(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T_{31}(-7)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -7 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $T_{14}(0.5)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

A1.1.9 Матрицу будем называть *ступенчатой*, если при $i > j$ выполняются равенства $a_{ij} = 0$.

Примеры ступенчатых матриц $\begin{pmatrix}3 & 1 & 6 & 8 & -8 & 4\\ 0 & -2 & 7 & -3 & -8 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -9 & 10 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

Над матрицами можно выполнять следующие линейные операции, после выполнения которых получаются матрицы того же размера:

1. Умножение матрицы на число;
2. Сложение (вычитание) матриц; Обе эти операции производятся поэлементно.

A1.1.10 *Замечание 1:* Очевидно, что для любых матриц A, B, C выполняются равенства: $A+B=B+A$ и $(A+B)+C=A+(B+C)$

Замечание 2: Очевидно, что для любой матрицы A верно $A+O=A$, при условии, что эти матрицы можно складывать.

Пример: $2\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6 & 4\\ 14 & 0 & 10\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -6 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ -6 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 2\\ 13 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

A1.1.11 *Транспонированием* матрицы называется операция, при которой $a_{ij} \to a_{ji}$ (условное обозначение операции транспонирования матрицы A^T).

Пример: Если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -3 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

A1.1.12 Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

1.2 Умножение матриц

A1.2.1 Суперпозиция линейных замен

Пусть переменные $x_1, x_2,..., x_n$ выражаются через переменные $y_1, y_2,..., y_m$ по формулам $\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m \\ \ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \end{cases}$, а переменные $y_1, y_2,..., y_m$ выражаются через переменные $z_1, z_2,..., z_k$ по формулам $\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1k}z_k \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2k}z_k \\ \ldots \\ y_m = b_{m1}z_1 + b_{m2}z_2 + \ldots + b_{mk}z_k \end{cases}$, тогда переменные $x_1, x_2,..., x_n$ выражаются через переменные $z_1, z_2,..., z_k$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1m}b_{m1})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots a_{1m}b_{m2})z_2 + \ldots + (a_{11}b_{1k} + \ldots + a_{1m}b_{mk})z_k \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2m}b_{m1})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2m}b_{m2})z_2 + \ldots + (a_{21}b_{1k} + \ldots + a_{2m}b_{mk})z_k \\ \ldots \\ x_n = (a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nm}b_{m1})z_1 + (a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \ldots + a_{nm}b_{mk})z_2 + \ldots + (a_{n1}b_{1k} + \ldots + a_{nm}b_{mk})z_k \end{cases}$$

A1.2.2 Пример суперпозиции линейных замен A1.2.1 приводит к понятию умножения матриц.

A1.2.3 Определение. Матрицы A и B в произведении $A \cdot B$ будем называть согласованными, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом и только в этом случае матрицу A можно умножать на матрицу B.

A1.2.4 Определение. Если матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$ имеет порядок $n \times m$,

а матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mk} \end{pmatrix}$ – порядок $m \times k$ (т.е. матрицы согласованы), то матрицу A можно умножать на матрицу B. При этом получится матрица C порядка $n \times k$, элементы которой находятся по правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

т.е. каждый элемент i-ой строки матрицы A умножается на соответствующий (по порядку) элемент j-го столбца матрицы B и полученные попарные произведения складываются.

Пример 2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, найти AB.

Решение: $c_{11} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 7 = 10$

$c_{12} = 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 = 12$

$c_{13} = 4 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 = 20$

$c_{21} = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot (-5) + 8 \cdot 7 = 44$

$c_{22} = 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 8 = 78$

$c_{23} = 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-3) + 8 \cdot 5 = 43$

$C = AB = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 20 \\ 44 & 78 & 43 \end{pmatrix};$

Операция умножения в общем случае не обладает свойством коммутативности: $AB \neq BA$. В связи с этим различают умножение матрицы A на матрицу B и умножение матрицы B на матрицу A. Кроме того, у прямоугольных матриц ($m \neq n$) может существовать одно из произведений AB, BA, а второе – нет.

А1.2.5 Пример. 1) Для матриц $A=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\5&6&7&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&6\\3&4&-1\\-5&0&-3\\7&8&5\end{pmatrix}$ произведение AB существует, а произведение BA не существует; 2) Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ имеем $AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}\neq AB$

А1.2.6 *Замечание:* если E - единичная матрица, A - согласованная с ней квадратная матрица, то $EA=AE=A$; если O - нулевая матрица, A - согласованная с ней квадратная матрица, то $OA=AO=O$.

А1.2.7. Теорема (Ассоциативность умножения) Если произведение матриц $(AB)C$ имеет смысл, то имеет смысл и произведение $A(BC)$ и при этом $(AB)C=A(BC)$.

Доказательство. Обозначим $AB=M$, $BC=N$, элементы матриц M,N обозначим m_{ik}, n_{jl} соответственно. Тогда $m_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}$, $n_{jl}=b_{j1}c_{1l}+b_{j2}c_{2l}+...+b_{jp}b_{pl}$, где a_{ij},b_{jk},c_{kl} - элементы матриц A,B,C соответственно. Обозначим $(AB)C=F$, $A(BC)=G$, а элементы этих матриц - f_{il}, g_{il} соответственно. Тогда $f_{il}=m_{i1}c_{1l}+m_{i2}c_{2l}+\ldots+m_{ip}c_{pl}=\sum_k\sum_j a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ и $g_{il}=a_{i1}n_{1l}+a_{i2}n_{2l}+\ldots+a_{ip}n_{pl}=\sum_j\sum_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}$. Но суммы $\sum_k\sum_j a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ и $\sum_j\sum_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ отличаются только порядком слагаемых, значит, $f_{il}=g_{il}$ и $(AB)C=A(BC)$.

А1.2.8 Теорема (Дистрибутивность умножения) Если произведение матриц $A(B+C)$ имеет смысл, то имеют смысл и произведения $AB,\ AC$ и при этом $A(B+C)=AB+AC$. Аналогично, если произведение матриц $(B+C)A$ имеет смысл, то имеют смысл и произведения $BA,\ CA$ и при этом $(B+C)A=BA+CA$.

Доказательство. Аналогично теореме А1.2.7.

А1.2.10 *Замечание.* Из равенства $AB=O$ не следует, что $A=O$ или $B=O$. Пример: $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

1.3 Определители второго и третьего порядков

А1.3.1 Определение: *Определителем второго порядка* называется математический объект вида

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Левая часть равенства является свернутой (табличной) формой определителя. Правая часть представляет собой определитель в развернутой форме и одновременно правило вычисления определителя в символьной форме.

Пример: 1) $\begin{vmatrix}2&4\\1&-3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-4\cdot 1=-6-4=-10$;

A1.3.2 Определение: *Определителем третьего порядка* называется математический объект, представленный в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Развернутую форму представления определителя третьего порядка в правой части равенства запоминать не нужно. Ее можно записать и при необходимости вычислить, используя следующие правила:

1) Правило треугольников;
2) Правило дополнительных столбцов (правило Саррюса);

Сущность *правила треугольников* легко понять, запомнить и использовать согласно схеме (рис. 15)

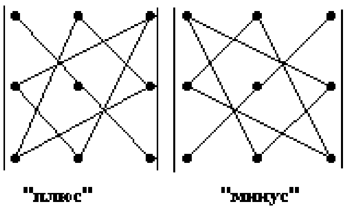

Рис.15 **Правило треугольников**

Для запоминания *правила дополнительных столбцов* также удобно использовать мнемоническую схему (рис. 16).

Замечание: элементы, перечеркнутые по диагонали, перемножаются. В результате получаем одночлены, которые суммируются или вычитаются согласно схеме.

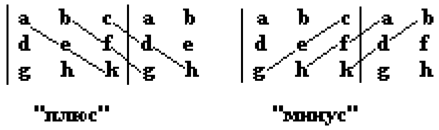

Рис. 16 Правило дополнительных столбцов

Пример: Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 = 0$

1.4 Определитель произвольного порядка

A1.4.1 Определение: *Минором* M_{ij} определителя Δ будем называть определитель, получаемый из Δ удалением строки с номером i и столбца с номером j.

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 9 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24; \; M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20; \; M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -35$$

Определение: *Алгебраическим дополнением* A_{ij} определителя Δ называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \,.$$

Пример: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 9 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24; \; A_{12} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 20;$$

А1.4.2Определение: *Определителем порядка n* называется

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} .$$

(переход от символа определителя к выражению $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$ называется *разложением определителя по первой строке*)

А1.4.3 Свойства определителей: 1) Для любого i и для любого j имеют место формулы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(разложение по i-ой строке)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение по j-му столбцу)

2) Если в определителе Δ все элементы какой-либо строки или столбца равны 0, то $\Delta = 0$.

3) Если в определителе поменять местами 2 строки или столбца, то определитель изменит знак на противоположный.

4) Если в определителе имеются 2 одинаковые строки или 2 одинаковых столбца, то определитель равен 0.

5) Если все элементы какой-либо строки или столбца умножить на одно и то же число, то значение определителя умножится на то же число.

6) Если в определителе имеются 2 пропорциональные строки или 2 пропорциональных столбца, то значение определителя равно 0.

7) Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то значение определителя не изменится.

Пример: вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: пользуясь свойством 7, получим нули вместо элементов a_{21}, a_{41}.

Для этого умножим первую строку на (-4) и поэлементно прибавим ко второй строке: -4 -12 8 -20

\+ 4 0 -1 2

= 0 -12 7 -18

Затем умножим первую строку на 3 и прибавим к четвертой строке:

3 9 -6 15

\+ -3 2 0 1

= 0 11 -6 16

Получим, раскладывая определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -12 & 7 & -18 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно уже вычислить по правилу треугольников или по правилу Саррюса, но можно снова воспользоваться методом «обнуления элементов», примененным выше к определителю четвертого порядка.

$$\begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 8 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(-8-40\right) = 48.$$

Были произведены следующие действия:

1) к первой строке прибавили третью
2) к первому столбцу прибавили второй и к третьему столбцу прибавили второй, умноженный на 2
3) разложили определитель по второму столбцу
4) вычислили определитель второго порядка

1.5 Правило Крамера

Определение: *Системой n линейных уравнений* от n неизвестных (или системой линейных уравнений порядка n) называется система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

где $a_{ij}, b_i \in R; (i, j = 1,2,..., n)$ - заданные числа, x_i - неизвестные, значения которых требуется определить. Первый индекс i числа a_{ij} означает номер уравнения в системе, второй индекс j – номер неизвестного.

В частности, при $n = 2$ систему будем, как правило, записывать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$ (система второго порядка),

а при n =3 – в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$ (система третьего порядка)

Для системы второго порядка $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ введем обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 (О решении линейной алгебраической системы второго порядка)

1) Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение
   $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}; y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$
2) Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений.
3) Если $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений.

Схема доказательства: 1) Пусть $\Delta \neq 0$, тогда, подставляя в каждое из уравнений системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

значения $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ и $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$, убедимся, что получатся тождества.

2) Пусть $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, тогда из $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$, $b_1a_{22}-b_2a_{12}=0$ и $b_2a_{11}-b_1a_{21}=0$ при $a_{21}\neq 0, a_{22}\neq 0, b_2\neq 0$ следует $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$, значит $a_{11}=ka_{21}; a_{12}=ka_{22}; b_1=kb_2$ и систему $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$ можно переписать в виде

$$\begin{cases}ka_{21}x+ka_{22}y=kb_2\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases},$$

значит, система состоит из двух одинаковых уравнений, т.е., по сути, из одного. Следовательно, система имеет бесконечно много решений: задавая произвольные значения переменной x, будем получать соответствующие им значения переменной y. 3) Рассуждениями, аналогичными предыдущему пункту, придем к системе

$$\begin{cases}ka_{21}x+ka_{22}y=mb_2\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}, \text{ где } k\neq m, \text{ значит,}$$

$$\begin{cases}a_{21}x+a_{22}y=\dfrac{m}{k}b_2\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases},$$

откуда должно следовать $\dfrac{m}{k}b_2=b_2$, что неверно, так как $k\neq m$. Система не имеет решений.

Теорема доказана

Замечание 1 Формулы $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}; y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ называются *формулами Крамера*.

Для системы $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$

введем обозначения: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\ &\ldots&\ldots&\\ a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$; $\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\ b_2&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\ &\ldots&\ldots&\\ b_n&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&\ldots&a_{1n}\\ a_{21}&b_2&\ldots&a_{2n}\\ &\ldots&\ldots&\\ a_{n1}&b_n&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}$;

$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&b_1\\ a_{21}&a_{22}&\ldots&b_2\\ &\ldots&\ldots&\\ a_{n1}&a_{n2}&\ldots&b_n\end{vmatrix}$

Теорема 3 (О решении системы линейных алгебраических уравнений)

Если в системе $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; .. x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Без доказательства.

Замечание: Формулы Крамера удобны для запоминания, однако фактическое вычисление решений линейной системы по этим формулам будет трудоемким, если порядок n системы достаточно велик.

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей? Какая матрица называется квадратной? Какие матрицы называются нулевыми? Какие матрицы называются единичными?

2. Какая матрица называется диагональной? Что такое трансвекция? Какая матрица называется ступенчатой? Что такое транспонирование?

3. Как происходит умножение матриц? Любые ли две матрицы можно перемножить? Верно ли, что от перемены мест сомножителей произведение не меняется?

4. Что называется определителем второго порядка? Что называется определителем третьего порядка? Как вычисляется определитель третьего порядка?

5. Что называется минором квадратной матрицы? Что называется алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы? Что называется определителем квадратной матрицы (любого порядка)? Перечислите свойства определителей.

6. Что называется системой линейных уравнений? Сформулируйте правило Крамера.