Лекция 16 Повторные производные и их применение

16.1 Повторные производные

М16.1.1 Определение. *Второй производной* функции $f(x)$ называется производная от ее производной: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

М16.1.2 Определение. Производной порядка n называется производная от производной порядка $n-1$.

М16.1.3 Пример 1 $f(x) = e^{x^2}$. Найти третью производную $f'''(x)$.

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = \left(2xe^{x^2}\right)' = 2\left(e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2}\right) = 2\left(1 + 2x^2\right)e^{x^2}$$

$$f'''(x) = 2\left(\left(1 + 2x^2\right)e^{x^2} \cdot 2x + 4x \cdot e^{x^2}\right) = 4xe^{x^2}\left(2x^2 + 3\right)$$

М16.1.4 Пример 2 Найти вторую производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

По определению вторая производная есть производная от производной (первой производной). Первая производная была найдена выше: $\begin{cases} x = \cos t \\ y' = -ctgt \end{cases}$.

$$y'' = \frac{\left(-ctgt\right)'}{\left(\cos t\right)'} = \frac{\dfrac{-1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = \frac{1}{\sin^3 t}.$$

Вторая производная равна: $\begin{cases} x = \cos t \\ y'' = \dfrac{1}{\sin^3 t} \end{cases}$.

М16.1.5 Пример 3 Найти вторую производную неявной функции $x^2 + y^2 = 1$

Найдем сначала первую производную: $2x + 2yy' = 0$; $y' = -\dfrac{x}{y}$. Тогда $y'' = \left(-\dfrac{x}{y}\right)' = -\dfrac{x'y - xy'}{y^2} = \dfrac{xy' - y}{y^2}$. Избавимся теперь от y' в выражении для второй производной: $y'' = \dfrac{x \cdot \left(-\dfrac{x}{y}\right) - y}{y^2} = -\dfrac{x^2 + y^2}{y^3}$.

М16.1.6 Пример 4 Найти общую формулу для производных любого порядка функций $y = x^\alpha$, $y = \ln x$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$

А) $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

Б) $y = \ln x$

$y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -x^{-2}$, $y''' = 2x^{-3}$, $y^{(4)} = -2 \cdot 3x^{-4}$, $y^{(5)} = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\,x^{-n}$$

В) $y = a^x$

$y' = a^x \cdot \ln a$, $y'' = a^x \cdot (\ln a)^2$, $y''' = a^x \cdot (\ln a)^3$

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$

Г) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$

$y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Д) $y = \cos x$

$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\cos x = \cos(x + \pi)$

$y''' = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

M16.1.7 Формула Лейбница

Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

$y'' = (u' \cdot v + u \cdot v')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$y''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$

$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

Нетрудно также вычислить, что

$$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}.$$

Видно (и это нетрудно доказать), что коэффициенты при произведениях производных те же, что и в формуле бинома Ньютона, поэтому

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots + C_n^n u v^{(n)}$$

Найдем при помощи формулы Лейбница производную $(x \cdot e^x)^{(5)}$:

$(x \cdot e^x)^{(5)} = x^{(5)} e^x + 5x^{(4)}(e^x)' + 10x'''(e^x)'' + 10x''(e^x)''' + 5x'(e^x)^{(4)} +$

$+ x(e^x)^{(5)} = 0 + 0 + 0 + 0 + 5e^x + xe^x = 5e^x + xe^x$

16.2 Правило Бернулли-Лопиталя

M16.2.1 Теорема (Правило Бернулли-Лопиталя)

1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $(a;b)$, имеют на этом промежутке конечные производные, $g'(x) \neq 0$

и $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ для некоторой точки $c \in (a;b)$, то

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $(a;\infty)$, имеют на этом промежутке конечные производные, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ для некоторой точки $c \in (a;\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Доказательство: 1) Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на промежутке $(a;b)$ производные, они непрерывны на этом промежутке и $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$ и $\lim\limits_{x\to c} g(x) = g(c) = 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} : \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}$. Обозначив $x = c + \Delta x$,

получим $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} : \dfrac{g(c + \Delta x) - g(c)}{\Delta x} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$,

что и требовалось.

Полагая $t = \dfrac{1}{x}$, получим, что при $x \to \infty$ переменная t будет стремиться к нулю.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = K$.

Теорема доказана.

Замечание: доказанная теорема позволяет избавляться от неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ под знаком предела.

М16.2.2 Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

При подстановке $x = 0$ под знак предела, получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Применим правило Бернулли-Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$. Подставляя $x = 0$ под знак предела, снова получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Снова применим правило Бернулли-Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим неопределенности других видов:

М 16.1. 3 Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$, тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}:\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$.

Дробь $\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, значит при вычислении пределов, под знаком которых находится неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, можно применять тот же метод, что и в предыдущем примере.

М16.2.4 Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x+1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

М16.2.5 Неопределенность вида $0\cdot\infty$:

Пусть $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ или $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$,

т.е. в первом случае получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, во втором - $\dfrac{\infty}{\infty}$.

М16.2.6 Пример. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

М16.2.7 Неопределенности видов 1^∞, 0^0, ∞^0 :

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}$ и пусть $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$.

Рассмотрим вспомогательный предел $\lim\limits_{x\to c}\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln f(x)$. Под знаком последнего предела находится уже знакомая неопределенность вида $0\cdot\infty$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to c}\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}=A$, тогда, очевидно, что $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^A$.

М16.2.8 Пример 1 (второй замечательный предел): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Рассматриваем предел $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Под знаком этого предела –

неопределенность вида $\frac{0}{0}$, значит можно применять правило Бернулли-Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1\cdot$$

Значит, как и следовало ожидать, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e\cdot$

Можно привести иную форму второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Замена $x=\frac{1}{y}$ в выражении $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ приводит к уже известной форме второго замечательного предела $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$.

М16.2.9 Пример 2. $\lim_{x\to 0}x^x$

Рассматриваем предел $\lim_{x\to 0}\ln x^x=\lim_{x\to 0}x\ln x=0$. Значит, $\lim_{x\to 0}x^x=e^0=1$.

М16.2.10 Неопределенность вида $\infty-\infty$

Рассмотрим вспомогательный предел $\lim_{x\to c}e^{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$, под знаком которого находится неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim_{x\to c}e^{f(x)-g(x)}=B$, то $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\ln B$.

М16.2.11 Пример 3. $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)$

Рассматриваем предел $\lim_{x\to\infty}e^{x-\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$. Значит, $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=\ln\infty=\infty$.

16.3 Монотонность

М16.3.1 Теорема (аналитический признак монотонности)
Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную на промежутке $(a;b)$, тогда:

1) Если функция $y=f(x)$ возрастает на этом промежутке, то для любого значения $x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$
2) Если функция $y=f(x)$ убывает на этом промежутке, то для любого значения $x\in(a;b)$ $f'(x)\leq 0$

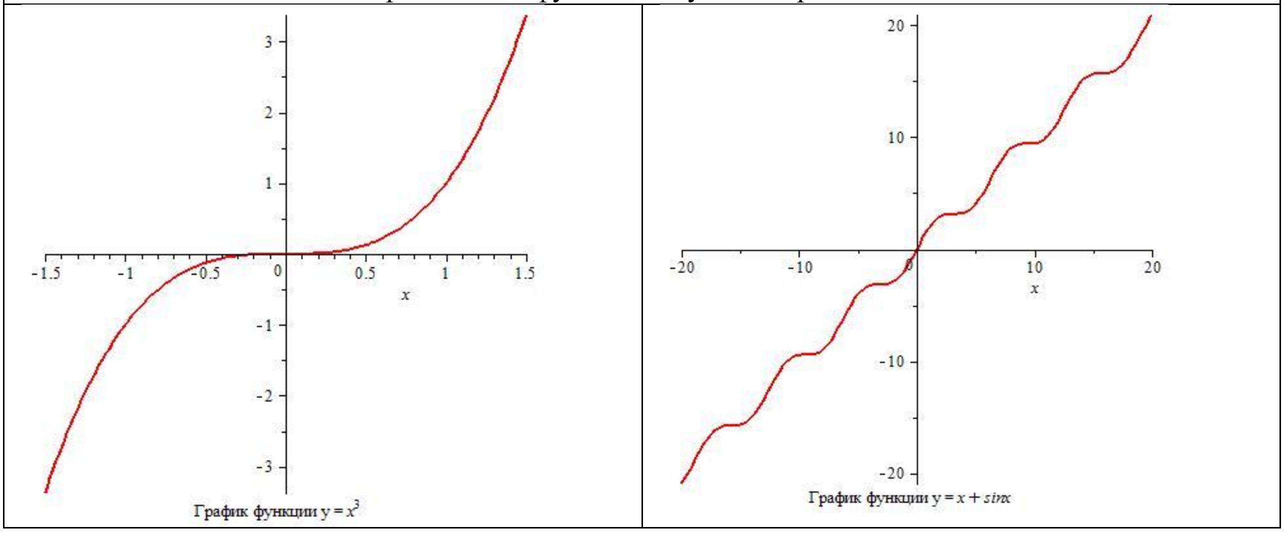
Доказательство: Пусть функция $y=f(x)$ возрастает. Если $\Delta x>0$, то $f(x+\Delta x)>f(x)$ и $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$. По теореме о пределе и неравенствах $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$, т. е. $f'(x)\geq 0$. Если $\Delta x<0$, то $f(x+\Delta x)<f(x)$ и снова $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$. По теореме о пределе и неравенствах $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$, т. е. $f'(x)\geq 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ убывает. Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$ и $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$. По теореме о пределе и неравенствах $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$, т. е. $f'(x) \le 0$. Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ и снова $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$. По теореме о пределе и неравенствах $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \le 0$, т. е. $f'(x) \le 0$.

Теорема доказана.

М16.3.2 *Замечание 1.* Даже у возрастающей функции в отдельных точках производная может обращаться в ноль. Простейшим примером служит возрастающая функция $f(x) = x^3$, имеющая в точке $x_0 = 0$ нулевую производную. Возрастающая на всей числовой прямой функция $f(x) = x + \sin x$ имеет бесконечно много точек, в которых производная равна нулю: $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

Возрастающие функции с нулевой производной



М16.3.3 *Замечание 2.* У возрастающей функции даже в конечном промежутке может оказаться бесконечное количество точек, в которых производная обращается в ноль. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} e^{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} & \textit{при } x \ne 0 \\ 0 \ \textit{при } x = 0 \end{cases}$. Ее производная равна $f'(x) = e^{\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x}}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \ge 0$ и обращается в ноль в точках $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in N$.

16.4 Исследование на экстремум с помощью первой производной

М16.4.1 Определение: Точка x_0 называется точкой *максимума* функции, если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой другой точки $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ будет выполняться неравенство $f(x_0) > f(x)$.

Точка x_0 называется точкой *минимума* функции, если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой другой точки $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ будет выполняться неравенство $f(x_0) < f(x)$.

Точка x_0 называется точкой *экстремума* функции, если она является точкой максимума или точкой минимума.

М16.4.2 Теорема (необходимое условие экстремума)
Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке $(a;b)$ непрерывную производную и в точке $c \in (a;b)$ локальный экстремум, то $f'(c) = 0$

Схема доказательства: Пусть в точке $c \in (a;b)$ функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что на интервале $(c-\varepsilon;c)$ функция $f(x)$ возрастает, а на интервале $(c;c+\varepsilon)$ - убывает. Значит, на интервале $(c-\varepsilon;c)$ $f'(x) \ge 0$, а на интервале $(c;c+\varepsilon)$ $f'(x) \le 0$. Поэтому, в силу непрерывности производной $f'(x)$, эта производная в точке c не может быть ни положительной, ни отрицательной, значит, $f'(c) = 0$

Для точки минимума аналогичными рассуждениями показывается, что и здесь $f'(c) = 0$. *Теорема доказана*.

М16.4.3 *Замечание 1.* Равенство нулю производной функции в некоторой точке еще не гарантирует наличие в ней экстремума, как показывает пример функции $f(x) = x^3$. Теорема М16.4.2 утверждает лишь, что в точках, в которых производная существует, но не равна нулю, экстремума точно нет.

М16.4.4 *Замечание 2.* Из теоремы М16.4.2 следует что экстремумы функции могут быть только в точках, в которых производная функции не существует или равна нулю. Из доказательства той же теоремы следует, что в точке будет экстремум, если при переходе через нее производная функции меняет знак.

М16.4.5 С учетом теорем о необходимом условии экстремума и об аналитических признаках монотонности, алгоритм исследования функции на наличие экстремумов и нахождение промежутков возрастания и убывания функции $f(x)$ состоит в следующем:

- найти область определения функции $f(x)$
- найти производную функции и определить точки, в которых эта производная не существует или равна нулю (*критические точки*)
- отметить на области определения точки, найденные в предыдущем пункте. Эти точки разобьют область определения на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет постоянный знак
- посчитать знак производной на каждом интервале: если $f'(x) > 0$, то на этом интервале функция $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$ - убывает
- если слева от критической точки $f'(x) > 0$, а справа - $f'(x) < 0$, то критическая точка является точкой максимума, если наоборот – точкой минимума. В остальных случаях критическая точка не является точкой экстремума.

М16.4.6 Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Областью определения функции является объединение промежутков $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$. Поскольку $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, то $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Производная не существует в точке $x = 0$, не входящей в область определения, $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$. На каждом из интервалов $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$ производная положительна и, значит, функция $f(x)$ возрастает. На каждом из интервалов $(-1;0)$ и $(0;1)$ производная отрицательна и, следовательно, функция $f(x)$ убывает. Точка $x = -1$

является точкой максимума, в ней значение функции равно -2 . Точка $x=1$ есть точка максимума, в ней значение функции равно 2.

М16.4.7 Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\neq 0$.

Производная функции нигде не равна нулю, но не существует в точке $x_0=0$. При этом при положительных значениях переменной $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}>0$, а при отрицательных $f'(x)<0$. Значит, в точке $x_0=0$ у функции $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ максимум $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$.

М16.4.8 *Замечание.* Даже на конечном промежутке функция может иметь бесконечно много точек экстремума. Примером может служить функция

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\sin\frac{1}{x} & при\ \ x\neq 0\\ 0\ \ при\ \ x=0\end{cases}.$$

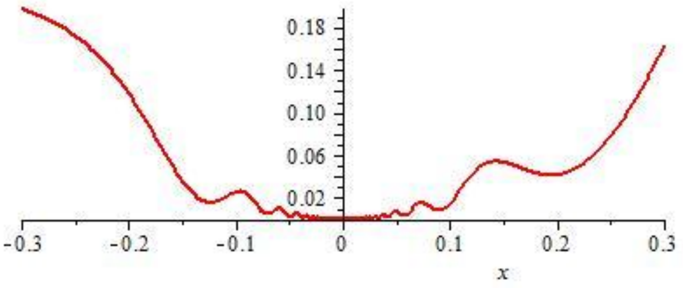


График функции $y=2x^2+x^2\sin\frac{1}{x}$

16.5 Исследование на экстремум с помощью второй производной

М16.5.1 В некоторых случаях при разыскании экстремумов исследование знака первой производной слева и справа от критической точки можно заменить исследованием второй производной в самой критической точке. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 первую и вторую непрерывные производные и $f'(x_0)=0$. Если $f''(x_0)>0$, то в силу непрерывности функции $f''(x)$ неравенство $f''(x_0)>0$ будет выполняться на некотором интервале $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, значит, на этом интервале функция $f'(x)$ возрастает и

$$f'(x_0-\delta)<f'(x_0)<f'(x_0+\delta),$$

но, поскольку $f'(x_0)=0$, то $f'(x_0-\delta)<0$ и $f'(x_0+\delta)>0$. Значит, функция $f(x)$ убывает на интервале $(x_0-\delta;x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0;x_0+\delta)$ и x_0 - точка локального минимума.

Аналогично показывается, что если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимума.

М16.5.2 Пример. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^2e^{2x}$.

$f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2xe^{2x}(x+1)$, значит, критические точки функции: $x_1=-1$ и $x_2=0$.

$f''(x)=2e^{2x}(2x^2+4x+1)$. $f''(-1)=2e^{-2}(2-4+1)<0$, $f''(0)=2>0$, значит, $x_1=-1$ - точка максимума, $x_2=0$ - точка минимума.

М16.5.3 *Замечание 1:* Если $f''(x_0) = 0$, то приведенное правило не дает ответа на вопрос об экстремуме и требуется дополнительное исследование. Кроме того, правило не применимо к точкам, в которых не существует производная $f'(x)$.

Если в некоторой точке x_0 имеют место равенства $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, но при этом $f'''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 экстремума нет. Если же $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, то следует найти четвертую производную $f^{(4)}(x_0)$. Если $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 - максимум, если $f^{(4)}(x_0) > 0$ - минимум. Если же $f^{(4)}(x_0) = 0$, то считаем $f^{(5)}(x_0)$. При $f^{(5)}(x_0) \neq 0$ экстремума нет, а при $f^{(5)}(x_0) = 0$ считаем шестую производную и т.д. Доказать этот факт можно, используя ряд Тейлора функции $f(x)$ (конечно, если он существует и сходится к порождающей его функции).

16.6 Наибольшее и наименьшее значения функции

Для функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ из *теоремы Вейерштрасса* следует, что наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка $[a, b]$. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений состоит в следующем:

1. находим первую производную y' функции $y = f(x)$, определяем критические точки, принадлежащие интервалу $[a, b]$;
2. определяем значения функции в критических точках и на концах отрезка $f(a), f(b)$;
3. выбираем наибольшее и наименьшее значения функции сравнением значений функции в критических точках и на концах интервала.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ на интервале $\left[\frac{1}{2},\, 2\right]$.

Решение. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1$, но $x_1 = -1 \notin \left[\frac{1}{2};\, 2\right]$. Вычисляем значения функции в точке $x_2 = 1$ а также на концах интервала $\left[\frac{1}{2},\, 2\right]$: $y(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$, $y(2) = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$. Вывод: наименьшее значение $y = 2$ достигается в точке $x = 1$, а наибольшее значение $y = 2{,}5$ достигается дважды: на каждом из концов рассматриваемого интервала.

Контрольные вопросы:

1. Что называется второй производной функции? Как определяются третья и последующие производные функции? Запишите формулу Лейбница.
2. Сформулируйте правило Бернулли-Лопиталя. Как применяется правило Бернулли-Лопиталя при различных видах неопределенностей?
3. Сформулируйте аналитический признак монотонности. Сформулируйте алгоритм поиска экстремумов функции с помощью первой производной.
4. Сформулируйте алгоритм поиска экстремумов функции с помощью повторных производных.
5. Сформулируйте алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.