Лекция 13 Предел функции одной действительной переменной

13.1 Определение конечного предела на языке $\varepsilon - \delta$ (по Коши)

M13.1.1 Определение. Пусть $E \subseteq R$. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества E, если для любого положительного числа δ в промежутке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ имеется бесконечно много точек из E.

Определение. Промежуток $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ называется δ*-окрестностью* (или просто *окрестностью*)точки x_0.

M13.1.2 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

M13.1.3 *Замечание.* Иными словами определение предела можно сформулировать так: функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из того, что $x \in E$ попадает в δ-окрестность точки x_0 следует, что значение функции $y = f(x)$ попадает в ε-окрестность точки A.

Наличие предела функции при $x \to x_0$ записывается равенством $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

M13.1.4 Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим выражение $|f(x) - A| = \left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$. если взять $\delta = \varepsilon$, то из соотношения $|f(x) - A| \le |x| = |x - 0| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta$ получаем $|f(x) - A| < \varepsilon$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдено соответствующее число $\delta > 0$, в нашем примере равное числу ε.

M13.1.5 Пример. Для функции $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \ \text{при} \ x < 0 \\ 0 \ \text{при} \ x = 0 \\ 1 \ \text{при} \ x > 0 \end{cases}$ показать, что $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Из определения функции $\operatorname{sgn} x$ следует, что функция $|\operatorname{sgn} x|$ равна 1 во всех точках числовой прямой, кроме точки 0, где она равна нулю. Из определения предела, точнее из неравенства $0 < |x - x_0|$ следует, что при рассмотрении неравенства $|f(x) - A|$ значение $x = x_0$ не рассматривается. Рассмотрим выражение $|f(x) - A| = \left||\operatorname{sgn} x| - 1\right| = 0$ при $x \ne x_0 = 0$.

Значит, $|f(x)-A| = 0 < \varepsilon$ при любом значении $x \neq x_0$ и в качестве $\delta > 0$ можно взять любое положительное число.

M13.1.6 *Замечание.* Пример M13.1.4 показывает, что функция не обязательно должна быть определена при $x = x_0$. А пример M13.1.5 показывает, что даже если функция определена при $x = x_0$, ее значение в этой точке не обязательно должно совпадать со значением ее предела.

M13.1.7 Определение. Пусть множество $E \subseteq R$ содержит как угодно большие положительные числа. В этом случае говорят, что множество E имеет своей предельной точкой бесконечность $(+\infty)$.

M13.1.8 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε существует положительное число Δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $x > \Delta$ следует неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0\ \forall x \in E \quad \left(x > \Delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon\right)$$

M13.1.9 Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим выражение $|f(x)-A| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x}$. Знак модуля отбросили потому что при $x \to \infty$ все значения переменной x с какого-то момента будут положительными. Таким образом, неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{1}{x} < \varepsilon$, откуда $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Значит, можно взять $\Delta > \frac{1}{\varepsilon}$, и для заданного числа ε требуемое число δ найдено.

13.2 Определение бесконечного предела на языке $\varepsilon - \delta$ (по Коши)

M13.2.1 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $+\infty$ *при* $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $f(x) > \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E \quad \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right)$$

M13.2.2 Пример. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим выражение $f(x) = \frac{1}{x^2} > \varepsilon$. Тогда $x^2 < \frac{1}{\varepsilon}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Значит, можно взять $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

М13.2.3 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $-\infty$ *при* $x \to x_0$, если для любого отрицательного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $f(x) < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \quad \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon\right)$$

М13.2.4 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $+\infty$ *при* $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $x > \delta$ следует неравенство $f(x) > \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \quad \left(x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\right)$$

М13.2.5 *Замечание.* Аналогично определяются $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

М13.2.6. Теорема (Критерий Коши конечного предела). Функция $y = f(x)$ имеет конечный предел при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$) тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что из $|x - x_1| < \delta, \; |x - x_2| < \delta$ следует $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

М13.2.7 *Замечание (критерий Коши бесконечного предела)* Функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \Delta > 0$ такое, что из $x_1 > \delta, \; x_2 > \delta$ следует $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

13.3 Односторонние пределы (по Коши)

М13.3.1. Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет левый предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < x_0 - x < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \quad \left(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

Наличие левого предела функции при $x \to x_0$ записывается равенством $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

М13.3.2 *Замечание.* Отличие определения левого предела от определения предела только в том, что у левого предела требуется условие $x_0 > x$, то есть, не задается вопрос о том, как ведет себя функция справа от точки x_0

М13.3.3. Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет правый предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < x - x_0 < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \quad \left(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

Наличие правого предела функции при $x \to x_0$ записывается равенством $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

M13.3.4 *Замечание.* Из определений предела, левого и правого пределов, следует, во-первых, что если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ предел, равный A, то левый и правый пределы этой функции при $x \to x_0$ существуют и каждый из них равен A. Во-вторых, если левый и правый пределы этой функции при $x \to x_0$ существуют и каждый из них равен A, то существует и предел этой функции при $x \to x_0$ и он равен A.

M13.3.5 *Замечание.* Из M13.3.4 следует, что если хотя бы один из односторонних пределов (левый или правый) не существует, или оба они существуют, но не равны между собой, тогда не существует и предел.

13.4 Определение предела функции на языке последовательностей (по Гейне)

Пусть x_0 - предельная точка множества $E \subseteq R$.

M13.4.1 Определение. Функция $y = f(x)$ *имеет предел, равный* $A \in R$ *при* $x \to x_0$, если для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

M13.4.2 Теорема. Определения предела по Коши и предела по Гейне равносильны.

Доказательство. 1. Пусть для любого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для любой точки $x \in E$ из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Надо показать, что найдется номер n_0 такой, что для $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. тогда $\exists \delta > 0$, удовлетворяющее определению предела по Коши. Для этого числа δ, в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ найдется n_0 такой, что для $\forall n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_0| < \delta$. Тогда, из определения предела по Коши сразу следует $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

2. Пусть теперь для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ (то есть число A является пределом последовательности по определению Гейне). Предположим, что число A не является пределом функции $f(x)$ по определению Коши. Это значит, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого (в том числе, как угодно малого) найдется хотя бы одно значение $x \neq x_0$, для которого $|x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| > \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел δ_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Для каждого числа δ_n найдется значение $x_n \neq x_0$, что $|x_n - x_0| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| > \varepsilon$. Из неравенств $|x_n - x_0| < \delta_n$ и $\delta_n > 0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Но тогда, из неравенства $|f(x_n) - A| > \varepsilon$ следует, что построенной последовательности x_n не выполняется условие «для любой последовательности x_n такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$». Противоречие. Теорема доказана.

М13.4.3 *Замечание.* Теорема остается верной, если вместо x_0 или(и) вместо A взять $\pm\infty$.

М13.4.4 *Замечание.* Определения предела на языке последовательностей удобно использовать для доказательства того, что некоторый предел функции не существует.

М13.4.5 Пример. Доказать, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Решение. В соответствии с определением Гейне (М9.4.1) и единственностью предела последовательности (М2.1.10) достаточно показать, что существуют две последовательности x_n и y_n такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

Положим $x_n = \frac{2}{4\pi n+\pi}$, $y_n = \frac{2}{4\pi n-\pi}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{4\pi n+\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-1$. Что и требовалось.

13.5 Бесконечно малые величины

М13.5.1 Теорема (о пределе постоянной величины)
Предел постоянной величины равен самой этой величине: $\lim\limits_{x\to a} C = C$

Доказательство: Пусть $f(x)=C$. Выберем $\varepsilon>0$, тогда в качестве $\delta>0$ можно взять любое положительное число, т.к. $|f(x)-C| = |C-C| = 0 < \varepsilon$. *Теорема доказана.*

М13.5.2 Определение: функция $f(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

М13.5.3 Теорема (свойства бесконечно малых величин)

1) Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые величины при $x\to a$, то функция $h(x)=f(x)+g(x)$ также будет бесконечно малой величиной при $x\to a$.
2) Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые величины при $x\to a$, то функция $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ также будет бесконечно малой величиной при $x\to a$
3) Если $f(x)$ - бесконечно малая величина при $x\to a$, а функция $g(x)=C$ - постоянная величина, то функция $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

также будет бесконечно малой величиной при $x\to a$.

Доказательство: 1) Пусть выбрано число $\varepsilon>0$. Тогда, по определению предела для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется число $\delta_1>0$ такое, что из $|x-a|<\delta_1$ следует $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, для того же числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется число $\delta_2>0$ такое, что из $|x-a|<\delta_2$ следует $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через δ меньшее из чисел δ_1,δ_2, ($\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$тогда из $|x-a|<\delta$ будет следовать $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Значит, $|h(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Таким образом, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдено $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, удовлетворяющее определению предела.

2) Пусть выбрано число $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению предела для числа $\sqrt{\varepsilon}$ найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что из $|x-a| < \delta_1$ следует $|f(x)| < \sqrt{\varepsilon}$. Аналогично, для того же числа $\sqrt{\varepsilon}$ найдется число $\delta_2 > 0$ такое, что из $|x-a| < \delta_2$ следует $|g(x)| < \sqrt{\varepsilon}$. Обозначим через δ меньшее из чисел δ_1, δ_2, ($\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$тогда из $|x-a| < \delta$ будет следовать $|f(x)| < \sqrt{\varepsilon}$ и $|g(x)| < \sqrt{\varepsilon}$.

Значит, $|h(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

3) Пусть выбрано число $\varepsilon > 0$.

Тогда, по определению предела для числа $\dfrac{\varepsilon}{|A|}$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x-a| < \delta$

следует $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|A|}$.

$|h(x)| = |Af(x)| = |A| \cdot |f(x)| < |A| \cdot \dfrac{\varepsilon}{|A|} = \varepsilon$. *Теорема доказана.*

М13.5.4 *Следствие1:* Если $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые величины при $x \to a$, то функция $h(x) = f(x) - g(x)$ также будет бесконечно малой величиной при $x \to a$.

Доказательство: $h(x) = f(x) + (-1 \cdot g(x))$. По части 3 теоремы М13.5.3 функция $(-1 \cdot g(x))$ является бесконечно малой величиной, по 1 части теоремы функция $h(x) = f(x) + (-1 \cdot g(x))$ тоже будет бесконечно малой величиной.

М13.5.5 Следствие 2: Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина при $x \to a$.

М13.5.6 Определение: Говорят, что при $x \to a$ функция $f(x)$ является *бесконечно малой величиной более высокого порядка*, чем функция $g(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(Этот факт обозначается $f(x) = o(g(x))$, знак o читается «о малое»)

М13.5.7 Определение: Говорят, что при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *бесконечно малыми величинами одного порядка*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0$.

(Этот факт обозначается $f(x) = O(g(x))$, знак O читается «о большое»)

М13.5.8 Определение: Говорят, что при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *эквивалентными бесконечно малыми величинами*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

13.6 Предел и арифметические операции

М13.6.1 Теорема (предел и арифметические операции)

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$

Доказательство: 1) Поскольку $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x),\beta(x)$ - бесконечно малые величины при $x\to a$. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(A+B+\alpha(x)+\beta(x)\right)$, но, поскольку $\alpha(x),\beta(x)$ - бесконечно малые величины при $x\to a$, то по теореме о свойствах бесконечно малых величин функция $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$ также является бесконечно малой величиной и по следствию из той же теоремы $\lim\limits_{x\to a}\left(A+B+\alpha(x)+\beta(x)\right)=A+B$.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(A-B+\alpha(x)-\beta(x)\right)$.

Функция $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ является бесконечно малой величиной и $\lim\limits_{x\to a}\left(A-B+\alpha(x)-\beta(x)\right)=A-B$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left(A\cdot B+\alpha(x)B+\beta(x)A+\alpha(x)\beta(x)\right)$. Функция $\alpha(x)\beta(x)$ по второй части теоремы о свойствах бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной, каждая из функций $\alpha(x)B$ и $\beta(x)A$ по третьей части той же теоремы также является бесконечно малой величиной. По первой части той же теоремы функция $\alpha(x)B+\beta(x)A+\alpha(x)\beta(x)$ является бесконечно малой величиной, значит, $\lim\limits_{x\to a}\left(A\cdot B+\alpha(x)B+\beta(x)A+\alpha(x)\beta(x)\right)=AB$.

4) Надо показать, что функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}$ является бесконечно малой величиной. $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}=\dfrac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B^2+B\beta(x)}$. Числитель полученной дроби является бесконечно малой величиной и если $B\neq 0$, то знаменатель бесконечно малой величиной не является. Значит, вся дробь является бесконечно малой величиной. *Теорема доказана.*

13.7 Предел и неравенства

М13.7.2 Теорема (предел и неравенства)

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то:

1) Из $f(x)\le g(x)$ следует $A\le B$
2) Из $f(x)<g(x)$ следует $A\le B$
3) Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ и $A<B$, то найдется число $\varepsilon>0$ такое, что для $\forall x\in(x-\varepsilon;x+\varepsilon)$ выполнится неравенство $A<B$.

Без доказательства.

М13.7.3 Теорема (предел зажатой функции)

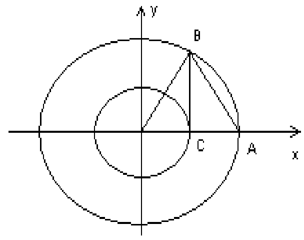
Если $f(x)\le g(x)\le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$.

Доказательство: Поскольку $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$, то для любого числа $\varepsilon>0$ найдутся числа δ_1,δ_2 такие, что при $|x-a|<\delta_1$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, а значит, и неравенство $f(x)>A-\varepsilon$; аналогично при $|x-a|<\delta_2$ выполнится неравенство $h(x)<A+\varepsilon$. Тогда при

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ получим $A-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A+\varepsilon$, значит, $A-\varepsilon \le g(x) \le A+\varepsilon$ или $|g(x)-A| < \varepsilon$. *Теорема доказана.*

М13.7.4 Теорема (первый «замечательный» предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$



Доказательство: рассмотрим единичную окружность. Обозначим $x = BOC$ - некоторый угол из промежутка $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, точка С – основание перпендикуляра, опущенного из точки В на ось абсцисс, D – точка пересечения отрезка ОВ и окружности радиуса ОС.

Обозначим S_1 - площадь сектора DOC, S_2 - площадь треугольника BOA, S_3 - площадь сектора AOB.

Тогда $S_1 = \frac{1}{2}|OC|\cdot|\breve{C}D| = \frac{1}{2}\cos x \cdot x\cos x = \frac{1}{2}x\cos^2 x$,

$S_2 = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin x = \frac{1}{2}\sin x$, $S_3 = \frac{1}{2}|OA|\cdot|\breve{A}B| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x$. Поскольку $S_1 < S_2 < S_3$, то $x\cos^2 x < \sin x < x$. Поделим на x:

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$**,** поэтому по теореме о пределе «зажатой функции» $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$**.**

13.8 Операции с символом ∞. Понятие неопределенности

М13.8.1 Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, тогда, очевидно, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \infty$. Этот факт запишем так: $\infty + \infty = \infty$.

Аналогично можно записать: $\infty + A = \infty$, $\infty - A = \infty$, $\infty\cdot\infty = \infty$, $\dfrac{\infty}{a} = \pm\infty$, в зависимости от знака числа a и аналогично $a\cdot\infty = \pm\infty$

Если $a \ne 0$, то $\dfrac{a}{0} = \pm\infty$. Если $a > 1$, то $a^\infty = \infty$, а если $a \in (0;1)$, то $a^\infty = 0$.

М13.8.2 Рассмотрим функции $y_1 = ax$ и $y_2 = x$ и предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y_1}{y_2} = a$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0} y_1 = \lim\limits_{x\to 0} y_2 = 0$ и поскольку в качестве a можно выбрать произвольное число, то выражение $\dfrac{0}{0}$ может принимать различные значения и поэтому, в отличие от выражений $\infty+\infty$, $\infty\cdot\infty$, $\dfrac{a}{0}$ однозначно не определено. Выражения такого типа принято называть *неопределенностями*. Кроме $\dfrac{0}{0}$ неопределенностями также являются выражения $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 и $\infty-\infty$.

13.9 Предел монотонной функции

М13.9.1 Определение. Функция $f(x)$, определенная на числовом множестве $E \subseteq R$ называется:

- *возрастающей*, если $\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$;
- *убывающей*, если $\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$;

- *невозрастающей*, если $\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \le f(x_1)$;
- *неубывающей*, если $\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \ge f(x_1)$.

Функции перечисленных типов называются *монотонными*, при этом функции двух первых типов называются *строго монотонными*.

M13.9.2 Определение. Функция $f(x)$, определенная на числовом множестве $E \subseteq R$ называется:
- *ограниченной сверху*, если $\exists M \in R$ такое, что $\forall x \in E,\ f(x) \le M$;
- *ограниченной снизу*, если $\exists m \in R$ такое, что $\forall x \in E,\ f(x) \ge m$;

M13.9.3 Теорема (предел монотонной ограниченной функции). Пусть числа (или символы $+\infty, -\infty$) $s = \sup E$ и $i = \inf E$ являются предельными точками множества E. Тогда: 1) Неубывающая функция имеет предел при $x \to s$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху; 2) Невозрастающая функция имеет предел при $x \to i$ тогда и только тогда, когда она ограничена снизу;

13.10 Элементарные методы раскрытия неопределенностей

M13.10.1 Пример 1.Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 2x^5 + x^2 - 4}{x^5 - 3x^3 + 4x^2 - x + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{9x-5} + \sqrt{4x+7}}$;

Решение. а) Применим метод, рассмотренный в предыдущей лекции – поделим числитель и знаменатель на x^5: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^5}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \dfrac{0 - 2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0 - 0 + 0} = -2$;

б) аналогично предыдущему поделим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}}{\sqrt{9 - \frac{5}{x}} + \sqrt{4 + \frac{7}{x}}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3 + 2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{5}.$$

M13.10.2 Определение. *Многочленом (полиномом) степени* n называется функция $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$, где $\forall i\ \ a_i \in R,\ a_n \ne 0$.

M13.10.3 Определение. Число x_0 называется *корнем многочлена* $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i$, если $p(x_0) = 0$.

M13.10.4 Теорема Безу (о делении многочлена без остатка) Если число x_0 является корнем многочлена $p(x)$, то этот многочлен делится без остатка на многочлен $x - x_0$.

Доказательство: любой многочлен делится на любой другой с остатком, при этом (по определению деления с остатком) степень остатка меньше степени делителя. Значит, $p(x) = (x - x_0) \cdot p_1(x) + r$, где $r \in R$ - остаток. Остаток r является числом, поскольку степень остатка должна быть меньше степени многочлена $x - x_0$.

Поскольку x_0 является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot p_1(x) + r$, откуда $r = 0$, что и требовалось.

M13.10.5 Пример 2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{3x^2 - x - 10}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 4}$;

Решение. а) Подстановка числа $x_0 = 2$ в функцию $\dfrac{x^2 - 9x + 14}{3x^2 - x - 10}$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Это, в частности, означает, что число $x_0 = 2$ является корнем каждого из многочленов $x^2 - 9x + 14$ и $3x^2 - x - 10$. Разложив эти многочлены на множители (второй корень элементарно определяется по теореме Виета), получим

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{3x^2 - x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-7)}{3(x-2)\left(x - \frac{5}{3}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-7}{x - \frac{5}{3}} = \frac{2-7}{2 - \frac{5}{3}} = -15$$

б) Подстановка числа $x_0 = 1$ в функцию $\dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 4}$ также приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Это снова означает, что число $x_0 = 1$ является корнем как числителя, так и знаменателя. По теореме Безу и числитель и знаменатель делятся на $x - 1$. Поделив числитель и знаменатель на $x - 1$ («уголком» или по схеме Горнера), получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 4)}{(x-1)(x^3 + 2x^2 + 5x + 4)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 4} = \frac{1 + 1 - 4}{1 + 2 + 5 + 4} = \frac{-1}{6}.$$

M13.10.6 Пример. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{4x + 13} - 5}{x^2 - 8x + 15}$; б) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt[3]{15x + 4} - \sqrt[3]{16x}}$;

Решение. а) Подстановка числа $x_0 = 3$ под знак предела приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{4x+13} - 5\right)\left(\sqrt{4x+13} + 5\right)}{\left(x^2 - 8x + 15\right)\left(\sqrt{4x+13} + 5\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{4x - 12}{(x-3)(x-5)\left(\sqrt{4x+13} + 5\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{4}{(x-5)\left(\sqrt{4x+13} + 5\right)} = -\frac{1}{10}$$

б) снова подстановкой числа $x_0 = 4$ под знак предела получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt[3]{(15x+4)^2} + \sqrt[3]{15x+4} \cdot \sqrt[3]{16x} + \sqrt[3]{(16x)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{15x+4} - \sqrt[3]{16x}\right)\left(\sqrt[3]{(15x+4)^2} + \sqrt[3]{15x+4}\sqrt[3]{16x} + \sqrt[3]{(16x)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt[3]{(15x+4)^2} + \sqrt[3]{15x+4} \cdot \sqrt[3]{16x} + \sqrt[3]{(16x)^2}\right)}{15x + 4 - 16x} =$$

$$= -\lim_{x\to 4}\left(\sqrt[3]{(15x+4)^2} + \sqrt[3]{15x+4}\cdot\sqrt[3]{16x} + \sqrt[3]{(16x)^2}\right) = -48.$$

13.11 «Замечательные» пределы

М13.11.1 Пример. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x} : \frac{\sin 3x}{x}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}$;

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда если $x\to 0$, то и $y\to 0$: $5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 5\cdot 1 = 5$. (воспользовались первым «замечательным» пределом). Аналогично $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3$. Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x} : \frac{\sin 3x}{x}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{5}{3}.$$

б) Сделаем замену переменной $y = x - \frac{\pi}{6}$, тогда $y\to 0$ и получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} tg\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{y\to 0} tg(2y)\cdot tg\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = -\lim_{y\to 0} tg(2y)ctgy =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\cos 2y}\cdot\frac{\cos y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\cos 2y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{\sin y} = 1\cdot\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y}}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = 2.$$

М13.11.2 Пример. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$;

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^x$. Сделаем замену $\frac{3}{x-2} = \frac{1}{y}$, тогда $x = 3y+2$, $y = \frac{x-2}{3}$ и $y\to\infty$. Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y+2} = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^3\cdot\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^2 = e^3\cdot 1 = e^3.$$

б) Сделаем замену переменной $x=\dfrac{3}{y}$,тогда $y\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{\frac{y}{6}}=\sqrt[6]{e}$.

М13.11.3 Пример. Доказать, что: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\log_a\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$;

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$

б) Сделаем замену $a^x-1=y$. Тогда $x=\log_a y$ и $y\to 0$. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a y}=\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log_a y}{y}}=\ln a$.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

в) Обозначим $(x+1)^\alpha=y+1$, тогда $\alpha\ln(x+1)=\ln(y+1)$ и $\dfrac{\alpha\ln(x+1)}{\ln(y+1)}=1$. Заметим, что если $x\to 0$, то и $y\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}\cdot\frac{\alpha\ln(x+1)}{\ln(y+1)}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\alpha\cdot 1\cdot 1=\alpha .$$

Контрольные вопросы:

1. Какая точка называется предельной точкой множества? Дайте определение конечного предела на языке $\varepsilon-\delta$ (при стремлении переменной к конечному значению и при стремлении переменной к бесконечности).
2. Дайте определение бесконечного предела на языке $\varepsilon-\delta$ (при стремлении переменной к конечному значению и при стремлении переменной к бесконечности).
3. Сформулируйте критерий Коши существования конечного предела.
4. Дайте определения левого и правого пределов на языке $\varepsilon-\delta$.
5. Дайте определение предела на языке последовательностей. Сформулируйте теорему о равносильности определений пределов по Коши и по Гейне.
6. Что называется бесконечно малой величиной? Сформулируйте свойства бесконечно малых величин. Что такое «о малое» и «о большое»? Какие функции называются эквивалентными?
7. Сформулируйте теорему о пределе и арифметических операциях. Сформулируйте теорему о пределе и неравенствах. Сформулируйте теорему о пределе «зажатой» функции. Что называется первым «замечательным» пределом?

8. Какая функция называется возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей? Какая функция называется ограниченной сверху, ограниченной снизу? Сформулируйте теорему о пределе монотонной ограниченной функции.
9. Какая функция называется полиномом? Что называется корнем полинома? Сформулируйте теорему Безу.
10. Чему равны пределы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^\alpha-1}{x}$