Лекция 14 Дифференциальные уравнения первого порядка

29.1 Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Д29.1.1 Задача 1. Найти все линии, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{2}a^2$.

Решение: Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$. Ордината точки А равна нулю, поэтому из уравнения касательной найдем ее абсциссу: $0 - y_0 = y_0'(x - x_0)$; $x = x_0 - \frac{y_0}{y_0'}$.

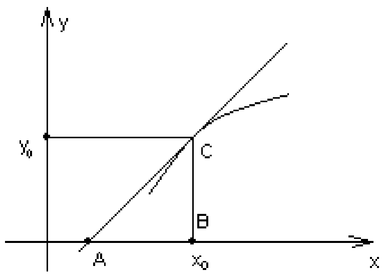


Рис. 3 Пример: задача о касательной

Длина катета BC равна y_0, а длина катета AB равна разности абсцисс точек B и A: $x_0 - \left(x_0 - \frac{y_0}{y_0'}\right) = \frac{y_0}{y_0'}$.

Площадь прямоугольного треугольника ABC равна половине произведения катетов, значит, $\frac{y_0^2}{y_0'} = a^2$. Поскольку это соотношение должно быть верно в любой точке линии, то $\frac{y^2}{y'} = a^2$. Таким образом, для определения уравнения линии получили уравнение, в котором в качестве неизвестных фигурируют функция y и ее производная.

Д29.1.2 Задача 2. В сосуд, содержащий 10 л. воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л. в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,2 кг. соли. Поступающий в сосуд раствор непрерывно перемешивается с содержимым сосуда, и смесь вытекает оттуда с той же скоростью. Найти закон изменения количества соли в растворе в зависимости от времени.

Решение: Обозначим $y(t)$ - количество соли в сосуде через t минут после начала поступления раствора в сосуд. За одну минуту поступает 2 л. раствора, значит, за промежуток времени Δt (мин) поступает $2\Delta t$ литров. В этих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}2 \cdot 2\Delta t = 0{,}4\Delta t$ кг. соли. За то же время Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент времени t в сосуде содержится $y(t)$ кг. соли, значит, если бы содержание соли в сосуде не менялось, то в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ кг. соли. Поскольку же содержание соли непрерывно меняется, то в вытекающих $2\Delta t$ литрах содержится $0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha)$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Приращение количества соли в растворе за время Δt равно $y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}4\Delta t - 0{,}2\Delta t(y(t) + \alpha)$. Полученное равенство поделим на Δt и устремим $\Delta t \to 0$. Получим уравнение $y' = 0{,}4 - 0{,}2y$.

Д29.1.3 Определение: *Дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой независимой переменной и производные этой функции до порядка n включительно.

29.2 Решение дифференциального уравнения первого порядка

Д29.2.1 Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой независимой переменной и производную этой функции: $F(x, y, y') = 0$. Если дифференциальное уравнение первого порядка представлено в виде $y' = f(x,y)$, то оно называется *уравнением, разрешенным относительно производной*.

Д29.2.2 *Замечание 1.* Уравнение $y' = f(x,y)$ можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Наряду с уравнением $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ всегда будем рассматривать и уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$. Кроме того, будем рассматривать уравнения первого порядка, заданные в виде $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$.

Д29.2.3 Определение. Дифференцируемая на промежутке $(a;b)$ (возможно – бесконечном) функция $y(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения $F(x,y,y') = 0$ (или $y' = f(x,y)$), если она обращает это уравнение в тождество на промежутке $(a;b)$.

Д29.2.3 Пример 1. Функция $y = -\frac{a^2}{x}$ является решением дифференциального уравнения $\frac{y^2}{y'} = a^2$. Действительно, $y' = \frac{a^2}{x^2}$ и $\frac{y^2}{y'} = \frac{a^4}{x^2} : \frac{a^2}{x^2} = a^2$. Заметим, что при любом значении постоянной C функция $y = \frac{a^2}{C - x}$ также будет решением рассмотренного дифференциального уравнения.

Д29.2.5 *Замечание 2.* Далеко не всегда удается найти решение дифференциального уравнения в виде элементарной функции, даже заданной неявно или параметрическими уравнениями. Например, чтобы найти решение простейшего уравнения $y' = \frac{\sin x}{x}$, нужно взять «неберущийся» интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$. Если можно найти решение дифференциального уравнения в виде композиции элементарных функций и интегралов от элементарных функций (даже заданных неявно или параметрически), то говорят, что уравнение *интегрируется в квадратурах*.

Д29.2.6 Пример 2. Показать, что неявная функция $x^2 + y^2 - 1 = 0$ является решением дифференциального уравнения $y' = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{x(x^2 + y^2 - 1) - y}$.

Решение. Допустим, что некоторая неявная функция $\Phi(x,y) = 0$ является решением уравнения $y' = f(x,y)$. Тогда, дифференцируя равенство $\Phi(x,y(x)) = 0$ по переменной x, получим $\Phi'_x + \Phi'_y \cdot y'_x = 0$. С учетом равенства $y' = f(x,y)$, получим $\Phi'_x + \Phi'_y \cdot f(x,y) = 0$.

В данном примере $f(x,y) = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{x(x^2 + y^2 - 1) - y}$, $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $\Phi'_x(x,y) = 2x$, $\Phi'_y(x,y) = 2y$. Составляя выражение $\Phi'_x + \Phi'_y \cdot f(x,y)$, получим $2x + 2y\frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{x(x^2 + y^2 - 1) - y}$. В силу условия $x^2 + y^2 - 1 = 0$ это выражение упрощается: $2x - 2y\frac{x}{y} = 0$, что и требовалось.

Д29.2.7 Пример 3. Показать, что функция $y(x)$, заданная параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ является решением уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Решение. Поскольку $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt$ и $-\dfrac{x}{y} = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -ctgt$, то, очевидно, функция $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Д29.2.8 Определение. Линия на плоскости, соответствующая решению дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, называется *интегральной кривой* этого дифференциального уравнения.

Д29.2.9 Определение. Множество решений $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ (или $F(x, y, y') = 0$), зависящее от одной произвольной постоянной, называется *общим решением* дифференциального уравнения первого порядка.

29.3 Задача Коши

Д29.3.1 Постановка задачи Коши (для уравнения, разрешенного относительно производной) Найти решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, где $x_0, y_0 \in R$ - заданные числа.

Д29.3.2 *Замечание 1.* С точки зрения геометрии - решить задачу Коши, значит найти интегральную кривую уравнения $y' = f(x, y)$, проходящую через заданную на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$.

Д29.3.3 Определение. Задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ *имеет единственное решение*, если существует число $h > 0$ такое, что в интервале $|x - x_0| < h$ определено решение $y(x)$ задачи Коши и не существует решения, определенного в том же интервале и не совпадающего с решением $y(x)$ хотя бы в одной точке интервала $|x - x_0| < h$. Точку $M_0(x_0, y_0)$ в этом случае называют точкой единственности решения задачи Коши.

Д29.3.4 Определение. Если решение уравнения $y' = f(x, y)$ состоит только из точек единственности решения задачи Коши, то оно называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Д29.3.5 *Замечание 2.* Решение уравнения, получаемое из формулы $y = y(x, C)$ общего решения при конкретном числовом значении постоянной C является частным решением.

Д29.3.6 Определение. Решение уравнения $y' = f(x, y)$, состоящее из точек, в каждой из которых нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

Д29.3.7 *Замечание.* Кроме частных и особых решений у дифференциального уравнения могут быть решения, не являющиеся ни частными, ни особыми.

Д29.3.8 Пример. Найти общее, частные и особые решения дифференциального уравнения и дать их геометрическую интерпретацию: $\sqrt{1-y^2}\,dx - ydy = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, предполагая, что независимой переменной является y, а $x = x(y)$. Интегрируя, получим: $x = \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$ при $1-y^2 \neq 0$; $x = -\sqrt{1-y^2} + C$, откуда $x - C = -\sqrt{1-y^2}$ и $\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 1 \\ x \leq C \end{cases}$. С геометрической точки зрения следует, что множество интегральных кривых, соответствующих общему решению – это семейство левых половин окружностей радиуса $R=1$ с центрами в точках $(C,\,0)$ (Рис. 18.2.). Еще два решения находим из уравнения $1-y^2=0$: $y=-1$ и $y=1$. Это – особые решения, т.к. в каждой их точке решение задачи Коши не единственно.

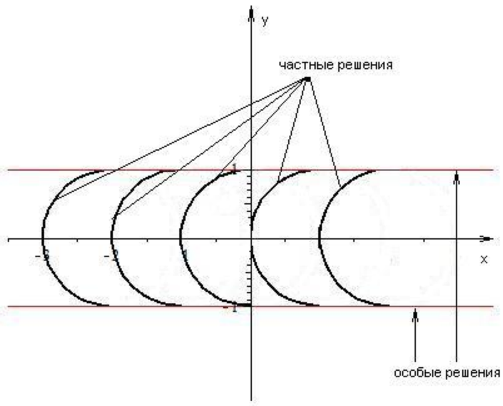


Рис.18.2. Пример частных и особых решений дифференциального уравнения первого порядка

При каждом конкретном числовом значении C в качестве частного решения фактически получаем две функции $y = \pm\sqrt{1-(x-C)^2}$, графиками которых являются верхняя и нижняя части полуокружности. На рис.18.2. приведены интегральные кривые, соответствующие значениям $C=0$ и $C=\pm 2$. Интегральные кривые, соответствующие особым решениям, представляют собой прямые линии $y=1$ и $y=-1$, параллельные оси OX.

Заметим, что линия, полученная «склейкой любой из этих полуокружностей с касательными к ней лучами $y=\pm 1$, направленными вправо, также является интегральной кривой данного уравнения, соответствующей решению, которое не является ни частным, ни особым.

29.4 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Д29.4.1 Определение: Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$ называется *уравнением с разделенными переменными*.

Запишем уравнение с разделенными переменными в виде $f(x)dx = -g(y)dy$ и проанализируем его. В левой и правой частях уравнения находятся дифференциалы некоторых функций, и они равны. Значит, равны и производные этих функций. По теореме о совпадении производных эти функции могут отличаться друг от друга лишь на произвольную постоянную: $\int f(x)dx = -\int g(y)dy + C$. Это равенство и есть общее решение уравнения с разделенными переменными.

Д29.4.2 Определение. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)g(y)$ или вида $f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$ называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Для решения уравнения $f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$ необходимо поделить его на $f_2(y)g_1(x)$ и будет получено уравнение с разделенными переменными. Тот же прием применяется при решении уравнения $y' = f(x)g(y)$: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Д29.4.3 *Замечание:* При делении могут быть потеряны решения, поэтому после деления на переменную величину необходима проверка.

Д29.4.4 Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xydx+(x+1)dy=0$

Решение: $xydx=-(x+1)dy$

Добьемся того, чтобы в левой части равенства отсутствовала переменная y, а в правой части – переменная x. Для этого поделим все уравнение на $y(x+1)$:

$$\frac{x}{x+1}dx=-\frac{dy}{y}$$

Возьмем интегралы от обеих частей уравнения: $\int\frac{x}{x+1}dx=-\int\frac{dy}{y}+C_0$

$\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx=-\ln y+\ln C$. Вместо постоянной C для удобства написали постоянную lnC.

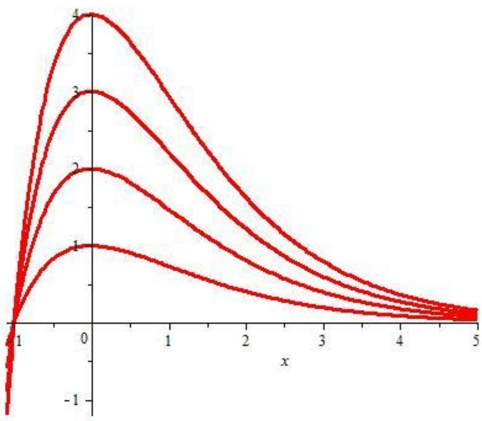
$\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\ln y+\ln C$

$x-\ln(x+1)=-\ln y+\ln C$;

$\ln e^x-\ln(x+1)=-\ln y+\ln C$

$\ln\frac{e^x}{x+1}=\ln\frac{C}{y}$; $\frac{e^x}{x+1}=\frac{C}{y}$; $y=\frac{C(x+1)}{e^x}$.

Несколько интегральных кривых показаны на рисунке.



Д29.4.5 Пример 2. Решить задачу Коши $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$

Решение: Найдем общее решение уравнения.

$(x^2-1)\frac{dy}{dx}=-2xy^2$,

$(x^2-1)dy=-2xy^2dx$; $-\frac{dy}{y^2}=\frac{2xdx}{x^2-1}$; $-\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{2xdx}{x^2-1}+C$;

$\frac{1}{y}=\ln\left|x^2-1\right|+C$. Это равенство можно считать общим решением (в виде неявной функции). Поскольку при решении уравнения производилось деление на переменные величины y^2 и x^2-1, то необходимо поверить, не являются ли функции $y^2=0$ и $x^2-1=0$ решениями дифференциального уравнения. Если $y^2=0$, то $y=0$ и $y'=0$. При подстановке в уравнение $y=0$ и $y'=0$ получим тождество, значит, $y=0$ - еще одно решение дифференциального уравнения. Если $x^2-1=0$, то $x=\pm1$ и при подстановке этих значений в уравнение тождество не получается.

Теперь воспользуемся условием $y(0)=1$. Для этого в общее решение вместо переменной x подставим число 0, а вместо y - число 1:

$$\frac{1}{1}=\ln\left|0^2-1\right|+C$$

Значит, $C=1$ и это значение подставляем в общее решение: $\frac{1}{y}=\ln\left|x^2-1\right|+1$; $y=\frac{1}{\ln\left|x^2-1\right|+1}$.

29.5 Однородные дифференциальные уравнения

Д29.5.1 Определение. Функция $H(x,y)$ называется *однородной функцией порядка* n относительно переменных x и y, если для любого числа λ, при котором λx и λy принадлежат области определения функции $H(x,y)$, выполняется равенство $H(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n H(x,y)$.

Д29.5.2 Определение. Функция $H(x,y)$ называется *положительно однородной функцией порядка* n относительно переменных x и y, если для любого числа $\lambda>0$, при котором λx и λy принадлежат области определения функции $H(x,y)$, выполняется равенство $H(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n H(x,y)$.

Д29.5.3 Примеры: 1. Функция $H(x,y)=x^3+y^3$ является однородной функцией третьего порядка: $H(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^3+(\lambda y)^3=\lambda^3(x^3+y^3)$;

2. Функция $H(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ является положительно однородной функцией первого порядка: $H(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}=|\lambda|\sqrt{x^2+y^2}=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$;

3. Функция $H(x,y)=\dfrac{x+y}{y}$ является однородной функций нулевого порядка: $H(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda x+\lambda y}{\lambda y}=\dfrac{\lambda(x+y)}{\lambda y}=\dfrac{x+y}{y}=\lambda^0\dfrac{x+y}{y}$;

Д29.5.4 *Замечание:* существуют однородные и положительно однородные функции отрицательных и дробных порядков, например, $z=\dfrac{1}{x+y}$, $z=\sqrt[6]{x^5+y^5}$, $z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+y}}$ и т.п.

Д29.5.5 Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется *однородным дифференциальным уравнением*, если $P(x,y), Q(x,y)$ являются однородными или положительно однородными функциями одинакового порядка.

Д29.5.6 Однородные дифференциальные уравнения всегда можно привести к виду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и, используя замену переменной $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u$, прийти к уравнению с разделяющимися переменными вида $\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$.

Д29.5.7 Пример 1. Найти общее решение уравнения $(x+y)dx+xdy=0$.

Решение: $x+y$ и x - однородные функции первого порядка. Поэтому находим общее решение дифференциального уравнения как однородного с помощью подстановки $u=\dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow y=ux$ $\Rightarrow dy=udx+xdu$. Подставляя полученные выражения для функции $y=ux$ и ее дифференциала, получим (при $x\neq 0$): $(x+ux)dx+x(udx+xdu)=0$; $(1+2u)dx+xdu=0$; $-\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{1+2u}$; $-\int\dfrac{dx}{x}=\int\dfrac{du}{1+2u}$; $-\ln|x|+\ln|C|=\dfrac{1}{2}\ln|1+2u|$; $1+2u=\dfrac{c^2}{x^2}$; $1+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{c^2}{x^2}$; $y=\dfrac{C^2}{2x}-\dfrac{x}{2}$.

Д29.5.8 Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение: Уравнение приводится к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$: $x\frac{dy}{dx} = |x|\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + y$; $\frac{dy}{dx} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$. При $x > 0$ получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$, а при $x < 0$ - уравнение $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$.

Решим уравнение при $x > 0$: $y = ux$, $y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = \sqrt{1 + u^2} + u$; $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$;
$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int\frac{dx}{x}$; $\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + \ln\frac{1}{C}$; $u + \sqrt{1+u^2} = \frac{x}{C}$; $x = C\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$.
Возвращаясь к исходным переменным, получим $x^2 = C\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)$;

Решим уравнение при $x < 0$: $u'x + u = -\sqrt{1+u^2} + u$; $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$;
$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = -\ln|x| + \ln\frac{1}{C}$; $u + \sqrt{1+u^2} = -\frac{1}{Cx}$; $\frac{1}{x} = -C\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$;
$\frac{1}{x} = -C\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $\frac{1}{x} = -C\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $C\left(\sqrt{x^2+y^2} - y\right) = 1$.

Общее решение состоит из двух множеств функций: $x^2 = C\left(\sqrt{x^2+y^2} + y\right)$ и 21 $C\left(\sqrt{x^2+y^2} - y\right) = 1$.

При $x = 0$ подстановкой в уравнение $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ получаем $-y = |y|$, что является тождеством только при $y < 0$; значит, луч $x = 0, y < 0$ является решением дифференциального уравнения. Проверим, является ли это решение частным; для этого подставим $x = 0$ сначала в равенство $x^2 = C\left(\sqrt{x^2+y^2} + y\right)$, получим $0 = C\left(|y| + y\right)$. Это равенство обратится в тождество при $C = 0$, следовательно, решение $x = 0, y < 0$ является частным.

29.6 Линейные дифференциальные уравнения

Д29.6.1 Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если в его состав переменная y и ее производная входят только в первой степени, т.е. линейное уравнение сводится к виду $y' + p(x)y = f(x)$, где $p(x), f(x)$ - заданные функции, не зависящие ни от y, ни от ее производной. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным* Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным*.

Замечание. Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными.

Д29.6.2 Непосредственно проверяется, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y' + p(x)y = f(x)$ всегда можно представить в виде суммы общего решения y_1 однородного уравнения $y_1^{'} + p(x)y_1 = 0$ и частного решения y_2 исходного неоднородного уравнения: $y = y_1 + y_2$.

Общее решение y_1 однородного уравнения находится методом разделения переменных $y_1 = \varphi(x, C)$. Частное решение неоднородного уравнения y_2 будем искать в виде $y_2 = \varphi(x, C(x))$, где $C(x)$ - неизвестная функция, которая находится подстановкой выражения $y_2 = \varphi(x, C(x))$ в неоднородное линейное уравнение. После этого общее решение неоднородного уравнения записывается в виде $y = y_1 + y_2$.

Д29.6.3. Пример. Найти общее решение уравнения $y^{'} + \dfrac{2y}{x} = 5x^2$.

- находим общее решение линейного однородного уравнения $y_1^{'} + \dfrac{2y_1}{x} = 0$: $\dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{2y_1}{x}$; $\dfrac{dy_1}{y_1} = -\dfrac{2dx}{x}$; $\int \dfrac{dy_1}{y_1} = -2\int \dfrac{dx}{x}$; $\ln|y_1| = -2\ln|x| + \ln|C|$; $y_1 = \dfrac{C}{x^2}$;

- частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_2 = \dfrac{C(x)}{x^2}$; найдем производную частного решения и подставим в неоднородное уравнение; $y_2^{'} = \dfrac{C^{'}(x)x - 2C(x)}{x^3}$;

$\dfrac{C^{'}(x)x - 2C(x)}{x^3} + \dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{C(x)}{x^2} = 5x^2$; $\dfrac{C^{'}(x)}{x^2} = 5x^2$; $C^{'}(x) = 5x^4$; $C(x) = 5\int x^4 dx = x^5$ (здесь при интегрировании произвольная постоянная не вводится, т.к. находим не общее, а частное решение).

$y_2 = \dfrac{C(x)}{x^2} = \dfrac{x^5}{x^2} = x^3$;

- записываем общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + y_2 = \dfrac{C}{x^2} + x^3$.

Д29.6.4 Метод подстановки. Общее решение неоднородного уравнения $y^{'} + p(x)y = f(x)$ представляем в виде $y = u(x)v(x)$, где $u(x), v(x)$ - две новые неизвестные функции, для определения которых необходимо последовательно решить два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными - $u^{'} + p(x)u = 0$ и $uv^{'} = f(x)$, причем в первом уравнении находим только одно (любое) частное решение, во втором – общее решение.

Д29.6.5 Пример. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения $y^{'} - 2xy = x - x^3$ методом подстановки.

Решение. Общее решение будем искать в виде $y = uv$. После замены переменной получаем $u^{'}v + v(u^{'} - 2xu) = x - x^3$. Полагая равным нулю выражение в скобках, получим систему дифференциальных уравнений в виде $\begin{cases} u^{'} - 2xu = 0 \\ uv^{'} = x - x^3 \end{cases}$. Находим частное решение первого уравнения: $u^{'} = 2xu$; $\dfrac{du}{dx} = 2xu$; $\dfrac{du}{u} = 2xdx$; $\ln u = x^2$; $u = e^{x^2}$. Найденное частное решение подставляем во второе уравнение и решаем его: $e^{x^2}\cdot v' = x - x^3$; $v' = (x - x^3)e^{-x^2}$; $v = \int (x - x^3)e^{-x^2}dx = \int xe^{-x^2}dx - \int x^3e^{-x^2}dx = J_1 + J_2$;

Для нахождения J_1 используем метод подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала: $J_1 = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$; Второй интеграл находим интегрированием по частям:

$$J_2 = \int x^3e^{-x^2}dx = \int x^2\cdot xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} f = x^2, & dg = xe^{-x^2} \\ df = 2xdx, & g = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{bmatrix} = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int 2xe^{-x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} + C. \quad v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} + C = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C.$$

Окончательно получим общее решение: $y = uv = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C\right) = \frac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$

29.7 Уравнение Бернулли

Д29.7.1 Определение. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

Д29.7.2 Общее решение представляем в виде произведения двух неизвестных функций $y = uv$, которые находятся последовательным решением дифференциальных уравнений $u' + p(x)u = 0$ и $uv' = f(x)u^{\alpha-1}v^{\alpha}$.

Д29.7.3 Пример. Найти общее решение уравнения $y' - 2xy = e^{x^2}y^2$.

Решение. Общее решение ищем в виде $y = uv$. Неизвестные функции $u(x)$, $v(x)$ находим из системы уравнений $\begin{cases} u' - 2xu = 0 \\ uv' = e^{x^2}v^2 \end{cases}$. Решение уравнения $u' - 2xu = 0$ было получено ранее: $u = e^{x^2}$ (см. Пример $18.5.2^0$).

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы: $e^{x^2}v' = e^{x^2}v^2$;

$v' = v^2$; $\frac{dv}{dx} = v^2$; $\frac{dv}{v^2} = dx$; $\int\frac{dv}{v^2} = \int dx$; $-\frac{1}{v} = x - C$; $v = \frac{1}{C - x}$.

Общее решение уравнения имеет вид $y = uv = \frac{e^{x^2}}{C - x}$.

29.8 Уравнение в полных дифференциалах

Д29.8.1 Определение. Уравнение $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $z = F(x, y)$, для которой $dF = f(x, y)dx + g(x, y)dy$.

Д29.8.2 *Замечание.* Из теоремы о совпадении смешанных производных (М28.1.4) следует, что необходимым и достаточным признаком того, что выражение $f(x,y)dx+g(x,y)dy$ является полным дифференциалом, является тождественное равенство $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$. Метод нахождения функции $z=F(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dF=f(x,y)dx+g(x,y)dy$ также известен из математического анализа.

Д29.8.3 Пример. Убедившись, что дифференциальное уравнение $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах, решить его.

Решение. Проверим признак полного дифференциала: $\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}$, $(y^3+\ln x)'_x=\frac{1}{x}=\left(\frac{y}{x}\right)'_y$.

Интегрируем: $F(x,y)=\int\frac{y}{x}dx=y\int\frac{dx}{x}=y\ln x+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция одной переменной y.

Из уравнения в полных дифференциалах следует, что $F'_y(x,y)=y^3+\ln x$. Из полученного выше равенства $F(x,y)=y\ln x+\varphi(y)$ следует, что $F'_y(x,y)=\ln x+\varphi'(y)$. Приравнивая эти два выражения, получим $y^3+\ln x=\ln x+\varphi'(y)$, откуда $\varphi'(y)=y^3$. Интегрируя, получаем $\varphi(y)=\int y^3dy=\frac{y^4}{4}+C$, где C - произвольная постоянная. Значит, $F(x,y)=y\ln x+\frac{y^4}{4}+C$.

Общее решение дифференциального уравнения дается формулой $y\ln x+\frac{y^4}{4}+C=0$.

29.9 Метод Эйлера приближенного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка

Д29.9.1 Наиболее простым и универсальным (т.е. применимым к любым типам уравнений первого порядка, разрешенным относительно производной) является *метод Эйлера*, позволяющий решить задачу Коши на любом (как угодно большом, но конечном) интервале изменения независимой переменной x. Метод Эйлера лежит в основе других, более совершенных численных методов.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной $y'=f(x,y)$ (функция $z=f(x,y)$ - непрерывна) с начальным условием $y(x_0)=y_0$. Требуется решить поставленную задачу Коши на заданном отрезке $[x_0,x_n]$.

При приближенном решении дифференциального уравнения интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$, заменяется ломаной (*ломаной Эйлера*), которая строится следующим образом.

Делим отрезок $[x_0,x_n]$ на n равных частей $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$ некоторой длины h. По начальному условию $y(x_0)=y_0$ определяем тангенс угла наклона касательной в начальной точке: $tg\alpha_0=y'_0=f(x_0,y_0)$. Интегральную кривую на отрезке $[x_0,x_1]$ заменяем отрезком касательной $y=y_0+y'_0(x-x_0)$. Определяем в точке $x_1=x_0+h$ приближенное значение ординаты интегральной кривой $\overline{y}_1=y_0+h\cdot tg\alpha_0=y_0+h\cdot f(x_0,y_0)$. Затем последовательно определяем $tg\alpha_1=y'_1=f(x_1,\overline{y}_1)$, $\overline{y}_2=\overline{y}_1+h\cdot f(x_1,\overline{y}_1)$; $tg\alpha_2=y'_2=f(x_2,\overline{y}_2)$,

$\bar{y}_3 = \bar{y}_2 + h\cdot f(x_2, \bar{y}_2)$; $\ldots$; $tg\alpha_{n-1} = y'_{n-1} = f(x_{n-1}, \bar{y}_{n-1})$, $\bar{y}_n = \bar{y}_{n-1} + h\cdot f(x_{n-1}, \bar{y}_{n-1})$. В результате получаем приближенное значение задачи Коши в табличной форме. По данным таблицы можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной линии.

Д29.9.2 Пример. Решить задачу Коши $y' = x + y$, $y(1) = 1$ на отрезке $[1, 2]$, разбивая заданный интервал на 10 частей. Найти приближенное значение задачи Коши в точке $x = 2$.

Решение. Делим отрезок $[1, 2]$ на десять равных частей: шаг интегрирования $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$.

Результаты вычислений сведем в таблицу.

i	x_i	$\bar{y}_i$	$\Delta y_i = 0{,}1(x_i + \bar{y}_i)$	$y_{i+1} = \bar{y}_i + \Delta y_i$
0	1	1	0,2	1,2
1	1,1	1,2	0,23	1,43
2	1,2	1,43	0,263	1,693
3	1,3	1,693	0,299	1,992
4	1,4	1,992	0,339	2,331
5	1,5	2,331	0,383	2,714
6	1,6	2,714	0,431	3,145
7	1,7	3,145	0,485	3,630
8	1,8	3,630	0,543	4,173
9	1,9	4,173	0,607	4,780
10	2	4,780		

На Рис.18.5 показана полученная ломаная Эйлера. Из-за достаточно мелкого разбиения эта ломаная кажется гладкой кривой. Приближенное решение задачи Коши в точке $x = 2$ равно 4,78. При точном решении линейного дифференциального уравнения $y' = x + y$ получим $y(2) = 5{,}155$.

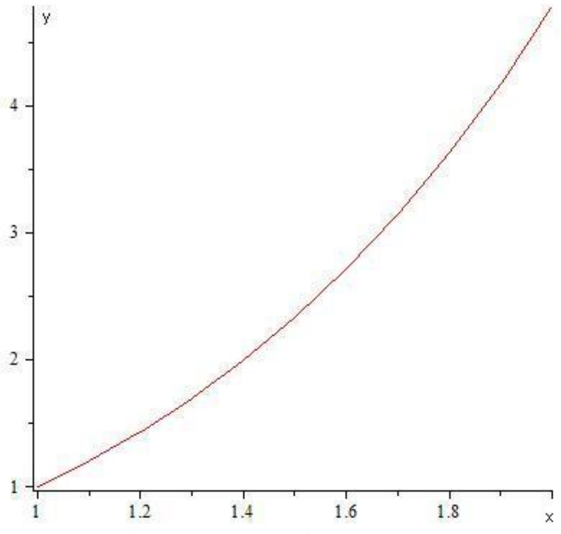


Рис.18.5. Пример применения метода Эйлера

Основные недостатки метода Эйлера:

- малая точность при большом шаге разбиения h;

- систематическое накопление ошибок при переходе от интервала к интервалу;

Эти недостатки в значительной мере устранены в современных методах численного решения дифференциальных уравнений, в основе которых во многих случаях лежит метод Эйлера.

Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка? Что называется решением дифференциального уравнения первого порядка? Какие дифференциальные уравнения называются интегрируемыми в квадратурах?
2. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? Что означает, что задача Коши имеет единственное решение? Какое решение дифференциального уравнения называется частным решением и какое – особым?
3. Что называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными? Сформулируйте алгоритм решения такого уравнения.
4. Какие функции называются однородными и какие – положительно однородными? Что называется однородным дифференциальным уравнением? Сформулируйте алгоритм решения такого уравнения.
5. Что называется линейным дифференциальным уравнением? Сформулируйте алгоритм решения такого уравнения.
6. Что называется дифференциальным уравнением Бернулли? Сформулируйте алгоритм решения такого уравнения.
7. Что называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах? Как проверить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах? Сформулируйте алгоритм решения такого уравнения.
8. Сформулируйте алгоритм метода Эйлера приближенного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.