Лекция 11 Функции нескольких переменных

27.1 R^n как метрическое пространство

М27.1.1 Определение. Множеством R^n называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ... x_n)$, где $x_i \in R^n, i = 1, 2, ..., n$. Эти упорядоченные наборы называют точками n-мерного пространства (вам эти «точки» известны как векторы из курса алгебры).

М27.1.2 Определение. *Расстоянием (евклидовым расстоянием)* между точками $M_1 = (x_1^1, x_2^1, ... x_n^1)$ и $M_2 = (x_1^2, x_2^2, ... x_n^2)$ называется функция $d(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i-1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2}$.

М27.1.3 *Замечание 1.* Расстояние $d(M_1, M_2)$, очевидно, обладает следующими свойствами:

$$\forall M_1 \in R^n, \forall M_2 \in R^n \quad d(M_1, M_2) \geq 0;$$
$$d(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2;$$
$$\forall M_1 \in R^n, \forall M_2 \in R^n \quad d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1);$$
$$\forall M_1 \in R^n, \forall M_2 \in R^n, \forall M_3 \in R^n \quad d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3).$$

Последнее неравенство, называеется *неравенством треугольника*. Любая другая функция, обладающая четырьмя перечисленными свойствами, также называется расстоянием (уже не евклидовым) между точками на множестве R^n.

М27.1.4 *Замечание 2.* Множества R^2 и R^3 можно интерпретировать как множества точек координатной плоскости и координатного пространства соответственно. На этих множествах функция $d(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i-1}^{n} (x_i^1 - x_i^2)^2}$ есть обычное расстояние на плоскости или в пространстве между точками M_1, M_2 или, что то же самое, длина вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

27.2 Открытые и замкнутые множества в R^n

М27.2.1 Определение. Пусть $d(M_1, M_2)$ - евклидово расстояние в пространстве R^n, $a \in R^n$, $\delta > 0$. Множество $B(a;\delta) = \{x \in R^n \mid d(a, x) < \delta\}$ называется *открытым шаром радиуса* δ *с центром в точке* a или δ*-окрестностью* точки $a \in R^n$.

М27.2.2 Определение. Множество $G \subset R^n$ называется *открытым множеством в* R^n, если для любой точки $x \in G$ найдется открытый шар $B(x;\delta)$ такой, что $B(x;\delta) \subset G$

М27.2.3 Примеры. 1) Само пространство R^n и пустое множество являются открытыми множествами в R^n; 2) Открытый шар $B(a;r) = \{x \in R^n \mid d(a, x) < r\}$ является открытым множеством в R^n. Пусть $x \in B(a;r)$, то есть $d(a;x) < r$. Тогда при $0 < \delta < r - d(a;x)$ получим $B(x;\delta) \subset B(a;r)$. Действительно, если $y \in B(x;\delta)$, то $d(x;y) < \delta$. Тогда $d(a;y) \leq d(a;x) + d(x;y) < d(a;x) + r - d(a;x) = r$; 3) Множество $\{x \in R^n \mid d(a, x) > \delta\}$ открыто. Проверяется аналогично предыдущему примеру, используя неравенство треугольника.

М27.2.4 Определение. Множество $F \subset R^n$ называется *замкнутым множеством в* R^n, если его дополнение $G = R^n \setminus F$ является открытым множеством в R^n.

М27.2.5 Пример. Множество $\overline{B}(a;r) = \{x \in R^n \mid d(a;x) \leq r\}$ является замкнутым (следует из М6.2.3 и М6.2.4). Это множество называется *замкнутым шаром*.

М27.2.6 Теорема (объединения и пересечения открытых множеств) 1) Любое объединение $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ открытых множеств является открытым множеством; 2) Пересечение $\bigcap_{i=1}^{k} G_i$ конечного числа открытых множеств является открытым множеством.
Без доказательства.
М27.2.7 Теорема (объединения и пересечения замкнутых множеств) 1) Любое пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ замкнутых множеств является замкнутым множеством. 2) Объединение $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.
Без доказательства.
М27.2.9 Определение. Любое открытое множество, содержащее точку $x \in R^n$ называется *окрестностью* этой точки в R^n.
М27.2.10 Определение. Пусть $x \in R^n$ и $E \subset R^n$, тогда:
- точка $x \in R^n$ называется *внутренней точкой* множества $E \subset R^n$, если найдется окрестность этой точки, полностью принадлежащая множеству E;
- точка $x \in R^n$ называется *внешней точкой* множества $E \subset R^n$, если найдется окрестность этой точки, полностью принадлежащая множеству $R^n \setminus E$;
- точка $x \in R^n$ называется *граничной точкой* множества $E \subset R^n$, если она не является ни внешней ни внутренней точкой этого множества.
М27.2.12 Определение. Точка $b \in R^n$ называется предельной точкой множества $E \subset R^n$, если для любой окрестности $O(b)$ точки b множество $O(b) \cap E$ содержит бесконечное число точек.
М27.2.13 Определение. Объединение множества E со всеми его предельными точками называется *замыканием* множества E и обозначается $\overline{E}$.
М27.2.14 Примеры. 1) Замыканием открытого шара $B(a;r) = \{x \in R^n \mid d(a;x) < r\}$ является замкнутый шар $\overline{B}(a;r) = \{x \in R^n \mid d(a;x) \le r\}$; 2) Замыканием сферы $S(a;r) = \{x \in R^n \mid d(a;x) = r\}$ является сама эта сфера.
М27.2.15 Определение. *Отрезком (прямолинейным отрезком),* соединяющим точки $M_1(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$ и $M_2(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ в пространстве R^n называется отображение отрезка $t \in [0;1]$ в R^n, задаваемое формулами $x_i = (1-t)x_i^1 + tx_i^2$.
М27.2.16 Определение *Ломаной* с вершинами $M_1, M_2, ..., M_k$ в пространстве R^n называется последовательность прямолинейных отрезков, соединяющих точки M_i, M_{i+1} при $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$.
М27.2.17 Определение. Множество $M \subset R^n$ называется *линейно связным множеством*, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в множестве M.

27.3 Понятие действительной функции нескольких переменных

М27.3.1 Определение Пусть $M \subseteq R^n$. Функция $f : M \to R$ называется *действительной функцией* n *переменных*. При этом, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$, то точка $(x_1, x_2, ..., x_n) \in M$ называется *прообразом* числа (точки) y, а точка y называется *образом* точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Замечание. В дальнейшем, если это не может вызвать путаницы, действительную функцию n переменных будем просто называть функцией.
М27.3.2 Определение Множество всех прообразов функции $f : M \to R$ будем назвать *областью существования* (или *естественной областью определения*) этой функции, а множество всех образов – *областью значений* этой функции.

М27.3.3 Примеры. 1) Объем кругового цилиндра выражается формулой $V(R,H)=\pi R^2 H$, значит, объем цилиндра является функцией двух переменных R и H.
2) Сила тока на участке цепи, согласно закону Ома, также является функцией двух переменных (напряжения и сопротивления): $I(U,R)=\dfrac{U}{R}$.
3) Закон всемирного тяготения задает силу притяжения как функцию трех переменных (двух масс и расстояния между телами): $F(m_1,m_2,r)=G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.
4) Рассматриваемые в курсе высшей алгебры квадратичные формы $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$ являются функциями n переменных.

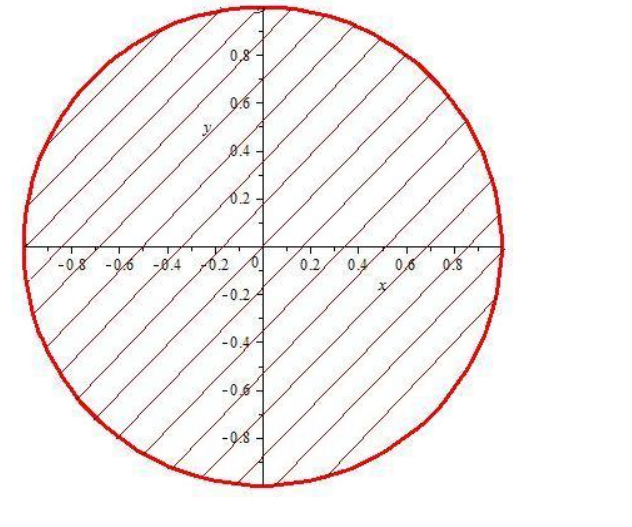
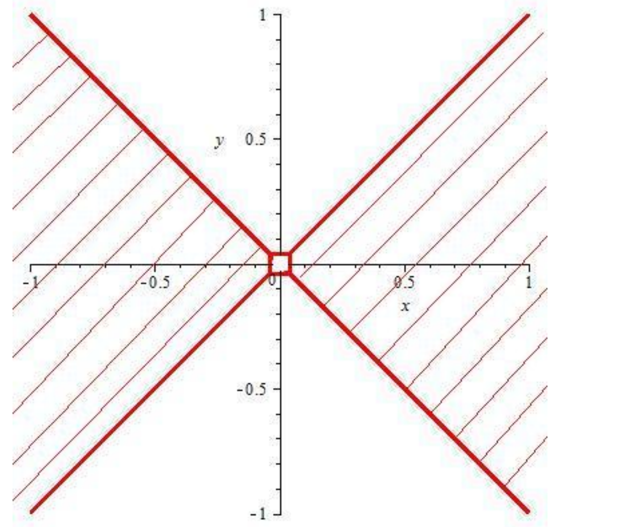
27.4 Область существования функции двух и трех переменных

М27.4.1 *Замечание.* Если интерпретировать R^2 как множество точек плоскости, то областью существования функции $f:R^2\to R$ является некоторое подмножество точек плоскости. Аналогично, если интерпретировать R^3 как множество точек пространства, то областью существования функции $f:R^3\to R$ является некоторое подмножество точек пространства.
М27.4.2 Пример 1 Изобразить на плоскости область существования функций двух переменных : а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

Решение. а) Единственным ограничением на значения переменных x,y в записи $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является $1-x^2-y^2\ge 0$. Отсюда получаем, что областью существования функции является множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2\le 1$, то есть, множество точек круга радиуса 1 с центром в начале координат.

б) Единственным ограничением на значения переменных x,y в записи $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ является $\left|\dfrac{y}{x}\right|\le 1$, откуда получаем $\begin{cases}\dfrac{y}{x}\ge -1\\ \dfrac{y}{x}\le 1\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{y+x}{x}\ge 0\\ \dfrac{y-1}{x}\le 0\end{cases}$. Область существования функции – множество точек, заключенных между прямыми $y=-x,\ y=x$.

Область существования функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$	**Область существования функции** $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$

27.5 График функции двух переменных

М26.5.1 Определение. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства R^3, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

М27.5.2 *Замечание 1.* При некоторых достаточно общих ограничениях, накладываемых на функцию $z = f(x, y)$, графиком функции двух переменных будет некоторая поверхность. Так, например, графиками функций $z = 2x + 3y + 6$, $z = x^2 + y^2$, $z = xy$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ будут, соответственно, плоскость, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид и верхняя половина конуса.

График функции $z = 2x + 3y + 6$	График функции $z = x^2 + y^2$

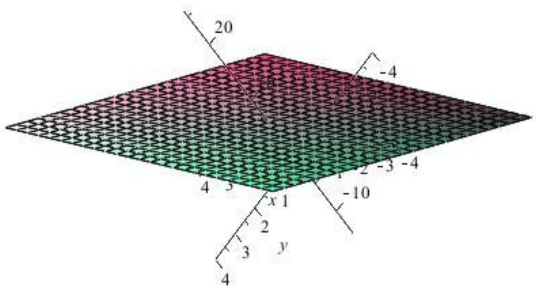
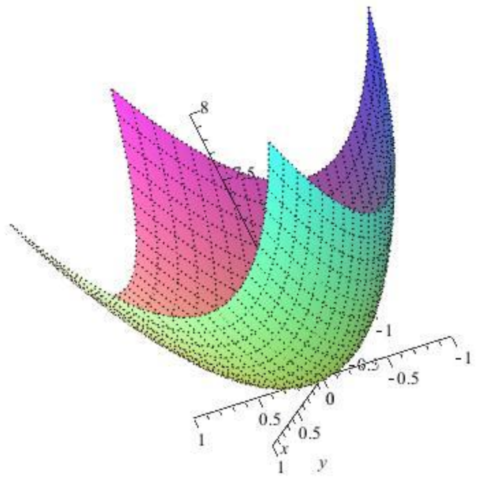
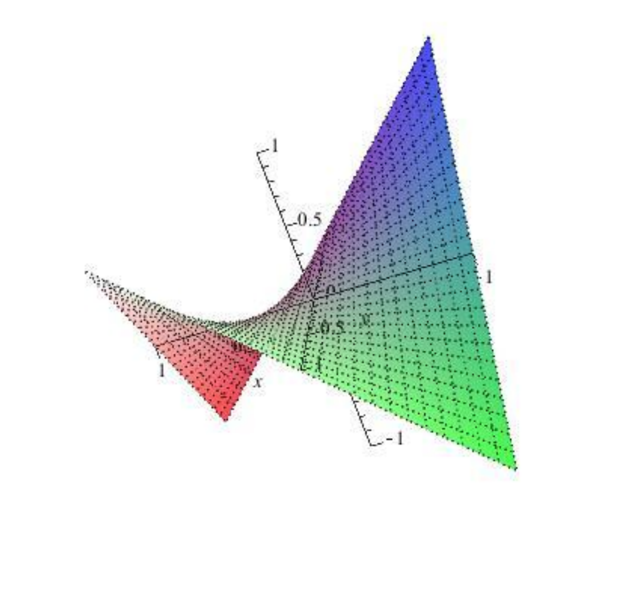
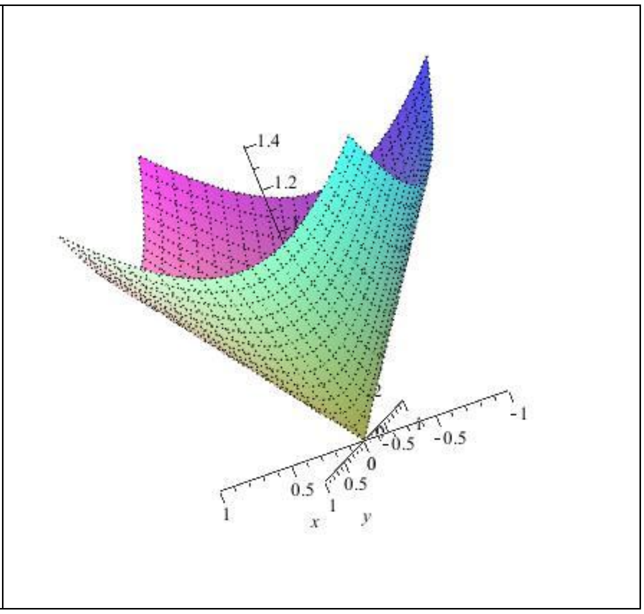

	

График функции $z = xy$	График функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$





М27.5.2 *Замечание 2.* Не любая поверхность является графиком некоторой функции двух переменных. Например, сфера таковым не является. Поверхность будет графиком некоторой функции $z = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает эту поверхность не более одного раза.

27.6 Сложные функции двух переменных

М27.6.1 Определение. Пусть задана функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и при этом переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ сами являются функциями нескольких переменных:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k) \\ \quad ... \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k) \end{cases},$$

тогда функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется сложной функцией переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

М27.6.2 Пример (Линейная замена переменных в квадратичной форме).

Пусть $u(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a$ и $\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_1 \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_2 \end{cases}$, тогда

$$u(y_1, y_2) = a_{11}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_1)^2 + 2a_{12}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_1)(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_2) +$$
$$+ a_{22}(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_2)^2 + a_1(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_1) + a_2(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_2) + a$$

27.7 Понятие предела функции нескольких переменных

М6.7.1 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный A при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ - окрестность V_δ точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, что из $(x_1, x_2, ..., x_n) \in V_\delta$ следует, что $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$.

M27.7.2 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный A при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x_i - x_i^0| < \delta \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ следует $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$.

M27.7.3 *Замечание.* Определения M27.7.1 и M27.7.2 равносильны.

M27.7.4 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный $+\infty$ при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно большого) числа $E > 0$ найдется такая δ - окрестность V_δ точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, что из $(x_1, x_2, ..., x_n) \in V_\delta$ следует, что $f(x_1, x_2, ..., x_n) > E$.

M27.7.5 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный $+\infty$ при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно большого) числа $E > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x_i - x_i^0| < \delta \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ следует $f(x_1, x_2, ..., x_n) > E$.

M27.7.6 *Замечание.* Определения M27.7.4 и M27.7.5 равносильны.

M27.7.7 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный $-\infty$ при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно большого по модулю) числа $E < 0$ найдется такая δ - окрестность V_δ точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, что из $(x_1, x_2, ..., x_n) \in V_\delta$ следует, что $f(x_1, x_2, ..., x_n) < E$.

M27.7.8 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет предел, равный $-\infty$ при $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для любого (как угодно большого по модулю) числа $E < 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x_i - x_i^0| < \delta \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ следует $f(x_1, x_2, ..., x_n) < E$.

M27.7.9 *Замечание.* Определения M27.7.7 и M27/7.8 равносильны.

M27.7.10 Обозначается предел функции нескольких переменных примерно так же, как и предел функции одной переменной:

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \ldots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = A$$

Если обозначить $M = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$, то обозначение предела станет компактнее:

$$\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = A.$$

27.8 Свойства предела функции нескольких переменных

M27.8.1 Теорема (предел и арифметические операции) Если $\lim\limits_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = A$ и $\lim\limits_{M \to M_0} g(x_1, x_2, \ldots x_n) = B$, то:

1) $\lim\limits_{M \to M_0} \left(f(x_1, x_2, \ldots x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = A + B$;

2) $\lim\limits_{M \to M_0} \left(f(x_1, x_2, \ldots x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = A - B$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} \left(f(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = A \cdot B$;

4) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{g(x_1, x_2, ..., x_n)} = \dfrac{A}{B}$ при условии $B \neq 0$.

Без доказательства.

M27.8.2 *Замечание 1.* Теорема остается верной и в случае если какие-либо из независимых переменных стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$.

M27.8.3 *Замечание 2.* Теорема остается верной и в случае если вместо одного или двух чисел A, B поставить символ $+\infty$ или $-\infty$ при условии, что не возникнет неопределенности.

M27.8.4 *Замечание 3.* Остаются верными теорема о пределе и неравенствах , теорема о пределе зажатой функции и операции с символом бесконечности , известные из курса математического анализа функции одной переменной.

вычислить предел функции нескольких переменных, вообще говоря, непросто.

M27.8.5 Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

Решение . $\left|\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right| < |x|+|y|$. Поскольку $x\to 0$ и $y\to 0$, то и $|x|+|y|\to 0$. Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$.

M27.8.6 Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\right)^{x^2y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2\right)^{x^2y^2} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)^{x^2y^2} = 1\cdot 1 = 1$

27.9 Понятие непрерывности функции

M27.9.1 Определение Пусть $\vec{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ - предельная точка области определения функции $y = f\left(\vec{x}\right)$. Функция $y = f\left(\vec{x}\right)$ называется непрерывной в точке $\vec{x}_0$, если

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \dots\\ x_n\to x_n^0}} f\left(x_1, x_2, ... x_n\right) = f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$$

M27.9.2 *Замечание 1* . Функция $y = f\left(\vec{x}\right)$ является непрерывной в точке $\vec{x}_0$, если для любого (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $\left|x_i - x_i^0\right| < \delta \;\; \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ следует $\left|f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)\right| < \varepsilon$.

M27.9.3 *Замечание 2.* . Функция $y = f\left(\vec{x}\right)$ является непрерывной в точке $\vec{x}_0$, если для любого (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ - окрестность V_δ точки $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, что из $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in V_\delta$ следует, что $\left|f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)\right| < \varepsilon$.

M27.9.4 *Замечание 3.* Функция $y = f\left(\vec{x}\right)$ является непрерывной в точке $\vec{x}_0$, если из $\Delta\vec{x} \to 0$ следует $f\left(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}\right) \to 0$.

M27.9.5 Определение Функция $y = f\left(\vec{x}\right)$ называется *непрерывной на множестве* M предельных точек своей области определения, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

M27.9.6 Теорема (непрерывность композиции функций) Если функции $x_i = \varphi_i\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)$ $i = 1,2,\dots,n$ непрерывны в точке $M_0\left(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0\right)$, а функция $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ непрерывна в точке $x_1 = \varphi_1\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)$, $x_2 = \varphi_2\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)$, …, $x_n = \varphi_n\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)$, то и сложная функция

$$y = f\left(\varphi_1\left(t_1, t_2, ..., t_m\right), \varphi_2\left(t_1, t_2, ..., t_m\right), ..., \varphi_n\left(t_1, t_2, ..., t_m\right)\right)$$

непрерывна в точке $M_0\left(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0\right)$.

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, тогда, в силу непрерывности функции $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x_i - x_i^0| < \delta \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ следует $|f(x_1, x_2,\dots,x_n) - f(x_1^0, x_2^0,\dots,x_n^0)| < \varepsilon$.

По найденному числу $\delta > 0$ в силу непрерывности функций $x_i = \varphi_i(t_1, t_2,..., t_m)$ найдется число $\sigma > 0$ такое, что из $|t_i - t_i^0| < \sigma \ \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$ следует $|\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_n) - \varphi_i(t_1^0,t_2^0,\dots,t_n^0)| < \delta$.

Получили, что по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется число $\sigma > 0$ такое, что из $|t_i - t_i^0| < \sigma \ \forall i \in \{1,2,\dots,m\}$ следует $|f(x_1, x_2,\dots,x_n) - f(x_1^0, x_2^0,\dots,x_n^0)| < \varepsilon$. Что и требовалось.

27.10 Глобальные свойства непрерывных функций

М27.10.1 Теорема Больцано-Коши. Пусть функция $z = f(M)$ определена и непрерывна в некоторой линейно связной области D. Если в двух точках $M_1(x_1, x_2,..., x_n)$ и $M_2(y_1, y_2,..., y_n)$ области D функция принимает значения A и $B \neq A$ соответственно, то для любого числа C, лежащего между A и B найдется точка M_0, в которой функция $z = f(M)$ принимает значение C.

Без доказательства.

М27.10.2 Теорема Вейерштрасса. Если функция $z = f(M)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то она достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений.

Без доказательства.

27.11 Понятие частной производной

М27.11.1 Определение *Частной производной (частной производной первого порядка)* функции $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ называется $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$, где

$\Delta_{x_i} u = f(x_1,...x_i + \Delta x_i,..., x_n) - f(x_1,...x_i,...$

- частное приращение функции $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ при изменении только одной из ее переменных.

М27.11.2 *Замечание 1:* предел, рассмотренный в определении частной производной, является пределом функции одной переменной Δx_i и при его вычислении можно использовать методы, рассмотренные в первом семестре.

М27.11.3 *Замечание 2:* предел $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$ может и не существовать; в этом случае говорят, что функция не имеет частной производной по переменной x_i.

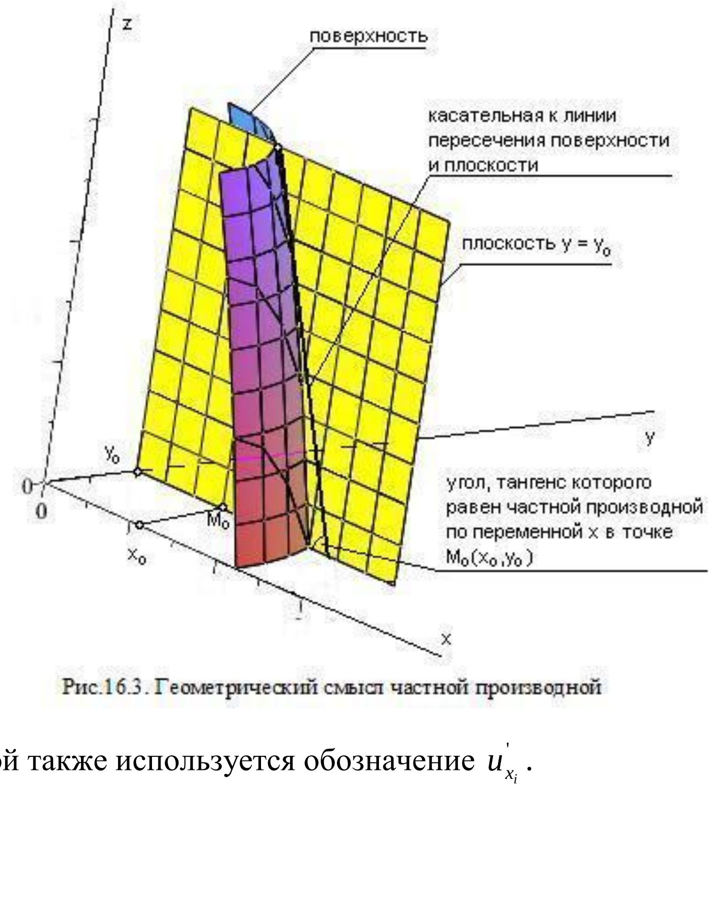


Рис.16.3. Геометрический смысл частной производной

М27.11.4 *Замечание 3*: кроме обозначения $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ для частной производной также используется обозначение u'_{x_i}.

Частные производные функций с конечным числом аргументов вычисляют как обычные производные функции одной переменной. При этом все аргументы, кроме одного, по которому происходит дифференцирование, условно считают постоянными величинами. Поэтому формулы и правила для вычисления частных производных совпадают с формулами и правилами для производных функции одного аргумента.

Частные производные в фиксированных точках являются числовыми величинами. Если частные производные функции существуют во всех точках области определения (или в части области определения), то эти производные сами являются функциями нескольких переменных.

M27.11.5 Пример 1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \sin(x^2 y^3)$.

Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(x^2 y^3)\cdot(x^2 y^3)'_x = \cos(x^2 y^3)\cdot y^3 \cdot (x^2)'_x = 2xy^3 \cos(x^2 y^3)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(x^2 y^3)\cdot(x^2 y^3)'_y = \cos(x^2 y^3)\cdot x^2 \cdot (y^3)'_y = 3x^2 y^2 \cos(x^2 y^3)$.

M27.11.6 Пример 2. Вычислить частную производную по переменной y функции $u = x^2 - 2y^2 - 4yz$ в точке $M_0(0, 6, -1)$.

Решение: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x^2)'_y - (2y^2)'_y - (4yz)'_y = 0 - 4y - 4z \cdot 1 = -4y - 4z$;

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (-4y - 4z)\Big|_{\substack{y=6\\ z=-1}} = -4 \cdot 6 - 4 \cdot (-1) = -20$.

M27.11.7 Геометрический смысл частной производной функции двух переменных аналогичен геометрическому смыслу производной функции одной переменной: частная производная по переменной x в точке (x_0, y_0) - это тангенс угла наклона к положительному направлению оси Ox касательной к линии, полученной пересечением графика функции и плоскости $y = y_0$. Аналогичный смысл имеет частная производная по переменной y в точке (x_0, y_0). Геометрический смысл частной производной по переменной x показан на рис.16.3.

27.12 Дифференциал функции нескольких переменных

M27.12.1 Определение. Если каждой из переменных $x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ придать соответственно приращение $\Delta x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$, то выражение

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

Называется полным приращением функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

M27.12.2 Теорема (приращение и дифференциал) Если частные производные $f'_{x_i}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ и непрерывны в этой точке, то

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i ,$$

где α_i - некоторые переменные величины, зависящие от Δx_i и одновременно с ними стремящиеся к нулю.

Доказательство. Представим приращение функции в следующем виде:

$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 ..., x_n^0) =$

$= f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) +$

$+ f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) +$

$$+ f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3 ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 ..., x_n^0 + \Delta x_n) + ...$$
$$... + f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0 ..., x_n^0).$$

Каждая из рассматриваемых последовательных разностей является приращением функции ровно по одной переменной и, таким образом, может рассматриваться как приращение функции одной переменной. По формуле конечных приращений получаем утверждение теоремы.

M27.12.3 Определение. Выражение $du = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\Delta x_i$ называется *полным дифференциалом* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. Выражения $f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0 \ldots, x_n^0)\Delta x_i$ называются *частными дифференциалами* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

M27.12.4 Определение Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется дифференцируемой в точке $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, если для нее верна формула $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$.

27.13 Частные производные сложных функций

M27.13.1 Определение. Пусть дана дифференцируемая функция нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и каждая из переменных x_i является дифференцируемой функцией независимой переменной t: $x_i = \varphi_i(t)$. Функция $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$, называется *сложной функцией* одной переменной t.

M27.13.2 Поскольку $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$, то

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$$

Устремим $\Delta t \to 0$, тогда $\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\frac{dx_i}{dt} + 0$

Таким образом, получена формула для вычисления производной сложной функции:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} .$$

M27.13.3 Определение. Пусть дана дифференцируемая функция нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и каждая из переменных x_i является дифференцируемой функцией нескольких независимых переменных $t_1, t_2, ..., t_k$: $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k), \ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_k)$. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, рассматриваемая как функция переменных $t_1, t_2, ..., t_k$, называется *сложной функцией* этих переменных.

M27.13.4 Поскольку $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)\Delta x_i$, то

$\frac{\Delta u}{\Delta t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta t_j} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta t_j}$. Устремим $\Delta t_j \to 0$ тогда

$\frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}+0$ Таким образом, получены формулы для вычисления частных производных сложной функции нескольких переменных: $\frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$.

Например, если $w=f(x,y,.z)$ и $x=x(u,v,)$, $y=y(u,v,)$, $z=z(u,v,)$, то

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

M27.13.5 Пример 1 $z=x^3y+xy^4$, $x=e^{2t}$, $y=e^{-t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

$z'_x=3x^2y+y^4$, $z'_y=x^3+4xy^3$, $\quad \frac{dx}{dt}=2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt}=-e^{-t}$

$\frac{dz}{dt}=z'_x\frac{dx}{dt}+z'_y\frac{dy}{dt}=(3x^2y+y^4)\cdot 2e^{2t}-(x^3+4xy^3)\cdot e^{-t}$.

Подставим в полученную формулу выражения для функций $x=e^{2t}$ и $y=e^{-t}$:

$$\frac{dz}{dt}=(3x^2y+y^4)\cdot 2e^{2t}-(x^3+4xy^3)\cdot e^{-t}=(3e^{4t}\cdot e^{-t}+e^{-4t})\cdot 2e^{2t}-$$
$$-(e^{6t}+4e^{2t}\cdot e^{-3t})\cdot e^{-t}=6e^{5t}+2e^{-2t}-e^{5t}-4e^{-2t}=5e^{5t}-2e^{-2t}$$

27.14 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

M27.14.1 Из формулы $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$ следует, что

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\dots,x_n^0+\Delta x_n)\approx f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)+\sum_{i=1}^{n}f'_{x_i}(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\Delta x_i .$$

С помощью этой формулы можно производить приближенные вычисления значений функций.

M27.14.2 Пример 1. При деформации цилиндра его высота H уменьшилась со 100 см до 98 см, а радиус R увеличился с 20 см. до 20,5 см. Найти приближенное изменение объема цилиндра после деформации.

Решение: Объем цилиндра равен $V(R,H)=\pi R^2H$. Принимаем приближенно, что полное изменение объема ΔV как функции двух переменных $V(R,H)$ равно дифференциалу этой функции в некоторой окрестности точки $M_0(20,100)$.

$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V(M_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial V(M_0)}{\partial y}dy$, $R_0=20, H_0=100$, $dR=0{,}5$, $dH=-2$;

$\frac{\partial V}{\partial R}=(\pi R^2H)'_R=2\pi RH$, $\frac{\partial V}{\partial H}=(\pi R^2H)'_H=\pi R^2$;

$\frac{\partial V(M_0)}{\partial R}=(2\pi RH)\Big|_{\substack{R=R_0\\H=H_0}}=4000\pi$, $\frac{\partial V(M_0)}{\partial H}=(\pi R^2)\Big|_{\substack{R=R_0\\H=H_0}}=400\pi$;

$\Delta V\approx 4000\pi\cdot 0{,}5+400\pi\cdot(-2)=1200\pi\, см^2$. Положительное значение приращения объема показывает, что объем увеличился.

Полные дифференциалы можно также использовать для приближенного вычисления значений функций в окрестностях точек с заданными координатами. В случае функции двух переменных используют формулу $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}dy$.

М27.14.3 Пример 2. Найти приближенное значение выражения $z=\sqrt{(2{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

Решение: заданное числовое выражение будем рассматривать как числовое значение функции двух переменных $z=\sqrt{x^3+y^3}$. Выбираем фиксированную точку M_0 с координатами $x_0=2, y_0=2$, в некоторой окрестности которой находится точка $M(2{,}02;\,1{,}97)$. Этой точке соответствуют приращения координат $\Delta x=0{,}02,\ \Delta y=-0{,}03$. Тогда значение функции в точке M можно представить так: $z(M)\approx z(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\sqrt{x^3+y^3}\right)'_x=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}};\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\left.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{\substack{x_0=2\\y_0=2}}=1{,}5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\sqrt{x^3+y^3}\right)'_y=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}};\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\right|_{\substack{x_0=2\\y_0=2}}=1{,}5;$$

$z(M)\approx\sqrt{2^3+2^3}+1{,}5\cdot 0{,}02+1{,}5\cdot(-0{,}03)=3{,}985$.

М27.14.4 С помощью полных дифференциалов оцениваются погрешности косвенных измерений физических величин, которые зависят от других величин, определяемых прямыми измерениями с известными абсолютными погрешностями.

Пусть определяемая косвенным образом величина является функцией нескольких переменных $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ определены (измерены, вычислены и т.п.) с абсолютными погрешностями $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n$. Тогда максимальная возможная погрешность величины u будет равна $\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

При малых погрешностях аргументов погрешность функции можно приближенно оценить с помощью полного дифференциала $\Delta u\approx du=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i$. Значения производных и дифференциалы аргументов могут быть как положительными, так и отрицательными. Поэтому, заменяя их максимальными абсолютными значениями, получим формулу для максимальной абсолютной погрешности: $|\Delta u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\cdot|\Delta x_1|+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\cdot|\Delta x_2|+\ldots+\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\cdot|\Delta x_n|$.

М27.14.5 Пример 4. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB=c=75$ и катет $CB=a=32$ измерены с абсолютными погрешностями $|\Delta c|=0{,}2,\ |\Delta a|=0{,}1$. Найти максимальную абсолютную погрешность определения угла BAC.

Решение: $\sin A=\frac{a}{c}\Rightarrow A=\arcsin\frac{a}{c}=f(a,c);\ |\Delta f|=\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\cdot|\Delta a|+\left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\cdot|\Delta c|$;

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\left(\arcsin\frac{a}{c}\right)'_a=\frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}},\ \frac{\partial f}{\partial c}=\left(\arcsin\frac{a}{c}\right)'_c=-\frac{a}{c\sqrt{c^2-a^2}};$$

При $c=75,\ a=32:|\Delta f|=\left|\frac{1}{\sqrt{75^2-32^2}}\right|\cdot 0{,}1+\left|\frac{32}{75\sqrt{75^2-32^2}}\right|\cdot 0{,}2=0{,}00273$ *рад.*

Контрольные вопросы:

1. Что называется множеством R^n? Что называется расстоянием на множестве R^n? какие множества в R^n называются открытыми и какие – замкнутыми? Что называется окрестность в R^n? Какие точки множества называются внутренними точками, какие – внешними и какие – граничными?
2. Какие точки множества называются предельными? Что называется замыканием множества? какое множество называется линейно связным?
3. Что называется функцией нескольких переменных? Что называется сложной функцией нескольких переменных?
4. Что называется конечным пределом функции нескольких переменных? Что называется бесконечным пределом функции нескольких переменных? Какая функция нескольких переменных называется непрерывной?
5. Сформулируйте теорему о непрерывности композиции функций. Сформулируйте теорему Больцано-Коши. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
6. Что называется частной производной функции нескольких переменных? Каков геометрический смысл частной производной функции двух переменных?
7. Что называется полным дифференциалом функции нескольких переменных? Сформулируйте теорему о приращении и дифференциале.
8. Запишите формулу для производной сложной функции.