Лекция 3 Методы интегрирования (продолжение)

21.2 Вычисление рациональных интегралов от тригонометрических функций

Пусть трансцендентную функцию, содержащую тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ можно рационализировать. Тогда рациональные интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно решать методом замены переменной с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = tg\frac{x}{2}$ при $-\pi < x < \pi$. (1)

В этом случае

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (2)$$

После замены переменной получим $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(t)dt$, т.е. интеграл от рациональной дроби.

M21.2.1 Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\cos x + \sin x}$

Решение: используем универсальную тригонометрическую подстановку;

$$\int\frac{dx}{\cos x+\sin x} = \left[t = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] =$$

$$= \int\frac{2dt}{1+t^2} : \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{-t^2+2t+1} = -2\int\frac{dt}{t^2-2t-1} =$$

$$= -2\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2-2} = [t-1 = z] = -2\int\frac{dz}{z^2-(\sqrt{2})^2} = -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

M21.2.2 Пусть подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. В этом случае лучше использовать подстановку $t = \sin x, dt = \cos x dx$.

M25.2.3 Пример 1. Найти интеграл $J = \int\frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$.

Решение: подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$. Используем подстановку $t = \sin x$, при этом предварительно выразим $\cos^2 x$ через $\sin x$.

$$J = \int\frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\cos x dx = \int\frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}d(\sin x) = [\sin x = t] = \int\frac{1-t^2}{2+t}dt.$$

Подынтегральная функция с новым аргументом является неправильной рациональной дробью.

Разделив числитель на знаменатель, неправильную рациональную дробь представим в виде суммы целой части и правильной дроби: $\frac{-t^2+1}{t+2} = -t+2-\frac{3}{t+2}$. Тогда получим:

$$J = \int \frac{1-t^2}{2+t}\,dt = \int\left(-t+2-\frac{3}{t+2}\right)dt = -\frac{t^2}{2}+2t-3\ln|t+2|+C = -\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x-3\ln(\sin x+2)+C$$

M21.2.4 Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то используют подстановку $t = \cos x, dt = -\sin x dx$.

M21.2.5 Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx$.

Решение: поскольку подынтегральная функция является нечетной $\left(\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x+1} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}\right)$, то используем подстановку $t = \cos x, dt = -\sin x dx$:

$$J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+1}\sin x dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x+1}d(\cos x) = [t = \cos x] =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = \int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t-2arctgt+C = \cos x-2arctg(\cos x)+C$$

M21.2.6 Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то целесообразно использовать подстановку $t = tgx, x = arctgx$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Из тригонометрии известно, что $1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, отсюда $\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = tgx \cdot \cos x = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{dt}{1+t^2}$.

M21.2.7 Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin x\cos x}$.

Решение: подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$.

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x+\sin x\cos x} = \left[\begin{array}{l} t = tgx, dx = \dfrac{dx}{1+t^2} \\ \sin x = \pm\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \ln|t+1|+C = \ln|tgx+1|+C.$$

M21.2.8 В заключение в качестве важного частного случая рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x dx$, где m, n - натуральные числа.

Если хотя бы одно из чисел m, n нечетно, то подынтегральная функция является нечетной либо относительно синуса, либо относительно косинуса, что позволяет применить замену $t = \sin x, dt = \cos x dx$ или $t = \cos x, dt = -\sin x dx$.

Если оба числа m, n четные, то подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, что позволяет применить подстановку $t = tgx, x = arctgx$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

21.3 Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих радикалы

М21.3.1 Пусть подынтегральная функция является рациональной функцией от радикалов различных степеней (в частном случае от одного радикала): $\int R\left(\sqrt[m_1]{u}, \sqrt[m_2]{u}, \ldots, \sqrt[m_k]{u}\right) dx$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ - натуральные числа, $u = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (в частных случаях может быть $u = ax + b$ или даже $u = x$); a, b, c, d - действительные числа и $c^2 + d^2 \neq 0$.

Тогда интегралы вида $\int R\left(\sqrt[m_1]{u}, \sqrt[m_2]{u}, \ldots, \sqrt[m_k]{u}\right) dx$ приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью подстановки $u = t^n$, где n - наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (НОК $\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = n$).

М21.3.2 Пример. Найти интеграл $J = \int \dfrac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{\left(x-1\right)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)} dx$.

Решение: $НОК\left(3,4,6\right) = 12$. Прямая подстановка $x - 1 = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$:

$$J = \int \frac{t^4 + t^3}{t^{12}\left(1+t^2\right)} 12t^{11}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^2\left(t+1\right)}{t^2+1} dt = 12\int \frac{\left(t^2+1-1\right)\left(t+1\right)}{t^2+1} dt = 12\left(\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(t+1\right)}{t^2+1} dt - \int \frac{t+1}{t^2+1} dt\right) =$$

$$= 12\left(\int t dt + \int dt - \int \frac{t dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = 12\left(\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - arctgt\right) + C = \left[t = \sqrt[12]{x-1}\right] =$$

$$= 6 \cdot \sqrt[6]{x-1} + 12 \cdot \sqrt[12]{x-1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x-1} + 1\right) - 12 arctg \sqrt[12]{x-1} + C.$$

21.4 Нахождение рациональных интегралов от функций, содержащих квадратные радикалы из квадратных двучленов

Интегралы с подынтегральными функциями, содержащими выражения $\sqrt{x^2 \pm a^2}, \sqrt{a^2 - x^2}$, приводятся к рациональным интегралам вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$ с помощью следующих тригонометрических подстановок:

М21.4.1 $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ - подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$;

M21.4.2 $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ - подстановка $x = atgt$ или $x = actgt$;

M21.4.3 $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ - подстановка $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = \dfrac{a}{\sin t}$;

Замечание: при применении подстановки $x = a\sin t$ к выражению $\sqrt{a^2-x^2}$ получим $\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a|\cos t|$. Но, поскольку, областью существования функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$ является интервал $x \in [-a, a]$ и $x = a\sin t$, то $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Но в интервале $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos t \geq 0$ и поэтому $\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a|\cos t| = a\cos t$.

Аналогично $\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t} = a\sqrt{1-\cos^2 t} = a\sin t$

M21.4.4 Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение: $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = [x = 2\sin t, dx = 2\cos tdt] = \int \dfrac{4\sin^2 t\cdot 2\cos tdt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \dfrac{8}{2}\int \dfrac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$

$$= 4\int \sin^2 tdt = \frac{4}{2}\int (1-\cos 2t)dt = 2\left(\int dt - \int \cos 2tdt\right) = 2t - \sin 2t + C =$$

$$= \left[t = \arcsin\frac{x}{2}, \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right] = 2\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

M21.4.5 Пример 2. Найти $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}} = \left[x = 5tgt, dx = \frac{5dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{5dt}{\cos^2 t\sqrt{(25+25tg^2 t)^3}} = \left[1+tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}\right] =$$

$$= \int \frac{5dt}{\cos^2 t\cdot 5^3\cdot \dfrac{1}{\cos^3 t}} = \frac{1}{25}\int \cos tdt = \frac{1}{25}\sin t + C = \left[t = arctg\frac{x}{5}\right] = \frac{1}{25}\sin\left(arctg\frac{x}{5}\right) + C.$$

M21.4.6 Пример3. Найти интеграл $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}dx = \left[x = \frac{1}{\cos t}, dx = \frac{\sin tdt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{1}{\cos^3 t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{\sin^2 t dt}{\cos^6 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int tg^2 t \left(1 + tg^2 t\right) d\left(tgt\right) = \left[z = tgt\right] = \int z^2 \left(1 + z^2\right) dz =$$

$$= \int z^2 dz + \int z^4 dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C = \frac{tg^3 t}{3} + \frac{tg^5 t}{5} + C = \frac{1}{3} tg^3 \left(\arccos \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{5} tg^5 \left(\arccos \frac{1}{x}\right) + C .$$

С помощью рассмотренных интегралов можно интегрировать функции, содержащие квадратные корни из квадратичных трехчленов вида $\sqrt{ax^2 + px + q}$. Квадратные трехчлены в таких интегралах предварительно методом дополнения до полных квадратов приводятся к двучленам $\sqrt{x^2 \pm a^2}, \sqrt{a^2 - x^2}$ и затем используются вышеуказанные тригонометрические подстановки.

М21.4.7 Пример. Найти интеграл $\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx$.

Решение: $\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx = \left[-\left(x^2 - 2x + 1 - 4\right) = 4 - \left(x - 1\right)^2\right] = \int \sqrt{4 - \left(x - 1\right)^2} d\left(x - 1\right) =$

$$= \left[y = x - 1\right] = \int \sqrt{4 - y^2} dy = \left[y = 2\sin t, dy = 2\cos t dt\right] = 2\int \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cos t dt = 4\int \cos^2 t dt =$$

$$= 4\int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = 2\arcsin \frac{x - 1}{2} + \frac{x - 1}{2}\sqrt{3 + 2x - x^2} + C$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется универсальной тригонометрической подстановкой? В каких случаях она применяется?
2. Как интегрируются функции, содержащие радикалы от выражений вида $\frac{ax + b}{cx + d}$?
3. Как интегрируются функции, содержащие квадратные радикалы из квадратных двучленов? Как интегрируются функции, содержащие квадратные радикалы из квадратных трехчленов?