Лекция 8 Предел последовательности

12.1 Понятие последовательности

М12.1.1 Определение: функция $a_n : N \to R$ из множества натуральных чисел в множество действительных чисел называется *последовательностью*. Значения функции $a_n : N \to R$ называются *элементами* последовательности.
Замечание: символом a_1 обозначается значение функции $a_n : N \to R$ при $n=1$, символом a_2 - значение этой функции при $n=2$ и т. д.

М12.1.2.Примеры. 1) $a_n = \dfrac{1}{n}$: $a_1 = 1; a_2 = \dfrac{1}{2}; a_3 = \dfrac{1}{3}; a_4 = \dfrac{1}{4}; a_5 = \dfrac{1}{5}; \ldots\ldots$

2) $a_n = (-1)^n$: $a_1 = -1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 1; \ldots$

3) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$; $a_1 = \dfrac{1}{2}; a_2 = \dfrac{4}{9}; a_3 = \dfrac{9}{28}; a_4 = \dfrac{16}{65}; \ldots$

4) $a_n = a_1 q^{n-1}$ - геометрическая прогрессия со знаменателем q и первым элементом a_1.

5) $a_n = a_1 + (n-1)d$ - арифметическая прогрессия с разностью d и первым элементом a_1.

6) $a_1 = 1{,}4$; $a_2 = 1{,}41$; $a_3 = 1{,}414$; $a_4 = 1{,}4142$ - последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$.

7) $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 6; a_4 = 24; \ldots a_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

a_n называется «n факториал» и обозначается $n!$

М12.1.3 Последовательность можно задать также посредством *рекуррентного соотношения*, когда общий элемент последовательности a_n выражается через m предшествующих элементов и при этом известны m первых элементов последовательности.

М12.1.4 Примеры. 1) $a_1 = \sqrt{2},\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$;

2) $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (*числа Фибоначчи*);

3) $T_0 = 1,\ T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_0$ (*числа Каталана*).

М12.1.5 Определение. *Произведением последовательности* a_n *на число* α называется последовательность, элементами которой являются числа $\alpha \cdot a_n$.

М12.1.6 Определение. *Суммой последовательностей* a_n и b_n называется последовательность, элементами которой являются числа $a_n + b_n$.

Аналогично определяются разность, произведение и частное последовательностей.

12.2 Определение предела

M12.2.1 Определение. Число A называется *пределом последовательности* a_n, если для любого, как угодно малого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что для любого числа $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

M12.2.2 *Замечание 1.* Геометрически определение предела можно истолковать так: отметим на числовой прямой число A. Тогда, как бы ни мало было число ε, вне интервала $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ окажется лишь конечное количество элементов последовательности. Иными словами, элементы последовательности как бы концентрируются возле числа A, причем, чем ближе к A, тем выше концентрация.

M12.2.3. *Замечание 2.* Далеко не каждая последовательность имеет предел. Простейшим примером последовательности, не имеющей предела, является последовательность $a_n = (-1)^n$.

M12.2.4 Пример 1. Покажем, что последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ имеет предел, равный нулю.

Выберем произвольное положительное число ε и попытаемся найти номер n_0 (естественно, зависящий от числа ε) такой, что для всех $n > n_0$ выполнится неравенство $|a_n - A| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Поскольку $n \in N$, то $n > 0$ и неравенство $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ равносильно более простому: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Отсюда получаем $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Достаточно взять $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Замечание. Конечно же, в качестве числа n_0 можно брать и любое число, большее, чем $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

M12.2.5 Пример 2 (Постоянная последовательность) Рассмотрим последовательность $a_n = a$, все элементы которой одинаковы и покажем, что ее предел равен числу a.

Выберем произвольное положительное число ε и попытаемся найти номер n_0 (вообще говоря, зависящий от числа ε) такой, что для всех $n > n_0$ выполнится неравенство $|a_n - a| = |a - a| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$, то неравенство $|a - a| < \varepsilon$ верно всегда, то есть независимо от номера n. Это значит, что в качестве n_0 можно взять любое натуральное число, например, $n_0 = 1$.

M12.2.6 Определение. Предел последовательности a_n равен бесконечности (плюс бесконечности), если для любого, как угодно большого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что для любого числа $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > \varepsilon$.

Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

M12.2.7 Определение. Предел последовательности a_n равен минус бесконечности, если для любого, как угодно большого по модулю отрицательного числа ε найдется номер n_0 такой, что для любого числа $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n < \varepsilon$.

Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

M12.2.8 Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

Выберем произвольное положительное число ε. и попытаемся найти номер n_0 (вообще говоря, зависящий от числа ε) такой, что для всех $n > n_0$ выполнится неравенство $\sqrt{n} > \varepsilon$. Поскольку обе части неравенства $\sqrt{n} > \varepsilon$ не отрицательны, его можно возвести в квадрат: $n > \varepsilon^2$. Значит, в качестве номера n_0 можно взять число $n_0 = [\varepsilon^2] + 1$.

Приведем некоторые несложные, но важные свойства предела последовательности.

M12.2.9 Отбросив первые k элементов последовательности a_n, получим, вообще говоря, другую последовательность $b_1 = a_{k+1}, b_2 = a_{k+2}, \ldots$ Очевидно, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Аналогично, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), то и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$). Кроме того, если последовательность a_n не имела предела, то и последовательность b_n также не будет иметь предела.

M12.2.10 (**Единственность предела**) Последовательность не может иметь двух или более различных пределов. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B > A$. Рассмотрим непересекающиеся окрестности $(A-\delta; A+\delta)$ и $(B-\delta; B+\delta)$ точек A и B. В качестве значения δ можно взять любое число, не превосходящее $\dfrac{B-A}{2}$. Для заданного числа ε по определению предела найдутся номера n_1 и n_2 такие, что для $\forall n > n_1$ $a_n \in (A-\delta; A+\delta)$ и $\forall n > n_2$ $a_n \in (B-\delta; B+\delta)$. Тогда при $n_0 = \max(n_1, n_2)$ получим, что $\forall n > n_0$ $a_n \in (A-\delta; A+\delta)$ и $a_n \in (B-\delta; B+\delta)$, иными словами, $\forall n > n_1$ $a_n \in (A-\delta; A+\delta) \cap (B-\delta; B+\delta) = \varnothing$. Противоречие.

M12.2.11 Последовательность, имеющая конечный предел, ограничена. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Положим в определении предела $\varepsilon = 1$ (можно было взять и любое другое положительное число). Тогда, найдется номер n_0 такой что при $n > n_0$ будет иметь место равенство $|a_n - A| < 1$. Это равенство можно переписать в виде $a_n < |A| + 1$. Если взять $M = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A| + 1)$, то для любого номера n получим $a_n < M$.

12.3 Теоремы о пределах

M12.3.1 Теорема (Предел и арифметические операции) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$ (при условии $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$).

Доказательство. 1) Обозначим $c_n=a_n+b_n$, $C=A+B$. Выберем некоторое число $\varepsilon>0$. Надо показать, что для него найдется номер n_0, начиная с которого (при $n>n_0$) выполнится неравенство $|c_n-C|<\varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, то для любого положительного числа, значит и для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ найдется номер n_1 такой, что для всех номеров $n>n_1$ выполнится неравенство $|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ найдется номер n_2 такой, что для всех номеров $n>n_2$ выполнится неравенство $|b_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Обозначим $n_0=\max(n_1,n_2)$, тогда при $n>n_0$ будет выполнено и $|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $|c_n-C|=|a_n+b_n-(A+B)|=|(a_n-A)+(b_n-B)|\le|a_n-A|+|b_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что и требовалось.

2) Обозначим $d_n=a_n\cdot b_n$, $D=AB$. Выберем некоторое число $\varepsilon>0$. Надо показать, что для него найдется номер n_0, начиная с которого (при $n>n_0$) выполнится неравенство $|d_n-D|<\varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, то для любого положительного числа, значит и для числа $\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|B|+1)}\right)>0$ найдется номер n_1 такой, что для всех номеров $n>n_1$ выполнится неравенство $|a_n-A|<\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|B|+1)}\right)$.

Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, то для числа $\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|A|+1)}\right)>0$ найдется номер n_2 такой, что для всех номеров $n>n_2$ выполнится неравенство $|b_n-B|<\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|A|+1)}\right)$.

Обозначим $n_0=\max(n_1,n_2)$, тогда при $n>n_0$ будет выполнено и $|a_n-A|<\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|B|+1)}\right)$ и $|b_n-B|<\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{3(|A|+1)}\right)$.

Тогда $|d_n - D| = |a_nb_n - AB| = |(a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + B(a_n - A)| \le$

$$\le |a_n - A| \cdot |b_n - B| + |A| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

3) Без доказательства.

M12.3.2 Следствие 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot a_n = CA$ для любого числа C.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot a_n = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = CA$.

M12.3.3 Следствие 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$;

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + (-1) \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A - B$

M12.3.4 Теорема (предел и неравенства) 1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ и $A < B$, то $\exists n_0 \mid \forall n > n_0 \quad a_n < b_n$; 2) Если $\forall n \quad a_n \le b_n \le c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$; 3) Если $a_n \le b_n$ или $a_n < b_n$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $A \le B$.

Доказательство. 1) Выберем какое-либо число c такое, что $A < c < B$. Тогда, по определению предела, для числа $\varepsilon_1 = c - A$ найдется номер n_1 такой, что для $\forall n > n_1$ выполняется неравенство $|a_n - A| < c - A$. Аналогично, для числа $\varepsilon_2 = B - c$ найдется номер n_2 такой, что для $\forall n > n_2$ выполняется неравенство $|b_n - B| < B - c$. Тогда для $\forall n > \max(n_1, n_2)$ выполнятся оба неравенства $|a_n - A| < c - A$ и $|b_n - B| < B - c$.

Из неравенства $|a_n - A| < c - A$ следует $a_n - A < c - A$, то есть $a_n < c$. Аналогично, из неравенства $|b_n - B| < B - c$ следует $b_n - B > c - B$, то есть $b_n > c$. значит, $a_n < c < b_n$, что и требовалось

2) По выбранному числу $\varepsilon > 0$ найдется номер n_1 такой, что для $\forall n > n_1$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, откуда следует $a_n > A - \varepsilon$. Для того же значения $\varepsilon > 0$ найдется номер n_2 такой, что для $\forall n > n_1$ выполняется неравенство $|c_n - A| < \varepsilon$, откуда следует $c_n < A + \varepsilon$. Тогда при $n_0 > \max(n_1, n_2)$ выполнятся оба неравенства $a_n > A - \varepsilon$ и $c_n < A + \varepsilon$. Получаем:

$A - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < A + \varepsilon$, то есть $|b_n - A| < \varepsilon$, что и требовалось.

3) Сразу следует из части 1) данной теоремы.

Замечание. В части 3) теоремы утверждается, что если даже элементы одной последовательности строго меньше элементов другой последовательности, пределы этих последовательностей могут совпасть. Примером таких последовательностей являются $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Действительно, при $n > 1$ верно неравенство $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

М12.3.5 Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной последовательностью*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для любых $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

М12.3.6 Теорема (Критерий Коши для последовательностей) Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Покажем, что последовательность a_n фундаментальна. Пусть выбрано число $\varepsilon > 0$, тогда найдется номер n_0 такой, что для $\forall n > n_0$ $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $n > n_0$ и $m > n_0$, тогда $|a_m - a_n| = |a_m - A - (a_n - A)| \le |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и требовалось. 2) Без доказательства.

12.4. Монотонные последовательности

М12.4.1 Определение. Последовательность a_n называется:

- *возрастающей*, если $a_n > a_{n-1}$;

- *неубывающей*, если $a_n \ge a_{n-1}$,

- *невозрастающей*, если $a_n \le a_{n-1}$

- *убывающей*, если $a_n < a_{n-1}$;

последовательности перечисленных четырех типов называются *монотонными* последовательностями.

М12.4.2 Определение. Последовательность a_n называется:

- *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что $a_n < M$;

- *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что $a_n > m$;

- *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу.

М12.4.3 Теорема Вейерштрасса (Предел монотонной ограниченной последовательности)

1) Ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет предел

2) Ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет предел.

Доказательство: 1) Поскольку множество значений последовательности ограничено сверху, оно имеет точную верхнюю грань $s = \sup\{a_n\}$. По определению точной верхней грани для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент a_{n_0} такой, что $s - \varepsilon < a_{n_0} \le s$. Поскольку последовательность не убывает, то для $\forall n > n_0$ $s - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le s$, то есть $s - a_n = |s - a_n| < \varepsilon$. Таким образом, точная верхняя грань и есть предел последовательности.

2) доказывается аналогично (рассмотрением точной нижней грани).

12.5 Число е (основание натуральных логарифмов)

М12.5.1 Теорема (неравенство Бернулли)
Для любого действительного числа $\alpha > 0$ и любого натурального числа n имеет место неравенство $(1+\alpha)^n \ge 1 + \alpha n$
Доказательство: По формуле бинома Ньютона

$$(1+\alpha)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} \cdot \alpha + C_n^2 1^{n-2} \alpha^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 1 \cdot \alpha^{n-1} + C_n^n \alpha^n =$$
$$= 1 + n\alpha + C_n^2 \alpha^2 + \ldots + C_n^{n-1} \alpha^{n-1} + C_n^n \alpha^n \ge 1 + \alpha n$$
Теорема доказана.

М12.5.2 Покажем, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Для этого рассмотрим сначала последовательность $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и покажем, что она является монотонной и ограниченной. Очевидно, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$ при любом значении n, т.к. в скобках находится выражение, большее, чем 1, и оно возводится в положительную степень. Значит, последовательность b_n ограничена снизу числом 1. Поскольку все элементы последовательности положительны, то для доказательства факта убывания последовательности достаточно показать, что $\frac{b_{n-1}}{b_n} > 1$ (каждый последующий элемент меньше предыдущего).

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2 - 1 + 1}{n^2 - 1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \ge \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

При первом переходе к неравенству воспользовались неравенством Бернулли:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \ge 1 + \frac{1}{n^2-1} \cdot n$$

При втором переходе неравенству воспользовались тем, что поскольку $n-\frac{1}{n}<n$, то $\frac{1}{n-\frac{1}{n}}>\frac{1}{n}$ (увеличивая знаменатель, уменьшаем дробь).

Итак, последовательность b_n убывает и ограничена снизу. По теореме о пределе ограниченной монотонной последовательности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Обозначим этот предел буквой e.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=1$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=e\cdot 1=e$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ принято называть вторым «замечательным» пределом. Число $e\approx 2{,}718281828\ldots$ называется *основанием натуральных логарифмов.*

M12.5.3 Покажем еще, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e\cdot 1}=\frac{1}{e}$$

В предпоследнем равенстве воспользовались очевидным фактом: если $n\to\infty$, то и $(n-1)\to\infty$.

12.6 Операции с символом ∞. Неопределенности

M12.6.1 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$. Кратко это можно записать так: $A+\infty=\infty$. Аналогично, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$, т.е. $\infty+\infty=\infty$.

Можно показать также, что $\infty\cdot\infty=\infty$, $A\cdot\infty=\begin{cases}\infty,\ \text{если}\ A>0\\ -\infty,\ \text{если}\ A<0\end{cases}$, $A^{\infty}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ A\in(0;1)\\ \infty,\ \text{если}\ A>1\end{cases}$, $\frac{A}{\pm\infty}=0$. Из последнего равенства следует, что $\frac{A}{0}=\pm\infty$.

M12.6.2. Невозможно однозначно сказать, чему равны выражения $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ и $0\cdot\infty$.

Рассмотрим последовательности $a_n=\alpha n+\beta$ и $b_n=\alpha n+\gamma$ при $\alpha>0$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta-\gamma$ при различных значениях чисел β и γ может принимать различные числовые значения. Поэтому выражение $\infty-\infty$ однозначно не определено и называется *неопределенностью*.

Рассмотрим последовательности $a_n = \alpha n$ и $b_n = \beta n$ при $\alpha > 0, \beta > 0$. Снова очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ при различных значениях чисел α и β может принимать различные числовые значения. Значит, выражение $\frac{\infty}{\infty}$ также является неопределенностью.

Рассматривая последовательности $a_n = \frac{\alpha}{n}$ и $b_n = \frac{\beta}{n}$ убеждаемся, что $\frac{0}{0}$ - тоже неопределенность, а рассматривая последовательности $a_n = \alpha n$ и $b_n = \frac{\beta}{n}$ убеждаемся в том, что неопределенностью является и выражение $0 \cdot \infty$.

Выражения 0^0, ∞^0 и 1^∞ также являются неопределенностями, в чем можно убедиться формальным логарифмированием этих выражений. Например, $\ln\left(1^\infty\right) = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0$.

Выражения $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 и 1^∞ будем называть основными неопределенностями.

12.7 Примеры раскрытия неопределенностей при вычислении пределов

Пример 1. Вычислить пределы последовательностей: а) $a_n = \frac{2n + 3n^2 + 4}{12n^2 - 4n - 5}$; б) $b_n = \frac{3n+1}{2n^3 + n - 1}$; в) $c_n = \frac{2n - 3n^3 + 4}{12n - 4n^2 - 5}$; г) $d_n = \frac{\sqrt{n} - 2\cdot\sqrt[3]{n} + 1}{3\cdot\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n^2}}$; д) $f_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

Решение. а) при $n \to \infty$ пределы и числителя и знаменателя равны ∞, значит, имеем дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. для раскрытия неопределенности поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (в нашем случае – на n^2) и воспользуемся теоремой о пределе и арифметических операциях:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3n^2 + 4}{12n^2 - 4n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + 3 + \frac{4}{n^2}}{12 - \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 12 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{0 + 3 + 0}{12 - 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

б) применим аналогичный прием: поделим числитель и знаменатель на n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^3 + n - 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{0+0}{2+0-0} = 0;$$

в) аналогично: поделим числитель и знаменатель на n^3:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3n^3+4}{12n-4n^2-5}=\dfrac{0-3+0}{0-0+0}$. при делении ненулевого числа на 0 получится либо ∞, либо $-\infty$ (см. М3.1.1). Для определения знака бесконечности в ответе установим к какого рода бесконечностям стремятся числитель и знаменатель. Коэффициент при старшей степени числителя отрицателен, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-3n^3+4\right)=-\infty$. По той же причине $\lim\limits_{n\to\infty}\left(12n-4n^2-5\right)=-\infty$. Таким образом, найдется номер n_0, начиная с которого и числитель и знаменатель будут отрицательны, а значение дроби – положительно. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3n^3+4}{12n-4n^2-5}=\infty$.

На основе примеров а)-в) можно сделать вывод: предел отношения многочленов при $n\to\infty$ равен:

- нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя;

- плюс или минус бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя;

- отношению коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя, если эти старшие степени равны.

г) применим только что выведенное правило. Степень числителя равна $\dfrac{1}{2}$, а степень знаменателя равна $\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-2\cdot\sqrt[3]{n}+1}{3\cdot\sqrt[5]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=0$;

д) поделим числитель и знаменатель на степень с большим по модулю основанием (в нашем случае – на 3^n: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}=\dfrac{0+1}{0+3}=\dfrac{1}{3}$.

Пример 2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{9n+5}-\sqrt{4n+7}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)$;

Решение. а) поделим числитель и знаменатель на $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+3}{n}}}{\sqrt{\frac{9n+5}{n}}-\sqrt{\frac{4n+7}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{9+\frac{5}{n}}-\sqrt{4+\frac{7}{n}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{9}-\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}-1}{5};$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+1}}=\frac{1}{2}$$

Пример 3. Вычислить пределы а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{5n+2}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+3}{4n+2}\right)^{n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{2n-1}$;

Решение. а) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{2}{n}}=\dfrac{2}{5}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{5n+2}\right)^{n}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\infty}=0$ (см. М3.1.1.).

б) Аналогично: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+3}{4n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\dfrac{7}{4}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+3}{4n+2}\right)^{n}=\left(\dfrac{7}{4}\right)^{\infty}=\infty$ (см. М3.1.1)

в) Попытка поступить аналогично а) и б), приводит к неопределенности 1^{∞} (см. М3.1.2). Такая же неопределенность 1^{∞} имела место и во втором «замечательном» пределе $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$.

Преобразуем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2+5}{n-2}\right)^{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n-2}\right)^{2n-1}$. Сделаем замену переменной $\dfrac{5}{n-2}=\dfrac{1}{m}$, тогда $m=\dfrac{n-2}{5}$ и если $n\to\infty$, то и $m=\dfrac{n-2}{5}\to\infty$. Поскольку $n=5m+2$, то получим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n-2}\right)^{2n-1}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{10m-3}$.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{10m-3}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{10m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-3}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{10}\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-3}=e^{10}\cdot 1^{-3}=e^{10}.$$

Пример 4. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^{n}}$ $(a>1)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n}}{n!}$;

Решение. а) Обозначим $a_n=\dfrac{n}{2^{n}}$, тогда $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Поскольку $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^{n}}{n}=\dfrac{n+1}{2n}<1$ при любом $n>1$, то последовательность a_n убывает, а поскольку $a_n>0$, то эта последовательность ограничена снизу. По теореме М2.4.3. эта последовательность имеет предел, который для краткости записи обозначим A. Из равенства $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}\cdot a_n$/ получаем $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$; $A=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot A$; $A=\dfrac{1}{2}A$. Значит, либо $A=0$, либо $A=\infty$, либо $A=-\infty$. Но, поскольку, $a_n>0$, равенство $A=-\infty$ невозможно. Поскольку последовательность a_n убывает, то равенство $A=\infty$ тоже невозможно. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^{n}}=0$;

М12.7.1 б) Если $a > 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n} \le \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$. Остается рассмотреть случай $1 < a < 2$. Обозначим $a_n = \dfrac{n}{a^n}$, тогда $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{a^{n+1}} = \dfrac{n+1}{an}\cdot a_n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{an} = \dfrac{1}{a} < 1$, то найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ верно равенство $\dfrac{n+1}{an} < 1$. Из равенства $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{an}\cdot a_n$ и неравенства $\dfrac{n+1}{an} < 1$ получаем, что начиная с номера n_0 последовательность $a_n = \dfrac{n}{a^n}$ - убывающая. А поскольку $a_n = \dfrac{n}{a^n} > 0$, то есть последовательность ограничена снизу, то она имеет предел, который для краткости обозначим A. Из равенства $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{an}\cdot a_n$ при $n \to \infty$ получим $A = \dfrac{1}{a}\cdot A$, откуда рассуждениями аналогичными п. а) получим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n} = 0$.

М12.7.2. в) При заданном $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ верно неравенство $1 \le n < (1+\varepsilon)^n$, откуда $1 \le \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$, откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

М12.7.3. г) Аналогично, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ верно неравенство $1 \le a < (1+\varepsilon)^n$, откуда $1 \le \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon$, откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$;

М12.7.4. д) Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$. При $a = 0$ это очевидно. Пусть $a > 0$. Обозначим $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, тогда $a_{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{a}{n+1}\cdot a_n$ Очевидно, что найдется такой номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $0 < \dfrac{a}{n+1} < 1$. Значит, начиная с этого номера, последовательность $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ убывает. А поскольку она ограничена снизу нулем, то у нее существует предел (обозначим его A). Тогда из равенства $a_{n+1} = \dfrac{a}{n+1}\cdot a_n$ получаем $A = 0\cdot A = 0$. Что и требовалось. Пусть теперь $a < 0$. Рассмотрим выражение $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!}$. Поскольку $|a| > 0$, то по доказанному $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|^n}{n!} = 0$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = 0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

12.8 Примеры вычисления пределов рекуррентно заданных последовательностей

Основная идея этой части лекции уже применялась в М3.3.1 и М3.3.4, поэтому ограничимся двумя примерами.

Пример 1. Вычислить предел рекуррентно заданной последовательности $a_{n+2} = \dfrac{5a_{n+1} - a_n}{6}$ при $a_1 = a_2 = 1$.

Решение. Согласно М1.2.5 имеем уравнение $x^2 = \dfrac{5x-1}{6}$, корнями которого являются $x_1 = \dfrac{1}{3}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Значит, последовательности вида $a_n = \alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ при любых значениях α и β удовлетворяют формуле $a_{n+2} = \dfrac{5a_{n+1} - a_n}{6}$. Из условий $a_1 = a_2 = 1$ получаем $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta = 1 \\ \dfrac{1}{9}\alpha + \dfrac{1}{4}\beta = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 6 \\ 4\alpha + 9\beta = 36 \end{cases}$, откуда $\alpha = -9$, $\beta = 8$.

Значит, $a_n = 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 9\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Пример 2. Вычислить предел последовательности $c_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}_{n\ \text{двоек}}$

Решение. Очевидно, что $c_{n+1} = \sqrt{2+c_n}$. Последовательность возрастает и ограничена сверху числом $\sqrt{2+2} = 2$ Значит, она имеет предел, который для краткости обозначим A. Поскольку $c_n > 0$, то равенство $c_{n+1} = \sqrt{2+c_m}$ можно возводить в квадрат: $c_{n+1}^2 = 2 + c_n$, откуда $A^2 = 2 + A$. Решив квадратное уравнение $A^2 - A - 2 = 0$, получим корни $A_1 = -1$ и $A_1 = 2$. У положительной последовательности не может быть отрицательного предела (следует из М2.3.4), значит, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется последовательностью? Что называется суммой последовательностей? Что называется произведением последовательности на число?

2. Что означает, что предел последовательности равен числу A? Что означает, что предел последовательности равен плюс бесконечности? Что означает, что предел последовательности равен минус бесконечности?
3. Что называется подпоследовательностью? Что называется частичным пределом последовательности? Что называется верхним и нижним пределами последовательности?
4. Сформулируйте теорему о пределе и арифметических операциях. Сформулируйте теорему о пределе и неравенствах.
5. Какая последовательность назвается фундаментальной? Сформулируйте критерий Коши для последовательностей.
6. Какая последовательность называется убывающей(невозрастающей, неубывающей, возрастающей, монотонной)? Какая последовательность назвается ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)? Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
7. Запишите неравенство Бернулли. Что называется основанием натуральных логарифмов?

8. Запишите результаты основных операций с символом бесконечности. Что называется неопределенностью? Запишите семь простейших неопределенностей.
9. Что означает, что последовательность стремится к пределу сверху? Что означает, что последовательность стремится к пределу снизу?
10. Чему равны пределы а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}$ $(a>1)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$?