Лекция 6 Приложения определенного интеграла

23.1 Длина линии

Пусть на плоскости или в пространстве задана линия AB своими параметрическими уравнениями в декартовой системе координат

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_0;T] \end{cases} \text{(на плоскости) или } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in [t_0;T] \end{cases} \text{(в пространстве).}$$

Выберем на линии точки $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B$ так, чтобы они соответствовали возрастающим значениям параметра $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$. Соединим эти точки последовательно отрезками в ломаную $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$. Длину ломаной обозначим p.

М2.1.1 Определение. Ломаная $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$ называется *ломаной, вписанной* в линию AB.

23.2 Дифференциал дуги

М23.2.1 Рассмотрим линию AB на плоскости, заданную уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [t_0;T] \end{cases}$ и вписанную в нее ломаную $M_0M_1M_2...M_{n-1}M_n$. Поскольку координаты точки M_i равны $M_i(x(t_i), y(t_i))$, то, обозначая для краткости $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$, получим формулу для длины ломаной (как сумму длин соответствующих векторов)

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Считая функции $x(t), y(t)$ дифференцируемыми, по формуле конечных приращений получим $x_{i+1} - x_i = x'(\tau_{ix})(t_{i+1} - t_1)$, $y_{i+1} - y_i = y'(\tau_{iy})(t_{i+1} - t_1)$, где τ_{ix}, $\tau_{iy} \in (t_i, t_{i+1})$,

$$p = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x'(\tau_{ix}))^2 + (y'(\tau_{iy}))^2} \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Обозначим $L_x = \max\limits_{[t_0;T]} x'(t)$, $L_y = \max\limits_{[t_0;T]} y'(t)$, тогда $p \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot (T - t_0)$.

М2.2.2 Из $p \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot (T - t_0)$ следует оценка для длины линии $S \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot (T - t_0)$.

Если $l_x = \max\limits_{[t_0;T]} x'(t)$, $l_y = \max\limits_{[t_0;T]} y'(t)$, тогда $p \ge \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \cdot (T - t_0)$ и $S \ge \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \cdot (T - t_0)$. Будем считать теперь точку B переменной, тогда $T = t$ также будет переменной величиной. Обозначив $(T - t_0) = \Delta t$, $S = \Delta s$ получим

$$\sqrt{l_x^2 + l_y^2} \cdot \Delta t \le \Delta s \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \Delta t,$$

откуда $\sqrt{l_x^2 + l_y^2} \le \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$ и, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \le s'(t) \le \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, то есть $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Производная длины линии (дуги) как функции переменной точки равна $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, дифференциал дуги равен $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.

М2.2.3 Аналогично показывается, что дифференциал дуги пространственной линии равен

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

23.3 Длина линии в декартовой системе координат

M23.3.1 В соответствии с обозначениями 2.2 длина s линии AB будет равна $s(T)$. Естественно считать, что $s(t_0)=0$ (длина линии, состоящей из единственной точки A). Тогда по формуле Ньютона-Лейбница: $s=s(T)=s(T)-s(t_0)=\int\limits_{t_0}^{T} s'(t)dt$, откуда получаем

$$s=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \text{ (для плоской линии)}$$

$$s=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \text{ (для пространственной линии)}$$

M23.3.2 Пример 1. Найти длину кривой $x=t^2, y=\dfrac{t^3}{3}-t$ при $0\le t\le\sqrt{3}$.

Решение:

$$s=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+(t^2-1)^2}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=\left.\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\right|_0^{\sqrt{3}}=\ldots=2\sqrt{3}\approx 3{,}46$$

M23.3.3 Пример 2. Вычислить длину четверти астроиды $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$, где $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $a>0$.

Решение: $x'=-3a\cos^2 x\sin x$, $y'=3a\sin^2 x\cos x$

$$L_{AB}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 x\sin^2 x+9a^2\sin^4 x\cos^2 x}\,dt=$$

$$=3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 x\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)}\,dt=3a\int\limits_0^{2\pi}|\sin x\cos x|\,dx.$$

На промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ верны неравенства $\sin x\ge 0, \cos x\ge 0$, поэтому

$$3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x\cos x|\,dx=3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{3a}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=$$

$$=-\frac{3a}{4}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{3a}{2}.$$

M23.3.4 Пример 3. Найти длину винтовой линии $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$, $t\in[t_0;T]$.

Решение. $\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$; $s=\int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=(T-t_0)\sqrt{a^2+b^2}$.

M23.3.5 Если линия является графиком функции $y=f(x)$, $x\in[x_1,x_2]$, то полагая $\begin{cases}x=t\\ y=f(t),\\ t\in[t_0;T]\end{cases}$

получим $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{1+(f'(x))^2}$ и длину линии можно вычислить по формуле

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx .$$

M23.3.6. Пример 4. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0, 5]$.

Решение:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,; \quad L = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1 + \frac{9}{4}x; u_н = 1 + \frac{9}{4}\cdot 0,\ u_в = \frac{49}{4} \\ du = \frac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9}du \end{array}\right] =$$

$$= \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{49}{4}} = \ldots = \frac{335}{27} \approx 12{,}4 .$$

23.4 Длина линии в полярной системе координат

M23.4.1 Пусть линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Полярные координаты связаны с декартовыми соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, значит, $x' = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi$, $y' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$, $\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2} = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}$.

M23.4.2 Пример 5. Найти длину спирали Архимеда $\rho = \varphi$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение: $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,d\varphi =$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = J_1 + J_2 .\ \ J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \ln\left|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right|\Big|_0^{2\pi} = \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right);$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = \left[\begin{array}{l} u = \varphi, dv = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ d\varphi = du, v = \sqrt{1+\varphi^2} \end{array}\right] = \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - s .$$

Получили: $s = \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} - s$,

откуда $s = \frac{1}{2}\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right) \approx 21{,}26$.

M23.4.3 Пример 6. Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$

Решение: $\rho' = -a\sin\varphi$,

$$L_{AB} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$$

23.5 Площадь фигуры

Многоугольной областью или многоугольником будем называть произвольную конечную плоскую фигуру, ограниченную ломаной без точек самопересечения.

М23.5.1 Определение: ε*-окрестностью* точки (x_0, y_0) на плоскости называется множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$.

Замечание. С геометрической точки зрения ε-окрестность – это круг радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0).

М23.5.2 Определение: Множество точек плоскости, обладающее тем свойством, что любая его точка обладает некоторой ε-окрестностью, целиком принадлежащей этому множеству, называется *открытой областью* плоскости.

М23.5.3 Определение. Множество точек плоскости, являющееся дополнением (в теоретико-множественном смысле) к открытой области называется *замкнутой областью*.

М23.5.4 Определение. Область (открытая или замкнутая) на плоскости называется *ограниченной областью*, если существует круг, в котором целиком расположена эта область.

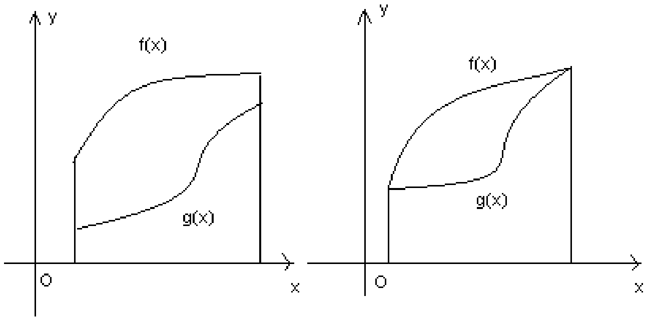
Рассмотрим произвольную ограниченную замкнутую область Ω на плоскости, ее границу будем представлять в виде замкнутой линии. Рассмотрим множество многоугольников S_0, содержащих внутри себя область Ω и множество многоугольников S_1, содержащихся в области Ω. Очевидно, что площадь любого многоугольника из множества S_0 больше площади любого многоугольника из множества S_1. Множество площадей многоугольников множества S_0 ограничено снизу некоторым числом $\inf S_0$, а множество площадей многоугольников множества S_1 ограничено сверху некоторым числом $\sup S_1$.

М23.5.5 Определение. Если $\inf S_0 = \sup S_1$, то это число называется *площадью* области Ω, а сама область Ω при этом называется *квадрируемой* областью.

Поделим область Ω на две области Ω_1 и Ω_2 (например, какой-нибудь линией). Очевидно, что если область Ω квадрируема, то квадрируемы и области Ω_1 и Ω_2. Пользуясь свойствами верхних границ можно доказать, что площадь области Ω равна сумме площадей областей Ω_1 и Ω_2.

23.6 Площадь фигуры, ограниченной графиками функций

М23.6.1 В предыдущей лекции была рассмотрена задача о площади криволинейной трапеции. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух неотрицательных функций, может быть вычислена как разность площадей двух криволинейных трапеций.



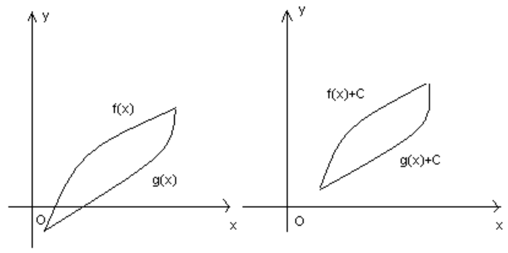
$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Покажем, что аналогичная формула верна не только для неотрицательных функций.
Сдвинем фигуру вверх таким образом, чтобы она полностью лежала в верхней полуплоскости. Аналитически это означает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ заменяются функциями $f(x)+C$ и $g(x)+C$ соответственно.

Функции $f(x)+C$ и $g(x)+C$ неотрицательны и поэтому к ограничиваемой ими фигуре применима формула разности площадей криволинейных трапеций:

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b (f(x) + C - g(x) - C)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

М23.6.2 Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$, прямой $x = 2$ и осями координат.

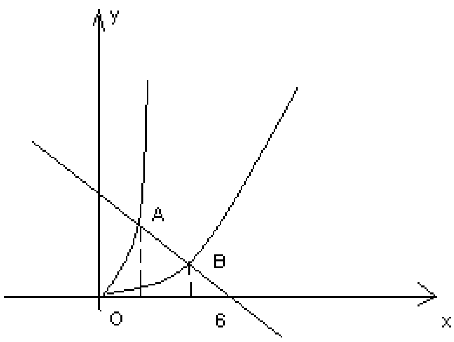


Решение: $y = 1 - x^2$ - уравнение параболы. Уравнение, приведенное к почти каноническому виду - $y - 1 = -x^2$. Из уравнения следует, что вершина параболы находится в точке $A(0, 1)$, ось симметрии параболы совпадает с координатной осью Oy, ветви параболы направлены вниз, точки пересечения параболы с осью Ox - $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Парабола пересекает прямую $x = 2$ в точке $C(2, -3)$. По исходным и полученным данным изображаем плоскую фигуру, площадь которой необходимо найти.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 (1 - x^2)dx - \int_1^2 (1 - x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 - \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_1^2 = 2.$$

М23.6.3 Пример Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{8}$ и $x + y = 6$

Решение: Абсциссу точки пересечения А графиков функций $y = x^2$ и $y = 6 - x$ найдем из уравнения $x^2 = 6 - x$: $x = 2$.



Аналогично из уравнения $\dfrac{x^2}{8} = 6 - x$ найдем абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \dfrac{x^2}{8}$ и $x + y = 6$: $x = 4$.

Искомая площадь состоит из площади фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{8}$ и вертикальной прямой $x = 2$ и площади фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{8}$, $y = 6 - x$ и той же вертикальной прямой. Значит, искомая площадь равна:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_2^4 \left(6 - x - \frac{x^2}{8} \right) dx = 6$$

23.7 Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной кривыми, заданными в параметрической форме

М23.7.1 Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную линией, заданной в параметрической форме уравнениями $x = x(t), y = y(t)$. Тогда, если основание криволинейной трапеции лежит на оси OX, то площадь плоской фигуры определяют по формуле

$$S = \mp \int_{t_н}^{t_в} y(t) x'(t) dt \qquad (1)$$

Знак «минус» в формуле (1) выбирается в том случае, если при увеличении параметра t абсцисса x уменьшается (т.е. при $dt > 0,\ dx < 0$.

Если основание криволинейной трапеции лежит на оси OY, то площадь плоской фигуры определяют по формуле

$$S=\pm\int_{t_н}^{t_в} x(t)\,y'(t)\,dt \qquad (2)$$

Если необходимо найти площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, то используется формула

$$S=\pm\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)\right)dt \qquad (3)$$

где α, β - значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (против часовой стрелки, или, более точно, так, чтобы при обходе контура ограниченная этим контуром область оставалась слева).

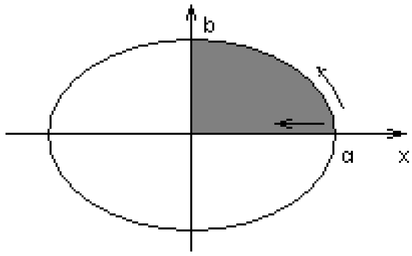


Рис. 15.11 Вычисление площади эллипса, заданного в параметрической форме

М23.7.2 Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной эллипсом, заданным в параметрической форме $x=a\cos t\ y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$,(Рис.15.11)

Решение: (Первый способ)

Учитывая, что начало координат является центром симметрии эллипса, достаточно найти площадь четверти эллипса и результат увеличить в четыре раза. В этом случае фактически с помощью определенного интеграла вычисляется площадь криволинейной трапеции с основанием на оси OX, ограниченной дугой эллипса. Используем формулу (1) со знаком «минус», так как при увеличении значения параметра t абсцисса x уменьшается (Рис. 15.11).

$$S=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\,x'(t)\,dt=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=\ldots=\pi ab.$$

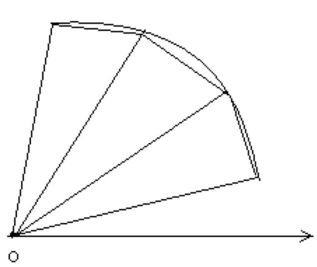
(Второй способ)

Определяем площадь фигуры, ограниченной эллипсом как замкнутым контуром, заданным в параметрической форме (Рис.11.15), используя формулу (3) при $\alpha=0,\ \beta=2\pi$:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\cdot(-a\sin t)\right)dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

23.8 Площадь фигуры в полярной системе координат

Рассмотрим линию, заданную уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат



М23.8.1 Определение: Фигура, ограниченная линией $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ называется *криволинейным сектором*.

Между лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ проведем еще несколько лучей, расстояния на этих лучах от полюса до точки пересечения с линией $\rho=\rho(\varphi)$ обозначим $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n+1}$, углы между соседними лучами обозначим $\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,\ldots,\Delta\varphi_n$.

Получим некоторое количество треугольников, вписанных в линию $\rho=\rho(\varphi)$, сумма площадей которых равна $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i\rho_{i+1}\sin\Delta\varphi_i$. Представляется очевидным, что при $\Delta\varphi_i\to 0$ сумма

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i\rho_{i+1}\sin\Delta\varphi_i$ стремится к площади криволинейного сектора. Поскольку $\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}=1$, то при $\Delta\varphi_i\to 0$ $\sin\Delta\varphi_i\to\Delta\varphi_i$ и $\rho_{i+1}\to\rho_i$. Значит, площадь криволинейного сектора равна $S=\frac{1}{2}\lim_{\Delta\varphi_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\varphi_i)\rho(\varphi_{i+1})\Delta\varphi_i$, т.е.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$$

М23.8.2 Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, $\varphi\in[0;2\pi]$

Решение: $S=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0_1}^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}(2\pi-0+0-0+\pi-0)=\frac{3\pi a^2}{2}$$

М23.8.3 Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной окружностью $\rho=2\sin\varphi$ и лучом $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Решение: для окружности при $\varphi=0$ имеем $\rho(0)=0$, а при $\varphi=\frac{\pi}{3}$ имеем $\rho\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Плоская фигура, ограниченная данными линиями, является криволинейным сектором, поэтому его площадь равна $S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\varphi)^2d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

23.9 Объем тела

Многогранной областью в пространстве или многогранником будем называть произвольную конечную пространственную фигуру, ограниченную поверхностью многогранника.

М23.9.1 Определение: ε *-окрестностью* точки (x_0,y_0,z_0) в пространстве называется множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\varepsilon$.

Замечание: с геометрической точки зрения ε-окрестность – это шар радиуса ε с центром в точке (x_0,y_0,z_0).

М23.9.2 Определение: Множество точек пространства, обладающее тем свойством, что любая его точка обладает некоторой ε-окрестностью, целиком принадлежащей этому множеству, называется *открытой областью* пространства.

М23.9.3 Определение. Множество точек пространства, являющееся дополнением (в теоретико-множественном смысле) к открытой области называется *замкнутой областью*.

М23.9.4 Определение. Область (открытая или замкнутая) в пространстве называется *ограниченной областью*, если существует шар, в котором целиком расположена эта область.

Рассмотрим произвольную ограниченную замкнутую область Ω в пространстве, ее границу будем представлять в виде замкнутой поверхности. Рассмотрим множество многогранников S_0, содержащих внутри себя область Ω и множество многогранников S_1, содержащихся в области Ω. Очевидно, что объем любого многогранника из множества S_0 больше объема любого многогранника из множества S_1. Множество объемов многоугольников множества S_0 ограничено снизу некоторым числом $\inf S_0$, а множество объемов многоугольников множества S_1 ограничено сверху некоторым числом $\sup S_1$.

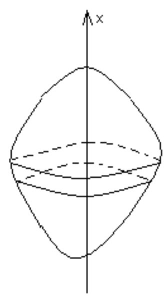
М23.9.5 Определение. Если $\inf S_0 = \sup S_1$, то это число называется *объемом* области Ω, а сама область Ω при этом называется *кубируемой* областью.

Поделим область Ω на две области Ω_1 и Ω_2 (например, какой-нибудь поверхностью). Очевидно, что если область Ω кубируема, то кубируемы и области Ω_1 и Ω_2. Пользуясь свойствами верхних границ можно доказать, что объем области Ω равен сумме объемов областей Ω_1 и Ω_2.

23.10 Объем как интеграл от площади

М23.10.1 Определение: *Обобщенным цилиндром* назовем тело, ограниченное произвольной цилиндрической поверхностью и двумя плоскостями, перпендикулярными к образующей этой поверхности.

Представляется очевидным, что объем обобщенного цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



М23.10.2 Рассмотрим произвольное тело Ω, ограниченное замкнутой поверхностью S и проходящую через него координатную ось OX. Проведем две плоскости, перпендикулярные оси OX. Если расстояние между плоскостями достаточно мало, то тело Ω_x, ограниченное этими плоскостями и поверхностью S, мало отличается от обобщенного цилиндра и его объем приближенно равен $V_x \approx S(x)\Delta x$, где $S(x)$ - площадь сечения тела Ω любой из двух упомянутых плоскостей, а Δx - расстояние между этими плоскостями.

Будем теперь считать, что перпендикулярно оси OX проведены n параллельных плоскостей, разбивающих тело Ω на тела $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, ..., \Omega_{x_{n+1}}$ (тело «нарезано» тонкими «ломтями»). Тогда объем тела Ω приближенно равен $V \approx \sum_{i=1}^{n} S_i(x)\Delta x_i$, где $S_i(x)$ - площади соответствующих сечений, а Δx_i - расстояния между соседними плоскостями. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\Delta x_i \to 0$, получим

$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

где $S(x)$ - площадь сечения тела, плоскостью, проходящей через точку x на оси OX, a и b - соответственно наименьшая и наибольшая из координат точек тела на оси OX.

М23.10.3 Пример. Найти объем эллипсоида, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Запишем уравнение сечения эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси OX (т.е. считаем переменную x фиксированной):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Как и следовало ожидать, в сечении получился эллипс. Полуоси этого эллипса равны $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. В соответствии с М2.7.2, площадь этого эллипса равна $S(x)=\pi\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)$.

Из М2.10.2 получаем: $V=\int\limits_{-a}^{a}S(x)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc$.

23.11 Вычисление объемов тел вращения

М23.11.1 Если ось OX является осью вращения, то предполагаем, что тело образуется вращением плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, осью Ox и прямыми $x=a,\ x=b$. Из М2.10.2 следует, что объем тела в этом случае определяется по формуле $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx=\pi\int\limits_a^b y^2dx$, поскольку сечениями тела являются круги радиусов $f(x)$.

М23.11.2 Пример. Найти объем тела, образованного вращением части параболы $y^2=2px$ вокруг оси Ox, на промежутке $[l;\ 2l]$ (Рис.15.15).

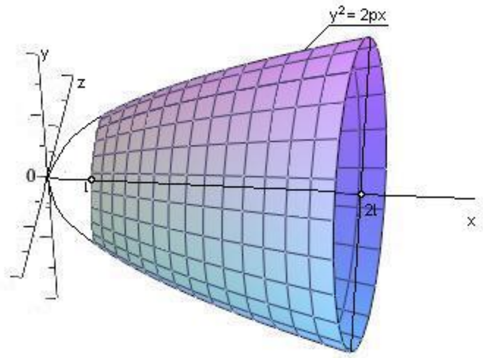


Рис.15.15. Пример вычисления объема тела вращения

Решение:

$$V=\pi\int\limits_l^{2l}y^2dx=\pi\int\limits_l^{2l}2pxdx=2p\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_l^{2l}=3\pi pl^2.$$

Если тело образовано вращением плоской фигуры, ограниченной графиком функции $x=x(y)$ вокруг оси Oy, то объем тела вычисляют по формуле $V_y=\pi\int\limits_c^d x^2(y)dy$.

М23.11.3 Пример. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=(x-1)^2, y=0, x=0, x=1$.

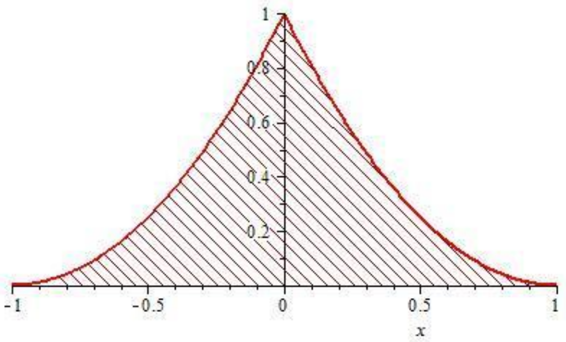


Рис. 15.16 Пример вычисления объема тела, полученного вращением графика функции вокруг оси OY

Решение. Находим пределы интегрирования: при $x=0$ получаем $y=y_в=1$, а при $x=1$ - $y=y_н=0$

Найдем зависимость переменной x от переменной y: $y=(x-1)^2\Rightarrow\pm\sqrt{y}=x-1\Rightarrow x(y)=1-\sqrt{y}$. Объем тела вращения равен

$$V=\pi\int\limits_0^1(1-\sqrt{y})^2dy=\pi\int\limits_0^1(1-2\sqrt{y}+y)dy=\pi\left(y-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

23.12 Вычисление площади поверхности вращения

М23.12.1 Рассмотрим некоторую линию L и вписанные в нее ломаные. Будем вращать эту линию вместе с вписанными ломаными вокруг оси OX. Предполагая известной площадь поверхности усеченного конуса, будем называть площадью поверхности вращения линии L предел площадей поверхностей вращения вписанных в нее ломаных (если этот предел существует).

М23.12.2 Пусть линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t \in [a;b]$. можно доказать, что также как объем равен интегралу от площади, так же и площадь равна интегралу от длины. Для поверхности вращения речь идет о длинах окружностей с радиусами $y = y(t)$, значит, площадь поверхности равна $S_x = \int_a^b y(t)ds$, где ds - дифференциал дуги. Окончательно:

$$S_x = \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Для определения площади поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox отрезка линии $y = f(x) \geq 0, x_н = a, x_в = b$ используется формула $S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$. Если отрезок линии $y = f(x), x \geq 0$ вращается вокруг оси Oy, то $S_y = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy$, где $x = \varphi(y) \geq 0, y_н = c, y_в = d$.

Данную формулу можно преобразовать к виду, который позволяет упростить вычисления в некоторых расчетных ситуациях: $S_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}dx$.

М23.12.3 Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной при вращении отрезка кривой $y = x^3$ вокруг оси Ox при $x \in [0, 1]$.

Решение: $S_x = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + 9x^4}dx = \left[x^3dx = d\left(\int x^3dx\right) = \frac{1}{4}dx^4\right] = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4}\,\frac{1}{4}dx^4 =$

$= \frac{\pi}{18}\int_0^1 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}}d(1 + 9x^4) = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной при вращении отрезка кривой $y = x^2$ вокруг оси Oy при $x \in [0, 1]$.

Решение: $S_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}dx = \ldots = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}d(1 + 4x^2) =$

$= \ldots = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом плоской дуги? Что называется дифференциалом пространственной дуги?
2. Запишите формулу для вычисления длины параметрически заданной линии (на плоскости и в пространстве). Запишите формулу для вычисления длины графика функции. Запишите формулу для вычисления длины линии, заданной в полярной системе координат.
3. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной графиками двух функций. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры, граница

которой задана параметрическими уравнениями. Запишите формулу для вычисления площади криволинейного сектора.

4. Запишите формулу объема тела как интеграла от площади сечения. Запишите формулу объема тела вращения.
5. Запишите формулу для вычисления площади поверхности вращения.