Лекция 9 Основы теории рядов

25.1. Определение бесконечного числового ряда

М25.1.1 Определение. Пусть дана последовательность $c_n : N \to R$. Составленная из элементов этой последовательности другая последовательность $S_n = \sum_{m=1}^{n} c_m$ называется *рядом (числовым рядом),* а элементы S_n называются *частичными суммами* этого ряда. Сам ряд при этом обозначается символом $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$. Элементы последовательности c_n будем называть *слагаемыми ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

М25.1.2 Определение. Если последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{m=1}^{n} c_m$ имеет конечный предел, то говорят, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ *ряд сходится*. Предел частичных сумм при этом называется *суммой ряда*. Если последовательность $S_n = \sum_{m=1}^{n} c_m$ не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что *ряд расходится*.

М25.1.3 Примеры. Вычислить суммы рядов: а) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ при $|q| < 1$; б) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Решение. а) (*геометрическая прогрессия*) $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = a\frac{1-q^n}{1-q}$;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q};$$

б)

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

Замечание 1. В отличие от последовательностей, в теории рядов обычно не интересуются конкретным значением суммы ряда (предела последовательности частичных сумм), а интересуются только самим фактом сходимости или расходимости ряда.

М25.1.4 *Замечание 2.* Можно сказать, что ряд представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых. Однако, привычные свойства суммы конечного числа слагаемых для бесконечной суммы могут оказаться неверными. Рассмотрим, например ряд $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$.

При расстановке скобок $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots$ в качестве суммы получим ноль. А при расстановке скобок $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+0+\ldots$ в качестве суммы получим 1. Таким образом, бывает, что сумма ряда зависит от расстановки скобок. Бывает также, что сумма меняется от перестановки мест слагаемых. Эти вопросы подробнее будут рассмотрены в лекции 11.

М25.1.5 Теорема (Критерий Коши сходимости ряда) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для $\varepsilon>0$ найдется номер n_0 такой, что для любых $n>n_0$ и $m>n>n_0$ выполняется неравенство

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_m\right|<\varepsilon.$$

М25.1.6 Теорема (Необходимый признак сходимости) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, его сумма равна S и S_n - частичная сумма этого ряда, тогда $S_{n+1}=S_n+a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} S_n+\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $S=S_n+\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

М3.1.7 *Замечание 1.* Из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ сходимость ряда не следует. Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Его частичная сумма равна $S_n=\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \text{слагаемых}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\to\infty$.

М25.1.8 *Замечание 2.* Необходимый признак сходимости может служить для доказательства расходимости рядов, так как из него следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ (в частности, если этот предел вообще не существует), то ряд расходится. Рассмотренный в М25.1.4 ряд расходится, так как не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

25.2. Остатки ряда

М25.2.1 Определение. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда для любого натурального числа $m>1$ ряд $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ называется *остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

М25.2.2. Теорема (об остатках ряда) 1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то при любом значении $m>1$ сходится и его остаток $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$. 2) Если сходится какой-нибудь остаток $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. 1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S. Рассмотрим остаток $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ и частичную сумму $S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{m-1}) + a_m + a_{m+1} + ... + a_n$. Очевидно, что выражение $C_n = a_m + a_{m+1} + ... + a_n$ является частичной суммой остатка $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Значит, $C_n = S_n - (a_m + a_{m+1} + ... + a_n)$. Тогда $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} S_n - (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = S - (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n)$, что и требовалось.

2) Пусть остаток $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна C. Тогда из равенства $C_n = S_n - (a_m + a_{m+1} + ... + a_n)$ получаем $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} C_n + (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n)$, что и требовалось.

M25.2.3 *Следствие 1.* Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ изменить любое конечное число слагаемых, то это не повлияет на его сходимость (конечно, если ряд сходился, то его сумма может измениться).

M25.2.4 *Следствие 2.* Если ряд сходится, то сумма его остатка $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ стремится к нулю при $m \to \infty$.

M25.2.5 *Замечание.* Для доказательства расходимости ряда часто бывает удобно использовать M25.1.5, M25.1.8 или M25.2.4. При этом, при использовании критерия Коши (M25.1.5) следует убедиться, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall n_0\ \exists m > n > n_0$ выполнено неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| > \varepsilon$.

25. 3 Арифметические операции со сходящимися рядами

M25.3.1 Если все слагаемые сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с суммой S умножить на одно и то же число c, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ также будет сходящимся и его сумма будет равна cS.

Действительно, обозначив частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ через S_n и C_n соответственно, получим $C_n = c \cdot S_n$. тогда $\lim_{n\to\infty} C_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = cS$.

M25.3.2 Определение. *Суммой рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, *разностью рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$.

M25.3.3 Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и их суммы равны соответственно A и B, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ и их суммы равны соответственно $A + B$ и $A - B$.

Обозначим через A_n, B_n, S_n, D_n частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ соответственно. Тогда $S_n = A_n + B_n$, $D_n = A_n - B_n$ и $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} A_n + \lim_{n \to \infty} B_n = A + B$, $\lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{n \to \infty} A_n - \lim_{n \to \infty} B_n = A - B$.

Все вышесказанное было верно для рядов с любыми слагаемыми. Ниже в данной лекции будет предполагаться, что все слагаемые рассматриваемых рядов положительны.

25.4 Гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд

M25.1.1. *Замечание.* Если все слагаемые ряда положительны, то последовательность его частичных сумм возрастает. Если эта последовательность ограничена сверху, то такой ряд сходится. Если не ограничена – сумма ряда равна бесконечности. Таким образом, для рядов с положительными слагаемыми расходимость равносильна бесконечности суммы ряда.

M25.4.2 Определение. *Гармоническим ряд*ом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. *Обобщенным гармоническим рядом* называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при любом $\alpha \in R$.

M25.4.3 Теорема (о сходимости обобщенного гармонического ряда) 1) Гармонический ряд расходится. 2) обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Доказательство. 1) Заметим, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Воспользуемся отрицанием критерия Коши (M10.2.5): пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и пусть выбран некоторый номер n_0. Надо показать, что существуют номера $m > n > n_0$ такие, что $\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m} \right| > \varepsilon$ Из приведенного выше неравенства следует, что достаточно взять любое $n > n_0$ и $m = 2n$. Критерий Коши для гармонического ряда не выполнен, значит, ряд расходится.

2) Если $\alpha < 1$, то $\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}$ и частичные суммы обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ больше соответствующих сумм гармонического ряда $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и в соответствии с замечанием M4.4.1 и теоремой M2.3.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится.

Пусть $\alpha > 1$, положим $\alpha = 1 + s, s > 0$. Заметим, что $\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \frac{1}{(n+3)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+n)^\alpha} < n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^s}$. Значит, $\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} < \frac{1}{2^s}$, $\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} < \frac{1}{4^s} = \frac{1}{(2^s)^2}$, $\frac{1}{9^\alpha} + \ldots + \frac{1}{16^\alpha} < \frac{1}{(2^s)^3}$ и т.д. Но числа $\frac{1}{2^s}, \frac{1}{(2^s)^2}, \frac{1}{(2^s)^3}, \ldots$ составляют сходящуюся геометрическую прогрессию , сумма которой равна $\frac{\frac{1}{2^s}}{1 - \frac{1}{2^s}}$.

Значит, любая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ будет меньше числа $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{\frac{1}{2^s}}{1 - \frac{1}{2^s}}$. Частичные суммы возрастают и ограничены сверху, значит, последовательность частичных сумм имеет предел.

М25.4.4 Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0,25}}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,5}}$ сходится.

25.5 Признаки сравнения положительных рядов

М25.5.1 Теорема (первый признак сравнения) Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными слагаемыми и пусть $\forall n \; a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. 1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, его сумма равна B, а частичные суммы равны B_n. Тогда, в силу положительности слагаемых, имеем $B_n < B$. Если A_n - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то в силу неравенства $a_n \le b_n$ имеем $A_n \le B_n < B$. Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ возрастают (в силу положительности слагаемых) и ограничены сверху числом B. По теореме М8.4.3 последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет предел.

2) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда, поскольку его слагаемые положительны, сумма этого ряда (предел частичных сумм) равна бесконечности. Из условия $A_n \le B_n$ следует, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также бесконечна.

M25.5.2 Теорема (предельный признак сравнения) Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными слагаемыми и пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, $0<L<\infty$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $0<L<\infty$. Выбрав произвольно число $\varepsilon>0$, по определению предела последовательности получим, что $\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon$, откуда $a_n<(L+\varepsilon)b_n$. Из M10.3.1 получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ сходится. По теореме M10.5.1 из неравенства $a_n<(L+\varepsilon)b_n$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Поскольку $0<L<\infty$, то $0<\frac{1}{L}<\infty$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{L}$. Если бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, то по первой части доказываемой теоремы, сходился бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Противоречие.

M25.5.3 Теорема (второй признак сравнения) Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными слагаемыми и пусть $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Перемножив поэлементно неравенства $\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{a_3}{a_{21}}\le\frac{b_3}{b_2},\ldots,$ $\frac{a_n}{a_{n-11}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$, получим $\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}$, откуда $a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n$. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда (M10.3.1) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{b_1}b_n$, а из M10.5.1 следует, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, тогда из неравенства $b_n\le\frac{b_1}{a_1}a_n$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

M25.5.4. *Замечание.* В теоремах M25.5.1 и M25.5.3 можно было требовать не условия $\forall n\ a_n\le b_n$ или, соответственно, $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ а лишь того, что неравенство $a_n\le b_n$ (соответственно $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$) выполняется лишь начиная с некоторого номера (следует из M3.2.2).

М25.5.5 Пример. Проверить сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1{,}5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-2n+3}$;

Решение: а) Поскольку $\frac{1}{n^2+3}<\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд, то по теореме М3.5.1 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$.

б) Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n}-1{,}5}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\geq 2$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то по теореме М3.5.1 и замечанию М3.5.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1{,}5}$ расходится.

в) Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-2n+3}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ с помощью теоремы М3.5.2. Обозначим $a_n=\frac{n+1}{n^2-2n+3}$, $b_n=\frac{1}{n}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2-2n+3}=1$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то по теореме М3.5.2 расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-2n+3}$.

25.6 Признаки Коши и Даламбера

М25.6.1 Теорема (Признак сходимости Коши) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - ряд с положительными слагаемыми и $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Тогда:

1) Если $L<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) Если $L>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

3) Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды, для которых $L=1$.

Доказательство. 1) Пусть $L<1$. Выберем какое-нибудь число q, удовлетворяющее неравенству $L<q<1$. По определению предела последовательности найдется число n_0 такое, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n}<q$. Значит, $a_n<q^n$ и из М25.1.3 и М25.5.1 следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

2) Без доказательства.

3) Без доказательства .

M25.6.2 Теорема (Признак Даламбера) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд с положительными слагаемыми и $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда:

1) Если $L < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) Если $L > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды, для которых $L = 1$.

Доказательство. 1) Пусть $L < 1$. Выберем какое-нибудь число q, удовлетворяющее неравенству $L < q < 1$. Тогда найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Поскольку $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$, то $a_{n+1} < a_1 \cdot q^n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ сходится (геометрическая прогрессия). Про признаку сравнения M25.5.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $L > 1$. Тогда найдется номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то есть $a_{n+1} > a_n$ и нарушается необходимый признак. сходимости (M25.1.6).

3) Рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Первый из них расходится, второй – сходится (M25.4.3) и в обоих случаях $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

M25.6.4 Пример. Проверить сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ (при любом $a \in R$); б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

Решение. а) Применим признак Коши: $\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{\pm a}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pm a}{n} = 0$ при любом значении $a \in R$. Значит, по признаку Коши ряд сходится.

б) Применим признак Даламбера: $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$. Ряд сходится.

М25.6.5 Теорема (интегральный признак сходимости Коши) Пусть $y = f(x)$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция одной действительной переменной. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство: Пусть $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$. Поскольку $f(x) > 0$, то $F(x)$ - возрастающая функция, значит, существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

Рассмотрим частичные суммы A_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n))$: $A_1 = F(2) - F(1)$, $A_2 = F(2) - F(1) + F(3) - F(2) = F(3) - F(1)$, $A_3 = F(3) - F(1) + F(4) - F(3) = F(4) - F(1)$,…, $A_n = F(n) - F(1) = \int_1^n f(x)dx$.

Значит, если $\lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n))$ сходится, в противном случае – расходится. По формуле конечных приращений на промежутке $[n; n+1]$

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta),$$

где $\theta \in (0;1)$. Значит, поскольку функция $f(x)$ монотонна, то

$$f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n)$$

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n)) = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx$, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$. Тогда, по теореме об остатках, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Аналогично, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (F(n+1) - F(n)) = \int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. *Теорема доказана*.

М3.6.6 Пример: Проверить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Решение: Рассмотрим интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} = \ln y\Big|_0^{\infty} = \infty - (-\infty) = \infty$. Интеграл расходится. Значит, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

25.7 Абсолютная и условная сходимость

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ содержит лишь конечное количество отрицательных слагаемых (остальные положительны), то перейдя к соответствующему остатку ряда, получим ряд с положительными слагаемыми, к которому применимы все признаки сходимости лекции 10. Если ряд содержит лишь конечное количество положительных слагаемых (остальные отрицательны), то также переходя к соответствующему остатку $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ и умножив его на (-1), снова получим ряд $\sum_{n=m}^{\infty} (-a_n)$ с положительными слагаемыми. Таким образом, представляет интерес только случай, когда ряд содержит бесконечное количество как положительных, так и отрицательных слагаемых.

М25.7.1 Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из его абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

М25.7.2 Теорема (сходимость и абсолютная сходимость) Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то по критерию Коши (М3.1.5) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для любых $m > n > n_0$ выполняется неравенство $\left| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| \right| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$.

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Поскольку $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$, то для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняется критерий Коши и ряд сходится.

М25.7.3 Пример. Проверить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$: $\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (М25.4.3). По признаку сравнения М25.5.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ тоже сходится. По теореме М25.1.2 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

М25.7.4 Определение. Сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся ряды называются *условно сходящимися* рядами.

25.8 Знакочередующиеся ряды

М25.8.1 Определение. *Знакочередующимся рядом* будем называть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ или ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ при $c_n > 0$.

М25.8.2 Теорема Лейбница (Сходимость знакочередующегося ряда) Если для $\forall n$ выполняется условие $c_{n+1} < c_n$ и при этом $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, то знакочередующийся ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ и его частичную сумму $S_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2n-1} - c_{2n})$. Из условия $c_{n+1} < c_n$ следует, что все разности в скобках положительны и последовательность частичных сумм S_{2n} возрастает. С другой стороны, $S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - c_{2n}$ и из того же условия $c_{n+1} < c_n$ следует, что $S_{2n} < c_1$.

Таким образом, возрастающая последовательность S_{2n} ограничена сверху и, значит, имеет предел, который мы обозначим S.

Рассмотрим теперь частичную сумму $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1}$. Поскольку, по условию теоремы, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, а по доказанному, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S + 0 = S$. Таким образом, существует и конечен предел любых частичных сумм рассматриваемого ряда, то есть ряд сходится.

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$, то теорема доказана и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$.

М25.8.3 Пример. Проверить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n}$.

Решение. $\cos \pi n$ равен 1 при четных значениях n и равен (-1) при нечетных значениях n. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $c_n = \frac{1}{n}$. Поскольку $c_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то, по теореме Лейбница, ряд сходится.

М25.8.4 *Замечание.* Из условия $c_{n+1} < c_n$ следует, что остаток $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (-1)^n c_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ меньше модуля первого слагаемого остатка: $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (-1)^n c_n < |c_m|$. Это позволяет использовать знакочередующиеся ряды в приближенных вычислениях. То же касается и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$.

М25.8.5 Пример. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ с точностью до 0,01.

Решение. В соответствии с замечанием М11.2.5 найдем слагаемое ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, по модулю не превосходящее 0,01: $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \le 0{,}01$. Наименьшее значение n, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{n^2} \le 0{,}01$, это $n = 10$. Значит, чтобы вычислить сумму ряда с заданной точностью, достаточно взять 9 слагаемых: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} \approx 0{,}83$.

25.9 Действия с бесконечными суммами

В М25.1.4 уже показывалось, что с бесконечными суммами нельзя действовать как с конечными. Однако, как будет сказано ниже, сумма многих рядов не зависит от перестановки слагаемых и от расстановки скобок.

М25.9.1 Теорема (сочетательное свойство). В сходящемся ряду расстановка скобок не влияет ни на сходимость ряда, ни на его сумму.

Без доказательства.

М25.9.2 Теорема (переместительное свойство) В абсолютно сходящемся ряду никакая перестановка слагаемых ряда не влияет ни на сходимость ряда, ни на его сумму.

Доказательство. 1) Допустим сначала, что все слагаемые ряда положительны и, таким образом абсолютная сходимость равносильна сходимости. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - исходный ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд с переставленными слагаемыми (таким образом множество чисел $\{a_n \mid n \in N\}$ совпадает с множеством чисел $\{b_n \mid n \in N\}$). Обозначим A_i - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, B_i - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, A - сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Поскольку $B_i = a_{n_1} + a_{n_2} + ... + a_{n_i}$, то взяв число $n > \max n_i$, получим, что частичная сумма $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ содержит все числа $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_i}$ и, таким образом, $B_i \le A_n$. Но, поскольку все слагаемые ряда положительны, то $B_i \le A$. Последовательность B_i возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет предел. По теореме о пределе и неравенствах сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ не превосходит суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с переставленными слагаемыми. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже получается из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ перестановкой слагаемых и, значит сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не превосходит суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.Значит, от перестановки мест слагаемых сумма не меняется.

2) Пусть теперь $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - произвольный абсолютно сходящийся ряд. Естественно предполагать, что этот ряд содержит бесконечное количество как положительных, так и отрицательных слагаемых, иначе, по теореме об остатках (М10.2.2) и первой части данной теоремы получим требуемое.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ - ряд, составленный из положительных слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, идущих в том же порядке, что и в ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ - ряд, составленный из модулей отрицательных слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, идущих в том же порядке, что и в ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим A' - сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, P_n - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, Q_n - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Тогда $\forall m \forall k \;\; P_m \le A'$

$Q_k \le A^{'}$ и, в силу положительности слагаемых всех трех рядов, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ сходятся. Если A - сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то из равенства $A_n = P_m - Q_k$ (числа m, k зависят от n и вместе с n стремятся к ∞) следует $A = P - Q$.

Перестановка слагаемых в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вызовет перестановку и в рядах $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, но по доказанному в первой части теоремы, не изменит суммы этих двух рядов, значит, и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не изменится.

М25.9.3 Теорема Римана (о сумме условно сходящегося ряда) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то: 1) для любого числа $L \in R$ найдется такая перестановка слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что сумма ряда с переставленными слагаемыми будет равна L; 2) можно так переставить слагаемые ряда, что сумма ряда станет равной ∞; 3) можно так переставить слагаемые, что новый ряд будет расходиться.

Доказательство. В рассматриваемом ряду количество как положительных, так и отрицательных слагаемых бесконечно (иначе, из теоремы об остатках М4.2.2 следует, что ряд не может быть условно сходящимся).

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ - ряд, составленный из положительных слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, идущих в том же порядке, что и в ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ - ряд, составленный из модулей отрицательных слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, идущих в том же порядке, что и в ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то поскольку сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из равенства $A = P - Q$ (М3.9.2) следует, что сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, но тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, что противоречит условию теоремы. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ расходится. По тем же соображениям расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

1) Рассмотрим случай $L \ge 0$. Начнем конструировать ряд с переставленными слагаемыми. В ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сначала соберем ровно столько первых последовательных положительных слагаемых $p_1 + p_2 + ... + p_k$, чтобы эта сумма превзошла число L. Затем добавим к ним ровно столько

первых последовательных отрицательных слагаемых $p_1+p_2+...+p_k-q_1-q_2-...-q_l$, чтобы полученное выражение стало меньше L (эти действия возможны за счет расходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$). Затем опять добавим ровно столько последовательных положительных слагаемых (из оставшихся), чтобы выражение $p_1+p_2+...+p_k-q_1-q_2-...-q_l+p_{k+1}+...+p_m$ снова стало больше L. Затем снова добавим к ним ровно столько первых последовательных отрицательных слагаемых (из оставшихся), чтобы полученное выражение стало меньше L и так далее. Обозначим эти последовательные добавки $P_1, Q_1, P_2, Q_2, ...$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то из необходимого признака сходимости (M4.6.1) следует, что $P_1 > P_2 > P_3 > P_4 >, ...$ и $|Q_1| > |Q_2| > |Q_3| > |Q_4| >, ...$. Значит, частичные суммы конструируемого ряда $P_1.$, $P_1.+Q_1$, $P_1.+Q_1+P_2$, $P_1.+Q_1+P_2+Q_2$

все меньше и меньше будут отличаться от L, что и требовалось.

2) Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (M25.1.6). Значит, начиная с некоторого номера n_0 все слагаемые ряда по модулю не превосходят 1 (можно было взять вместо 1 и любое другое положительное число). Снова будем рассматривать ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ и конструировать соответствующий ряд по аналогии с 1).

В ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ сначала соберем ровно столько первых последовательных положительных слагаемых $p_1+p_2+...+p_k$, чтобы эта сумма превзошла число 2. Затем добавим к ним ровно столько первых последовательных отрицательных слагаемых $p_1+p_2+...+p_k-q_1-q_2-...-q_l$, чтобы полученное выражение не стало меньше 1. Затем опять добавим ровно столько последовательных положительных слагаемых (из оставшихся), чтобы выражение $p_1+p_2+...+p_k-q_1-q_2-...-q_l+p_{k+1}+...+p_m$ стало больше 3. Затем снова добавим к ним ровно столько первых последовательных отрицательных слагаемых (из оставшихся), чтобы полученное выражение не стало меньше 2. Обозначим эти последовательные добавки $P_1, Q_1, P_2, Q_2, ...$. Добавки производятся таким образом, чтобы на каждом этапе выражение $P_i + Q_i$ было больше 1. Этого можно добиться, поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ расходятся. Новый ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = (P_1+Q_1)+(P_2+Q_2)+(P_3+Q_3)+\ldots > 1+1+1+\ldots$ Поскольку сумма ряда $\sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty$, то и $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$. 3) идея доказательства аналогична вышесказанному: надо так добавлять положительные и отрицательные слагаемые, чтобы последовательность частичных сумм имела два частичных предела.

Контрольные вопросы:

1. Что называется числовым рядом? Что называется частичной суммой ряда? Какой ряд называется сходящимся?
2. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
3. Что называется остатком ряда? Сформулируйте теорему об остатках.
4. Какой ряд называется гармоническим? Какой ряд называется обобщенным гармоническим? При каком необходимом и достаточном условии сходится обобщенный гармонический ряд?
5. Сформулируйте признаки сравнения рядов.
6. Сформулируйте признак Коши. Сформулируйте признак Даламбера. Сформулируйте интегральный признак Коши.
7. Какой ряд называется абсолютно сходящимся? Как связаны между собой понятия сходимости и абсолютной сходимости?
8. Сформулируйте теорему Лейбница для знакочередующегося ряда.
9. Какой ряд называется условно сходящимся? Сформулируйте теорему Римана о сумме условно сходящегося ряда.