Лекция 10 Степенные ряды. Ряд Тейлора

26.1. Понятие функционального ряда

Рассмотрим последовательность функций $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ и составим из них формальный ряд $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

М26.1.1 Определение: Ряд $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *функциональным рядом*.

М26.1.2 Примеры: 1) $f_n(x)=\dfrac{1}{nx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}+...$

2) $f_n(x)=x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=x+x^2+x^3+...$

3) $f_n(x)=\sin nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...$

М26.1.3 Если в функциональный ряд вместо переменной x подставить какое-либо число, получится сходящийся или расходящийся числовой ряд. Пусть X - множество всех значений переменной x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится. Тогда можно говорить, что на числовом множестве X определена функция одной действительной переменной $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ значениями которой являются суммы соответствующих числовых рядов.

М26.1.4 Определение. Множество чисел X, при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называется *областью сходимости* этого ряда.

26.2 Интервал сходимости степенного ряда

М26.2.1 Определение: Если $f_n(x)=a_n(x-x_0)^n$ где x_0, a_n - действительные числа, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...$ называется *степенным рядом*.

М26.2.2 Примеры: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+x^3+...$, $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n=(x-1)+2(x-1)^2+3(x-1)^3+...$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+...$.

М26.2.3 Теорема Абеля (об интервале сходимости) Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ является открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал с концами в точках x_0-R и x_0+R где R некоторое неотрицательное число или ∞.

Доказательство: Рассмотрим сначала ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...$

Этот ряд, очевидно, сходится при $x = 0$. Допустим, что этот ряд сходится еще в какой-либо точке x_1, тогда по необходимому признаку сходимости, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$ и, значит, найдется число M такое, что $\left|a_n x_1^n\right| < M$ для всех номеров n. Возьмем любое число x_2 такое, что $|x_2| < |x_1|$ и составим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_2^n\right|$. Поскольку $\left|a_n x_2^n\right| = \left|a_n x_1^n \cdot \frac{x_2^n}{x_1^n}\right| = \left|a_n x_1^n\right| \cdot \left|\frac{x_2^n}{x_1^n}\right| < M\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n$, будучи геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1$, сходится, то по теореме о сходимости и арифметических операциях (M25.3.1) сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n$. Тогда, по признаку сравнения (M25.5.1) будет сходиться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_2^n\right|$. Поскольку x_2 - произвольное число, удовлетворяющее условию $|x_2| < |x_1|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ будет сходиться в любой точке интервала $(-x_1; x_1)$.

Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ и, сделав замену переменной $y = x - x_0$, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, который сходится на некотором интервале $(-y_1; y_1)$. Возвращаясь к переменной x, получим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится на интервале $(x_0 - y_1; x_0 + y_1)$. *Теорема доказана.*

M26.2.4 *Замечание:* В частности, интервалом сходимости степенного ряда может оказаться единственная точка x_0 или вся числовая прямая.

M26.2.5 Определение. Число R, упоминаемое в теореме M26.2.3, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

26.3 Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда

M26.3.1 Для практического нахождения интервала сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ можно применять *метод Даламбера*, состоящий в следующем: рассматривается предел (если он существует) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n}\right| = |x - x_0| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Если этот предел меньше 1, то по признаку Даламбера, ряд сходится, если больше – расходится. Решая неравенство $|x - x_0| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, находим открытый интервал, в точках которого ряд сходится. Вне этого интервала за исключением, может быть, концов интервала, ряд расходится.

Для проверки сходимости на концах интервала нужно подставить каждое из этих двух чисел в формулу ряда и, получив числовые ряды, проверить их сходимость.

M26.3.4 Пример 1: Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n+1}x^{n}}\right| = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{n+1}\right| = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$. Решаем неравенство $|x|<1$: $x\in(-1;1)$.

Теперь проверяем сходимость на концах интервала: Подставим $x_1=-1$ в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n}$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Гармонический ряд расходится (М25.4.3).

Подставим точку $x_2=1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}1^{n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница (М25.8.2) Значит, ряд сходится.
Следовательно, интервалом сходимости данного ряда будет $(-1;1]$.

М26.3.5 Пример 2. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^{n}}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = |x|\cdot 0 = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^{n}}\right| = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = |x|\cdot 0 = 0$

Полученное неравенство $0<1$ верно при любых значениях переменной x, т. к. не зависит от этой переменной. Значит, ряд сходится при любых значениях переменной и его интервалом сходимости является $(-\infty;\infty)$.

М26.3.6 Пример 3. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^{n}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^{n}}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}|n+1| = |x|\cdot\infty$. При любом значении переменной $x\neq 0$ предел будет равен ∞ . При $x=0$ получается неопределенность $0\cdot\infty$. Поэтому проверим сходимость непосредственной подстановкой: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,0^{n}=0$. Ряд сходится. Значит, данный ряд сходится в единственной точке $x=0$.

26.4 Формула Тейлора

М26.4.1 Рассмотрим производные многочлена $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$:

$$p'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}$$
$$p''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$p'''(x)=2\cdot 3a_3x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2a_n$$

При $x=0$ получим:

$$p(0)=a_0=0!\cdot a_0$$
$$p'(0)=a_1=1!\cdot a_1$$
$$p''(0)=2a_2=2!\cdot a_2$$
$$p'''(0)=2\cdot 3a_3=3!\cdot a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(n)}=n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2a_n=n!\,a_n$$

Значит, $a_0 = \frac{p(0)}{0!}$, $a_1 = \frac{p'(0)}{1!}$, $a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \dots,\ a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$,

$$p(x) = \frac{p(0)}{0!} + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

Если в этой формуле заменить x на $x - x_0$, получим общую формулу

$$p(x) = \frac{p(x_0)}{0!} + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i,$$

называемую *формулой Тейлора* для многочлена.

Пусть $f(x)$ - произвольная функция, имеющая в точке x_0 производные $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. Сопоставим этой функции многочлен $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

M26.4.2 Теорема (о порядке приближения функции многочленом) Пусть $f(x)$ - произвольная функция, имеющая в точке x_0 производные $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$, и пусть $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$, тогда

$$f(x) - p_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

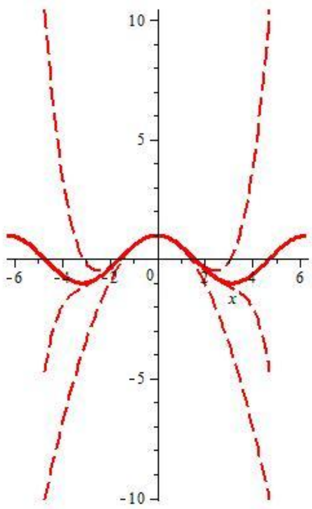
Доказательство. Обозначим $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$. Из определения многочлена $p_n(x)$ следует, что

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$$

При $n = 1$ получим: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_1(x) - 0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_1(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r_1'(x_0) = 0$.

При $n = 2$ получим:

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_2'(x)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_2'(x) - r_2'(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2}r_2''(x_0) = 0$, здесь воспользовались правилом Бернулли-Лопиталя.



При $n = 3$ получим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_3(x)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_3'(x)}{3(x - x_0)^2} = \frac{1}{3}\lim_{x \to x_0} \frac{r_3''(x)}{2(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x \to x_0} \frac{r_3''(x) - r_3''(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{6}r_3'''(x_0) = 0$$

здесь дважды воспользовались правилом Бернулли-Лопиталя.

В общем случае для доказательства равенства $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0$ нужно будет $n - 1$ раз воспользоваться правилом Бернулли- Лопиталя. *Теорема доказана*.

M26.4.3 *Замечание.* Из доказанной теоремы следует, что формулу Тейлора можно использовать для вычислений приближенных значений дифференцируемых функций: $f(x) \approx \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$

$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$, причем, чем больше число n, тем приближение лучше. Данная приближенная формула называется *формулой Тейлора*. При $x_0=0$ ее также называют *формулой Маклорена*.

М26.4.4 Пример. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$ и составим для нее формулы Тейлора при $n=0,1,2,3,4$ и $x_0=0$.

$f'(x)=-\sin x;\ f''(x)=-\cos x;\ f'''(x)=\sin x;\ f^{(4)}(x)=\cos x$

$f'(0)=0;\ f''(0)=-1;\ f'''(0)=0;\ f^{(4)}(0)=1$.

$p_0(x)=f(0)=1$

$p_1(x)=f(0)+f'(0)x=1+0\cdot x=1$

$p_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2=1-\frac{x^2}{2}$

$p_3(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3=1-\frac{x^2}{2}$

$p_4(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

Каждый следующий многочлен четной степени все лучше и лучше будет приближать функцию $f(x)=\cos x$ на все большем и большем интервале (см. рис.).

26.5 Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет на промежутке $(x-x_0, x+x_0)$ производные любых порядков. Тогда, в связи с тем, что формула Тейлора при увеличении степени n все лучше и лучше приближает функцию, естественно считать, что $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

М26.5.1 Определение. Степенной ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$. При $x_0=0$ этот ряд называют также *рядом Маклорена*. Функцию $r_n(x)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i=o((x-x_0)^n)$ называют *остатком ряда Тейлора*.

М26.5.2 Пример 1. Найдем ряды Маклорена функций $y_1=e^x$, $y_2=\sin x$, $y_3=\cos x$, $y_4=\ln(1+x)$, $y_5=(1+x)^\alpha$.

Решение: 1) $y=e^x$: $y'=y''=...=y^{(n)}=...=e^x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=...=y^{(n)}(0)=...=e^0=1$.

$$e^x=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ равен $(-\infty;\infty)$ (М14.3.5).

2) $y=\sin x$: $y'=\cos x, y''=-\sin x, y'''=-\cos x, y^{(4)}=\sin x$ и т. д. $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0, y'''(0)=-1, y^{(4)}(0)=0$ т.е. последовательность значений производных в точке 0 выглядит так: 0,1,0,-1,0,10,-1,0,1,0,-1 и т.д.

$$\sin x=0+\frac{1}{1!}x+0-\frac{1}{3!}x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Можно показать, что промежутком сходимости этого ряда также будет вся числовая прямая $(-\infty;\infty)$

3) $y=\cos x$: $y'=-\sin x, y''=-\cos x, y'''=\sin x, y^{(4)}=\cos x$ и т.д.

$y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-1, y'''(0)=0, y^{(4)}(0)=1$ т.е. последовательность значений производных в точке 0 выглядит так:

1,0,-1,0,10,-1,0,1,0,-1,0 и т.д.

$$\cos x=1+0-\frac{1}{2!}x^2+0+\frac{1}{4!}x^4-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

И здесь можно показать, что промежутком сходимости этого ряда также будет вся числовая прямая $(-\infty;\infty)$.

4) $y=\ln(1+x)$: $y'=(1+x)^{-1}$, $y''=-(1+x)^{-2}$, $y'''=2(1+x)^{-3}$, $y^{(4)}=-2\cdot 3(1+x)^{-4}$, $y^{(5)}=2\cdot 3\cdot 4(1+x)^{-5}$. Очевидно, что $y^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!(1+x)^{-n}$ и $y^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$.

Значит, $\ln(1+x)=0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.

Интервалом сходимости этого ряда является $(-1;1)$ (М14.3.4).

5) $y=(1+x)^{\alpha}$: $y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $y''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ и т.д.

$y(0)=1, y'(0)=\alpha, y''(0)=\alpha(\alpha-1), y'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ и т.д.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$

В частности, $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$

Можно показать, что промежутком сходимости этого ряда является $(-1;1)$.

М26.5.3 *Замечание 1.* можно заметить, что в ряде Маклорена нечетной функции $y=\sin x$ суммируются только нечетные степени переменной, а в ряде Тейлора четной функции $y=\cos x$ суммируются четные степени переменной. Это не случайно: можно доказать что у любой четной функции коэффициенты при нечетных степенях переменной в ряде Маклорена будут равны нулю, а у нечетной функции будут равны нулю коэффициенты при четных степенях.

М26.5.4 *Замечание 2.* Ряд Тейлора $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ безусловно сходится в точке x_0 и, будучи степенным рядом, должен сходиться в некотором интервале с центром в этой точке, хотя, радиус сходимости может оказаться равным нулю. Действительно, для любой последовательности чисел $c_n\in R$ (в том числе – и расходящейся) можно (хотя это и достаточно громоздкая операция) придумать функцию $f(x)$ такую, что $f^{(n)}(0)=c_n$.

М26.5.5 *Замечание 3.* Даже если ряд Тейлора сходится, то совершенно не обязательно к порождающей его функции. Например, функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \;\; при \;\; x\neq 0 \\ 0 \;\; при \;\; x=0 \end{cases}$ имеет в точке $x_0=0$ производные любых порядков и при этом $\forall n \;\; f^{(n)}(0)=0$. Значит, все слагаемые ряда Маклорена равны нулю и его суммой является функция, тождественно равная нулю.

М26.5.6 Пример 2. составить ряды Маклорена функций $y=e^{-x^2}$, $y=\cos\sqrt{x}$.

Решение: 1) $y=e^{-x^2}$: обозначим $t=-x^2$, тогда $y=e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$

2) $y=\cos\sqrt{x}$: обозначим $t=\sqrt{x}$, тогда $\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\ldots = 1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots$

M26.5.7 *Замечание.* Этот метод, называемый *метод подстановки* не всегда приводит к нужному результату. Например, при нахождении ряда Маклорена функции $y=\sin\sqrt{x}$ этот метод не дал бы степенного ряда.

M26.5.8 Остаток ряда Тейлора в форме $r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ не дает возможности вычислять значения функции с заданной точностью, поэтому часто используются другие формы остатка, удобные для приближенных вычислений.

Пусть дана функция $y=f(x)$ на промежутке $[x_0;x_0+\varepsilon]$ и существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$.

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Зафиксируем некоторое число $x\in[x_0;x_0+\varepsilon]$ и, заменив постоянную x_0 на переменную z, составим вспомогательную функцию

$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$. Очевидно, что $\varphi(x_0)=r_n(x)$, $\varphi(x)=0$. Кроме того,

$$\varphi'(z)=-f'(z)-\left(\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-\frac{f'(z)}{1!}\right)-\left(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right)-\ldots=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Пусть $\psi(z)$ - некоторая функция, непрерывная на промежутке $[x_0;x]$ и такая, что на этом промежутке $\psi'(z)\neq 0$. Тогда по теореме Коши найдется число $c\in(x_0;x)$ такое, что

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}.$$

Следовательно, $\dfrac{0-r_n(x)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\dfrac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^n}{\psi'(c)}$, откуда:

$r_n(x)=\dfrac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$. Различным образом выбирая функцию $\psi(z)$, можно получать различные формы остатка. В частности, если $\psi(z)=(x-z)^{n+1}$, получим $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ - *остаток в форме Лагранжа.*

M26.5.9 Определение. Две функции назовем эквивалентными в точке x_0 если их значения и значения всех их производных совпадают в какой-либо окрестности этой точки. *Ростком функций* в точке x_0 назовем множество всех функций, эквивалентных в этой точке.

M26.5.10 *Замечание.* Если две функции одного ростка допускают разложение в ряд Тейлора в точке x_0, то их ряды Тейлора одинаковы.

26.6 Вычисления с помощью формулы Тейлора

Пользуясь формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа можно вычислять приближенные значения различных функций с заданной точностью

M26.6.1 Пример 1: вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $0{,}01$

Решение: поскольку $\sqrt{e} = e^{0,5}$ и $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, то

$\sqrt{e} = 1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2!} + \frac{(0,5)^3}{3!} + ... + \frac{(0,5)^n}{n!} + r_n(x)$. Нужно подобрать число n так, чтобы $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^n = \frac{e^c}{(n+1)!}(0,5 - 0)^n = \frac{e^c}{2^n (n+1)!} < 0,01$, где $c \in (0;0,5)$. Поскольку функция $y = e^x$ возрастающая, то

$\frac{e^c}{2^n (n+1)!} \le \frac{e^{0,5}}{2^n (n+1)!} < \frac{e}{2^n (n+1)!} < \frac{4}{2^n (n+1)!}$ и будем подбирать n из неравенства $\frac{4}{2^n (n+1)!} < 0,01$.

При $n = 4$ получим $\frac{4}{2^4 (4+1)!} = \frac{1}{4 \cdot 120} < 0,01$, значит, $\sqrt{e} \approx 1 + 0,5 + \frac{(0,5)^2}{2} + \frac{(0,5)^3}{6} + \frac{(0,5)^4}{24}$ с заданной точностью

$\sqrt{e} \approx 1,5 + 0,125 + 0,02083 + 0,0026 = 1,65$

M26.6.2 Пример 2. Вычислить $\sin 0,1$ с точностью $0,000001$

Решение: $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$

$$\sin 0,1 = 0,1 - \frac{1}{3!}(0,1)^3 + \frac{1}{5!}(0,1)^5 - \ldots$$

Заметим, что в знакочередующемся ряду остаток ряда по модулю не превосходит его первого слагаемого (этот факт отмечался в доказательстве признака Лейбница сходимости рядов.

$\frac{1}{5!}(0,1)^5 = \frac{1}{120 \cdot 10^5} = \frac{1}{12000000} < 0,000001$, поэтому

$$\sin 0,1 \approx 0,1 - \frac{1}{3!}(0,1)^3 \approx 0,1 - 0,00017 = 0,09983$$

M26.6.3 Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

Решение: поскольку $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - o(x^5)$, $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - o(x^5)$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}.$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется функциональным рядом? В каком случае функциональный ряд задает некоторую функцию?
2. Что называется степенным рядом? Сформулируйте теорему Абеля об интервале сходимости.
3. Сформулируйте алгоритм метода Даламбера для нахождения интервала сходимости степенного ряда.
4. Что называется формулой Тейлора для многочлена? Сформулируйте теорему о порядке приближения функции многочленами.

5. Что называется рядом Тейлора заданной функции? Что называется рядом Маклорена заданной функции? Что называется остатком ряда Тейлора?
6. Запишите ряды Маклорена для экспоненты, синуса, косинуса, логарифма и степенной функции. Запишите формулу остатка в форме Лагранжа ряда Тейлора.