Лекция 17 Построение графиков функций

17.1 Определение выпуклости вниз и выпуклости вверх

М17.1.1 Определение. Функция $f:(a;b)\to R$, определенная на интервале $(a;b)$ называется *выпуклой вниз* на этом интервале, если для любых точек $x_1\in(a;b)$, $x_2\in(a;b)$ и любых чисел $\alpha_1\ge 0,\alpha_2\ge 0$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, верно неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$.

М17.1.2 *Замечание.* С геометрической точки зрения неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$ означает, что на интервале $(x_1;x_2)$ график функции $f(x)$ лежит не выше отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1;f(x_1))$ и $M_2(x_2;f(x_2))$ на графике функции.

М17.1.3 Определение. Функция $f:(a;b)\to R$, определенная на интервале $(a;b)$ называется *выпуклой вверх* на этом интервале, если для любых точек $x_1\in(a;b)$, $x_2\in(a;b)$ и любых чисел $\alpha_1\ge 0,\alpha_2\ge 0$ таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, верно неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\ge\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$.

М17.1.4 *Замечание 1.* С геометрической точки зрения неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\ge\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$ означает, что на интервале $(x_1;x_2)$ график функции $f(x)$ лежит не ниже отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1;f(x_1))$ и $M_2(x_2;f(x_2))$ на графике функции.

М17.1.4 *Замечание 2.* Если функция $f(x)$ одновременно выпукла вверх и выпукла вниз, то выполняется равенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$, означающее, что функция $f(x)$ линейна (и, значит, ее графиком является прямая).

М17.1.5 *Замечание 3.* Возможно другое равносильное определение выпуклости вниз: для любых трех точек $x_1<x<x_2$ из промежутка $(a;b)$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. (Для выпуклой вверх функции, соответственно, $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;b)$ и $x_1<x_2$. Обозначим $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$, тогда из равенства $\alpha_1+\alpha_2=1$ следует $\alpha_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $\alpha_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$ запишется в виде $f(x)\le\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$. Поскольку $x_1<x<x_2$, то умножив последнее неравенство на x_2-x_1, получим $-(x_2-x_1)f(x)+(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)\ge 0$.

$$-((x_2-x_1)+(x-x_1))f(x)+(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)\ge 0;\ \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

17.2 Выпуклость дифференцируемых функций

M17.2.1 Теорема (Аналитический признак выпуклости) Пусть функция $f(x)$ имеет производную на интервале $(a;b)$, тогда: 1) для выпуклости функции вниз необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ на интервале $(a;b)$ была неубывающей функцией. 2) для выпуклости функции вверх необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ на интервале $(a;b)$ была невозрастающей функцией.

Доказательство. 1) а) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;b)$ и $x_1 < x_2$.

Устремив $x \to x_1$ в неравенстве $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, в силу дифференцируемости функции $f(x)$, получим $f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. А устремив $x \to x_2$ в том же неравенстве, получим $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$. Из двойного неравенства $f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$ следует неубывание производной $f'(x)$ на интервале $(a;b)$.

б) Пусть производная $f'(x)$ на интервале $(a;b)$ является неубывающей функцией Для точек $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$, $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$, где $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$. Из неубывания производной следует, что $f'(c_1) \le f'(c_2)$, то есть $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, что и требовалось.

2) Доказывается аналогично.

M17.2.2 *Следствие.* Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$, тогда: 1) для выпуклости функции вниз необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ на интервале $(a;b)$ была неотрицательной $(f''(x) \ge 0)$. 2) для выпуклости функции вверх необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ на интервале $(a;b)$ была неположительной $(f''(x) \le 0)$.

M17.2.3 Теорема (Выпуклость и касательные) Пусть функция $f(x)$ имеет производную на интервале $(a;b)$, тогда: 1) для выпуклости функции вниз необходимо и достаточно, чтобы график функции лежал не ниже касательной, проведенной к нему в любой точке интервала $(a;b)$. 2) для выпуклости функции вверх необходимо и достаточно, чтобы график функции лежал не выше касательной, проведенной к нему в любой точке интервала $(a;b)$.

Доказательство. 1) а) Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим разность $f(x) - y$ (надо показать, что она неотрицательна). $f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где

c - точка между x и x_0. Значит, $f(x) - y = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$. Функция $f'(x)$ не убывает на $(a;b)$, значит, разности $x - x_0$ и $f'(c) - f'(x_0)$ имеют один знак (обе положительны или обе отрицательны). Следовательно, $f(x) - y = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) \ge 0$, что и требовалось.

б) Пусть для любых двух точек x и x_0 из интервала $(a;b)$ имеет место неравенство $f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \ge 0$. Тогда при $x < x_0$ получим $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0)$, а при $x > x_0$ получим $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0)$. Таким образом, для любых трех точек $x_1, x, x_2 \in (a;b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$ получим $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, что и требовалось.

17.2.4. *Замечание.* Выпуклость вверх или вниз никак не связана с монотонностью функции. Существуют возрастающие выпуклые вверх $(f(x) = \ln x)$ и возрастающие выпуклые вниз $(f(x) = e^x)$ функции. Также существуют убывающие выпуклые вверх и убывающие выпуклые вниз функции.

17.3 Точки перегиба

М17.3.1 Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции, если при переходе через эту точку функция меняет характер выпуклости.

М17.3.2 *Замечание.* Из определения М17.3.1 и следствия М17.2.2 вытекает, что если функция $f(x)$ имеет вторую производную в точке перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$. Более точно: перегибы графика функции могут быть только в тех точках, где вторая производная функции не существует или равна нулю.

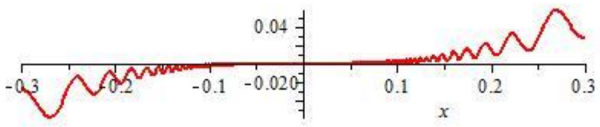


График функции $y = 2x^3 + x^3 \sin\frac{1}{x^2}$

М17.3.3 *Замечание.* Из определения М17.3.1 и теоремы М17.2.3 следует, что при переходе через точку перегиба график функции переходит с одной стороны касательной не другую. Однако, переход с одной стороны касательной на другую, являясь необходимым признаком точки перегиба, достаточным признаком не является.

М17.3.4 Пример. Для функции $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^3 \sin\frac{1}{x^2} & при \ x \ne 0 \\ 0 \ при \ x = 0 \end{cases}$ выполняются неравенства $x^3 \le f(x) \le 2x^3$ при $x \ge 0$ и $2x^3 \le f(x) \le x^3$ при $x \le 0$. Значит, график этой функции касается оси абсцисс в начале координат и переходит в этой точке из нижней полуплоскости в верхнюю.

Однако, точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба, поскольку производная $f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 3x^2 \sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2} \ \ при \ \ x \neq 0 \\ 0 \ \ при \ \ x = 0 \end{cases}$ не монотонна ни в каком промежутке $(-\varepsilon;\ 0)$ или $(0;\varepsilon)$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

17.4 Неравенство Иенсена

M17.4.1 Теорема (Неравенство Иенсена) 1) Если функция $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ выпукла вниз, то для любых точек $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ и любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ выполняется неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$; 2) Если функция $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ выпукла вверх, то для любых точек $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ и любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ выполняется неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$.

Доказательство. 1) Докажем по индукции. При $n = 2$ неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ верно, так как совпадает с определением M17.1.1. Пусть среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, например, $\alpha_n \neq 0$ (при необходимости эти числа можно перенумеровать так, чтобы последнее было строго положительным). Положим $\alpha_2 + ... + \alpha_n = \alpha$, тогда $\frac{\alpha_2}{\alpha} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} = 1$. Тогда, поскольку $\alpha_1 + \alpha = 1$ и $\frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n \in (a;\ b)$, имеем:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right)\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right). (*)$$

По предположению индукции $f\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha} f(x_n)$/ (**). Тогда из (*) и (**) следует $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$, что и требовалось.

2) Аналогично.

M17.4.2 Пример (среднее арифметическое и среднее геометрическое).

Рассмотрим вторую производную функции $y = \ln x$: $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Значит (M17.2.2), функция $y = \ln x$ строго выпукла вверх и для нее справедливо неравенство $\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) + ... + \alpha_n \ln(x_n)$. Потенцируя, получаем $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$. Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, получим

$\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Таким образом, среднее арифметическое любых неотрицательных чисел всегда не меньше их среднего геометрического.

17.5 Асимптоты графика функции

М17.5.1 Определение. Прямая линия называется *асимптотой* графика функции, если по мере удаления от начала координат расстояние от точки графика до этой прямой стремится к нулю.

Пусть функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 и хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен ∞ или $-\infty$. Тогда возле этой точки график будет бесконечно приближаться к вертикальной прямой $x = x_0$, устремляясь в бесконечность. Таким образом, чтобы найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x)$, необходимо и достаточно найти точки разрыва этой функции и посчитать в них односторонние пределы.

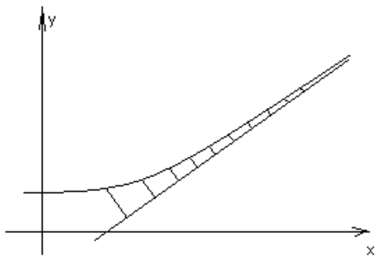


Рис. 69 Асимптота графика функции

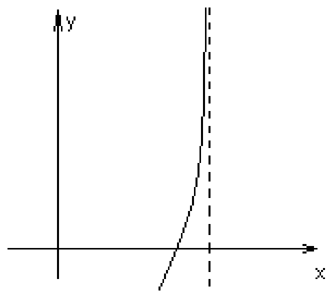


Рис. 70 Вертикальная асимптота графика функции

М17.5.2 Любая не вертикальная прямая может быть задана уравнением вида $Y = ax + b$. Предположим, что график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $Y = ax + b$ при $x \to \infty$. Если расстояние от точки графика до асимптоты стремится к нулю, то к нулю стремится и величина $|Y - y|$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}(y - ax - b) = 0$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{DB + BC}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Y + BC}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax + b}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{BC}{x} = a$.

Значит, если указанная асимптота существует, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$. Допустим, что асимптота существует и число a найдено, тогда из равенства $\lim\limits_{x\to\infty}(y - ax - b) = 0$ следует, что $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - ax)$. Таким образом, чтобы найти не вертикальные асимптоты графика функции $f(x)$, необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен ∞ или $-\infty$, то асимптоты нет. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$, то надо вычислять предел $\lim\limits_{x\to\infty}(y - ax)$ и если этот предел не существует или равен $\pm\infty$, то асимптоты нет. Если же $\lim\limits_{x\to\infty}(y - ax) = b$, то асимптота есть и задается уравнением $y = ax + b$.

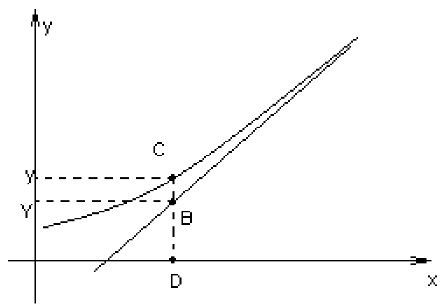


Рис. 71 Наклонная асимптота графика функции

Пример. Найти все асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

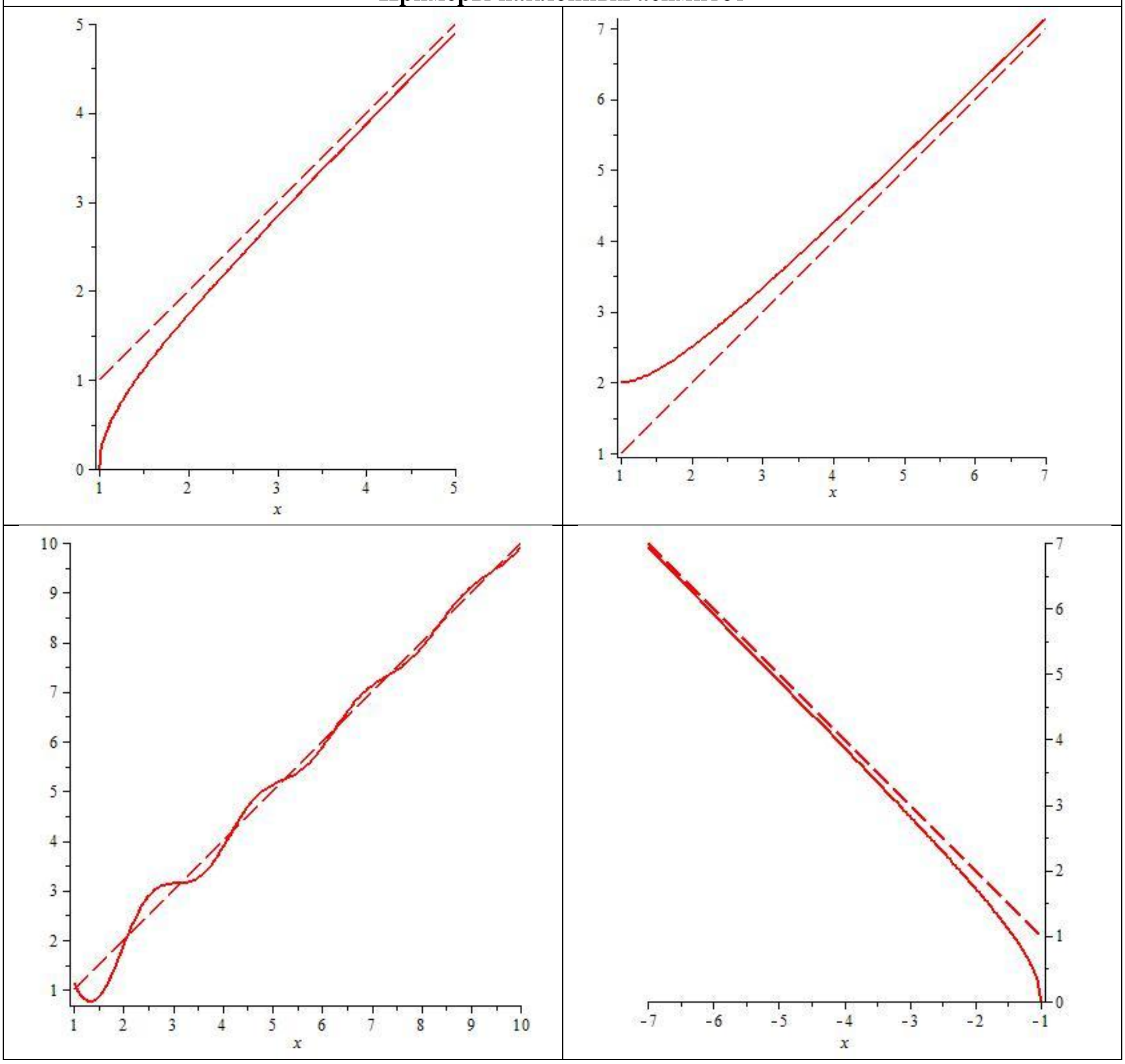
1) вертикальные асимптоты
   функция имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$. В этой точке оба односторонних предела бесконечны, значит, график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

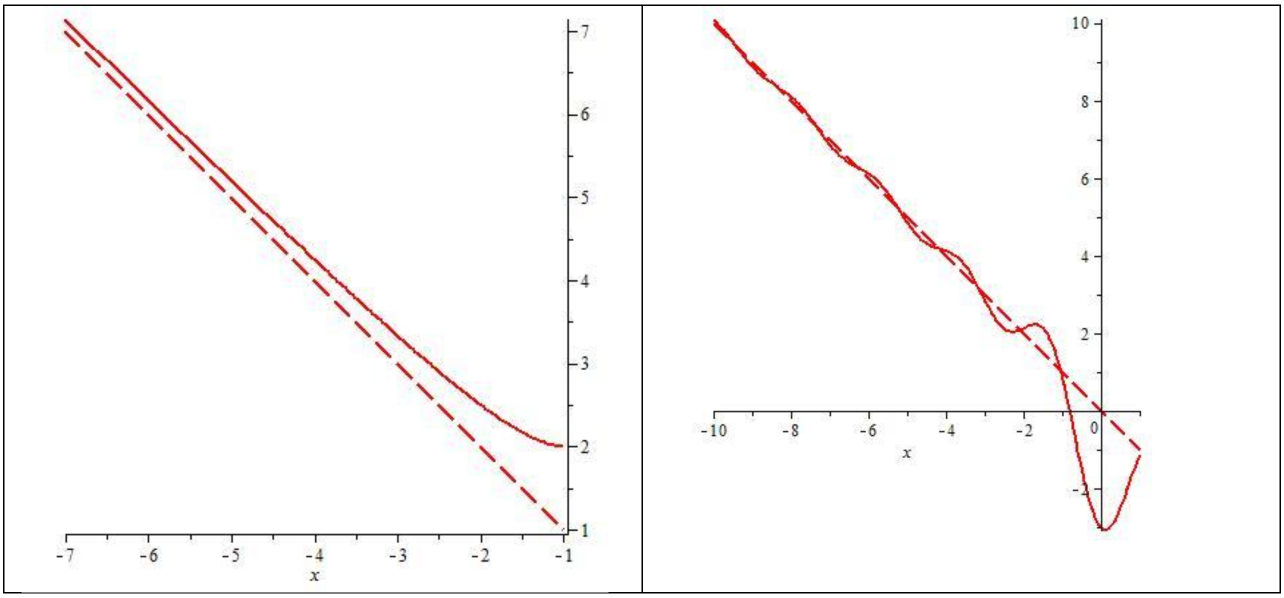
2) Наклонная асимптота при $x \to \infty$ $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Уравнение наклонной асимптоты при $x \to \infty$: $y = x$.

3) Наклонная асимптота при $x \to -\infty$ $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Уравнение наклонной асимптоты при $x \to -\infty$: $y = x$.

Примеры наклонных асимптот





При построении графика функции можно придерживаться следующего алгоритма:

1) Найти область определения функции и вычислить односторонние пределы на концах промежутков области определения
2) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3) Найти промежутки возрастания и убывания функции и точки ее локальных экстремумов
4) Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции и ее точки перегиба
5) Найти асимптоты графика функции
6) Вычислить значения функции в точках экстремумов и точках перегиба и отметить их в системе координат
7) Построить график функции

17.6 Пример полного исследования гладкой функции и построение графика

Пусть дана функция $y = f(x) = 6x^2e^{-x^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Выполняем первый этап исследования свойств и поведения функции без использования производной.

1.1. Исследуем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

1.1.1. Определяем непрерывность функции: устанавливаем наличие точек и интервалов разрыва, интервалы непрерывности и область естественного существования функции.

Функция $y = 6x^2e^{-x^2}$ принимает конечные значения при любом значении аргумента x из множества действительных чисел $x \in (x \in R)$. Поэтому область существования представляет собой неограниченный интервал $D(f) = (-\infty, \infty)$.

1.1.2. Проверяем симметричность (четность-нечетность) функции.

Функция является четной, т.к. $f(-x) = 6(-x)^2e^{-(-x)^2} = x^2e^{-x^2} = f(x)$. Вследствие четности функция имеет вертикальную ось симметрии Oy , и исследование функции далее можно проводить при $x \geq 0$ (в полубесконечном интервале $[0, \infty)$).

1.1.3. Функция не является периодической, т.к. $f(x) = f(x+T)$ только при $T = 0$.

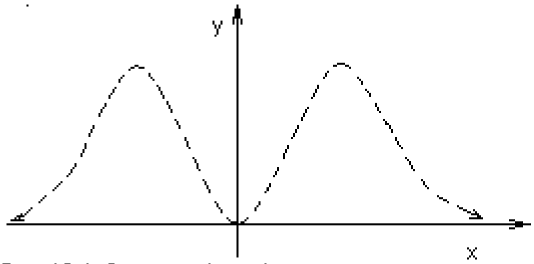


Рис. 10.4. Эскиз графика функции

1.2. Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Точки пересечения графика функции с осью Ox называют нулями (нулевыми точками) функции.

$y = 6x^2e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, таким образом, функция касается оси Ox в начале координат $(0, 0)$ и пересекает ось Oy в той же точке.

1.3. Определяем интервалы знакопостоянства функции. Проверку проводим при $x \geq 0$ методом пробных точек. При $x_{пр} = 1$ имеем $y(1) = 6 \cdot 1^2 \cdot e^{-1^2} = \frac{6}{e} \approx 2{,}752$. Таким образом, правая часть графика функции лежит над осью Ox. Аналогично и левая часть графика, в силу симметричности, лежит над осью Ox. Интервал знакопостоянства единственен и совпадает с интервалом непрерывности $(-\infty, \infty)$.

1.4. Определяем наличие асимптот. Вертикальных асимптот нет, т.к. функция не имеет точек разрыва. Проверяем наличие наклонных и горизонтальных асимптот при $x \to \infty$. Пусть уравнение асимптоты - $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{12x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^{x^2}} = 0.$$

При $x \to \infty$ имеется горизонтальная асимптота $y = 0$. Значит, в силу четности, та же прямая является асимптотой и при $x \to -\infty$. Поскольку $y = 6x^2e^{-x^2} \geq 0$ при любом значении x, то все числовые значения функции лежат над асимптотой.

1.5. Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа (рис. 10.4.):

- график симметричен относительно оси Oy и не имеет точек разрыва;

- ось Ox является горизонтальной асимптотой и график находится над асимптотой;

- нуль функции имеет место при $x = 0$;

2. Выполняем второй этап исследования свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода:

$y' = (6x^2e^{-x^2})' = 6 \cdot 2xe^{-x^2} + 6x^2(-2x)e^{-x^2} = 12(x - x^3)e^{-x^2}$, при $y' = 0$ имеем $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Для правой части графика имеем две критические точки первого рода $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(1,\ \frac{6}{e}\right)$.

2.2. Находим критические точки второго рода: $y'' = \left(2(x - x^3)e^{-x^2}\right)' = 12(1 - 3x^2)e^{-x^2} + (x - x^3)(-2x)e^{-x^2} = 12e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4)$;
$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}; x_4 \approx -1{,}51;\ x_5 \approx -0{,}468;\ x_6 \approx 0{,}468;\ x_7 \approx 1{,}51.$

В правой части графика функции (при $x \geq 0$) имеем две критические точки второго рода $M_3(0{,}468,\ 1{,}635)$, $M_2(1{,}51,\ 1{,}4)$.

2.3. Составляем сводную таблицу результатов для правой части графика функции:

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
x =0	**0**	0	+	**Нуль функции**, критическая точка первого рода - минимум
(0; 0,468)	+	+	+	Возрастает, выпукла вниз
x = 0,468	1,635		0	Критическая точка второго рода - перегиб
(0,468; 1)	+	+	-	Возрастает, выпукла вверх
x = 1	2,752	0	-	Критическая точка первого рода - максимум
(1; 1,51)	+	-	-	Убывает, выпукла вверх
x=1,51	1,4		0	Критическая точка второго рода – точка перегиба
$(1{,}51;\ \infty)$	+	-	+	Убывает, выпукла вниз

Замечание: данные, выделенные жирным шрифтом, указаны по результатам первого этапа, подчеркнутые данные приведены по результатам 2.1., 2.2. Остальные данные заполняются по результатам 2.4. – 2.7.

В первом столбце приведены характерные точки графика и интервалы, разделенные этими точками.

2.4. Определяем интервалы монотонности, выпуклости и вогнутости методом пробных точек в интервалах, указанных в сводной таблице.

Интервал $x \in (0;\ 0,468)$: $x_{пр} = 0,1$; $y'(0,1) = 12(0,1 - 0,1^3)e^{-0,1^2} > 0$ - функция возрастает;

$y''(0,1) = 12e^{-0,1^2}(1 - 5(0,1)^2 + 2(0,1)^4) > 0$ - функция выпукла вниз.

Интервал $x \in (0,468;\ 1)$: $x_{пр} = 0,6$; $y'(0,6) = 12(0,6 - 0,6^3)e^{-0,6^2} > 0$ - функция возрастает;

$y''(0,6) = 12e^{-0,6^2}(1 - 5(0,6)^2 + 2(0,6)^4) < 0$ - функция выпукла вверх.

Интервал $x \in (1;\ 1,51)$: $x_{пр} = 1,2$; $y'(1,2) = 12(1,2 - 1,2^3)e^{-1,2^2} < 0$ - функция убывает;

$y''(1,2) = 12e^{-1,2^2}(1 - 5(1,2)^2 + 2(1,2)^4) < 0$ - функция выпукла вверх.

Интервал $x \in (1,51;\ \infty)$: $x_{пр} = 2$; $y'(2) = 12(2 - 2^3)e^{-2^2} < 0$ - функция убывает;

$y''(2) = 12e^{-2^2}(1 - 5(2)^2 + 2(2)^4) > 0$ - функция выпукла вниз.

Полученные данные вносим в таблицу.

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках.

Указанные точки являются точками стационарности, поэтому можно использовать любое из двух достаточных условий экстремума. Применим первое достаточное условие экстремума:

Точка стационарности $x = 0$: $\begin{cases} y'(x<0) < 0 \\ y'(x>0) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ минимум

Точка стационарности $x = 1$: $\begin{cases} y'(x<1) > 0 \\ y'(x>1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ максимум.

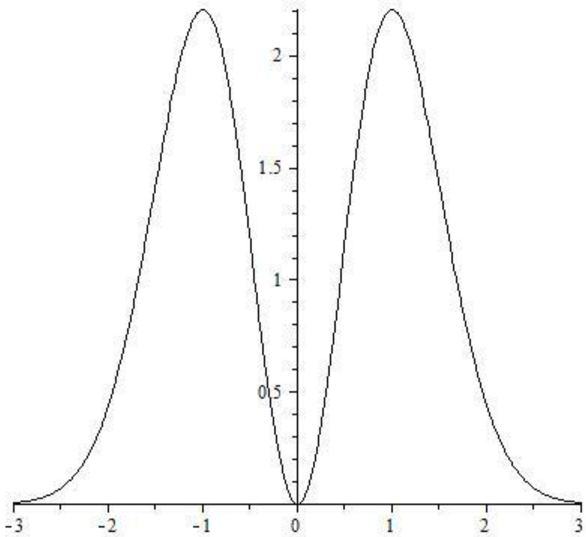


Рис. 10.5. График функции $y=6x^2e^{-x^2}$

Функция является гладкой (имеет первую и вторую производную), поэтому для проверки используем второе достаточное условие экстремума.

Проверка: При $x = 0$: $y''(0) > 0$ - минимум; при $x = 1$: $y''(1) < 0$ - максимум.

2.6. Определим возможные точки перегиба среди критических точек второго рода.

Точка $x \approx 0,468$: при $x_{пр} = 0,1 < 0,468$ получим $f''(0,1) > 0$,

при $x_{пр} = 0,6 > 0,468$ получим $f''(0,6) < 0 \Rightarrow$ перегиб.

Точка $x \approx 1,51$: при $x_{пр} = 1,2 < 1,51$ получим $f''(1,2) < 0$,

при $x_{пр} = 2 > 1,51$ получим $f''(0,6) > 0 \Rightarrow$ перегиб.

2. По данным сводной таблицы и эскизу графика строим график функции на всей области существования, используя его симметричность относительно оси Oy.

17.7 Пример полного исследования функции с особой точкой и построение графика

Пусть дана функция $y = f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Первый этап – исследование без использования производных.

Исследуем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

Функция непрерывна в интервале $(-\infty, \infty)$, так как не имеет точек и интервалов разрыва. Область естественного существования функции включает один интервал непрерывности $D(f) = (-\infty, \infty)$.

Функция несимметрична относительно оси Oy и начала координат, т.е. не является ни четной, ни нечетной: $f(-x) = -x - \sqrt[3]{(-x)^2} = -x - \sqrt[3]{x^2} \neq \pm f(x)$.

Функция не является периодической: $f(x) \neq f(x+T)$ при $T \neq 0$. Таким образом, функция непрерывна, несимметрична и непериодична, поэтому должна исследоваться на на всем интервале непрерывности.

Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Определяем нули функции: $x - \sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1$. Таким образом, функция касается оси Ox в начале координат и пересекает эту ось в точке $x = 1$. Ось Oy функция пересекает в точке $x = 0$. Точки $x = 0$ и $x = 1$ являются нулями функции.

Определяем интервалы знакопостоянства функции. Интервал непрерывности делится нулями функции на три интервала знакопостоянства $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. Определяем знаки функции в указанных интервалах методом пробных точек.

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{пр} = -1 \Rightarrow y(-1) = -2 < 0$;

Интервал $(0,1)$: $x_{пр} = 0{,}1 \Rightarrow y(0{,}1) = 0{,}1 - \sqrt[3]{0{,}01} < 0$;

Интервал $(1,\infty)$: $x_{пр} = 2 \Rightarrow y(2) = 2 - \sqrt[3]{4} > 0$.

Определяем наличие асимптот, а при их наличии исследуем асимптотическое поведение функции.

Функция непрерывна в области своего существования, поэтому вертикальные асимптоты отсутствуют. Определяем наличие наклонных и горизонтальных асимптот.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = \infty.$$

График не имеет наклонных и горизонтальных асимптот.

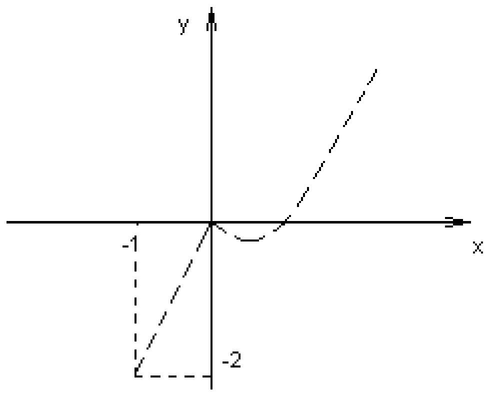


Рис. 10.6. Эскиз графика функции

Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа(Рис.10.6):

- функция общего вида не имеет точек разрыва и асимптот;

- нули функции имеют место при $x = 0$ и $x = 1$;

- в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0,1)$ функция отрицательна, в интервале $(1,\infty)$ - положительна;

- в пробной точке $x=-1$ значение функции $y(-1)=2$.

2. Исследование свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода:

$y' = \left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)' = 1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$. При $x=0$ производная $y'(0)$ не существует (правая производная равна $-\infty$, а левая ∞). При $1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=0$ получим $x=\dfrac{8}{27}$, $y\left(\dfrac{8}{27}\right)=-\dfrac{4}{27}$.

Имеется две критические точки первого рода, из которых первая $(x=0)$ является особой, а вторая $\left(x=\dfrac{8}{27}\right)$ - стационарной точкой.

2.2. Находим критические точки второго рода:

$y'' = \left(1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right)' = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}} \neq 0$, поэтому, имеется одна критическая точка второго рода - $x=0$.

2.3. Составляем сводную таблицу результатов, необходимых для построения графика

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
$(-\infty,0)$	-	+	+	Возрастает, выпукла вниз
$x=0$	0	Не существует	Не существует	Нуль функции, критическая точка первого рода – максимум, критическая точка второго рода – перегиба нет
$\left(0,\dfrac{8}{27}\right)$	-	-	+	Убывает, выпукла вниз
$x=\dfrac{8}{27}$	$-\dfrac{4}{27}$	0	+	Критическая точка первого рода - минимум
$\left(\dfrac{8}{27},1\right)$	-	+	+	Возрастает, выпукла вниз
$x=1$	0			Нуль функции
$(1,\infty)$	+	+	+	Возрастает,

				выпукла вниз

2.4. Определяем характер монотонности и выпуклости в интервалах, приведенных в сводной таблице:

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{пр} = -1$, $y'(-1) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{-1}} > 0$, функция возрастает;

$y''(-1) = \dfrac{2}{9(-1)\sqrt[3]{-1}} > 0$, функция выпукла вниз.

Интервал $\left(0, \dfrac{8}{27}\right)$: $x_{пр} = 0{,}1$, $y'(0{,}1) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{0{,}1}} < 0$, функция убывает;

$y''(0{,}1) = \dfrac{2}{9 \cdot 0{,}1\sqrt[3]{0{,}1}} > 0$, функция выпукла вниз.

Интервал $\left(\dfrac{8}{27}, 1\right)$: $x_{пр} = 0{,}5$, $y'(0{,}5) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{0{,}5}} > 0$, функция возрастает;

$y''(0{,}5) = \dfrac{2}{9 \cdot 0{,}5\sqrt[3]{0{,}5}} > 0$, функция выпукла вниз.

Интервал $(1, \infty)$: $x_{пр} = 2$, $y'(2) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{2}} > 0$, функция возрастает;

$y''(2) = \dfrac{2}{9 \cdot 2\sqrt[3]{2}} > 0$, функция выпукла вниз.

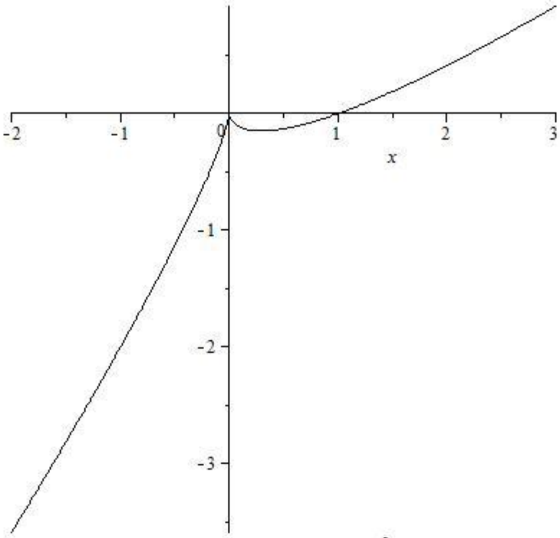


Рис. 10.7. График функции $y = x - \sqrt[3]{x^2}$

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках первого рода. В особой точке $x = 0$ возможен «острый» экстремум. Проверим это, используя первое достаточное условие наличия экстремума:

$$\begin{cases} x_{пр} = -1 < 0, \ y'(-1) > 0 \\ x_{пр} = 0{,}1 > 0, \ y'(0{,}1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$ в точке $x = 0$ - максимум.

Критическая точка первого рода $x = \dfrac{8}{27}$ является точкой стационарности. Используем первый способ определения экстремума:

$$\begin{cases} x_{пр} = 0{,}1 < \dfrac{8}{27}, \ y'(0{,}1) < 0 \\ x_{пр} = 0{,}5 > \dfrac{8}{27}, \ y'(0{,}5) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$ в точке $x = 0$ - минимум.

В точке $x = \dfrac{8}{27}$ функция гладкая, поэтому для проверки используем второе достаточное условие наличия экстремума.

Проверка: при $x = \dfrac{8}{27}$ имеем $y''\left(\dfrac{8}{27}\right) = \dfrac{2}{9 \cdot \frac{8}{27}\sqrt[3]{\frac{8}{27}}} > 0$ - минимум.

2.6. Определяем, является ли критическая точка второго рода точкой перегиба.

$$\begin{cases} x_{пр} = -1 < 0, \; y''(-1) > 0 \\ x_{пр} = 0{,}1 > 0, \; y'(0{,}1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ в точке } x = 0 \text{ перегиба нет.}$$

2.7. По данным сводной таблицы и эскизу графика функции строим график (Рис.10.7).

17.7 Пример полного исследования разрывной функции и построение графика

Дана функция $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Исследование без использования производных

Анализируем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

Функция определена на всей числовой за исключением точки $x = 1$, являющейся точкой разрыва второго рода $(y(1) = \infty)$. Область естественного существования функции состоит из двух интервалов непрерывности $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Функция несимметрична относительно оси Oy и начала координат, т.к. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{(x+1)^2} \neq \pm f(x)$.

Функция не является периодической (это следует, например, из того, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, т.е. поведение функции на бесконечности не повторяется)

Таким образом, имеем функцию общего вида с одной точкой разрыва. Из-за общего характера функции ее необходимо исследовать во всех точках интервалов непрерывности.

Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Сначала определяем нули функции из уравнения $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ при $x = 0$. Ось Oy функция пересекает при $x = 0$, точка $x = 0$ является нулем функции.

Определяем интервалы знакопостоянства функции. Интервал непрерывности $(-\infty, 1)$ делится нулем функции $x = 0$ на два интервала знакопостоянства $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$. Интервал знакопостоянства $(1, \infty)$ совпадает с интервалом непрерывности. Определим знаки функции в указанных интервалах:

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{пр} = -1$, $y(-1) = \dfrac{(-1)^3}{(-1-1)^2} = -\dfrac{1}{4} < 0$;

Интервал $(0, 1)$: $x_{пр} = 0{,}5$, $y(0{,}5) = \dfrac{(0{,}5)^3}{(0{,}5-1)^2} = \dfrac{1}{2} > 0$;

Интервал $(1, \infty)$: $x_{пр} = 2$, $y(2) = \dfrac{(2)^3}{(2-1)^2} = 8 > 0$.

Определяем асимптотическое поведение функции в окрестности точки разрыва второго рода с помощью односторонних пределов. $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$. В окрестности точки разрыва $x = 1$ функция стремится к ∞ слева и справа. Значит, имеется вертикальная асимптота с уравнением $x = 1$.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

.

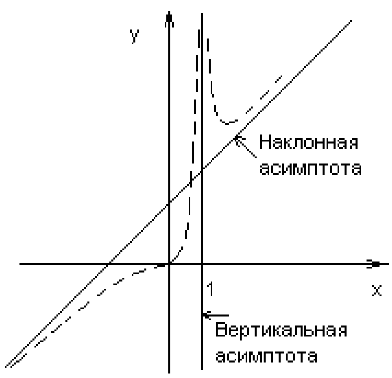


Рис. 10.8. Эскиз графика функции

Таким образом, как при $x \to \infty$, так и при $x \to -\infty$, имеет место наклонная асимптота $y = x + 2$. Определим характер приближения к асимптоте графика функции.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x - 2 \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2(x-1)} = +0$$

. При $x \to \infty$ график функции лежит выше наклонной асимптоты.

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x - 2 \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2(x-1)} = -0$$

. При $x \to -\infty$ график функции лежит ниже наклонной асимптоты.

Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа исследования (Рис.10.8):

- график имеет две ветви, разделенные вертикальной асимптотой $x = 1$; ветви возле асимптоты стремятся к $+\infty$ слева и справа;

- при $x \to -\infty$ ветвь графика стремится снизу к наклонной асимптоте $y = x + 2$; при $x \to \infty$ ветвь графика стремится к той же асимптоте сверху;

- нуль функции $y = 0$ имеет место при $x = 0$;

- в интервале $(-\infty, 0)$ функция отрицательна, а в интервалах $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ - положительна;

- известны координаты функции в пробных точках: $y(-1) = -\dfrac{1}{4}$, $y(0{,}5) = 0{,}5$, $y(2) = 8$;

2. Исследование свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода: $y' = \left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} \right)' = \ldots = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^2}$;

$\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 3$. Имеем две критические точки первого рода, являющиеся точками стационарности. Находим значения функции в этих точках: $y(0)=0$, $y(3)=\frac{3^3}{(3-1)^2}=6{,}75$; $M_1(0,\ 0)$, $M_2(3,\ 6{,}75)$.

2.2. Находим критические точки второго рода: $y''=\left(\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2}\right)'=\ldots=\frac{6x}{(x-1)^4}$;

$\frac{6x}{(x-1)^4}=0 \Rightarrow x=0$. Получили одну критическую точку второго рода $M_1(0,\ 0)$, которая совпадает с точкой стационарности.

2.3. Составим сводную таблицу результатов, необходимых для построения графика.

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
$(-\infty, 0)$	-	+	-	Отрицательна, возрастает, выпукла вверх
$x=0$	0	0	0	Нуль функции, критическая точка первого рода – экстремума нет, критическая точка второго рода – перегиб
$(0,\ 1)$	+	+	+	Положительна, возрастает, выпукла вниз
$x=1$				Точка разрыва второго рода
$(1,\ 3)$	+	-	+	Положительна, убывает, выпукла вниз
$x=3$	6,75	0	$\pm$	Критическая точка первого рода - минимум
$(3,\ \infty)$	+	+	+	Положительна, возрастает, выпукла вниз

2.4. Определяем характер монотонности и выпуклости функции в интервалах, приведенных в сводной таблице:

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{пр} = -0{,}5$, $y'(-0{,}5) > 0$, $y''(-0{,}5) < 0$ - функция возрастает и выпукла вверх;

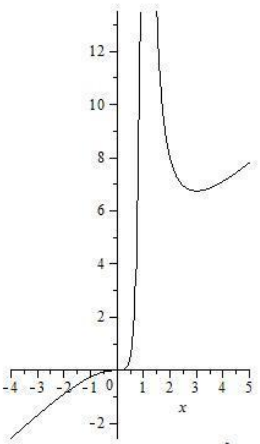


Рис.10.9. График функции $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

Интервал $(0, 1)$: $x_{пр} = 0{,}5$, $y'(0{,}5) > 0$, $y''(0{,}5) > 0$ - функция возрастает и выпукла вниз;

Интервал $(1, 3)$: $x_{пр} = 2$, $y'(2) < 0$, $y''(0{,}5) > 0$ - функция убывает и выпукла вниз;

Интервал $(3, \infty)$: $x_{пр} = 4$, $y'(4) > 0$, $y''(4) > 0$ - функция возрастает и выпукла вниз;

Заносим полученные результаты в сводную таблицу.

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках первого рода

Данные точки являются точками стационарности ($y' = 0$), поэтому можно использовать два достаточных условия экстремума. Согласно первому условию в окрестности точки $M_1(0, 0)$ первая производная не меняет свой знак $(y'(-0{,}5) > 0,\ y'(0{,}5) > 0)$, поэтому она не является точкой экстремума.

В окрестности точки $M_2(3, 6{,}75)$ первая производная меняет свой знак $(y'(2) < 0,\ y'(4) > 0)$ с плюса на минус, значит, в данной очке – минимум. Проверим это, используя второе достаточное условие экстремума: $y''(3) = \frac{6\cdot 3}{(3-1)} > 0$ - минимум.

2.6. Определяем, является ли критическая точка второго рода $M_1(0, 0)$ точкой перегиба.

В окрестности точки $x = 0$ вторая производная изменяет свой знак $(y''(-0{,}5) < 0,\ y'(0{,}5) > 0)$, значит, $M_1(0, 0)$ - точка перегиба.

2.7. По данным сводной таблицы и эскизу графика строим график функции (Рис.10.9).

Контрольные вопросы:

1. Приведите определения выпуклой вверх и выпуклой вниз функций. Сформулируйте аналитический признак выпуклости и следствие из него. Сформулируйте теорему о выпуклости и касательных.
2. Что называется точкой перегиба? Как аналитически найти точки перегиба функции?
3. Запишите неравенство Иенсена и неравенство для среднего геометрического и среднего арифметического.
4. Что называется асимптотой графика функции? Сформулируйте алгоритм поиска вертикальных асимптот. Сформулируйте алгоритм поиска наклонных и горизонтальных асимптот.
5. Сформулируйте алгоритм исследования функции и построения графика.