Лекция 8 Прямая и плоскость

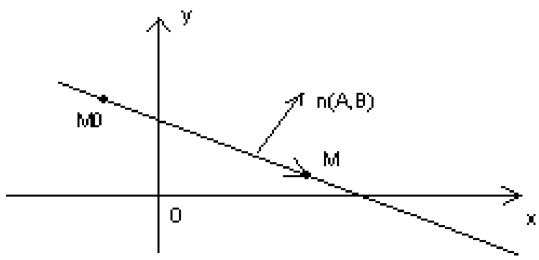
Пусть на плоскости задана ортонормированная (прямоугольная) система координат $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$. Ось абсцисс будем обозначать Ox, ось ординат - Oy.

8.1 Общее уравнение прямой

Г8.1.1 Теорема (об общем уравнении прямой на плоскости)

1) В прямоугольной системе координат любая прямая может быть задана уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C - некоторые действительные числа
2) Любое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C - действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$, задает на плоскости некоторую прямую.

Доказательство: 1) Пусть l - некоторая прямая на плоскости, $\vec{n} = (A, B)$ - некоторый вектор, перпендикулярный прямой l, $M_0(x_0, y_0)$ - некоторая точка на прямой l.



1) Пусть точка $M(x, y)$ лежит на прямой, тогда векторы $\vec{n} = (A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ взаимно перпендикулярны и, следовательно, их скалярное произведение равно 0: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Раскроем скобки: $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Обозначив $(-Ax_0 - By_0) = C$, получим утверждение теоремы.

2)Пусть в некоторой прямоугольной системе координат задано уравнение $Ax + By + C = 0$, удовлетворяющее условию $A^2 + B^2 \neq 0$. Условие это означает, сто коэффициенты A, B не могут быть оба равны 0. Поэтому обязательно найдется некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая уравнение $Ax_0 + By_0 + C = 0$ из уравнения $Ax + By + C = 0$, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Проведем через точку $M_0(x_0, y_0)$ прямую, перпендикулярную вектору $\vec{n} = (A, B)$, тогда в соответствии с частью 1) теоремы получим, что уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ задает некоторую прямую. *Теорема доказана*.

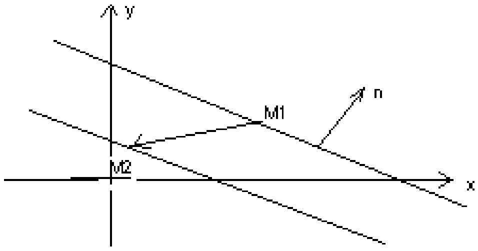
Г8.1.2 Определение: вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *нормальным вектором* прямой $Ax + By + C = 0$

Г8.1.3 Теорема (о совпадении прямых)

1) Разные прямые на плоскости задаются разными уравнениями
2) Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают на плоскости одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Доказательство: 1) рассмотрим на плоскости две различные прямые l_1 и l_2. Если эти прямые пересекаются, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ различны и их координаты не могут быть одинаковыми, т.е. прямые l_1 и l_2 задаются различными уравнениями.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то можно считать, что у них один и тот же нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$. Точка $M_1(x_1, y_1) \in l_1$ и $M_2(x_2, y_2) \in l_2$, тогда уравнение $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ задает первую прямую, а уравнение $A(x - x_2) + B(y - y_2) = 0$ - вторую прямую. Эти уравнения будут одинаковыми тогда и только тогда, когда $Ax_1 + By_1 = Ax_2 + By_2$, т.е. $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.



Тогда вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Но, поскольку точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на различных прямых, это невозможно. Значит, уравнения прямых l_1 и l_2 не могут быть одинаковыми.

2) а) Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тогда $A_2 = \alpha A_1$, $B_2 = \alpha B_1$, $C_2 = \alpha C_1$ и уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ можно записать в виде $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) = 0$, т.е. оно равносильно уравнению $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и, значит, задает ту же прямую.

б) пусть уравнения задают одну и ту же прямую, тогда их нормальные векторы должны быть коллинеарны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, т.е. $A_2 = \alpha A_1$, $B_2 = \alpha B_1$. Уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ можно записать в виде $\alpha A_1x + \alpha B_1y + C_2 = 0$. Умножим уравнение $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ на α и вычтем из уравнения $\alpha A_1x + \alpha B_1y + C_2 = 0$: $C_2 - \alpha C_1 = 0$, значит, и $C_2 = \alpha C_1$. *Теорема доказана.*

Г8.1.4 *Следствие.* Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают на плоскости параллельные прямые тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Г8.1.5 Теорема (частные случаи общего уравнения)

Пусть прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, тогда:

1) Если $A = 0$, то прямая параллельна оси ОХ
2) Если $B = 0$, то прямая параллельна оси ОУ
3) Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат

Доказательство: 1) Если $A = 0$, тогда нормальный вектор $\vec{n} = (0, B)$ параллелен оси ОУ, значит, он перпендикулярен оси ОХ и, значит, прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси ОХ

2)Если $B = 0$, то нормальный вектор $\vec{n} = (A, 0)$ параллелен оси ОХ и, следовательно, прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси ОУ.

3) Если $C = 0$, то уравнение прямой имеет вид $Ax + By = 0$ и координаты точки $O(0, 0)$ удовлетворяют этому уравнению. *Теорема доказана.*

8.2 Другие виды уравнения прямой

Г8.2.1 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ лежит на данной прямой.

Пусть некоторая точка $M(x, y)$ лежит на прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ также лежит на этой прямой и векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарны. Записанное для этих векторов условие коллинеарности

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

является уравнением прямой, проходящей через 2 данные точки.

Г8.2.2 Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ при условиях $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ и преобразуем его: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$, $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Обозначив $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b$, получим уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Поскольку при $x = 0$ из уравнения получаем $y = b$, а при $y = 0$ получим $x = a$, то числа a, b являются длинами отрезков, отсекаемыми прямой на осях координат, взятыми с соответствующим знаком.

Г8.2.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$, тогда $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Обозначим $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$: $\quad y = kx + b$.

Число k называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси ОХ**.**

8.3 Угол между прямыми

Г8.3.1 Угол φ между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами,

поэтому $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Тогда $\sin\varphi = \pm\sqrt{1 - \frac{(A_1A_2 - B_1B_2)^2}{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}} = \pm\sqrt{\frac{(B_1A_2 - B_2A_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$,

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \pm\sqrt{\frac{(B_1A_2 - B_2A_1)^2}{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}} : \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} =$$

$$= \pm\frac{|B_1A_2 - B_2A_1|}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

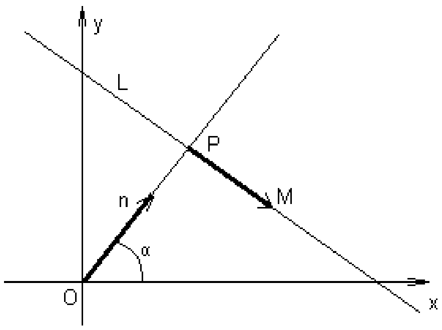
Поделив числитель и знаменатель полученной дроби на произведение B_1B_2, получим

$tg\varphi = \pm\frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1k_2}$, где k_1, k_2 - угловые коэффициенты рассматриваемых прямых.

Г8.3.2 *Следствие.* Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

8.4 Нормальное уравнение прямой

Г8.4.1 Рассмотрим некоторую прямую L в прямоугольной системе координат. Обозначим p - расстояние от начала координат до прямой L, α - угол между положительным направлением оси абсцисс и единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным прямой L и направленным от начала координат в сторону этой прямой (если прямая проходит через начало координат, то в любую из двух сторон). Пусть P - основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую L, тогда $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Точка $M(x, y)$ лежит на прямой L тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$ и $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ перпендикулярны, то есть $(x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0$. Получили уравнение



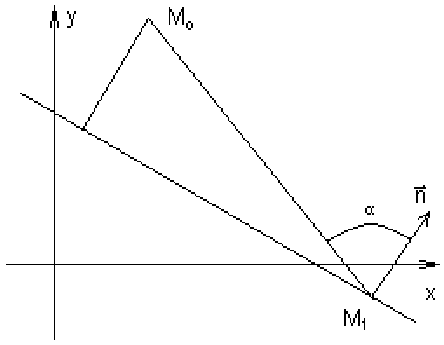
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

называемое *нормальным уравнением прямой*.

Г8.4.2 Пусть дано общее уравнение $Ax + By + C = 0$ прямой L и нормальное уравнение $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ той же прямой. Согласно теореме Г8.1.3, $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C} = D$, D - коэффициент пропорциональности уравнений. Тогда $\cos\alpha = AD,$ $\sin\alpha = BD,$ $A^2D^2 + B^2D^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и $D = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. поскольку $-p = CD$ и $p \geq 0$, то знак коэффициента D должен быть выбран противоположным знаку числа C. Таким образом, чтобы из общего уравнения прямой получить ее нормальное уравнение, надо умножить общее уравнение на $D = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, выбирая знак коэффициента D противоположным знаку числа C.

Г8.4.3 Теорема (Расстояние от точки до прямой) Если прямая L задана нормальным уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой равно

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$



Доказательство. Пусть $\vec{n}$ - единичный нормальный вектор прямой. Возьмем на данной прямой произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$. тогда $\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \cos\alpha$. Но $d = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \cos\alpha$ - это и есть расстояние от данной точки до данной прямой. $\left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right| = |(x_0 - x_1)\cos\alpha + (y_0 - y_1)\sin\alpha| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$, что и требовалось.

Г8.4.4 *Следствие.* Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ равно

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

8.5 Векторная и параметрическая запись уравнения прямой в пространстве

Г8.5.1 Определение. Вектор, коллинеарный данной прямой называется *направляющим вектором* этой прямой.

Г8.5.2 Определение. Радиус-вектором точки $M(x;y;z)$ называется вектор с началом в начале координат и концом в точке $M(x;y;z)$.

Замечание. Координаты радиус-вектора точки совпадают с координатами самой этой точки.

Г8.5.3 Пусть $\vec{l}(a;b;c)$ - направляющий вектор прямой L, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - какая-либо точка на этой прямой. Задание направляющего вектора и точки однозначно определяет прямую на плоскости. Точка $M(x;y;z)$ тогда и только тогда лежит на прямой L, когда

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{l}, \quad (*)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор текущей точки $M(x;y;z)$, $\vec{r}_0$ - радиус вектор фиксированной точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $\vec{l}(a;b;c)$ - направляющий вектор прямой, $t\in(-\infty;\infty)$ - переменная.

Уравнение (*) называется *векторным уравнением прямой* L.

Если расписать векторное уравнение покоординатно, получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \quad (**) \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

Г8.5.4 Пример 1. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1,z_1)$ и $M_2(x_2;y_2,z_2)$.

Решение. В качестве направляющего вектора $\vec{l}(a;b;c)$ можно взять $\vec{l}(x_2-x_1;y_2-y_1,z_2-z_1)$, значит, параметрические уравнения можно записать, например, в виде $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}$.

Г8.5.5 Пример 2. Даны две прямые: $\begin{cases} x=x_1+a_1t \\ y=y_1+b_1t \\ z=z_1+c_1t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=x_2+a_2t \\ y=y_2+b_2t \\ z=z_2+c_2t \end{cases}$. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы эти прямые: 1) скрещивались; 2) пересекались; 3) были параллельны; 4) совпадали.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{l}_1(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{l}_2(a_2;b_2;c_2)$ и $\vec{l}_3(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Если прямые параллельны или совпадают, то векторы $\vec{l}_1,\vec{l}_2$ коллинеарны. При этом, если коллинеарны все три вектора $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$, то прямые совпадают, если только два - $\vec{l}_1,\vec{l}_2$, то прямые параллельны. Таким образом, если векторы $\vec{l}_1,\vec{l}_2$ не коллинеарны, то прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Если прямые пересекаются, то они лежат в одной плоскости и векторы $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$ компланарны. Если векторы не компланарны – прямые скрещиваются.

В качестве конкретного примера рассмотрим прямые $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=4+3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=9+4t \\ y=11+5t \\ z=13+6t \end{cases}$. Здесь $\vec{l}_1(1;2;3)$, $\vec{l}_2(4;5;6)$, $\vec{l}_3(9-2;11-3;13-4)=(7;8;9)$. Начинаем с проверки коллинеарности векторов $\vec{l}_1,\vec{l}_2$: $\frac{1}{4}\neq\frac{2}{5}$, значит, эти векторы не коллинеарны и прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Проверяем компланарность векторов $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$; $\vec{l}_1\times\vec{l}_2\cdot\vec{l}_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0$. Векторы коллинеарны, значит, прямые пересекаются.

8.6 Канонические уравнения прямой в пространстве

Г8.6.1 Канонические уравнения прямой. Положение прямой в пространстве однозначно определяется ее направляющим вектором $\vec{l}(a;b;c)$ и какой-либо точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на этой прямой. Точка $M(x;y;z)$ будет лежать на прямой, определяемой вектором $\vec{l}(a;b;c)$ и точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и $\vec{l}(a;b;c)$ коллинеарны, то есть, когда выполнены условия

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad (***).$$

Уравнения (***) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Г8.6.2 *Замечание.* Пример Г8.5.5 дословно переносится на случай канонических уравнений $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$.

Г8.6.3 Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда направляющим вектором прямой, проходящей через эти точки является, например, $\vec{l}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ и канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

8.7 Виды уравнений плоскости в пространстве

Г8.7.1 Векторное уравнение плоскости. Любая плоскость однозначно определяется любой своей точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и приложенными к этой точке двумя неколлинеарными векторами $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ (*направляющими векторами плоскости*). В определяемой плоскости векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ будучи неколлинеарными, образуют базис. Значит, любой коллинеарный им вектор (параллельный определяемой плоскости) имеет вид $s\vec{u}_1+t\vec{u}_2$, где $s,t\in R$ - произвольные действительные числа. Таким образом, *векторное уравнение плоскости* имеет вид

$$\vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{u}_1+t\vec{u}_2,$$

где $\vec{r}=(x,y,z)$ - радиус-вектор текущей точки плоскости (соответствующий двум конкретным значениям параметров $s,t\in R$), $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ - радиус-вектор выбранной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Г8.7.2 Параметрические уравнения плоскости. Расписывая покоординатно векторное уравнение $\vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{u}_1+t\vec{u}_2$, получим *параметрические уравнения плоскости*

$$\begin{cases} x=x_0+sa_1+ta_2 \\ y=y_0+sb_1+tb_2 \\ z=z_0+sc_1+tc_2 \end{cases}.$$

Г8.7.3 Общее уравнение плоскости. Параметрические уравнения плоскости, записанные в виде $\begin{cases} x-x_0=sa_1+ta_2 \\ y-y_0=sb_1+tb_2 \\ z-z_0=sc_1+tc_2 \end{cases}$ выражают факт линейной зависимости векторов

$\overrightarrow{M_0M_1}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$, что, в свою очередь, равносильно равенству нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

Раскладывая определитель по первой строке, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (****),$$

где $A=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $B=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Раскрыв скобки в (****) и обозначив $-(Ax_0+By_0+Cz_0)=D$ получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Г8.7.4 Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Пусть заданы три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Составим уравнение плоскости, проходящей через эти три точки.

В качестве направляющих векторов плоскости можно взять $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$. Тогда, согласно Г9.3.3 уравнение плоскости получится из равенства

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

после раскрытия определителя.

Г8.7.5 *Замечание.* Если точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ будут коллинеарны. Следовательно, определитель $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ тождественно равен нулю и после его раскрытия мы не получим уравнения плоскости.

8.8 Частные случаи общего уравнения

Г8.8.1 Пусть в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ коэффициент $D=0$, то есть уравнение имеет вид $Ax+By+Cz=0$. Очевидно, что плоскость, заданная этим уравнением проходит через начало координат. Пусть в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ коэффициент $A=0$, но при этом $D\neq 0$. Уравнение имеет вид $By+Cz+D=0$, то есть не зависит от переменной x. Допустим, числа $y=y_0, z=z_0$ удовлетворяют уравнению $By+Cz+D=0$, тогда любая точка $M_0(x, y_0, z_0)$ лежит в плоскости $By+Cz+D=0$. Иными словами, плоскость параллельна оси OX (именно параллельна, а не содержит этой оси, так как $D\neq 0$). Аналогично, если $B=0$ и $D\neq 0$, то плоскость параллельна оси OY, а если $C=0$ и $D\neq 0$, то плоскость параллельна оси OZ.

Г8.8.2 Из Г8.8.1 следует, что если $A=0$, $D=0$, то плоскость содержит в себе ось OX, если $B=0$ и $D=0$, то плоскость содержит в себе ось OY , наконец, если $C=0$ и $D=0$, то плоскость содержит в себе ось OZ.

Г8.8.3 Если $A=0$ и $B=0$, то плоскость параллельна координатной плоскости XOY при $D\neq 0$ и совпадает с ней при $D=0$. Аналогично, если $A=0$ и $C=0$, то плоскость параллельна координатной плоскости XOZ при $D\neq 0$ и совпадает с ней при $D=0$. И если $B=0$ и $C=0$, то плоскость параллельна координатной плоскости YOZ при $D\neq 0$ и совпадает с ней при $D=0$.

Г8.8.4 Уравнение плоскости «в отрезках». Пусть в общем уравнении плоскости ни один из коэффициентов A,B,C,D не равен нулю. Тогда получим $Ax+By+Cz=-D$; $\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$; $\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Последнее уравнение называется *уравнением плоскости «в отрезках»*. Нетрудно проверить по аналогии с Г7.3.1, что a,b,c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

8.9 Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Г9.5.1 Теорема (о совпадении плоскостей) Два уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ задают одну и ту же плоскость тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. 1) Если имеет место равенство $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то одно уравнение получается из другого умножением на некоторое число и, очевидно, задает ту же плоскость. 2) Пусть уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ задают одну и ту же плоскость. В уравнении $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ хотя бы один из коэффициентов A_1,B_1,C_1 не равен нулю (иначе это вообще не уравнение). Пусть, например, $A_1\neq 0$. Тогда и $A_2\neq 0$ иначе уравнение $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ задает плоскость, параллельную оси OX, а уравнение $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ - плоскость, не параллельную этой оси, чего не может быть, так как по предположению это одна и та же плоскость. Поделим первое уравнение на $A_1\neq 0$, второе – на $A_2\neq 0$ и переобозначим коэффициенты $\left(\beta_i=\frac{B_i}{A_i},\gamma_i=\frac{C_i}{A_i},\delta_i=\frac{D_i}{A_i},\ i=1,2\right)$: $x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1=0$, $x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2=0$. Выберем какую-либо точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежащую в первой (а, значит, и во второй, плоскости). Тогда $x_1+\beta_1y_1+\gamma_1z_1+\delta_1=0$ и $x_1+\beta_2y_1+\gamma_2z_1+\delta_2=0$. Вычитая первое уравнение из второго, получим $(\beta_2-\beta_1)y_1+(\gamma_2-\gamma_1)z_1+(\delta_2-\delta_1)=0$. Выберем другую точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$, лежащую в той же плоскости и получим $(\beta_2-\beta_1)y_2+(\gamma_2-\gamma_1)z_2+(\delta_2-\delta_1)=0$. Выберем третью точку $M_3(x_3,y_3,z_3)$ в этой плоскости так, чтобы она не лежала на одной прямой с первыми двумя точками. Получим $(\beta_2-\beta_1)y_3+(\gamma_2-\gamma_1)z_3+(\delta_2-\delta_1)=0$ Рассмотрим систему равенств

$$\begin{cases}(\beta_2-\beta_1)y_1+(\gamma_2-\gamma_1)z_1+(\delta_2-\delta_1)=0\\(\beta_2-\beta_1)y_2+(\gamma_2-\gamma_1)z_2+(\delta_2-\delta_1)=0\\(\beta_2-\beta_1)y_3+(\gamma_2-\gamma_1)z_3+(\delta_2-\delta_1)=0\end{cases}$$

как систему уравнений относительно неизвестных $\beta=\beta_2-\beta_1$, $\gamma=\gamma_2-\gamma_1$, $\delta=\delta_2-\delta_1$. Эта система имеет очевидное решение $\beta=\gamma=\delta=0$. Определитель этой линейной системы уравнений равен $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, так как точки M_1, M_2, M_3 не лежат на одной прямой. Значит, система имеет единственное решение и $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$, $\delta_2 = \delta_1$. Откуда получаем $\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}$, $\frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2}$, $\frac{D_1}{A_1} = \frac{D_2}{A_2}$. А отсюда, в свою очередь, получим $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, что и требовалось.

Г8.9.2 Теорема (о параллельности плоскостей) Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают параллельные плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. Плоскости параллельны, тогда и только тогда, когда система уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ не имеет решений. Согласно теореме Кронекера-Капелли, ранги матриц $T = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ не совпадают. Ранг матрицы T не больше двух, так как у нее две строки. Он не может быть равен нулю, иначе T - нулевая матрица и никаких уравнений вообще нет. Он также не может быть равен двум, иначе ранги матриц T и S совпадут. Значит, ранг матрицы T равен одному, то есть ее строки пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Равенство $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ невозможно, иначе плоскости совпадут (Г9.5.1), значит, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Г8.9.3 *Следствие.* Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают пересекающиеся плоскости тогда и только тогда, когда не выполняется хотя бы одно из равенств $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

8.10 Прямая как пересечение двух плоскостей

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. В частности, прямую в пространства можно рассматривать, например, как результат пересечения двух плоскостей.

Г8.10.1 Определение. Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают пересекающиеся плоскости. Тогда система уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ называется *общими уравнениями прямой* в пространстве.

Г8.10.2 Переход от общих уравнений прямой к каноническим. Для составления канонических уравнений прямой нужна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на этой прямой и какой-нибудь направляющий вектор $\vec{l}(a, b, c)$ этой прямой. Точку можно найти как любое из решений системы уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Если найти еще какое-нибудь решение (x_1, y_1, z_1) той же системы, то точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ будет лежать на той же искомой прямой и в качестве направляющего вектора можно взять $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

8.11 Нормальный вектор плоскости

Г8.11.1 Теорема (об общем уравнение плоскости) 1) Любая плоскость в прямоугольной системе координат может быть задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - некоторые действительные числа.

2) Любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает в пространстве некоторую плоскость.

Доказательство: 1) Пусть дана некоторая плоскость p и точка $O(x_0, y_0, z_0) \in p$. Пусть вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярен этой плоскости. Тогда он перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости.

Если точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости p, то $\overrightarrow{OM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и векторы $\vec{n}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{OM}$ перпендикулярны, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$. Значит,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

Обозначив $(-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = D$, получим $Ax + By + Cz + D = 0$.

2) Поскольку $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю и уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет решение. Пусть (x_0, y_0, z_0) - какое либо решение этого уравнения, тогда равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ является тождеством. Вычтем это тождество из уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Это уравнение определяет плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}(A, B, C)$ и проходящую через точку (x_0, y_0, z_0). *Теорема доказана*.

Г8.11.2 Определение. Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ называется *нормальным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

8.12 Нормальное уравнение плоскости

Г8.12.1 Рассмотрим общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и поделим его на $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причем знак дроби выберем так, чтобы он был противоположен знаку коэффициента D (если $D = 0$, знак выбираем произвольно): обозначим $A_1 = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $B_1 = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $C_1 = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ с учетом уже выбранного знака. Тогда вектор $\vec{n}_0 = (A_1; B_1; C_1)$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n} = (A; B; C)$ и по длине равен единице. Иными словами, числа A_1, B_1, C_1 являются направляющими косинусами нормального вектора плоскости. Уравнение плоскости запишется в виде $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, где в силу выбора знака, $p \geq 0$. Уравнение $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ называется нормальным уравнением плоскости, при этом число $p \ge 0$ - расстояние от начала координат до плоскости. Действительно, выражение $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ - это проекция радиус-вектора $(x; y; z)$ на вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ и p - проекция того же радиус-вектора $(x; y; z)$ на вектор $\vec{n} = (A; B; C)$.

Г8.12.2 Теорема (Расстояние от точки до плоскости) Если плоскость π задана нормальным уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости равно $d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|$.

Доказательство. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проводим плоскость π_0, параллельную плоскости π и рассмотрим ось, определяемую вектором $\vec{n}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, приложенным к началу координат и, очевидно, перпендикулярным к обеим плоскостям. Эта ось пересечет плоскости соответственно в точках P и P_0. Расстояние $d = \left|\overrightarrow{PP_0}\right|$. По лемме Шаля (Г1.4.7) получаем $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_0}$, при этом $\left|\overrightarrow{OP_0}\right| = Пр_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM}_0$. Но, поскольку $\overrightarrow{OM}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то $\left|\overrightarrow{OP_0}\right| = Пр_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM}_0 = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$. Поскольку $\overrightarrow{OP} = p$, то из $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_0}$ получаем $\left|\overrightarrow{PP_0}\right| = \pm(x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p)$ и $d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|$.

Г10.4.3 *Следствие.* Если плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости равно $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

8.13 Основные задачи для прямой и плоскости в пространстве

Г8.13.1 Угол между плоскостями. Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Г8.13.2 Угол между прямой и плоскостью.

Пусть дана прямая $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение: Пусть α - искомый угол между прямой и плоскостью, β - угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\sin\alpha = \cos\beta$.

Значит, $\sin\alpha = \dfrac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Г8.13.3 Определение взаимного положения прямой и плоскости в пространстве.

Прямая может пересекать плоскость, лежать в этой плоскости или быть ей параллельной. Определить взаимное положение прямой и плоскости можно, рассмотрев систему, состоящую из уравнения плоскости и уравнений прямой: если система имеет единственное решение – прямая и плоскость пересекаются в единственной точке; если система имеет бесконечно много решений – прямая лежит в плоскости; если система не имеет решений – плоскость и прямая параллельны.

Можно привести и менее громоздкий способ определения взаимного положения прямой и плоскости:

1) Прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекаются тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не перпендикулярны: $Al+Bm+Cn\neq 0$.
2) Прямая лежит в плоскости тогда и только тогда, когда $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.
3) Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$.

Г8.13.4 Расстояние от точки до прямой в пространстве. Пусть дана прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ и точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Требуется найти расстояние от этой точки до данной прямой.

Решение. Искомое расстояние является высотой h параллелограмма, построенного на векторах $\vec{u}=(a,b,c)$ и $\vec{v}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, отложенных от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Площадь этого параллелограмма равна длине векторного произведения $\vec{u}\times\vec{v}$, а основание равно длине вектора $\vec{u}=(a,b,c)$. Таким образом, $h=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|}$, или, в развернутом виде:

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ c & a\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a & b\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Г8.13.5 Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Даны уравнения двух скрещивающихся прямых $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_{21}}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_3}{c_3}$. Требуется найти расстояние между этими прямыми.

Решение. Искомое расстояние является высотой h параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ и $\vec{w}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, отложенных от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Объем этого параллелепипеда равен модулю смешанного произведения $\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w}$, а площадь основания, на которое опущена высота h равна модулю векторного произведения $\vec{u}\times\vec{v}$.

Таким образом, $h=\frac{|\vec{u}\vec{v}\vec{w}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теорему об общем уравнении прямой на плоскости. Сформулируйте теорему о совпадении прямых и следствие о параллельности прямых. Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки и уравнение прямой «в отрезках».
2. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом. Как вычисляется угол между прямыми? Запишите условие перпендикулярности прямых. Что называется нормальным уравнение прямой? Как перейти от общего уравнения прямой к нормальному? Как находится расстояние от точки до прямой на плоскости?

3. Запишите векторные и параметрические уравнения прямой в пространстве. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве. Запишите уравнения прямой, проходящей через две заданные точки в пространстве.
4. Запишите векторные и параметрические уравнения плоскости. Запишите уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки. Запишите уравнение плоскости «в отрезках».
5. Сформулируйте теорему о совпадении плоскостей. Сформулируйте теорему о параллельности плоскостей. Что называется нормальным уравнением плоскости. Как перейти от общего уравнения плоскости к нормальному? Как вычисляется расстояние от точки до плоскости?
6. Опишите алгоритм перехода от общих уравнений прямой в пространстве к каноническим. Как вычисляется угол между плоскостями? Как вычисляется угол между прямой и плоскостью? Как определить взаимное положение двух прямых в пространстве по их каноническим уравнениям? Как определить взаимное положение прямой и плоскости? Как вычислить расстояние от точки до прямой в пространстве? Как вычислить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми?