Лекция 3 Конечномерное векторное пространство

3.1 Векторное пространство: определение и примеры

А3.1.1 Определение. Множество V называется *векторным пространством*, если:

1) На множестве V задана операция $+$, удовлетворяющая условиям:
   а) для любых элементов $a,b,c \in V$ выполнено равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$;
   б) для любых элементов $a,b \in V$ выполнено равенство $a+b=b+a$;
   в) существует элемент $0 \in V$ такой, что для любого элемента $a \in V$ выполняются равенства $a+0=0+a=a$ (*нулевой элемент* векторного пространства или *ноль*);
   г) для любого элемента $a \in V$ существует элемент $-a \in V$ такой, что $a+(-a)=0$;
2) Задана операция умножения чисел на элементы множества V, удовлетворяющая условиям:
   а) для любых элементов $a,b \in V$ и любого числа α выполняется равенство $\alpha \cdot (a+b)=\alpha a+\alpha b$;
   б) для любого элемента $a \in V$ и любых чисел α,β выполняется равенство $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$;
   в) для любого элемента $a \in V$ и любых чисел α,β выполняются равенство $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)=a(\alpha\beta)=(\alpha a)\beta$;
   г) для любого элемента $a \in V$ выполняется равенства $a \cdot 1=a$

А3.1.3 Примеры 1) Множество векторов с действительными координатами на плоскости или в пространстве является векторным пространством. 2) Множество непрерывных на заданном отрезке функций является векторным пространством. 3) Множество многочленов является векторным пространством. 4) Множество квадратных матриц одного размера является векторным пространством.

А3.1.4 Пример (Пространство строк) Рассмотрим множество всех строк длины n (матриц из одной строки и n столбцов). Сложение строк определим как сложение матриц, умножение строки на скаляр – как умножение матрицы на число. Получим векторное пространство, которое будем обозначать R^n.

3.2 Линейная зависимость векторов

А3.2.1 *Замечание.* Элементы векторного пространства, независимо от их природы, будем называть *векторами* и обозначать буквой со стрелкой над ней.

А3.2.2 Определение. Пусть дано векторное пространство V. Множество векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ называется *линейно зависимым множеством* векторов, если найдутся числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$, не все равные нулю и такие, что выполняется равенство

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k=\vec{0},$$

где $\vec{0}$ - нулевая строка. Векторы $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k$ в этом случае называются *линейно зависимыми*. В противном случае векторы называются *линейно независимыми*.

А3.2.3 *Замечание 1.* Векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ являются линейно независимыми, если из равенства $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

А3.2.4 *Замечание 2.* Если какое-либо подмножество множества векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ является линейно зависимым, то и все множество векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ будет линейно зависимым. Действительно, пусть $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\} \subseteq \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ - линейно зависимое подмножество и пусть $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{k-m}\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \setminus \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$. Поскольку векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ линейно зависимы, то найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ не все равные нулю и такие, что $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{u}_m = \vec{0}$. Положим $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m-k} = 0$ и рассмотрим выражение

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{u}_m + \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \ldots + \beta_{m-k}\vec{w}_{m-k} = \vec{0}$$

В этом выражении участвуют все векторы множества $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ и при этом не все из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-m}$ равны нулю. Значит, множество векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ линейно зависимо.

А3.2.5 *Замечание 3.* Из А3.2.4 следует, что в линейно независимом множестве любое его подмножество линейно независимо. Кроме того, любое множество, содержащее нулевой вектор линейно зависимо; любое множество, содержащее два одинаковых или пропорциональных вектора, линейно зависимо.

А3.2.6 Определение. Выражение $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$ называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

3.3 Базис векторного пространства

А3.3.1 Теорема (О максимальном линейно независимом множестве в пространстве строк). 1) В пространстве R^n существуют линейно независимые множества, содержащие ровно n векторов; 2) В пространстве R^n любое множество, содержащее s векторов при $s > n$ линейно зависимо.

Доказательство. 1) Пусть $\vec{v}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$, …, $\vec{v}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Покажем, что это множество линейно независимо. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Эта линейная комбинация равна нулю, тогда и только тогда, когда $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \vec{0}$, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$. В соответствии с А3.2.3 векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ линейно независимы.

2)Пусть даны векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s$ в пространстве R^n и $s - n = k > 0$. Надо показать, что найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, не все равные нулю и такие, что $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{v}_s = \vec{0}$. Пусть $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$, $\vec{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$, …, $\vec{v}_s = (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sn})$, тогда векторное (матричное)

равенство $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+..+\alpha_s\vec{v}_s=\vec{0}$ можно переписать в виде системы
$$\begin{cases} v_{11}\alpha_1+v_{21}\alpha_2+\ldots+v_{s1}\alpha_s=0 \\ v_{12}\alpha_1+v_{22}\alpha_2+\ldots+v_{s2}\alpha_s=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{1n}\alpha_1+v_{2n}\alpha_2+\ldots+v_{sn}\alpha_s=0 \end{cases}.$$

Эта система линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ имеет очевидное решение $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=0$. Покажем, что у нее есть и другие решения. Добавим в систему $s-n=k$ уравнений с нулевыми коэффициентами и нулевой правой частью для того, чтобы количество уравнений совпало с количеством неизвестных:
$$\begin{cases} v_{11}\alpha_1+v_{21}\alpha_2+\ldots+v_{s1}\alpha_s=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_{1n}\alpha_1+v_{2n}\alpha_2+\ldots+v_{sn}\alpha_s=0 \\ 0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_s=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+\ldots+0\cdot\alpha_s=0 \end{cases}.$$

Эта система также имеет решение $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s=0$, но ее определитель равен нулю, значит, решение не может быть единственным (следует из правила Крамера). Следовательно, есть еще какое-то ненулевое решение, что и требовалось.

Замечание. В доказательстве первой части теоремы можно было вместо векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ взять любые такие n векторов, чтобы составленный из них определитель не был равен нулю.

А3.3.2 Определение. Множество линейно независимых векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_s$ называется *максимальным линейно независимым множеством* или *базисом*, если добавление к нему любого вектора делает это множество линейно зависимым.

А3.3.3 *Замечание 1.* Из А7.3.1 следует, что любой базис в R^n состоит ровно из n векторов.

А3.3.4 *Замечание 2.* Если $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ - базис в R^n, то для любого вектора $\vec{u}\in R^n$ найдутся числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ такие, что $\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+..+\alpha_n\vec{v}_n$. Иными словами, любой вектор векторного пространства является линейной комбинацией векторов базиса.

А3.3.5 Теорема (однозначность разложения по базису) Если $\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+..+\alpha_n\vec{v}_n$ и $\vec{u}=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+..+\beta_n\vec{v}_n$, то $\alpha_i=\beta_i$ для любого индекса i.

Доказательство. Из $\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+..+\alpha_n\vec{v}_n$ и $\vec{u}=\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2+..+\beta_n\vec{v}_n$ следует $(\alpha_1-\beta_1)\vec{v}_1+(\alpha_2-\beta_2)\vec{v}_2+..+(\alpha_n-\beta_n)\vec{v}_n=\vec{0}$. Но из линейной независимости векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ следует $\alpha_i-\beta_i=0$ для любого i.

А3.3.6 *Замечание 3.* В пространстве R^n существует бесконечно много различных базисов. Действительно, возьмем какой-либо ненулевой вектор и будем добавлять к нему векторы так, чтобы получаемые множества векторов были линейно независимы. Процесс этот оборвется на

n -ом шаге и тем самым получим базис. Поскольку первый вектор был произвольным, то базисов бесконечно много. Впрочем, этот факт следует и из замечания к теореме А3.3.1.

А3.3.7 Теорема (о пополнении базиса) Для каждого линейно независимого множества векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ конечномерного векторного пространства V можно найти в этом пространстве такие векторы $\vec{a}_{k+1}, \vec{a}_{k+2}, ..., \vec{a}_n$, что множество векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, ..., \vec{a}_n$ образует базис пространства V .

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ... \vec{x}_n$ - какой-либо базис пространства V . Рассмотрим множество векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{x}_1, \vec{x}_2 ..., \vec{x}_n$. Будем последовательно, начиная с первого, удалять из этого множества векторы, линейно зависимые от предыдущих. Поскольку векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ линейно независимы, то ни один из них удален не будет. Значит, останутся векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{x}_{i_{k+1}}, \vec{x}_{i_{k+2}} ..., \vec{x}_{i_n}$. Все эти векторы линейно независимы; с другой стороны, любой вектор пространства V мог быть выражен через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{x}_1, \vec{x}_2 ..., \vec{x}_n$. Поскольку каждый из удаленных векторов выражался через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{x}_1, \vec{x}_2 ..., \vec{x}_n$ (удаленные векторы были линейно зависимы с оставшимися), то любой вектор пространства V может быть выражен через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{x}_{i_{k+1}}, \vec{x}_{i_{k+2}} ..., \vec{x}_{i_n}$.

3.4 Размерность пространства

А3.4.1 Определение. Пусть V - произвольное векторное пространство. Если найдутся элементы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in V$ такие, что любой вектор пространства V является линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$, то: множество векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ называется *базисом простр*анства V , число n называется *размерностью пространства* V , а само пространство V называется *конечномерным векторным пространством*.

А3.4.2 Примеры. 1) Множество квадратных матриц второго порядка образует векторное пространство размерности 4. Базисом являются, например, матрицы $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2) Множество квадратных матриц n -го порядка образует векторное пространство размерности n^2. 3) Множество многочленов степени не выше n над произвольным полем образует векторное пространство размерности $n+1$. Базисом служат, например, «векторы» $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$, …, $v_{n+1} = x^n$. 4) Векторное пространство функций, непрерывных на заданном отрезке не является конечномерным векторным пространством – ни один базис этого пространства не может состоять из конечного количества «векторов».

3.5 Подпространства векторного пространства

А3.5.1 Определение. Подмножество $U \subseteq V$ векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если оно само является векторным пространством (то есть удовлетворяет определению А3.1.1) .

А3.5.2 Примеры. 1) Тривиальными примерами подпространств для любого пространства являются само это пространство и множество, состоящее только из нулевого вектора. 2)

Множество векторов вида $\left(\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k}_{k}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k}\right)$ образует подпространство n -мерного векторного пространства. 3) Пусть даны несколько векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ в n-мерном векторном пространстве. Множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов образует подпространство векторного пространства. Такое подпространство называется *линейной оболочкой* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$.

А3.5.4 *Замечание.* Поскольку векторное подпространство является векторным пространством, то в подпространстве есть свой базис (причем, не один). Очевидно, что количество векторов в базисе подпространства не превосходит количества векторов в базисе объемлющего пространства. И, наконец, по теореме А3.3.7 базис любого подпространства можно дополнить векторами пространства так, чтобы это множество являлось базисом объемлющего пространства.

3.6 Ранг множества векторов

А3.6.1 Определение. Пусть дано конечное множество векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$. Рангом этого множества векторов называется наибольшее количество линейно независимых векторов, содержащихся в этом множестве.

А3.6.2 Пример. Рассмотрим множество, состоящее из трех векторов $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{a}_3 = (5, 7, 9)$. Поскольку $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, то вектор $\vec{a}_3 = (5, 7, 9)$ линейно зависит от $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и в рассматриваемом множестве не более двух линейно независимых векторов. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно независимы, так как в противном случае они были бы пропорциональны, что неверно. Значит, ранг данного множества векторов равен двум.

3.7 Нахождение ранга матрицы методом элементарных преобразований

А3.7.1 Определение. *Элементарными преобразованиями* матрицы будем называть:

1) умножение всех элементов любой строки на одно и то же число, отличное от нуля;

2) прибавление ко всем элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

3) перестановку строк;

4) перестановку столбцов.

А3.7.2 Теорема (Ранг и элементарные преобразования) Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

Без доказательства.

А3.7.3 *Замечание.* Элементарное преобразование строк 2) по сути является заменой одной из строк на линейную комбинацию двух строк. Допустим, что с помощью первой строки преобразована вторая строка. Значит, новая вторая строка является линейной комбинацией первой и второй строк исходной матрицы. Допустим затем, что с помощью новой второй строки преобразуется третья строка матрицы. Но новая вторая строка сама была линейной комбинацией первых двух строк, значит, преобразованная третья строка является линейной комбинацией первых трех строк исходной матрицы. И так далее.

Допустим, мы преобразуем строки матрицы с целью получения нулей под главной диагональю. В результате таких действий могут появиться или не появиться нулевые строки. Эти нулевые строки с помощью элементарного преобразования 3) можно сделать последними сроками матрицы. После получения нулей под главной диагональю получится некоторая ступенчатая матрица, ранг которой будет совпадать с рангом исходной матрицы. Количество ненулевых строк в полученной ступенчатой матрице будет равно рангу исходной матрицы.

А3.7.4 Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 12 \\ 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй, затем умножим первую строку на (-3) и прибавим к третьей, затем умножим первую строку на (-5) и прибавим к четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку из третьей и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переставим третий и пятый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 3.

Контрольные вопросы:

1. Что называется векторным пространством? Что такое пространство строк?
2. Какие векторы называются линейно зависимыми и какие – линейно независимыми?
3. Что называется базисом векторного пространства? Из скольких векторов состоит базис конечномерного векторного пространства?
4. Сформулируйте теоремы об однозначности разложения по базису и о пополнении базиса.
5. Что называется подпространством векторного пространства?
6. Что называется рангом матрицы? Сформулируйте алгоритм нахождения ранга матрицы методом элементарных преобразований.