Лекция 15 Линейные дифференциальные уравнения

30.1 Задача Коши и краевая задача

Д30.1.1 Определение. *Дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой независимой переменной и производные этой функции до порядка n включительно: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. Если дифференциальное уравнение первого порядка представлено в виде $y^{(n)} = f(x, y, y', ... y^{(n-1)})$, то оно называется *уравнением, разрешенным относительно старшей производной.*
Д30.1.2 Определение. Дифференцируемая n раз на промежутке $(a; b)$ (возможно – бесконечном) функция $y(x)$ называется решением дифференциального уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (или $y^{(n)} = f(x, y, y', ... y^{(n-1)})$), если она обращает это уравнение в тождество на промежутке $(a; b)$.

Д30.1.3 Определение. Множество решений $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ (или $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$), зависящее от n произвольных постоянных, называется *общим решением* дифференциального уравнения порядка n. Любое решение, получающееся из общего решения подстановкой каких-либо числовых значений параметров $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Д30.1.4 Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (или $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$), удовлетворяющее *начальным условиям* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$,…, $y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$, где $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)} \in R$ - заданные числа. Решение дифференциального уравнения порядка n, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением* дифференциального уравнения.
Д30.1.5 Геометрическая интерпретация. Рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка: $F(x, y, y', y'') = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Найти решение этой задачи, значит, среди всех интегральных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0), выбрать ту, которая в этой точке имеет заданный наклон касательной $y'(x_0) = y'_0$. Отсюда, в частности, следует, что через каждую точку области задания дифференциального уравнения проходит бесконечно много интегральных кривых дифференциального уравнения порядка выше первого.
Аналогично, решить задачу Коши для уравнения третьего порядка $F(x, y, y', y'', y''') = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, значит, среди всех интегральных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0), выбрать ту, которая в этой точке имеет заданный наклон касательной $y'(x_0) = y'_0$ и заданную кривизну $k(x_0) = \dfrac{y''_0}{(1 + (y'_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Геометрическая интерпретация решения задачи Коши для уравнений порядка выше третьего уже не имеет такой наглядной интерпретации.
Д30.1.6 Механическая интерпретация. Рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка: $F(x, y, y', y'') = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Если интерпретировать переменную x как время, а переменную y как пройденный материальной точкой путь, то y' и y'' будут соответственно скоростью и ускорением материальной точки. Следовательно, решить поставленную задачу Коши, значит, найти уравнение движения материальной точки при заданных начальном положении и начальной скорости.

Д30.1.8 Краевая задача. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка $F(x, y, y', y'')=0$ на отрезке $[a;b]$, удовлетворяющее условиям $y(a)=y_1$, $y(b)=y_2$, где $y_1, y_2 \in R$ - заданные числа.

$y = x\ln\frac{C_2 x}{1-C_1C_2x}$.

30.2 Понятие линейного уравнения

Д30.2.1 Определение. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение вида $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}=f(x)\right)$, где $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_2(x), a_1(x), a_0(x), f(x)$ - заданные функции. Если при этом $f(x)=0$, то уравнение называется *однородным линейным* уравнением, в противном случае – *неоднородным линейным* уравнением.

Д30.2.1 *Замечание.* Если функции $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_2(x), a_1(x), a_0(x), f(x)$ непрерывны в некотором интервале $(a;b)$, то задача Коши для любой точки из $(a;b)$ будет иметь единственное решение. Особых решений у линейного уравнения нет.

30.3 Свойства решений линейного однородного уравнения

Д30.3. 1 Определение. Комплексной функцией действительной переменной называется функция $u(x)+iv(x)$, где $u(x), v(x)$ - действительные функции, i - мнимая единица.

Д30.3.2 *Замечание.* Примером комплексной функции действительной переменной может служить, например, функция $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Справедливость этого равенства можно доказать, например, используя ряд Тейлора. Более общим примером комплексной функции действительной переменной служит функция $e^{\lambda x}$, где $\lambda=\alpha+i\beta$ - произвольное комплексное число: $e^{\lambda x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$.

Д30.3.3 Теорема (свойства решений однородного линейного уравнения) 1) Если функция y_0 является решением уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}=0$, то для любого числа $C \in R$ функция $z=Cy_0$ также будет решением этого уравнения; 2) Если функции y_1, y_2 являются решениями уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}=0$, то функция $z=y_1+y_2$ также будет решением этого уравнения; 3) Если комплексная функция действительной переменной $u(x)+iv(x)$ является решением уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}=0$, то каждая из функций $u(x), v(x)$ также будет решением этого уравнения.

*Доказательство.*1) Пусть y_0 - решение уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}=0$, тогда $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_0^{(k)}=0$ - тождество. Подставим функцию $z=Cy_0$ в левую часть уравнения с учетом того, что $z^{(k)}=Cy_0^{(k)}$:

$\sum_{k=0}^{n} a_k (Cy_0)^{(k)} = C\sum_{k=0}^{n} a_k (y_0)^{(k)} = 0$, что и требовалось. 2) Пусть y_1, y_2 - решения уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k (y)^{(k)} = 0$, тогда $\sum_{k=0}^{n} a_k (y_1)^{(k)} = 0$ и $\sum_{k=0}^{n} a_k (y_2)^{(k)} = 0$ - тождества. Подставим функцию $z = y_1 + y_2$ в левую часть уравнения с учетом того, что $z^{(k)} = y_1^{(k)} + y_2^{(k)}$: $\sum_{k=0}^{n} a_k (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (y_1)^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_k (y_2)^{(k)} = 0$; 3) Пусть $z = u(x) + iv(x)$, тогда $z^{(k)} = u^{(k)} + iv^{(k)}$. Подставив эту функцию в уравнение, получим тождество: $\sum_{k=0}^{n} a_k (u^{(k)} + iv^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (u)^{(k)} + i\sum_{k=0}^{n} a_k (v)^{(k)} = 0$. Но $\sum_{k=0}^{n} a_k (u)^{(k)}, \sum_{k=0}^{n} a_k (v)^{(k)}$ - при каждом значении переменной x являются действительными числами (действительной и мнимой частями некоторого комплексного числа). Но комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда равны нулю его действительная и мнимая части: $\sum_{k=0}^{n} a_k (u)^{(k)} = 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_k (v)^{(k)} = 0$, что и требовалось.

Д30.3.4 Следствие. Любая линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_my_m$ решений $y_1, y_2, ..., y_m$ линейного однородного уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k (y)^{(k)} = 0$ с произвольными числовыми коэффициентами $C_1, C_2, ..., C_m$ также будет решением этого уравнения. В частности, разность двух решений также будет решением и тождественно равная нулю функция тоже будет решением.

30.4 Линейно независимые функции

Д30.4.1 Определение. Функции $y_1, y_2, ..., y_m$, заданные на одном и том же интервале называются *линейно зависимыми* на этом интервале, если существуют постоянные $C_1, C_2, ..., C_m$, не все равные нулю и такие, что $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_my_m = 0$ в каждой точке этого интервала. В противном случае эти функции называются *линейно независимыми* на данном интервале.

Д30.4.2 *Замечание.* Линейная независимость функций $y_1, y_2, ..., y_m$ означает, что из равенства $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_my_m = 0$, верного на всем рассматриваемом интервале, следует $C_1, = C_2 = ... = C_m$.

Д30.4.3 Теорема (О линейно зависимом подмножестве) Если среди множества функций $y_1, y_2, ..., y_m$ есть подмножество линейно зависимых функций, то все множество $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависимо.

Доказательство. Обозначим $z_1, z_2, ..., z_k$ те функции из множества $y_1, y_2, ..., y_m$, которые по условию теоремы являются линейно зависимыми. Все остальные функции множества $y_1, y_2, ..., y_m$ обозначим $u_1, u_2, ..., u_s$. Поскольку функции $z_1, z_2, ..., z_k$ линейно зависимы, то найдутся постоянные $C_1, C_2, ..., C_k$, не все равные нулю и такие, что $C_1z_1 + C_2z_2 + ... + C_kz_k = 0$. Тогда $C_1z_1 + C_2z_2 + ... + C_kz_k + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + ... + 0 \cdot u_s = 0$ и, поскольку коэффициенты в последнем равенстве не все равны нулю, то все множество функций $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависимо.

Д30.4.4 Следствие 1. Любое подмножество множества линейно независимых функций состоит из линейно независимых функций.

Д30.4.5 Следствие 2. Если среди функций $y_1, y_2, ..., y_m$ есть функция, тождественно равная нулю, то функции $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависимы.

Д30.4.6 Следствие 3. Если среди функций $y_1, y_2, ..., y_m$ имеется функция, равная линейной комбинации некоторых функций этого множества, то эти функции линейно зависимы. В частности, если среди функций есть две или более пропорциональных функций, то множество $y_1, y_2, ..., y_m$ линейно зависимо.

Д30.4.7 Пример 1. 1) Функции $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ линейно зависимы на любом интервале, так как $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$ при любом значении x; 2) Функции $y_0 = 1$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, …, $y_n = x^n$ линейно независимы на любом интервале, поскольку если в равенстве $C_0 y_0 + C_1 y_1 + ... + C_n y_n = 0$ не все коэффициенты равны нулю, то это равенство является алгебраическим уравнением некоторой степени, которое на может иметь в качестве корней целый интервал.

Д30.4.8 Пример 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - попарно различные числа (действительные или комплексные), тогда следующее множество функций линейно независимо:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{n_1} e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, ..., x^{n_2} e^{\lambda_2 x},$$

$$\dots$$

$$e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, ..., x^{n_m} e^{\lambda_m x}$$

где $n_1, n_2, ...n_m \in N$.

Допустим противное: $(a_{11} e^{\lambda_1 x} + a_{12} xe^{\lambda_1 x} + \ldots + a_{1n_1} x^{n_1} e^{\lambda_1 x}) + (a_{21} e^{\lambda_2 x} + a_{22} xe^{\lambda_2 x} + \ldots + a_{2n_2} x^{n_2}) + \ldots$

$+ (a_{m1} e^{\lambda_m x} + a_{m2} xe^{\lambda_2 x} + \ldots + a_{mn_1} x^{n_m} e^{\lambda_m x}) = 0$, где a_{ij} - некоторые постоянные (надо доказать, что все они равны нулю). последнее равенство можно записать короче: $\sum_{k=1}^{n} P_{n_k}(x) e^{\lambda_k x} = 0$, где $P_{n_k}(x)$ - полином степени n_k, причем будем предполагать от противного, что не все эти полиномы тождественно равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что $P_{n_m}(x) \neq 0$. Тогда, умножая $\sum_{k=1}^{n} P_{n_k}(x) e^{\lambda_k x} = 0$ на $e^{-\lambda_1 x}$, получим $P_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{n} P_{n_k}(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0$. Дифференцируя это тождество $n_1 + 1$ раз по переменной x, получим $\sum_{k=2}^{n} P_{n_k}(x) e^{(\lambda_k-\lambda_1)x} = 0$ и при этом $P_{n_m}(x) \neq 0$. Умножая тождество $\sum_{k=2}^{n} P_{n_k}(x) e^{(\lambda_k-\lambda_1)x} = 0$ на $e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$, получим $P_{n_2}(x) + \sum_{k=3}^{n} P_{n_k}(x) e^{(\lambda_k-\lambda_2)x} = 0$. Дифференцируя n_2+1 раз по переменной x, получим $\sum_{k=3}^{n} P_{n_k}(x) e^{(\lambda_k-\lambda_2)x} = 0$ и при этом $P_{n_m}(x) \neq 0$. Продолжая так дальше (всего m раз) придем к тому, что $P_{n_m}(x) = 0$, то есть к противоречию. Что и требовалось.

30.5 Определитель Вронского

Д30.5.1 Определение. Пусть функции $y_1, y_2, ..., y_n$ имеют производные до порядка $n-1$ включительно. Определитель $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ называется определителем Вронского системы функций $y_1, y_2, ..., y_n$.

Д30.5.2 Теорема (линейная зависимость и определитель Вронского) Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы на некотором интервале, то их определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале.

Доказательство. Пусть в равенстве $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = 0$, выражающем линейную зависимость функций $y_1, y_2, ..., y_n$ последний коэффициент отличен от нуля. Тогда $y_n = -\frac{C_1}{C_n} y_1 - \frac{C_2}{C_n} y_2 - ... - \frac{C_{n-1}}{C_n} y_{n-1}$. Дифференцируя это тождество $n-1$ раз и подставляя y_n и его производные в последнюю строку определителя Вронского, получим, что эта строка является линейной комбинацией остальных строк. Следовательно, определитель равен нулю тождественно.

Д30.5.3 Пример. Функции $y_1 = \begin{cases} x^2, & при\ \ x \le 0 \\ 0, & при\ \ x > 0 \end{cases}$ и $y_2 = \begin{cases} 0, & при\ \ x \le 0 \\ x^2, & при\ \ x > 0 \end{cases}$ дифференцируемы и линейно независимы на всей числовой прямой. Однако, их определитель Вронского равен нулю.

Таким образом, теорема Д9.5.2 дает необходимое, но не достаточное условие линейной зависимости функций.

Д30.5.4 Теорема (необходимое и достаточное условие линейной независимости) Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ являются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения, все коэффициенты которого непрерывны в интервале $(a; b)$, то определитель Вронского функций $y_1, y_2, ..., y_n$ не равен нулю ни в одной точке интервала $(a; b)$.

Без доказательства.

30.6 Формула Остроградского-Лиувилля

Д30.6.1 Теорема (формула Остроградского-Лиувилля) Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - линейно независимые на промежутке (a,b) решения дифференциального уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$ при $a_n(x) = 1$, $W(x)$ - определитель Вронского функций $y_1, y_2, ..., y_n$, тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t) dt},$$

где x_0 - любая точка интервала (a,b).

Без доказательства.

Д30.6.2 Следствия. 1) Если определитель Вронского равен нулю в одной точке интервала (a,b), то он равен нулю во всем этом интервале. 2) Если определитель Вронского отличен от нуля в одной точке интервала (a,b), то он отличен от нуля (а значит – сохраняет знак) на всем интервале .

30.7 Общее решение линейного однородного уравнения

Д30.7.1 Определение. Множество n решений линейного однородного уравнения порядка n, определенных и линейно независимых в интервале $(a;b)$, называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Д30.7.2 *Замечание 1.* Для того, чтобы множество n решений линейного однородного уравнения порядка n было фундаментальной системой решений, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала, в котором непрерывны коэффициенты этого уравнения.

Д30.7.3 *Замечание 2.* У одного и того же уравнения может существовать несколько, даже бесконечно много, фундаментальных систем решения. Например, для уравнения $y'' + y = 0$ система функций $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$ служит фундаментальной системой решения. Системы функций $y_1 = 2\sin x, y_2 = 3\cos x$ и $y_1 = \sin x - \cos x, y_2 = \sin x + \cos x$ также являются фундаментальными системами решений для этого уравнения.

Д30.7.4 Теорема (о существовании фундаментальной системы решений) Если коэффициенты $a_k(x)$ дифференциального уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$ непрерывны в интервале $(a;b)$, то существует фундаментальная система решений, определенная на этом интервале.

Без доказательства.

Д30.7.5 Теорема (о структуре общего решения) Если $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальная система решений дифференциального уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$, то функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ - произвольные постоянные, является общим решением уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$.

Без доказательства.

30.8 Общее решение линейного неоднородного уравнения

Д30.8.1 Определение. Пусть дано неоднородное линейное уравнение $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x)$. Уравнение $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$ называется линейным однородным уравнением, *соответствующим* неоднородному уравнению $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x)$.

Д30.8.2 Теорема (общее решение неоднородного уравнения) Если $\bar{y}(x)$ - какое-либо частное решение линейного неоднородного уравнения, а $y_0(x)$ - общее решение соответствующего ему однородного уравнения, то $y_0(x) + \bar{y}(x)$ - общее решение неоднородного уравнения.

Без доказательства.

Д30.8.3. *Замечание 1.* Если $\bar{y}(x)$ - частное решение уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f_1(x)$, а $\tilde{y}(x)$ - частное решение уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f_2(x)$, то $\bar{y}(x) + \tilde{y}(x)$ - частное решение уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f_1(x) + f_2(x)$. Это утверждение по индукции продолжается на сумму произвольного конечного количества слагаемых $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$.

30.9 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Д30.9.1 Метод Лагранжа. Пусть дано неоднородное уравнение $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x)$ и известно общее решение $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ соответствующего однородного уравнения $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $\bar{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n$, где $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ - некоторые, пока неизвестные функции.

Эти функции подчиняются лишь одному условию, получающемуся при подстановке функции $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n$ в неоднородное дифференциальное уравнение. Для определения функций $C_1, C_2, ..., C_n$ необходимо придумать еще $n-1$ условие.
Рассмотрим производные функции $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$:
$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + ... + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n$.
Пусть $C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0$ (первое условие), тогда $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + ... + C_n y_n'$ и $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + ... + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n'$.
Пусть $C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0$ (второе условие), тогда $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + ... + C_n y_n''$. Вычислив третью производную, получаем третье условие: $C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + ... + C_n' y_n'' = 0$ и т.д.

Последнее условие получим после вычисления $y^{(n-1)}$: $C_1^{'}y_1^{(n-2)}+C_2^{'}y_2^{(n-2)}+...+C_n^{'}y_n^{(n-2)}=0$.
Теперь подставляем функцию $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ и ее производные $y^{'}=C_1y_1^{'}+C_2y_2^{'}+...+C_ny_n^{'}$, $y^{''}=C_1y_1^{''}+C_2y_2^{''}+...+C_ny_n^{''}$ и т. д. в уравнение $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y^{'}+a_0y=f(x)$. Получим:
$C_1^{'}y_1^{(n-1)}+C_2^{'}y_2^{(n-1)}+...+C_n^{'}y_n^{(n-1)}=f(x)$ (последнее условие).
Для определения функций $C_1,C_2,...,C_n$ получили систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1^{'}y_1+C_2^{'}y_2+\ldots+C_n^{'}y_n=0 \\ C_1^{'}y_1^{'}+C_2^{'}y_2^{'}+\ldots+C_n^{'}y_n^{'}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^{'}y_1^{(n-2)}+C_2^{'}y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n^{'}y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1^{'}y_1^{(n-1)}+C_2^{'}y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n^{'}y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

Определитель системы есть определитель Вронского функций $y_1,y_2,...y_n$, составляющих фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, поэтому он не равен нулю и система имеет единственное решение.

Д30.9.2 ***Пример:*** Найти общее решение уравнения $y^{''}+y=\cos^{-1}x$.
Решение: Фундаментальная система решений состоит из функций $\sin x,\cos x$ (Д9.2.3). Общее решение дифференциального уравнения ищем в виде $y=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$.

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)\sin x+C_2^{'}(x)\cos x=0 \\ C_1^{'}(x)\cos x-C_2^{'}(x)\sin x=\cos^{-1}x \end{cases}$$

решим систему по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \cos x \\ \cos^{-1}x & -\sin x\end{vmatrix}=0-1=-1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\sin x & 0 \\ \cos x & \cos^{-1}x\end{vmatrix}=tgx$$

$$C_1^{'}(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1, C_2^{'}(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-tgx$$

$C_1(x)=\int C_1^{'}(x)dx=\int dx=x+C_1$, где C_1 - произвольная постоянная,

$$C_2(x)=\int C_2^{'}(x)dx=-\int tgxdx=\ln(\cos x)+C_2$$

$$y=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x=(x+C_1)\sin x+(\ln(\cos x)+C_2)\cos x$$

30.10 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть теперь функции $a_n(x), a_{n-1}(x),..., a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ - это заданные числа. Будем искать решение уравнения $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y^{'}+a_0y=0$ в виде $y=e^{\lambda x}$. Тогда $y^{'}=\lambda e^{\lambda x}$, $y^{''}=\lambda^2e^{\lambda x}$, …, $y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$. Подставим функцию $y=e^{\lambda x}$ и ее производные в дифференциальное уравнение: $\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+...+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0$. Сократим равенство на $e^{\lambda x}$: $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$. Таким образом, функция $y=e^{\lambda x}$ будет решением уравнения $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y^{'}+a_0y=0$ тогда и только тогда, когда число λ является корнем алгебраического уравнения $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$.

Д30.10.1 **Определение**: Уравнение $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0$ называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=0.$$

Рассмотрим отдельно четыре случая.

Д30.10.2 Случай 1: Пусть характеристическое уравнение имеет ровно n различных действительных корней $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$. Тогда каждая из функций $e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x}$ является решением уравнения $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=0$. Поскольку, в соответствии с примером предыдущей лекции, эти функции линейно независимы и их ровно n , то $e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},...,e^{\lambda_n x}$ - фундаментальная система решений дифференциального уравнения.

Пример: Найти общее решение уравнения $y'''-5y''+6y'=0$

Решение: Составим характеристическое уравнение: $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$. Корни этого уравнения равны $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, значит, фундаментальная система решений состоит из функций $y_1=e^{0\cdot x}=1, y_2=e^{2x}, y_3=e^{3x}$, и, следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

Д30.10.3 Случай 2: Все корни характеристического уравнения различны, но среди них не все корни действительны.

Пусть $\mu=a+ib$- комплексный корень характеристического уравнения и $b\neq 0$. Тогда, поскольку коэффициенты характеристического уравнения – действительные числа, то число $\bar{\mu}=a-ib$ также является корнем характеристического уравнения.

$e^{\mu x}=e^{(a+ib)x}=e^{ax}\cdot e^{ibx}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=e^{ax}\cos bx+ie^{ax}\sin bx$ По теореме о свойствах решений линейного однородного уравнения каждая из функций $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$ является решением этого уравнения. Определитель Вронского этих функций равен

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2ax}(a\cos bx\sin bx+b\cos^2 bx)-e^{2ax}(a\cos bx\sin bx-b\sin^2 bx)=$$

$=be^{2ax}\neq 0$, значит, эти функции линейно независимы.

$e^{\bar{\mu}x}=e^{(a-ib)x}=e^{ax}\cdot e^{-ibx}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)=e^{ax}\cos bx-ie^{ax}\sin bx$ и, значит, корню $\bar{\mu}=a-ib$ в фундаментальной системе решений соответствуют функции $e^{ax}\cos bx,-e^{ax}\sin bx$. Добавление любой из этих функций в множество функций $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$ делает это множество линейно зависимым. Значит, каждой паре комплексно сопряженных корней характеристического уравнения соответствует в фундаментальной системе пара линейно независимых функций.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,\mu_{k+1},...,\mu_n$ - все корни характеристического уравнения, эти корни попарно различны и $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ - действительные числа, $\mu_{k+1},...,\mu_n$ - комплексные, но не действительные числа. Тогда каждому действительному числу λ_i в фундаментальной системе решений соответствует функция $e^{\lambda_i x}$, а каждой паре комплексно сопряженных чисел $\mu,\bar{\mu}$ – пара линейно независимых функций $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$. Общее количество функций в фундаментальной системе решений равно количеству корней характеристического уравнения и, в соответствии с примером предыдущей лекции, все эти функции линейно независимы.

Пример 1: Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{IV}-y=0$.

Решение: Решим характеристическое уравнение $\lambda^4-1=0$: $(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0$; $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$; $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$. По формуле Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, значит, фундаментальная система решений состоит из функций $e^x,e^{-x},\cos x,\sin x$ и общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Пример 2: Решить задачу Коши $y''' - 4y'' + 13y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$;

$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$.

Найдем значения постоянных C_1, C_2, C_3: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$,

$$y' = C_2 (2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x) + C_3 (2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x)$$

$$y'(0) = 2C_2 + 3C_3 = 2$$

$$y'' = C_2 (4e^{2x} \cos 3x - 6e^{2x} \sin 3x - 6e^{2x} \sin 3x - 9e^{2x} \cos 3x) +$$
$$+ C_3 (4e^{2x} \sin 3x + 6e^{2x} \cos 3x + 6e^{2x} \cos 3x - 9e^{2x} \sin 3x)$$

$$y''(0) = -5C_2 + 12C_3 = 3$$

Решим систему $\begin{cases} 2C_2 + 3C_3 = 2 \\ -5C_2 + 12C_3 = 3 \end{cases}$: $C_2 = \dfrac{5}{13}, C_3 = \dfrac{16}{39}$

$$C_1 = 1 - C_2 = \frac{8}{13}$$

Решение задачи Коши: $y = \dfrac{8}{13} + \dfrac{5}{13} e^{2x} \cos 3x + \dfrac{16}{39} e^{2x} \sin 3x$.

Д30.10.4 Случай 3: характеристическое уравнение имеет кратные действительные корни. Пусть действительный корень λ_0 имеет кратность k, тогда многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$ можно представить в виде $(\lambda - \lambda_0)^k \cdot P(\lambda)$, при этом число λ_0 не будет являться корнем многочлена $P(\lambda)$. Можно показать, что функции $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ являются решениями уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$. Таким образом, каждому корню кратности k в фундаментальной системе решений соответствуют ровно k линейно независимых функций и общее количество таких функций совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Пример: Найти общее решение уравнения $y^{V} - 12y^{IV} + 36y''' = 0$

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 12\lambda^4 + 36\lambda^3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 6$, фундаментальная система решений состоит из функций $1, x, x^2, e^{6x}, xe^{6x}$ и общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{6x} + C_5 x e^{6x}$.

Д30.10.5 Случай 4: характеристическое уравнение имеет кратные комплексные корни.
В этом случае, если кратность комплексного корня $\mu = a + ib$ равна k, то ему соответствуют комплексные решения $e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, ..., x^{k-1}e^{(a+ib)x}$. Воспользовавшись формулой Эйлера и теоремой о свойствах решений линейного однородного уравнения, получим, что функции

$$e^{ax} \cos bx,\ xe^{ax} \cos bx,\ \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx$$

$$e^{ax} \sin bx,\ xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

входят в фундаментальную систему решений дифференциального уравнения.

Пример: найти общее решение уравнения $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = i, \lambda_3 = \lambda_4 = -i$, т.е. уравнение имеет пару двукратных комплексно сопряженных корней

$\pm i$. Значит, фундаментальная система состоит из функций $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$ и общее решение имеет вид
$y = C_1 \cos x + C_2 x\cos x + C_3 \sin x + C_4 x\sin x$.

30.11 Неоднородные уравнения с правой частью специального вида

Если порядок дифференциального уравнения достаточно велик, то метод вариации произвольных постоянных становится громоздким. При этом вычисление интегралов на завершающем этапе метода также может оказаться достаточно трудоемким. Однако, если правая часть дифференциального уравнения представляет собой многочлен, показательную или тригонометрическую функцию, то независимо от вида левой части уравнения, можно найти его решение без использования интегралов. Рассмотрим два случая.

Д30.11.1 Случай 1: Дифференциальное уравнение имеет вид $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ - некоторый многочлен степени m (в частности, многочлен может быть просто постоянной), a - некоторое действительное число (в частности, может быть $a = 0$).
Ищем решение неоднородного уравнения в виде $\bar{y} = x^k Q_m(x)\cdot e^{ax}$, где $Q_m(x)$ - многочлен с неопределенными коэффициентами, той же степени, что и $P_m(x)$, k - кратность числа a как корня характеристического уравнения (в частности, если a не является корнем характеристического уравнения, то $k = 0$). Значения неопределенных коэффициентов находим после подстановки функции $\bar{y} = x^k Q_m(x)\cdot e^{ax}$ в дифференциальное уравнение. Затем находим общее решение y_0 однородного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$. По теореме об общем решении неоднородного уравнения получаем, что функция $y = y_0 + \bar{y}$ является общим решением исходного неоднородного уравнения.

Пример: Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = xe^x$

Решение: Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$: корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Общее решение - $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.
В данном случае $P_m(x) = x$ - многочлен первой степени, поэтому $Q_m(x) = Ax + B$ - некоторый многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами. Число $a = 1$ является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 1$ и
$\bar{y} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$
$\bar{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x$
$\bar{y}'' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x$
Подставим $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в дифференциальное уравнение:
$(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x + (2Ax + 2A + B)e^x -$
$-6(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x + 5(Ax^2 + Bx)e^x = xe^x$
Сократим полученное равенство на e^x, приведем подобные
$-8Ax + (2A - 4B) = x$ и приравняем коэффициенты при равных степенях переменной x:
$\begin{cases} -8A = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases}$, значит, $A = -\dfrac{1}{8}; B = -\dfrac{1}{16}$, $\bar{y} = -\left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{16}\right)e^x$ и общее решение имеет вид:
$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - \left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{16}\right)e^x$.

Д30.11.2 Случай 2: Дифференциальное уравнение имеет вид $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=e^{ax}\left(P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx\right)$, где $P_1(x),P_2(x)$ - некоторые многочлены, a,b - некоторые действительные числа. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $x^ke^{ax}\left(Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx\right)$, где $Q_1(x),Q_2(x)$ - многочлены с неопределенными коэффициентами, степень каждого из которых равна наибольшей из степеней многочленов $P_1(x),P_2(x)$, k - кратность числа $a+ib$ как корня характеристического многочлена.

Пример: Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=\sin x$

Решение: Корни характеристического уравнения равны $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

В заданном уравнении $P_1(x)=0$, $P_2(x)=1$ - многочлены нулевой степени, $a=0,b=1$, число $a+ib=i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k=0$ и $\bar{y}=A\cos x+B\sin x$.

$\bar{y}'=-A\sin x+B\cos x$, $\bar{y}''=-A\cos x-B\sin x$. Подставляем функцию $\bar{y}=A\cos x+B\sin x$ и ее производные в уравнение:

$-A\cos x-B\sin x-5\left(-A\sin x+B\cos x\right)+6\left(A\cos x+B\sin x\right)=\sin x$ приведем подобные:

$\left(5A-5B\right)\cos x+\left(5A+5B\right)\sin x=\sin x$

приравняем отдельно коэффициенты при синусе и при косинусе:

$\begin{cases}5A-5B=0\\5A+5B=1\end{cases}$, $A=B=\dfrac{1}{10}$, $\bar{y}=\dfrac{1}{10}\left(\cos x+\sin x\right)$

Общее решение: $y=y_0+\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{10}\left(\cos x+\sin x\right)$.

Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциальным уравнение порядка n? Что называется решением такого уравнения? Что называется общим решением такого уравнения и что – частным решением?
2. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения порядка n? Каковы геометрическая и механическая интерпретации задачи Коши? Что называется краевой задачей для дифференциального уравнения второго порядка?
3. Что называется линейным дифференциальным уравнением порядка n? Какое линейное дифференциальное уравнение называется однородным? Перечислите свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения.
4. Какие функции называются линейно зависимыми и какие – линейно независимыми? Сформулируйте теорему о линейно зависимом подмножестве и следствия из нее.
5. Что называется определителем Вронского? Сформулируйте необходимое и достаточное условие линейной независимости решений дифференциального уравнения. Запишите формулу Остроградского-Лиувилля.
6. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения? Сформулируйте теорему о существовании фундаментальной системы решений. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
7. Сформулируйте теорему об общем решении неоднородного уравнения. Сформулируйте алгоритм метода вариации произвольных постоянных.
8. Сформулируйте алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
9. Сформулируйте алгоритм нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.