Лекция 13 Комплексные числа

18.1 Арифметические операции с комплексными числами

К введению понятия комплексного числа привела невозможность извлечения квадратного корня из отрицательных чисел.

M18.1.1 Определение: Полагаем $\sqrt{-1}=i$. Это новое число i называется *мнимой единицей*.
Замечание 1: Из определения очевидно, что $i^2=-1$
Замечание 2: Мнимая единица не является действительным числом, это новый объект, свойства которого будут изучены в данной лекции.
***Замечание 3*:** Введение в рассмотрение мнимой единицы позволяет извлекать квадратный корень из любого отрицательного числа. Например,

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$$

$$\sqrt{-5}=\sqrt{5\cdot(-1)}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{5}$$

M18.1.2 Определение: Число $z=a+ib$, где a,b - действительные числа, называется *комплексным числом*. При этом действительное число a называется *действительной частью* числа $z=a+ib$ и обозначается $a=\operatorname{Re} z$; действительное число b называется *мнимой частью* числа $z=a+ib$ и обозначается $b=\operatorname{Im} z$.
Замечание1: Любое действительное число a является и комплексным, т.к. $a=a+i\cdot 0$.
Замечание 2: Запись комплексного числа виде $z=a+ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

M18.1.3 Определение: Комплексное число $\bar{z}=a-ib$ называется числом, *комплексно сопряженным* с числом $z=a+ib$.

Пример: 1) Если $z=2-3i$, то $\operatorname{Re} z=2$, $\operatorname{Im} z=-3$, $\bar{z}=2+3i$
2) Если $z=5$, то $\operatorname{Re} z=5$, $\operatorname{Im} z=0$, $\bar{z}=5$

M18.1.4 Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел $z_1=a+ib$ и $z_2=c+id$ определяются следующими правилами:

$$z_1+z_2=(a+c)+i(b+d)$$

$$z_1-z_2=(a-c)+i(b-d)$$

$$z_1\cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

т.е. при сложении, вычитании и умножении скобки раскрываются по обычным правилам, учитывается условие $i^2=-1$ и приводятся подобные.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

При делении необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные.

***Пример*:** Если $z_1=2+5i$, $z_2=4+3i$, то

$z_1+z_2=(2+4)+i(5+3)=6+8i$,

$z_1-z_2=(2-4)+i(5-3)=-2+2i$, $z_1\cdot z_2=(2+5i)(4+3i)=8+20i+6i+15i^2=-7+26i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+5i}{4+3i}=\frac{(2+5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{8+20i-6i-15i^2}{25}=\frac{23+14i}{25}=$$

$$= \frac{23}{25} + i\frac{14}{25}$$

Очевидны следующие свойства комплексных чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
4. $(z_1 \cdot z_2)z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
5. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

M18.1.5 Теорема (связь арифметических операций и комплексного сопряжения)

1. $\overline{(\bar{z})} = z$

2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (число, сопряженное к сумме равно сумме сопряженных чисел)

3. $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ (число, сопряженное к разности равно разности сопряженных чисел)

4. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (число, сопряженное к произведению равно произведению сопряженных чисел)

5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (число, сопряженное к частному равно частному сопряженных чисел)

Доказательство: 1. Очевидно.

Пусть $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, тогда $\bar{z}_1 = a - ib$, $\bar{z}_2 = c - id$

2., 3. $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$, $z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$ и

$$\overline{(z_1 + z_2)} = (a + c) - i(b + d) = a - ib + c - id = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1 - z_2)} = (a - c) - i(b - d) = a - ib + id - c = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

4. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$, $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = (ac - bd) - i(ad + bc)$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc) = \overline{(z_1 z_2)}$$

5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{a - ib}{c - id} = \frac{(a - ib)(c + id)}{(c - id)(c + id)} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

Теорема доказана.

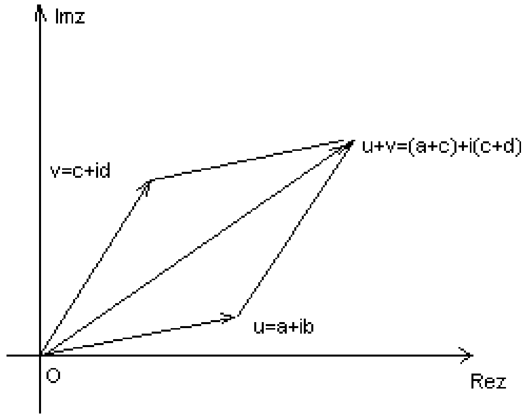
M18.1.6 *Замечание.* Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует. Доказано, что невозможно ввести для комплексных чисел эти понятия таким образом, чтобы они были согласованы с арифметическими операциями.

18.2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

M18.2.1 В прямоугольной системе координат на плоскости отложим от начала координат вектор $(a; b)$ и сопоставим этот вектор комплексному числу $z = a + ib$. Очевидно, что такое

сопоставление будет взаимно однозначным, т.е. каждому комплексному числу соответствует ровно один вектор и каждому вектору соответствует ровно одно комплексное число.
Из определений сложения векторов и сложения комплексных чисел следует, что сложение комплексных чисел можно производить геометрически как сложение соответствующих им векторов.

Аналогично можно производить вычитание комплексных чисел как соответствующих им векторов.



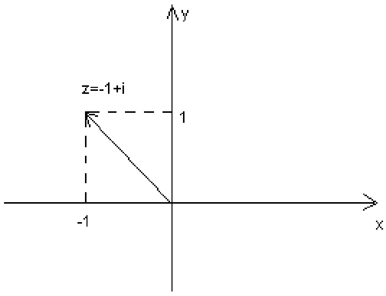
M18.2.2 Пусть $z = x + iy$ - комплексное число. Рассмотрим полярную систему координат, совмещенную с прямоугольной обычным образом: полюс совпадает с началом прямоугольной системы координат, и полярная ось направлена по положительному направлению оси абсцисс. Тогда, поскольку

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases},$$

то $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Замечание: Запись комплексного числа в виде $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *геометрической формой* комплексного числа.

M18.2.3 Определение: Величина $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$. Величина φ называется *аргументом* комплексного числа $z = x + iy$.



Пример: Найти геометрическую форму комплексного числа $z = -1 + i$

Из рисунка видно, что $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ (это можно было определить и аналитически), значит,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

M18.2.4 Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1))}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Значит, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Замечание: Из вышесказанного следует, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 имеют место равенства $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ и $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

M18.2.5 Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда, поскольку при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

$$z^4 = z^3 \cdot z = \rho^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) \text{ и т. д.}$$

Кроме того, $z^{-1} = \dfrac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \dfrac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\rho} = \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$,

$z^{-2} = (z^{-1})^2 = \rho^{-2}(\cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi))$ и т. д.

Таким образом, имеет место *формула Муавра*:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ при } n \in Z.$$

Пример: Найти z^4, если $z = -1 + i$

Решение: Поскольку $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, то

$$z^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4(-1 + 0\cdot i) = -4$$

M18.2.6 Определение: *Корнем степени n из комплексного числа* z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

M18.2.7 Очевидно, что если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то число $w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$, где под выражением $\sqrt[n]{\rho}$ подразумевается арифметический корень степени n из действительного числа, является корнем степени n из числа z.

Кроме того, при любом целом значении числа k комплексное число $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ также является корнем степени n из числа z.

Действительно:

$$w_k^n = \rho\left(\cos\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) =$$

$$= \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$$

Среди чисел $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ различными являются только n чисел. Эти числа получаются, если числу k последовательно придавать значения $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример1: Вычислить $\sqrt{i}$

Решение: Найдем геометрическую форму числа i:

Модуль числа равен 1, аргумент равен $\dfrac{\pi}{2}$, поэтому $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

Поскольку извлекается корень второй степени ($n=2$), в формуле

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

надо будет брать 2 значения: $k=0$ и $k=1$:

При $k=0$: $w_0=\sqrt{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{2}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

При $k=1$:

$w_1=\sqrt{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ***Пример 2:*** Вычислить $\sqrt[6]{1}$

Решение: Модуль комплексного числа $z=1$ равен 1, аргумент равен 0.

$$w_0=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0}{6}+i\sin\frac{0}{6}\right)=1$$

$$w_1=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_3=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$w_4=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_5=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Замечание1: Если комплексные числа, являющиеся корнями степени n из 1, отметить на комплексной плоскости, то они будут являться вершинами правильного n-угольника с центром в начале координат.

Замечание 2: Для любого комплексного числа c уравнение $x^n=c$ имеет ровно n различных комплексных корней.

18.3 Комплексные корни алгебраических уравнений

Понятие комплексного числа позволяет решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом и даже с комплексными коэффициентами.

Пример 1: Решить уравнение $x^2-4x+13=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 13}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$$

Пример 2: Решить уравнение $x^2-(1+2i)x+i-1=0$

$x_{1,2}=\dfrac{1+2i\pm\sqrt{(1+2i)^2-4\cdot(i-1)}}{2}=\dfrac{1+2i\pm 1}{2}$. $x_1=i; x_2=1+i$

М18.3.1 ***Замечание***: Если комплексное число $z = a + ib$ является корнем уравнения с действительными коэффициентами, то комплексно сопряженное к нему число $\bar{z} = a - ib$ также является корнем того же уравнения.

Значит, любой многочлен второй степени можно представить в виде произведения двух многочленов первой степени. Так, в примере 1

$x^2 - 4x + 13 = (x - (2 - 3i))(x - (2 + 3i))$, а в примере 2

$x^2 - (1 + 2i)x + i - 1 = (x - i)(x - (1 + i))$

М18.3.2 В дальнейшем удобно будет считать, что многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней (среди которых могут быть и одинаковые).

М18.3.3 **Определение**: если уравнение имеет k одинаковых корней x_0, то говорят, что корень x_0 имеет *кратность* k.

Пример: Найти все корни многочлена $x^5 - 6x^4 + 9x^3$

Решение: $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = x^3(x^2 - 5x + 6) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 3)(x - 3)$

Выражение $x \cdot x \cdot x \cdot (x - 3)(x - 3)$ равно 0 тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей, т.е. $x = 0$ или $x = 0$ или $x = 0$ или или $x - 3 = 0$. Значит, уравнение имеет 5 корней: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 3$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется мнимой единицей? Что называется комплексным числом? Что называется действительной частью и мнимой частью комплексного числа?
2. Какое число называется комплексно сопряженным с данным числом? Как производятся арифметические действия с комплексными числами? Как связаны между собой комплексное сопряжение и арифметические действия?
3. Какова геометрическая интерпретация комплексных чисел? Что называется геометрической формой комплексного числа? Что такое модуль и аргумент комплексного числа?
4. Как изменяются модули и аргументы при умножении и делении комплексных чисел. Запишите формулу Муавра.
5. Что называется корнем из комплексного числа? Запишите формулу для корня степени n из комплексного числа.