Лекция 2 Обратная матрица

2.1 Понятие обратной матрицы. Метод миноров

А2.1.1 Определение. Пусть дана квадратная матрица A. Матрица A^{-1} называется матрицей, *обратной* к матрице A, если выполняются равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица).

А2.1.2 Метод миноров. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и пусть определитель этой матрицы равен Δ. Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы A: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$. В матрице $\widetilde{A}$ алгебраические дополнения элементов строк матрицы A расположены в соответствующем столбце. Рассмотрим теперь произведение $A \cdot \widetilde{A}$: при умножении i-ой строки матрицы на i-й столбец матрицы $\widetilde{A}$ получим сумму произведений элементов строки на их алгебраические дополнения, значит, получим значение определителя Δ. При умножении i-ой строки матрицы на j-й столбец матрицы $\widetilde{A}$ (при $i \neq j$) получим сумму произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки, значит, получим ноль (докажите!). Таким образом, $A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}$. Если определитель $\Delta \neq 0$, то умножив полученную матрицу на $\frac{1}{\Delta}$, получим единичную матрицу. Аналогично рассматривается произведение $\widetilde{A}A$ - там речь пойдет об умножении элементов столбца на свои или чужие алгебраические дополнения. Таким образом, при $\Delta \neq 0$ получаем $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, а при $\Delta = 0$ получим деление на ноль, следовательно, обратная матрица не существует.

А2.1.3 Алгоритм вычисления обратной матрицы методом миноров:

1. Находим определитель $|A|$ исходной матрицы A. Если $|A| = 0$, то матрица A не имеет обратной.
2. Если $|A| \neq 0$, то транспонируя исходную матрицу, получим матрицу A^T;
3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и строим *присоединенную матрицу* $\widetilde{A}$;
4. Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \widetilde{A}$;

5. Проверяем правильность вычислений, используя равенство $A^{-1}A = E$;

А2.1.4 *Замечание:* после деления элементов присоединенной матрицы $\tilde{A}$ на числовое значение определителя $|A|$ элементы обратной матрицы во многих случаях становятся дробными числами. Для упрощения вычислений при использовании обратной матрицы лучше представлять ее с вынесенным общим множителем $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$. Если элементами матрицы A были целые числа, то матричные операции при таком представлении также будут производиться с целыми числами.

А2.1.5 Пример Вычисляя алгебраические дополнения элементов матриц, найти матрицы, обратные к данным и произвести проверку

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$;

Решение: а) Вычислим определитель матрицы: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$. Вычеркивая первую строку и первый столбец, получим $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 9 = 9$. Аналогично, вычеркивая первую строку и второй столбец, получим $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$. Аналогично $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$. Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) Вычислим определитель матрицы: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = -3$.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов:

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 2$, $B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 2$, $B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$,

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 4$, $B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -11$, $B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$,

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$, $B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$, $B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$.

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $B^{-1}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

А2.1.6 *Замечание 1.* При нахождении обратной матрицы к матрице третьего порядка пришлось вычислить один определитель третьего порядка и девять определителей второго порядка. Если бы метод миноров применялся к матрице десятого порядка, пришлось бы вычислять один определитель десятого порядка и сто (!) определителей девятого порядка. С увеличением порядка матрицы количество вычислений лавинообразно возрастает, поэтому метод миноров не является оптимальным методом нахождения обратной матрицы: его имеет смысл применять для матриц порядка не выше третьего.

А2.1.7 *Замечание 2.* $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$. Действительно, $(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E$.

2.2 Элементарные преобразования строк матрицы

А2.2.1 Определение. *Элементарными преобразованиями строк* матрицы называются:

1) умножение всех элементов любой строки на одно и то же число, отличное от нуля;

2) прибавление ко всем элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

3) перестановка строк.

А2.2.2 Теорема (элементарные преобразования строк и умножение матриц)

1. Умножение всех элементов некоторой строки матрицы A на одно и то же число равносильно умножению этой матрицы слева на некоторую диагональную матрицу;
2. Прибавление ко всем элементам некоторой строки матрицы A соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число равносильно умножению этой матрицы слева на некоторую трансвекцию.

Доказательство. 1) Обозначим $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $D_i(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & .. & .. & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Рассмотрим произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & .. & .. & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Матрица $D_i(\alpha)$ – диагональная, у которой на месте ii находится элемент α, а остальные диагональные элементы равны единице. При умножении первой строки матрицы $D_i(\alpha)$ на любой столбец матрицы A будем получать первый элемент соответствующего столбца матрицы A. То есть, первая строка матрицы A не изменится. При умножении i-ой строки матрицы $D_i(\alpha)$ на любой столбец матрицы A будем получать первый элемент соответствующего столбца матрицы A, умноженный на число α. Таким образом i-я строка матрицы A умножится на число α, а остальные ее строки не изменятся.

2) Обозначим $T_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \beta & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - трансвекция, у которой в i-ой строке и j-ом столбце расположен элемент β, а остальные внедиагональные элементы равны нулю. При умножении любой строки трансвекции, кроме i-ой на столбцы матрицы A ничего не изменится. А при умножении i-ой строки на столбцы матрицы A, из-за того, что в этой строке два ненулевых элемента (единица на i-ом месте и β на j-ом), получим, что к i-ой строке матрицы A прибавилась j-я строка, умноженная на β.

A2.2.3 *Замечание.* Перестановка строк может быть достигнута последовательным применением первых двух элементарных преобразований.

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Прибавим j-ю строку к i-ой:

$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & a_{i3}+a_{j3} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Отнимем от j-ой строки новую i-ю строку:

$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & a_{i3}+a_{j3} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & -a_{i3} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Прибавим к новой i-ой строке новую j-ю:

$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & -a_{i3} & \dots & -a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Умножим новую j-ю строку на (-1):

$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. Строки переставлены. Таким образом, перестановка строк тоже равносильна умножению матрицы A на некоторую матрицу слева (равную произведению трех трансвекций и одной диагональной матрицы).

A2.2.4 Рассмотрим квадратную матрицу A и будем проводить элементарные преобразования строк с целью превратить эту матрицу в единичную. Те же самые преобразования будем проводить и с единичной матрицей. В результате вместо матрицы A получим произведение матриц $B_n...B_2B_1A = E$, где B_i - различные диагональные матрицы и(или) трансвекции. Но тогда, по определению обратной матрицы, получим $B_n...B_2B_1 = A^{-1}$. Поскольку единичная матрица умножалась на те же матрицы $B_n,...B_2,B_1$, то получим $B_n...B_2B_1E = A^{-1}$. Значит, описанный выше способ действительно приводит к получению обратной матрицы.

А2.2.5 П р и м е р. Методом элементарных преобразований найти матрицы, обратные к данным

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение: а) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 9 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычтем из второй строки матрицы первую строку, умноженную на 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на -2:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Слева от черты получили единичную матрицу, значит справа – матрицу, обратную к матрице A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

б) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -4, а к третьей строке – первую, умноженную на -7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & | & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 6, а к первой строке – третью, умноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & | & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$ Поделим вторую строку на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Матричный способ решения СЛАУ

А2.3.1 Систему уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если обозначить $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец правой части, то матричное уравнение запишется в краткой форме: $AX = B$. Умножим обе части этого равенства слева на матрицу A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Тогда $EX = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}B$. То есть, для решения системы достаточно найти обратную матрицу и умножить ее на матрицу-столбец правой части.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 38 \\ 7x + 8y + 10z = 47 \end{cases}.$$

Решение: запишем систему в матричном виде:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 38 \\ 47 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Вычислим матричное произведение

$$A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 38 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

значит, $x = 3;\ y = 2;\ z = 1.$

A2.3.2 *Замечание.* Матричный способ решения СЛАУ является не менее громоздким, чем правило Крамера. Этот способ применяют обычно в тех случаях, когда требуется решить несколько систем линейных уравнений с одной и той же матрицей и различными правыми частями.

2.4 Метод Гаусса

A2.4.1 Рассмотрим систему линейных уравнений, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Все коэффициенты при переменной x_1 не могут быть равны нулю, т.к. в этом случае уравнений было бы больше, чем неизвестных. Будем считать, что коэффициент при первом неизвестном в первом уравнении отличен от нуля (если это не так – можно переставить уравнения). Умножим первое уравнение на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавим ко второму уравнению. Первое уравнение в системе оставим без изменения, а результат проделанных действий запишем вместо второго уравнения; в этом новом втором уравнении коэффициент при первом неизвестном будет равен нулю.

Затем умножим первое уравнение на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и прибавим к третьему уравнению. Результат, не содержащий неизвестного x_1, запишем вместо третьего уравнения.

Продолжая этот процесс, можно добиться того, что в системе все уравнения, кроме первого не будут содержать неизвестного x_1.

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n{}' = b'_1 \\ \qquad a'_{21}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Если определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$ не был равен нулю, то после описанных преобразований ни одно из уравнений не обратится в тождество (верное или неверное).

Допустим, что коэффициент a'_{21} не равен нулю (если это не так, то можно во всех уравнениях переставить неизвестные т. к. от перемены мест слагаемых сумма не изменится). Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{a'_{31}}{a'_{21}}\right)$ и прибавим к третьему уравнению. Новое третье уравнение не будет содержать неизвестного x_2. Затем умножим второе уравнение на $\left(-\frac{a'_{41}}{a'_{21}}\right)$ и прибавим к четвертому, чтобы оно также е содержало неизвестного x_2. Продолжая этот процесс, добьемся того, что во всех уравнениях, начиная с третьего, будет отсутствовать неизвестная x_2.

Далее добьемся того, чтобы во всех уравнениях начиная с четвертого отсутствовал x_3 и т. д. В результате последнее уравнение системы будет содержать не более одного неизвестного, предпоследнее – не более двух неизвестных и т.д.

Из последнего уравнения найдем значение неизвестного x_n и, подставив его в предпоследнее уравнение, найдем x_{n-1} и т.д.

A2.4.2 Пример 1: Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 4x+5y+6z=28 \\ 7x+8y+10z=47 \end{cases}$$

Решение: Умножим первое уравнение на (-4): $-4x-8y-12z=-40$ и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ 7x+8y+10z=47 \end{cases}$$

Теперь умножим первое уравнение на (-7): $-7x-14y-21z=-70$ и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ -6y-11z=-23 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на (-2): $6y+12z=24$ и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ z=1 \end{cases}$$

Значение $z=1$ подставим во второе уравнение системы и найдем $y=2$. Значения $z=1$ и $y=2$ подставим в первое уравнение системы и найдем $x=3$. Система решена.

A9.1.3 Пример 2: Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 4x+5y+6z=28 \\ 7x+11y+15z=38 \end{cases}$$

Решение: Умножим первое уравнение на (-4): $-4x-8y-12z=-40$ и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ 7x+11y+15z=38 \end{cases}$$

Теперь умножим первое уравнение на (-7): $-7x-14y-21z=-70$ и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ -3y-6z=-32 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на (-1) и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ \quad 0=20 \end{cases}$$

Вместо уравнения получили неверное тождество. Система не имеет решений.

Замечание: если при применении метода Гаусса появляется хотя бы одно неверное тождество, то система не имеет решений .

А9.1.4 Пример 3: Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 4x+5y+6z=28 \\ 7x+11y+15z=58 \end{cases}$$

Решение: Умножим первое уравнение на (-4): $-4x-8y-12z = -40$ и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ 7x+11y+15z=58 \end{cases}$$

Теперь умножим первое уравнение на (-7): $-7x-14y-21z=-70$ и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ -3y+-6z=-12 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на (-1) и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -3y-6z=-12 \\ \quad 0=0 \end{cases}$$

Вместо уравнения получили верное тождество. Система имеет бесконечно много решений.

Контрольные вопросы:

1. Какая матрица называется обратной к данной квадратной матрице? Для любой ли квадратной матрицы существует обратная?
2. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы методом миноров.
3. Что называется элементарными преобразованиями строк матрицы?
4. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы методом элементарных преобразований
5. Сформулируйте алгоритм решения системы линейных уравнений матричным способом.
6. Сформулируйте алгоритм метода Гаусса. К чему приведет метод Гаусса, если система не имеет решений? К чему приведет метод Гаусса, если система имеет бесконечно много решений?