Лекция 7 Несобственные интегралы

24.1 Определение и простейшие примеры несобственных интегралов по бесконечному промежутку

М24.1.1 Определение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на бесконечном промежутке $[a;\infty)$ и интегрируемую на любом конечном промежутке $[a;b]$. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx,$$

то говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится*. Интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется *несобственным интегралом по бесконечному промежутку.*

Пример 1. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}$

М24.1.2 Пример 2. Определим, при каких значениях параметра a сходится интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$.

При $a = 1$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln b - \ln 1 = \infty$: интеграл расходится.

При $a \neq 1$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}\left(\lim_{b\to\infty} b^{1-a} - 1\right)$.

Если $1-a<0$, то $\lim_{b\to\infty} b^{1-a} = 0$ и интеграл сходится, если же $1-a>0$, то $\lim_{b\to\infty} b^{1-a} = \infty$ и интеграл расходится.

Итак, интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ сходится тогда и только тогда, когда $a>1$.

М24.1.3 Формула Ньютона-Лейбница Из определения несобственного интеграла по бесконечному промежутку следует формула Ньютона-Лейбница для такого интеграла:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

М24.1.4 Определение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на бесконечном промежутке $(-\infty;a]$ и интегрируемую на любом конечном промежутке $[a;b]$. Если существует конечный предел

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx,$$

то говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится*.

Интеграл также $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ называется несобственным интегралом по бесконечному промежутку.

М24.1.5 Определение: Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на бесконечном промежутке $(-\infty;\infty)$ и интегрируемую на любом конечном промежутке $[a;b]$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

то говорят, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что этот интеграл *расходится*.

Интеграл также $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом по бесконечному промежутку.

24.2 Свойства несобственных интегралов по бесконечному промежутку

М24.2.1 Теорема (свойства несобственного интеграла по бесконечному промежутку)

1) Если $A > a$ и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{A}^{\infty} f(x)dx$
2) Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то для любого числа С сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} Cf(x)dx$
3) Если интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx$ сходятся, то сходятся и интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) + g(x))dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) - g(x))dx$

Доказательство:1) $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) - F(a)$. По определению несобственного интеграла функция $y = f(x)$ интегрируем на промежутке $[a;A]$.

$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{A} f(x)dx + \int\limits_{A}^{\infty} f(x)dx$. Интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{A} f(x)dx$ существуют и конечны, значит, существует и конечен интеграл $\int\limits_{A}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx - \int\limits_{a}^{A} f(x)dx$.

2) $\int\limits_{a}^{\infty} Cf(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} Cf(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} C\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = C\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx =$

$= C\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

1. $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$

$\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \pm \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_{a}^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ *Теорема доказана.*

24.3 Несобственные интегралы от положительных функций

Если подынтегральная функция положительна, то расходимость несобственного интеграла на бесконечном промежутке означает, что предел из определения М24.1.1 равен $+\infty$.

М24.3.1 Теорема (признак сравнения)
Если $f(x)>0$, $g(x)>0$ и найдется число $A\geq a$ такое, что при $x>A$ верно неравенство $f(x)\leq g(x)$ то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a;b]$.

Доказательство: Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_A^{\infty} g(x)dx$, т.е. $\int\limits_A^{\infty} g(x)dx=M<\infty$. Поскольку при $x>A$ верно $f(x)\leq g(x)$, то $\int\limits_A^{\infty} f(x)dx\leq\int\limits_A^{\infty} g(x)dx$, значит, $\int\limits_A^{\infty} f(x)dx\leq M<\infty$ и интеграл $\int\limits_A^{\infty} f(x)dx$ сходится. А, поскольку, функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a;A]$, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится. *Теорема доказана.*

М24.3.2 Пример. Проверить, сходится ли интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$

Решение: Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится и при $x\in[1;\infty)$ имеет место $\frac{1}{x^2+x+1}<\frac{1}{x^2}$. Значит, по признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$ сходится.

М24.3.3 Теорема (предельный признак сравнения) Если $f(x)>0$, $g(x)>0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ $(0<K<\infty)$, то:

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ (при $K=0$ тоже);
2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Практически можно повторить (с небольшими естественными изменениями) доказательство аналогичной теоремы для рядов М4.5.2.

24.4 Несобственные интегралы от произвольных функций

М24.4.1 Необходимый признак сходимости. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon>0$ $\exists A>a$ такое, что для $\forall A_1>A$, $\forall A_2>A$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon .$$

Без доказательства.

M24.4.2 Теорема (об абсолютной сходимости) Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A > a$ такое, что для $\forall A_1 > A$, $\forall A_2 > A$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx\right| = \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon .$$

Но, поскольку, $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx$ (M26.5.10), то из $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \varepsilon$ и M24.4.1 следует сходимость интеграла $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

M24.4.3 *Замечание.* Из сходимости $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ не следует сходимость $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

M24.4.4 Определение. Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся* интегралом, а функция $f(x)$ *абсолютно интегрируемой*. Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ - нет, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*.

M24.4.5 *Замечание.* Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a; \infty)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом же промежутке, то функция $f(x)g(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[a; \infty)$.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \le M$, тогда утверждение следует из очевидного неравенства $|f(x)\cdot g(x)| \le M|f(x)|$.

M24.4.6 Пример. Интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + b^2}\,dx$ сходится, так как функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}$ абсолютно интегрируема, а функция $g(x) = \sin ax$ ограничена.

24.5 Определение и простейшие примеры несобственных интегралов от функций с особыми точками

М24.5.1 Определение. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a;b)$ и неограниченна в любой окрестности точки b. Точка b в этом случае называется *особой точкой* и, если существует предел

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx,$$

то этот предел называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b)$. В случае, если указанный предел конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *сходится*.

М44.5.2 Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0}\arcsin(1-\eta) - 0 = \frac{\pi}{2}$.

М24.5.3 *Замечание 1.* Имеет место аналог формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b}F(x) - F(a).$$

М24.5.4 *Замечание 2.* 1) Можно рассматривать функцию $f(x)$ на промежутке $(a;b]$ с особой точкой a. В этом случае $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x\to a}F(x)$. 2) Можно рассматривать функцию $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ с особыми точками a и b. В этом случае $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \zeta\to 0}}\int_{a+\eta}^{b-\zeta} f(x)dx = \lim_{x\to b}F(x) - \lim_{x\to a}F(x)$. 3) Может оказаться, что функция неограниченна не только на концах рассматриваемого промежутка, но и в некоторых внутренних точках $c_1, < c_2 < \ldots < c_n \in (a;b)$. Тогда рассматривается объединение частичных интервалов $(a;b) = (a;c_1)\cup(c_1;c_2)\cup\ldots\cup(c_n;b)$ и интеграл на каждом из полученных частичных интервалов. Если на каждом из частичных интервалов несобственный интеграл сходится, то он сходится и на интервале $(a;b)$, причем его значение равно сумме значений интеграла на частичных интервалах. Если хотя бы на одном частичном интервале интеграл расходится, то он расходится и на всем интервале $(a;b)$. 4) можно рассматривать также функцию на бесконечном промежутке с особыми точками внутри этого промежутка.

М24.5.5 Пример. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ в зависимости от значения параметра α.

Решение. При $\alpha \neq 1$ имеем $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1$. При $\alpha > 1$ степень переменной x отрицательна, значит, при возведении в степень $0^{1-\alpha}$ происходит деление на ноль и интеграл расходится. При $\alpha < 1$ степень переменной x положительна, значит, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} - 0 < \infty$ и интеграл сходится.

Если $\alpha = 1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^1 = 0 + \infty$ интеграл расходится.

\

24.6 Признаки сходимости несобственных интегралов

М24.6.1 Теорема (признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в промежутке $[a;b)$ и b является единственной особой точкой. Если $f(x)>0$, $g(x)>0$ и найдется число $A \geq a$ такое, что при $x>A$ верно неравенство $f(x)\leq g(x)$ то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a;b-\eta]$.

Доказательство: Идентично доказательству теоремы М24.3.1.

М24.6.2 Теорема (предельный признак сравнения) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы в промежутке $[a;b)$ и b является единственной особой точкой. Если $f(x)>0$, $g(x)>0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ $(0<K<\infty)$, то:

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (при $K=0$ тоже);
2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Без доказательства.

М24.6.3 Следствие (признак сравнения Коши) Если при $x\to b$ функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка λ по сравнению с функцией $\dfrac{1}{b-x}$, то при $\lambda<1$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а при $\lambda\geq 1$ интеграл расходится (при условии, что b - единственная особая точка на промежутке $[a;\, b)$.

М24.6.4 *Замечание.* Утверждения М24.6.1, М24,6.2 и М24.6.3 легко переносятся и на случай интервала $(a;\, b]$ с единственной особой точкой a.

М24.6.5 Необходимый признак сходимости. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особой точкой b необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что для $0<\eta_1<\delta$, $0<\eta_2<\delta$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon .$$

Без доказательства.

М24.6.6 Теорема (об абсолютной сходимости) Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a;b)$ и b является единственной особой точкой. Если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Без доказательства.

М24.6.7 *Замечание.* Из сходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ не следует сходимость $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

М24.6.8 Определение. Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то интеграл $\int_a^d f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся* интегралом, а функция $f(x)$ *абсолютно интегрируемой*. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ - нет, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *условно сходящимся*.

М24.6.9 *Замечание.* Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a; b)$, а функция $g(x)$ ограничена на этом же промежутке, то функция $f(x)g(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[a; b)$.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \le M$, тогда утверждение следует из очевидного неравенства $|f(x) \cdot g(x)| \le M|f(x)|$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение несобственного интеграла по бесконечному промежутку. Что означает, что несобственный интеграл сходится? При каких значениях параметра сходится интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$?
2. Перечислите свойства несобственных интегралов по бесконечному промежутку. Сформулируйте признак сравнения. Сформулируйте предельный признак сравнения.
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости. Сформулируйте теорему об абсолютной сходимости.
4. Что называется особой точкой функции? Дайте определение несобственного интеграла от функции с особой точкой. При каких значениях параметра сходится интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?
5. Сформулируйте признак сравнения и предельный признак сравнения для несобственного интеграла от функции с особой точкой. Сформулируйте признак сходимости Коши. Сформулируйте необходимый признак сходимости. Сформулируйте теорему об абсолютной сходимости.