**Лекция 14 Непрерывность функции одной действительной переменной**

**14.1 Определения непрерывности**

Пусть $x_0$ - предельная точка множества $E$.

**М14.1.1 Определение.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*Замечание 1.* Приведенное определение непрерывности подразумевает, вообще говоря, три допущения: 1) функция $f(x)$ определена в точке $x_0$; б) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; в) значение предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ совпадает со значением функции $f(x)$ в точке $x_0$.

*Замечание 2.* Из определения М14.1.1 видно, что при вычислении предела от непрерывной функции достаточно подставить предельное значение $x_0$ в функцию, находящуюся под знаком предела.

Развернутое определение непрерывности на языке $\varepsilon - \delta$ (определение непрерывности по Коши) выглядит так (просто расшифровано понятие предела из определения М14.1.1):

**М14.1.2 Определение.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

*Замечание.* Если в определении М14.1.1 значок предела заменить на значок правого (левого) предела, то получится определение *правой (левой) непрерывнос*ти функции в точке.

**М14.1.3 Определение (непрерывность по Гейне)** Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$, если для любой последовательности $x_n$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

**М14.1.4 Теорема** Определения непрерывности по Коши и предела по Гейне равносильны.

*Доказательство.* Достаточно повторить доказательство теоремы 13.4.2, заменив в нем $A$ на $f(x_0)$.

**М14.1.5 Определение.** Пусть $\Delta x$ - некоторое число, которое будем называть приращением переменной $x$. Если разность $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеет смысл, то она называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке $x_0$, соответствующим приращению $\Delta x$.

**М14.1.6 Теорема (непрерывность в терминах приращений).** Функция $y = f(x)$ тогда и только тогда непрерывна в точке $x_0$, когда из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$.

*Доказательство.* Заменив в определении М14.1.2 переменную $x$ на $x_0 + \Delta x$, сразу получим требуемое.

**М14.1.7 Определение.** Функция называется *непрерывной на множестве* $E$, если она непрерывна в любой точке этого множества. Множество всех функций, непрерывных на множестве $E$ будем обозначать $C^0(E)$.

## 14.2 Непрерывность элементарных функций

**М14.2.1 Теорема (Непрерывность и арифметические операции)** 1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$ и обе функции непрерывны в этой точке, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны в точке $x_0$; 2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$, обе функции непрерывны в этой точке и $g(x_0)\neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.* Сразу же следует из определения непрерывности М14.1.1 и теоремы о пределе и арифметических операциях М13.6.1.

Примеры непрерывных элементарных функций:

**М14.2.2** Постоянная функция $f(x)=C$ непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из определения М14.1.1).

**М14.2.3** Функция $f(x)=x$ непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из определения М14.1.4).

**М14.2.4** Функция $f(x)=x^n$ при любом $n\in N$ непрерывна в любой точке числовой прямой (следует из М14.2.3 и теоремы М14.2.1).

**М14.2.5** Любой многочлен $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ непрерывен в любой точке числовой прямой (следует из М14.2.4, М14.2.2 и М14.2.1).

**М14.2.6** Любая дробно-рациональная функция $f(x)=\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$ непрерывна в любой точке числовой прямой, кроме корней многочлена $p(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ (следует из М14.2.5 и М14.2.1).

**М14.2.7** Несколько сложнее доказываются следующие непрерывности:

- показательная функция $f(x)=a^x$ непрерывна на всей числовой прямой;

- функции $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\cos x$ непрерывны на всей числовой прямой;

- функция $f(x)=tgx$ непрерывна на всей числовой прямой, кроме точек вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

- функция $f(x)=ctgx$ непрерывна на всей числовой прямой, кроме точек вида $x=\pi k,\ k\in Z$;

-функция $f(x) = \log_a x$ непрерывна в любой точке интервала $(0; \infty)$;

### 14.3 Разрывы функций

**М14.3.1 Определение.** Если функция не является непрерывной в некоторой точке множества $E$ (области определения функции), то такая точка называется *точкой разрыва* функции.

**М14.3.2** *Замечание.* На языке $\varepsilon - \delta$ разрывность функции в точке $x_0$ записывается так:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in E \quad |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Допустим, функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ .Тогда для непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали оба односторонних предела, оба были конечны и совпадали со значением функции в этой точке. Значит, для разрывности функции в точке $x_0$ достаточно нарушения хотя бы одного из перечисленных условий. В связи с этим различают три вида точек разрыва:

**М14.3.3 Определение (Классификация разрывов)**

- точка $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$;

- точка $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A < \infty, \;\; \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B < \infty, \;\; A \neq B$;

- точка разрыва $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$ во всех остальных случаях.

**М14.3.4** *Замечание.* В определении точек разрыва первого и второго рода вообще не фигурирует значение функции $f(x_0)$. Значит, в этих случаях не важно, определена функция $f(x)$ в точке $x_0$ или нет. Если же в точке $x_0$ функция $f(x)$ не определена, но при этом $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ то можно говорить об устранимом разрыве функции в этой точке.

**М14.3.5 Пример.** Функция $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв, функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{x}$ имеют в точке $x_0 = 0$ разрывы первого рода, функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ и $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ имеют в точке $x_0 = 0$ разрывы второго рода.

| Примеры разрывов функции в точке 0 |
| --- |

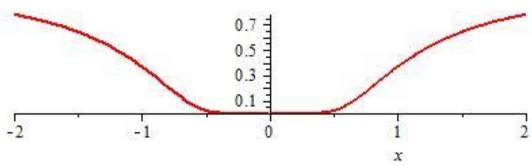



График функции $y = e^{-\frac{1}{x}}$

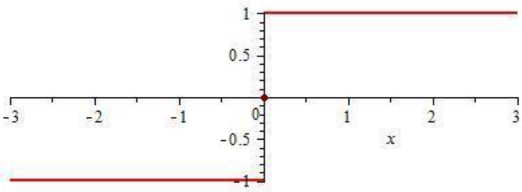



График функции $y = sgnx$

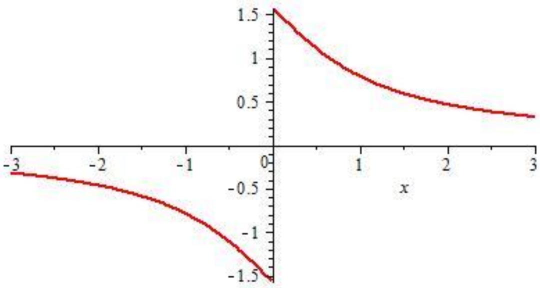



График функции $y = arctg\frac{1}{x}$

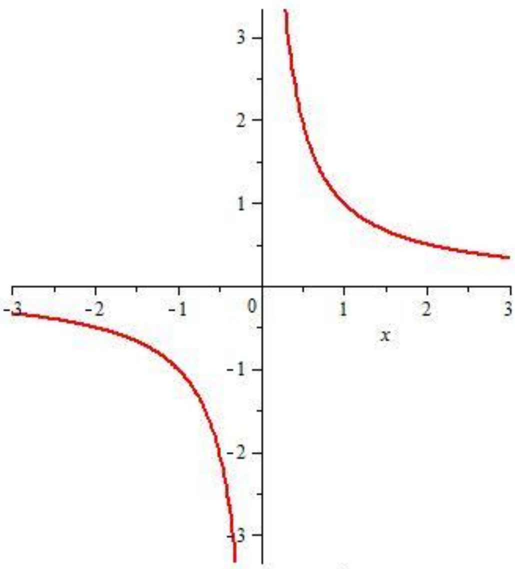



График функции $y = \frac{1}{x}$

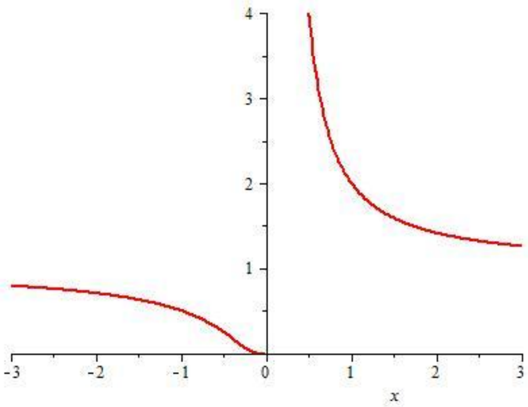



График функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$

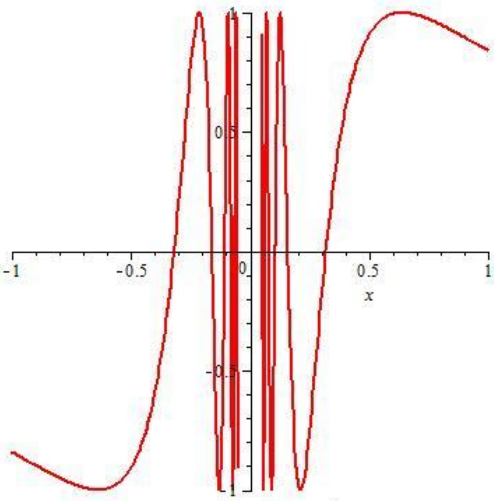



График функции $y = \sin\frac{1}{x}$

**М14.3.6 Пример (функция Дирихле)** Функция Дирихле $\chi_Q(x) = \begin{cases} 1\ при\ x \in Q \\ 0\ \ при\ x \notin Q \end{cases}$ разрывна во всех точках и все точки разрыва – второго рода.

**M14.3.7 Пример (Функция Римана)** Функция Римана $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ } при\ x = \frac{m}{n} \in Q\left(\frac{m}{n} - несократимая\ дробь\right) \\ 0 \text{ } при\ x \notin Q \end{cases}$ разрывна во всех рациональных точках и непрерывна в иррациональных точках.

## 14.4 Монотонные функции

**M14.4.1 Теорема (Разрывы монотонной функции)** Если монотонная функция, определенная на некотором промежутке, имеет разрывы, то это разрывы первого рода.

*Доказательство.* Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(a;b)$ и имеет разрыв в точке $x_0$. Тогда, применив к промежутку $(a;x_0)$ теорему M10.5.1 о пределе монотонной ограниченной функции (ограниченность следует из возрастания $f(x) \le f(x_0)$), получим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ конечный левый предел. Из той же теоремы следует, что функция имеет конечный правый предел, поэтому, если в точке $x_0$ имеет место разрыв, то это разрыв первого рода.

**M14.4.2** *Следствие 1.* Если областью значений монотонной функции, заданной на промежутке $(a;b)$, является некоторый промежуток $(c;d)$, то эта функция непрерывна на промежутке $(a;b)$.

**M14.4.3** *Следствие 2.* Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

## 14.5 Локальные свойства непрерывных функций

**M14.5.1 Теорема (ограниченность непрерывной функции)** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

*Доказательство.* Следует из определения непрерывности M14.1.2.

**M14.5.2 Теорема (сохранение знака непрерывной функции)** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0) \ne 0$, то в некоторой окрестности точки $x_0$ значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и $f(x_0)$.

*Доказательство.* Следует из M14.5.1.

**M14.5.3 Теорема (непрерывность композиции функций)** Пусть функция $g(x)$ определена в промежутке $(c;d)$, а функция $f(x)$ - в промежутке $(a;b)$ и при этом значения функции $f(x)$ содержатся в промежутке $(c;d)$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $g(x)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in (c;d)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x_0$.

*Доказательство.* Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, в силу непрерывности функции $g(x)$, найдется число $\xi > 0$ такое, что из $|y - y_0| < \xi$ следует $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. В силу непрерывности функции $f(x)$ найдется число $\delta > 0$ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Значит, для числа

$\varepsilon > 0$ найдено число $\delta > 0$ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|g(y) - g(y_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, что и требовалось.

## 14.6 Теоремы Больцано-Коши

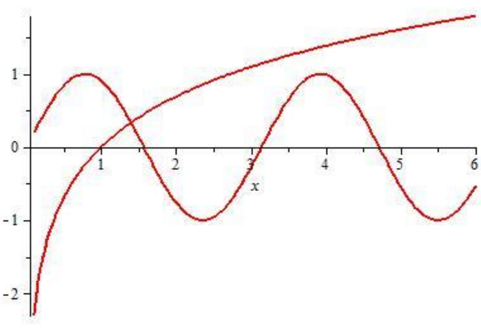
**М14.6.1 Теорема Больцано-Коши (о нулевом значении).** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает в точках $a$ и $b$ значения разных знаков, то $\exists c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = 0$.

*Доказательство.* Допустим, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Рассмотрим значение функции в середине промежутка $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доказана. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, то рассмотрим промежуток $\left(\frac{a+b}{2}; b\right)$; а если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, то промежуток $\left(a; \frac{a+b}{2}\right)$. На концах этого промежутка функция снова имеет значения разных знаков. Рассмотрев значение функции в середине нового интервала, разобьем его на два интервала, на концах одного из которых х функция снова будет иметь значения разных знаков. Продолжая этот процесс деления пополам, либо получим точку, в которой $f(c) = 0$, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Значение каждого из этих пределов и есть искомая точка.

**М14.6.2** *Замечание.* Теорему о нулевом значении можно использовать для приближенного решения уравнений.

**М14.6.3 Пример.** Найти корни уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$.

*Решение:* Функция $y = \sin 2x$ - периодическая, а функция $y = \ln x$ монотонно возрастающая, поэтому графики этих функций имеют единственную точку пересечения, которой соответствует нуль функции $y = \sin 2x - \ln x$. Для отделения корня используем графический способ. Из графика следует, что значение корня лежит в промежутке $[1;\ 1{,}5]$. Таким образом, имеем нулевое приближение $\alpha_1 = \frac{1{,}5+1}{2} = 1{,}25$ (середина промежутка). Точность $\Delta_1$ такого приближения равна половине длины промежутка $[1;\ 1{,}5]$, т.е. $\Delta_1 = \frac{1{,}5-1}{2} = 0{,}25$. Корень лежит, вероятно, внутри промежутка $[1{,}25;\ 1{,}5]$. Поверим эту гипотезу: $y(1{,}25) = \sin 2{,}5 - \ln 1{,}25 \approx 0{,}5972 + 0{,}2231 \approx 0{,}82$, а $y(1{,}5) = \sin 3 - \ln 1{,}5 \approx 0{,}14 - 0{,}41 \approx -0{,}27$. В крайних точках промежутка $[1{,}25;\ 1{,}5]$ функция имеет разные знаки, поэтому за следующее приближение корня можно принять середину отрезка $[1{,}25;\ 1{,}5]$, т.е. $\alpha_2 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375$, точность которого равна $\Delta_1 = \frac{1{,}5-1{,}25}{2} = 0{,}125$.



Графическое решение уравнения sin2x=lnx

Снова делим отрезок $[1{,}25;\ 1{,}5]$ пополам и находим значение функции $y=\sin 2x-\ln x$ в его середине 1, 375: $y(1{,}375)\approx 0{,}08$ .Таким образом, корень лежит на промежутке $[1{,}375;\ 1{,}5]$. Его середина $\alpha_3=\dfrac{1{,}375+1{,}5}{2}=1{,}4375$ - очередное приближение корня уравнения с точностью $\Delta_3=\dfrac{1{,}5-1{,}375}{2}=0{,}0625$ ; при этом $y(1{,}4375)\approx -0{,}1$ . Значит, корень лежит на промежутке $[1{,}375;\ 1{,}4375]$ и его середина $\alpha_4=\dfrac{1{,}375+1{,}4375}{2}=1{,}40625$ - следующее приближение корня с точностью $\Delta_4=\dfrac{1{,}4375-1{,}375}{2}=0{,}03125$. Продолжая процесс деления отрезка пополам, можно получить значение корня уравнения с любой заданной точностью.

**М14.6.4 Теорема Больцано-Коши (о промежуточном значении)** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом). Если в каких-либо точках этого промежутка функция принимает значения $A$ и $B>A$, то для любого числа $C\in(A;B)$ найдется точка $c$ такая, что $f(c)=C$.

*Доказательство.* Пусть $f(a)=A$ , $f(b)=B$ и для определенности $a<b$ . Тогда функция $F(x)=f(x)-C$ на промежутке $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы М14.1.1. Значит, $\exists c\in(a;b)$ такая, что $F(c)=0$, то есть $f(c)=C$.

## 14.7 Обратная функция. Теоремы Вейерштрасса

**М14.7.1 Теорема (о существовании обратной функции)** Пусть функция $f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке $X$ (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом). Тогда в промежутке $Y$ значений этой функции существует однозначная обратная функция, являющаяся непрерывной и имеющая тот же характер монотонности.

*Доказательство*. Пусть $f(x)$ возрастает на промежутке $X$ . Из теоремы 14.6.4 следует, что значения непрерывной функции $f(x)$ сплошь заполняют промежуток $Y$, а в силу монотонности для каждого числа $x_0\in X$ найдется ровно одно число $y_0\in Y$ такое, что $f(x_0)=y_0$. Сопоставив каждому числу $y\in Y$ его прообраз $x\in X$ , получим однозначную обратную функцию $f^{-1}(y)$.

Пусть $y_1<y_2$ и $f^{-1}(y_1)=x_1$, $f^{-1}(y_2)=x_2$ , но тогда, в силу определения обратной функции, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. Если было бы $x_1>x_2$, то тогда, в силу возрастания функции $f(x)$ было бы $f(x_1)>f(x_2)$, т. е. $y_1>y_2$ , что противоречит предположению $y_1<y_2$ . Значит, обратная функция также возрастающая.

Непрерывность обратной функции является очевидным следствием М14.4.2.

**М14.6.2 Пример.** Найдем функции, обратные к *гиперболическому синусу* $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ и *гиперболическому косинусу* $z=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ .

*Решение.* Из уравнения $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ заменой $t=e^x$ получаем $2y=t-\frac{1}{t}$ ; $t^2-2yt-1=0$ ; $t=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$. Поскольку $t=e^x>0$, то должно быть $t=y+\sqrt{y^2+1}$. Тогда $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$. Функцию $arshx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, обратную к гиперболическому синусу, называют ареа-синус.

Аналогично находится ареа-косинус: $arcch=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$.

**М14.6.3 Теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существуют числа $m\in R, M\in R,\ m\le M$ такие, что для $\forall x\in[a;b]$ выполняются неравенства $m\le f(x)\le M$ .

**М14.6.4 Теорема Вейерштрасса (о наибольшем и наименьшем значениях)** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных верхней и нижней граней.

*Доказательство.* Пусть $M=\sup\limits_{x\in[a;b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a;b]}f(x)$. Допустим, что для $\forall x\in[a;b]$ имеет место неравенство $f(x)<M$ , то есть точная верхняя грань не достигается. Рассмотрим функцию $F(x)=\frac{1}{M-f(x)}>0$. Поскольку знаменатель в ноль не обращается, то $F(x)$ непрерывна и, по теореме М13.2.2 ограничена: $F(x)\le\mu\ (\mu>0)$ . Тогда $\frac{1}{M-f(x)}\le\mu$ и $f(x)\le M-\frac{1}{\mu}$ . Последнее неравенство противоречит тому, что $M=\sup\limits_{x\in[a;b]}f(x)$. Аналогично можно доказать, что достигается и точная нижняя грань.

## 14.7 Равномерная непрерывность

**М14.7.1 Определение.** Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на промежутке $X$ (конечном или бесконечном, замкнутом, открытом или полуоткрытом), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in X$ , $x_2\in X$ из неравенства $|x_1-x_2|<\delta$ следует $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

**М14.7.2** *Замечание 1.* Если подробно расписать определение непрерывности функции на промежутке $X$ (М14.1.8), то получим: для любого числа $\varepsilon>0$ и любых точек $x_1\in X$ , $x_2\in X$ найдется число $\delta>0$ такое, что из неравенства $|x_1-x_2|<\delta$ следует $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Отличие непрерывности на промежутке от равномерной непрерывности заключается в том, что в определении М14.7.1 число $\delta>0$ одно и то же для всех пар чисел $x_1\in X$ , $x_2\in X$ , а в определении М14.1.8 разным парам чисел $x_1\in X$ , $x_2\in X$ , вообще говоря, соответствуют разные значения $\delta>0$.

**М14.7.2** *Замечание 2.* Отрицание равномерной непрерывности на промежутке выглядит так: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся точки $x_1 \in X$ , $x_2 \in X$ такие, что $|x_1 - x_2| < \delta$ , но т $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$ .

**М14.7.3** *Замечание 3.* Очевидно, что любая равномерно непрерывная на промежутке функция непрерывна на этом промежутке. Существуют непрерывные функции, не являющиеся равномерно непрерывными.

**М14.7.4 Примеры.** 1) Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty;\infty)$. Пусть $\varepsilon > 0$ , тогда можно взять $\delta = \varepsilon$ . Действительно, если $|x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$ , то $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon$ .

2) Функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(\infty;\infty)$. Заметим, что для любых действительных чисел $a$ и $b$ , не равных одновременно нулю, выполняется неравенство $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (проверяется возведением в квадрат). Тогда, обозначив $a = x_1$, $a + b = x_2$ , получим $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \le \sqrt{x_2 - x_1}$ . Пусть $\varepsilon > 0$ , тогда можно взять $\delta = \varepsilon^2$ (при $\varepsilon < 1$ ). Действительно, $|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right| \le \sqrt{x_2 - x_1} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$ .

3) Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(-\infty;\infty)$. Пусть $\varepsilon = 0{,}9$ рассмотрим последовательности точек $x_{n1} = \sqrt{n+1}$ , $x_{n2} = \sqrt{n}$ , тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |x_1 - x_2| = 0$ , но $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Значит, для $\varepsilon = 0{,}9$ как бы близко ни были выбраны точки $x_{n1} = \sqrt{n+1}$, $x_{n2} = \sqrt{n}$ (это возможно в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} |x_1 - x_2| = 0$), будет $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 < 0{,}9$.

4) Функция $y = \sin x^2$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(-\infty;\infty)$. Аналогично предыдущему примеру можно рассмотреть последовательности точек $x_{n1} = \sqrt{\frac{\pi(n+1)}{2}}$, $x_{n2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ .

Примеры функций, не являющихся равномерно непрерывными

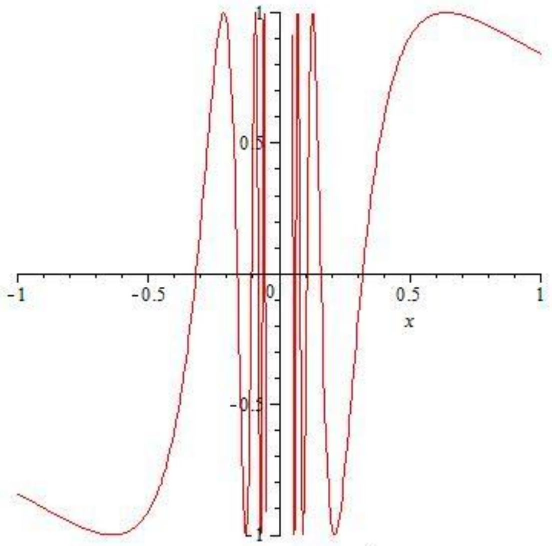


График функции $y = \sin\frac{1}{x}$

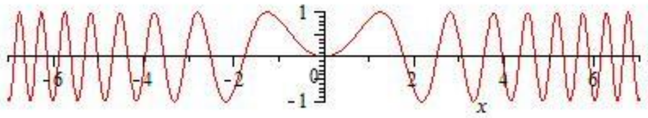


График функции $y = \sin x^2$

5) Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на любом промежутке $(0;a)$. Действительно, в любой окрестности точки $x_0 = 0$ есть значения функции, равные 1 и -1. Значит, если взять $\varepsilon < 2$, то условие равномерной непрерывности не выполнится.

6) Если непрерывная функция определена на открытом промежутке $(a;b)$ и неограничена в любой окрестности точки $a$ (или $b$), то функция не является равномерно непрерывной на этом промежутке.

**М14.7.5 Теорема Кантора (о равномерной непрерывности на отрезке)** Если функция равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на нем.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение непрерывной в точке функции через определение предела. Дайте определение непрерывной в точке функции на языке $\varepsilon - \delta$.
2. Дайте определение непрерывной в точке функции через понятие приращения. Дайте определение непрерывной в точке функции на языке последовательностей. Дайте определение функции, непрерывной на множестве.
3. Сформулируйте теорему о непрерывности и арифметических операциях. Приведите примеры непрерывных элементарных функций.
4. Что называется точкой разрыва функции? Дайте определение устранимого разрыва, разрыва первого рода, разрыва второго рода.
5. Сформулируйте теорему о разрывах монотонной функции. Сформулируйте теорему об ограниченности непрерывной функции.
6. Сформулируйте теорему о сохранении знака непрерывной функции. Сформулируйте теорему о непрерывности композиции функций.
7. Сформулируйте теорему Больцано-Коши о нулевом значении. Сформулируйте теорему Больцано-Коши о промежуточном значении.
8. Сформулируйте алгоритм приближенного решения уравнений.

9. Сформулируйте теорему о существовании обратной функции. Сформулируйте теорему вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.
10. Дайте определение равномерной непрерывности. Сформулируйте теорему Кантора.