MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Gajdová

Jonesův polynom

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Jonesův polynom

Autor: Anna Gajdová

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Jones polynomial

Author: Anna Gajdová

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod

Studium uzlových invariantů a polynomů

1. Definice a vlastnosti Jonesova polynomu

Definice, důkaz ekvivalence definic Předpokládám reudenaistra a pod

Studium invariantů, polynomů Skein relation Uzel Link Pro linky? Uzly? Diagramy - popsat?

Ukázat, že ampirichal knot má substituci (wiki říká, že přes kauffman)

Uzel, orientace, link. Vhodné věci tučně

1.1 začátek

Při definování Jonesova polynomu je důležité rozlišovat mezi linkem a jeho diagramem, tedy vhodnému rovinnému nakreslení nějaké jeho projekce. Každý uzel má nekonečně mnoho diagramů, ovšem uzlový invariant každému přiřadí stejnou hodnotu (což je blbá věta)

V diagramu orientovaného linku rozlišujeme křížení s kladnou a zápornou orientací, viz obrázek.

Pro popis polynomů uzlech a lincích se používají skein (česky přadeno) vztahy. Skein vztah popisuje, jaká je spojitost mezi polynomy tří linků L_+, L_- a L_0, jejichž diagramy jsou identické až na oblast jednoho křížení. V linku L_+ má toto křížení kladnou orientaci, v L_- zápornou a v L_0 je křížení rozpojené, viz obrázek.

1.2 Definice

Definice 1. *Jonesův polynom orientovaného linku L je laurentův polynom značený v proměnné $\sqrt{t}$ (tj. polynom v $Z[\sqrt{t}, \sqrt{t^{-1}}]$), značený $V_K(t)$, který*

- *je invariantní vůči *** transformacím,*
- *je normalizovaný, tedy polynom $V_\circlearrowleft$ triviálního uzlu má hodnotu 1 ,*
- *splňuje skein vztah*

$$\frac{1}{t}V_{L+} - tV_{L-} = (\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})V_{L_0}$$

Lemma 1. *Lemma o tom, jak se spočítá polynom sjednocení unknots. Vzorec*

Důkaz. Pro dvě kružnice ze skein, pro dvě to plyne indukcí.

□

Poznámka. Z každého diagramu uzlu lze změnou křížení z kladného na záporné či obraceně získat diagram triviálního uzlu. Z každého diagramu linku tedy můžeme změnou křížení získat diagram sjednocení triviálních uzlů, jejichž polynom známe podle předchozího lemmatu. Jonesův polynom každého linku lze tedy díky skein vztahu rekurzivně spočítat z jeho libovolného diagramu. Definice je tím pádem korektní.

Definice Jonesova polynomu pomocí skein vztahů není příliš vhodná pro algoritmický výpočet. K němu použijeme ekvivalentní definici založenou na použití tzv. závorkového polynomu (bracket polynomial, Kauffman bracket).

1.3 Závorkový polynom

Závorkový polynom je definovaný pouze pro diagramy neorientovaných linků (tedy nikoli pro samotné linky). Je počítán z jednodušších uzlů.

Definice 2. *Závorkový polynom neorientovaného diagramu D, značení $\langle D\rangle$, je Laurentův polynom v proměnné A, definovaný třemi odvozovacími pravidly:*

i. $\langle \bigcirc \rangle = 1$, *kde* $\bigcirc$ *značí diagram s jednou komponentou bez křížení*

ii. $\langle krizeni\rangle = A\langle vert\rangle + A^{-1}\langle hor\rangle$, *kde krizeni značí diagram obsahující křížení, vert je diagram, který je shodný až na dané křížení, které je vertikální rozpojeno a hor je diagram, v němž je křížení rozpojeno horizontálně.*

iii. $\langle D \cup \bigcirc\rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D\rangle$, *kde* $D \cup \bigcirc$ *značí sjednocení diagramu* D *a diagramu s jednou komponentou bez křížení.*

Důsledek. $\langle krizeniopacne\rangle = A\langle hor\rangle + A^{-1}\langle vert\rangle$

Lemma 2. $\langle smycka\rangle = A^{-3}\langle odsmycka\rangle$ $\langle smyckanaopak\rangle = A^{3}\langle odsmycka\rangle$

Důkaz. Par obrazku

□

Je známý výsledek, že dva diagramy znázorňují stejný lnk (jsou ekvivalentní), pokud mezi nimi existuje série Reidematreových pohybů. Předchozí lemma nám říká, že závorkový polynom není invariantní vůči prvnímu typu Reidemastra. Je ovšem invariantní vůči zbylým typům.

Tvrzení 3. *Závorkový polynom je invariantní vůči druhému Reidemastrovi*

Důkaz. Par obrazku

□

Důsledek. Závorkový polynom je invariantní vůči třetímu Reidemastrovi.

Důkaz. Par obrazku

□

Potřebujeme tedy nějakou úpravu, aby to fungovalo. Měřit míru zakroucení, writhe.

Definice 3. *Zakroucení (writhe) orientovaného diagramu D je součet znamení všech křížení v D, značí se $w(D)$.*

Definice 4. *Normalizovaný závorkový polynom orientovaného linku L definijeme $X(L) = (-A^3)^{-w(D)}\langle D\rangle$, kde je libovolný diagram linku L.*

Korektnost definice plyne z následujícího tvrzení.

Tvrzení 4. *Normalizovaný závorkový polynom je uzlový (linkový) invariant.*

Důkaz. Již víme, že je invariatní vůčí dva a tři, podle lemmatu bla bla je i podle jedna a je to hotovo. □

Věta 5. *Normalizovaný závorkový polynom se substituovanou proměnnou je roven Jonesovu polynomu.*

Důkaz. Jedna sedi podle tvrzení Dva sedi podle definice Tři se musí nějak dokázat □

Ještě ampirichal knot? Asi už je to navíc.

2. Druhá

2.1 Co v ní

Je to v tride number P Popis algoritmu, vypocet horniho odhadu, dolní odhad pro nějakou třídu uzlů, na které se to rozbije, skripta z počítačové algebry, důkaz správnosti algoritmu Odhad složitosti?

Bylo by zajímavé identifikovat, pro které typy uzlů je algoritmus efektivní a pro které naopak dosahuje nejhorších výsledků. Rychle na kanonickych nakreslenich torus uzlu a preclikovych uzlu.

3. Třetí

3.1 Co v ní

Experiment, náhodné uzly, experimenty na jinych uzlech, různé algoritmy? Zatim urcite nechat probehnout na dvanacti uzlech, Pak na velkych nahodnych uzlech Pak na nejakych specialnich uzlech podle meho uvazeni Jak generuji nahodne uzly Bylo by zajímavé identifikovat, pro které typy uzlů je algoritmus efektivní a pro které naopak dosahuje nejhorších výsledků.

Závěr

Seznam použité literatury

ANDĚL, J. (1998). *Statistické metody.* Druhé přepracované vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-27-8.

ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky.* Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.

COX, D. R. (1972). Regression models and life-tables (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **34**(2), 187–220.

DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M. a RUBIN, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**(1), 1–38.

GENBERG, B. L., KULICH, M., KAWICHAI, S., MODIBA, P., CHINGONO, A., KILONZO, G. P., RICHTER, L., PETTIFOR, A., SWEAT, M. a CELENTANO, D. D. (2008). HIV risk behaviors in sub-Saharan Africa and Northern Thailand: Baseline behavioral data from project Accept. *Journal of Acquired Immune Deficiency Syndrome*, **49**, 309–319.

KAPLAN, E. L. a MEIER, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, **53**(282), 457–481.

LEHMANN, E. L. a CASELLA, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* Second Edition. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-98502-6.

STUDENT (1908). On the probable error of the mean. *Biometrika*, **6**, 1–25.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

A. Přílohy

A.1 První příloha