MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Anna Gajdová

Jonesův polynom

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Jonesův polynom

Autor: Anna Gajdová

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Jones polynomial

Author: Anna Gajdová

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Stanovský David, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod

Matematický uzel je vnoření kružnice do trojrozměrného euklidovského prostoru, neboli neformálně zamotaný provázek se spojenými konci. Teorie uzlů se často zabývá otázkou, jak od sebe rozpoznat různé uzly či jak určit, jestli rozmotáním daného uzlu může vzniknout uzel triviální. Jedním způsobem, jak na tyto otázky odpovědět, je studium uzlových invariantů, tedy vlastností, které jsou stejné pro ekvivalentní uzly.
Užitečným druhem invariantů jsou invarianty polynomiální, mezi něž patří například Alexanderův nebo Conwayův polynom. V roce 1985 publikoval novozélandský matematik Vaughan Jones práci o novém polynomu, který objevil při studiu operátorových algeber [1]. Jeho výsledky měly velký vliv na vývoj oboru a objev nových druhů uzlových polynomů [2].
Tato práce se zabývá právě Jonesovým polynomem a algoritmem na jeho výpočet. Součástí práce je také implementace tohoto algoritmu a jeho testování.

Text práce je rozdělen do tří kapitol.
První kapitola je věnována definici Jonesova polynomu, jeho vlastnostem a ekvivalentní definici pomocí jiného uzlového polynomu, závorkového polynomu.
V druhé kapitole je na základě poznatků kapitoly první odvozen algoritmus na výpočet Jonesova polynomu a jeho varianty. Je zde také odhadnuta jeho výpočetní složitost.
V závěrečné kapitole jsou uvedeny výsledku testování algoritmu na datech. Algoritmus byl otestován mimo jiné na náhodných uzlech a lincích s větším počtem křížení a zvláštních typech uzlů. Jsou zde také srovnány rychlosti výpočtu různých variant algoritmu.

1. Definice a vlastnosti Jonesova polynomu

Cílem této kapitoly je definovat Jonesův polynom, dokázat jeho základní vlastnosti a popsat souvislost se závorkovým polynomem. Vycházíme z materiálů [2, 3, 4] a rozvinutí cvičení v těchto zdrojích.

1.1 Základní pojmy

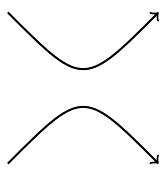
Jonesův polynom je invariant nejen uzlů, ale také *linků*, tedy více propletených uzlů. Pokud není řečeno jinak, pracujeme v textu s linky.
Při definování Jonesova polynomu je důležité rozlišovat mezi linkem a jeho *diagramem*. Diagram je vhodné rovinné nakreslení určité linkové projekce, v němž je rozlišeno, jestli křížení vedou zvrchu, nebo zdola. Každý link má nekonečně mnoho diagramů.
V diagramu orientovaného linku rozlišujeme křížení s *kladnou* a *zápornou orientací*, viz obrázek 1.1.

(a) Kladná orientace (b) Záporná orientace

Obrázek 1.1: Orientace křížení

Pro popis polynomů na uzlech a lincích se často používají *skein vztahy* [1]. Skein vztahy určují, jaká je spojitost mezi polynomy tří linků L_+, L_- a L_0, jejichž diagramy jsou identické až na oblast jednoho křížení. V linku L_+ má toto křížení kladnou orientaci, v L_- zápornou a v L_0 je křížení rozpojené, viz obrázek 1.2.

(a) L_+ (b) L_-



(c) L_0

Obrázek 1.2: Diagramy skein vztahu

[1]česky přadenové vztahy

1.2 Definice Jonesova polynomu

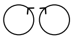
Definice 1. Jonesův polynom *orientovaného linku L je Laurentův polynom v proměnné $t^{1/2}$ (tj. polynom v $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$), značený $V_L(t)$, který*

1. *je linkový invariant,*
2. *je normalizovaný, tedy polynom $V_{\circlearrowleft}$, kde $\circlearrowleft$ je orientovaný triviální uzel, má hodnotu* 1,
3. *splňuje skein vztah*

$$\frac{1}{t}V_{L_+} - tV_{L_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{L_0}.$$

Lemma 1. *Buď L link, který se skládá z k neprotínajících se orientovaných triviálních uzlů. Pak pro Jonesův polynom linku L platí:*

$$V_L(t) = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-1}.$$

Důkaz. Libovolně orientované triviální uzly jsou ekvivalentní. Vzorec tedy stačí dokázat pro diagram skládající se z k libovolně orientovaných disjunktních kružnic, použijeme matematickou indukci.
Pro $k = 1$ vzorec platí podle druhé podmínky v definici 1.
Předvedeme i případ, kdy $k = 2$. Pak $L_0 =$ , $L_- =$  a $L_+ =$ .
Diagramy L_+ a L_- zobrazují triviální uzly, takže $V_{L_+} = V_{L_-} = 1$. Použitím skein vztahu získáme

$$V_L = V_{L_0} = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Pro $k > 2$ jsou L_- a L_+ diagramy linků s $k-1$ kružnicemi, z indukčního předpokladu a ze skein vztahu získáme vzorec

$$V_L = V_{L_0} = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{k-1}.$$

□

Poznámka. Z každého uzlového diagramu lze změnou několika křížení vedených zvrchu na křížení vedených zdola získat diagram triviálního uzlu. Z každého diagramu linku tedy můžeme změnou křížení získat diagram sjednocení triviálních uzlů, jejichž Jonesův polynom je podle předchozího lemmatu známý. Jonesův polynom každého linku lze tedy pomocí skein vztahu rekurzivně spočítat z jeho libovolného diagramu. Z toho plyno korektnost a jednoznačnost definice.

Definice Jonesova polynomu pomocí skein vztahů není vhodná pro algoritmický výpočet, neboť rozpoznání, jestli diagram odpovídá triviálnímu uzlu, je složitý problém. K výpočtu využijeme ekvivalentní definici založenou na použití *závorkového polynomu.*

1.3 Závorkový polynom

Závorkový polynom [2] je definován pouze pro diagramy neorientovaných linků, nikoli pro samotné linky.

Definice 2. Závorkový polynom *neorientovaného diagramu D, značený $\langle D \rangle$, je Laurentův polynom v proměnné A definovaný třemi odvozovacími pravidly:*

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$, *kde* $\bigcirc$ *značí diagram s jednou komponentou bez křížení,*

2. $\langle \quad \rangle = A\langle \quad \rangle + A^{-1}\langle \quad \rangle$, *kde značí diagram obsahující toto křížení; je diagram, který je s ním shodný až na dané křížení, které je zde vertikální rozpojeno; a je diagram, v němž je křížení rozpojeno horizontálně,*

3. $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D \rangle$, *kde* $D \cup \bigcirc$ *značí sjednocení diagramu D a diagramu s jednou komponentou bez křížení.*

Poznámka. Pokud vztah v bodě *ii.* předchozí definice otočíme o 90°, získáme vztah $\langle \quad \rangle = A\langle \quad \rangle + A^{-1}\langle \quad \rangle$.

Lemma 2. *Pro závorkové polynomy linků, jejichž diagramy obsahují smyčku, platí*

1. $\langle \quad \rangle = -A^{-3}\langle \quad \rangle$

2. $\langle \quad \rangle = -A^{3}\langle \quad \rangle$

Důkaz. Tady formátovat rovnátka Použitím odvozovacích pravidel dokážeme první bod:
$\langle \quad \rangle = A\langle \quad \cup \bigcirc \rangle + A^{-1}\langle \quad \rangle = A(-A^2 - A^{-2})\langle \quad \rangle + A^{-1}\langle \quad \rangle = -A^{-3}\langle \quad \rangle$
Druhý bod se dokáže analogicky.

□

Dva diagramy znázorňují stejný link (jsou ekvivalentní), pokud mezi nimi existuje série Reidemeisterových pohybů. Z lemmatu 2 plyne, že závorkový polynom není invariantní vůči Reidemeisterovu pohybu typu I. Ukážeme, že je invariantní Reidemeisterovým pohybům typu II a III.

Tvrzení 3. *Závorkový polynom je invariantní vůči Reidemeisterovým pohybům typu II a III.*

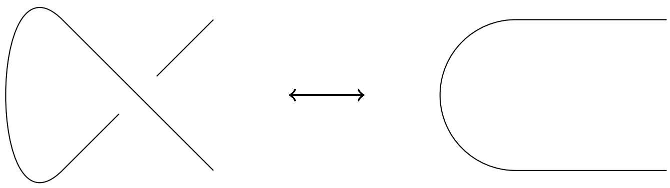
Důkaz. TODO, obrázky

□

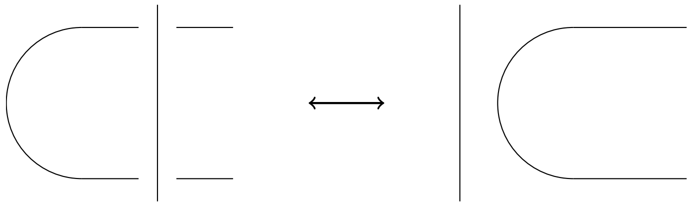
Aby byl závorkový polynom invariantní i vůči Reidemeisterovu pohybu typu I, je nutné vynásobit ho výrazem, který vyjadřuje míru zakroucení.

Definice 3. Zakroucení *(writhe) orientovaného diagramu D je součet znamení všech křížení v D. Zakroucení značíme $w(D)$.*

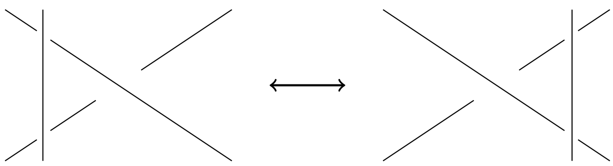
[2] anglicky bracket polynomial nebo Kauffman bracket



(a) Typ I



(b) Typ II



(c) Typ III

Obrázek 1.3: Reidemeisterovy pohyby

Lemma 4. *Zakroucení je invariantní vůči Reidemeisterovým pohybům typu II a typu III.*

Důkaz. Důkaz se provede rozborem případů.

□

Definice 4. Normalizovaný závorkový polynom $X_L(A)$ *orientovaného linku* L *definijeme* $X_L(A) = (-A^3)^{-w(D)}\langle D\rangle$, *kde* D *je libovolný diagram linku* L.

Definice je korektní, neboť následující tvrzení ukazuje, že nezáleží na volbě diagramu.

Tvrzení 5. *Normalizovaný závorkový polynom je linkový invariant.*

Důkaz. Závorkový polynom i zakroucení jsou invariantní vůči Reidemeisterovým pohybům typu II a III, invariantní je tedy i jejich součin.

Invariance vůči typu I plyne z lemmatu 2 a faktu, že křížení  je vždy kladné a křížení  vždy záporné.

□

Tvrzení 6. *Při substituce proměnné* $A = t^{1/4}$ *je normalizovaný závorkový polynom* $X_L(A)$ *roven Jonesovu polynomu* $V_L(t)$.

Důkaz. Ověříme, že $X_L(t^{1/4})$ splňuje podmínky v definici 1:

1. Normalizovaný závorkový polynom je podle předchozího tvrzení linkový invariant.

2. Pro zamotání triviálního uzlu platí $w(\bigcirc) = 0$, tedy $X_{\circlearrowleft} = (-A^3)^{w(\bigcirc)}\langle\bigcirc\rangle = 1$

3. TODO, dosazení

$\square$

2. Výpočet Jonesova polynomu

V této kapitole

2.1 Výpočetní složitost problému

Je dokázáno, že problém výpočtu Jonesova polynomu alternujího uzlu je #P-těžký [5].

Třída #P obsahuje problémy určení počtu přijímacích cest nedeterministického Turingova stroje. Jedná se o rozšíření problémů třídy NP: míst otázky, jestli problém má řešení, se ptáme, kolik řešení vůbec existuje. Zástupcem této třídy je #SAT, tedy problém určit, kolik existuje pravdivostních ohodnocení Boolovské formule. Dalším problémem této třídy je spočítat, kolik existuje perfektních párování v bipartitním grafu [6].

Není znám polynomiální algoritmus, který by řešil NP-těžký problém, tedy ani #P-těžký problém.

2.2 Algoritmus

Náš algoritmus na výpočet Jonesova polynomu předpokládá na vstupu diagram orientovaného linku zapsaný v PD notaci. Počet křížení diagramu označíme n.

2.2.1 PD notace

PD notace je zápis sestávajací ze čtveřice čísel pro každé křížení a jednoznačně popisuje daný diagram. Zápis diagramu v PD notaci se získá následovně: úseky mezi kříženími se očíslují po směru orientace linku čísly od 1 do $2n$. Každé křížení se označí čtyřmi přilehlými úseky, přičemž se začne úsekem, který do křížení vstupuje zespodu, a pokračuje se s úseky navazujícími proti směru hodinových ručiček, viz obrázek TODO.

Pro nejrychlejší práci s diagramem v PD notaci si pro každý úsek pamatujeme čtveřice popisující ta křížení, která mu náleží.

2.2.2 Výpočet Jonesova polynomu ze závorkového polynomu

K výpočtu Jonesova polynomu použijeme závorkový polynom. Podle tvrzení 6 se Jonesův polynom získá z normalizovaného závorkového polynomu substitucí proměnné, viz algoritmus 1.

V PD notaci lze rychle určit, jestli je křížení kladné, či záporné orientace. Zamotání tedy s spočítáme v lineárním čase vzhledem k počtu křížení. Z toho plyne, že výpočet Jonesova polynomu ze závorkového polynomu má lineární časovou složitost.

Dále se budeme zabývat algoritmem na výpočet závorkového polynomu.

Algoritmus 1: Výpočet Jonesova polynomu ze závorkového polynomu.

Data: Diagram D linku L s n kríženími

Result: Jonesův polynom v proměnné t

```
závorkovýPolynom(A) ← Bracket(D)                /* v proměnné A */
zamotání ← Writhe(D)
normalizovanýPolynom(A) ← (−A^3)^(−zamotání) × závorkovýPolynom(A)
jonesůvPolynom(t) ← Substituce(normalizovanýPolynom(A), A → t^(1/4))
return jonesůvPolynom(t)
```

2.2.3 Přímočarý výpočet závorkového polynomu

Z definice 2 závorkového polynomu plyne jednoduchý rekurzivní algoritmus na jeho výpočet. Pokud diagram D nemá žádná křížení, má polynom hodnotu 1. Pokud má diagram $n \geq 1$ křížení, jedno se náhodně zvolí. *Rozpojením* tohoto křížení horizontálně a vertikálně vzniknou dva *synové* D_h a D_v, oba diagramy s $n-1$ kříženími. Závorkový polynom diagramu D se spočítá ze závorkových polynomů jeho synů.
V PD notaci nejsme schopni zaznamenat, jestli při rozpojení křížení vznikla disjunktní kružnice, diagramy synů jsou tedy bez nich. Pokud při rozpojování disjunktní kružnice vznikla, musíme spočtený závorkový polynom syna vynásobit členem $-A^2 - A^{-2}$, podrobnosti viz algoritmus 2.
Algoritmus se vždy zastaví a má časovou složitost $\mathcal{O}(2^n)$. Stejnou časovou složitost má i výpočet Jonesova polynomu používající tento způsob výpočtu závorkového polynomu.

2.2.4 Průběžné rozmotávání

Algoritmus na výpočet závorkového polynomu zrychlíme, pokud se link pokusíme *částečně rozmotat*, tedy pokud nalezneme diagram ekvivalentního linku s menším množstvím křížení.

V PD notaci lze v lineárním čase vzhledem k počtu křížení rozpoznat případy, kdy je možné link rozmotat použitím prvního či druhého Reidemastreiva pohybu.

Prvním Reidemeisterovým pohybem se zbavíme jednoho křížení, ovšem výsledný závorkový polynom se podle lemmatu 2 změní o násobek $-A^{\pm 3}$.

Druhým Reidemeisterovým pohybem se zbavíme dvou křížení a polynom zůstane podle tvrzení 3 stejný. Více viz algoritmus 3.

Rozmotávání běží v lineárním čase vzhledem k n, celková časová složitost tedy zůstává $\mathcal{O}(2^n)$.

2.2.5 Vhodná volba křížení

Křížení k rozpojení jsme doteď volili náhodně, algoritmus se pokusíme zlepšit vhodnou volbou křížení, aby bylo diagram možné průběžně rozmotávat. Dokážeme, že ke vzniku diagramu, který lze částečně rozmotat způsobem popsaným v předchozí části, je vždy potřeba rozpojit nejvýše dvě křížení. Algoritmus bude volit právě ta křížení, jejichž rozpojení u synů zajistí možnost rozmotání.

Algoritmus 2: Výpočet závorkového polynomu.

Function `Bracket`(D)

Data: Diagram D linku L s n kříženími

Result: Závorkový polynom v proměnné A

if *diagram D nemá žádná křížení* **then**
  return 1

zvol náhodně křížení linku L

Dh $\leftarrow$ link D, kde křížení je rozpojeno horizontálně
Dv $\leftarrow$ link D, kde křížení je rozpojeno vertikálně

if *v linku* Dh *vznikla disjunktní kružnice* **then**
  $k_h \leftarrow 1$
else
  $k_h \leftarrow 0$
if *v linku* Dv *vznikla disjunktní kružnice* **then**
  $k_v \leftarrow 1$
else
  $k_v \leftarrow 0$

zavorkovýPoly(t) $\leftarrow A(-A^2 - A^{-2})^{k_h}$ `Bracket(Dh)`
  $+A^{-1}(-A^2 - A^{-2})^{k_v}$ `Bracket(Dv)`

return zavorkovýPoly(t)

Diagram jako rovinný graf

Každý linkový diagram odpovídá rovinnému grafu, v němž křížení představují vrcholy (vždy stupně čtyři) a úseky mezi kříženími hrany. Diagram s n kříženími odpovídá grafu s n vrcholy a $2n$ hranami. Dále budeme v této sekci k popisu diagramů používat grafovou terminologii. Předpokládejme také, že pracujeme s diagramem, který už je rozmotaný.

Eulerův vzorec pro rovinné grafy říká, že $v - e + f = 2$, kde v značí počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn (důkaz např. v [7]).
V našem případě tedy dostáváme vzorec pro počet stěn v linkovém diagramu $f = n + 2$.
Každá hrana náleží dvěma stěnám, rozdělujeme tedy $4n$ hran mezi $n + 2$ stěn. Z toho plyne, že musí existovat stěna, která je ohraničená méně než čtyřmi hranami.

Typy stěn

Stěna s jednou hranou by v diagramu odpovídala smyčce, ty jsou ovšem podle předpokladu už odstraněny rozmotáním.

Možné stěny s dvěma a třemi hranami jsou zobrazené na obrázku TODO.

Stěna se dvěma hranami, která není rozmotatelná druhým Reidemeistrovým pohybem, musí v diagramu odpovídat typu A. Všimněme si, že rozpojením křížení a_1 i a_2 buď ve vertikálním, nebo horizontálním směru vznikne smyčka. Volbou křížení a_1 nebo a_2 je tedy zaručeno, že jeden syn má po rozmotání nejvýše $n - 2$ křížení.

Stěna se třemi hranami v diagramu odpovídá buď typu B, nebo C zobrazeným

Algoritmus 3: Výpočet závorkového polynomu s rozmotáváním

```
Function Bracket(D)
    rozmotej diagram D prvním Reidemeisterovým pohybem
    if něco rozmotáno then
        e ← součet znamení rozmotaných křížení
        k ← počet vzniklých disjunktních kružnic
        return (−A^2 − A^−2)^k (−A^−3e) Bracket(rozmotaný diagram)
    rozmotej diagram D druhým Reidemeisterovým pohybem
    znovu rozmotej diagram D prvním Reidemeisterovým pohybem
    if něco rozmotáno prvním pohybem then
        e ← součet znamení rozmotaných křížení
        k ← počet vzniklých disjunktních kružnic
        return (−A^2 − A^−2)^k (−A^−3e) Bracket(rozmotaný diagram)
    .
    .                                /* Dále jako algoritmus 2. */
    .
    return zavorkPoly
```

na obrázku.

Ve stěně typu B získáme horizontálním rozpojením křížení b_1 syna, jenž jde rozmotat druhým Reidemeisterovým pohybem. Jeho diagram tedy bude mít po rozmotání nejvýše $n-3$ křížení.

Ve stěně typu C není rozpojením žádného křížení rozmotání zaručeno. Ovšem rozpojením libovolného křížení získáme jednoho syna se stěnou typu A. Existuje tedy vnuk s nejvýše $n-3$ kříženími.

2.2.6 Výsledný algoritmus pro výpočet závorkového polynomu

Chceme maximalizovat rozmotání u synů, budeme tedy při rozpojování preferovat křížení stěn A a B před stěnou C. Dále rozlišíme dvě varianty výsledného algoritmu: *algoritmus A* navíc preferuje křížení a_i před b_1, *algoritmus B* preferuje b_1 před a_i. Celý pseudokód je popsán v algoritmu 4.

Původní algoritmus 3 s náhodnou volbou křížení a rozmotáváním budeme označovat *algoritmus RND.*

V PD notaci je možné vhodné křížení stěn A, B i C nalézt v lineárním čase vzhledem k n, časová složitost tedy zůstává $\mathcal{O}(2^n)$. V následující sekci 2.3 se pokusíme získat lepší odhady složitosti.

Obě varianty výsledného algoritmu jsou podle úvah v předchozích částech korektní a vždy se zastaví.

2.2.7 Implementace algoritmu

Algoritmus jsme implementovali v programovacím jazyce Python.

Algoritmus 4: Výsledný algoritmus pro výpočet závorkového polynomu, varianty A a B.

```
Function Bracket(D)
    Data: Diagram D linku L s n kříženími
    Result: Závorkový polynom v proměnné A

    if diagram D nemá žádná křížení then
        return 1

    rozmotej diagram jako v algoritmu 3

    if varianta A then
        if existuje stěna typu A then
            křížení ← a_1
        else
            if existuje stěna typu B then
                křížení ← b_1
            else
                křížení ← c_1

    if varianta B then
        if existuje stěna typu B then
            křížení ← b_1
        else
            if existuje stěna typu A then
                křížení ← a_1
            else
                křížení ← c_1

    Dh ← link D, kde křížení je rozpojeno horizontálně
    Dv ← link D, kde křížení je rozpojeno vertikálně

    if v linku Dh vznikla disjunktní kružnice then
        k_h ← 1
    else
        k_h ← 0
    if v linku Dv vznikla disjunktní kružnice then
        k_v ← 1
    else
        k_v ← 0

    zavorkovýPoly(t) ← A(−A^2 − A^{−2})^{k_h} Bracket(Dh)
                       +A^{−1}(−A^2 − A^{−2})^{k_v} Bracket(Dv)

    return zavorkovýPoly(t)
```

Práce s diagramem v PD notací s využitím vhodných datových struktur je sice rychlá, ale náročná na rozbor všech možných případů. Ačkoli je tedy samotný algoritmus poměrně přímočarý, délka kódu narostla kvůli nutnosti rozlišení všech případů při rozpojování křížení, rozmotávání diagramu a hledání vhodného křížení.

2.3 Analýza složitosti algoritmu

V této sekci vypočteme horní a dolní odhad algoritmu na výpočet závorkového a Jonesova polynomu. V následující analýze nezaleží, jestli se jedná o variantu A, nebo B.

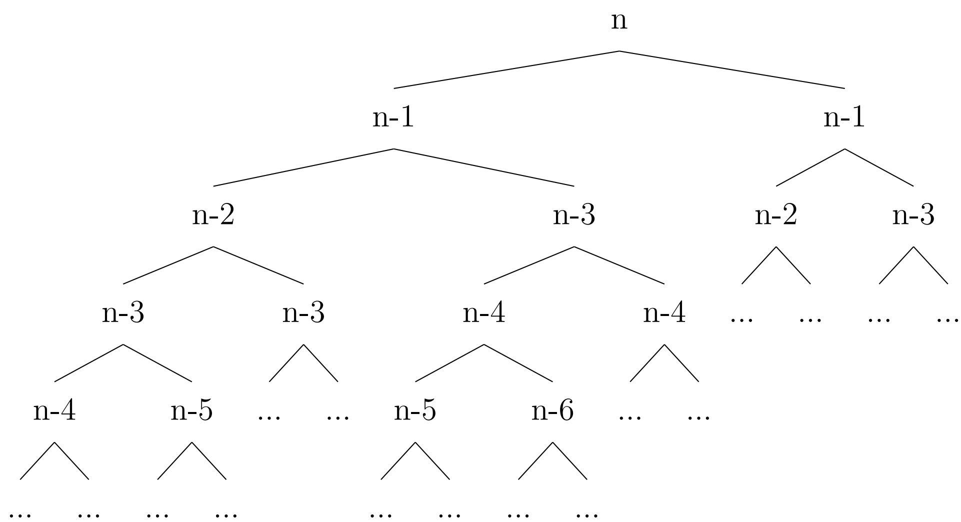
2.3.1 Horní odhad

Rychlost algoritmu je závislá na počtu křížení n a na míře rozmotávávaní. Například na diagramu, který je možné absolutně rozmotat použitím prvních dvou Reidemasterových pohybů, poběží nejhůř v kvadratickém čase (příkladem je typ torusových uzlů, viz sekce 3.3).

Tvrzení 7. *Výpočet Jonesova polynomu založený na algoritmu na výpočet závorkového polynomu 4 má časovou složitost* $\mathcal{O}(2^{0.82n})$.

Důkaz. Horní odhad rychlosti algoritmu 4 provedeme na případu diagramu, v němž dojde pouze k minimálnímu rozmotávání. Tedy nejdode k rozmotání jiných křížení než těch, která jsou zaručená rozborem v sekci 2.2.5. Také v případech, kdy není předchozí volbou křížení zaručena existence stěny typu A, bude existovat pouze stěna typu C, která zaručuje rozmotání pouze u vnuka.

Průběh algoritmu zakreslíme jako binární strom, kde číslo ve vrcholu je počet křížení diagramu. V kořeni máme diagram s n kříženími, v němž rozmotáme křížení stěny C, takže jeho synové jsou diagramy s $n-1$ kříženími obsahující stěnu typu A. Jejich synové budou diagramy velikosti $n-2$ a $n-3$. V lichých hladinách stromu má tedy vrchol syny o jedno křížení menší, v sudých hladinách je jeden syn o dvě křížení menší.



Získali jsme rekurentní rovnici na počet operací výpočtu závorkového polynomu diagramu velikosti n

$$T(n) = 2T(n-2) + 2T(n-3) + C_L n + 2C_L(n-1).$$

Člen $C_L n + 2C_L(n-1)$, kde C_L je konstanta, vyjadřuje, že na rozdělení každého diagramu na syny (rozmotání a volba křížení) je potřeba lineární počet operací vzhledem k počtu křížení.

Rekurenci je možné řešit pomocí vytvořujících funkcí a rozkladu na parciální zlomky. Výpočtem získáme vzorec

$$T(n) \approx C_1 2^{0.82n} + C_2 n 2^{0.09n} + C_3 2^{0.09n} + C_4 n + C_5,$$

kde C_i jsou jisté konstanty.

Z vzorce plyne, že $T(n) = \mathcal{O}(2^{0.82n})$.

Podle sekce 2.2.2 je na výpočet Jonesova polynomu ze závorkového potřeba pouze lineární počet operací. Dohromady má tedy náš výpočet Jonesova polynomu časovou složitost $\mathcal{O}(2^{0.82n})$.

□

2.3.2 Dolní odhad

Tvrzení 8. *Výpočet Jonesova polynomu založený na algoritmu na výpočet závorkového polynomu 4 má časovou složitost* $\Omega(2^{0.75n})$.

Důkaz. Provedeme analýzu průběhu algoritmu 4 na linku L s diagramem, který vznikne z diagramu Borromeovských kruhů přidáváním kružnic. Kružnici přidáváme tak, aby vždy protla dva další kruhy celkem ve čtyřech bodech a vzniklý diagram byl alternující, tj. aby se střídala křížení vedená zdola a zvrchu, viz obrázek TODO.

Na obrázku TODO je znázorněn možný průběh algoritmu na tomto diagramu takový, že jsou postupně odpojovány krajní kružnice.

Z obrázku TODO plyne, že časová složitost algoritmu na diagramu s n kříženími splňuje rekurenci

$$T(n) = 8T(n-4) + C_1 n + C_0$$

pro jisté konstanty C_0, C_1.

Z toho plyne, že $T(n) = \Omega(8^{\frac{n}{4}}) = \Omega(2^{0.75n})$.

Podle předchozích úvah má i výpočet Jonesova polynomu časovou složitost $\Omega(2^{0.75n})$.

□

3. Testování algoritmu na datech

V této části shrneme výsledky implementace výpočtu Jonesova polynomu. Změříme délku běhu algoritmu na malých uzlech, náhodých uzlech a lincích a na speciálních typech uzlů. Budeme se zabývat algoritmy A, B, a RND, které byli popsány v sekci 2.2.6.

3.1 Malé tabulkové uzly

Algoritmy jsme vyzkoušely na všech uzlech, které mají projekci s maximálně dvanácti kříženími. PD notace uzlů byla získána z databáze KnotInfo [8]. U všech tří algoritmů byl už u malých uzlů znatelný exponenciální růst doby běhu, viz obrázek 3.1.

Ze srovnání průměrných dob běhu plyne, že nejlepší čas dosahuje algoritmus A, těsně následuje algoritmus RND a nejpomalejší je algoritmus B, viz obrázek 3.2.

3.2 Náhodné uzly a linky

3.2.1 Generování náhodných linků a uzlů

Náhodné linky jsme generovali pomocí rovinných grafů, neboť mezi linky a rovinnými grafy existuje vzájemně jednoznačná korespondence [3]. (Jedná se o jinou korespondenci, než mezi linky a rovinnými grafy s vrcholu stupně čtyři popsanou v sekci 2.2.5).

Převod rovinného grafu na link

Rovinný graf s n hranami odpovídá linku s n kříženími. Každé hraně přiřadíme náhodně kladné, či záporné znamení a umístíme na ni křížení příslušného typu. Úseky mezi kříženími jsou tím již jednoznačně určené: musí spojovat křížení mezi nejbližšími hranami tak, aby nevznikla žádná další křížení, viz obrázek TODO.

Generování náhodných rovinných grafů

Graf s n hranami získáme následujícím způsobem. Vygenerujeme vhodný počet náhodných bodů v rovině a nalezeneme jejich triangulaci, tj. spojíme body hranami tak, aby byl polygon tvořící konvexní obal bodů rozdělen na trojúhelníky.

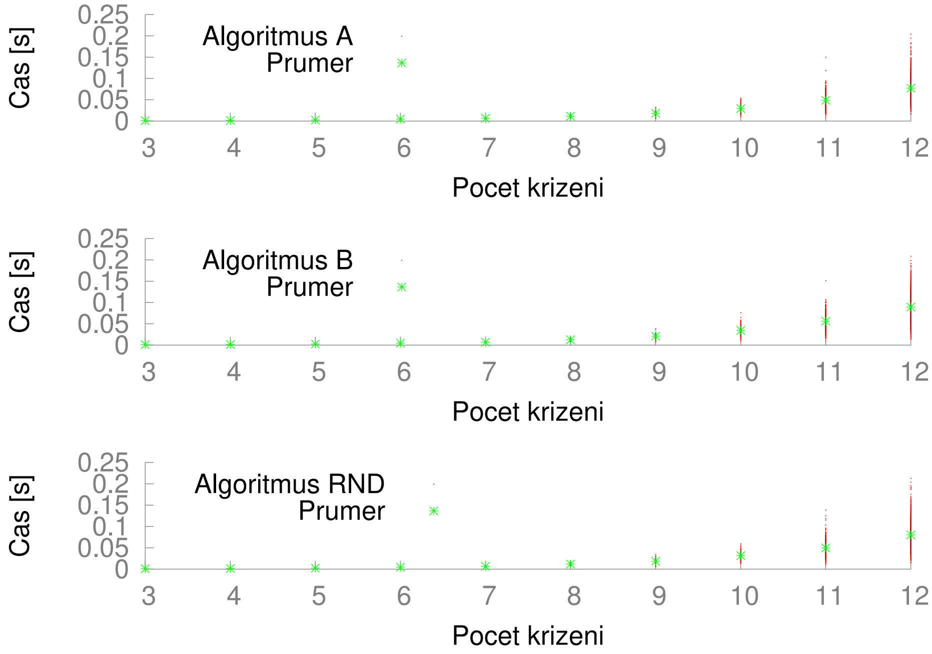
Získali jsme tak rovinný graf s původními body jako vrcholy. Pokud je počet hran menší než n, provedeme triangulaci znovu s větším počtem bodů. Pokud je počet hran větší než n, odstraníme potřebný počet náhodně zvolených hran.

Viz obrázek TODO. Stejný jako tam.

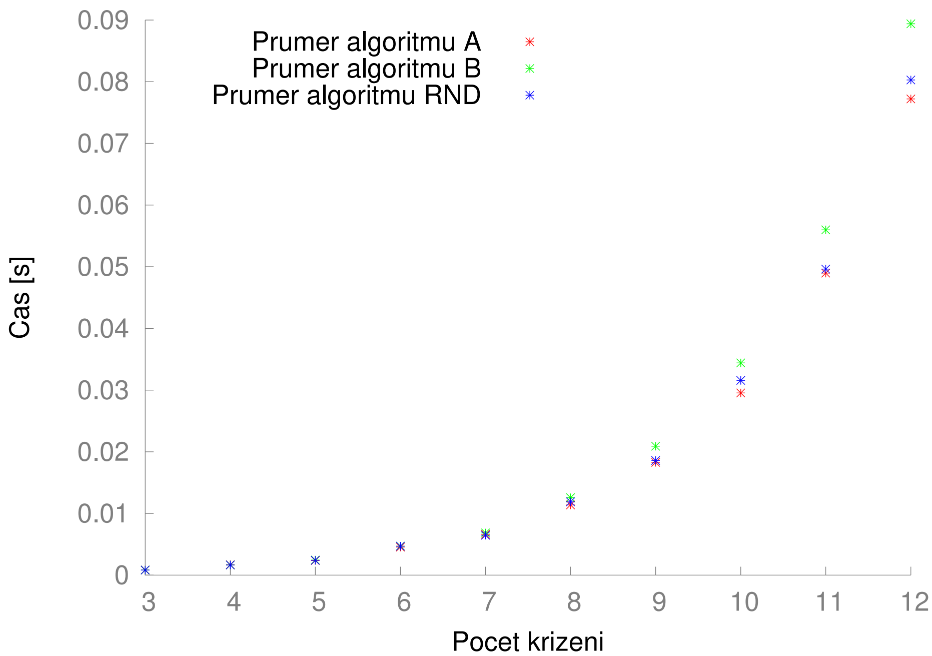
Implementace

Triangulace bodů je snadno implementovatelný geometrický problém.

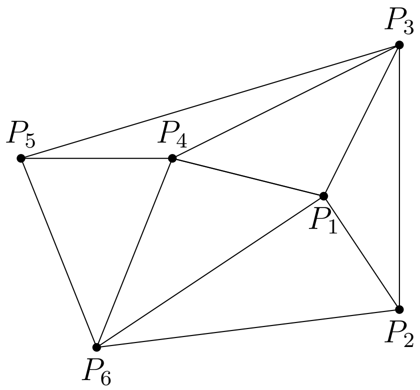
Se získaným rovinným grafem pracujeme jako s množinou vrcholů a k nim příslušným hranám seřazeným v pořadí, jak k danému vrcholu přiléhají. Z této struktury je již možné získat PD notaci příslušného linku.



Obrázek 3.1: Graf dob běhu algoritmů na tabulkových uzlech do 12 křížení s vyznačenými průměry.



Obrázek 3.2: Graf průměrných časů algoritmů na tabulkových uzlech do 12 křížení.



Obrázek 3.3: Triangulace šesti bodů

V PD notaci lze procházkou po vláknu snadno poznat, jestli je vygenerovaný link uzlem. Také jsme v jednoduchou operací schopni uzel změnit na alternující, tedy takový, v němž se střídají křížení vedená zdola a zvrchu.

Jsme tedy schopni nagenerovat uzly, alternující uzly a linky libovolné velikosti.

Takto generované uzly jsou také poměrně „zamotané“, tedy první rozmotávací krok algoritmu neodstraní příliš mnoho křížení.

3.2.2 Test

Rychlost algoritmů jsme otestovali na uzlech (obrázek 3.4) , alternujících uzlech (obrázek 3.5) a lincích (obrázek 3.6) s počtem křížení do 46.

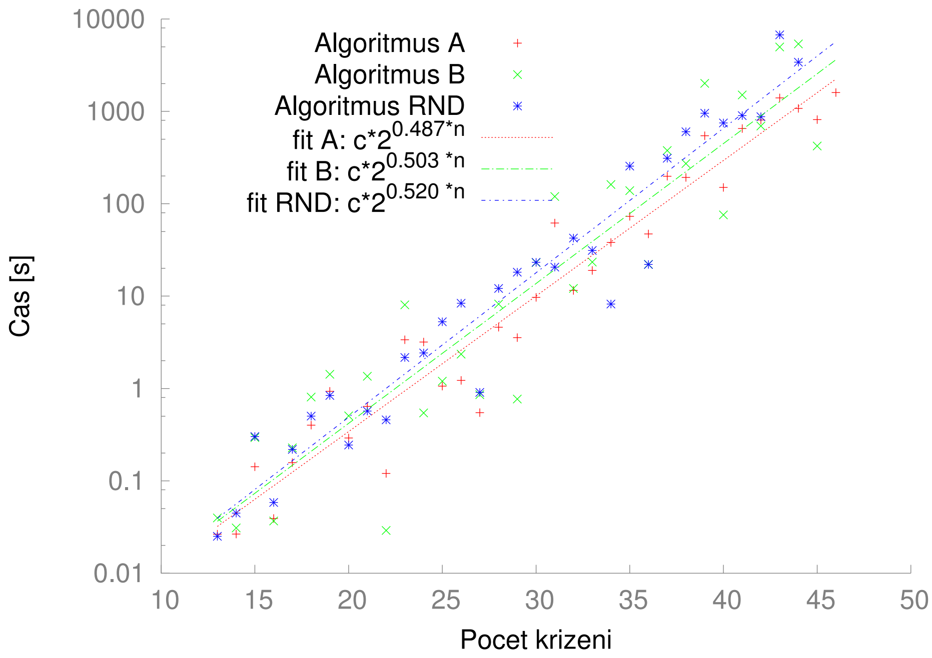
Podle výsledků není znatelný rozdíl mezi dobou výpočtu na uzlech, alternujících uzlech či lincích. Ani jednotlivé algoritmy se od sebe výrazně neliší, nejrychleji ale Jonesův polynom vždy počítá algoritmus A. Jeho průměrná časová složitost je podle naměřených dat menší než $\mathcal{O}(2^{0,5n})$.

Na uzlech a alternujících uzlech běží algoritmy B i RND podobnou dobu, liší se na ovšem na lincích. Zde se algoritmus B vyrovná algoritmu A, ale algoritmus RND zaostává. Náhodná volba křížení k rozpojení pravděpodobně způsobí rozpadnutí na větší počet stále zamotaných linků.

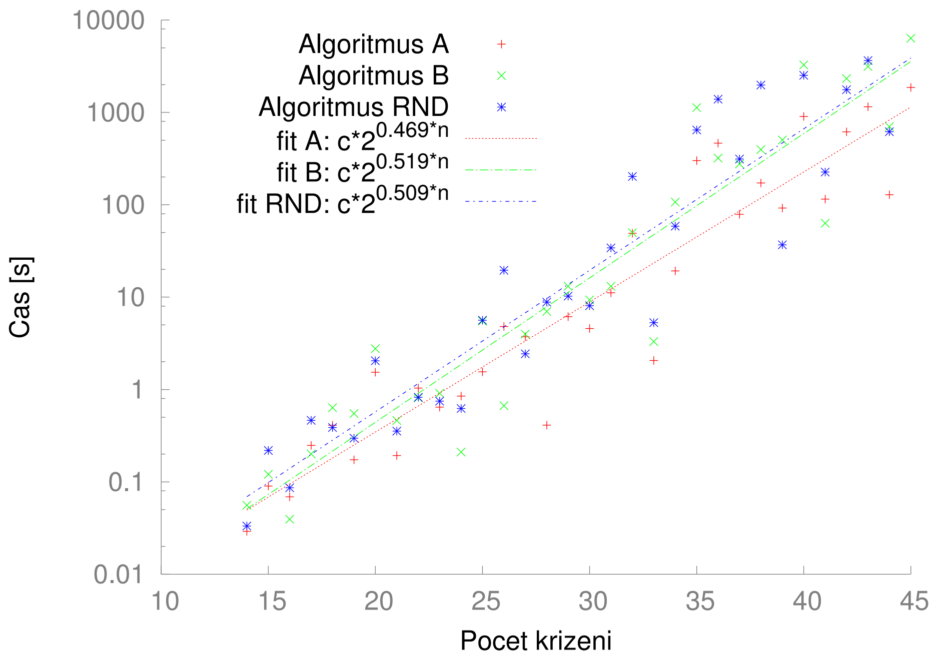
Odhad průměrné časové složitosti Chyby maximálně pět procent.

	A	**B**	**RND**
Uzly	0,487	0,503	0,520
Alternující uzly	0,469	0,519	0,509
Linky	0,486	0,485	0,555

Tabulka 3.1: Odhady parametru k průměrné časové složitosti $\mathcal{O}(2^{kn})$ jednotlivých algoritmů.



Obrázek 3.4: Graf dob běhu algoritmů na náhodných uzlech proložené křivkami, logaritmická škála.



Obrázek 3.5: Graf dob běhu algoritmů na náhodných alternujících uzlech proložené křivkami, logaritmická škála.

3.3 Torusové uzly

Rychlost algoritmů jsme vyzkoušeli na 36 nejmenších torusových uzlech. Jejich PD notaci jsme získali z databáze knot atlas.

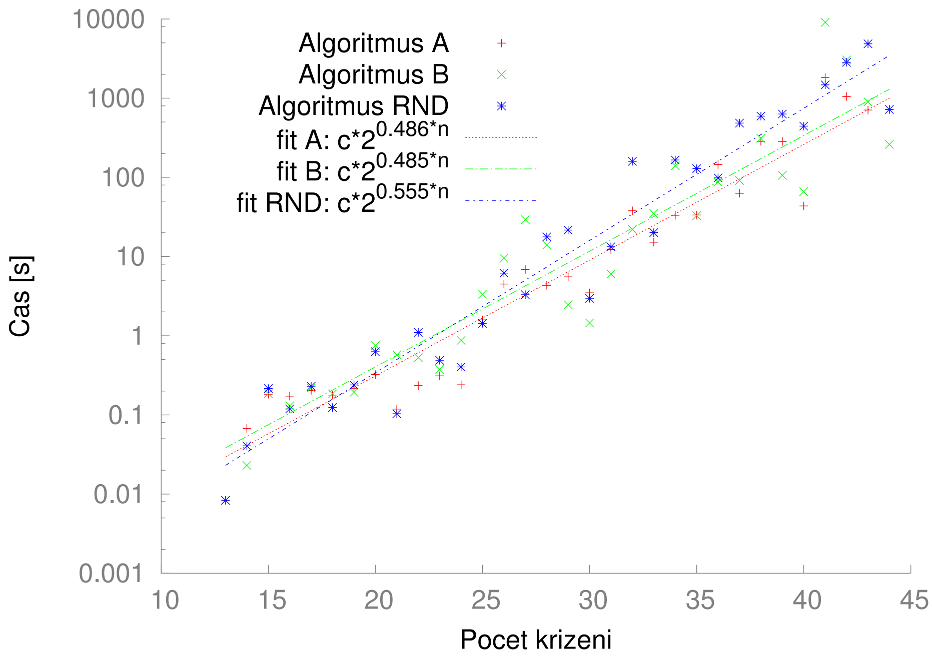
TO není torusový uzel!! Ale znamená to, že z toho dokážu vyrobit link? To by bylo fajn. Zmenším. A dám vedle toho. Pěkné to bude.

Na grafu dob běhu algoritmů lze rozlišit dva shluky bodů (viz Obrázek 3.7). Spodní shluk odpovídá torusovým uzlům $(2k+1, 2)$, tedy těm, které se obmotají dvakrát podél osy rotace torusu a jejich diagram má tvar dvou zakroucených vláken s $2k+1$ kříženími.

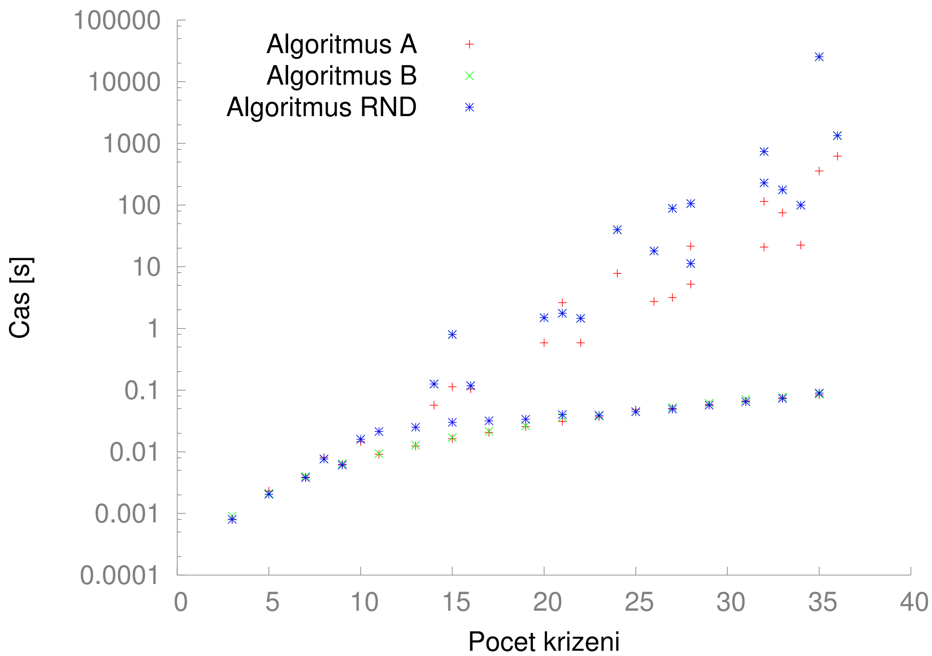
Všechny stěny tohoto uzlu jsou ohraničené pouze dvěma hranami. Rozpojením libovolného křížení jedním směrem vznikne torusový link $(2k, 2)$, druhým směrem triviální uzel, který lze rozmotat několika prvními Reidemeistrovými pohyby. Z linku zase rozpojením libovolného křížení vznikne uzel $(2k-1, 2)$. Rozpojení a rozmotávání má lineární časovou složitost, celkově tedy všechny tři algoritmy spočítají Jonesův polynom tohoto typu torusových uzlů v kvadratickém čase (viz Obrázek 3.9).

Na torusových uzlech tvaru (p, q), kde $q \neq 2$ již doba běhu algoritmu roste exponenciálně. Nejrychlejší je algoritmus A, příslušná exponenciála je tvaru 2^{53n} (viz Obrázek 3.10).

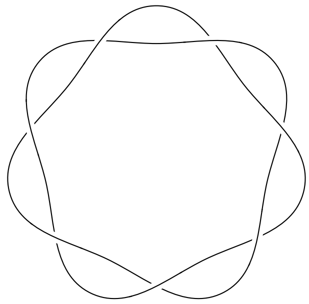
Nezapomenou dělat závěry a shrnovat.



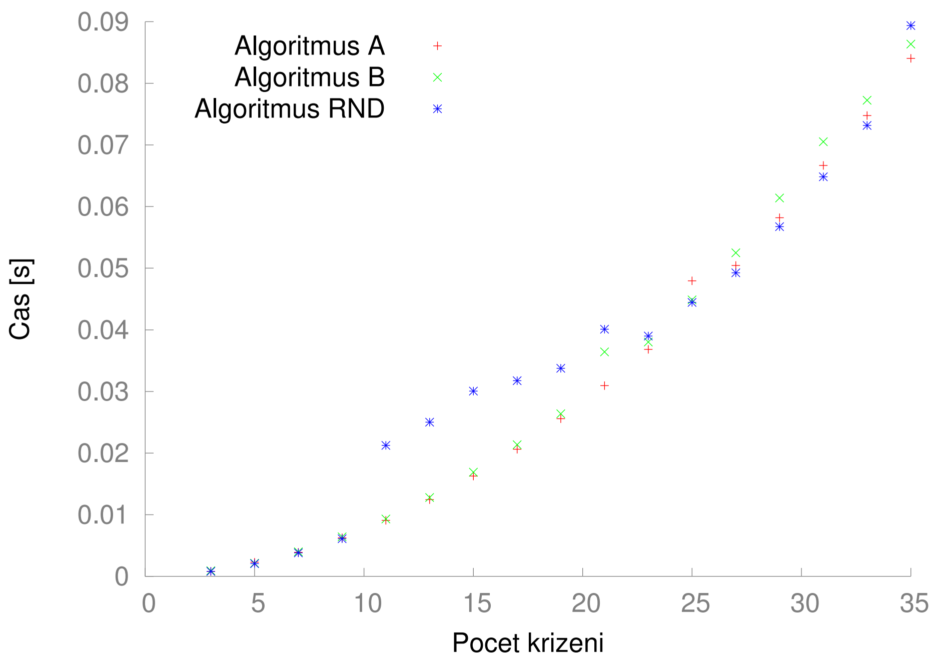
Obrázek 3.6: Graf dob běhu algoritmů na náhodných lincích proložené křivkami, logaritmická škála.



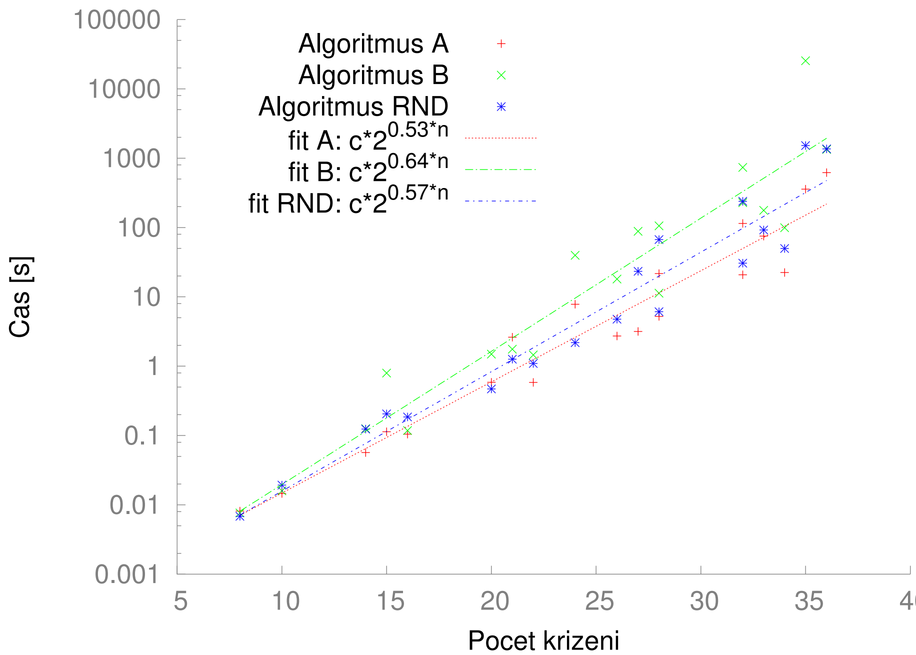
Obrázek 3.7: Graf dob běhu algoritmů na 36 torusových uzlech, logaritmická škála.



Obrázek 3.8: Torusový uzel (7,2).



Obrázek 3.9: Doby běhu algoritmů na torusových uzlech (3,2) až (35,2).



Obrázek 3.10: Doby běhu algoritmů na malých torusových uzlech (p, $q \neq 2$) proložené křivkami, logaritmická škála.

Závěr

Nezapomenout dělat závěry průběžně. Shrnovat to. Já vím, co to znamená, ale oni ne! Takže do toho.

Takže hlavně shrnovat ty složitosti. Že to na některých uzlech běží dobře. Nachám to běžet na torus.

Myslet meta - co mi tak ještě chybí, aby to dobře shrnulo Jonesův polynom? Jakože je to práce o něm? Nebo mám jenom studovat?

Nedělitelné mezery

Labelování definic, obrázků, vět...

Seznam použité literatury

[1] Vaughan F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 12(1):103–111, 01 1985.

[2] Peter Cromwell. *Knots and links*. Cambridge University Press, Cambridge, UK New York, 2004.

[3] Colin Adams. *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2004.

[4] F. R. V. Jones. The Jones Polynomial. `https://math.berkeley.edu/~vfr/jones.pdf`, 2005.

[5] F. Jaeger, D. L. Vertigan,, D. J. A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 108(1):35–53, 1990.

[6] Scott Aaronson et al. Complexity Zoo: Sharp-P. `https://complexityzoo.uwaterloo.ca/Complexity_Zoo:Symbols#sharpp`. [Online; navštíveno dne 10. 7. 2018].

[7] Jiří Matoušek, Nešetřil Jaroslav. *Kapitoly z diskrétni matematiky*. Karolinum, Praha, 2009.

[8] J. C. Cha, C. Livingston. KnotInfo: Table of Knot Invariants. `http://www.indiana.edu/~knotinfo`. [Online; navštíveno dne 2. 7. 2018].

[9] Dror Bar-Natan, Scott Morrison, et al. The Knot Atlas. `http://katlas.org`. [Online; navštíveno dne 2. 7. 2018].

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

A. Přílohy

A.1 První příloha