

Marika Toivola ja Tiina Härkönen

AVOIN MATEMATIIKKA 8 lk.

Osio 1: Yhtälöitä ja prosentteja

Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 3.0 -lisenssillä.

Osio 1: Yhtälöitä ja prosentteja

1.	Yhtälö	4
2.	Yhtälön ratkaiseminen	9
3.	Sulkeet yhtälössä	16
4.	Nimittäjä yhtälössä	22
5.	Useita muuttujia yhtälössä	28
6.	Epäyhtälön ratkaiseminen	32
7.	Yhtälöiden ja epäyhtälöiden erikoistapauksia	37
8.	Yhtälön muodostaminen sanallisesta ongelmasta	41
9.	Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia	46
10.	Prosenttiarvon laskeminen	53
11.	Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina	58
12.	Koronkorko	64
13.	Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö	68
14.	Tuntematon perusarvo	75
15.	Kertaustehtäviä	80

Kirjaimilla laskeminen

Matematiikassa käsitellään usein yksittäisten numerolaskujen sijasta yleisiä kirjainlausekkeita. Esimerkiksi pallon pinta-ala saadaan lasketuksi kaavalla $A = 4\pi r^2$, jossa A on pallon pinta-ala ja r sen säde. Tällaisille kaavoille on tyypillistä yleispätevyys: yhtälö on aina tosi, sijoitetaan siihen kirjainten paikoille minkä tahansa pallon pinta-alan ja säteen mittaluvut. Kun kaavassa esitetään muuttujia, voidaan sitä käyttää yhä uudestaan ja uudestaan erikokoisten pallojen pinta-alojen laskemiseen.

Matemaattinen yhtälö on kuin tasapainovaaka. Yhtälön vasemman puolen lauseke merkitsee yhtä suurta lukua kuin oikealla oleva lauseke, aivan kuten tasapainossa olevan vaa'an vasemman kupin esineiden massa on yhtä suuri kuin oikean kupin esineiden massa. Oikeasta eli todesta yhtälöstä voidaan useilla tavoilla muodostaa uusia tosia yhtälöitä. Aivan kuten vaaka säilyttää tasapainonsa, jos sen molempiin kuppeihin lisätään samanpainoiset kappaleet. Vaaka säilyttää myös tasapainonsa molemminpuolisten yhtä suurten poistojen jälkeen. Aivan samoin yhtälön molemmat puolet voidaan esimerkiksi kertoa kahdella tai jakaa viidellä ja yhtälö en edelleen totta. Olettaen tietenkin, että kyseessä oli alun alkaen tosi yhtälö. Yhtälöä voidaan myös muokata eri muotoihin. Esimerkiksi pallon pinta-alan yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälö, jolla lasketaankin pallon säde, kun tiedetään sen pinta-ala.

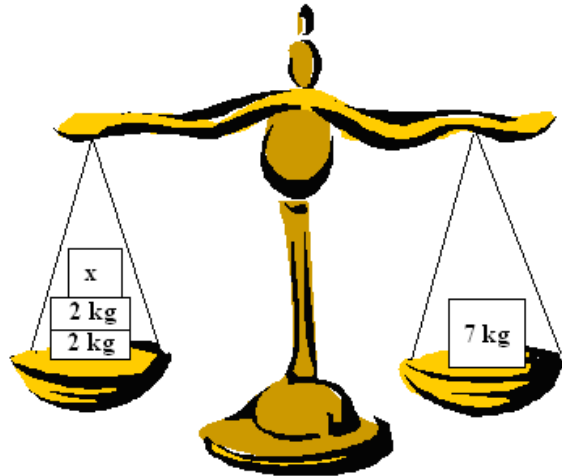
Algebra on matematiikan haara, joka käsittelee kirjaimilla laskemista ja laskutoimituksia koskevia yleisiä sääntöjä. Sen antamat tulokset, yleispätevät matemaattiset totuudet, esitetään usein lausekeina tai kaavoina, nämä tavallisesti yhtälöinä, joskus ns. epäyhtälöinä. Algebran peruslauseen esitti Carl Friedrich Gauss vuonna 1799. Sen mukaan algebrallisella yhtälöllä voi olla korkeintaan sen asteluvun verran ratkaisuja.

Jo varhaiset kreikkalaiset matemaatikot käyttivät kirjaimia edustamassa lukuja. Algebran nimi tulee arabiankielisestä sanasta *al jabr*, joka on alkuaan merkinnyt suunnilleen samaa kuin 'murtuneiden luiden paikoilleen asettaminen'. 1500-luvulla opittiin algebran menetelmät vähitellen Euroopassa erityisesti ranskalaisen Franciscus Vietan (1540-1603) ansiosta. Ranskalainen matemaatikko ja filosofi René Descartes (1596-1650) vakiinnutti käytännön, jonka mukaan tuntemattomia tai muuttuvia suureita edustavat aakkosten viimeiset kirjaimet x , y ja z ja tunnetuiksi oletettuja suureita aakkosten alkupään kirjaimet a , b ja c . Algebraa osuvasti nimitetään usein matematiikan kieleksi, onhan siinä kirjaimet numeroiden paikalla.

1. Yhtälö

Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, muodostuu *yhtälö*. Yhtäsuuruusmerkki jakaa yhtälön *oikeaan* ja *vasempaan puoleen*.

Yhtälöä voidaan havainnollistaa tasapainovaa'an avulla. Kun vaa'an molempien puolien sisältö painaa yhtä paljon, vaaka on tasapainossa. Vaaka säilyttää tasapainonsa, jos sen molemmilta puolilta poistetaan tai molemmille puolille lisätään samanpainoiset kappaleet. Myös yhtälölle voidaan tehdä vastaavat toimenpiteet. Jos vaa'an molemmat puolet eivät paina yhtä paljon, vaaka ei ole tasapainossa. Tällöin yhtälökään ei pidä paikkaansa. Mikä on vaa'an punnuksen x oltava, jotta yhtälö $x + 2 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 7 \text{ kg}$ olisi totta?



Esimerkki 1.

- a) $2 + 3 = 5$ aina tosi yhtälö
- b) $2 \cdot 3 = 10$ aina epätosi yhtälö
- c) $x + 3 = 5$ ehdollinen yhtälö, joka toteutuu ainoastaan, kun muuttuja $x = 2$

Yhtälössä olevaa muuttujaa nimitetään usein *tuntemattomaksi* ja sitä merkitään tavallisesti x -kirjaimella. Siinä vaiheessa, kun yhtälöä kirjoitetaan, ei tiedetä mikä luku tuntemattoman paikalla pitäisi olla, jotta yhtälö toteutuisi.

Muuttujan etsimistä, joka toteuttaa ehdollisen yhtälön kutsutaan *yhtälön ratkaisemiseksi*. Löydettyä muuttujan arvoa sanotaan *yhtälön ratkaisuksi* eli *juureksi*. Yhtälön ratkaisu on sellainen muuttujan arvo, jolla yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret. Yhtälön tyypistä riippuen sillä voi olla yksi tai useampia ratkaisuja tai ei yhtään ratkaisua.

Esimerkki 2.

Tutkitaan, toteuttaako kumpikaan luvuista a) $x = 1$ tai b) $x = -2$ yhtälöä $5x + 1 = -9$.

- a) Sijoitetaan yhtälöön x :n paikalle luku 1:
 $5 \cdot 1 + 1 = 6 \neq -9$ **Luku 1 ei toteuta yhtälöä.**
- b) Sijoitetaan yhtälöön luku -2 :

$$5 \cdot (-2) + 1 = -10 + 1 = -9$$

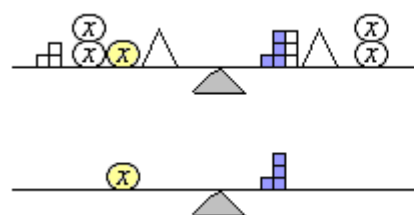
Luku -2 toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 3.

Vaaka on tasapainossa. Mikä on x :llä merkityn kappaleen massa, kun pienen kuution massa on 1 kg?



Ratkaisu:



Vaaka pysyy edelleen tasapainossa, jos molemmilta puolilta poistetaan sama määrä painoja.

Kirjoitetaan tilanteesta yhtälö sievennetyssä muodossa.

$$x = 4 \square$$

Sijoitetaan kuution paikalle 1 kg.

$$x = 4 \cdot 1 \text{ kg}$$

$$x = 4 \text{ kg}$$

Vastaus: Kappaleen x massa on 4 kg.

Tehtäviä

1.

Päättele puuttuva luku.

- a) $+ 3 = 8$
- b) $- 2 = -6$
- c) $1 - \square = 4$
- d) $-10 - \square = 2$

2.

Kirjoita edellinen tehtävä yhtälöinä merkitsemällä puuttuvaa lukua x kirjaimella.

3.

Päättele puuttuva luku.

- a) $2 \cdot _ = 8$
- b) $5 \cdot _ = 15$
- c) $\frac{_}{3} = 5$
- d) $\frac{_}{6} = 3$

4.

Kirjoita edellinen tehtävä yhtälöinä merkitsemällä puuttuvaa lukua x kirjaimella.

5.

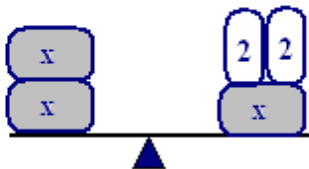
Onko $x = -2$ yhtälön ratkaisu?

- a) $4x + 1 = -7$
- b) $x + 17 = 19$
- c) $-2x + 5 = 9$
- d) $-x + 6 = -2x - 12$

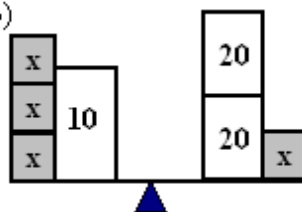
6.

Kuvaa vaakaa yhtälöllä.

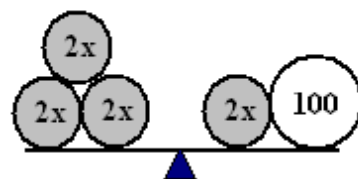
a)



b)



c)



7.

Ratkaise edellisen tehtävän yhtälöt päättelämällä.

8.

”Nueve” on eras numero espanjaksi. Jos lisäät lukuun ”nueve” 3, saat summaksi 12. Mikä luku on ”nueve”?

9.

Tutki onko yhtälön $x^2 + x = 2$ ratkaisu

- a) $x = 1$
- b) $x = 0$
- c) $x = -2$
- d) $x = 2$.

10.

Päättele, millä x :n arvolla lausekkeet $2x$ ja $5x$ saavat saman arvon?

———— soveltavat tehtävät ————

11.

Päättele, millä x :n arvolla yhtälö toteutuu.

- a) $2x = 6$
- b) $x + 4 = 10$
- c) $-x + 1 = 7$
- d) $4 - x = 2 + x$

12.

Ratkaise yhtälö päättelemällä.

- a) $5x = 0$
- b) $3x = 33$
- c) $6y = -6$
- d) $\frac{8}{y} = 2$

13.

Erään kolmion kaikki kulmat ovat saman suuruisia. Muodosta kolmion kulmien suuruksista yhtälö, jonka avulla voidaan ratkaista yhden kulman suuruus. Ratkaise yhtälö päättelemällä.

14.

Piirrä vaakamalli yhtälölle $6x + 3 = 4x + 5$ ja ratkaise yhtälö sen avulla.

15.

Ratkaise yhtälöt päättelemällä.

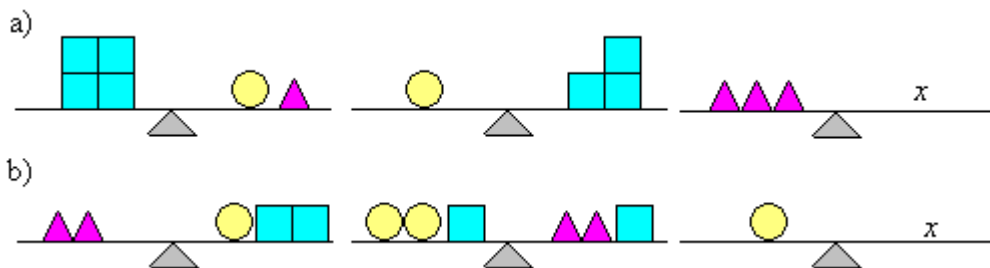
- a) $x \cdot 4^\circ \text{C} = 36^\circ \text{C}$
- b) $\frac{16 \text{ dl}}{x} = 2$
- c) $150 \text{ kg} - x = 23 \text{ kg}$

16.

Keksi sanallinen tehtävä, johon liittyy yhtälö $x + 5 = 55$.

17.

Kaikki vaa'at ovat tasapainossa. Päättele montako kuutiota on x vastaa?



18.

Päättele, millä x :n arvolla lauseke $2x + 1$ saa arvon nolla?

19.

Solve the following equations for the variable x .

a) $\frac{2x}{3} = 6$

b) $3x + 1 = 19$

20.

Päättele, millä x :n arvolla lausekkeet $2x + 4$ ja $3x + 1$ saavat saman arvon?

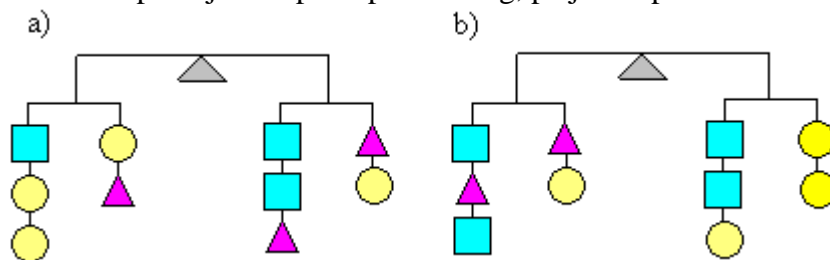
21.

Russel has two bags of sweets, each of which contains the same number of sweets. He eats eight sweets. Then he has 30 sweets left. How many sweets were in each bag to start with?

——— vaativat tehtävät ———

22.

Kuutio, pallo ja kartio ovat painoja. Jos pallo painaa 4 kg, paljonko painavat kuutio ja kartio?



23.

Mitkä seuraavista luvuista ovat yhtälön $\left(\frac{2x+3}{4x+5}\right) = 1$ juuria: $4/3$, $-4/3$, 1 , -1 , $2/3$, $-2/3$? (yo kevät 1987)

24.

Miten luku a on valittava, jotta yhtälön $ax^2 + x - 4 = 0$ toisena juurena on -4 ? (yo syksy 1991)

2. Yhtälön ratkaiseminen

Monimutkaisempien yhtälöiden ratkaiseminen pelkästään päättelemällä on hankalaa, joten on tarpeen opetella systemaattinen yhtälöiden ratkaisutapa. Siinä yhtälö muutetaan muotoon, jossa vasemmalla puolella esiintyy ainoastaan muuttuja ja oikealla puolella on vain vakiotermejä eli lukuja.

Kun yhtälöä ratkaistaan, kirjoitetaan ratkaisuvaiheet allekkain siten, että yhtälöiden yhtäsuuruusmerkit ovat kohdakkain. Yhtäsuuruusmerkkien kohdalle voidaan kuvitella seinämä, jonka toisella puolella ovat sallittuja ainoastaan muuttujat ja toisella puolella vakiot. Termeillä on lupa siirtyä seinämän ohi ainoastaan, jos ne vaihtavat etumerkkiä. Tämän perustuu siihen, että vastalukujen ja vastatermien summa on nolla. Jos jokin termi halutaan poistaa yhtälön toiselta puolelta, on sille puolelle lisättävä kyseisen termin vastatermi. Tasapainon säilymiseksi on samainen vastatermi myös lisättävä yhtälön toiselle puolelle. Jos yhtälön molemmilla puolilla on jossakin ratkaisuvaiheessa täsmälleen sama termi, ne kumoavat toisensa ja ne voidaan välittömästi poistaa.

Kun muuttujat ja vakiot ovat omilla puolillaan sekä samanmuotoiset termit yhdistetty, on usein vielä poistettava muuttujan kerroin. Kertolaskun käänteistoiminto on jakolasku, joten kertoimesta päästään eroon jakamalla yhtälön molemmat puolet kyseisellä luvulla. Esimerkiksi merkintä $\parallel : 2$ yhtälön perässä tarkoittaa, että yhtälön molemmat puolet jaetaan seuraavaksi kahdella.

Saatu ratkaisu on aina tarkistettava. Tarkistus tapahtuu siten, että ratkaisu sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön. Laskutoimitukset suoritetaan erikseen yhtälön molemmilla puolilla. Termien puolelta toiselle siirtoja ei siis tässä vaiheessa enää tehdä. Jos yhtälön oikealle ja vasemmalle puolelle tulee laskutoimitusten jälkeen sama luku eli saadaan tosi yhtälö, on ratkaisu oikea.

Systemaattinen yhtälöiden ratkaisutapa

- Siirretään kaikki muuttujatermit yhtälön vasemmalle ja vakiotermit oikealle puolelle. Muista, että etumerkki vaihtuu aina siirrettäessä termejä yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle.
- Yhdistetään samanmuotoiset termit.
- Jaetaan molemmat puolet muuttujatermin kertoimella.
- Tarkistetaan ratkaisu sijoittamalla saatu juuri alkuperäiseen yhtälöön.

Esimerkki 1.

Ratkaistaan yhtälö $x - 2 = 5$.

Täällä saa olla vain muuttujat. Täällä saa olla vain vakiot.

$$\begin{array}{lcl}
 x - 2 = 5 & & -2 \text{ on väärällä puolella.} \\
 x = 5 + 2 & & \text{Kun termi siirretään = merkin toiselle puolelle,} \\
 & & \text{sen etumerkki pitää vaihtaa.} \\
 x = 7 & &
 \end{array}$$

Tarkistetaan ratkaisu: $7 - 2 = 5$ Ratkaisu sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön.
 $5 = 5$ Tämä on totta eli ratkaisu on oikea.

Esimerkki 2.

Ratkaistaan yhtälö $7x + 1 = 6x + 4$.

Täällä saa olla vain muuttujat. Täällä saa olla vain vakiot.

$$\begin{array}{lcl}
 7x + 1 = 6x + 4 & & \text{Ympyröidyt termit ovat väärillä puolilla.} \\
 7x - 6x = 4 - 1 & & \text{Kun termi siirretään = merkin toiselle puolelle,} \\
 & & \text{sen etumerkki pitää vaihtaa.} \\
 x = 3 & &
 \end{array}$$

Tarkistetaan ratkaisu: $7 \cdot 3 + 1 = 6 \cdot 3 + 4$
 $21 + 1 = 18 + 4$
 $22 = 22$ tosi

Esimerkki 3.

Ratkaistaan yhtälö $5x + 1 = 2x - 2$.

seinämä	
Täällä saa olla vain muuttujat.	Täällä saa olla vain vakiot.
$5x + 1 = 2x - 2$	Ympyröidyt termit ovat väärillä puolilla.
$5x - 2x = -2 - 1$	Kun termi siirretään = merkin toiselle puolelle, sen etumerkki pitää vaihtaa.
$3x = -3$	Muuttujatermin kerroin pitää poistaa. Siitä päästään eroon jakamalla yhtälön molemmat puolet 3:llä. : 3
$x = -\frac{3}{3}$	Kaikki ovat oikeilla puolillaan. Loppu on vain sieventämistä.
$x = -1$	

Tarkistetaan ratkaisu: $5 \cdot (-1) + 1 = 2 \cdot (-1) - 2$

$$-5 + 1 = -2 - 2$$

$$-4 = -4 \quad \text{tosi}$$

Tehtäviä

25.

Sievennä.

- a) $3x - 1 + x + 4$
- b) $5x + 4 - 2x + 7$
- c) $-4x - 1 + 5 + x$
- d) $-9x - 3x + 9$

26.

Ratkaise x .

- a) $x + 1 = 0$
- b) $x - 1 = 0$
- c) $x + 2 = 1$
- d) $x - 2 = -1$
- e) $2 - x = 1$

27.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $x + 7 = 15$
- b) $x - 3 = 6$
- c) $x - 1 = -4$
- d) $x + 3 = -3$
- e) $x - 2 = -3$

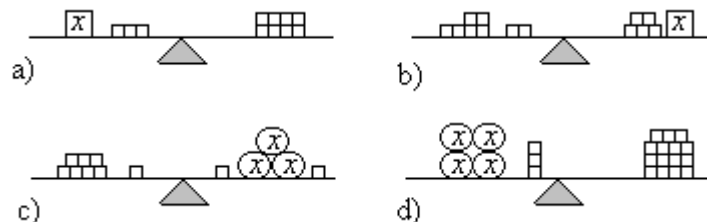
28.

Solve these equations.

- a) $2a + 1 = 9$
- b) $4b - 1 = 11$
- c) $-5c + 3 = 18$
- d) $\frac{1}{4}d - 1 = 7$
- e) $-2e = -1$

29.

Vaa'at ovat tasapainossa. Ratkaise x :llä merkityn kappaleen massa, kun pienen kuution paino on 1 kg.



30.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2x - 6 = 0$
- b) $x + 3 = 0$

- c) $-5x + 10 = 0$
 d) $-3x - 12 = 0$

31.

What is the value of x in the following?

- a) $6 = x - 2$
 b) $-4 = 2x + 6$
 c) $3x - 2 = x$
 d) $-6x = -x$

32.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $3x = 12$
 b) $-4y = 20$
 c) $2x = 16$
 d) $-5y = -15$

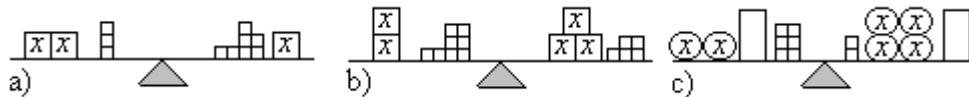
33.

Ratkaise yhtälön juuri.

- a) $4x = 0$
 b) $-x = -9$
 c) $6z = 2$
 d) $-3z = 9$
 e) $y - y - y = 4 + 3$

34.

The scales are balanced. Work out the weight of the object x in each case. Each small weight is 1 kg.



35.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $5x + 100 = 100$
 b) $-2x - 14 = x - 14$
 c) $3x + a = a - 9$
 d) $-6x - 4y = -4y - 12$

36.

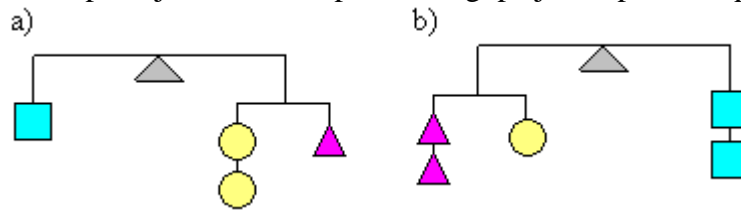
Mikä on yhtälön juuri?

- a) $4x + 3 = 3x$
 b) $x - 6x = 10$
 c) $3y = 2y - 5$
 d) $2y + y + 3y = y$

soveltavat tehtävät

37.

Kuutio, pallo ja kartio ovat painoja. Jos kuutio painaa 6 kg, paljonko painavat pallo ja kartio?



38.

Tee itse vaakatehtävä ja anna se vierustoverisi ratkaistavaksi.

39.

Mitä yhtälölle tapahtuu, kun sen molemmat puolet kerrotaan luvulla -1 ?

40.

Millä x :n arvolla binomi $5x - 1$ saa arvon

- a) 0
- b) 1
- c) 14?

41.

Keksi yhtälö, jonka ratkaisu on $x = 2$.

42.

Osoita, että $x = 1$ on yhtälön $5x^3 - 4x^2 + 7x - 8 = 0$ ratkaisu.

43.

Millä x :n arvolla lausekkeet $2x + 5$ ja $12 + x$ saavat saman arvon?

vaativat tehtävät

44.

Millä x :n arvolla lausekkeet

- a) A ja D ovat yhtä suuret
- b) B ja C ovat yhtä suuret?
- c) Mitkä kaksi lauseketta eivät voi olla yhtä suuria millään x :n arvolla?

A	B	C	D
$2x + 1$	$2x + 3$	$3x + 1$	$x - 4$

45.

Ratkaise yhtälöstä x .

- a) $ax = b$
- b) $-bx + 2a = 4a$
- c) $a + x = b$
- d) $a = 2x + b$

46.

Solve $x^2 + 2x = 0$.

47.

Ratkaise yhtälö $3x + 4 = 5 - 6x$. (yo kevät 2002)

48.

Määritä lausekkeen $x^2 - 6x + 5$ arvo sillä x :n arvolla, joka toteuttaa yhtälön $3x + 1 = 0$. (yo syksy 1998)

3. Sulkeet yhtälössä

Jos yhtälössä on sulkeet, on ne poistettava ensiksi. Tämän jälkeen edetään normaalien yhtälön ratkaisusääntöjen mukaan. Erityistä huolellisuutta vaaditaan, jos sulkeiden edessä on miinusmerkki. Tällöin kaikkien termien etumerkki on vaihdettava sulkeita poistettaessa.

Esimerkki 1.

Ratkaistaan yhtälö $5x = 3(x - 2)$.

$$\begin{array}{ll} 5x = 3(x - 2) & \text{Poistetaan sulkeet. Muista kertoa molemmat termit!} \\ 5x = 3x - 6 & \text{Siirretään muuttujatermi yhtälön vasemmalle puolelle.} \\ 5x - 3x = -6 & \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ 2x = -6 & \parallel : 2 \quad \text{Jaetaan molemmat puolet kahdella.} \\ x = -\frac{6}{2} & \\ x = -3 & \end{array}$$

Tarkistetaan sijoittamalla, onko $x = -3$ yhtälön oikea ratkaisu:

$$\begin{array}{l} 5 \cdot (-3) = 3(-3 - 2) \\ -15 = 3 \cdot (-5) \\ -15 = -15 \quad \text{tosi} \end{array}$$

Esimerkki 2.

Ratkaistaan yhtälö $2x = 4 - (x - 5)$.

$$\begin{array}{ll} 2x = 4 - (x - 5) & \text{Poistetaan sulkeet. Muista vaihtaa molempien termien etumerkit!} \\ 2x = 4 - x + 5 & \text{Siirretään muuttujatermi yhtälön vasemmalle puolelle.} \\ 2x + x = 4 + 5 & \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ 3x = 9 & \parallel : 3 \quad \text{Jaetaan molemmat puolet kolmella.} \\ x = \frac{9}{3} & \\ x = 3 & \end{array}$$

Tarkistetaan sijoittamalla, onko $x = 3$ yhtälön oikea ratkaisu:

$$2 \cdot 3 = 4 - (3 - 5)$$

$$6 = 4 - (-2)$$

$$6 = 4 + 2$$

$$6 = 6 \quad \text{tosi}$$

Vaikka ratkaistava yhtälö näyttäisi monimutkaiselta, älä hätäänny. Etene vain vaihe vaiheelta ja keskity jokaiseen sulkeiden poistamiseen huolella. Yhtälöiden ratkaisussa tapahtuu helposti huolimattomuusvirheitä. Siksi ratkaisujen tarkastaminen on tärkeää.

Esimerkki 3.

Ratkaistaan yhtälö $-(2x + 4) - 3(-x - 6) = 0$.

$$-(2x + 4) - 3(-x - 6) = 0 \quad \text{Poistetaan sulkeet. Ole tarkkana miinusmerkkien kanssa!}$$

$$-2x - 4 + 3x + 18 = 0 \quad \text{Siirretään muuttujatermit vasemmalle ja vakiot oikealle.}$$

$$-2x + 3x = 0 + 4 - 18 \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.}$$

$$x = -14$$

Tarkistetaan sijoittamalla, onko $x = -14$ yhtälön oikea ratkaisu:

$$-[2 \cdot (-14) + 4] - 3[-(-14) - 6] = 0$$

$$-(-28 + 4) - 3(14 - 6) = 0$$

$$-(-24) - 3 \cdot 8 = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{tosi}$$

Tehtäviä

49.

Sievennä.

- a) $2(a + 6)$
- b) $-3(2a + 4)$
- c) $-2(3a - 5)$
- d) $a(5a + 2)$

50.

Remove these brackets.

- a) $3(x - 5)$
- b) $4(2x - 3)$
- c) $-2(-6x + 4)$
- d) $x(x + 2)$

51.

Jäljennä taulukko vihkoosi ja merkitse ”suoritusjärjestys” -sarakkeeseen numero 1 - 5 sen mukaan missä järjestyksessä yhtälön ratkaisutoimenpiteet tehdään.

Suoritusjärjestys	Tehtävä
	Siirrä termit
	Yhdistä termit
	Ratkaise tuntematon
	Tarkista tulos
	Poista sulkeet

52.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2(x + 4) = 12$
- b) $4(3x - 4) = 8$
- c) $4(x - 2) = 12$
- d) $2(x + 5) = 50$

53.

Ratkaise x .

- a) $2(x + 3) = 12$
- b) $2(x + 4) = 8$
- c) $3(x + 2) = 21$
- d) $4(x + 1) = 12$

54.

Mikä on yhtälön juuri?

- a) $3(x - 2) = 9$
- b) $2(x - 3) = 16$
- c) $6(x - 2) = 24$
- d) $2(x - 1) = 4$

55.

Solve the equations.

- a) $3(x - 2) = 12$
- b) $2(x - 3) = 16$
- c) $4(x + 2) = 12$
- d) $7(2 + x) = 49$
- e) $5(x + 1) = 25$

56.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $6(3y - 7) = 12$
- b) $3(2y + 1) = 27$
- c) $2(4y + 5) = 34$
- d) $4(3y + 1) = 28$
- e) $10(3y + 1) = 100$

57.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $7(x + 2) = 49$
- b) $4(x + 2) = 12$
- c) $8(x - 3) = 40$
- d) $4(x - 2) = 16$

58.

Solve with respect to x .

- a) $3(2x + 1) = 15$
- b) $4(-2x + 7) = 4$
- c) $4(3x + 1) = 28$
- d) $6(3x - 7) = 12$

59.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $8(3x - 5) = 32$
- b) $5(3x - 10) = 25$
- c) $2(x - 5) = 8$
- d) $2(-x + 3) = 10$

60.

Solve for x .

- a) $5(x + 1) = 6$
- b) $3(2x - 3) = 6$
- c) $2(-3x + 1) = 14$
- d) $2(3x + 1) = 5$

61.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2(u + 3) = 3$
- b) $5(t + 1) = 7$
- c) $5 = 2(2z - 1)$
- d) $5 = 2(1 - 3v)$
- e) $w(1 - 3) = 3w + 1$

62.

Ratkaise x .

- a) $2(3x - 4) + 5 = 3(x + 1)$
- b) $3(2x - 5) = x + 15$
- c) $2(-x + 6) = 2(-2x + 3)$
- d) $3(2x + 3) - 5 = -4(-x + 3)$

63.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2(x + 4) + 3(2x - 5) - 5 = 0$
- b) $5x - 5(2 - x) = 5 + 2(4x - 9)$
- c) $3(x - 4) - 5(2x - 3) = -2(3x - 5)$
- d) $-7(x - 4) + 5(x + 2) + 2(2x - 1) = 0$

64.

Solve with respect to x .

- a) $2(3x - 1) = -4(x - 7)$
- b) $4(2x + 3) - 43 = -7$
- c) $x - 14 = -2(x + 1)$
- d) $-x - 3(2x - 5) = 15$

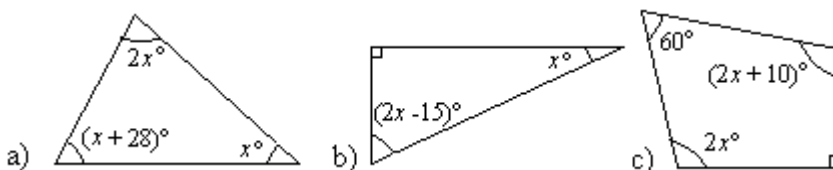
65.

Mikä on yhtälön juuri?

- a) $x - 3 - (4 - 2x) = 2(x + 1)$.
- b) $3(5x + 1) + x(2 + 1) = 0$.

66.

Ratkaise x seuraavista kuvioista. Kirjoita ensin yhtälö.



67.

Ratkaise yhtälö $12(x - 3) - 6 = 2(x + 5) - 2(2 - 4x)$. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1995)

68.

Ratkaise yhtälöt. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1994)

a) $2x - 7 = -x + 1$

b) $3 - 2(2 - x) = 3(x + 1)$

69.

Millä vakion p arvolla yhtälön $x(x + p) = 3x$ yhtenä juurena on luku -3 ? (yo kevät 1995)

4. Nimittäjä yhtälössä

Yhtälössä esiintyvistä nimittäjästä päästään eroon kertomalla yhtälön molemmat puolet kyseisellä nimittäjällä. Jos yhtälössä esiintyy useita nimittäjiä, kerrotaan yhtälön molemmat puolet sellaisella luvulla, joka on jaollinen kaikilla nimittäjillä.

Esimerkki 1.

Ratkaistaan yhtälö $\frac{x}{2} - 1 = 7$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} - 1 &= 7 && \text{Siirretään vakiotermi yhtälön oikealle puolelle.} \\ \frac{x}{2} &= 7 + 1 && \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ \frac{x}{2} &= 8 && \parallel 2 \quad \text{Yhtälön vasemmalla puolella on vielä liikaa kakkonen.} \\ &&& \text{Nimittäjässä olevasta kakkosesta päästään eroon} \\ &&& \text{kertomalla yhtälö kahdella.} \\ \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} &= 2 \cdot 8 && \text{Supistetaan.} \\ x &= 16\end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisu:

$$\begin{aligned}\frac{16}{2} - 1 &= 7 \\ 8 - 1 &= 7 \\ 7 &= 7 \quad \text{tosi}\end{aligned}$$

Esimerkki 2.

Ratkaistaan yhtälö $\frac{x}{4} = \frac{x}{8} + 2$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} &= \frac{x}{8} + 2 && \text{Siirretään muuttujatermi yhtälön vasemmalle puolelle.} \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{8} &= 2 && \parallel 8 \quad \text{Koska muuttujatermeissä on eri nimittäjät,} \\ &&& \text{ei niitä voida suoraan yhdistää.} \\ \cancel{8} \cdot \frac{x}{\cancel{4}} - \cancel{8} \cdot \frac{x}{\cancel{8}} &= 8 \cdot 2 && \text{Molemmista nimittäjistä päästään eroon} \\ &&& \text{kertomalla yhtälö kahdeksalla.} \\ \cancel{1}^4 \cdot x - \cancel{1}^8 \cdot x &= 8 \cdot 2 && \text{Supistetaan.} \\ 2x - x &= 16 && \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ x &= 16\end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisu:

$$\frac{16}{4} = \frac{16}{8} + 2$$

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 4 \quad \text{tosi}$$

Yleensä yhtälön oikealle puolelle muodostuvia kerto- tai jakolaskuja ei kannata suorittaa ennen kuin kaikki lukuarvot on siirretty yhtälön muuttujapuolelta pois. Supistamalla saadaan laskut helpommiksi.

Esimerkki 3.

Ratkaistaan yhtälö $\frac{-2x}{5} = 8$.

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{5} &= 8 \quad || \cdot 5 && \text{Poistetaan nimittäjä kertomalla viidellä.} \\ \cancel{5} \cdot \frac{-2x}{\cancel{5}_1} &= 5 \cdot 8 && \text{Muista laittaa sulkeet, koska kahta laskutoimitusmerkkiä ei voi olla peräkkäin.} \\ -2x &= 5 \cdot 8 \quad || \cdot (-2) && \text{Oikean puolen kertolaskua ei kannata vielä suorittaa, koska seuraavassa vaiheessa voidaan supistaa x:n kertoimesta päästään eroon jakamalla -2:lla.} \\ x &= \frac{5 \cdot 8^4}{-2_1} && \text{Supistetaan.} \\ x &= \frac{20}{-1} \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisu:

$$\frac{-2 \cdot (-20)^4}{\cancel{5}_1} = 8$$

$$-2 \cdot (-4) = 8$$

$$8 = 8 \quad \text{tosi}$$

Tehtäviä

70.

Laske ilman laskinta.

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

71.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{x}{2} = 4$

b) $\frac{x}{3} = 2$

c) $\frac{x}{5} = 3$

d) $\frac{x}{6} = 5$

72.

Solve for x .

a) $\frac{x}{4} = 7$

b) $\frac{x}{2} = -9$

c) $\frac{x}{-5} = 2$

d) $\frac{x}{-8} = -2$

73.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{2x}{3} = 6$

b) $\frac{3x}{4} = 9$

c) $\frac{2x}{5} = 4$

d) $\frac{5x}{4} = 10$

74.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{2x}{3} = 4$

b) $\frac{2x}{4} = 8$

c) $\frac{2x}{5} = -4$

d) $\frac{5x}{6} = 20$

75.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{x}{8} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{3x}{4} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{2x}{8} = \frac{3}{6}$

76.

Solve these equations.

a) $7 - \frac{x}{2} = 2$

b) $1 + \frac{x}{5} = 8$

c) $\frac{x}{3} + 4 = 13$

d) $\frac{x}{2} + 2 = 5$

77.

Ratkaise yhtälöt.

a) $x + \frac{x}{3} = 12$

b) $x + \frac{x}{2} = 12$

c) $2x - \frac{x}{3} = 5$

d) $3x - \frac{x}{4} = 22$

78.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $\frac{x+1}{4} = 3$
- b) $\frac{2x-1}{3} = 5$
- c) $\frac{3x+4}{5} = -1$
- d) $\frac{2x+1}{4} = 1$

79.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $\frac{2x-1}{2} = \frac{1}{4}$
- b) $\frac{2x+1}{2} = \frac{3}{5}$
- c) $\frac{-3x+2}{3} = -\frac{5}{6}$
- d) $\frac{-x+7}{4} = \frac{5}{2}$

80.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $\frac{4x}{15} - \frac{2x}{5} + 1 = 0$
- b) $\frac{x}{5} + \frac{4x}{5} - 2x + \frac{2}{3} = 0$

81.

Write an equation and solve: If a number, x , divided by 8 equals 4 what is x ?

82.

Make x the subject.

- a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$
- b) $\frac{x}{4} + \frac{3x}{8} = -1$
- c) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = -2$
- d) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 7$

83.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{11-x}{4} = -x + 2$

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} = 1$

c) $\frac{x+2}{3} - \frac{x+1}{4} = 2$

d) $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = 0$

84.

Yksi kolmasosa maalausurakasta kestää 24 tuntia. Paljonko aikaa kuluu koko maalausurakan tekemiseen? Kirjoita ongelma ensin yhtälönä.

85.

Kirjoita yhtälö ja ratkaise se.

a) Luvun x kahdesosan ja neljäsosan summa on yksi.

b) Luvun x kahdesosan ja kolmasosan erotus on kaksi.

86.

Solve for x .

$$\frac{x-1}{10} = \frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{6}$$

87.

Ratkaise yhtälö.

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+8}{3}$$

88.

Ratkaise yhtälö.

$$\frac{2x-3}{6} + \frac{x+2}{3} - \frac{5}{2} = 0$$

89.

Ratkaise yhtälö.

$$-\left(x + \frac{x-3}{8}\right) = \frac{-3(2x+1)}{2}$$

90.

Ratkaise yhtälö $\frac{2x-5}{4} - \frac{3x-8}{6} = \frac{x}{12}$. (yo kevät 1986)

5. Useita muuttujia yhtälössä

Joskus yhtälöissä esiintyy useampia kirjaimia eli muuttujia. Yhtälö voidaan ratkaista halutun muuttujan suhteen edellä opittuja yhtälönratkaisukeinoja käyttämällä. Yhtälön vasemmalla puolella saa tällöin esiintyä ainoastaan se muuttuja, jonka suhteen yhtälö ratkaistaan. Muita muuttujia kohdellaan aivan kuin ne olisivat vakio termejä.

Esimerkki 1.

Ratkaistaan yhtälö $ax + b = c$

a) x :n suhteen

$$\begin{aligned} ax + b &= c && \text{Siirretään muut, paitsi } x\text{:n sisältämät termit} \\ &&& \text{yhtälön oikealle puolelle.} \\ ax &= c - b && \parallel :a \text{ Poistetaan } x\text{:n kerroin jakamalla } a\text{:lla.} \\ x &= \frac{c - b}{a} \end{aligned}$$

b) b :n suhteen

$$\begin{aligned} ax + b &= c && \text{Siirretään muut, paitsi } b\text{:n sisältämät termit} \\ b &= c - ax && \text{yhtälön oikealle puolelle.} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.

Kolmion pinta-ala A lasketaan kaavalla $A = \frac{ah}{2}$, missä a on kolmion kannan pituus ja h korkeus.

Ratkaistaan kaava korkeuden h suhteen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} && \parallel \cdot 2 \text{ Poistetaan nimittäjä kertomalla yhtälö 2:lla.} \\ 2A &= ah && \text{Siirretään } h\text{:n sisältävä termi yhtälön vasemmalle} \\ &&& \text{ja termi } 2A \text{ yhtälön oikealle puolelle.} \\ -ah &= -2A && \parallel :(-a) \text{ Poistetaan } h\text{:n kerroin jakamalla } -a\text{:lla.} \\ h &= \frac{-2A}{-a} \\ h &= \frac{2A}{a} \end{aligned}$$

Tehtäviä

91.

Ympyrän halkaisija on $d = 2r$. Ratkaise yhtälöstä r .

92.

Suunnikkaan pinta-ala A on kannan a ja vastaavan korkeuden h tulo $A = ah$. Ratkaise yhtälöstä

- a) a
- b) h

93.

Laske suunnikkaan kannan pituus, kun sen

- a) pinta-ala on $250,0 \text{ cm}^2$ ja korkeus $5,0 \text{ cm}$
- b) korkeus on $48,0 \text{ cm}$ ja pinta-ala $1200,0 \text{ cm}^2$.

94.

Laske suunnikkaan korkeus, kun sen

- a) kanta on $18,0 \text{ cm}$ ja pinta-ala $468,0 \text{ cm}^2$
- b) pinta-ala on $3172,0 \text{ cm}^2$ ja kanta $61,0 \text{ cm}$.

95.

Ratkaise kolmion pinta-alakaavasta $A = \frac{ah}{2}$

- a) a
- b) h

96.

Laske kolmion kannan pituus, kun sen

- a) pinta-ala on $26,0 \text{ cm}^2$ ja korkeus $13,0 \text{ cm}$
- b) korkeus on $4,0 \text{ cm}$ ja pinta-ala $100,0 \text{ cm}^2$.

97.

Laske kolmion korkeus, kun sen

- a) kanta on $8,0 \text{ cm}$ pinta-ala $14,0 \text{ cm}^2$
- b) pinta-ala on $24,0 \text{ cm}^2$ ja kanta $6,0 \text{ cm}$.

98.

Ratkaise yhtälöstä x .

- a) $x - 2 = 5$
- b) $x - b = a$
- c) $x + b = a$
- d) $2x - a = x$

99.

Ratkaise yhtälöstä x .

- a) $2x = 10$
- b) $ax = b$
- c) $-bx = -c$

d) $ax - b = c$

100.

Eläimet vanhenevat eri nopeudella ihmiseen verrattuna. Seuraavat kaavat antavat kunkin eläimen iän E ihmisen ikää I vastaavana.

kissa ja koira $I = 6,125E$

hevonen $I = 3,675E$

marsu $I = 18,375E$

lehmä $I = 4,9E$

Laske

- a) 12-vuotiaan lehmän ikä ihmisen ikää vastaavana.
- b) 100-vuotiaasta ihmisen ikää vastaava marsun ikä
- c) 14-vuotiaan kissan ikä ihmisen ikää vastaavana
- d) 50-vuotiaasta ihmisen ikää vastaava hevosen ikä.

— soveltavat tehtävät —

101.

Ratkaise puolisuunnikkaan pinta-ala kaavasta $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$

- a) a
- b) b
- c) h

102.

Laske puolisuunnikkaan korkeus, kun sen

- a) pinta-ala on $160,0 \text{ cm}^2$ ja kannat $8,0 \text{ cm}$ ja $12,0 \text{ cm}$
- b) kannat ovat $13,0 \text{ cm}$ ja $15,0 \text{ cm}$ ja pinta-ala $1470,0 \text{ cm}^2$.

103.

Make x the subject of the formula $y = 3x + 2$.

104.

Ratkaise yhtälöt kysytyn muuttujan suhteen.

- a) $F = ma$ $a = ?$
- b) $V = \frac{1}{3} Ah$ $h = ?$
- c) $E = mc^2$ $m = ?$
- d) $E_p = mgh$ $h = ?$

105.

Make the letter in brackets the subject of the formula.

- a) $S = k - 8$ (k)
- b) $P = 2Q + 15$ (Q)

$$c) \quad d = \frac{m}{v} \quad (m)$$

$$d) \quad a = s(r + 7) \quad (r)$$

106.

Ratkaise yhtälöt kysytyn muuttujan suhteen.

$$a) \quad \rho = \frac{m}{V} \quad m = ?$$

$$b) \quad a = \frac{v - v_0}{t} \quad v_0 = ?$$

$$c) \quad l = l_0(1 + \alpha t) \quad t = ?$$

— vaativat tehtävät —

107.

Laske suureen m arvo kaavasta $p = \frac{mgh}{t}$, kun $p = 700$, $t = 45$, $g = 9,81$ ja $h = 4,5$. (yo syksy 1997)

108.

Eräissä maissa käytetään lämpötilan mittaamisessa fahrenheitasteikkoa. Fahrenheitmittarin lukema f muunnetaan kaavalla $c = \frac{5}{9}(f - 32)$ celsiusmittarin lukemaksi c . Kuinka korkea kuume ihmisellä on fahrenheitasteina, jos lukema celsiusasteina on 38,2? Missä lämpötilassa celsiusmittari ja fahrenheitmittari osoittavat samaa lukemaa? (yo syksy 2001)

109.

Valo-opin linssiyhtälössä

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

on f linssin polttoväli, a kuvattavan esineen etäisyys linssistä ja b kuvan etäisyys linssistä. Mikä on sellaisen linssin polttoväli, joka 15 cm:n etäisyydellä olevasta esineestä tuottaa terävän kuvan 30 cm:n etäisyydelle?

110.

Reaaliluvut a , b ja f toteuttavat yhtälön $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Mikä on b :n arvo, kun $a = 5$ ja $f = 11$? (yo kevät 1996)

6. Epäyhtälön ratkaiseminen

Kyseessä on epäyhtälö, kun yhtälössä on yhtäsuuruusmerkin tilalla jokin epäyhtälöä kuvaavista merkeistä:

Epäyhtälöiden merkit

\neq eri suuri kuin
 $<$ pienempi kuin
 $>$ suurempi kuin
 \leq pienempi tai yhtä suuri kuin
 \geq suurempi tai yhtä suuri kuin

Jos epäyhtälön molemmille puolille lisätään tai vähennetään sama luku, pitää epäyhtälö edelleen paikkansa. Samoin epäyhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa puolittain samalla positiivisella luvulla.

Esimerkki 1.

a) Lisätään ja vähennetään epäyhtälöstä $3 < 4$ puolittain 2.

$$\begin{array}{ccc} 3 + 2 < 4 + 2 & \text{ja} & 3 - 2 < 4 - 2 \\ 5 < 6 & \text{Edelleen totta.} & 1 < 2 \quad \text{Edelleen totta.} \end{array}$$

b) Kerrotaan epäyhtälö $3 < 4$ puolittain kahdella.

$$\begin{array}{ccc} 3 < 4 & \parallel \cdot 2 & \\ 6 < 8 & \text{Edelleen totta.} & \end{array}$$

Esimerkki 2.

Kerrotaan epäyhtälö $3 < 4$ puolittain luvulla -2 .

$$\begin{array}{ccc} 3 < 4 & \parallel \cdot (-2) & \\ -6 > -8 & \text{Edelleen totta ainoastaan silloin, jos erisuuruusmerkin suunta vaihdetaan!} & \end{array}$$

Epäyhtälön ratkaiseminen

Epäyhtälö ratkaistaan samoin kuin tavallinen yhtälö, paitsi kerrotaessa tai jaettaessa negatiivisella luvulla on epäyhtälömerkin suunta vaihdettava.

Esimerkki 3.

Ratkaistaan epäyhtälö $2x > 12$.

$$\begin{aligned} 2x > 12 & \parallel :2 \\ x & > 6 \end{aligned}$$

Tarkistus:

Katsotaan toteuttaako, jokin lukua 6 suurempi luku alkuperäisen yhtälön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7 & > 12 \\ 14 & > 12 \quad \text{tosi} \end{aligned}$$

Esimerkki 4.

Ratkaistaan epäyhtälö $x + 2 \leq 3(x - 2)$.

$$\begin{aligned} x + 2 & \leq 3(x - 2) && \text{Poistetaan sulkeet.} \\ x + 2 & \leq 3x - 6 && \text{Siirretään muuttujat vasemmalle} \\ &&& \text{ja muut termit oikealle puolelle.} \\ x - 3x & \leq -6 - 2 && \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ -2x & \leq -8 && \parallel : (-2) \quad \text{Poistetaan } x\text{:n kerroin jakamalla negatiivisella } -2\text{:lla.} \\ x & \geq 4 && \text{Epäyhtälömerkin suunta vaihdettava!} \end{aligned}$$

Tarkistus:

Valitaan x :n arvoksi esimerkiksi 5.

$$\begin{aligned} 5 + 2 & \leq 3(5 - 2) \\ 7 & \leq 9 \quad \text{tosi} \end{aligned}$$

Tehtäviä

111.

Esitä lukusuoralla.

- a) $x > 3$
- b) $x \leq 2$
- c) $-5 < x \leq 4$
- d) $0 \leq x < 3$

112.

Ovatko väittämät totta?

- a) $3 < 5$
- b) $4 > -4$
- c) $-2 \leq -2$
- d) $-4 > -1$

113.

Kerro epäyhtälöiden molemmat puolet luvulla -1 .

- a) $4 > 3$
- b) $2 > -2$
- c) $-4 < -3$
- d) $5 \geq 2$
- e) $-2 \leq 0$
- f) $-1 \geq -2$

114.

Ovatko väittämät totta?

- a) $-8 \leq -10$
- b) $-7 > -11$
- c) $4 \neq 7 - 2$
- d) $10 - 1 \geq 6 + 3$
- e) $-12 - 2 \geq -10$

115.

Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $-3x < 9$
- b) $2x > 6$
- c) $-3x \leq -15$
- d) $3 - 2x \geq -5$

116.

Solve the following inequalities.

- a) $2x < 12$
- b) $-x > 8 - 3$
- c) $x - 4 > -3$
- d) $x - 3x \leq 0$

117.

Mille reaalityluville x pätee

- a) $2x < 3x$
- b) $-9x \geq -3x + 6$?

118.

Millä muuttujan x :n arvoilla lauseke saa positiivisia arvoja?

- a) $6x$
- b) $-\frac{1}{2}x$
- c) $x - 2$
- d) $x + 6$
- e) $-2x + 4$

— soveltavat tehtävät —

119.

Write down the whole numbers in the range $-5 < x < 5$ which satisfy the inequality $2(x - 5) > -4$.

120.

Ratkaise $sx \leq -101$, kun s on positiivinen kokonaisluku.

121.

Millä muuttujan x arvoilla lausekkeen $2x$ arvo on suurempi kuin lausekkeen $23x + 7$ arvo?

122.

Millä x :n arvolla lausekkeen arvot ovat negatiivisia?

- a) $-8x$
- b) $10x$
- c) $4x + 16$
- d) $-2x + 50$

123.

Solve the following inequalities.

- a) $x + 2(x + 1) < 5 + x$
- b) $-4(2x - 1) \geq 10$

124.

Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $3 - 5u > 2(3 + 2u)$
- b) $t - 5 < 2(t - 7)$
- c) $2(v - 3) \leq 7v - 5$

125.

Millä x :n arvoilla lausekkeen arvot ovat positiivisia?

- a) $2x - 1$
- b) x^2
- c) x^3
- d) $|x|$

126.

Ratkaise $kx \geq 6$, kun k on negatiivinen kokonaisluku.

127.

Ratkaise epäyhtälöt.

a) $\pi x + 1 < 3$

b) $-5x + \pi \geq -\pi$

128.

Ratkaise $tx < 3$, kun t on reaaliluku.

———— vaativat tehtävät —————

129.

Ratkaise epäyhtälö $-5x - 4(x + 3) > 6x - 2(x - 1)$.

130.

Ratkaise epäyhtälö $3(x + 4) < 12(15 + 2x)$. (yo syksy 1984)

131.

Ratkaise epäyhtälö $\frac{2}{3}(x + \frac{1}{4}) < \frac{1}{5}(x - \frac{1}{4})$. (yo kevät 1995)

7. Yhtälöiden ja epäyhtälöiden erikoistapauksia

Kaikilla yhtälöillä ei ole ratkaisua. Lisäksi on olemassa yhtälöitä, jotka pitävät paikkaansa millä x :n arvolla tahansa, tällöin yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki 1.

Ratkaistaan yhtälö $-x + 2x + 5 = x - 10 + 15$.

$$\begin{aligned} -x + 2x + 5 &= x - 10 + 15 \\ -x + 2x - x &= -10 + 15 - 5 \\ 0 &= 0 \quad \text{Tämä on aina totta.} \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa reaaliluku eli yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki 2.

Ratkaistaan yhtälö $6x - 4 = 7x - x$.

$$\begin{aligned} 6x - 4 &= 7x - x \\ 6x - 7x + x &= 4 \\ 0 &= 4 \quad \text{Tämä ei ole ikinä totta.} \end{aligned}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Esimerkki 3.

Ratkaistaan epäyhtälö $-2x + 4 \leq x + 3 - (3x - 1)$.

$$\begin{aligned} -2x + 4 &\leq x + 3 - (3x - 1) \\ -2x + 4 &\leq x + 3 - 3x + 1 \\ -2x - x + 3x &\leq 3 + 1 - 4 \\ 0 &\leq 0 \quad \text{Tämä on aina totta, jolloin epäyhtälö on tosi.} \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa reaaliluku eli epäyhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki 4.

Ratkaistaan epäyhtälö $2(x + 2) \leq 2x - 1$.

$$2(x + 2) \leq 2x - 1$$

$$2x + 4 \leq 2x - 1$$

$$2x - 2x \leq -1 - 4$$

$$0 \leq -5 \quad \text{Tämä ei ole ikinä totta, jolloin kyseessä on epätosi epäyhtälö.}$$

Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

Tehtäviä

132.

Onko väite tosi vai epätosi?

- a) $3 \leq -8$
- b) $8 \neq 7$
- c) $5 \geq 3$
- d) $7 < 2$

133.

Onko väite tosi vai epätosi?

- a) $1+3 \leq 5-1$
- b) $6+1 \geq 10-7$
- c) $6+7 \neq 15-3$
- d) $-3-4 > -9$

134.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $3 = -y$
- b) $0 = 2 + y$
- c) $10y = 10y$
- d) $2y = 2y - 5$

135.

Ratkaise.

- a) $5x + 2 = 17$
- b) $5(x + 2) = 17$
- c) $3x + 4 = 2x + 5$
- d) $3(x + 4) = 2(x + 5)$
- e) $4(x + 1) = 2(x - 1) + 2x$

136.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $x = x$
- b) $x + 3 = x$
- c) $\frac{2}{x} = \frac{8}{4x}$

137.

Solve the equation $2(x - 1) + x = 3x - 2$.

138.

Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $x > x - 1$
- b) $2x - 6 > 0$
- c) $x > x$
- d) $x + 2 \geq 4$

139.

Solve the inequalities.

- a) $x > x - 2$
- b) $4x - 8 \geq 0$
- c) $2x > x$
- d) $-x \geq 6$

— soveltavat tehtävät —

140.

Keksi yhtälö, jolla

- a) ei ole ratkaisua
- b) on äärettömästi ratkaisuja.

141.

Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $6x \neq 0$
- b) $x \neq x + 1$
- c) $x + 3 \neq 5 - 2x$
- d) $3x \neq 9$

142.

Keksi epäyhtälö, jolla

- a) ei ole ratkaisua
- b) on äärettömästi ratkaisuja.

— vaativat tehtävät —

143.

Mikä a :n on oltava, jotta yhtälöllä $ax - 6 - x = 3x$ ei olisi ratkaisua?

144.

Mikä b :n on oltava, jotta yhtälöllä $bx + 3x = 5x$ olisi äärettömän monta ratkaisua?

145.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $5x(x + 6) - 4 = 4x^2 + x^2 + 20x + 6 - 10 + 10x$
- b) $\frac{-2x}{-16} = \frac{x}{8}$
- c) $4x(x - 1) + 5x - x + 3x^2 + x^2 - 8 = 0$

146.

Mikä a :n on oltava, jotta epäyhtälöllä $ax + 2 - 6 \neq -4x - 4$ ei olisi ratkaisua?

8. Yhtälön muodostaminen sanallisesta ongelmasta

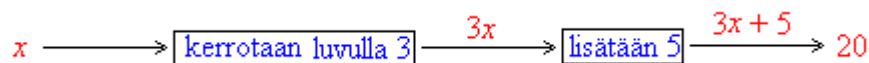
Ongelmatehtävistä, jotka etenevät ainoastaan yhteen suuntaan, selvittää usein pelkällä päättelyllä. Sen sijaan, jos ongelmaa on tarkasteltu kahdesta tai useammasta eri näkökulmasta, vaaditaan yhtälön kirjoittamis- ja ratkaisutaitoja tilanteen selvittämiseksi. Vaikka osaisit päätellä suoraan tässä kappaleessa jonkin tehtävän, se ei ole sallittua. Ongelmista on opittava muodostamaan yhtälöitä.

Esimerkki 1.

Kun eräs luku kerrotaan kolmella ja lisätään tuloon viisi, saadaan 20. Mikä on alkuperäinen luku?

Ratkaisu:

Merkitään kysyttyä lukua x :llä ja piirretään kaavio tilanteen hahmottamiseksi.



Kaavion kaikki nuolet osoittavat samaan suuntaan ja päätyvät lopulta tulokseen 20. Kaavion perusteella voidaan kirjoittaa yhtälö ja ratkaista se normaaleja yhtälön ratkaisusääntöjä noudattaen.

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 20 \\ 3x &= 20 - 5 \\ 3x &= 15 \quad \parallel : 3 \\ x &= \frac{15}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

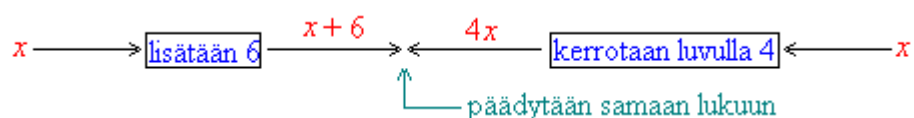
Vastaus: Alkuperäinen luku on 5.

Esimerkki 2.

Kun erääseen lukuun lisätään 6, saadaan alkuperäinen luku nelinkertaisena. Mikä on alkuperäinen luku?

Ratkaisu:

Merkitään kysyttyä lukua x :llä ja piirretään tilanteesta kaavio.



Kyseessä on ongelma, jota tarkastellaan kahdelta eri suunnalta. Molemmissa päädytään samaan lukuun, jota ei ole annettu. Kirjoitetaan tilanteesta yhtälö ja ratkaistaan se normaaleja yhtälön ratkaisusääntöjä noudattaen.

$$x + 6 = 4x$$

$$x - 4x = -6$$

$$-3x = -6 \quad \| :(-3)$$

$$x = \frac{-6}{-3}$$

$$x = 2$$

Vastaus: Alkuperäinen luku on 2.

Miten kannattaa toimia sanallisissa sovellus- ja ongelmatehtävissä?

- Lue tehtävä huolellisesti useampaan kertaan.
- Piirrä kuvioita tai kaavioita, se auttaa hahmottamisessa.
- Valitse muuttuja.
- Yritä esittää jokin annetuista tiedoista muuttujaa käyttäen kahdella eri tavalla, jolloin saat yhtälön.
- Ratkaise yhtälö.
- Tarkista vastauksesi järjellisyys.

Tehtäviä

147.

Ajattele jotakin lukua, kerro se sitten kahdella ja lisää siihen vielä yhdeksän. Miten tämän saman voi merkitä lyhyemmin lausekkeen avulla?

148.

Mikä luku on kyseessä, kun

- a) erääseen lukuun lisätään neljä ja summa kerrotaan kahdella, saadaan tulokseksi 24.
- b) eräs luku kerrotaan kolmella ja tulosta vähennetään 6, saadaan tulokseksi 9.

149.

I think of a number, multiply it by 5 and then add 3. The answer is 18. What is my number?

150.

Kirjoita seuraavat yhtälönä.

- a) Kun lukuun x lisätään luku 15, saadaan tulokseksi 40.
- b) Kun luvusta x vähennetään luku 4, saadaan tulokseksi 6.
- c) Kun luku x kerrotaan luvulla 3, saadaan tulokseksi 21.
- d) Kun luku x kerrotaan luvulla 4 ja siitä vähennetään 8, saadaan tulokseksi 12.

151.

Ratkaise edellisten tehtävän yhtälöt.

152.

Kirjoita seuraavat yhtälöinä.

- a) Kun luvusta x vähennetään luku 3, saadaan tulokseksi 10.
- b) Kun luku x kerrotaan luvulla 5, saadaan tulokseksi 100.
- c) Kun luku x kerrotaan luvulla 2 ja siihen lisätään 9, saadaan tulokseksi 39.

153.

Ratkaise edellisten tehtävän yhtälöt.

—— soveltavat tehtävät ———

154.

Muodosta epäyhtälö ja ratkaise se.

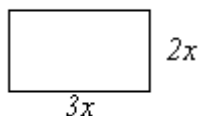
- a) Kun lukuun lisätään kolme, saadaan summaksi suurempi luku kuin 9.
- b) Kun luvusta vähennetään 12, saadaan erotukseksi pienempi tai yhtäsuuri luku kuin -5.

155.

Määritä kolme pienintä peräkkäistä kokonaislukua siten, että niiden summa on enemmän kuin 100.

156.

Määritä suorakulmion sivujen pituudet, kun suorakulmion piiri on 16,0 m.

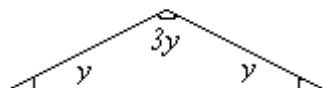


157.

Suorakulmion piiri on 36 m. Sen pituus on kaksinkertainen leveyteen verrattuna. Laske suorakulmion pinta-ala.

158.

Määritä kolmion kulmien suuruudet.



159.

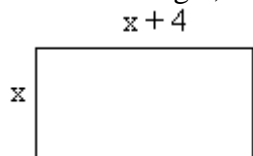
Six times a number is the same as that number plus 65. What is the number?

160.

Kahden luvun summa on 32. Toinen luvuista on 4 suurempi kuin toinen. Mitkä luvut ovat kyseessä?

161.

In this rectangle, the length is 4 more than the width. The perimeter is 20. What is the value of x ?



162.

Mila on vuoden kuluttua kaksi kertaa niin vanha kuin vuosi sitten. Minkä ikäinen Mila on nyt?

163.

A boy is x years old. His father is 26 years older than he is. The sum of their ages is 32. How old is the boy?

164.

Tennismaila ja pallo maksavat yhteensä 63 €. Maila maksaa 58 euroa enemmän kuin pallo. Paljonko tennispallo maksaa?

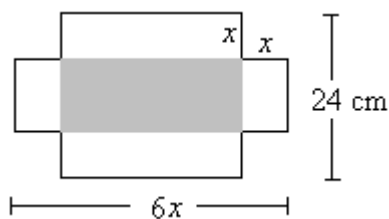
165.

Think a number. Double it. Add 4. Divide by 2. Subtract the number you first thought of. What is the answer?

_____ vaativat tehtävät _____

166.

Suorakaiteen muotoisen pahvin kulmista on poistettu neliön muotoiset palat, jolloin taittelemalla voidaan muodostaa avonainen laatikko. Selitä miksi muodostuneen laatikon pohjan pinta-ala on $A = 4x(24 - 2x)$.



167.

Kun kolme peräkkäistä parillista kokonaislukua lasketaan yhteen saadaan 78. Mitkä kolme lukua on kyseessä?

168.

Jaa luku 80 kahteen osaan siten, että toinen osa on neljäsosan toisesta osasta.

169.

Leila on tänä vuonna neljä kertaa tyttärensä Sannin ikäinen. Viiden vuoden kuluttua Leila on kolme kertaa Sannin ikäinen. Minkä ikäinen Leila on nyt?

170.

The sum of three consecutive numbers is 21. What are the numbers?

171.

Painoindeksi on yleisesti käytetty lihavuuden mittari. Se lasketaan jakamalla paino (kilogrammoina) pituuden (metreinä) neliöllä. Ihannepainoisen ihmisen painoindeksin tulisi olla välillä 20 – 25. Kuinka monta kiloa 183 cm:n pituisen ja 91 kg:n painoisen henkilön tulisi laihduttaa, jotta hän olisi ihannepainoinen? Paljonko hänen on laihdutettava, jotta hän olisi alle ihannepainon? (yo kevät 1999)

172.

Maanviljelijällä on terveitä kanoja ja lampaita. Yhteensä eläimiä on 490 kappaletta. Montako kanaa ja montako lammasta maanviljelijällä on, kun jalkoja eläimillä on yhteensä 1140?

173.

Auton vuokraus maksoi 19 € vuorokaudelta ja lisäksi 0,20 € ajokilometriltä. Laske ajetun matkan pituus, kun kahden vuorokauden matkasta jouduttiin maksamaan 120 €.

174.

A puhdistaa 1 litran suuruisen annoksen marjoja 2 minuutissa ja B 3 minuutissa. Missä ajassa he yhdessä puhdistavat 50 litraa marjoja? (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, kevät 1995)

9. Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia

Prosentteja on käytetty 1600-luvun lopulta lähtien muunmuassa verojen, korkojen, tuottojen ja tappioiden laskemisessa. Prosentin idea on kuitenkin peräisin jo Rooman keisari Augustuksen (63 eKr. – 14 jKr.) ajoilta. Hän määräsi maksettavaksi kaikista huutokaupattavista tarvikkeista veroa, joka oli 1/100 tuotteen hinnasta. Prosentti nimitys tulee latinan sanasta *per centum*, sataa kohden tai *pro centum*, sadasta.

Prosentti on sadasosa.

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0,01$$

Desimaalilukuna tai murtolukuna merkittyä prosenttia sanotaan *prosenttikertoimeksi*. *Prosenttiluku* saadaan prosenttikertoimesta siirtämällä pilkkua kaksi askelta oikealle. Yleensä vastauksissa ja tehtävänannoissa käytetään prosenttilukuja, mutta itse laskut suoritetaan prosenttikertoimien avulla.

Esimerkki 1.

Muunnetaan

- a) prosenttiluku desimaaliluvuksi

$$62 \% = \frac{62}{100} = 0,62$$

- b) murtoluku prosenttiluvuksi

$$\frac{3}{5} = \overset{20)}{\frac{3}{5}} = \frac{60}{100} = 60 \%$$

Huom! Käytännössä murtoluvut muutetaan prosenttiluvuksi suorittamalla jakolasku laskimella ja kertomalla saatu desimaaliluku 100 % :lla kuten esimerkissä 2.

Prosenttiosuus kertoo montako prosenttia luku on toisesta luvusta ja se saadaan jakolaskun avulla. Lukua, josta prosentti otetaan, sanotaan *perusarvoksi*.

Esimerkki 2.

Liinalla on 24 Facebook-ystävää listallaan, joista 6 on ulkomaalaista. Laske ulkomaalaisten ystävien prosenttiosuus kaikista ystäväistä.

$$\frac{6}{24} = 0,25 = 25 \%$$

Diagram illustrating the calculation of the percentage of foreign friends:

- The numerator 6 is labeled "prosenttikerroin" (percentage multiplier).
- The denominator 24 is circled in red and labeled "perusarvo" (base value).
- The result 0,25 is labeled "prosenttiluku" (percentage number).
- The result 25 % is labeled "prosenttiluku" (percentage number).

Vastaus: Liinan Facebook-ystävistä 25 % on ulkomaalaisia.

Tehtäviä

175.

Kirjoita prosenttiluvut desimaalilukuina.

- a) 10 %
- b) 45 %
- c) 80 %
- d) 1,5 %
- e) 0,2 %
- f) 125 %

176.

Kirjoita desimaaliluvut prosenttilukuina.

- a) 0,2
- b) 0,08
- c) 0,73
- d) 0,05

177.

Kirjoita murtoluvut prosenttilukuina.

- a) $\frac{4}{100}$
- b) $\frac{72}{100}$
- c) $\frac{120}{100}$
- d) $\frac{2}{10}$
- e) $\frac{1}{25}$
- f) $\frac{3}{4}$

178.

Write each percentage as a fraction with denominator 100.

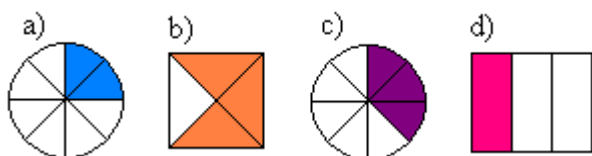
- a) 28 %
- b) 44 %
- c) 85 %
- d) 1 %

179.

Kirjoita edellisen tehtävän murtoluvut sievennetyssä muodossa.

180.

Ilmoita prosentteina alueen tummennettu osa.



181.

Piirrä vihkoosi

- a) neliö ja väritä siitä 75 %
 b) suorakulmio ja väritä siitä 25 %
 c) ympyrä ja väritä siitä 12,5 %.

182.

Montako prosenttia ilmeistä on iloisia?



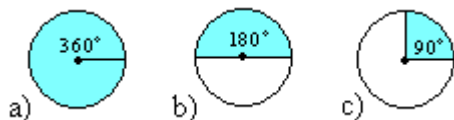
183.

Esitä desimaaliluvut prosenttilukuina.

- a) 0,14
 b) 0,03
 c) 0,0042
 d) 2,05

184.

Montako prosenttia tummennetut sektorit ovat koko ympyrästä?



185.

Montako prosenttia luokkasi oppilaista on

- a) tyttöjä
 b) poikia?

186.

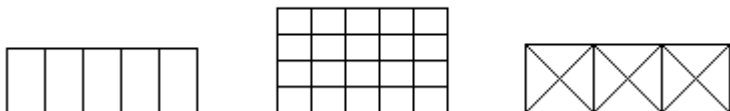
Express the first quantity as a percentage of the second.

- a) 24 cm, 120 cm
 b) 36 cm, 99 cm
 c) 45 cm, 2,6 m
 d) 3 cm, 0,9 m

187.

Jäljennä kuviot vihkoosi ja väritä niistä pyydetty prosenttiosuus.

- a) 20 % b) 30 % c) 75 %



188.

Esitä prosenttiluvut murto- ja desimaalilukuina.

- a) 3 %
- b) 10 %
- c) 25 %
- d) 47 %
- e) 85 %
- f) 250 %

189.

Montako prosenttia luku 2 on luvusta

- a) 4
- b) 6
- c) 10
- d) 15?

190.

Montako prosenttia

- a) 62 päivää on 530 päivästä
- b) 7 ihmistä on 112 ihmisestä
- c) luku 82,25 on luvusta 324,5
- d) 11 300 puuta on 19 130 puusta
- e) 0,012 grammaa on 0,77 grammasta?

191.

Melissan luokan oppilaista $\frac{21}{25}$ osaa uida ja Sofian luokan oppilaista $\frac{19}{20}$ osaa uida. Ilmoita nämä murtoluvut prosenttilukuina.

— soveltavat tehtävät —

192.

Muunna Einon koetulokset prosenttiluvuiksi. Missä aineessa hän pärjäsi parhaiten?

Aine	Matematiikka	Historia	Biologia	Englanti	Uskonto
Pisteet	32	30	66	54	26
Maksimipistemäärä	36	45	75	60	55

193.

Kirjoita murto-, desimaali- ja prosenttilukuina.

- a) joka kymmenes
- b) joka viides
- c) joka sadas
- d) kaksi kolmesta
- e) joka toinen
- f) puolet
- g) neljä viidesosaa
- h) kolme kymmenestä

194.

Ylämäkeä varoittavassa liikennemermissä prosenttiluku 7 % kuvaa mäen jyrkkyyttä (eli jokaisella 100 metrillä on nousua 7 metriä). Mikä on mäen jyrkkyys prosentteina, jos

- a) 200 metrillä on nousua 30 m?
- b) 150 metrillä on nousua 18 m?
- c) 500 metrillä on nousua 500 metriä?

195.

Kultasormus sisältää 20/24 puhdasta kultaa. Paljonko kultapitoisuus on prosentteina?

196.

Autokauppias myi auton 41 600 eurolla. Palkkiona hän sai itse 624 euroa. Montako prosenttia palkkio on myyntihinnasta?

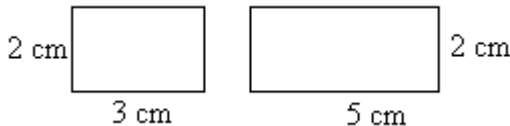
197.

Montako prosenttia

- a) 350 grammaa on 15 kilogrammasta
- b) 20 euroa on 260 eurosta
- c) 15 minuuttia on 3 tunnista
- d) 80 senttiä on 20 eurosta
- e) 56 senttimetriä on 3,2 metristä?

198.

Montako prosenttia pienemmän suorakulmion pinta-ala on suuremman suorakulmion pinta-alasta?



— vaativat tehtävät —

199.

1880 euron palkasta perittiin veroa 629,8 €. Kuinka suuri oli veroprosentti?

200.

Kunnan asukasluku on 14 519. Kouluikäisiä tai sitä vanhempia asukkaita kunnassa on 13 495. Montako prosenttia asukkaista on alle kouluikäisiä?

201.

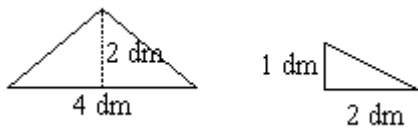
Artun palkasta kolmasosa menee veroihin, viidesosa ruokaan ja kuudesosa vuokraan. Montako prosenttia jää jäljelle?

202.

Maailman suurin kerrostalo on Lontoon Cityssä sijaitseva Barbican Estate, joka on rakennettu 1959. Siinä on 2 014 asuntoa ja pysäköintitilaa 1710 autolle. Montako prosenttia asunnoista jää ilman pysäköintitilaa, kun jokainen asunto voi saada ainoastaan yhden pysäköintipaikan?

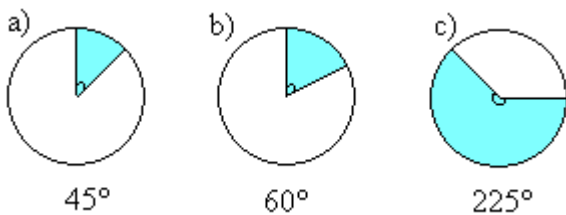
203.

Montako prosenttia suuremman kolmion pinta-ala on pienemmän kolmion pinta-alasta?



204.

Montako prosenttia tummennetun sektorin pinta-ala on koko ympyrän pinta-alasta? Kaikissa kohdissa ympyrän säde on 3,5 cm.



205.

Taulukossa on aurinkokuntamme planeettojen massat. Laske montako prosenttia kunkin planeetan massa on Maan massasta.

Planeetta	Massa [kg]
Merkurius	$3,304 \cdot 10^{23}$
Venus	$4,8745 \cdot 10^{24}$
Maa	$5,974 \cdot 10^{24}$
Mars	$6,422 \cdot 10^{23}$
Jupiter	$1,899 \cdot 10^{27}$
Saturnus	$5,684 \cdot 10^{26}$
Uranus	$8,686 \cdot 10^{25}$
Neptunus	$1,029 \cdot 10^{26}$
Pluto	$1,195 \cdot 10^{22}$

10. Prosenttiarvon laskeminen

Yleensä prosenteilla laskettaessa on prosenttiluvut ensiksi muutettava murtoluku- tai desimaalimuotoon. Prosentti otetaan eli *prosenttiarvo* lasketaan tietystä luvusta siten, että kerrotaan perusarvo prosenttikerroimella.

prosenttiarvo

p prosenttia luvusta a on

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

Muodostetaan prosenttiluvusta prosenttikerroin jakamalla sadalla. perusarvo

Esimerkki 1.

Lasketaan, paljonko on 20 % luvusta 150.

perusarvo

$$\frac{20}{100} \cdot 150 = 0,2 \cdot 150 = 30$$

prosenttikerroin

=

prosenttiarvo

Prosenttiluku 20 % muunnetaan joko murto- tai desimaalilukumuotoon.

Esimerkki 2.

Farkut kutistuvat ensimmäisessä pesussa 3 %. Paljonko farkut lyhenevät pesussa, jos lahkeiden pituus on alunperin 98 cm?

Ratkaisu:

$$\frac{3}{100} \cdot 98 \text{ cm} = 0,03 \cdot 98 \text{ cm} \approx 2,9 \text{ cm}$$

Vastaus: Lahkeet lyhenevät 2,9 cm.

Tehtäviä

206.

Paljonko on 1 %

- a) 320
- b) 70
- c) 10
- d) 53
- e) 2000
- f) 345 eurosta?

207.

Paljonko on 10 %

- a) 320
- b) 70
- c) 10
- d) 53
- e) 2000
- f) 345 eurosta?

208.

Paljonko on 100 %

- a) 320
- b) 70
- c) 10
- d) 53
- e) 2000
- f) 345 eurosta?

209.

Ihmisen kehossa on vettä keskimäärin 64 %. Montako kilogrammaa on vettä henkilössä, joka painaa

- a) 49 kg
- b) 65 kg
- c) 82 kg
- d) 110 kg?

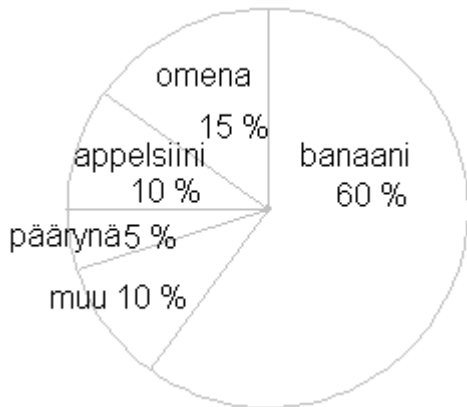
Laske myös montako kilogrammaa sinussa on vettä.

210.

Malmilohkareen rautapitoisuus on 43 %. Paljonko rautaa on 300 kg painavassa malmilohkareessa?

211.

500 oppilaalta tiedusteltiin heidän lempihedelmäänsä, kyselyn tulokset ovat kuvattuna sektoridiagrammissa.



Monenko oppilaan lempihedelmä on

- a) banaani
- b) appelsiini
- c) omena tai päärynä?

212.

Vesimelonin vesipitoisuus on 99 %. Montako litraa vettä on vesimelonissa, joka painaa

- a) 8,5 kg
- b) 6900 g
- c) 13,9 kg ?

213.

Calculate these percentages.

- a) 35 % of 15 kg
- b) 66 % of 230 cm
- c) 12 % of 67 m
- d) 7 % of 140 ml
- e) 4 % of 5 km

214.

Laske

- a) 12 % luvusta 900
- b) 45 % luvusta 45
- c) 75 % luvusta 3600
- d) 15 % luvusta 230.

215.

Out of 150 students 20 % went to the camp. How many went to the camp?

216.

Laske 900 eurosta

- a) 1 %
- b) 5 %
- c) 20 %
- d) 75 %.

— soveltavat tehtävät —

217.

Huonekaluliike vaatii käsirahan, joka on 20 % kaikista ostoksista. Virtaset ostavat sohvan, jonka hinta on 1 085 € ja pöydän, jonka hinta on 290 €. Paljonko heiltä peritään käsirahaa?

218.

Kumpi on suurempi, 25 % luvusta 400 vai 12 % luvusta 950?

219.

Laske

- a) 200 % luvusta 30
- b) 120 % luvusta 410
- c) 320 % luvusta 23
- d) 413 % luvusta 150.

— vaativat tehtävät —

220.

Autoilija havaitsi tienvarressa olevasta näyttötaulusta todellisen nopeutensa olevan 92 km/h, kun auton nopeusmittari näytti 100 km/h. Mikä on auton todellinen nopeus, kun nopeusmittari näyttää 85 km/h? Nopeusmittarin näytön virheprosentin oletetaan olevan sama kaikilla nopeuksilla. (yo syksy 1999)

Arvonlisävero

Jokaisen peruskoululaisen yksi lukuvuosi maksaa yli 3 600 €. Kuka sen maksaa? Lukukausimaksua ei peritä vanhemmilta suoraan, vaan se tulee maksetuksi verojen muodossa. Koulujen lisäksi meillä ei olisi ilman verotusta käytössämme ilmaisia kirjastoja, lähes ilmaisia uimahalleja ja jäähalleja. Verorahoilla myös ylläpidetään terveystalouksia, poliisilaitoksia, palokuntia jne.

Yleisesti verojen tarkoitus on yhteiskunnan rahantarpeen tyydyttäminen. Jokaisen kansalaisen on osallistuttava yleisesti hyödyllisten toimintojen maksamiseen, mikä hoidetaan verotuksen kautta. Suomen verojärjestelmä voidaan jakaa kahteen osaan, *välittömiin* ja *välillisiin* veroihin. Välittömiä veroja maksetaan saaduista tuloista, kuten palkkatuloista, pääomatuloista tai yrityksen voitosta. Jokainen palkansaaja maksaa palkastaan tietyn prosentin verran veroa. Veroprosentti on sitä suurempi, mitä enemmän tienaa. Välilliset verot tulevat puolestaan tavaroiden tai palveluiden lopullisten kuluttajien maksettavaksi. Välillisistä veroista tärkein on arvonlisävero. Muita välillisiä veroja ovat mm. autovero, alkoholi- ja tupakkaverot, polttoaineverot sekä leimaverot. Välillisillä veroilla kansainvälisessä kaupassa tarkoitetaan sitä, että verotulot kertyvät pääsääntöisesti siihen valtioon, jossa lopullinen kulutus tapahtuu, eikä esimerkiksi siihen valtioon, jossa tavarat on valmistettu.

Yritykset on velvoitettu keräämään kansalaisilta arvonlisäveroa. Ne nostavat myytävien tuotteiden tai palveluidensa hintaa arvonlisäprosentin verran ja antavat hinnasta tämän osuuden valtiolle. Arvonlisäprosentti vaihtelee Suomessa välillä 0 % - 22 %. Yleinen alv-prosentti on 22 %. Elintarvikkeiden alv-prosentti on 17 %. Kirjat, lääkkeet, liikuntapalvelut, elokuvanäytökset, henkilökuljetukset, majoituspalvelut, kulttuuri- ja viihdetilaisuudet sekä televisioluvat sisältävät puolestaan 8 % arvonlisäveroa. Aikakausi- ja sanomalehtien tilaushinnoissa arvonlisäveroa ei ole. Sitä ei peritä myöskään kiinteistöjen ja osakehuoneistojen myyntihinnoista, terveyden- ja sairaanhoitopalveluista sekä sosiaalihuoltopalveluista.

Vain Ruotsi ja Tanska EU-maista perivät Suomea korkeampaa arvonlisäveroprosenttia. EU-maiden arvonlisäveroprosentit on esitetty taulukossa (2008 tilanne):

Maa	Arvonlisäveroprosentti
Ruotsi	25,0
Tanska	25,0
Suomi	22,0
Belgia	21,0
Irlanti	21,0
Italia	20,0
Itävalta	20,0
Portugali	20,0
Ranska	19,6
Alankomaat	19,0
Kreikka	19,0
Saksa	19,0
Britannia	17,5
Espanja	16,0
Luxemburg	15,0

11. Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina

Kun jokin luku kerrotaan luvulla 1, säilyy se muuttumattomana. Vastaavasti prosentein ilmaistuna, esimerkiksi tuotteen hinta pysyy alkuperäisenä, jos hinnasta joudutaan maksamaan 100 %.

Prosentteina ilmoitettujen lisäysten ja vähennysten laskemiseksi tutkitaan aluksi millaiseksi luku prosentein ilmaistuna muuttuu. Kun saatu prosenttiluku muutetaan prosenttikertoimeksi ja kerrotaan sillä alkuperäinen lukuarvo, on prosentuaalinen muutos saatettu voimaan. Jos prosenttikerroin on suurempi kuin yksi, on kyse lisäyksestä ja jos prosenttikerroin on pienempi kuin yksi, on kyse vähennyksestä.

Prosentuaalisen lisäyksen ja vähennyksen laskeminen

- Alussa on 100 %, johon lisätään $p\%$.
- Kun perusarvo a kasvaa $p\%$, on lopputulos $\left(\frac{100+p}{100}\right) \cdot a$ – perusarvo
Muodostetaan prosenttiluvusta prosenttikerroin jakamalla sadalla.

Alussa on 100 %, josta vähennetään $p\%$.

 - Kun perusarvo a pienenee $p\%$, on lopputulos $\left(\frac{100-p}{100}\right) \cdot a$ – perusarvo
Muodostetaan prosenttiluvusta prosenttikerroin jakamalla sadalla.

Huom! $\left(\frac{100+p}{100}\right) \cdot a$ voidaan esittää sievennetyssä muodossa $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a$

Esimerkki 1.

Jäätelöbaarissa jäätelöannoksen veroton hinta on 4 € . Jäätelöannokseen on lisättävä arvonlisävero. Paljonko on jäätelöannoksen verollinen myyntihinta?

Ratkaisu:

Tapa I

Jäätelöannoksen verollinen hinta on $100\% + 22\% = 122\%$ verottomaan hintaan verrattuna. Jäätelöannoksen hinta kasvaa siis 1,22-kertaiseksi. Jäätelöannoksen verollinen hinta saadaan kertomalla prosenttikerroin ja alkuperäinen hinta keskenään:

$$\left(\frac{100+22}{100}\right) \cdot 4 \text{ €} = 1,22 \cdot 4 \text{ €} = 4,88 \text{ €}$$

prosenttikerroin
alkuperäinen hinta

Tapa II

Arvonlisäveroprosentti on 22 %. Lasketaan ensin, kuinka monta euroa tämä on verottomasta hinnasta:

$$\frac{22}{100} \cdot 4 \text{ €} = 0,22 \cdot 4 \text{ €} = 0,88 \text{ €}$$

Lisätään sitten tämä verottomaan hintaan:

$$4 \text{ €} + 0,88 \text{ €} = 4,88 \text{ €}$$

Vastaus: Jäätelöannoksen verollinen hinta on 4,90 €.

Esimerkki 2.

Lumilaudan alkuperäinen hinta on 400 €. Urheiluvälinekaupassa on alennusmyynti ja kaikista tuotteista ostaja saa 20 % alennuksen, paljonko on lumilaudan alennettu hinta?

Ratkaisu:

Tapa I

Alkuperäisestä hinnasta jää maksettavaksi $100\% - 20\% = 80\%$ eli laudan hinta pienenee 0,8-kertaiseksi. Alennettu hinta saadaan kertomalla prosenttikerroin ja alkuperäinen hinta keskenään:

$$\left(\frac{100-20}{100}\right) \cdot 400 \text{ €} = 0,80 \cdot 400 \text{ €} = 320 \text{ €}$$

prosenttikerroin
alkuperäinen hinta

Tapa II

Lasketaan ensin euroina alennuksen suuruus:

$$\frac{20}{100} \cdot 400 \text{ €} = 0,20 \cdot 400 \text{ €} = 80 \text{ €}$$

ja vähennetään sitten alennus alkuperäisestä hinnasta

$$400 \text{ €} - 80 \text{ €} = 320 \text{ €}.$$

Vastaus: Lumilaudan uusi hinta on 320 €.

Tehtäviä

221.

Millä desimaaliluvulla hinta on kerrottava, jos sitä korotetaan

- a) 50 %
- b) 10 %
- c) 3 %
- d) 150 %
- e) 0,9 % ?

222.

Millä desimaaliluvulla hinta on kerrottava, jos sitä alennetaan

- a) 50 %
- b) 90 %
- c) 17 %
- d) 3 %
- e) 0,5 % ?

223.

Hinnat nousevat 20 %, laske uudet hinnat.

- a) 5 €
- b) 16 €
- c) 210 €
- d) 18,5 €
- e) 60 snt

224.

Hinnat alenevat 5 %, laske uudet hinnat.

- a) 18 €
- b) 540 €
- c) 5,8 €
- d) 10 snt
- e) 3,5 miljoonaa euroa

225.

Lisää

- a) 3 % lukuun 1540
- b) 21 % lukuun 72,5
- c) 12,6 % lukuun 2853
- d) 0,5 % lukuun 1900
- e) 130 % 14 kilogrammaan
- f) 1,3 % 345 euroon.

226.

Vähennä

- a) 2 % 8,50 eurosta
- b) 25 % luvusta 199
- c) 6,5 % luvusta 5640
- d) 74 % luvusta 62500

- e) 6,5 % 2446 eurosta
f) 2,25 % 500 eurosta.

227.

A shop is having a sale. It sells a set of tools costing \$130 at a 20 % discount. Calculate the sale price of the tools.

228.

Paidan veroton hinta on 20 €. Mikä on paidan verollinen hinta alv-prosentin lisäämisen jälkeen?

229.

William earns \$680 per week. He has just received a pay rise of 4 %. How much

- a) more will William earn per week?
b) in total does William earn after his pay rise?

230.

Teppo osti kirjan, jonka myyntihinta oli 39,80 €. Hän oli töissä samassa liikkeessä ja sai henkilökunta-alennusta 20 %. Paljonko Teppo maksoi kirjasta?

231.

What would Veena pay for a CD player that sells for \$650 but is discounted by 15 %?

232.

Jäljennä taulukko vihkoosi ja merkitse siihen puuttuvat tiedot.

tuote	alkuperäinen hinta	alennus prosentteina	alennus euroina	alennettu hinta
hyppynaru	9 €	25 %		
nyrkkeilyhanskat	62 €	10 %		
shortsit			9,6 €	6,4 €
maastopyörä			131 €	524 €
makuupussi			23,7 €	134,3 €

———— soveltavat tehtävät —————

233.

Montako prosenttia hinta laskee tai nousee, kun se kerrotaan luvulla

- a) 0,95
b) 1,17
c) 0,7
d) 1,5
e) 2
f) 1,02
g) 0,991?

234.

Ohessa on tuotteiden verottomia hintoja. Laske niiden verolliset hinnat Suomessa.

- a) housut 50 €
b) paita 25 €
c) takki 80 €

- d) hame 20 €
- e) kengät 55 €

235.

Paljonko edellisen tehtävän vaatteet maksavat Ruotsissa (katso Ruotsin alv-prosentti kappaleen alussa esitetystä taulukosta)?

236.

Paljonko edellä mainitut vaatteet maksavat Luxemburgissa?

237.

Paljonko edellä mainitut vaatteet maksavat Saksassa?

238.

Increase 250 € by 20 % and the decrease this result by 20 %.

239.

Aurinkolasien alkuperäinen hinta oli 93 € ja alennettu hinta 69,75 €. Montako prosenttia aurinkolasien hintaa oli alennettu?

——— vaativat tehtävät ———

240.

Valurautatangon pituus on 970 mm. Mikä on ollut valumuotin pituus, kun tangossa käytetty valurauta kutistuu 1,2 % jäähtyessään sulasta kiinteäksi?

241.

Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita 8,5 %. Kuinka suureksi muodostui 64,5 neliömetrin suuruisen asunnon yhtiövastike, kun neliömetriltä oli aiemmin maksettu 2 € kuukaudessa? (yo kevät 2000)

12. Koronkorko

Prosenttilaskussa muutos on hetkellinen eli ajalla ei ole merkitystä, mutta korkolaskussa huomioidaan myös aika. Alkuperäinen luku kasvaa tietyn prosentin mukaan, mutta lisäyksen suuruus riippuu ajasta.

Korkoaika: Euroopan keskuspankki käyttää korkovuoden pituutena 360 päivää. Jos tehtävissä ei ole annettu päivämääriä, käytä korkoaikoja 1 vuosi = 12 kuukautta = 52 viikkoa = 360 päivää.

Esimerkki 1.

Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Lasketaan, kuinka suureksi 1000 € talletus kasvaa kahdeksassa vuodessa?

Kyseessä on lisäys prosentteina, joten laskutoimitus suoritetaan, kuten edellisessä kappaleessa opittiin.

talletus 1. vuoden jälkeen: $1,02 \cdot 1000 \text{ €} = 1020 \text{ €}$

talletus 2. vuoden jälkeen: $1,02 \cdot 1020 \text{ €} = 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1000 \text{ €} = 1,02^2 \cdot 1000 \text{ €} = 1040,4 \text{ €}$

talletus 3. vuoden jälkeen: $1,02 \cdot 1040,4 \text{ €} = 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1000 \text{ €} = 1,02^3 \cdot 1000 \text{ €} = 1061,208 \text{ €}$

Edellisen perusteella nähdään, että

talletus 8. vuoden jälkeen: $1,02^8 \cdot 1000 \text{ €} \approx 1174,66 \text{ €}$

Pääoma n vuoden jälkeen

Pääoma n vuoden jälkeen, kun vuotuinen korko on p prosenttia ja alkupääoma on a :

$$P = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot a$$

Esimerkki 2.

Paljonko korkoa kertyy 15 000 euron talletukselle kymmenessä vuodessa, jossa säästötilin vuotuinen korko on 1,7 %?

Lasketaan ensin paljonko on talletuksen arvo kymmenen vuoden kuluttua:

$$P = \left(1 + \frac{1,7}{100}\right)^{10} \cdot 15000 \text{ €} \approx 17754,19 \text{ €}$$

Koron osuus saadaan vähennyslaskulla $17754,19 \text{ €} - 15000 \text{ €} = 2754,19 \text{ €}$

Esimerkki 3.

Freda täti jätti Tealle perinnöksi 118022,23 € talletuksen, jotka oli sijoitettu kymmeneksi vuodeksi 12 % vuosikorolla. Paljonko talletuksen arvo oli alunperin?

$$118022,23 = \left(1 + \frac{12}{100}\right)^{10} \cdot a$$

$$118022,23 = 1,12^{10} a$$

$$-1,12^{10} a = -118022,23 \quad || \cdot -1,12^{10}$$

$$a = \frac{-118022,23}{-1,12^{10}}$$

$$a \approx 38000 \text{ (€)}$$

Tehtäviä

242.

Pankkitilin vuotuinen korko on 2 %. Kuinka suureksi 1000 € talletus kasvaa

- a) vuodessa?
- b) kolmessa vuodessa?

243.

Kuinka suureksi 5000 € talletus kasvaa vuodessa, jos vuotuinen korko on

- a) 3 %
- b) 0,5 % ?

244.

Pankin maksama vuotuinen talletuskorko on 1,2 %. Kuinka suureksi kasvaa 3500 € suuruinen talletus

- a) yhdessä
- b) kahdessa
- c) kuudessa vuodessa?

245.

Calculate the total amount owing on a loan of \$15 000 after two years, if the 13 % interest p.a. (per annum = vuosikorko) is compounded annually?

—— soveltavat tehtävät ———

246.

Paljonko korkoa kertyy 50 000 euron talletukselle viidessä vuodessa, jossa säästötilin vuotuinen korko on 1,1 %?

247.

Maapallon väkiluku kasvaa 1,2 prosenttia vuodessa. Oletetaan, että kasvuvauhti pysyy samana, laske paljonko maapallon väkiluku on

- a) 5
- b) 10
- c) 20
- d) 50 vuoden kuluttua? Jos väkiluku tällä hetkellä on 6,7 miljardia (vuonna 2008).

248.

Auton hinta alenee 15 % vuodessa. Hinta t vuoden kuluttua saadaan lausekkeesta $0,85^t \cdot a$, jossa a on auton hinta uutena. Mikä on 18 000 € maksaneen auton hinta kolmen vuoden kuluttua? Minkä arvoinen auto on 10 vuoden kuluttua?

249.

Otat opintolainaa 800 €. Valmistut viiden vuoden kuluttua ja aloitat lainan poismaksun vasta valmistumisesi jälkeen. Jos lainan vuotuinen korko on 7,5 %, paljonko lainaa on viiden vuoden kuluttua?

250.

Oletetaan edellisen tehtävän mukainen tilanne, mutta haluatkin maksaa lainasta aiheutuneet vuotuiset korot vuosittain, vaikket lainaa viiden vuoden aikana muuten lyhennäkään. Paljonko olet säästänyt viiden vuoden kuluttua lainanottohetkestä edellisen tehtävän tilanteeseen verrattuna?

——— vaativat tehtävät ———

251.

Moneko vuoden kuluttua 450 € arvoinen postimerkki on arvoltaan ainakin 900 €, jos postimerkin arvo nousee vuosittain 7,5 %?

252.

After how many years will a 2800 € set of porcelain cups be worth at least 8000 € if it increases in value by 9,5 % p.a.?

13. Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö

Muutosprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin on muuttunut (eli kasvanut tai vähentynyt),

- lasketaan ensin muutoksen suuruus.
- Sitten lasketaan, montako prosenttia muutos on alkuperäisestä arvosta.

Esimerkki 1.

Elokuvalipun hintaa korotettiin 5 eurosta 6,5 euroon. Montako prosenttia elokuvalipun hinta nousi?

Hinnan nousu euroina:

$$6,5 \text{ €} - 5 \text{ €} = 1,5 \text{ €}$$

Hinnan nousu prosentteina:

$$\frac{\text{hinnan nousu euroina}}{\text{alkuperäinen hinta}} = \frac{1,5 \text{ €}}{5 \text{ €}} = 0,3 = 30 \%$$

Vastaus: Elokuvalipun hinta nousi 30 %.

Vertailuprosentti

Kun lasketaan, montako prosenttia jokin luku on suurempi tai pienempi kuin jokin toinen luku, niin

- lasketaan ensin lukujen erotus
- verrataan erotusta kuin-sanan jälkeiseen lukuun.

Esimerkki 2.

Eveliinan pituus on 156 cm ja Tonin 182 cm. Kuinka monta prosenttia

a) Toni on pidempi kuin Eveliina?

Pituusero senttimetreinä:

$$182 \text{ cm} - 156 \text{ cm} = 26 \text{ cm.}$$

Pituusero prosentteina:

pituusero senttimetreinä

$$\frac{26 \text{ cm}}{156 \text{ cm}} \approx 0,17 = 17\%$$

— verrataan Eveliinan pituuteen

b) Eveliina on lyhyempi kuin Toni?

pituusero senttimetreinä

$$\frac{26 \text{ cm}}{182 \text{ cm}} \approx 0,14 = 14\%$$

— verrataan Tonin pituuteen

Vastaus: a) Toni on 17 % Eveliinaa pidempi ja b) Eveliina 14 % Tonia lyhyempi.

Huom! Vertailuprosentti lasketaan samalla tavalla kuin muutosprosentti, mutta muutosprosentissa verrataan aina siihen arvoon joka oli ajallisesti ensiksi.

Prosenttiyksikkö

Prosenttiyksikkö on eri asia kuin prosenttiluku. Muutos prosenttiyksikköinä saadaan, kun lasketaan prosenttilukujen erotus.

Esimerkki 3.

Ydinvoiman kannatus laski 47 prosentista 34 prosenttiin. Montako

a) prosenttiyksikköä kannatus laski?

$$47 - 34 = 13$$

b) prosenttia kannatus laski?

└─ prosenttilukujen erotus

$$\frac{13}{47} = 0,276 \dots \approx 28 \%$$

└─ alkuperäinen prosenttiluku

Vastaus: Kannatus laski a) 13 prosenttiyksikköä. b) 28 %.

Tehtäviä

253.

Tuotteen A hinta on 100 prosenttia suurempi kuin tuotteen B hinta.

- a) Kuinka moninkertainen A:n hinta on B:hen nähden?
- b) Kuinka monta prosenttia B:n hinta on pienempi kuin A:n?

254.

Tuotteen A hinta on 200 prosenttia suurempi kuin tuotteen B hinta. Kuinka moninkertainen A:n hinta on B:hen verrattuna?

255.

Lentolipun hinta nousi 922 eurosta 1250 euroon, montako

- a) euroa lentolipun hinta nousi?
- b) prosenttia lentolipun hinta nousi?

256.

Mikä on alennusprosentti, kun repun alkuperäinen hinta on 32 euroa ja sen uusi hinta on

- a) 16 €
- b) 27,20 €
- c) 19,20 €
- d) 9,6 €?

257.

Montako prosenttia on muutos

- a) luvusta 420 lukuun 460
- b) luvusta 480 lukuun 400
- c) 6,2 kilogrammasta 7,4 kilogrammaan
- d) 3,42 metristä 3,64 metriin
- e) 120 eurosta 110 euroon
- f) 75 prosentista 67 prosenttiin

258.

Montako prosenttia saat alennusta, kun maksat 75 € takista vain 67,5 €?

259.

Montako prosenttia

- a) 6 on suurempi kuin 5?
- b) 5 on pienempi kuin 6?

260.

Ilman kosteus laski 50 prosentista 43 prosenttiin. Montako

- a) prosenttiyksikköä kosteus laski?
- b) prosenttia kosteus laski?

261.

Taulukossa on eri eläinten massoja:

Eläin	Massa [kg]
kameli	540
kenguru	65

strutsi	120
boakäärme	82

Montako prosenttia

- c) kameli on painavampi kuin strutsi?
- d) kenguru on kevyempi kuin boakäärme?
- e) strutsi on boakäärmettä painavampi?
- f) kameli on painavampi kuin muut eläimet yhteensä?

262.

The price of a car increased from 17 000 € to 18 500 €. What is the percentage increase?

—— soveltavat tehtävät ———

263.

The amount of water in a tank increased from 240 liters to 420 liters. Find the percentage increase.

264.

Taidekauppias osti taulun 420 eurolla. Myydessään sen hän sai siitä 30 euroa vähemmän. Montako prosenttia oli tappio?

265.

The attendance at a meditation class decreased from 29 people at the first session to 17 people at the second session. Find the percentage decrease.

266.

Georgialainen Dimitri Kinkladze omistaa maailman vahvimmat korvat. Hän kannatteli 2.11.1997 korvillaan 48 kilon taakkaa kymmenen minuutin ajan. Vasemmasta korvasta riippui 32 kg:n paino ja oikeasta 16 kg:n paino. Montako prosenttia

- a) painosta riippui oikeasta korvasta, entä vasemmasta?
- b) enemmän painoa oli vasemman korvan varassa?

267.

Puolueen kannatus nousi 9 prosentista 10,5 prosenttiin. Montako

- a) prosenttia kannatus nousi?
- b) prosenttiyksikköä kannatus nousi?

268.

Palkka nousi peräkkäisinä vuosina 5 %, 3,8 % ja 6,1 %.

- a) Kuinka suureksi 1250 euron palkka oli kasvanut kaikkien korotusten jälkeen?
- b) Montako prosenttiyksikköä korotus oli yhteensä?

269.

30 000 euron asuntolainan korko on 6 % ja 20 000 euron autolainan korko on 9,5 %. Kuinka monta

- a) prosenttiyksikköä autolainan korko on suurempi kuin asuntolainan korko?
- b) prosenttia autolainan korko on suurempi kuin asuntolainan korko

270.

Miesten nopeuslaskun voimassaoleva maailmanennätys on 248,105 km/h. Sen saavutti itävaltalainen Harry Egger. Naisten nopeusennätystä pitää hallussaan Ranskan Karine Dubouchet vauhdilla

234,528 km/h. Molemmat ennätykset syntyivät 1.5.1999 Les Arcsissa Ranskassa. Montako prosenttia nopeammin Harry laski Karineen verrattuna?

271.

Postimyyntiliike myy tavaroita myös osamaksulla. Jos maksat maton yhdessä erässä, on sen hinta 250 €. Voit myös maksaa sen kahdessa toista erässä, jolloin kuukausimaksu on 25 €. Montako prosenttia kalliimmaksi matto tulee, jos se maksetaan osamaksulla?

272.

Maailman pisin (ei sairauden aiheuttama) ihminen oli Angus McCaskill, joka oli 236 cm mittainen kuollessaan Kanadassa v. 1863. Puolestaan lyhyin ihminen, josta on asialliset todisteet, oli intialainen Gul Mohammed (New Delhi). Vuonna 1990 Gul oli 57 cm pituinen ja painoi 17 kg. Kuinka monta prosenttia

- a) Gulin pituus oli Agnuksen pituudesta?
- b) Agnus oli Gulia pidempi?
- c) Gul oli Agnusta lyhyempi?

273.

A hi-fi system costs an electrical store \$950. It sells the system for \$1250. Calculate the percentage profit as a percentage of

- a) the cost price
- b) the selling price.

————— vaativat tehtävät —————

274.

Tanssiryhmässä oli aluksi 12 tanssijaa. Montako prosenttia tanssijoiden määrä kasvoi tai väheni kun se kasvoi ensin

- a) 100 % ja väheni sitten 25 %?
- b) 50 % ja väheni sitten 50 %?
- c) 200 % ja väheni sitten 75 %?

275.

Henkilön bruttopalkka nousi 1170 eurosta 1300 euroon ja samalla veroprosentti nousi 25 %:sta 28 %:iin. (Bruttopalkalla tarkoitetaan palkka, josta ei ole vähennetty veroja. Nettopalkasta verot on vähennetty.) Montako

- a) euroa nettopalkka nousi?
- b) prosenttia nettopalkka nousi?

276.

Kultakauppias myy koruja 25 % alennuksella. Kuitenkin hän haluaa, että hän saa koruista 40 % voittoa. Mikä on myytävien korujen lähtöhinta, ennen 25 % alennusta, kun kauppias maksoi niistä itse seuraavasti.

- a) 94,70 €
- b) 114,90 €
- c) 167,10 €
- d) 205,50 €

277.

Henkilö osti viikon alussa 4,20 mk:lla litran maitotölkin, josta hän ehti käyttää 8 dl ennen maidon happanemista. Seuraavalla viikolla hän osti kaksi puolen litran maitotölkkiä 2,50 mk:lla kappale käyttäen kaiken maidon. Kummalla viikolla käytetty maito tuli hänelle edullisemmaksi ja kuinka monta prosenttia? (yo kevät 1995)

278.

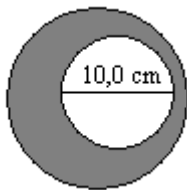
Parturi- ja kampaamomaksut muodostuvat verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta, joka on 22 % palvelun verottomasta hinnasta. Hiusten leikkaus maksoi 23 €. Kuinka suuri tämä maksu olisi ollut, jos arvonlisävero olisi ollut 10 prosenttiyksikköä pienempi? (yo syksy 2000)

279.

Erääseen oppilaitokseen valittiin oppilaita seuraavasti. Osastolle A valittiin tyttöjä 300 hakijasta 48 ja poikia 20 hakijasta 3 ja osastolle B tyttöjä 20 hakijasta 4 ja poikia 600 hakijasta 114. Osoita, että kummallakin osastolla tyttöjen hyväksymisprosentti oli 1 prosenttiyksikön verran suurempi, mutta että siitä huolimatta koko oppilaitoksessa poikien hyväksymisprosentti oli suurempi kuin tyttöjen. (yo kevät 1995)

280.

Laske värjätyн alueen ala, kun pienemmän ympyrän ala on 40,0 % suuremman ympyrän alasta. (pääsykoetehtävä teknikkokoulutukseen, 1994)



14. Tuntematon perusarvo

Prosenttilaskennassa on oltava tarkkana siitä, mikä on perusarvo, johon prosentuaalinen muutos kohdistuu. Luvun muuttuessa useita kertoja peräkkäin on perusarvona kulloinkin muutoksen kohteena ollut arvo. Joissakin tehtävissä perusarvo ei ole tiedossa, tällöin sitä merkitään jollakin kirjainvakiolla ja laskut suoritetaan muuten tavalliseen tapaan.

Esimerkki 1.

Mistä luvusta 20 % on 37?

Merkitään perusarvoa kirjaimella a ja muodostetaan yhtälö

$$0,2 \cdot a = 37 \quad ||: 0,2$$

$$a = \frac{37}{0,2}$$

$$a = 185$$

Esimerkki 2.

Mirkalla on rahoistaan 15 % lompakossa ja loput pankkitilillä. Lompakossa hänellä on 105 €. Paljonko Mirkalla on rahaa tilillä?

Ratkaisu:

Prosenttikerroin on 0,15 ja prosenttiarvo 105 €. Ennen kuin lasketaan Mirkan tilillä olevat rahat, lasketaan paljonko hänellä on kaiken kaikkiaan rahaa eli mikä on perusarvo a .

$$0,15 \cdot a = 105 \text{ €} \quad ||: 0,15$$

$$a = \frac{105 \text{ €}}{0,15}$$

$$a = 700 \text{ €}$$

Mirkalla on tilillä 100 % - 15 % = 85 % kaikista rahoista.

$$0,85 \cdot 700 \text{ €} = 595 \text{ €}.$$

Vastaus: Mirkalla on tilillä 595 €.

Esimerkki 3.

Tietokoneen hintaa alennettiin ensin 10 % ja myöhemmin vielä 15 %. Alennuksen jälkeen tietokone maksoi 1071 €. Paljonko tietokone maksoi alun perin?

Ratkaisu:

Merkitään tietokoneen alkuperäistä hintaa x :llä ja muodostetaan yhtälö.

10 % halvempi tuotteen hinta saadaan kertomalla alkuperäinen hinta luvulla 0,9 ja vastaavasti 15 % lisäalennus huomioidaan kertomalla edellinen hinta luvulla 0,85.

$$\begin{array}{l} \text{toinen alennus} \\ | \quad \text{— ensimmäinen alennus} \\ 0,85 \cdot 0,9 \cdot x = 1071 \text{ €} \\ 0,765x = 1071 \text{ €} \quad || :0,765 \\ x = \frac{1071 \text{ €}}{0,765} \\ x = 1400 \text{ €} \end{array}$$

Vastaus: Tietokoneen hinta ennen alennusta oli 1400 €.

Esimerkki 3.

Lukuun lisätään ensin 25 % ja sitten siitä vähennetään 50 %. Montako prosenttia saatu luku on alkuperäisestä luvusta?

Ratkaisu:

Perusarvoa eli alkuperäistä lukua ei nyt tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a .

25 % korotus saadaan voimaan kertomalla perusarvo luvulla 1,25 ja 50 % lisävähennys huomioidaan kertomalla muuttunut perusarvo luvulla 0,50.

$$\begin{array}{l} \text{50 \%:n alennus} \\ | \quad \text{— 25 \%:n lisäys} \\ 0,50 \cdot 1,25 \cdot a = 0,625a \end{array}$$

Lasketaan lopuksi, montako prosenttia tämä on alkuperäisestä luvusta

$$\frac{0,625a}{a} = 0,625 = 62,5 \%$$

Vastaus: Luku on 62,5 % alkuperäisestä luvusta.

Tehtäviä

281.

Mistä luvusta 50 % on

- a) 4
- b) 12
- c) 110
- d) 350?

282.

Mikä on koko luku, jos 25 % luvusta on

- a) 2
- b) 5,5
- c) 100
- d) 356?

283.

Montako prosenttia luku on alkuperäisestä luvusta jos siihen lisätään

- a) 20 %
- b) 35 %
- c) 50 %
- d) 100 %?

284.

Montako prosenttia luku on alkuperäisestä luvusta jos siitä vähennetään

- a) 50 %
- b) 30 %
- c) 15 %
- d) 69 %?

285.

Mistä luvusta

- a) 28 on 100 %
- b) 8 on 2 %
- c) 3,9 on 5 %
- d) 1625 on 25 %
- e) 45 on 90 % ?

286.

Mistä luvusta

- a) 96,6 on 10,5 %
- b) 270 on 75 %
- c) 22,96 on 28 %
- d) 96 on 15 %
- e) 43,99 on 8,3 % ?

287.

Kuinka suuri on tontin kokonaispinta-ala, kun 32 % siitä on niittyä ja loput 4,5 hehtaaria on metsää?

288.

- a) Ramin rahoista 20 % on lompakossa ja loput pankkitilillä. Lompakossa hänellä on 210 €. Paljonko Ramilla on rahaa tilillä?
- b) Eliaksen rahoista 40 % on lompakossa ja loput pankkitilillä. Tilillä hänellä on rahaa 5892 €. Paljonko Ramilla on rahaa lompakossa?

— soveltavat tehtävät —

289.

Tuotteen hinta laski 8 %, minkä jälkeen hinta oli 1150 €. Mikä oli tuotteen hinta ennen alennusta?

290.

After spending 15 % of his money on magazines, Ben has \$25,50 left. Find the initial amount of money that he had.

291.

Arvonlisävero on 22 % tuotteen myyntihinnasta. Paljonko kuluttaja joutuu tuotteesta kokonaisuudessaan maksamaan, kun sen arvonlisävero on 24,20 €?

292.

Kirjahylly maksoi 30 % alennuksella 350 €. Mikä oli kirjahyllyn alkuperäinen hinta ennen alennusta?

293.

After several weeks in a diet, a woman's weight decreased by 15 % to 61,2 kg. Find the weight of the woman before the diet.

294.

CD-soittimen hinta nousi ensin 5 % ja sitten vielä 10 %. Montako prosenttia hinta nousi kaikkiaan?

295.

Laske, montako prosenttia saatu luku on alkuperäisestä luvusta. Kun lukuun lisätään ensin 30 % ja sitten

- a) siitä vähennetään 40 %.
- b) siitä vähennetään 30 %
- c) siihen listätään 10 %
- d) siihen lisätään 50 %?

— vaativat tehtävät —

296.

Matkapuhelimen hintaa alennettiin ensin 14 % ja myöhemmin vielä 12 %. Alennuksen jälkeen puhelin maksoi 560 €. Paljonko se maksoi alun perin?

297.

Talon sähkölämmitysmaksu muodostuu kahdesta osasta. Joka kuukausi maksettava kiinteä maksu on 15 € ja kulutusmaksu on 0,04 € kilowattitunnilta. Kuukausikulutus on 2 500 kWh. Molemmat maksut nousevat 5 %. Montako prosenttia kulutusta on vähennettävä, jos kustannukset halutaan pitää entisillään?

298.

Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71 %. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrä oli äänioikeutettujen määrästä? (yo kevät 1996)

299.

Kirjan myyntihinta saadaan lisäämällä kirjan perushintaan 12 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 22,30 €, perushintaa alennettiin 4,20 eurolla. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta? (yo syksy 1995)

300.

Autoilija ajoi ajassa 2 h 40 min matkamittarinsa mukaan 205 km. Matkamittari näytti 5 % todellista matkaa suurempaa lukemaa. Mikä oli autoilijan keskinopeus? (yo syksy 1995)

301.

Eräällä laivalinjalla matkustajamäärä väheni 23 % edellisvuodesta. Kuinka monta prosenttia matkustajamäärän pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin entiseen määrään? (yo kevät 1995)

302.

Tuotteen myyntihinta laski 8 %. Myyntipalkkio, joka oli 25 % myyntihinnasta, nostettiin samalla 31 %:iin uudesta myyntihinnasta. Nousiko vai laskiko myyntipalkkio? (yo syksy 1997)

303.

Vuonna 1995 erään pesujauheen markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän pesuaineen myynti kasvoi 20 % ja pesujauheiden kokonaismyynti kasvoi 10 %. Mikä oli ko. pesujauheen markkinaosuus vuonna 1996? (yo syksy 1998)

15. Kertaustehtäviä

Yhtälö

304.

Päättele puuttuva luku.

- a) $+ 4 = 9$
- b) $- 1 = 7$
- c) $15 - \square = 9$
- d) $2 + \square = 16$

305.

Kirjoita edellinen tehtävä yhtälöinä, merkitsemällä puuttuvaa lukua x kirjaimella.

306.

Onko $x = 3$ yhtälön ratkaisu, kun yhtälö on

- a) $x - 6 = -3$
- b) $3x - 2 = 5$
- c) $4x + 1 = x^2 + 4$
- d) $-7x + 2 = 6x$

307.

Päättele mikä luku sopii x :n paikalle.

- a) $3x = -18$
- b) $\frac{x}{2} = 13$
- c) $x + 3 = -7$
- d) $6 + 2x = 12$

308.

Keksi kaksi yhtälöä, joiden ratkaisu on -5 .

Yhtälön ratkaiseminen

309.

Sievennä.

- a) $-4x + 3x - 7 + 8$
- b) $8x - 7x + 12 - x$
- c) $-10 + 6x - 3x - 2$
- d) $2x - x - x + 4 - 5$

310.

Ratkaise yhtälön juuri.

- a) $5x = 10$
- b) $8x = 40$
- c) $9x = -90$
- d) $-x = 5$

311.

Ratkaise x .

- a) $5 + x = 12$
- b) $8 + x = 30$
- c) $9 + x = -10$
- d) $-10 + x = 5$

312.

Solve these equations.

- a) $x + 4 = 7$
- b) $3x = 12$
- c) $x + 3 = 12$
- d) $17 - x = 5$

313.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $x + 6 = 4$
- b) $2x + 4 = 16$
- c) $x + x = 18$
- d) $3x - 4 = x + 6$

Sulkeet yhtälössä

314.

Simplify.

- a) $2x(x - 3)$
- b) $-5(2 - 4x)$
- c) $x(10x + 5)$
- d) $-x(5x + 4)$

315.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2(x + 1) = 6$
- b) $4(7 - x) = 8$
- c) $2(x + 4) = 10$
- d) $5(4 - 3x) = 5$

316.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $5(x + 3) = 20$
- b) $4 - t(5 - t) = 6 + t^2$

317.

Ratkaise yhtälöt.

- a) $2(x + 4) + 3(x - 2) = 7$
- b) $2(-x + 1) + 5(x + 1) = 13$

c) $x - 7 + 3(x + 3) = 10$

318.

Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^3 + 3(2a - 1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$ on juurena $x = 1$. (yo syksy 1986)

Nimittäjä yhtälössä

319.

Solve these equations.

a) $\frac{x}{2} = 6$

b) $\frac{x}{3} = 4$

c) $\frac{x}{2} + 3 = 5$

d) $\frac{x}{7} + 6 = 7$

320.

Ratkaise.

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$

b) $\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}y = 4$

c) $\frac{2}{5}a + \frac{a}{2} = a - 2$

d) $-\frac{1}{3}x + \frac{3}{4}x = 10$

321.

Ratkaise.

a) $\frac{1}{3}(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 2)$

b) $\frac{a + 5}{3} = \frac{3 - a}{7}$

c) $-\frac{1}{6}(3 - 5x) = \frac{2}{3}(5x + 3)$

322.

Ratkaise yhtälöt.

a) $\frac{7x - 1}{2} = 13 - x$

b) $\frac{x + 1}{6} = \frac{1 - x}{4}$

$$c) \frac{2x-5}{3} = 25-x$$

$$d) \frac{x-2}{3} = \frac{x+4}{5}$$

323.

Ratkaise yhtälö.

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{9} = \frac{x+8}{18}$$

Useita muuttujia yhtälössä

324.

Make x the subject of the equation.

$$a) ax-b=d$$

$$b) mx+n=p$$

$$c) \frac{1}{2}x-c=d$$

$$d) \frac{2}{3}x+3=k$$

325.

Ratkaise sulkeissa mainitun muuttujan suhteen.

$$a) I = PRT \quad (T)$$

$$b) P = 2l + 2W \quad (l)$$

$$c) A = \frac{1}{2}bh \quad (b)$$

$$d) V = \pi r^2 h \quad (h)$$

Epäyhtälön ratkaiseminen

326.

Ratkaise epäyhtälöt.

$$a) 3x-7 > 53$$

$$b) 5(x-3) \leq 15$$

327.

Ratkaise epäyhtälö.

$$-3x-2(x-5) > 2(x+4)$$

328.

Solve the inequality.

$$\frac{x+8}{16} - 1 \geq \frac{4-x}{12}$$

Yhtälön ja epäyhtälön erikoistapauksia

329.

Ratkaise yhtälöt.

a) $2x - x + 5 = 2 + x + 3$

b) $5(2x - 1) - 6x = 4x - 3$

Yhtälön muodostaminen sanallisesta ongelmasta

330.

Luettele kolme peräkkäistä kokonaislukua, joiden summa on 57.

331.

A rectangular chalkboard is 4 times as long as it is wide. If it were 4 meters shorter and 2 meters wider, it would be square. What are the dimensions of the chalkboard?

332.

Ajattele jotakin numeroa, kerro se kahdella ja lisää siihen neljä. Jos vastauksesi on 18, mitä numeroa ajattelit?

333.

Kadun vasemmalla puolella on talojen numerot parillisia. Mikä on sen talon numero, jonka numero neljällä kerrottuna on 10 suurempi kuin samalla puolella olevan seuraavan talon numero kolmella kerrottuna?

334.

Tilausmatkan kustannukset ajateltiin jaettavaksi tasan 22 osanottajalle, mutta kun lähtijöitä olikin 24, tuli kullekin matka 10 mk halvemmaksi. Kuinka paljon kukin osanottaja joutui lopulta maksamaan? (yo kevät 1993)

335.

Saippuakauppias ja innostunut sonni ovat palindromeja, jotka tuottavat saman tuloksen luettiinpa ne alusta loppuun tai lopusta alkuun. Myös luku voi olla palindromi, esimerkiksi 1221, 1234321 ja 91919 ovat tällaisia. Onko olemassa nelinumeroista palindromilukua, joka ei ole jaollinen luvulla 11?

336.

Juhlasalissa on kaksi ovea. Jos vain ovea A käytetään, tyhjenee sali 18 minuutissa, ja jos ovi B on käytössä, tarvitaan 12 minuuttia. Missä ajassa sali tyhjenee, jos molemmat ovet ovat käytössä? (yo kevät 1994)

337.

Kirjoissa käytetään ISBN-numerointia, joka koostuu maatunnuksesta (951 on Suomen tunnus), kustantajan ja teoksen numerosta. Lopussa on tarkistusmerkki, numero tai X (=10), joka määräytyy seuraavasti: Numeroista ensimmäinen kerrotaan 1:llä, toinen 2:lla, kolmas 3:lla jne., yhdeksäs 9:llä ja saadut tulot lasketaan yhteen. Kun saatu summa jaetaan 11:llä, on jakojäännös tarkistusmerkinä. Eräässä kirjatilauksessa oli yksi epäselvä merkki. Tutki, mikä numero kuului ?'n paikalle tilauksessa ISBN 951-0-?5669-8. (yo syksy 1993)

Prosenttikertoimia ja prosenttiosuuksia

338.

Kirjoita prosenttiluvut desimaalilukuina.

- a) 1 %
- b) 9 %
- c) 19 %
- d) 90 %
- e) 4,5 %
- f) 14,9 %
- g) 121 %

339.

Kirjoita murtoluvut prosenttilukuina.

- a) $\frac{18}{100}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{11}{20}$
- d) $\frac{1}{8}$

340.

Kirjoita desimaaliluvut prosenttilukuina.

- a) 0,06
- b) 0,76
- c) 0,865
- d) 0,2
- e) 1,3

341.

Write each percentage as a fraction in its simplest form.

- a) 5 %
- b) 18 %
- c) 55 %
- d) 78 %

342.

Montako prosenttia luku 5 on luvusta

- a) 7
- b) 10
- c) 12
- d) 50?

343.

Montako prosenttia ensimmäinen luku on jälkimmäisestä

- a) 3 ja 8

- b) 6 ja 78
- c) 12 ja 199
- d) 120 ja 180?

344.

Heikki antoi CD-levyistään kolmasosan pikkuveljelleen ja neljäsosan isosiskolleen. Montako prosenttia levyistä jäi Heikille?

345.

Find the fraction for the percent.

- a) $33\frac{1}{3} \%$
- b) $62\frac{1}{2} \%$
- c) $6\frac{1}{4} \%$
- d) $8\frac{1}{3} \%$

Prosenttiarvon laskeminen

346.

Paljonko on yksi prosentti

- a) 500
- b) 750
- c) 8 000 eurosta?

347.

Work out 10 % of each of these

- a) 26 €
- b) 47 cm
- c) 9,5 l
- d) 789 g

348.

Laske 14 % seuraavista luvuista

- a) 100
- b) 86
- c) 240
- d) 596

349.

Ihmisen kehossa on kivennäisaineita keskimäärin 6 %. Paljonko kivennäisaineita on henkilössä, jonka massa on

- a) 57 kg
- b) 70 kg
- c) 98 kg?

350.

Find $33\frac{1}{3}\%$ of 9000 kg.

Lisäyksiä ja vähennyksiä prosentteina

351.

Millä desimaaliluvulla tuotteen hinta on kerrottava, jos sitä korotetaan

- a) 29 %
- b) 90 %
- c) 5 %
- d) 13 %
- e) 100 %

352.

Millä desimaaliluvulla tuotteen hinta on kerrottava, jos sitä alennetaan

- a) 10 %
- b) 6 %
- c) 80 %
- d) 15 %
- e) 100 %

353.

A CD stereo radio costing originally \$650 is at a 20 % discount. Work out

- a) how much the saving is
- b) the new price

354.

Ylipainoisille henkilöille jo 10 % painonpudotuksesta on terveydellistä hyötyä. Mikä on henkilöiden paino, jos he laihduttavat 10 % painostaan?

- a) 97 kg
- b) 123 kg
- c) 148 kg

355.

What is the sale price of a 348 € item with a 15 % discount?

356.

Maija osti kaupasta 2 kg omenoita ja 3 kg viinirypäleitä. Ostokset maksoivat yhteensä 12,30 €. Seuraavana päivänä omenoiden hintaa oli korotettu 10 % ja viinirypäleiden hintaa laskettu 0,20 € kilolta. Ostokset olisi tällöin maksaneet yhteensä 12,12 €. Mitkä oli ostohetkellä omenoiden ja viinirypäleiden kilohinnat?

Koronkorko

357.

Pankin maksama vuotuinen talletuskorko on 1,1 %. Kuinka suureksi kasvaa 3000 € suuruinen talletus

- a) yhdessä
- b) kolmessa
- c) kymmenessä vuodessa?

358.

How much interest is added to an account paying 9 % p.a. on a sum of \$4500 over seven years if the interest is compounded annually?

Muutos- ja vertailuprosentti sekä prosenttiyksikkö

359.

Jaana osti takin alennusmyynnistä ja maksoi siitä 42 €. Takin normaalihinta oli 60 €. Montako prosenttia takista sai alennusta?

360.

The price of a book decreases from \$20 to \$19.50. Express the decrease as a percentage of the original price.

361.

Montako prosenttia

- a) 13 on suurempi kuin 10?
- b) 10 on pienempi kuin 13?

362.

Ilman kosteus laski 50 prosentista 43 prosenttiin. Montako

- a) prosenttiyksikköä kosteus laski?
- b) prosenttia kosteus laski?

363.

The price of a calculator increases from \$20 to \$25. Express this increase as a percentage of the original price.

364.

Lukuvuoden alussa Onni opiskelija osti matematiikan kirjan hintaan 39 € ja myi sen lukuvuoden lopussa hintaan 15 €. Kuinka monta prosenttia kirjan arvo laski?

Tuntematon perusarvo

365.

Mistä luvusta 20 % on

- a) 3
- b) 11
- c) 18
- d) 202
- e) 1005

366.

Vauvan paino oli 12 % painonnousun jälkeen 4,2 kg. Paljonko vauva painoi alunperin?

367.

Mistä luvusta

- a) 40 on 25 %
- b) 50 on 100 %
- c) 35 on 15 %
- d) 14 on 4 %
- e) 4 000 on 90 %

368.

A customer is allowed a discount of 10 % on the purchase of a table lamp. The discount is \$7,40. What is the marked price of the table lamp?

369.

Mistä luvusta

- a) 130,5 on 35 %
- b) 6,25 on 15,5 %
- c) 60 on 70 %
- d) 1,2 on 5 %
- e) 40 on 120 %

370.

- a) 41 is 50 % of what number?
- b) 30 % of what number is 60?
- c) 20 is 8 % of what number?
- d) 24 % of what number is 24?

371.

Tuotteen hintaa alennettiin ensin 20 % ja myöhemmin vielä 25 %. Alennuksen jälkeen tuote maksoi 9 €. Paljonko tuote maksoi alunperin?

372.

Jos neliön sivu pitenee 25 %, niin montako prosenttia neliön pinta-ala kasvaa?

Harjoituskoe I (Kappleet 1-8)

1.

Ratkaise yhtälöt. Tarkista vastaukset sijoittamalla.

a) $2x + 9 = 15$

b) $3x - 2y + 3 = -x - 2y + 11$

2.

Kun erääseen lukuun lisätään 2, saadaan alkuperäinen luku kolminkertaisena. Muodosta yhtälö ja ratkaise sen avulla, mikä luku on kyseessä.

3.

Ratkaise epäyhtälö $-2(2x - 5) \geq 3x - 4(x + 2)$. Tarkista vastaus sijoittamalla.

4.

Ratkaise yhtälöt a :n suhteen

a) $F = ma$

b) $x = \frac{a+b}{c}$

5.

Ratkaise yhtälöt.

a) $8x - 5 = 6x + 2x - 3$

b) $2(x + 3) + x = 3x + 6$

6.

Kun kolme peräkkäistä paritonta kokonaislukua lasketaan yhteen saadaan 45. Muodosta yhtälö ja ratkaise sen avulla mitkä kolme lukua on kyseessä?

Harjoituskoe II (Kappleet 9-14)

1.

Täydennä taulukko siten, että rivillä on sama luku esitettynä eri muodoissa.

murtoluku	desimaaliluku	prosenttiluku
$\frac{7}{8}$		
	0,16	
$\frac{320}{100}$		
	0,0083	
$\frac{4}{50}$		
		106 %

2.

CD-soittimen hintaa korotettiin 81 eurosta 92 euroon. Montako prosenttia CD-soittimen hinta nousi?

3.

Lukuun lisätään ensin 30 % ja sitten siitä vähennetään 20 %. Montako prosenttia saatu luku on alkuperäisestä luvusta?

4.

Puolueen kannatus nousi 37 prosentista 52 prosenttiin. Montako

- a) prosenttiyksikköä kannatus nousi?
- b) prosenttia kannatus nousi?

5.

Pankin maksama vuotuinen talletuskorko on 1,1 %. Kuinka suureksi kasvaa 4500 € suuruinen talletus

- a) vuodessa
- b) kolmessa vuodessa?

6.

Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita 9 %. Kuinka suureksi muodostui 102 neliömetrin suuruisen asunnon yhtiövastike, kun neliömetriltä oli aiemmin maksettu 3 € kuukaudessa?

Harjoituskokeen I ratkaisut

1.

a)

$$\begin{aligned}2x + 9 &= 15 && \text{Siirretään 9 yhtälön oikealle puolelle.} \\2x &= 15 - 9 && \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\2x &= 6 && \parallel :2 \text{ Jaetaan molemmat puolet 2:lla.} \\x &= \frac{6}{2} \\x &= 3\end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla, onko $x = 3$ yhtälön oikea ratkaisu:

$$\begin{aligned}2 \cdot 3 + 9 &= 15 \\6 + 9 &= 15 \\15 &= 15 && \text{Yhtälön molemmilla puolilla on sama luku,} \\&&& \text{joten } x = 3 \text{ on oikea ratkaisu.}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3x - \cancel{2y} + 3 &= -x - \cancel{2y} + 11 && \text{Yhtälön molemmilla puolilla on täsmälleen} \\&&& \text{sama termi, joka voidaan poistaa.} \\3x + 3 &= -x + 11 \\3x + x &= 11 - 3 \\4x &= 8 \\x &= \frac{8}{4} && \parallel :4 \\x &= 2\end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla, onko $x = 2$ yhtälön oikea ratkaisu:

$$\begin{aligned}3 \cdot 2 - 2y + 3 &= -2 - 2y + 11 \\6 - 2y + 3 &= -2y + 9 \\-2y + 9 &= -2y + 9 && \text{Yhtälön molemmilla puolilla on sama} \\&&& \text{lauseke, joten } x = 2 \text{ on oikea ratkaisu.}\end{aligned}$$

2.

Merkitään kysyttyä lukua x :llä.

$$x + 2 = 3x \quad \left| \begin{array}{l} \text{Siirretään termit } 2 \text{ ja } 3x \\ \text{yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle.} \end{array} \right.$$

$$x - 3x = -2 \quad \left| \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \right.$$

$$-2x = -2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Jaetaan yhtälön molemmat} \\ \text{puolet } x:n \text{ kertoimella.} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{-2}{-2} \quad \left| \text{Sievennetään vastaus.} \right.$$

$$x = 1$$

3.

$$-2(2x - 5) \geq 3x - 4(x + 2)$$

$$-4x + 10 \geq 3x - 4x - 8$$

$$-4x + 10 \geq -x - 8$$

$$-4x + x \geq -8 - 10$$

$$-3x \geq -18 \quad | : (-3)$$

$$x \leq \frac{-18}{-3}$$

$$x \leq 6$$

Tarkistus: Valitaan x :n arvoksi esimerkiksi 5.

$$-2(2 \cdot 5 - 5) \geq 3 \cdot 5 - 4(5 + 2)$$

$$-2 \cdot 5 \geq 15 - 28$$

$$-10 \geq -13 \quad \text{tosi}$$

4.

a)

$$F = ma$$

$$-ma = -F \quad || : (-m)$$

$$a = \frac{-F}{-m}$$

$$a = \frac{F}{m}$$

b)

$$x = \frac{a+b}{c} \parallel \cdot c$$

$$cx = a + b$$

$$-a = b - cx \parallel: (-1)$$

$$a = \frac{b - cx}{-1}$$

$$a = -b + cx$$

5.

a)

$$8x - 5 = 6x + 2x - 3$$

$$8x - 6x - 2x = -3 + 5$$

$$0 = 2 \text{ epätösi}$$

yhtälöllä ei ole ratkaisua

b)

$$2(x + 3) + x = 3x + 6$$

$$2x + 6 + x = 3x + 6$$

$$2x + x - 3x = 6 - 6$$

$$0 = 0 \text{ tosi}$$

yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla

6.

Merkitään ensimmäistä paritonta lukua x :llä, tällöin seuraava pariton luku on $x + 2$ ja kolmas $x + 2 + 2$. Saadaan yhtälö

$$x + (x + 2) + (x + 2 + 2) = 45$$

$$3x + 6 = 45$$

$$3x = 45 - 6$$

$$3x = 39$$

$$x = 13$$

Joten luvut ovat 13, 15 ja 17.

Harjoituskokeen II ratkaisut

1.

murtoluku	desimaaliluku	prosenttiluku
$\frac{7}{8}$	0,875	87,5 %
$\frac{16}{100} \stackrel{(4)}{=} \frac{4}{25}$	0,16	16 %
$\frac{320}{100}$	3,2	320 %
$\frac{83}{10000}$	0,0083	0,83 %
$\frac{4}{50}$	0,08	8 %
$\frac{106}{100} \stackrel{(2)}{=} \frac{53}{50}$	1,06	106 %

2.

Lasketaan aluksi, montako euroa CD-soittimen hinta nousi.

Muutos: $92 \text{ €} - 81 \text{ €} = 11 \text{ €}$

Lasketaan, montako prosenttia muutos on alkuperäisestä hinnasta.

Muutos prosentteina: $\frac{11 \text{ €}}{81 \text{ €}} = 0,136 = 13,6 \%$, hinta nousi siis 13,6 %.

3.

Merkitään alkuperäistä lukua a :lla. Kun lukuun lisätään 30 %, saadaan lisäys kertomalla luku luvulla 1,3 ja kun luvusta vähennetään 20 %, saadaan vähennys kertomalla luku luvulla 0,8. Eli luku a on lisäyksen ja vähennyksen jälkeen $a \cdot 1,3 \cdot 0,8 = 1,04a$.

Lasketaan vielä montako prosenttia $1,04a$ on luvusta a : $\frac{1,04a}{a} \cdot 100 \% = 104 \%$

4.

a) Vähennetään prosenttiluvut toisistaan $52 - 37 = 15$ prosenttiksikköä

b) Verrataan muutosta alkuperäiseen lukuun $\frac{15}{52} \cdot 100 \% \approx 29 \%$

5.

a)

$$4500 \cdot \left(1 + \frac{1,1}{100}\right)^1 \approx 4549,5 \text{ (€)}$$

a)

$$4500 \cdot \left(1 + \frac{1,1}{100}\right)^3 \approx 4650,14 \text{ (€)}$$

6.

Yhtiövastike ennen korotusta oli $102 \text{ m}^2 \cdot 3 \frac{\text{€}}{\text{m}^2} = 306 \text{ €}$.

Korotuksen jälkeen yhtiövastike oli $1,09 \cdot 306 \text{ €} \approx 333,54 \text{ €}$

Vastaukset

1.

- a) 5
- b) -4
- c) -3
- d) -12

2.

- a) $x + 3 = 8$
- b) $x - 2 = -6$
- c) $1 - x = 4$
- d) $-10 - x = 2$

3.

- a) 4
- b) 3
- c) 15
- d) 18

4.

- a) $2x = 8$
- b) $5x = 15$
- c) $\frac{x}{3} = 5$
- d) $\frac{x}{6} = 3$

5.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä
- d) ei

6.

- a) $x + x = 2 + 2 + x$
- b) $x + x + x + 10 = 20 + 20 + x$
- c) $2x + 2x + 2x = 2x + 100$

7.

- a) $x = 4$
- b) $x = 15$
- c) $x = 25$

8.

9

9.

- a) on

- b) ei
- c) on
- d) ei

10.

$$x = 0$$

11.

- a) $x = 3$
- b) $x = 6$
- c) $x = -6$
- d) $x = 1$

12.

- a) $x = 0$
- b) $x = 11$
- c) $y = -1$
- d) $y = 4$

13.

$$x + x + x = 180^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

14.

$$x = 1$$

15.

- a) $x = 9$
- b) $x = 8 \text{ dl}$
- c) $x = 127 \text{ kg}$

16.

-

17.

- a) 3
- b) 2

18.

$$x = -\frac{1}{2}$$

19.

- a) $x = 9$
- b) $x = 6$

20.

$$x = 3$$

21.

19

22.

- a) kuutio 2 kg ja kartio 6 kg
- b) kuutio 2 kg ja kartio 4 kg

23.

Ainoa juuri on $x = -1$.

24.

Luku -4 on yhtälön juuri, jos $a \cdot (-4)^2 - 4 - 4 = 0$ eli $16a - 8 = 0$, josta saadaan, että $a = \frac{1}{2}$.

25.

- a) $4x + 3$
- b) $3x + 11$
- c) $-3x + 4$
- d) $-12x + 9$

26.

- a) $x = -1$
- b) $x = 1$
- c) $x = -1$
- d) $x = 1$
- e) $x = 1$

27.

- a) $x = 8$
- b) $x = 9$
- c) $x = -3$
- d) $x = -6$
- e) $x = -1$

28.

- a) $a = 4$
- b) $b = 3$
- c) $c = -3$
- d) $d = 32$
- e) $e = \frac{1}{2}$

29.

- a) 5 kg
- b) 3 kg
- c) 2 kg
- d) 3 kg

30.

- a) $x = 3$
- b) $x = -3$
- c) $x = 2$
- d) $x = -4$

31.

- a) 8
- b) -5
- c) 1
- d) 0

32.

- a) $x = 4$
- b) $y = -5$
- c) $x = 8$
- d) $y = 3$

33.

- a) $x = 0$
- b) $x = 9$
- c) $z = \frac{1}{3}$
- d) $z = -3$
- e) $y = -7$

34.

- a) 4 kg
- b) 3 kg
- c) 2 kg

35.

- a) $x = 0$
- b) $x = 0$
- c) $x = -3$
- d) $x = 2$

36.

- a) $x = -3$
- b) $x = -2$
- c) $y = -5$
- d) $y = 0$

37.

- a) pallo 1,5 kg ja kartio 3 kg
- b) pallo 6 kg ja kartio 3 kg

38.

-

39.

Yhtälön kaikkien termien etumerkki vaihtuu, mutta sen juuri pysyy samana.

40.

a) $x = \frac{1}{5}$

b) $x = \frac{2}{5}$

c) $x = 3$

41.

-

42.

$$5 \cdot (1)^3 - 4 \cdot (1)^2 + 7 \cdot (1) - 8 = 0$$

43.

$$x = 7$$

44.

a) -5

b) 2

c) A ja B

45.

a) $x = \frac{b}{a}$

b) $x = -\frac{2a}{b}$

c) $x = b - a$

d) $x = \frac{a-b}{2}$

46.

$$x = 0, x = -2$$

47.

$$x = \frac{1}{9}$$

48.

Yhtälön $3x + 1 = 0$ ratkaisu:

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $x = -\frac{1}{3}$ lausekkeeseen $x^2 - 6x + 5$ ja lasketaan sen arvo:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5 = 7\frac{1}{9}$$

Vastaus: $7\frac{1}{9}$

49.

- a) $2a + 12$
- b) $-6a - 12$
- c) $-6a + 10$
- d) $5a^2 + 2a$

50.

- a) $3x - 15$
- b) $8x - 12$
- c) $12x - 8$
- d) $x^2 + 2x$

51.

Suoritusjärjestys	Tehtävä
2	Siirrä termit
3	Yhdistä termit
4	Ratkaise tuntematon
5	Tarkista tulos
1	Poista sulkeet

52.

- a) $x = 2$
- b) $x = 2$
- c) $x = 5$
- d) $x = 20$

53.

- a) $x = 3$
- b) $x = 0$
- c) $x = 5$
- d) $x = 2$

54.

- a) $x = 5$
- b) $x = 11$
- c) $x = 6$
- d) $x = 3$

55.

- a) $x = 6$
- b) $x = 11$
- c) $x = 1$

- d) $x = 5$
- e) $x = 4$

56.

- a) $y = 3$
- b) $y = 4$
- c) $y = 3$
- d) $y = 2$
- e) $y = 3$

57.

- a) $x = 5$
- b) $x = 1$
- c) $x = 8$
- d) $x = 6$

58.

- a) $x = 4$
- b) $x = 3$
- c) $x = 2$
- d) $x = 3$

59.

- a) $x = 3$
- b) $x = 5$
- c) $x = 9$
- d) $x = -2$

60.

- a) $x = \frac{1}{5}$
- b) $x = 2\frac{1}{5}$
- c) $x = -2$
- d) $x = \frac{1}{2}$

61.

- a) $u = -1\frac{1}{2}$
- b) $t = \frac{2}{5}$
- c) $z = 1\frac{3}{4}$
- d) $v = -\frac{1}{2}$
- e) $w = -\frac{1}{5}$

62.

- a) $x = 4$
- b) $x = 6$
- c) $x = -3$
- d) $x = -8$

63.

- a) $x = 1\frac{1}{2}$
- b) $x = -1\frac{1}{2}$
- c) $x = -7$
- d) $x = -18$

64.

- a) $x = 3$
- b) $x = 3$
- c) $x = 4$
- d) $x = 0$

65.

- a) $x = 9$
- b) $x = -\frac{1}{6}$

66.

- a) 38
- b) 35
- c) 50

67.

$$x = 24$$

68.

- a) $x = 2\frac{2}{3}$
- b) $x = -4$

69.

Koska luku $x = -3$ on yhtälön $x(x + p) = 3x$ juuri, toteuttaa se yhtälön.

$$-3(-3 + p) = 3 \cdot (-3)$$

$$9 - 3p = -9$$

$$-3p = -18$$

$$p = \frac{-18}{-3}$$

$$p = 6$$

70.

- a) $1\frac{1}{6}$
- b) $\frac{19}{30}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $1\frac{1}{2}$

71.

- a) $x = 8$
- b) $x = 6$
- c) $x = 15$
- d) $x = 30$

72.

- a) $x = 28$
- b) $x = -18$
- c) $x = -10$
- d) $x = 16$

73.

- a) $x = 9$
- b) $x = 12$
- c) $x = 10$
- d) $x = 8$

74.

- a) $x = 6$
- b) $x = 12$
- c) $x = -10$
- d) $x = 24$

75.

- a) $x = 4\frac{1}{2}$
- b) $x = 6$
- c) $x = \frac{4}{9}$
- d) $x = 2$

76.

- a) $x = 10$
- b) $x = 35$
- c) $x = 27$

d) $x = 6$

77.

a) $x = 9$

b) $x = 8$

c) $x = 6$

d) $x = 8$

78.

a) $x = 11$

b) $x = 8$

c) $x = -3$

d) $x = 1\frac{1}{2}$

79.

a) $x = \frac{3}{4}$

b) $x = \frac{1}{10}$

c) $x = 1\frac{1}{2}$

d) $x = -3$

80.

a) $x = 7\frac{1}{2}$

b) $x = \frac{2}{3}$

81.

$x = 32$

82.

a) $x = 12$

b) $x = -1\frac{3}{5}$

c) $x = -4$

d) $x = 6$

83.

a) $x = 1$

b) $x = 1$

c) $x = 19$

d) $x = 7$

84.

72 h

85.

- a) $x = \frac{4}{3}$
b) $x = 12$

86.

$$x = 11$$

87.

$$x = 11$$

88.

$$x = 3\frac{1}{2}$$

89.

$$x = -1$$

90.

$$\frac{2x-5}{4} - \frac{3x-8}{6} = \frac{x}{12} \quad \parallel \cdot 12$$

$$3(2x-5) - 2(3x-8) = x$$

$$6x - 15 - 6x + 16 = x$$

$$-x = -1 \quad \parallel \cdot (-1)$$

$$x = 1$$

91.

$$r = \frac{d}{2}$$

92.

a) $a = \frac{A}{h}$

b) $h = \frac{A}{a}$

93.

- a) 50 cm
b) 25 cm.

94.

- a) 26 cm
b) 52 cm.

95.

a) $a = \frac{2A}{h}$

b) $h = \frac{2A}{a}$

96.

a) 4,0 cm

b) 50 cm

97.

a) 3,5 cm

b) 8,0 cm

98.

a) $x = 7$

b) $x = a + b$

c) $x = a - b$

d) $x = a$

99.

a) $x = 5$

b) $x = \frac{b}{a}$

c) $x = \frac{c}{b}$

d) $x = \frac{c+b}{a}$

100.

a) 59-vuotta

b) 5-vuotta

c) 86-vuotta

d) 14-vuotta

101.

a) $a = \frac{2A}{h} - b$

b) $b = \frac{2A}{h} - a$

c) $h = \frac{2A}{a+b}$

102.

a) 16 cm

b) 105

103.

$$x = \frac{y-2}{3}$$

104.

a) $a = \frac{F}{m}$

b) $h = \frac{3V}{A}$

c) $m = \frac{E}{c^2}$

d) $h = \frac{E_p}{mg}$

105.

a) $k = S + 8$

b) $Q = \frac{P-15}{2}$

c) $m = dv$

d) $r = \frac{a}{s} - 7$

106.

a) $m = \rho V$

b) $v_0 = v - at$

c) $t = \frac{l-l_0}{l_0\alpha}$

107.

Ratkaistaan m yhtälöstä

$$p = \frac{mgh}{t} \quad | \cdot t$$

$$pt = mgh$$

$$mgh = pt \quad | : gh$$

$$m = \frac{pt}{gh}$$

Sijoitetaan lukuarvot saatuun yhtälöön

$$m = \frac{pt}{gh} = \frac{700 \cdot 45}{9,81 \cdot 4,5} = 713,557... \approx 710$$

Vastaus: $m \approx 710$

108.

Kuume on fahrenheitasteina 100,8. Samaa lukemaa mittarit osoittavat -40 asteessa.

109.

10 cm

110.

Sijoitetaan a :n ja f :n arvot yhtälöön ja saadaan.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{b} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{5)^1}{11} - \frac{11)^1}{5}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{5}{55} - \frac{11}{55}$$

$$\frac{1}{b} = -\frac{6}{55}$$

$$-6b = 55$$

$$b = -\frac{55}{6} = -9\frac{1}{6}$$

111.

-

112.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) ei

113.

- a) $-4 < -3$
- b) $-2 < 2$
- c) $4 > 3$
- d) $-5 \leq -2$
- e) $2 \geq 0$
- f) $1 \leq 2$

114.

- a) ei
- b) on
- c) on
- d) on
- e) ei

115.

- a) $x > -3$
- b) $x > 3$
- c) $x \geq 5$
- d) $x \leq 4$

116.

- a) $x < 6$
- b) $x < -5$

- c) $x > 1$
- d) $x \geq 0$

117.

- a) $x > 0$
- b) $x \leq -1$

118.

- a) $x > 0$
- b) $x < 0$
- c) $x > 2$
- d) $x > -6$
- e) $x < 2$

119.

3 ja 4

120.

$$x \leq \frac{-101}{s}$$

121.

$$x < -\frac{1}{3}$$

122.

- a) $x > 0$
- b) $x < 0$
- c) $x < -4$
- d) $x > 25$

123.

- a) $x < \frac{3}{2}$
- b) $x \leq -\frac{3}{4}$

124.

- a) $u < -\frac{1}{3}$
- b) $t > 9$
- c) $v \geq -\frac{1}{5}$

125.

- a) $x > \frac{1}{2}$
- b) $x \neq 0$

- c) $x > 0$
d) $x \neq 0$

126.

$$x \leq \frac{6}{k}$$

127.

- a) $x < \frac{2}{\pi}$
b) $x \leq \frac{2}{5}\pi$

128.

Jos $t > 0$, niin $x < \frac{3}{t}$. Jos $t < 0$, niin $x > \frac{3}{t}$. Jos $t = 0$, niin x voi olla mikä tahansa reaaliluku

129.

$$x < -\frac{14}{13}$$

130.

$$x > -8$$

131.

$$x < -\frac{13}{28}$$

132.

- a) epätosi
b) tosi
c) tosi
d) epätosi

133.

- a) tosi
b) tosi
c) epätosi
d) epätosi

134.

- a) $y = -3$
b) $y = -2$
c) ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa reaaliluku
d) yhtälöllä ei ole ratkaisua

135.

- a) $x = 3$

- b) $x = \frac{7}{5}$
- c) $x = 1$
- d) $x = -2$
- e) ei ratkaisua

136.

- a) x voi olla mikä tahansa reaalityö
- b) yhtälöllä ei ole ratkaisua
- c) x voi olla mikä tahansa reaalityö paitsi nolla

137.

yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla

138.

- a) toteutuu kaikilla x :n arvoilla
- b) $x > 3$
- c) ei ratkaisua
- d) $x \geq 2$

139.

- a) toteutuu kaikilla x :n arvoilla
- b) $x \geq 2$
- c) $x > 0$
- d) $x \leq -6$

140.

-

141.

- a) $x \neq 0$
- b) toteutuu kaikilla x :n arvoilla
- c) $x \neq \frac{2}{3}$
- d) $x \neq 3$

142.

-

143.

4

144.

2

145.

- a) yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla
- b) yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla
- c) ei ratkaisua

146.

-4

147.

$2x + 9$

148.

a) 8

b) 5

149.

3

150.

a) $x + 15 = 40$

b) $x - 4 = 6$

c) $3x = 21$

d) $4x - 8 = 12$

151.

a) 25

b) 10

c) 7

d) 5

152.

a) $x - 3 = 10$

b) $5x = 100$

c) $2x + 9 = 39$

153.

a) $x = 7$

b) $x = 20$

c) $x = 15$

154.

a) $x + 3 > 9, x > 6$

b) $x - 12 \leq -5, x \leq 7$

155.

33, 34 ja 35

156.

3,2 m ja 4,8 m

157.

72 m^2

158.

36° , 36° ja 108°

159.

13

160.

14 ja 18

161.

3

162.

3 vuotta

163.

3

164.

2,5 €

165.

2

166.

-

167.

24, 26 ja 28

168.

Luvut ovat 64 ja 16.

169.

40

170.

6, 7, 8

171.

Merkitään ihannepainon painoindeksin ylärajaa vastaavaa painoa x :llä ja alarajaa vastaavaa painoa y :llä.

$$\frac{x}{1,83^2} = 25$$

$$x = 25 \cdot 1,83^2 \approx 83,7 \text{ (kg)}$$

$$\frac{y}{1,83^2} = 20$$

$$y = 20 \cdot 1,83^2 \approx 67,0 \text{ (kg)}$$

Ihannepainoon pääsemiseksi pitää laihduttaa ainakin $91 \text{ kg} - 83,7 \text{ kg} = 7,3 \text{ kg}$.

Alle ihannepainoon pääsemiseksi pitää laihtuttaa enemmän kuin $91 \text{ kg} - 67,0 \text{ kg} = 24 \text{ kg}$.

172.

410 kanaa ja 80 lammasta.

173.

Yhtälöksi saadaan $2 \cdot 19 \text{ €} + x \cdot 0,20 \frac{\text{€}}{\text{km}} = 120 \text{ €}$ ja vastaukseksi $x = 410 \text{ km}$.

174.

A:n tehokkuus on $\frac{1}{2} \text{ l/min}$ ja B:n $\frac{1}{3} \text{ l/min}$. Merkitään puhdistuksen kuluvaa aikaa x :llä. Koska molemmat käyttävät puhdistukseen saman ajan, saadaan yhtälö

$$\frac{11}{2 \text{ min}} \cdot x + \frac{11}{3 \text{ min}} \cdot x = 50 \text{ l}$$
$$x = \frac{50 \text{ l}}{\frac{11}{2 \text{ min}} + \frac{11}{3 \text{ min}}} = 60 \text{ min}$$

Vastaus: 60 min

175.

- a) 0,10
- b) 0,45
- c) 0,80
- d) 0,015
- e) 0,002
- f) 1,25

176.

- a) 20 %
- b) 8 %
- c) 73 %
- d) 5 %

177.

- a) 4 %
- b) 72 %
- c) 120 %
- d) 20 %
- e) 4 %
- f) 75 %

178.

- a) $\frac{28}{100}$
- b) $\frac{44}{100}$
- c) $\frac{85}{100}$

d) $\frac{1}{100}$

179.

a) $\frac{7}{25}$

b) $\frac{11}{25}$

c) $\frac{17}{20}$

d) $\frac{1}{100}$

180.

a) 25 %

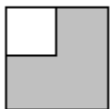
b) 75 %

c) 37,5 %

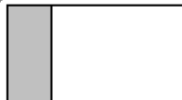
d) 33,3 %

181.

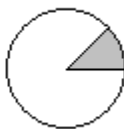
a)



b)



c)



182.

a) 60 %

b) 25 %

c) 28,6 %

183.

a) 14 %

b) 3 %

c) 0,42 %

d) 205 %

184.

a) 100 %

b) 50 %

c) 25 %

185.

-

186.

a) 20 %

b) 36 %

c) 17 %

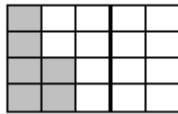
d) 3 %

187.

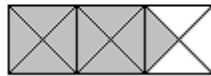
a) 20 %



b) 30 %



c) 75 %



188.

- a) $3/100 = 0,03$
- b) $1/10 = 0,1$
- c) $1/4 = 0,25$
- d) $47/100 = 0,47$
- e) $85/100 = 0,85$
- f) $250/100 = 2,5$

189.

- a) 50 %
- b) 33 %
- c) 20 %
- d) 13 %

190.

- a) 11,7 %
- b) 6,3 %
- c) 25,3 %
- d) 59,1 %
- e) 1,56 %

191.

84 % ja 95 %

192.

matematiikka 89 %, historia 67 %, biologia 88 %, englanti 90 %, uskonto 47 % , hän pärjäsikin parhaiten englannissa

193.

- a) $1/10$, 0,1, 10 %
- b) $1/5$, 0,2, 20 %
- c) $1/100$, 0,01, 1 %
- d) $2/3$, 0,6666..., 66,67 %
- e) $1/2$, 0,5, 50 %
- f) $1/2$, 0,5, 50 %
- g) $4/5$, 0,8, 80 %
- h) $3/10$, 0,3, 30 %

194.

- a) 15 %
- b) 12 %
- c) 100 %

195.

83 %

196.

1,5 %

197.

- a) 2,3 %
- b) 7,7 %
- c) 8,3 %
- d) 4,0 %
- e) 17,5 %

198.

60 %

199.

33,5 %

200.

7,05 %

201.

30 %

202.

15,1 %

203.

400 %

204.

- a) 12,5 %
- b) 16,7 %
- c) 62,5 %

205.

Merkurius: 5,53 %

Venus: 81,6 %

Mars: 10,75 %

Jupiter: 31788 %

Saturnus: 9515 %

Uranus: 1454 %

Neptunus: 1723 %

Pluto: 0,2 %

206.

- a) 3,20 €
- b) 0,70 €

- c) 0,10 €
- d) 0,53 €
- e) 20 €
- f) 3,45 €

207.

- a) 32 €
- b) 7 €
- c) 1 €
- d) 5,3 €
- e) 200 €
- f) 34,5 €

208.

- a) 320 €
- b) 70 €
- c) 10 €
- d) 53 €
- e) 2000 €
- f) 345 €

209.

- a) 31 kg
- b) 42 kg
- c) 52 kg
- d) 70 kg

210.

129 kg

211.

- a) 300
- b) 50
- c) 100

212.

- a) 8,4 l
- b) 6,8 l
- c) 13,8 l

213.

- a) 5,25 kg
- b) 151,8 cm
- c) 8,04 m
- d) 9,8 ml
- e) 0,2 km

214.

- a) 108
- b) 20,25

- c) 2700
- d) 34,5

215.

30

216.

- a) 9 €
- b) 45 €
- c) 180 €
- d) 675 €

217.

275 €

218.

12 % luvusta 950 on suurempi

219.

- a) 60
- b) 492
- c) 73,6
- d) 619,5

220.

Todellinen nopeus on mittarin näyttämästä nopeudesta $\frac{92 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0,92 = 92\%$.

Kun mittari näytti 85 km/h, oli todellinen nopeus $0,92 \cdot 85 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

221.

- a) 1,5
- b) 1,1
- c) 1,03
- d) 2,5
- e) 1,009

222.

- a) 0,5
- b) 0,1
- c) 0,83
- d) 0,97
- e) 0,995

223.

- a) 6 €

- b) 19,2 €
- c) 252 €
- d) 22,2 €
- e) 72 snt

224.

- a) 17,1 €
- b) 513 €
- c) 5,51 €
- d) 9,5 snt
- e) 3 325 000 €

225.

- a) 1586,2
- b) 87,7
- c) 3212,5
- d) 1909,5
- e) 32,2 kg
- f) 349,5 €

226.

- a) 8,33 €
- b) 149,25
- c) 5273,4
- d) 16250
- e) 2287,01 €
- f) 488,75

227.

\$104

228.

24,40 €

229.

- a) \$27,2
- b) \$707,2

230.

15,60 €

231.

\$552,5

232.

tuote	alkuperäinen hinta	alennus prosentteina	alennus euroina	alennettu hinta
hyppynaru	9 €	25 %	2,25 €	6,75 €
nyrkkeilyhanskat	62 €	10 %	6,2 €	55,8 €
shortsit	16 €	60 %	9,6 €	6,4 €
maastopyörä	655 €	20 %	131 €	524 €

makuupussi	158 €	15 %	23,7 €	134,3 €
------------	-------	------	--------	---------

233.

- a) laskee 5 %
- b) nousee 17 %
- c) laskee 30 %
- d) nousee 50 %
- e) nousee 100 %
- f) nousee 2 %
- g) laskee 0,9 %

234.

- a) 61 €
- b) 30,5 €
- c) 97,6 €
- d) 24,4 €
- e) 67,1 €

235.

- a) 62,5 €
- b) 31,25 €
- c) 100 €
- d) 25 €
- e) 68,75 €

236.

- a) 57,5 €
- b) 28,75 €
- c) 92 €
- d) 23 €
- e) 63,25 €

237.

- a) 59,5 €
- b) 29,75 €
- c) 95,2 €
- d) 23,8 €
- e) 65,45 €

238.

240 €

239.

25 %

240.

982 mm

241.

Yhtiövastike ennen korotusta oli $64,5 \text{ m}^2 \cdot 2 \frac{\text{€}}{\text{m}^2} = 129 \text{ €}$.

Korotuksen jälkeen yhtiövastike oli $1,085 \cdot 129 \text{ €} \approx 139,97 \text{ €}$

242.

- a) 1020 €
- b) 1061,20 €

243.

- a) 5150 €
- b) 5025 €

244.

- a) 3542 €
- b) 3584,50 €
- c) 3759,70 €

245.

\$19 153,5

246.

2811,17 €

247.

- a) 7,1 miljardia
- b) 7,5 miljardia
- c) 8,5 miljardia
- d) 12,2 miljardia

248.

11000 €, 3500 €

249.

Vastaus: 1148,50 €

250.

Joka vuosi maksat saman verran korkoja eli $0,075 \cdot 800 \text{ €} = 60 \text{ €}$. Säästöä kertyy silloin $1148,50 \text{ €} - 800 \text{ €} - (5 \cdot 60 \text{ €}) = 48,50 \text{ €}$. **Huom!** Todellinen säästö on vielä enemmän, jos maksat lainan erissä, koska takaisinmaksettavaa lainaa on nyt 800 € eikä 1148,50 €.

251.

10 vuoden kuluttua

252.

12 vuoden kuluttua

253.

- a) kaksinkertainen
- b) 50 %

254.

kolminkertainen

255.

- a) 328 €
- b) 35,6 %

256.

- a) 50 %
- b) 15 %
- c) 40 %
- d) 70 %

257.

- a) 9,52 %
- b) 16,67 %
- c) 19,35 %
- d) 6,43 %
- e) 8,33 %
- f) 10,67 %

258.

10 %

259.

- a) 20 %
- b) 16,7 %

260.

- a) 7 prosenttiyksikköä
- b) 14 prosenttia

261.

- a) 350 %
- b) 21 %
- c) 46 %
- d) 102 %

262.

8,8 %

263.

75 %

264.

7,1 %

265.

41,4 %

266.

- a) oikeasta korvasta 33,3 % ja vasemmasta 66,7 %
- b) 50 %

267.

- a) 16,7 %
- b) 1,5 prosenttiyksikköä

268.

- a) 1445,48 €
- b) 15,6 %

269.

- a) 3,5 prosenttiyksikköä suurempi
- b) Asuntolainan korko euroina on $0,06 \cdot 30\,000 \text{ €} = 1\,800 \text{ €}$, autolainan korko euroina on $0,095 \cdot 20\,000 \text{ €} = 1\,900 \text{ €}$. Muodostetaan näiden suhde $\frac{1900}{1800} \approx 1,056$. Autolainan korko on siten 1,056-kertainen asuntolainaan verrattuna eli 5,6 % suurempi.

270.

noin 5,8 %

271.

20 %

272.

- a) 24,2 %
- b) 314 %
- c) 75,8 %

273.

- a) 32 %
- b) 24 %

274.

- a) kasvoi 50 %
- b) väheni 25 %
- c) väheni 25 %

275.

Vanha nettopalkka on $\frac{100 - 25}{100} \cdot 1170 \text{ €} = 877,5 \text{ €}$

Uusi nettopalkka on $\frac{100 - 28}{100} \cdot 1300 \text{ €} = 936 \text{ €}$

- a) Nettopalkan nousu $936 \text{ €} - 877,5 \text{ €} = 58,5 \text{ €}$
- b) Prosentuaalinen nousu $\frac{58,5 \text{ €}}{877,5 \text{ €}} \cdot 100\% \approx 6,7\%$

276.

- a) 176,80 €
- b) 214,50 €
- c) 311,95 €
- d) 383,60 €

277.

Käytetyn maidon litrahinta oli ensimmäisellä viikolla $\frac{4,20 \text{ mk}}{0,8} = 5,25 \text{ mk}$.

Litrahinta toisella viikolla oli 5,0 mk. Toisella viikolla käytetty maito tuli halvemmaksi. Toisen viikon maito oli $\frac{5,25 \text{ mk} - 5,0 \text{ mk}}{5,25 \text{ mk}} \cdot 100 \% \approx 4,8 \%$

Vastaus: Toisen viikon maito oli 4,8 % edullisempaa.

278.

21,10 €

279.

Osasto A:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{48}{300} = 0,16 = 16 \%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{3}{20} = 0,15 = 15 \%$

Osasto B:

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{4}{20} = 0,20 = 20 \%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{114}{600} = 0,19 = 19 \%$

Siis tyttöjen hyväksymisprosentit ovat 1 yksikköä suuremmat molemmilla osastoilla.

Koko laitokseen pyrki 320 tyttöä, joista hyväksyttiin 52. Poikia pyrki 620, joista hyväksyttiin 117.

Tyttöjen hyväksymisprosentti: $\frac{52}{320} = 0,1625 = 16,25 \%$

Poikien hyväksymisprosentti: $\frac{117}{620} \approx 0,1887 = 18,87 \%$

Siis poikien hyväksymisprosentti koko laitokseen oli suurempi, kuin tyttöjen.

280.

Värjätyn alueen ala A

Pienemmän ympyrän ala $B = \pi r^2 = \pi \cdot (5,0 \text{ cm})^2 = 78,5 \text{ cm}^2$

Suuremman ympyrän ala C, jolloin

$$B = \frac{40}{100} C$$

$$C = \frac{100}{40} B = \frac{100}{40} \cdot 78,5 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$$

$$A = C - B = 196 \text{ cm}^2 - 78,5 \text{ cm}^2 \approx 118 \text{ cm}^2$$

281.

- a) 8
- b) 24
- c) 220
- d) 700

282.

- a) 8
- b) 22
- c) 400
- d) 1424

283.

- a) 120 %
- b) 135 %
- c) 150 %
- d) 200 %

284.

- a) 50 %
- b) 70 %
- c) 85 %
- d) 31 %

285.

- a) 28
- b) 400
- c) 78
- d) 6500
- e) 50

286.

- a) 920
- b) 360
- c) 82
- d) 640
- e) 530

287.

6,6 ha

288.

- a) 840 €
- b) 3928 €

289.

1250 €

290.

\$30

291.

110 €

292.

500 €

293.

72 kg

294.

15,5 %

295.

- a) 78 %
- b) 91 %
- c) 143 %
- d) 195 %

296.

739,96 €

297.

5,5 %

298.

Merkitään äänioikeutettujen määrää a :lla.

Äänestäneiden määrä oli $0,71a$. Näistä 57 % äänesti KYLLÄ.

KYLLÄ-äänien määrä oli $0,57 \cdot 0,71a = 0,4047a \approx 0,40a$ eli 40 % äänioikeutettujen määrästä.

299.

Merkitään alkuperäistä perushintaa x (mk). Tällöin:

$$1,12x = 22,30 \text{ €}$$

$$x = \frac{22,30 \text{ €}}{1,12} \approx 19,90 \text{ €}$$

Alennettu perushinta on $19,90 \text{ €} - 4,20 \text{ €} = 15,70 \text{ €}$.

Alennettu myyntihinta on $1,12 \cdot 15,70 \text{ €} \approx 17,60 \text{ €}$.

300.

Merkitään todellista ajettua matkaa x :llä.

$$1,05 \cdot x = 205 \text{ km}$$

$$x = \frac{205 \text{ km}}{1,05} \approx 195,2 \text{ km}$$

$$2 \text{ h } 40 \text{ min} \approx 2,67 \text{ h}$$

Keskinopeus oli $\frac{195,2 \text{ km}}{2,67 \text{ h}} \approx 73 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

301.

Merkitään edellisvuoden matkustajamäärää a :lla. Nykyinen matkustajamäärä on $0,77a$. Seuraavan vuoden matkustajamäärä pitää olla taas a . Matkustajamäärä on siis suurempi edellisen vuoden matkustajamäärää $\frac{a - 0,77a}{0,77a} = \frac{(1 - 0,77)a}{0,77a} = \frac{0,23}{0,77} \approx 0,2987$

Vastaus: Matkustajamäärän pitäisi kasvaa 30 %.

302.

Merkitään alkuperäistä myyntihintaa a :lla, jolloin alkuperäinen myyntipalkkio on $0,25a$. laskenut myyntihinta on $0,92a$, jolloin uusi myyntipalkkio on $0,31 \cdot 0,92a = 0,2852a$. Siis myyntipalkkio nousi.

303.

Merkitään vuoden 1995 pesujauheiden kokonaismyyntiä a :lla.

Kyseessä olevan pesujauheen myynti oli $0,15a$.

Vuonna 1996 kokonaismyynti oli $1,10a$.

Tarkasteltavan pesujauheen myynti oli $1,20 \cdot 0,15a = 0,18a$.

Osuus koko myynnistä oli $\frac{0,18a}{1,10a} = \frac{0,18}{1,10} \approx 0,16 = 16\%$.

304.

- a) 5
- b) 8
- c) 6
- d) 14

305.

- a) $x + 4 = 9$
- b) $x - 1 = 7$
- c) $15 - x = 9$
- d) $2 + x = 16$

306.

- a) on
- b) ei
- c) on
- d) ei

307.

- a) $x = -6$
- b) $x = 26$
- c) $x = -10$
- d) $x = 6$

308.

-

309.

- a) $x+1$
- b) 12
- c) $3x-12$
- d) -1

310.

- a) $x=2$
- b) $x=5$
- c) $x=-10$
- d) $x=-5$

311.

- a) $x=7$
- b) $x=22$
- c) $x=-19$
- d) $x=15$

312.

- a) $x=3$
- b) $x=4$
- c) $x=9$
- d) $x=12$

313.

- a) $x=-2$
- b) $x=6$
- c) $x=9$
- d) $x=5$

314.

- a) $4x^2-6x$
- b) $-10+20x$
- c) $10x^2+5x$
- d) $-5x^2-4x$

315.

- a) $x=2$
- b) $x=5$
- c) $x=1$
- d) $x=1$

316.

- a) $x=1$
- b) $t=-\frac{2}{5}$

317.

- a) $x = 1$
- b) $x = 2$
- c) $x = 3$

318.

Koska $x = 1$ on yhtälön juuri, se toteuttaa yhtälön.

$$1^3 + 3(2a - 1)1^2 - 4 \cdot 1 + 1 - a = 0$$

$$1 + 3(2a - 1) - 4 + 1 - a = 0$$

$$6a - 3 - 2 - a = 0$$

$$5a = 5 \quad ||:5$$

$$a = 1$$

319.

- a) $x = 12$
- b) $x = 12$
- c) $x = 4$
- d) $x = 7$

320.

- a) $x = 12$
- b) $y = -16$
- c) $a = 20$
- d) $x = 24$

321.

- a) $x = 8$
- b) $a = -2\frac{3}{5}$
- c) $x = -1$

322.

- a) $x = 3$
- b) $x = \frac{1}{5}$
- c) $x = 16$
- d) $x = 11$

323.

$$x = 0$$

324.

- a) $x = \frac{d+b}{a}$
- b) $x = \frac{p-n}{m}$
- c) $x = 2d + 2c$

d) $x = \frac{3k-9}{2}$

325.

a) $T = \frac{I}{PR}$

b) $l = \frac{P-2W}{2}$

c) $b = \frac{2A}{h}$

d) $h = \frac{V}{\pi r^2}$

326.

a) $x > 20$

b) $x < 6$

327.

$$x < \frac{2}{7}$$

328.

$$x > \frac{40}{7}$$

329.

a) kaikki x :t kelpaa ratkaisuksi

b) ei ratkaisuja

330.

18, 19 ja 20

331.

2 m wide and 8 m long

332.

7

333.

Yhtälöksi saadaan $4x = 3(x+2) + 10$, josta $x = 16$.

334.

Olkoon alkuperäinen matkan hinta x markkaa, tällöin kokonaishinta on $22x$. Kun osanottajia oli 24 oli matkan hinta $(x-10)$. Tästä saadaan yhtälö

$$22x = 24(x-10)$$

$$x = \frac{240}{2} = 120$$

Vastaus: Jokainen joutui lopulta maksamaan 110 mk.

335.

Nelinumeroinen palindromi $xyyx$ voidaan esittää muodossa $1000x+100y+10y+x$, missä x ja y ovat kokonaislukuja väliltä nolasta yhdeksään. Ongelmana on siis osoittaa, että $1000x+100y+10y+x$ on jaollinen luvulla 11.

Merkitään $1000x+100y+10y+x=1001x+110y$.

Koska $\frac{1001x}{11}=91x$ on kokonaisluku ja $\frac{110y}{11}=10y$ on kokonaisluku, niin jokainen nelinumeroinen palindromiluku on jaollinen luvulla 11.

336.

Oletetaan, että juhlasaliin mahtuu x henkilöä ja ovesta A poistuu a henkilöä minuutissa ja ovesta B poistuu b henkilöä minuutissa. Silloin $a=\frac{x}{18}$ ja $b=\frac{x}{12}$. Jos molemmat ovet on käytössä, pystyy

henkilöitä minuutissa poistumaan $a+b=\frac{x}{18}+\frac{x}{12}=\frac{5}{36}x$. salin tyhjentämiseen kuluu tällöin aikaa

$$\frac{x}{a+b}=\frac{x}{\frac{5x}{36}}=\frac{36}{5}=7,2 \text{ (min)}.$$

337.

Merkitään tuntematonta numeroa x :llä.

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot x + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 9 = 223 + 5x$$

Tämän tulee olla yhtä suuri kuin $q \cdot 11 + 8$, missä q on positiivinen kokonaisluku eli

$$223 + 5x = q \cdot 11 + 8.$$

Ainoa yksinumeroinen positiivinen kokonaisluku, jolle yhtälö on mahdollinen on $x=1$, jolloin $q=20$.

Vastaus: Epäselvä numero on 1.

338.

- a) 0,01
- b) 0,09
- c) 0,19
- d) 0,90
- e) 0,045
- f) 0,149
- g) 1,21

339.

- a) 18 %
- b) 20 %
- c) 55 %
- d) 12,5 %

340.

- a) 6 %
- b) 76 %
- c) 86,5 %

- d) 20 %
- e) 130 %

341.

- a) $\frac{1}{20}$
- b) $\frac{9}{50}$
- c) $\frac{11}{20}$
- d) $\frac{39}{50}$

342.

- a) 71,4 %
- b) 50 %
- c) 41,7 %
- d) 10 %

343.

- a) 37,5 %
- b) 7,7 %
- c) 6,0 %
- d) 66,7 %

344.

41,7 %

345.

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{5}{8}$
- c) $\frac{1}{16}$
- d) $\frac{1}{12}$

346.

- a) 5 €
- b) 7,5 €
- c) 80 €

347.

- a) 2,6 €
- b) 4,7 cm
- c) 0,95 l
- d) 78,9 g

348.

- a) 14
- b) 12,04
- c) 33,6
- d) 83,44

349.

- a) 3,4 kg
- b) 4,2 kg
- c) 5,9 kg

350.

3000 kg

351.

- a) 1,29
- b) 1,9
- c) 1,05
- d) 1,13
- e) 2

352.

- a) 0,9
- b) 0,94
- c) 0,2
- d) 0,85
- e) 0

353.

- a) \$130
- b) \$520

354.

- a) 87,3 kg
- b) 110,7 kg
- c) 133,2 kg

355.

295,8 €

356.

omenat maksoivat 2,10 €/kg ja viinirypäleet maksoivat 2,70 €/kg

357.

- a) 3033 €
- b) 3100,1 €
- c) 3346,82 €

358.

\$3726,18

359.

30 %

360.

2,5 %

361.

- a) 30 %
- b) 23,1 %

362.

- a) 7 prosenttiyksikköä
- b) 14 prosenttia

363.

25 %

364.

62 %

365.

- a) 15
- b) 55
- c) 90
- d) 1010
- e) 5025

366.

3,75 kg

367.

- a) 160
- b) 50
- c) 233,33
- d) 350
- e) 4444,44

368.

\$74

369.

- a) 372,86
- b) 40,32
- c) 85,71
- d) 24
- e) 33,33

370.

- a) 82
- b) 200
- c) 250
- d) 100

371.

15 €

372.

56 %