# 理论力学第一章作业

杨守康 2018115309

2020 年 2 月 27 日

**1.3** 曲线 $OA=r$, 以匀角速度 $\omega$ 绕定点 $O$ 转动. 此曲柄借连杆 $AB$ 使滑块 $B$ 沿直线 $Ox$ 运动. 求连杆上 $C$ 点的轨道方程及速度. 设 $AC=CB=a,\angle AOB=\varphi,\angle ABO=\psi$.

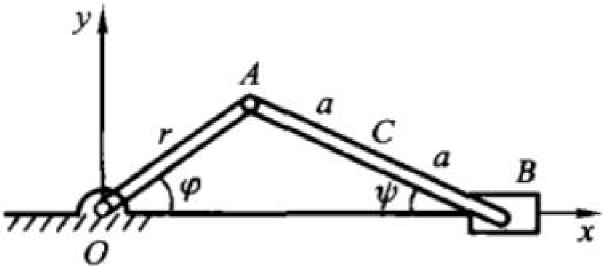



图 1: 1.3 图

解:

(1) 依题, 有

$$\begin{cases} x_c = r\cos\varphi + a\cos\psi \\ y_c = a\sin\psi \end{cases} \tag{1}$$

$$r\sin\varphi = 2a\sin\psi \tag{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x_c - a\cos\psi}{r} = \dfrac{x_c - \sqrt{a^2-y^2}}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{2y}{r} \end{cases}$$

于是 $C$ 的轨迹方程为

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{x_c - \sqrt{a^2-y^2}}{r}\right)^2 + \left(\frac{2y}{r}\right)^2 = 1$$

整理得

$$4x^2\left(a^2-y^2\right) = \left(x^2+3y^2+a^2-r^2\right)^2$$

(2) 对 (1) 中 (2) 式求导, 得

$$
\begin{aligned}
r\omega\cos\varphi &= 2a\dot{\psi}\cos\psi \\
\dot{\psi} &= \frac{r\omega\cos\varphi}{2a\cos\psi}
\end{aligned}
$$

对 (1) 求导,

$$
\begin{cases}
\dot{x_c} = -r\omega\sin\varphi - a\psi\sin\psi = -r\omega\sin\varphi - \dfrac{r\omega\sin\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi \\
\dot{y_c} = \dfrac{r\omega}{2}\cos\varphi
\end{cases} \tag{3}
$$

$$
\Rightarrow \boldsymbol{v} = \left(r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\sin\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi\right)\ \boldsymbol{i} + \frac{r\omega}{2}\cos\varphi\ \boldsymbol{j}
$$

**1.7** 试自

$$
x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta
$$

出发，计算 $\ddot{x}$ 及 $\ddot{y}$ . 并由此推出径向加速度 $a_r$ 及横向加速度 $a_\theta$.

解:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\
\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{t}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\
\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{t}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta \\
\boldsymbol{a} &= \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

径向与轴向的单位向量分别为

$$
\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
a_r = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r = (\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j})\cdot(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_r = (\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j})\cdot(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}
\end{cases}
$$

**1.9** 质点作平面运动, 其速率保持为常数. 试证其速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 正交.

解:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = 0
\end{aligned}
$$

**1.11** 质点沿着半径为 $r$ 的圆周运动, 其加速度矢量与速度矢量间的夹角 $\alpha$ 保持不变. 求质点的速度随时间变化的规律. 已知初速度为 $v_0$.

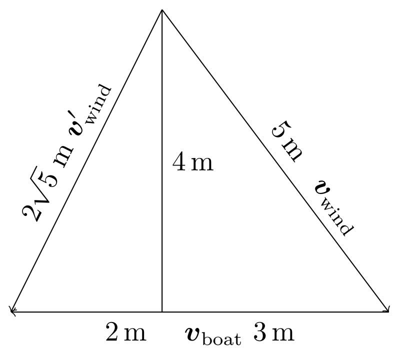
解:

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \left|\frac{a_r}{a_\theta}\right| = \frac{\dot\theta^2}{\ddot\theta} \\ \Rightarrow \int_{\frac{v_0}{r}}^{\frac{v}{r}} \frac{\mathrm{d}\dot\theta}{\dot\theta^2} &= \int_0^t \cot\alpha\ \mathrm{d}t \\ \Rightarrow v &= \frac{r}{r - v_0 t\cot\alpha} v_0\end{aligned}$$

**1.15** 当一轮船在雨中航行时, 它的雨篷遮着篷的垂直投影后 $2\,\mathrm{m}$ 的甲板, 篷高 $4\,\mathrm{m}$. 但当轮船停航时, 甲板上干湿两部分的分界线却在篷前 $3\,\mathrm{m}$. 如果雨点的速率为 $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, 求轮船的速率.

解:

依题可画出矢量的三角形定则：




于是 $v_{\mathrm{boat}} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

**1.19** 将质量为 $m$ 的质点竖直向上抛入有阻力的介质中. 设阻力与速度平方成正比, 即 $R = mk^2gv^2$. 如上掷时的速度为 $v_0$, 试证此质点又落至投掷点时的速度为

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1+k^2{v_0}^2}}$$

解: 上升,

$$\begin{gathered} m\dot v = -mg(1+k^2v^2) \Rightarrow \frac{v\ \mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -g(1+k^2v^2) \\ \int_{v_0}^0 \frac{v\ \mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \int_0^h -g\left(1+k^2v^2\right)\ \mathrm{d}y \\ \frac{1}{2k^2}\ln\left(1+k^2v_0^2\right) = gh \end{gathered}$$

下降,

$$\int_0^{v_1} \frac{v\ \mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \int_h^0 gh\left(1-k^2v^2\right)\ \mathrm{d}y$$

$$-\frac{1}{2k^2}\ln\left(1+k^2v_0^2\right) = gh$$

$$\Rightarrow \left(1+k^2v_0^2\right)\left(1-k^2v_1^2\right) = 1$$

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}$$

**1.27** 一质点自一水平放置的光滑固定圆柱面凸面的最高点自由滑下. 问滑至何处, 此质点将离开圆柱面? 假定圆柱体的半径为 $r$.

解: 设质点和中心的连线与垂直方向夹 $\theta$ 角时离开圆柱面

$$v = \sqrt{2gr\left(1-\cos\theta\right)}$$

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow 3\cos\theta = 2$$

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}$$

**1.33** 光滑钢丝圆圈的半径为 $r$, 其平面为竖直的. 圆圈上套一小环, 其重为 $W$. 如钢丝圈以匀加速度 $a$, 沿竖直方向运动, 求小环的相对速度 $v_r$ 及圈对小环的反作用力 $R$.

解:

设初始时刻小环和中心连线与垂直方向夹 $\theta_0$ 初始相对速率为 $v_0$, 相对速率为 $v_r$ 时夹角为 $\theta$. 不妨假设加速度方向竖直向下 (向上时取负值).

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W\left(1-\frac{a}{g}\right)\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$$

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{W}{g}r\left(1-\frac{a}{g}\right)\left(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right)}$$

$$\begin{aligned} R &= m\frac{v_r^2}{r} - W\left(1-\frac{a}{g}\right)\cos\theta \\ &= W\left[\frac{v_0^2}{gr} + \left(1-\frac{a}{g}\right)\left(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta\right)\right] \end{aligned}$$

$R > 0$ 表示向内.

**1.37** 根据湯川核力理论, 中子与质子之间的引力具有如下形式的势能:

$$V\left(r\right) = \frac{k\mathrm{e}^{-ar}}{r} \quad \left(k \le 0\right)$$

试求:

(1) 中子与质子间的引力表达式, 并与平方反比定律相比较;

(2) 求质量为 $m$ 的粒子作半径为 $a$ 的圆运动的动量矩 $J$ 及能量 $E$.

解:

(1).

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) = \frac{k\mathrm{e}^{-ar}}{r^2}(1+ar)$$

比平方反比律多两个因子.

(2).

$$F(a) = m\frac{v^2}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\mathrm{e}^{-a^2}}{ma}}$$
$$J = mva = \sqrt{mak\mathrm{e}^{-a^2}}$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(a) = \frac{3k\mathrm{e}^{-a^2}}{2a}$$

**1.45** 如 $\dot{s}_a$ 及 $\dot{s}_p$ 为质点在远日点及近日点处的速率, 试证明

$$\dot{s}_p : \dot{s}_a = (1+e) : (1-e)$$

解: 由角动量守恒

$$m\dot{s}_a(a+c) = m\dot{s}_p(a-c) \Rightarrow \frac{\dot{s}_p}{\dot{s}_a} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e}$$