Об одном разбиении прямоугольника

А. Т. Колотов

В этой заметке решается задача М144.
Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α, β, чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $\alpha \times \beta$.

Например, можно ли прямоугольник 50×60 *разрезать на прямоугольники:*
а) 20×15*; б)* 5×8*; в)* $6,25 \times 15$*;*
г) $\left(2-\sqrt{2}\right) \times (2+\sqrt{2})$.

Решение обобщает решение задачи 1 из статьи Сойфера "Клетчатые .доски и полимино"("Квант"№ 11, 1972).

Полное решение задачи М144 дает следующая
Т е о р е м а. *Для того чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разбить на прямоугольники $\alpha \times \beta$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

1. *из чисел α и β должно быть в целое число раз меньше хотя бы одного из чисел a, b.*
2. *Каждое из чисел a и b должно допускать представление в виде m α + n β, где m и n - неотрицательные целые числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим большой прямоугольник через R, а маленький через p.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $a = n\alpha$, $b = m\beta$ (m и n - натуральные числа), то, разбив одну из сторон прямоугольника R на m, а смежную с ней сторону на n равных частей, и затем проведя через точки деления прямые, паралельные сторонам R, мы тем самым разобьем его на прямоугольники, равные p (рис. 1).

Если же a=n $\alpha = m\beta$, то в силу второго условия b допускает представление $b = k\alpha + l\beta$, где k и l можно считать положительными целыми числами. Тогда, разбив прямоугольник R на два прямоугольника P и Q размерами a$\times k\alpha$ и $a \times l\beta$ соответственно, мы сведем этот случай к уже рассмотренному (рис. 2).

Н е о б х о д и м о с т ь. Необходимость второго условия очевидна. Докажем необходимость первого условия. Возможны два случая:

1) Числа α и β соизмеримы. Тогда без ограничения общности можно считать числа α, β, a и b целыми, так как этого всегда можно добится

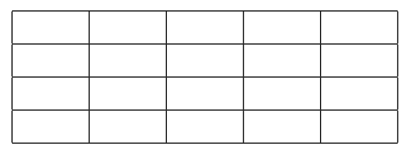

Рис. 1(Ширина одной ячейки - α, длина одной ячейки - β, ширина общая - a, длина общая - b)

выбором подходящей единицы масштаба. Предположим теперь, что наше утверждение не верно, и для определенности пусть ни a, ни b не делятся нацело на α. Разбив прямоугольник R на единичные квадраты, осуществим следующим образом правильную раскраску получаемой сетки в α различных цветов (раскраска называется правильной, если любые рядом стоящие α квадратов по вер->)

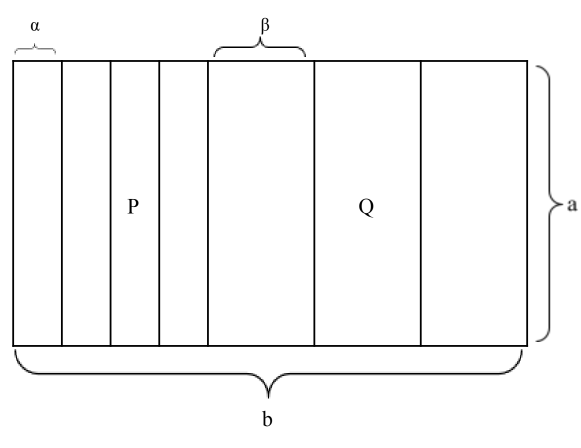

Рис.2