Конспект курса Алгоритмы и структуры данных
"Ваш курс будет очень интересным и полезным ... на битмэпы"
Автор: yourkumir

Асимптотика

Теория

$f(n) = O(g(n))$

Оценка сверху, алгоритм не медленнее $g(n)$ $(f \leq g)$
$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)\ \forall n \geq n_0$, то есть при достаточно большом n
Примечание. $f(n), g(n)$ асимптотически положительны, то есть $f(n), g(n) \geq 0$ при достаточно большом n

$f(n) = \Omega(g(n))$

Оценка снизу, алгоритм не быстрее $g(n)$ $(f \geq g)$
$f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow \exists c, n_0 > 0 : 0 \leq cg(n) \leq f(n)\ \forall n \geq n_0$
Примечание. $f(n), g(n)$ асимптотически положительны

$f(n) = \Theta(g(n))$

Оценка в среднем $(f = g)$
$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow \exists c_1, c_2, n_0 > 0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\ \forall n \geq n_0$
Примечание. $f(n), g(n)$ асимптотически положительны

$f(n) = o(g(n))$

Грубая оценка сверху $(f < g)$
$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow$
1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq f(n) \leq \epsilon g(n)\ \forall n \geq n_0$
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f(n) = \omega(g(n))$

Грубая оценка снизу $(f > g)$
$f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow$
1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq \epsilon g(n) \leq f(n)\ \forall n \geq n_0$
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = 0$

Задача 1.1

Поясните, почему утверждение ”время работы алгоритма A равно как минимум $O(n^2)$” лишено смысла.

$O(g(n))$ - это оценка сверху, некий максимум для нашей функции, поэтому утверждение можно переформулировать как ”максимум функции как минимум равен n^2”, то есть наше утверждение не является по сути оценкой функции.

Задача 1.2

Для любых двух функция $f(n)$ и $g(n)$ мы имеем $f(n) = \Theta(g(n))$ тогда и только тогда, когда $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$.

По определению $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1, n_1 > 0 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n)\ \forall n \geq n_1$ и $f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow \exists c_2, n_2 > 0 : 0 \leq c_2 g(n) \leq f(n)\ \forall n \geq n_2$
Пусть $n_0 = max(n_1, n_2)$, тогда $0 \leq c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)\ \forall n \geq n_0$
Таким, образом, по определению $f(n) = \Theta(g(n))$.

Задача 2.1

Справедливы ли соотношения $2^{n+1} = O(2^n)$ и $2^{2n} = O(2^n)$?

1)Необходимо найти такие $c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0$
$0 \leq 2^{n+1} \leq c2^n \mid : 2^n$
$0 \leq 2 \leq c$
$\exists c = 3, n_0 = 1 : 0 \leq 2^{n+1} \leq 3 * 2^n \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow 2^{n+1} = O(2^n)$ по определению
2)Покажем, что невозможно найти такие $c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0$
$0 \leq 2^{2n} \leq c2^n \mid : 2^n$
$0 \leq 2^n \leq c$
$\nexists c, n_0 > 0 : 0 \leq 2^{2n} \leq 2^n \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow 2^{2n} \neq O(2^n)$ по определению

Задача 2.2

Докажите, что множество $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ является пустым.

Пусть $\exists f(n) \ f(n) = o(g(n))$ и $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow$
$\forall c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n)$ и $0 \leq c_2 g(n) \leq f(n) \ \forall n \geq n_0$
Таким образом, $\forall c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 : 0 \leq c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$
Если g(n) асимптотически положительна, то пусть $c_2 > c_1$:
$0 \leq c_2 g(n) \leq c_1 g(n)$, что неверно.
$\nexists f(n) \ f(n) = o(g(n))$ и $f(n) = \omega(g(n))$
Примечание. Грубо говоря, $f(n)$ не может быть одновременно строго больше и строго меньше $g(n)$.

Задача 3.1

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ - асимптотически положительные функции. Докажите или опровергните справедливость каждого из приведённых ниже утверждений.
a) Из $f(n) = O(g(n))$ вытекает $g(n) = \Omega(f(n))$.
b) $f(n) + g(n) = \Theta(min(f(n), g(n)))$

a) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1, n_0 > 0 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \ \forall n \geq n_0$ по определению
Положим $c_2 = \frac{1}{c_1}$, тогда получим $0 \leq c_2 f(n) \leq g(n) \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$
b) Для доказательства утверждения необходимо найти: $c_1, c_2, n_0 > 0$:
$c_1 * min(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 * min(f(n), g(n)) \ \forall n \geq n_0$
Левая часть очевидна
$f(n), g(n) \geq min(f(n), g(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) \geq min(f(n), g(n)) \ c_1 = 1$
Рассмотрим правую часть. Пусть $f(n) \leq g(n)$, тогда
$f(n) + g(n) \leq c_2 f(n) \Rightarrow g(n) \leq (c_2 - 1) f(n)$
Но в общем случае для функций $f(n), g(n)$ не существует такого c_2. Например, положим $f(n) = n$, $g(n) = 2^n$

Задача 3.2

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ - асимптотически неотрицательные функции. Докажите, что $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

$f(n), g(n) \leq max(f(n), g(n)) \Rightarrow$
1) $max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$, так как функции асимптотически неотрицательны
2) $f(n) + g(n) \leq 2 * max(f(n), g(n)) \Rightarrow \frac{1}{2} * (f(n) + g(n)) \leq max(f(n), g(n))$
Таким образом, $\frac{1}{2} * (f(n) + g(n)) \leq max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n) \Rightarrow$ по определению $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

Задача 4.1

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ - асимптотически положительные функции. Докажите или опровергните справедливость каждого из приведённых ниже утверждений.
a) Из $f(n) = O(g(n))$ вытекает $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.
b) $f(n) = O((f(n))^2)$

a) Рассмотрим $f(n) = 2n$ и $g(n) = n$.
$2n = O(n)$, так как $\exists c = 2 : 0 \leq f(n) \leq cg(n))$.
Покажем, что невозможно найти такие $c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0$
$0 \leq 2^{2n} \leq c2^n \mid : 2^n$
$0 \leq 2^n \leq c$
$\nexists c, n_0 > 0 : 0 \leq 2^{2n} \leq 2^n \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow 2^{2n} \neq O(2^n)$ по определению.
Таким образом, исходное утверждение неверно.
b) Рассмотрим $f(n) = \frac{1}{n}$.
Покажем, что невозможно найти такие $c, n_0 > 0 : \forall n \geq n_0$
$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{c}{n^2} \mid *n^2$
$0 \leq n \leq c$
$\nexists c, n_0 > 0 : 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{}{n^2} \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \neq O((\frac{1}{n})^2)$ по определению.
Таким образом, исходное утверждение неверно.

Задача 4.2

Покажите, что для любых действительных коэффициентов a и b, где $b > 0$, выполняется соотношение $(n+a)^b = \Theta(n^b)$

$n + a \leq 2n$, при $|a| \leq n$
$\frac{n}{2} \leq n + a$, при $|a| \leq \frac{n}{2}$ $(2|a| \leq n)$
$\Rightarrow$ если $2|a| \leq n$, $0 \leq \frac{n}{2} \leq n + a \leq 2n$
возведём в степень $b > 0 : 0 \leq (\frac{n}{2})^b \leq (n+a)^b \leq (2n)^b$ или $0 \leq \frac{1}{2^b} * n^b \leq (n+a)^b \leq 2^b * n^b$
$\Rightarrow \exists c_1 = \frac{1}{2^b}, c_2 = 2^b, n_0 = 2|a| : c_1 n^b \leq (n+a)^b \leq c_2 n^b \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
$(n+a)^b = \Theta(n^b)$ по определению.

Дополнительно (некоторые свойства с лекции)

Транзитивность

$f(n) = \Theta(g(n))$ и $g(n) = \Theta(h(n))$ влечет $f(n) = \Theta(h(n))$
$f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(h(n))$ влечет $f(n) = O(h(n))$
$f(n) = \Omega(g(n))$ и $g(n) = \Omega(h(n))$ влечет $f(n) = \Omega(h(n))$
$f(n) = o(g(n))$ и $g(n) = o(h(n))$ влечет $f(n) = o(h(n))$
$f(n) = \omega(g(n))$ и $g(n) = \omega(h(n))$ влечет $f(n) = \omega(h(n))$

Рефликтивность

$f(n) = \Theta(f(n))$
$f(n) = O(f(n))$
$f(n) = \Omega(f(n))$

Симметричность

$f(n) = \Theta(g(n))$ если и только если $g(n) = \Theta(f(n))$

Обращение

$f(n) = O(g(n))$ если и только если $g(n) = \Omega(f(n))$
$f(n) = o(g(n))$ если и только если $g(n) = \omega(f(n))$

Теорема

$f(n) = \Theta(g(n))$ тогда и только тогда, когда $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$

Задание из нулевика

$Q1$: **Какое из утверждений неверно?**

1. $O(n^2) = n$ 2. $o(n^2) = n$ 3. $O(n^2) = n^2$ 4. $o(n) = n$

1. $O(n^2) = n \Rightarrow$ по определению $\exists c, n_0 > 0 : 0 \leq n \leq cn^2 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq cn\ \forall n \geq n_0$, то есть при достаточно большом n.
   Это верно, положим, $c = 1, n_0 = 1$: $0 \leq 1 \leq n\ \forall n \geq 1$

2. $o(n^2) = n \Rightarrow$ по определению:
   1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq n \leq \epsilon n^2 \Rightarrow 0 \leq 1 \leq \epsilon n\ \forall n \geq n_0$. Это верно, положим $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$: $0 \leq 1 \leq \epsilon n\ \forall n \geq \frac{1}{\epsilon}$
   Или воспользуемся вторым пунктом:
   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ - тоже верно и соответствует определению

3. $O(n^2) = n^2$ по свойству рефлективности выше

4. $o(n) = n \Rightarrow$ по определению:
   1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq n \leq \epsilon n \Rightarrow 0 \leq 1 \leq \epsilon\ \forall n \geq n_0$. Это неверно, так как у нас никак не участвует в неравенстве n_0, а для любого $\epsilon > 0$ это неверно.
   Или воспользуемся вторым пунктом:
   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1} = 1 \neq 0$ - тоже неверно и не соответствует определению

Ответ: пункт 4.
Замечание: как это всё понять? Вспомним ассоциацию со знаками равенства для различных оценок
$f(n) = O(g(n)) \to f(n) \leq g(n)$, $f(n) = o(g(n)) \to f(n) < g(n)$:
1.$O(n^2) = n \to n \leq n^2$ - верно
2.$o(n^2) = n \to n < n^2$ - верно
3.$O(n^2) = n^2 \to n^2 \leq n^2$ - верно
1.$o(n) = n \to n < n$ - неверно

$Q2$: **Какое из утверждений неверно?**

1. $\Omega(n) = n$ 2. $\omega(n) = n^2$ 3. $\Omega(n^2) = n^2$ 4. $\omega(n) = n$

1. $\Omega(n) = n$ по свойству рефлективности выше

2. $\omega(n) = n^2 \Rightarrow$ по определению:
   1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq \epsilon n \leq n^2\ \forall n \geq n_0$
   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$
   Заметим, что получили те же самые условия, как в пункте 2 предыдущего номера и, действительно, воспользуемся свойством обратимости: $o(n^2) = n \Leftrightarrow \omega(n) = n^2$, то есть утверждение верно

3. $\Omega(n^2) = n^2$ по свойству рефлективности выше

4. $\omega(n) = n \Rightarrow$ по определению:
   1)$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : 0 \leq \epsilon n \leq n\ \forall n \geq n_0$
   2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} = 0$
   Заметим, что получили те же самые условия, как в пункте 4 предыдущего номера и, действительно, воспользуемся свойством обратимости: $o(n^2) = n \Leftrightarrow \omega(n) = n^2$, то есть утверждение неверно

Ответ: пункт 4.
Замечание: как это всё понять? Вспомним ассоциацию со знаками равенства для различных оценок
$f(n) = \Omega(g(n)) \to f(n) \geq g(n)$, $f(n) = o(g(n)) \to f(n) > g(n)$:
1.$\Omega(n) = n \to n \geq n$ - верно
2.$\omega(n) = n^2 \to n^2 > n$ - верно
3.$\Omega(n^2) = n^2 \to n^2 \geq n^2$ - верно
1.$\omega(n) = n \to n > n$ - неверно