# Асимптотические обозначения

***Асимптотические обозначения*** позволяют оценить время время работы алгоритма, являясь наглядной характеристикой его эффективности. Также позволяют сравнить производительность различных алгоритмов. Например производительность алгоритма сортировки методом слияний со временем работы $O(\log_2 n)$ выше производительности алгоритма сортировки вставкой, время работы которого в наихудшем случае составляет $O(n^2)$.

***О большое.*** Равенство $f(n) = O(g(n))$ означает, что найдется такая константа $c > 0$ и такое число $n_0$, что $0 \le f(n) \le cg(n)$ для всех $n \ge n_0$. Указанное равенство означает, что отношение $f(n) / g(n)$ остается ограниченным.

**Пример.** Доказать, что $2^{n+10} = O(2^n)$. Следует указать такие $c$, $n_0 > 0$, что$2^{n+10} \le c * 2^n$ выполняется для всех $n \ge n_0$. последнее неравенство эквивалентно $1024*2^n \le c * 2^n$, что выполняется, например при $c = 1024$, $n_0 = 1$.

**Пример.** Доказать, что $2^{10n} \ne O(2^n)$. Доказательство проведем от противного. Пусть существуют такие $c$, $n_0 > 0$, что $2^{10n} \le c*2^n$. Сокращаем неравенство на $2^n$: $2^{9n} \le c$, что неверно.

**Пример.** Пусть $f(n) = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \ldots + a_kn^k$ – многочлен степени $k$. Тогда $f(n) = O(n^k)$.

Для каждого $n \ge 1$ имеем: $f(n) \le |a_0| + |a_1|n + |a_2|n^2 + \ldots + |a_k|n^k \le |a_0|n^k + |a_1|n^k + |a_2|n^k + \ldots + |a_k|n^k = c * n^k$, где $c = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|$.

**Пример.** Доказать, что для любого $k \ge 1$ $n^k \ne O(n^{k-1})$. Доказательство проведем от противного. Пусть существуют такие $c$, $n_0 > 0$, что $n^k \le c*n^{k-1}$ Сокращая неравенство на $n^{k-1}$, получим $n \le c$, что неверно для любого $n \ge n_0$.

***Омега большая.*** Равенство $f(n) = \Omega(g(n))$ означает, что найдется такая константа $c > 0$ и такое число $n_0$, что $0 \le cg(n) \le f(n)$ для всех $n \ge n_0$.

Для любых двух функций свойства $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = \Omega(f(n))$ равносильны.

***Тета обозначение.*** Равенство $f(n) = \theta(g(n))$ означает, что найдутся такие $c_1$, $c_2 > 0$ и такое число $n_0$, что $0 \le c_1g(n) \le f(n) \le c_2g(n)$ для всех $n \ge n_0$.

Если $f(n) = \theta(g(n))$, то говорят что $g(n)$ является ***асимптотически точной оценкой*** для $f(n)$. Отношение $\theta$ симметрично, то есть если $f(n) = \theta(g(n))$, то $g(n) = \theta(f(n))$.

**Пример.** Докажем, что $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \theta(n^2)$. Следует указать такие положительные константы $c_1$, $c_2$ и число $n_0$, чтобы неравенство $c_1n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2n^2$ выполнялось для всех $n \ge n_0$. Разделим неравенство на $n^2$: $c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$. Для выполнения второго неравенства достаточно положить $c = \frac{1}{2}$, а в качестве $n_0$ можно выбрать любое натуральное число. Первое неравенство будет выполнено, если например взять $n_0 = 7$ и $c_1 = 1/114$.

**Пример.** Доказать, что $\max(f(n), g(n)) = \theta(f(n) + g(n))$. Для каждого натурального $n$ имеет место: $\max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n)$, а также $2\max(f(n), g(n)) \ge f(n) + g(n)$. Из последнего неравенства следует, что $\max(f(n), g(n)) \ge (f(n) + g(n)) / 2$. Таким образом

$$(f(n) + g(n)) / 2 \le \max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n) \text{ для всех } n \ge 1$$

Отсюда следует, что $\max(f(n), g(n)) = \theta(f(n) + g(n))$, где $n_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = 1$.

***о маленькое.*** Равенство $f(n) = o(g(n))$ означает, что для всякого положительного $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0$, что $0 \le f(n) \le \varepsilon g(n)$ для всех $n \ge n_0$. Из определения следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

**Пример.** $2n = o(n^2)$, но $2n^2 \ne o(n^2)$.

Можно провести такую параллель: отношения между функциями f и g подобны отношениям между числами $a$ и $b$:

- $f(n) = O(g(n))$ эквивалентно $a \le b$;
- $f(n) = o(g(n))$ эквивалентно $a < b$;

Эта параллель условна. Если для чисел всегда можно сказать выполняется ли $a \le b$ или $a \ge b$, то существуют функции, для которых не выполняется ни $f(n) = O(g(n))$, ни $g(n) = O(f(n))$. Например, для $f(n) = n$, $g(n) = n^{1+\sin(n)}$ (показатель степени $g(n)$ постоянно меняется от 0 до 2).

***Формула Стирлинга*** утверждает, что $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Следствия:

- $n! = o(n^n)$, $2^n = o(n!)$.
- $\lg(n!) = O(n\lg n)$, $n\lg n = O(\lg(n!))$

Справедлива также следующая оценка:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/12n}$$

**Асимптотика многочленов.** Пусть $f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_d n^d$ – многочлен степени $d$, причем $a_d > 0$. Тогда:

- $f(n) = O(n^k)$ при $k \ge d$;
- $f(n) = o(n^k)$ при $k > d$;

**Основная теорема о рекуррентных оценках.** Пусть $a \ge 1$ и $b > 1$ – константы, $f(n)$ – функция, $T(n)$ определено при неотрицательных $n$ формулой

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

где под $n/b$ понимается либо $\lfloor n/b \rfloor$, либо $\lceil n/b \rceil$. Тогда:

1. Если $f(n) = O\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $T(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$
2. Если $f(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$, то $T(n) = O\left(n^{\log_b a}\log_2 n\right)$
3. Если $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и если $af(n/b) \le cf(n)$ для некоторой константы $c < 1$ и достаточно больших $n$, то $T(n) = \theta\left(f(n)\right)$.

**Пример.** Рассмотрим соотношение $T(n) = 9T(n/3) + n$. Имеем: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \theta(n^2)$. Поскольку $f(n) = O\left(n^{\log_3 9-\varepsilon}\right)$ для $\varepsilon = 1$, то из первого утверждения теоремы следует что $T(n) = O\left(n^2\right)$.

**Пример.** Рассмотрим соотношение T($n$) = T(2$n$/3) + 1. Имеем: $a$ = 1, $b$ = 3/2, f($n$) = 1, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1}$ = θ(1). Поскольку f($n$) = $O\left(n^{\log_{3/2} 1}\right)$, то из второго утверждения теоремы следует что T($n$) = $O\left(\log_2 n\right)$.

**Пример.** Рассмотрим соотношение T($n$) = 3T($n$/4) + $n\log_2 n$. Имеем: $a$ = 3, $b$ = 4, f($n$) = $n\log_2 n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = \theta\left(n^{0.793}\right)$. Зазор ε ≈ 0.2 есть, остается проверить условие регулярности. Для достаточно большого $n$ имеем: $a$f($n$/$b$) = 3($n$/4) $\log_2(n/4) \le 3/4n\log_2 n$ = $c$f($n$) для $c$ = 3/4. По третьему утверждению теоремы T($n$) = θ($n\log_2 n$).