Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201. Домашнее задание №6

Автор: Сурова София, БПИ191

25 октября 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.91, №20
СВ $X \sim \mathbf{R}(-1,1)$. Сравнить $P(\{X < EX\})$ и $P(\{X > EX\})$. Найти $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\})$.

Решение
$X \sim \mathbf{R}(-1,1)$ - равномерное распределение на отрезке $[a,b] = [-1,1]$ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x+1}{2}, -1 \le x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \qquad EX = \frac{b+a}{2} = 0,\ DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

1) $P(\{X < EX\}) = P(\{X < 0\}) = P(\{X > 0\}) = P(\{X > EX\})$

2) $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = P(\{|X - 0| < \sqrt{1/3}\}) = P(\{-\sqrt{1/3} < X < \sqrt{1/3}\}) = F(\sqrt{1/3}) - F(-\sqrt{1/3}) =$
$= \dfrac{1+\sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} - \dfrac{11+\sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $P(\{X < EX\}) = P(\{X > EX\})$, $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

стр.91, №22
СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $P\{X < EX\}$ и $P\{X < DX\}$

Решение
$\mathbf{E}(\lambda)$ - экспоненциальное распределение, $\lambda > 0$
$EX = \dfrac{1}{\lambda},\ \ DX = \dfrac{1}{\lambda^2},\ \ F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$
$EX = DX = 1$, то есть $P\{X < EX\} = P\{X < DX\} = P\{X < 1\} = F(1) = 1 - e^{-x}$

Ответ: равны $1 - e^{-x}$

стр.93, №36
Время X безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Вероятность того, что станок не откажет за пять часов работы равна 0.60653. Найти EX, DX, $E(X^2)$

Решение
Пусть X - время безотказной работы станка, тогда $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$.
$P(\{X > 5\}) = 1 - P(\{X \leq 5\}) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-5\lambda}) = e^{-5\lambda} = 0.60653 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{ln0.60653}{5} = 0.1$
$EX = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0.1} = 10$
$DX = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{0.1^2} = 100$
$E(X^2) = DX + (EX)^2 = 100 + 10^2 = 200$

стр.93, №38
Найти p-квантиль распределения $\mathbf{R}(a, b)$

Решение
Квантилью уровня p $(0 < p < 1)$ называют Q_p такое, что $F(Q_p) = p$.
Примечание. В некоторых случаях, когда $F(x)$ имеет разрывы или не монотонна, $Q_p = min\{q : F(q) \geq p\}$

$\mathbf{R}(a, b)$ - равномерное распределение
$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$
$F(Q_p) = \dfrac{Q_p - a}{b - a} = p \Rightarrow Q_p = p(b - a) + a$

Ответ: $Q_p = p(b - a) + a$

стр.93, №46
Функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Найти $E[(X - 4)(5 - X)]$, $P\{X \leq EX\}$ и $D(3 - 2X)$

Решение
Если вы поняли, что $F(x)$ - функция распределения $\mathbf{E}(2)$, то вы огромные умнички!

Действительно, $X \sim \mathbf{E}(2)$, тогда
1) $E[(X - 4)(5 - X)] = E(5X - X^2 - 20 + 4X) = -E(X^2) + 9EX - 20$
$EX = \dfrac{1}{\lambda} = 0.5$
$E(X^2) = DX + (EX)^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} + 0.5^2 = 0.25 + 0.25 = 0.5$
$E[(X - 4)(5 - X)] = -E(X^2) + 9EX - 20 = -0.5 + 9 * 0.5 - 20 = -16$

2) $P\{X \leq EX\} = P\{X \leq 0.5\} = F(0.5) = 1 - e^{-1}$

3) $D(3 - 2X) = 4DX = 4 * 0.25 = 1$

Ответ: -16, $1 - e^{-1}$, 1

стр.93, №47
Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} cx, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

Найти константу c, EX, DX, $P\{0.5 < X < 2\}$. Построить график функции распределения $F(x)$. Найти квантиль уровня 1/9.

Решение
1) Плотность вероятности должна удовлетворять условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} cxdx + \int\limits_{1}^{\infty} 0dx = \frac{cx^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$
2) $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$
3) $DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$, однако мы воспользуемся формулой $DX = E(X^2) - (EX)^2$
$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x^3dx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$
$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}$

4) Для начала построим функцию распределения
$x < 0$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
$x \in [0,1]$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 2tdt = \frac{2t^2}{2}\Big|_0^x = x^2$
$x > 1$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} 2tdt + \int\limits_{1}^{\infty} 0dt = \frac{2t^2}{2}\Big|_0^1 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

5) $P\{0.5 < X < 2\} = F(2) - F(0.5) = 1 - 0.25 = 0.75$

6) $F(Q_{1/9}) = (Q_{1/9})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow Q_{1/9} = \frac{1}{3}$
Математически уравнению $(Q_{1/9})^2 = \frac{1}{9}$ удовлетворяет корень $Q_{1/9} = -\frac{1}{3}$, но $F(-\frac{1}{3}) = 0 \neq \frac{1}{9}$

Ответ: $c = 2$, $EX = \frac{2}{3}$, $DX = \frac{1}{18}$, $P\{0.5 < X < 2\} = 0.75$, $Q_{1/9} = \frac{1}{3}$

стр.94, №48
Заданы две СВ $X \sim R(0,1)$ и $Y \sim E(1)$. Сравнить вероятности того, что каждая из них не превышает по модулю 2.

Решение
$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, x \in [0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$ $\qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-x}, x \geq 0 \end{cases}$
$P(\{-2 \leq X \leq 2\}) = F_X(2) - F_X(-2) = 1 - 0 = 1$
$P(\{-2 \leq Y \leq 2\}) = F_Y(2) - F_Y(-2) = 1 - e^{-2} - 0 = 1 - e^{-2} \approx 0.8647$
$\Rightarrow P(\{-2 \leq X \leq 2\}) > P(\{-2 \leq Y \leq 2\})$

Ответ: $P(\{-2 \leq X \leq 2\}) = 1 > 1 - e^{-2} = P(\{-2 \leq Y \leq 2\})$

стр.94, №52
СВ $X \sim R(-1, 8)$. Найти точку, в которой функция распределения равна 1/3.

Решение

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \dfrac{x+1}{9}, x \in [-1, 8] \\ 1, x > 8 \end{cases}$$

Точка, в которой функция распределения равна 1/3 - квантиль уровня 1/3, то есть

$$F(Q_{1/3}) = \frac{Q_{1/3}+1}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow Q_{1/3} = 2$$

Ответ: $Q_{1/3} = 2$

стр.94, №54
Найти p-квантиль экспоненциального закона распределения с параметром λ.

Решение
Напомню, что квантилью уровня p $(0 < p < 1)$ называют Q_p такое, что $F(Q_p) = p$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(Q_p) = 1 - e^{-\lambda Q_p} = p \Rightarrow e^{-\lambda Q_p} = 1 - p \Rightarrow -\lambda Q_p = ln(1-p) \Rightarrow Q_p = -\frac{ln(1-p)}{\lambda}$$

Ответ: $Q_p = -\dfrac{ln(1-p)}{\lambda}$