

Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201.

Домашнее задание №8

Автор: Сурова София, БПИ191

29 октября 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.93, №35

Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется их диаметр X , удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением $m = 10$ мм. Каково среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью 0.99 он заключен в интервале (9.7, 10.3)?

Решение

Воспользуемся следующей теоремой: пусть ξ - нормальная случайная величина с параметрами m, σ^2 , тогда

$$P\{a < \xi < b\} = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$P\{9.7 < X < 10.3\} = \Phi_0\left(\frac{10.3-10}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{9.7-10}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{0.3}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{0.3}{\sigma}\right) = 0.495 \Rightarrow$$

Смотрим в таблицу и находим значение 0.495

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	,0039	,0079	,0119	,0159	,0199	,0239	,0279	,0318	,0358
0,1	,0398	,0438	,0477	,0517	,0556	,0596	,0635	,0674	,0714	,0753
0,2	,0792	,0831	,0870	,0909	,0948	,0987	,1025	,1064	,1102	,1140
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1330	,1368	,1405	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1627	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1843	,1879
0,5	,1914	,1949	,1984	,2019	,2054	,2088	,2122	,2156	,2190	,2224
0,6	,2257	,2290	,2323	,2356	,2389	,2421	,2453	,2485	,2517	,2549
0,7	,2580	,2611	,2642	,2673	,2703	,2733	,2763	,2793	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2938	,2967	,2995	,3023	,3051	,3078	,3105	,3132
0,9	,3159	,3185	,3212	,3228	,3263	,3289	,3314	,3339	,3364	,3389
1,0	,3413	,3437	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3576	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3707	,3728	,3749	,3769	,3790	,3810	,3829
1,2	,3849	,3868	,3887	,3906	,3925	,3943	,3961	,3979	,3997	,4014
1,3	,4032	,4049	,4065	,4082	,4098	,4114	,4130	,4146	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4250	,4264	,4278	,4292	,4305	,4318
1,5	,4331	,4344	,4357	,4369	,4382	,4394	,4406	,4417	,4429	,4440
1,6	,4452	,4463	,4473	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4544
1,7	,4554	,4563	,4572	,4581	,4590	,4599	,4608	,4616	,4624	,4632
1,8	,4640	,4648	,4656	,4663	,4671	,4678	,4685	,4692	,4699	,4706
1,9	,4712	,4719	,4725	,4732	,4738	,4744	,4750	,4755	,4761	,4767
2,0	,4772	,4777	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4807	,4812	,4816
2,1	,4821	,4825	,4830	,4834	,4838	,4842	,4846	,4850	,4853	,4857
2,2	,4861	,4864	,4867	,4871	,4874	,4877	,4880	,4884	,4887	,4889
2,3	,4892	,4895	,4898	,4901	,4903	,4906	,4908	,4911	,4913	,4915
2,4	,4918	,4920	,4922	,4924	,4926	,4928	,4930	,4932	,4934	,4936
2,5	,4937	,4939	,4941	,4943	,4944	,4946	,4947	,4949	,4950	,4952
2,6	,4953	,4954	,4956	,4957	,4958	,4959	,4960	,4962	,4963	,4964
2,7	,4965	,4966	,4967	,4968	,4969	,4970	,4971	,4972	,4972	,4973
2,8	,4974	,4975	,4976	,4976	,4977	,4978	,4978	,4979	,4980	,4980
2,9	,4981	,4981	,4982	,4982	,4983	,4984	,4984	,4985	,4985	,4986
3,0	,49865									
3,5	,499767									
4,0	,4999683									
4,5	,4999966									
5,0	,49999971									

$$\frac{0.3}{\sigma} = 2.58 \Rightarrow \sigma = \frac{0.3}{2.58} \approx 0.1163$$

Ответ: 0.1163

стр.93, №37

Случайная величина X имеет гауссовское распределение вероятностей со средним значением 25. Вычислить вероятность попадания этой СВ в интервал $(35, 40)$, если она попадает в интервал $(20, 30)$ с вероятностью 0.2

Решение

$$1) P\{20 < X < 30\} = \Phi_0\left(\frac{30-25}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{20-25}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow \Phi_0\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0.1 \Rightarrow$$

$$\text{по таблице выше } \frac{5}{\sigma} = 0.25 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{0.25} = 20$$

$$2) P\{35 < X < 40\} = \Phi_0\left(\frac{40-25}{20}\right) - \Phi_0\left(\frac{35-25}{20}\right) = \Phi_0\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2733 - 0.1914 = 0.0819$$

Ответ: 0.0819

стр.93, №43

СВ $X \sim N(0, 1)$. Найти EX^3

Решение

$$EX^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0, \text{ т.к. функция нечётная и интегрируется в симметричных пределах}$$

Ответ: 0

стр.93, №44

СВ $X \sim N(2, 1)$. Сравнить $P\{X < EX\}$ и $P\{X > DX\}$

Решение

$$P\{X < EX\} = P\{X < 2\} = \Phi\left(\frac{2-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-2}{1}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$P\{X > DX\} = P\{X > 1^2\} = \Phi\left(\frac{+\infty-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

Ответ: $P\{X < EX\} < P\{X > DX\}$

стр.91, №24

СВ $X \sim N(0, 1)$, а $Y \sim R(0, 1)$. Сравнить $P\{0 < X < 1\}$ и $P\{0 < Y < 1\}$

Решение

$$P\{0 < X < 1\} = \Phi_0\left(\frac{1-0}{1}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-0}{1}\right) = 0.3413 - 0 = 0.3413$$

$$P\{0 < Y < 1\} = F(1) - F(0) = \frac{1-0}{1-0} - \frac{0-0}{1-0} = 1 - 0 = 1$$

Ответ: $P\{0 < X < 1\} < P\{0 < Y < 1\}$