Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201. Домашнее задание №2

Автор: Сурова София, БПИ191

13 сентября 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.44, №19
Игральная кость подброшена дважды. Зависимы ли случайные события $A = \{$число очков при первом бросании равно 5$\}$ и $B = \{$сумма очков при двух бросаниях равна 9$\}$? Ответ обосновать.

Решение
Пусть $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, тогда A и B независимые $\Leftrightarrow P(AB) = P(A) * P(B)$

$P(A) = \dfrac{1}{6} * \dfrac{6}{6} = \dfrac{1}{6}$
$P(B) = P(\{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\}) = \dfrac{4}{6*6} = \dfrac{1}{9}$
$P(AB) = P(\{(5,4)\}) = \dfrac{1}{6*6} = \dfrac{1}{36} \neq \dfrac{1}{54} = \dfrac{1}{6} * \dfrac{1}{9} = P(A) * P(B) \Rightarrow A$ и B зависимы

Ответ: A и B зависимы

стр.44, №22
Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0.01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0.95?

Решение
Обозначим за событие $A = \{$хотя бы один найдет работу$\}$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \leq 0.05$
$P(\overline{A}) = (1 - 0.01)^n = 0.99^n \leq 0.05 \Rightarrow n \geq 298$

Ответ: не менее 298

стр.45, №27
Отдел технического контроля предприятия бракует каждую партию из 100 деталей, если из 5 деталей, наугад выбранных из партии, хотя бы одна окажется бракованной. Партия содержит 5% брака. Найти вероятность для одной партии деталей быть забракованной. (Решить задачу двумя способами: используя формулу умножения вероятностей и используя только классическую формулу вычисления вероятностей.)

Решение
1) Классическое определение вероятности:
$P(\{$партия забракуется$\}) = P(\{$хотя бы одна из пяти выбранных деталей окажется бракованной$\}) =$
$= 1 - P(\{$все детела окажутся нормальными$\}) = 1 - \dfrac{C_{95}^5}{C^5 100} \approx 0.23041$
2) Формула умножения вероятностей:
$P(\{$партия забракуется$\}) = P(\{$хотя бы одна из пяти выбранных деталей окажется бракованной$\}) =$
$= 1 - P(\{$все детела окажутся нормальными$\}) = 1 - \dfrac{95}{100} * \dfrac{94}{99} * \dfrac{93}{98} * \dfrac{92}{97} * \dfrac{91}{96} \approx 0.23041$

стр.45, №28
Пусть $P(A) = \frac{1}{2}$. Найдется ли такое событие , чтобы $P(AB) > \frac{1}{2}$?
Ответ обосновать.

Решение
$P(AB) = P(A) * P(B|A) = \frac{P(B|A)}{2}$
Допустим, что $P(AB) > \frac{1}{2}$, тогда $P(B|A) > 1$, что противоречит определению вероятности, так значение вероятности принимает значения $[0, 1]$.

Ответ: нет

стр.45, №37
Из колоды карт (36 карт) подряд вытаскиваются две карты. Рассматриваются события: $A =$ первая карта имеет пиковую масть, $B =$ обе карты красного цвета. Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

Решение
Понятно, что события несовместны и вероятность пересечения событий равна 0, так как пики чёрные, но необходимо показать, что вероятность самих событий не равна 0.
$P(A) = \frac{C_9^1 * C_{35}^1}{C_{36}^2} \neq 0$
$P(B) = \frac{C_{18}^1 C_{17}^1}{C_{36}^2} \neq 0$
$P(AB) = \frac{0}{C_{36}^2} = 0 \neq P(A) * P(B) \Rightarrow A$ и B зависимы, несовместны

Ответ: A и B зависимы

стр.46, №41
Три независимых эксперта равной квалификации делают правильный прогноз стоимости акции некоторой компании с равной вероятностью p. По статистике вероятность того, что хотя бы один из экспертов ошибается, равна 0.271. Найти вероятность p.

Решение
$P(\{\text{никто из экспертов не ошибается}\}) = p^3$
$P(\{\text{никто из экспертов не ошибается}\}) = 1 - P(\{\text{хотя бы один из экспертов ошибается}\}) = 1 - 0.271 =$
$= 0.729$
$p^3 = 0.729 \Rightarrow p = 0.9$

Ответ: 0.9

стр.47, №46
По данным переписи населения Англии и Уэльса (1891 г.) установлено, что темноглазые отцы и темноглазые сыновья (событие AB) составили 5% обследованных пар, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $A\overline{B}$) — 7.9% пар, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья (событие $\overline{A}B$) — 8.9% пар, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $\overline{AB}$) — 78.2% пар.
Найти связь между цветом глаз отца и сыпа, то есть найти $P(B|A), P(B|\overline{A}), P(\overline{B}|A), P(\overline{B}|\overline{A})$.

Решение
$P(AB) = P(A)P(B|A)$, $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = P(A)(1-P(B|A)) \Rightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A\overline{B})} = \dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)} = \dfrac{P(B|A)}{1-P(B|A)}$
$P(AB)(1-P(B|A)) = P(A\overline{B})P(B|A) \Rightarrow P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})} = \dfrac{0.05}{0.05+0.079} \approx 0.3876$
$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$

$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A})$, $P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = P(\overline{A})(1-P(B|\overline{A})) \Rightarrow \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{AB})} = \dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})} = \dfrac{P(B|\overline{A})}{1-P(B|\overline{A})}$
$P(\overline{A}B)(1-P(B|\overline{A})) = P(\overline{AB})P(B|\overline{A}) \Rightarrow P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{AB})} = \dfrac{0.089}{0.089+0.782} \approx 0.1022$
$P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - P(B|\overline{A}) = 1 - 0.1022 = 0.8978$

Ответ: $P(B|A) = 0.3876$, $P(\overline{B}|A) = 0.6124$, $P(B|\overline{A}) = 0.1022$, $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.8978$

стр.52, №82
В уроне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Из нее три раза наугад вынимают по одному шару. Требуется найти вероятность того, что все три вынутых шара окажутся белыми (событие A), при выполнении двух разных условий:
а) извлеченные из урны шары обратно не возвращаются;
б) после каждого извлечения шар возвращается обратно.

Решение
а) $P(A) = \dfrac{4}{10} * \dfrac{3}{9} * \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{30} \approx 0.033$ б) $P(A) = \dfrac{4}{10} * \dfrac{4}{10} * \dfrac{4}{10} = \dfrac{8}{125} = 0.064$
Ответ: а) $\dfrac{1}{30}$, б) $\dfrac{8}{125}$

стр.52, №83
Три радиостанции, независимо друг от друга, передают самолету один и тот же сигнал. Вероятности того, что самолетом будут приняты эти сигналы, соответственно равны: 0.9, 0.8, 0.75.
Найти вероятность того, что самолет примет посылаемый ему сигнал.

Решение
$P(\{\text{самолет примет посылаемый ему сигнал}\}) = 1 - P(\{\text{самолет не примет ни один посылаемый ему сигнал}\}) =$
$= 1 - (1-0.9) * (1-0.8) * (1-0.75) = 1 - 0.005 = 0.995$

Ответ: 0.995