Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201. Домашнее задание №5

Автор: Сурова София, БПИ191

04 октября 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2007.

стр.90, №4
Закон распределения случайной величины X выглядит следующим образом (см. таблицу). Построить ряды распределения и найти математические ожидания следующих случайных величин:
а) $Y = 10X - 1$, б) $Y = -X^2$, в) $Y = 2^X$

X	-0.5	0	0.5	1	1.5
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Решение
Что такое ряд распределения? Это таблица для дискретных случайных величин, в которой в первой строчке находятся значения, которые может принимать случайная величина, а во второй строчке - вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение.

а) Как получить ряд распределения для случайной величины $Y = 10X - 1$? Достаточно подставить значения X и посмотреть, какие значения Y и с какой вероятностью получаются. Например, подставим $X = -0.5$ и получим $Y = -5 - 1 = -6$. Так как $X = -0.5$ с вероятностью $p = 0.1$, то и $Y = -6$ с вероятностью $p = 0.1$. Аналогично, подставим $X = 0$ и получим, что $Y = 0 - 1 = -1$ с вероятностью $p = 0.4$. Продолжая данные рассуждения для остальных значений получим, что

Y=10X-1	-6	-1	4	9	14
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = 10X - 1$
$EY = \sum y_i p_i = -6 * 0.1 - 1 * 0.4 + 4 * 0.1 + 9 * 0.3 + 14 * 0.1 = 3.5$

Самая частая и грубая ошибка - подстановка значений вероятности в выражение!
Чтобы проверить себя, то обратите внимание, что все вероятности находятся в отрезке [0, 1], и в сумме дают 1.

б) В пункте а) могло показаться, что достаточно просто изменить первую строку со значениями, а вероятности переписать, однако если это проделать с $Y = -X^2$, то получится следующий ряд распределения:

Y=-X^2	-0.25	0	-0.25	-1	-2.25
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Заметим, что значение $Y = -0.25$ мы получили с помощью $X = -0.5$ с вероятностью $p = 0.1$ и $X = 0.5$ с вероятностью $p = 0.1$, а значит необходимо эти вероятности сложить и получим, что

Y=-X^2	-0.25	0	-1	-2.25
p	0.2	0.4	0.3	0.1

Упорядочим по возрастанию значений, принимаемых случайной величиной

Y=-X^2	-2.25	-1	-0.25	0
p	0.1	0.3	0.2	0.4

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = -X^2$
$EY = \sum y_i p_i = -2.25 * 0.1 - 1 * 0.3 - 0.25 * 0.2 + 0 * 0.4 = -0.575$

в)

Y=2^X	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$
p	0.1	0.4	0.1	0.3	0.1

Математическое ожидание дискретной случайной величины $Y = -X^2$
$EY = \sum y_i p_i = (1/\sqrt{2}) * 0.1 + 1 * 0.4 + \sqrt{2} * 0.1 + 2 * 0.3 + 2\sqrt{2} * 0.1 = \dfrac{7 + 10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \approx 1.495$

стр.90, №9
СВ X принимает только два различных значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Вычислить $F_X(1/2)$ и $F_X(-1/2)$.

Решение

X	-1	1
p	0.5	0.5

$F_X(0.5) = P(\{X \leq 0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше 0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

$F_X(-0.5) = P(\{X \leq -0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше -0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

Ответ: 0.5, 0.5

стр.90, №9
СВ X принимает только два различных значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Вычислить $F_X(1/2)$ и $F_X(-1/2)$.

Решение

X	-1	1
p	0.5	0.5

$F_X(0.5) = P(\{X \leq 0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше 0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

$F_X(-0.5) = P(\{X \leq -0.5\}) = 0.5$, так как случайная величина X принимает только одно значение меньше -0.5 - значение $X = -1$ с вероятностью 0.5

Ответ: 0.5, 0.5

стр.91, №19
Функции $G(x)$ и $H(x)$ являются функциями распределений некоторых СВ. Является ли функция $F(x) = G(x) + H(x)$ функцией распределения некоторой СВ?

Решение
Одно из свойств функции распределения: $G(+\inf) = \lim\limits_{x \to +\inf} G(x) = 1$. Аналогично для $H(x)$.
Тогда рассмотрим, чему равна $F(+\inf)$.
$F(+\inf) = \lim\limits_{x \to +\inf} F(x) = \lim\limits_{x \to +\inf} G(x) + H(x) = \lim\limits_{x \to +\inf} G(x) + \lim\limits_{x \to +\inf} H(x) = 1 + 1 = 2$, то есть $F(x) = G(x) + H(x)$ не является функцией распределния.

Ответ: не является

стр.91, №20
СВ $X \sim \mathbf{R}(-1,1)$. Сравнить $P(\{X < EX\})$ и $P(\{X > EX\})$. Найти $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\})$.

Решение
$X \sim \mathbf{R}(-1,1)$ - равномерное распределение на отрезке $[a,b] = [-1,1]$ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x+1}{2}, -1 \le x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \qquad EX = \frac{b+a}{2} = 0,\ DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

1) $P(\{X < EX\}) = P(\{X < 0\}) = P(\{X > 0\}) = P(\{X > EX\})$

2) $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = P(\{|X - 0| < \sqrt{1/3}\}) = P(\{-\sqrt{1/3} < X < \sqrt{1/3}\}) = F(\sqrt{1/3}) - F(-\sqrt{1/3}) =$
$= \dfrac{1 + \sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} - \dfrac{11 + \sqrt{1/3}}{2\sqrt{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $P(\{X < EX\}) = P(\{X > EX\})$, $P(\{|X - EX| < \sqrt{DX}\}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

стр.92, №28
У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как 0.5, 0.4, 0.4, 0.3 и 0.25. Покупатели принимают решение о покупке товара, независимо друг от друга. Агент обращается к ним в указанном порядке пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Составить ряд распределения СВ X — числа покупателей, к которым обратится агент. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение
Пусть X - количество покупателей, к которым обратится агент, пока кто-нибудь не согласится.
$P(\{X = 1\}) = 0.5$, то есть первый покупатель сразу же соглашается, и агент идёт домой
$P(\{X = 2\}) = (1 - 0.5) * 0.4 = 0.2$, то есть первый покупатель не согласился, агент идёт к следующему, и второй покупатель соглашается
$P(\{X = 3\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * 0.4 = 0.12$, то есть первый и второй не согласились, а третий соглашается
$P(\{X = 4\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * (1 - 0.4) * 0.3 = 0.054$, то есть первый, второй и третий не согласились, а четвёртый соглашается
$P(\{X = 5\}) = (1 - 0.5) * (1 - 0.4) * (1 - 0.4) * (1 - 0.3) = 0.126$, то есть первый, второй, третий и четвёртый не согласились, а согласие пятого нас уже не интересует, мы его всё равно посетим и на нём остановимся, так как покупателей всего 5.

Ряд распределения - это всего таблица, в которой в первой строчке находятся значения, которые может принимать случайная величина, а во второй строчке - вероятности того, что случайная величина примет соответствующее значение. Тогда наш ряд распределения выглядит следующим образом:

X	1	2	3	4	5
p	0.5	0.2	0.12	0.054	0.126

Проверим, что мы всё правильно посчитали: все вероятности в ячейках должны быть не больше 1, а сумма этих вероятностей равна строго 1.
$0.5 + 0.2 + 0.12 + 0.054 + 0.126 = 1$ - верно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X
$EX = \sum x_i p_i = 1 * 0.5 + 2 * 0.2 + 3 * 0.12 + 4 * 0.054 + 5 * 0.126 = 2.106$

Дисперсию удобно посчитать по формуле $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$:
$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 1 * 0.5 + 4 * 0.2 + 9 * 0.12 + 16 * 0.054 + 25 * 0.126 = 6.394$
Самая главная ошибка здесь - возведение в степень вероятностей вместе с значениями СВ!

$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 6.394 - 2.106^2 = 1.958764 \approx 1.9588$

Ответ: ряд распределения построен, $EX = 2.106$, $DX = 1.9588$

стр.92, №32
Лотерея заключается в розыгрыше трех номеров из шести. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Выигрыш при угадывании одного номера из трех составляет 20 рублей, двух номеров из трех — 100 рублей, всех трех номеров — 500 рублей. Найти средний выигрыш при покупке одного билета лотереи. Построить график функции распределения размера выигрыша.

Решение
Пусть X - размер выигрыша.
$P(\{X=0\}) = \dfrac{C_3^0 C_3^3}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$, чтобы не угадать ни один номер, нужно выбрать 0 выигрышных и 3 невыигрышных номера
$P(\{X=20\}) = \dfrac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$, чтобы угадать один номер, нужно выбрать 1 выигрышный и 2 невыигрышных номера
$P(\{X=100\}) = \dfrac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \dfrac{9}{20}$, чтобы угадать два номера, нужно выбрать 2 выигрышных и 1 невыигрышный номер
$P(\{X=500\}) = \dfrac{C_3^3 C_3^0}{C_6^3} = \dfrac{1}{20}$, чтобы угадать все три номера, нужно выбрать 3 выигрышных и 0 невыигрышных номеров

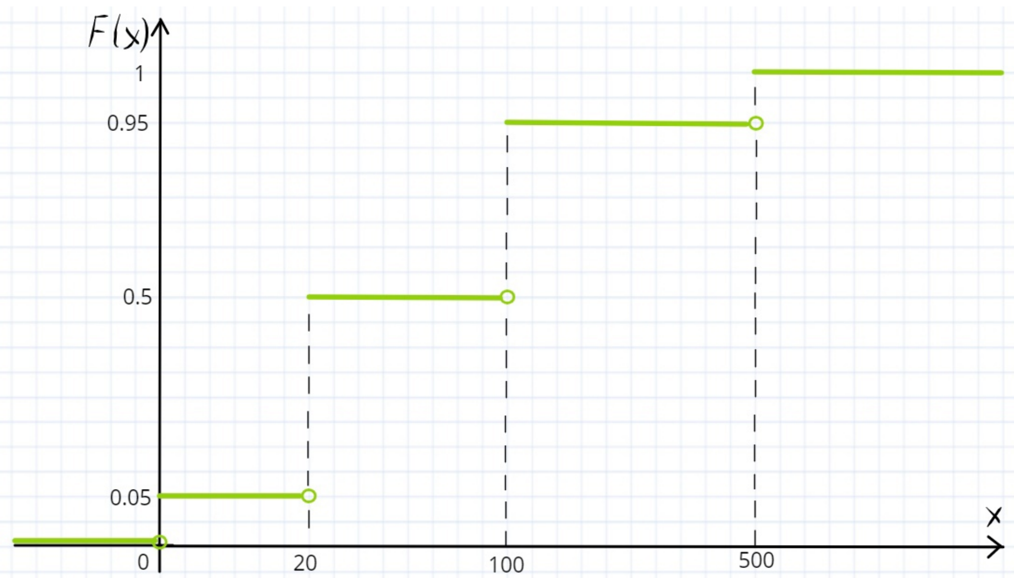
Чтобы было нагляднее, построим ряд распределения, благо мы уже научились это делать

X	0	20	100	500
p	0.05	0.45	0.45	0.05

Проверим, что мы всё правильно посчитали: все вероятности в ячейках должны быть не больше 1, а сумма этих вероятностей равна строго 1.
$0.05 + 0.45 + 0.45 + 0.05 = 1$ - верно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X
$EX = \sum x_i p_i = 0 * 0.05 + 20 * 0.45 + 100 * 0.45 + 500 * 0.05 = 79$
То есть в среднем мы при покупке одного билета лотереи выиграем 79 рублей (но стоит помнить, что и среднеквадратическое отклонение, то есть корень из дисперсии, равно 104.6 рублей)

Функция распределения определяется следующим образом: $F(x) = P(\{X \le x\})$. Её график в случае дискретной СВ выглядит как ступеньки, которые по мере движения вправо всё выше и в конце концов выходят на плато с единицей.



Почему мы выкалываем значения именно справа?
Рассмотрим $F(20) = P(\{X \le 20\}) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 20\}) = 0.05 + 0.45 = 0.5$, то есть значение 20 уже относится к значению 0.5, а не 0.05, это важно.

Ответ: график функции распределения построен, в среднем выигрыш с одного билета $EX = 79$

стр.94, №53
СВ X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 1/x, x \geq 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$$

Найти a, для которого $P\{X > a\} = 1/3$

Решение
$P(\{X > a\}) = 1 - P(\{X \leq a\}) = 1 - F(a) = 1/3 \Rightarrow F(a) = 2/3$
$F(a) = 2/3 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ 1 - 1/a = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ 1/a = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \end{cases}$

Ответ: $a = 3$

стр.90, №11
СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1, 0.5)$. Сравнить $(EX)^2$ и DX.

Решение
$\mathbf{Bi}(n, p)$ - биномиальное распределение, которому соответствуют случайные величины, равные количеству успехов в n испытаниях с вероятностью успеха p.
$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $EX = np$, $DX = np(1-p)$

Тогда $(EX)^2 = (np)^2 = (1 * 0.5)^2 = 0.25$, $DX = np(1-p) = 1 * 0.5 * 0.5 = 0.25$

Ответ: $(EX)^2 = DX = 0.25$

стр.90, №12
СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4, 0.1)$. Найти $F_X(-10)$.

Решение
Для наглядности приведу ряд распределения биномиальной случайной величины

Bi(n,p)	0	1	...	k	...	n
P	(1-p)^n	np(1-p)$^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	p^n

Соответственно, $F_X(-10) = P(\{X \leq -10\}) = 0$, так как наша СВ не принимает значения меньше нуля, а если быть точнее, то вероятность того, что СВ равна отрицательному значению, равна 0.

Ответ: 0

стр.90, №14
СВ $X \sim \mathbf{Bi}(3, 0.2)$. Вычислить $P\{X > 0\}$.

Решение
Для наглядности приведу ряд распределения биномиальной случайной величины

Bi(n,p)	0	1	...	k	...	n
P	(1-p)^n	np(1-p)$^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	p^n

Соответственно, $P(\{X > 0\}) = 1 - P(\{X \leq 0\}) = 1 - P(\{X = 0\}) = 1 - (1-p)^n = 1 - (1 - 0.2)^3 = 0.488$

Ответ: 0.488