Теория вероятностей и математическая статистика. Теория для подготовки к КР

Автор: Минец Максим

20 ноября 2021

Что важно помнить
Вероятность от 0 до 1
Дисперсия ≥ 0
$0 <$ уровень кванитиля < 1
Мин значение $<$ мат ожидание дискретной $<$ макс значение
Среднее квадратическое ≥ 0
Функция распределения определена на всей числовой прямой, принимает значения от 0 до 1, а еще она монотонно неубывает.
Функция плотности всегда неотрицательна, а интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ всегда равен 1

Число сочетаний и размещений. Формулы вероятности
$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ - порядок важен

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - порядок НЕ важен

$P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$ и B зависимы
$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$ и B независимы

Для несовместных событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $P(AB) = 0$

Для независимых событий: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Условная вероятность: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Схема Бернулли: $P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где n - число испытаний, k - число успехов, p - вероятность успеха

Формула Байеса: $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$

Формула полной вероятности: $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$

H_i - гипотезы, полная группа событий (попарно несовместны и $\sum H_i = \Omega$
$P(H_i)$ - априорная вероятность, $P(H_i|A)$ - апостериорная вероятность

Функция распределения
$F(x) = P\{X \leq x\}$
Свойства:
1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
2. $P\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Плотность распределения
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$
Свойства:
1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
2. $P\{x_1 < X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Математическое ожидание и дисперсия
$EX = \sum x_i P\{X = x_i\}$ - для дискретных
$EX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ - для непрерывных

$DX = E(X - EX)^2$
$DX = \sum (x_i - EX)^2 P\{X = x_i\}$ - для дискретных
$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$ - для непрерывных

$DX = E(X^2) - (EX)^2$
$E(X^2) = \sum x_i^2 P\{X = x_i\}$ - для дискретных
$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ - для непрерывных

c - константа
$E(c) = c$
$E(c \cdot \xi) = c \cdot E(\xi)$
$E(\xi + c) = E(\xi) + c$
$E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
$D(c) = 0$
$D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D(\xi)$
$D(\xi + c) = D(\xi)$
$D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2cov(\xi_1, \xi_2)$

$\sigma = \sqrt{DX}$ - среднеквадратическое отклонение

Квантиль
$Q_a -$ квантиль уровня a или a-квантиль
$Q_a = min(\{x : F(x) \geq a\})$
$F(Q_a) = a$
$\int\limits_{-\infty}^{Q_a} f(x) dx = a$
Квантиль уровня $\frac{1}{2}$ называется медианой

Биномиальное распределение

$$\xi \sim Bi(n, p) \text{ - число успехов в испытаниях}$$

$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$
$E(\xi) = n \cdot p$
$D(\xi) = n \cdot p \cdot q$

Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda)$$

$\lambda = n \cdot p$, $n \to \infty$, $p \to 0$
$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
$E(\xi) = D(\xi) = \lambda$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p) \text{ - число испытаний до первого успеха}$$

$P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p = p \cdot (1 - p)^{k-1}$ (на k-ом эксперименте - удача)
$E(\xi) = \frac{1}{p}$
$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$

Равномерное распределение

$$\xi \sim R(a,b)$$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - функция плотности

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > b \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a;b] \end{cases}$ - функция распределения

$E(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$

$D(\xi) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Экспоненциальное распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \quad \lambda > 0$$

$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функция плотности

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функция распределения

$E(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}$

$D(\xi) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Гауссовское распределение

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$m-$ среднее отклонение, $\sigma-$ среднеквадратическое (стандартное) отклонение

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\dfrac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ - функция плотности

$F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$ - функция распределения (она же функция Лапласа)

$E(\xi) = m$
$D(\xi) = \sigma^2$
Интеграл в гауссовской плотности не находится в элементарных функциях

Нормировка: $\dfrac{x-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(\alpha < x < \beta) = \Phi_0\left(\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$

$P(|x| < \alpha) = 2 \cdot \Phi_0\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)$

$$P(x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) = \begin{cases} 0.5 + \Phi_0\left(\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right), & \beta - m > 0 \\ 0.5 - \Phi_0\left(\left|\dfrac{\beta-m}{\sigma}\right|\right), & \beta - m < 0 \end{cases}$$

Разбор нулевика

Задача №1.
У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, каждое из которых он посещает с равной вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюёт с вероятностью 0.8; на втором месте – с вероятностью 0.7; на третьем – с вероятностью 0.6. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

Решение
Введем события A и H_i $(i = \overline{1,3})$
$A = \{$при трех попытках рыбак поймал одну рыбу$\}$
$H_i = \{$рыбак был в i-ом месте$\}$
Из условия мы знаем, что:
$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$ ("посещает с равной вероятностью")

Посчитаем вероятности $P(A|H_i)$, которые вычисляются по формуле Бернулли, если учесть то, что у рыбака было три попытки и поймал рыбу он только один раз:
$P(A|H_1) = C_3^1 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8)^2 = 0.096$
$P(A|H_2) = C_3^1 \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.7)^2 = 0.189$
$P(A|H_3) = C_3^1 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.6)^2 = 0.288$

Воспользуемся формулой полной вероятности, чтобы вычислить $P(A)$:
$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot 0.096 + \frac{1}{3} \cdot 0.189 + \frac{1}{3} \cdot 0.288 =$
$= 0.032 + 0.063 + 0.096 = 0.191$

Можем вычислить вероятность того, что рыбак был на первом месте и, что из трех попыток поймать рыбу, успешной была лишь одна:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.032}{0.191} = \frac{32}{191} = 0.1675$$

Ответ: 0.1675

Задача №2.
При одном цикле обзора радиолокационной станции объект обнаруживается с вероятностью 0.85. Обнаружение объекта в каждом цикле достигается независимо от других циклов. Какое минимальное число циклов надо осуществить, чтобы вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0.999?

Решение
Данная задача описывает схему Бернулли. Вероятность успеха каждого события по условию равна 0.85.
Нам необходимо найти минимальное количество циклов n, необходимых для выполнения условия. Чтобы посчитать вероятность обнаружения объекта хотя бы в одном цикле, резоннее будет вычислить вероятность того, что объект не был обнаружен ни в одном из циклов, и затем вычесть эту вероятность из единицы.
Вероятность необнаружения обозначим $\overline{A}$. Тогда:
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (C_n^0 \cdot 0.85^0 \cdot (1 - 0.85)^n) = 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0.15^n) = 1 - 0.15^n$
Из условия мы получаем следующее неравенство (вероятность обнаружения объекта была не меньше, чем 0.999):
$1 - 0.15^n \geq 0.999$
$0.15^n \leq 0.001$
$n \geq 3.641 \Rightarrow$ нужно осуществить минимум 4 цикла

Ответ: 4 цикла

Задача №3.
Аппаратура, состоящая из 1000 элементов, функционирует нормально до тех пор, пока число отказавших элементов не превысит двух. Каждый элемент независимо от других элементов в течение времени T работает безотказно с вероятностью 0.998. Какова вероятность того, что система в целом проработает время T? Пусть случайная величина ξ – количество элементов, отказавших в течении времени T. Найдите математическое ожидание и 0.6-квантиль случайной величины ξ.

Решение
$\xi = \{$количество элементов, отказавших в течении времени T$\}$
Задача описывает биномиальное распределение с $n = 1000$ и $p = 0.002$, так как нам нужна вероятность отказа одного элемента в течение какого-то времени T (то есть $1 - 0.998$). Тогда имеем:
$\xi \sim Bi(1000, 0.002)$
Так как распредление описывается большим количеством деталей и маленькой вероятностью, мы можем воспользоваться аппроксимацией для биномиального распределения:
$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0.002 = 2 \Rightarrow \xi \sim \Pi(2)$
Чтобы система работала безотказно необходимо, чтобы сломалось не более двух деталей (то есть 0, 1 или 2). Тогда:
$P = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \dfrac{2^0 \cdot e^{-2}}{1} + \dfrac{2^1 \cdot e^{-2}}{1} + \dfrac{2^2 \cdot e^{-2}}{2} = \dfrac{5}{e^2}$
Чтобы найти математическое ожидание воспульзуемся известной нам формулой для распределения Пуассона:
$E(\xi) = \lambda = 2$
0.6-квантиль - это такое число, для которого выполняется условие, что $P(\xi \leq Z_{0.6}) = 0.6$
Так как в нашем случае мы имеем дискретное распределение, то нам нужно пройтись по всем $F(k)$, где k будет начинаться с нуля. Когда $F(k)$ превзойдет 0.6, то это и будет 0.6-квантилем:
$P(\xi = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!}$

$P(\xi = 0) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} = 0.135$
$F(0) = 0.135$

$P(\xi = 1) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27$
$F(1) = F(0) + 0.27 = 0.135 + 0.27 = 0.405$

$P(\xi = 2) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 2 \cdot e^{-2} = 0.27$
$F(2) = F(1) + 0.27 = 0.405 + 0.27 = 0.675 \Rightarrow$ мы превзошли 0.6, а значит $Z_{0.6} = 2$

Ответ: вероятность $= 5e^{-2}$; $Z_{0.6} = 2$

Задача №4.
Случайная величина ξ имеет плотность распределения
$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{если } |x| \le 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$
Найти константу c, функцию распределения случайной величины ξ, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = -5\xi + 4$, вычислить $P(|\xi - 0.5| \le 0.25)$.

Решение
Нам известно, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Тогда мы можем найти константу c:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{1} c(1-x^2)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0dx = c\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx = c\left(\int\limits_{-1}^{1} 1dx - \int\limits_{-1}^{1} x^2dx\right) =$$
$$= c\left(x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = c\left((1-(-1)) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = c\left(2 - \frac{2}{3}\right) = c \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$
Из определения функции плотности мы знаем, что $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Тогда функция распределения будет иметь следующий вид:
$$F(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0, & \text{если } x < -1 \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \int\limits_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \ldots = -0.25x^3 + 0.75x + 0.5, & \text{если } |x| \le 1 \\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$
Теперь вычислим математическое ожидание и дисперсию:
$$E(\eta) = E(-5\xi + 4) = E(-5\xi) + E(4) = -5E(\xi) + 4 = -5 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx + 4 =$$
$$= -5 \cdot \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx + 4 = -\frac{15}{4} \cdot \int\limits_{-1}^{1}(x - x^3)dx + 4 = -\frac{15}{4} \cdot (0-0) + 4 = 4$$
$$D(\eta) = D(-5\xi + 4) = D(-5\xi) + D(4) = 25 \cdot D(\xi) + 0 = 25 \cdot (E(\xi^2) - (E(\xi))^2) = 25 \cdot (E(\xi^2) - 0) =$$
$$= 25E(\xi^2) = 25\int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{75}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^2 \cdot (1-x^2)dx = \frac{75}{4}\left(\int\limits_{-1}^{1} x^2dx - \int\limits_{-1}^{1} x^4dx\right) =$$
$$= \frac{75}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{-1}{5}\right) = \frac{75}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{75}{4} \cdot \frac{4}{15} = 5$$
$$P(|\xi - 0.5| \le 0.25) = P(0.25 \le \xi \le 0.75) = \int\limits_{0.25}^{0.75} f(x)dx = \frac{3}{4}\int\limits_{0.25}^{0.75}(1-x^2)dx =$$
$$= \frac{3}{4}\left(0.75 - \frac{0.75^3}{3} - 0.25 + \frac{0.25^3}{3}\right) = 0.274$$
Ответ: тут много пунктов, соберите сами :)

Задача №5.
Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется диаметр валика ξ, удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением 10 мм. Чему равно среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью 0.99 диаметр заключён в интервале (9.7; 10.3). Найдите 0,99-квантиль СВ ξ.

Решение
По условию задачи мы имеем гауссовское распределение: $\xi \sim N(10, \sigma^2)$. Зная то, что с вероятностью 0.99 диаметр заключён в интервале (9.7; 10.3) можем найти среднеквадратическое отклонение:
$P(9.7 < \xi < 10.3) = \Phi_0\left(\dfrac{9.7-10}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{10.3-10}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\dfrac{0.3}{\sigma}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot \Phi_0\left(\dfrac{0.3}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow \Phi_0\left(\dfrac{0.3}{\sigma}\right) = 0.495$

С помощью таблицы найдем значение функции Лапласа:
$\dfrac{0.3}{\sigma} = 2.58 \Rightarrow \sigma = 0.116$

Найдем 0,99-квантиль СВ ξ:
$F(Z_{0.99}) = \int\limits_{-\infty}^{Z_{0.99}} f(x)dx = \Phi_0\left(\dfrac{Z_{0.99}-10}{0.116}\right) + 0.5 = 0.99$
$\Phi_0\left(\dfrac{Z_{0.99}-10}{0.116}\right) = 0.49$

Снова воспользуемся таблицей:
$\dfrac{Z_{0.99}-10}{0.116} = 2.33 \Rightarrow Z_{0.99} - 10 = 0.27 \Rightarrow Z_{0.99} = 10.27$

Ответ: $\sigma = 0.116$; $Z_{0.99} = 10.27$

Комментарий
Хочу обратить ваше внимание на то, что в этом варианте отсутствуют задачи на следующие темы:
1) Формула сложения вероятностей;
2) Условные вероятности, исследование зависимости/независимости событий;
3) Формула полной вероятности;
4) Дискретные величины общего вида, биномиальное распределение;
5) Равномерное и экспоненциальное распределения.
В некоторых вариантах задачи на эти темы могут быть.