Теория вероятностей и математическая статистика. БПИ201. Домашнее задание №1

Автор: Сурова София, БПИ191

6 сентября 2021

Замечание. Задачи взяты из задачника «Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами», А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, 2017.

стр.42, №4
Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятность следующих событий:
$A = \{$в каждой пачке по два туза$\}$,
$B = \{$все тузы в одной пачке$\}$,
$C = \{$в одной пачке будет один туз, а в другой - три$\}$.

Решение
1) Найдём вероятность события A. Для начала, количество разбиений колоды из 52 карт на две равные пачки равно количеству способов выбрать 26 карт из 52 без учёта порядка, то есть C_{52}^{26}.
Но к событию A относятся разбиения, в которых в каждой пачке будет по два туза. Чтобы получить такое разбиение, необходимо выбрать два туза из четырех, которые войдут в первую пачку, а потом выбрать оставшиеся 24 карты для данной пачки из 48 карт (колода без тузов). В другой пачке карт останется два туза и 24 карты, что и требуется. То есть количество таких разбиений равно $C_4^2 * C_{48}^{24}$.
По определению $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_4^2 * C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} = \dfrac{325}{833} \approx 0.39$

2) Найдём аналогичными рассуждениями вероятность события B. Общее количество разбиений не изменилось - C_{52}^{26}.
Чтобы получить все тузы в одной пачке, нужно сначала выбрать четыре туза из четырёх (только 1 способ это сделать :)), а на остальные 26 - 4 = 22 места в пачке выбрать карты из колоды без тузов, тогда в другой пачке останутся все оставшиеся, не выбранные карты, которые не являются тузами. Количество способов получить такое разбиение для одной пачки C_{48}^{22}.
Но это значение необходимо умножить на два, так как у нас две пачки. Можно следовать той логике, что нам в начале нужно выбрать одну пачку из двух, в которой будут все тузы $C_2^1 * C_{48}^{22} = 2 * C_{48}^{22}$. Или рассмотреть вариант, когда мы выбираем для первой пачки все карты, которые не являются тузами, тогда в другой пачке будут все четыре туза. Количество способов так разбить $C_{48}^{26} = C_{48}^{48-22} = C_{48}^{22}$. Добавив к первому разбиению, получим $C_{48}^{22} + C_{48}^{26} = 2 * C_{48}^{22}$
По определению $P(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{2 * C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} = \dfrac{92}{833} \approx 0.11$

3) И, наконец, найдём вероятность события C. Общее количество разбиений не изменилось - C_{52}^{26}.
Чтобы в одной пачке был туз, а в другой - оставшиеся три, необходимо выбрать в одну пачку одного туза из четырёх, а потом на оставшиеся 25 мест выбрать карты из колоды без тузов.
Аналогично предыдущему пункту, так как у нас две пачки, то необходимо увеличить полученное количество разбиений вдвое. Получим $2 * C_4^1 * C_{48}^{25}$. Вы также могли получить $C_4^1 * C_{48}^{25} + C_4^3 * C_{48}^{23} = C_4^1 * C_{48}^{25} + C_4^{4-1} * C_{48}^{48-25} = C_4^1 * C_{48}^{25} + C_4^1 * C_{48}^{25} = 2 * C_4^1 * C_{48}^{25}$.
По определению $P(C) = \dfrac{|C|}{|\Omega|} = \dfrac{2 * C_4^1 * C_{48}^{25}}{C_{52}^{26}} = \dfrac{416}{833} \approx 0.5$

Ответ: 0.39, 0.11, 0.5

стр. 42, №5

В предположении, что день рождения любого человека равновероятен в любой день года, найти вероятность, что все люди в компании из r человек родились в различные дни. Подсчитать эту вероятность для $r = 23$.

Решение

Обозначим за $D_r = \{$все люди в компании из r человек родились в различные дни$\}$.

Выберем для решения задачи високосный год, чтобы не нарушать права тех, кто родился 29 февраля. В високосном году 366 дней.

Сразу рассмотрим случай, когда в компании число человек $r > 366$. Если интуитивно неочевидно, то можно воспользоваться принципом Дирихле и доказать, что в таком случае хотя бы у двух людей дни рождения совпадут, то есть $P(D_r) = 0, r > 366$.

Всего вариантов распределения дней рождений среди r людей равно 366^r (у первого 366 варианта, у второго 366 варианта, у третьего 366 варианта, ...). Но событию D_r удовлетворяют только $A^r_{366} = 366 * 365 * 364 * ... * (366 - r)$ вариантов, то есть у первого человека в компании есть 366 возможных дней для дня рождения, далее, чтобы не повторяться, у второго уже остается 365 дней, у третьего - 364 дня, у четвертого - 363 для и так далее до последнего. Число A^k_n называется числом размещений, которое соответствует количеству способов расположить некоторые k из n различных объектов на пронумерованных k местах, при условии что каждое место занято в точности одним объектом.

Для $r = 23$ вероятность события, что все люди в компании из данного количества человек родились в различные дни, равна $P(D_{23}) = \dfrac{A^{23}_{366}}{366^{23}} = \dfrac{366!}{(366-23)! * 366^{23}} \approx 0.494$.

Замечание. Получается, что вероятность того, что хотя бы у двух людей в компании из r человек дни рождения совпадают, равна $1 - D_r = 1 - \dfrac{366!}{(366-23)! * 366^r}$. Для $r = 23$ такая вероятность равна 0.506.

Ответ: вероятность равна 0, если r > 366, и $\dfrac{366!}{(366-23)! * 366^r}$ иначе; при $r = 23$ вероятность приблизительно равна 0.494

стр. 42, №6

Из шести букв разрезной азбуки составлено слово АНАНАС. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность, что у него снова получится слово АНАНАС.

Решение

Всего можно составить 6! слов из букв $\{А, А, А, Н, Н, С\}$. Это число соответствует числу перестановок, то есть на первое место мы можем поставить 6 букв, на второе место останется 5 букв, на третье - 4 буквы, на четвертое - 3 буквы, на пятое - 2 буквы и, наконец, на шестое - последняя оставшаяся буква. Все возможные перестановки букв и будут нашим пространством элементарных событий.

Чтобы получить слово АНАНАС необходимо на первое место выбрать одну букву А из трёх имеющихся, далее на второе место выбрать букву Н из двух имеющихся, на третье место выбрать букву А из оставшихся двух, и потом для четвертого, пятого и шестого места останется по одной букве Н, А и С соответственно. Получим, что есть $3*2*2*1*1*1 = 12$ способов получить данное слово, то есть 12 элементарных исходов удовлетворяют нашему событию. Но можно рассуждать и по-другому. Возьмём слово АНАНАС. Если мы в нём переставим буквы А между собой, то это также будет слово АНАНАС, так как буквы А не различны между собой. Аналогично и перестановки Н между собой. Число перестановок трёх букв А равно $3! = 6$. Число перестановок двух букв Н равно $2! = 2$. Получаем, что опять же событию "получить слово АНАНАС"соответствуют $6 * 2 = 12$ элементарных исходов.

По определению вреоятности $P = \dfrac{3! * 2!}{6!} = \dfrac{12}{2*3*4*5*6} = \dfrac{1}{2*5*6} = \dfrac{1}{60}$

Ответ: $\dfrac{1}{60}$

стр. 42, №7
Компания занимается организацией отдыха для любителей рыбной ловли. На озере, где находится туристическая база компании, оборудовано для рыбной ловли 30 мест. Набрана группа из 5 отдыхающих, которым, независимо друг от друга, предоставлено право выбора места рыбной ловли. В предположении, что все места одинаково привлекательны для любого отдыхающего, вычислить вероятность того, что все отдыхающие выберут разные места.

Решение
Простарнство элементарных исходов состоит из всевозможных вариантов выборов пяти отдыхающими мест для рыбной ловли. Всего есть 30^5 вариантов распределения отдыхающих по местам рыбной ловли, то есть каждый из отдыхающих может независимо от другого выбрать 30 мест.
Событию соответствуют элементарные исходы, в которых отдыхающие заняли разные места. Всего таких элементарных исходов - $A_{30}^5 = 30*29*28*27*26$, то есть первый отдыхающий может занять 30 мест, второму останется 29 мест, третьему - 28 мест, четвертому - 27 мест и пятому - 26 незанятых мест.
По определению вероятности $P = \frac{A_{30}^5}{30^5} = \frac{30*29*28*27*26}{30*30*30*30*30} \approx 0.704$
Ответ: $\frac{A_{30}^5}{30^5} \approx 0.704$

стр. 42, №11
В гостинице имеется шесть одноместных номеров. На эти номера имеется 10 претендентов: 6 мужчин и 4 женщины. Гостиница следует правило FIFO: пришедшие раньше обслуживаются раньше. Все претенденты прибывают в случайном порядке. Какова вероятность того, что номера получат:
а) все шесть претендетов мужского пола;
б) четверо мужчин и две женищны;
в) по крайней мере одна из четырёх женщин?

Решение
Задача заключается в том, что необходимо рассмотреть очередь (последовательность) из 10 человек, где нас будут особенно интересовать первые 6 мест без учета порядка (все они станут претендентами на номера, и первое, и шестое место).
Пространство элементарных исходов состоит из всех возможных вариантов получения 6 претендентов из десяти, то есть количество таких способов - C_{10}^6.
а) Чтобы на первых шести местах были мужчины, необходимо выбрать шесть мужчин из шести, тогда оставшиеся четыре места останутся женщинам, и претендентами на места в отеле будут только мужчины. То есть количество элементарных исходов, удовлетворяющих данному событию, равно $C_6^6 = 1$.
По определению вероятности, $P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$
б) Чтобы на первых шести местах были четверо мужчин и две женщины, необходимо выбрать четверо мужчин из шести и две женщины из четырех. То есть количество элементарных исходов, удовлетворяющих данному событию, равно $C_6^4 * C_4^2$.
По определению вероятности, $P = \frac{C_6^4 * C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$
в) Ранее мы рассмотрели вероятность события, что на всех шести местах будут все мужчины и ни одной женщины. Тогда вероятность события, что на шести местах будет хотя бы одна женщина $P = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$
Ответ: а) $\frac{1}{210}$, б) $\frac{3}{7}$, в) $\frac{209}{210}$

стр. 43, №12*

Парадокс Де Мере. Подбрасывают три игральные кости и подсчитывают сумму выпавших очков. Де Мере заметил, что появление одиннадцати очков возможно при шести комбииациях (6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3) и появление двенадцати очков возможно при шести комбинациях (6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4). Объяснить парадоксальность ситуации, которая состоит в том, что вероятности появления в сумме 11 и 12 очков не равны.

Решение

Суть парадокса Де Мере в том, что сами комбинации не равновероятны.
Рассмотрим комбинации, которые в сумме дают 11 очков:
- $\{6,4,1\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{6,3,2\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{5,5,1\}$, способов получить такую комбинацию 3, так как две пятёрки не различны;
- $\{5,4,2\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{5,3,3\}$, способов получить такую комбинацию 3, так как две тройки не различны;
- $\{4,4,3\}$, способов получить такую комбинацию 3, так как две четвёрки не различны.

Вероятность события, что в сумме три игральные кости дадут 11, равна $P = \dfrac{6+6+3+6+3+3}{6^3} = \dfrac{27}{6^3}$

Рассмотрим комбинации, которые в сумме дают 12 очков:
- $\{6,5,1\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{6,4,2\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{6,3,3\}$, способов получить такую комбинацию 3, так как две тройки не различны;
- $\{5,5,2\}$, способов получить такую комбинацию 3, так как две пятёрки не различны;
- $\{5,4,3\}$, способов получить такую комбинацию $3! = 6$ (число перестановок);
- $\{4,4,4\}$, способов получить такую комбинацию 1, так как все четвёрки не различны.

Вероятность события, что в сумме три игральные кости дадут 12, равна $P = \dfrac{6+6+3+3+6+1}{6^3} = \dfrac{25}{6^3}$

стр. 43, №13

Восемнадцать команд, участвующих в турнире, по жребию разбиваются на две подгруппы по девять команд в каждой. Найти вероятность того, что
а) все шесть лидирующих команд окажутся в одной подгруппе;
б) шесть лидирующих команд распределятся по три в разные группы.

Решение

Задача аналогична той, где колоду разбивали на две пачки.
Всего количество разбиений команд на две подгруппы равно C_{18}^9, то есть мы без учёта порядка выбираем 9 команд из 18 в первую подгруппу, а во второй подгруппе будут оставшиеся команды.
а) Чтобы все шесть лидирующих команд оказались в одной подгруппе, необходимо выбрать шесть лидирующих команд из шести на шесть мест в первой подгруппе и добрать не лидирующие команды (их $18-6=12$) на оставшиеся три места в первой подгруппе. Тогда число способов разбить команды на две подгруппы таким образом равно $C_6^6 * C_{12}^3 = C_{12}^3$, но подгруппы симмитричны (смотри рассуждения о двух пачках колоды), то есть необходимо удвоить получившееся число, получим $2 * C_{12}^3$.

По определению вероятности $P = \dfrac{2 * C_{12}^3}{C_{18}^9} = \dfrac{2}{221}$

б) Чтобы в каждой подгруппе было по три лидирующие команды из шести, необходимо выбрать три лидирующие команды из шести на три места в подгруппе и добрать не лидирующие команды на оставшиеся шесть мест в подгруппе. Тогда число способов разбить команды на две подгруппы таким образом равно $C_6^3 * C_{12}^6$. Тут нет необходимости умножать на два, так как симметричность подгрупп компенсируется симметричностью числа лидирующих команд в подгруппе.

По определению вероятности $P = \dfrac{C_6^3 * C_{12}^6}{C_{18}^9} = \dfrac{84}{221}$

Ответ: а) $\dfrac{2}{221}$, б) $\dfrac{84}{221}$

стр. 43, №14

При проведении фуршета на стол поставили пять бокалов шампанского, три бокала белого вина и два бокала красного вина. К столу подошли семь человек и взяли по одному бокалу. Найти вероятность того, что на столе осталось по одному бокалу каждого напитка. (Будем предполагать, что для каждого из гостей все напитки одинаково привлекательны.)

Решение

Пространство элементарных исходов - это всевозможные комбинации семи напитков из десяти, которые выберут гости. Всего количество таких комбинаций равно числу сочетаний $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$.

Чтобы на столе осталось по одному бокалу каждого напитка, гостям необходимо взять четыре бокала шампанского из пяти, два бокала белого вина из трёх и один бокал красного вина из двух. Тогда число комбинаций, удовлетворяющих такому событию, равно $C_5^4 * C_3^2 * C_2^1 = C_5^1 * C_3^1 * C_2^1 = 5 * 3 * 2 = 30$.

По определнию вероятности $P = \dfrac{C_{10}^3}{C_5^4 * C_3^2 * C_2^1} = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

Ответ: 0.25

стр. 43, №15

Каждый из 50 штатов представлен в сенате США двумя сенаторами. Предстоит выбрать некоторый комитет из 50 сенаторов. Найти вероятности следующих событий:

а) штат Айова будет представлен в комитете;

б) все штаты будут представлены в комитете.

(Будем предполагать, что все сенаторы имеют равные шансы быть избранными в этот комитет.)

Решение

Пространство элементарных исходов - это всевозможные комбинации 50 сенаторов из 100, которые пройдут в комитет. Всего количество таких комбинаций равно числу сочетаний C_{100}^{50}.

а) Чтобы найти вероятность того, что штат Айова будет представлен в комитете, найдём вероятность того, что штата Айова не будет представлен в комитете. Тогда нам подойдут элементарные исходы, в которых 50 сенаторов будут выбираться из 98 претендентов (игнорируем двух сенаторов из штата Айова). Количество таких элементарных исходов - C_{98}^{50}.

По определению вероятности $P = \dfrac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = \dfrac{49}{198}$. Но исходное событие - дополнение к рассматриваемому, тогда вероятность исходного события $1 - P = 1 - \dfrac{49}{198} = \dfrac{149}{198}$.

б) Чтобы все штаты были представлены в комитете, необходимо выбрать по одному сенатору из двух для каждого штата, тогда количество таких комбинаций будет равно $(C_2^1)^{50}$.

По определнию вероятности $P = \dfrac{(C_2^1)^{50}}{C_{100}^{50}} = \dfrac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$ - очень маленькое число порядка 10^{-14}.

Ответ: а) $\dfrac{149}{198}$, б) $\dfrac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$