PROBLEME 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (o,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) (unité graphique 2cm) .

PARTIE A Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Etudier les limites de g en -∞ et en +∞.
2) Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3) En déduire le tableau de variation de g.
4) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans IR puis justifier que $0{,}35 \leq \alpha \leq 0{,}36$
5) En déduire le signe de g .

PARTIE B

1) Etudier les limites de f en -∞ et en +∞.
2) Déterminer f'(x) pour tout réel x.
3) En déduire, à l'aide de la partie A , les variations de f et donner son tableau de variation
4) a) démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.
   b) A l'aide de l'encadrement de α , déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}
5) Démontrer que la droite(Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en +∞. Préciser la position de (C) par rapport à (Δ)
6) donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
7) Tracer (Δ) (T) et (C)
8) a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur IR par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ Soit une primitive sur IR de la fonction $x \to (x^2 + 2)e^{-x}$.
   b) Calculer en fonction α l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (C) , (Δ) et les droites d'équation x = -α et x=0.
   c)Justifier que : A = $4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

PROBLEME 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé directe (0 ,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$,) d'unité 1cm. On considère la courbe (C) de la fonction f définie par : f(x) = $\begin{cases} x((lnx)^2 - lnx - 1) si\ x > 0 \\ xe^x\ \ si\ x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que l'ensemble de définition D_f =IR et calculer la limite de f aux bornes de D_f .2pts

   b) Etudier les branches infinies de (C)

   c) Montrer que f est continue en 0. f est-elle dérivable en 0 ?

2) a)Calculer f'(x) et étudier son signe pour x> 0 puis pour x≤ 0
   b) Etablir le tableau de variation complète de f.
   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe (O ;$\vec{\imath}$)
   d) Tracer (C) et ses éventuelles asymptotes et demi-tangentes

3) On pose pour tout n ϵ IN $I_n = \int_1^e x(lnx)^n$ dx

   a) Montrer que pour tout n élément de IN, $I_n \geq 0$
   b) Etudier le sens de variation de la suite (I_n). (I_n) est elle convergente ?
   c) Montrer que pour tout n élément de IN, $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
   d) Calculer I_0 , I_1 et I_2 On donnera les valeurs exactes

4) On note $\mathcal{A}$ = $\{M(x;y)\ \epsilon\ P\ /1 \leq x \leq e\ et\ f(x) \leq y \leq 0\}$

   a) Montrer que $\int_1^e f(x)dx = I_2 - I_1 - I_0$

   b) Calculer la valeur exacte en cm² de l'aire de $\mathcal{A}$.

PROBLEME3

PARTIE A Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} \ pour\ x > 0 \end{cases}$ (C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé direct, (0,i,j) d'unité graphique 2 cm.

1 – a) Montrer que f_n est continue et dérivable en 0.

b) Dresser le tableau de variation de f_n sur $[0,+\infty[$.

2 – On considère le fonction numérique g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(u) = e^{-u} + u - 1$.

a) Déterminer le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.

b) Déduire de cette monotonie de g, que pour tout réel u de $[0,+\infty[$: $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$.

c) Montrer ensuite, que pour tout réel h de [0,+ [: $0 \leq e^{-h} + h - 1 \leq \frac{h^2}{2}$.

d) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$: $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$ et que la droite (Δ_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote de (C_n).

e) Vérifier que (C_n) reste au-dessus de (Δ_n).

3 –Tracer (C_2) et $(_2)$ dans (P).

PARTIE B On pose $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

a) Montrer que pour tout réel t de [0 ; 1] : $(t - \frac{1}{n}) \leq f_n(t) \leq t$.

b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

PROBLEME 4

Soit la fonction numérique f, d'une variable réel x, définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x}{2}-1} \ si\ x\epsilon\,]-\infty, 2[\\ f(2) = 1 \\ f(x) = \ln\frac{2e}{x} si\ x\epsilon\,]2; +\infty[\end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

1) Etudier la continuité de de f en $x_0=2$

2) f est –elle dérivable au point $x_0=2$? Interpréter graphiquement les résultats obtenus

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A **5)** Tracer la courbe (C) et la tangente (T)

6) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan, ensemble des points M(x ;y) tels que

$0 \leq x \leq 2e$; $0 \leq y \leq f(x)$

7) On considère la suite (u_n) définie par $U_n= f(d_n)$ telle que d_n est la suite arithmétique de raison r = -2 et de premier terme $d_1=0$

a) Calculer d_n et U_n en fonction de n

b) Donner l'expression de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$ en fonction de n .

PROBLEME5

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}}\, si\ x < 0 \\ f(x) = xln(1+x) si\ x \geq 0 \end{cases}$ On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}\ si\ x \geq 0$.

1) Déterminer le sens de variation de g sur [o ;+∞[et en déduire son signe sur [0 ;+∞[.

2) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) étudier la dérivabilité de f en 0

3) a) calculer f'(x) suivant les valeurs de x et vérifier que pour tout x≥ 0 ;f'(x)=g(x)

b) Montrer que pour tout x< 0, on a f'(x) > 0.

c) Montrer que pour tout x≥ 0 , on a f'(x) > 0 d) Calculer les limites de f en -∞ et +∞ e) dresser le tableau de variation de f.

4) a)Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat

b) calculer $\lim_{x\to-\infty}[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)]$

c) Montrer que la droite (D) :y=x+1 est une asymptote oblique à (C) en -∞

d) Préciser la position de (C) par rapport à (D) pour x< 0.(On admettra que $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \leq 1$ pour x< 0)

5) Tracer (Δ) : y=x ; (D) :y=x+1 et (C) dans le repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Partie B

1) a)Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x ϵ IR^+, on a $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$

b) Déduire au moyen d'une intégration par partie le calcul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$

2) Calculer l'aire en cm^2,l'aire A de la partie du plan limitée par (Δ) ;(C) et les droites d'équations x=0 et x=e-1

3) soit h la restriction de f à l'intervalle [0 ;+∞[

a) Montrer que h réalise une bijection de [0 ;+∞[sur un intervalle J que l'on précisera

b) Construire la courbe (C') de h^{-1} dans le repère orthonormé ($0,\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

4) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle [0,e].

PROBLEME 6

On désigne par n un entier supérieur ou égale à 2 et on considère les fonctions notéef_n, qui sont définies pour x appartient à l'intervalle] 0,+∞[par :

$$f_n(x) = \frac{1 + nlnx}{x^2}$$

PARTIE A

I-1) Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2nlnx$.

2) Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$.Etudier lev signe de $f_n'(x)$.

3) Déterminer la limite de f_n en +∞.

4) Etablir le tableau de variation de la fonction $f_n$et calculer sa valeur maximum en fonction de n.

II- Le plan est rapporté à un repère orthonormal (o ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)(unité graphique 5cm).On note (C_n) la courbe représentative de la fonctionf_n dans ce repère.

1) Tracer (C_2) et (C_3) .

2) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

PARTIE B

1) Calculer, en intégrant par partie, l'intégrale : $\int_1^e \frac{lnx}{x^2}dx$.

2) En déduire l'aire du domaine plan limité par les courbes (C_n)et (C_{n+1}) et les droite d'équation x=1 et x=e

3) On note A_n l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_n) et les droite d'équation x=1 et x=e.

a) CalculerA_2

b) Déterminer la nature de la suite(A_n).

PARTIE C

Dans toute la suite, on prend n≥ 3

1) a) Vérifier que, pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et f($e^{\frac{n-2}{2n}}) > 1$

b) Vérifier que l'équation$f_n(x)$ =1 n'admet pas de solution sur l'intervalle] $1; e^{\frac{n-2}{2n}}$ [

2) Montrer que l'équation $f_n(x)$ =1 admet sur l'intervalle $[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[$ exactement une solution notée α_n.

3) On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).

a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour n $> e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.

b) En déduire que, pour n≥ 8,On a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).

PROBLEME 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par f(x)= $\ln(e^x + e^{-x})$;

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (o,$\vec{i},\vec{j}$)
(unité graphique 3cm) .

PARTIE A **1** a) Déterminer la limite de f en +∞

b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ;+∞[on a : f(x) = $x + \ln(1 + e^{-2x})$

c) En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation y = x

d) Etudier la position relative de (C) et (Δ)

2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (2pts)

3) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

PARTIE B Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; +∞ [on pose F(x)= $\int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\, dt$.

1) Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1) de la partie A, donner une interprétation géométrique de F(x).
2) Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle [0 ; +∞ [.
3) Soit a un réel strictement positif.
   a) Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 1+a], on a $\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.
   b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis, établir que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1 + a) \leq a$.
4) Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3) :
   $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\, dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$
   Puis $\frac{1}{2} ln2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

On admet que la limite de F(x), lorsque x tend vers +∞ existe et est un nombre réel noté . Donner un encadrement de l .

PROBLEME 8

Soit la fonction f définie sur [0 ;+∞[par

$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o,i,j)

1a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la droite (D) : y=x est une asymptote à (C).

c) Déterminer la position de (C) et (D).

d) tracer (D) et (C) dans le même repère (o,i,j)

2-a) Montrer que f est une bijection de [0 ;+∞[sur [ln2 ;+∞[.

b) Construire $(C)^{-1}$ représentative de f^{-1} réciproque de f.

3a) montrer que pour tout t ϵ [0 ;+∞[,1-t ≤ $\frac{1}{1+t}$ ≤ 1

b) en déduire que pour tout x de [0 ;+∞[,$x-\frac{x}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

c) En déduire un encadrement de $\ln(1+e^{-2t})$ pour tout t ϵ [0 ;+∞[.

4) pour tout n ϵ IN*, on désigne par S_n la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par (C) , la droite (D) et les droites d'équation x=0 et x= n.

a) Montrer que $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{8}e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2n}$.

b) Montrer que S_n est convergente vers un réel l dont on donnera un encadrement.

PROBLEME 9

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égale à 2.on considère la fonction f_n définie par sur IR par $\begin{cases} f_n(x) = xe^{\frac{1}{nx}}, si\ x < 0 \\ f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = x^n lnx, si\ x > 0 \end{cases}$

Partie A

1) Etudier la continuité de f_n en 0
2) Etudier la dérivabilité de f_n en 0
3) Dresser le tableau de variation de f_n.
4)a)Montrer que pour tout $x \leq 0; x \leq e^x - 1 \leq 0$
b) En déduire que pour tout $t \leq 0;\ \frac{t^2}{2} \leq e^t-(t+1) \leq 0$
5)a)Démontrer que pour tout $x < 0; \frac{1}{2n^2x} \leq f_n(x)-(x+\frac{1}{n}) \leq 0$.
b) En déduire que la courbe $(C_n)\ de\ f_n$, admet au voisinage de -∞ une asymptote oblique que l'on déterminera.
c)Construire la courbe (C_2), dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 2cm)

Partie B

Soit l'application $I_n: [0;1] \to IR, x \to \int_x^1 f_n(t)dt$.
1)a)Montrer que pour tout $x\epsilon]0;1]$ on a $I_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{x^{n+1}lnx}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$.
b) Montrer alors que $I_n(0) = \frac{-1}{(n+1)^2}$.
c)Déduire en cm² l'aire du domaine limité par la courbe (C_2) et les droites d'équation y=0,x=0et x=1
2) Soit $J_n = \int_{-1}^0 f_n(x)dx$
a)Montrer que pour tout $x\epsilon[-1;0], f_n(x) \geq x$.
b) Déduire que $\frac{-1}{2} \leq J_n \leq \frac{-1}{2}+\frac{1}{n}$, puis déterminer la limite de J_n.

PROBLEME 10

PARTIE A

Soit l'équation différentielle (E) :y'=y²-y
1) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = y-1$
2) Soit g une fonction dérivable et ne s'annule par sur IR. Montrer que si g est une solution de (E) alors $\frac{1}{g}$ est une solution de(E_0).
3) Déterminer la solution g de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0.

PARTIE B

Soit la fonction f définie dur IR par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité 1cm. 1)a)Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que le point $I(0;\frac{1}{2})$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f.

2)a)Montrer que f est une bijection de IR sur]0 ;1[.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x∊]0 ;1[.

3) a)Montrer que l'équation f(x)=x admet dans IR une solution unique α et montrer que α∊]0 ;1[.

b) Vérifier que $\ln(1+e^{-\alpha}) = -(\alpha + ln\alpha)$.

4) Construire la courbe (C) et la courbe (C') de f^{-1}.

PARTIE C

Soit n∊ IN*.On pose $U_n = \int_0^\alpha f^n(t)dt$

1) Calculer U_1

2) a)Montrer que pour tout n∊ IN*, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$.

b) En déduire que pour tout n∊ IN*,n≥ $2, on\ a$:

$$U_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$$

3) a) Montrer que pour tout n∊ IN*,0≤ $U_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$$

PROBLEME 11

Partie A

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$

2) Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur IR et qui vérifie les conditions φ(0)=0 et φ'(0)=-e

Partie B

1) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -xe^{2x+1}$
   a) Quel est suivant les valeurs de x, le signe de f(x) ?
   b) Etudier le sens de variation de f
   c) Déterminer les limites de f en -∞ et +∞
   d) Dresser le tableau de variation de f
   e) On appelle (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 4cm).
   Quelle est la tangente à (c) au point O ?
   Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en x_0=-1
   Tracer (T) et (c).
   PROBLEME

PROBLEME12

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = xlnx - ln|x-1|$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé directe $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

Partie A

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

2) Calculer f'(x) et f''(x)

3) Dresser le tableau de variation de f'

4) a) Montrer que l'équation f'(x)=0 admet deux solution $\alpha_1 \in]0\,;1[\ et\ \alpha_2 \in]1\,;+\infty[$

b) Vérifier que 0,1$< \alpha_1 <$ 0,2 et 1,6$< \alpha_2 <$ 1,7

5) Etudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer (C)

PARTIE B

On pose $I_\lambda = \int_\lambda^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ (λ> 1) et

$$S_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f(1+\frac{k}{2n})$$

1) a) Calculer I_λ à l'aide d'une intégration par partie

b) Calculer $\lim_{\lambda\to 1} I_\lambda$

2) Calculer $S_1\ et\ S_2$

3) Montrer que $\frac{1}{2n} f((1+\frac{1+k}{2n}) \le \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{1+k}{2n}} f(x)dx \le \frac{1}{2n}\, f\left(1+\frac{k}{2n}\right)(1 \le k \le n)$

4) a) En déduire que :

$$\frac{1}{2n} f\left(\frac{3}{2}\right) + I_{1+\frac{1}{2n}} \le S_n \le I_{1+\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n} f(1+\frac{1}{2n})$$

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

5) On pose

$$V_n = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt[3n]{n!}}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{2n})^{\frac{1}{2n}+\frac{k}{4n^2}}$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, en utilisant le résultat précédent .