

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Transição de Fase em Modelos de Percolação

André Victor Ribeiro Amaral

Orientador: Roger William Câmara Silva.

Belo Horizonte

2020

André Victor Ribeiro Amaral

Transição de Fase em Modelos de Percolação

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva.

Belo Horizonte

2020

Incluir *ficha catalográfica*.

Incluir *ata de defesa*.

Agradecimentos

À minha *mãe* (Alexandra) e *irmã* (Melissa), o meu agradecimento mais do que especial. O suporte de vocês sempre será de fundamental importância.

Ao Professor Roger William Câmara Silva, obrigado pela orientação, pela paciência, e por contribuir de maneira tão positiva na minha (ainda em construção) formação acadêmica.

Aos colegas que fiz na UFMG, em especial aos companheiros de estudo Otávio e (por um período mais curto de tempo) Matheus, o meu “muito obrigado”.

Finalmente, um agradecimento à CAPES, pelo suporte financeiro oferecido para o desenvolvimento deste trabalho.

Esta página foi *intencionalmente* deixada em branco.

Resumo

O conceito de *transição de fase*, inerente a diferentes tipos de modelos puramente determinísticos, pode, também, ser verificado em sistemas com componentes estocásticas – nesse caso, é dito que um modelo passa por *sharp threshold* se o seu comportamento é abruptamente alterado como resultado da perturbação de um de seus parâmetros. Dessa forma, é importante o estudo de ferramentas que nos permitem provar que determinados sistemas aleatórios apresentam esse tipo de característica .

Para um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, resultados associados à análise de funções Booleanas, como em $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, desempenham papel importante no estudo dessa classe de modelos. Este texto preocupa-se em, ao longo da Seção 2, apresentar e demonstrar tais resultados.

Tratando-se de modelos aleatórios independentes e que vêm da Física Estatística, o de Percolação Bernoulli é, talvez, o mais conhecido. Por isso, na Seção 3, nos concentramos em reproduzir alguns resultados “clássicos” desse modelo; utilizando, porém, as ferramentas desenvolvidas na Seção 2. Aqui, é importante ressaltar o ganho que existe em utilizar esse tipo de abordagem. Alguns dos resultados demonstrados poderão ser estendidos, utilizando-se de estratégias similares, para modelos construídos sobre espaços mais gerais – incluindo modelos com dependência, como os que foram discutidos na Seção 4.

Por fim, deixo o registro de que os resultados apresentados ao longo desse texto **não** são originais. O trabalho foi construído a partir de, principalmente, [1] – em adição aos outros artigos e recursos que foram apropriadamente referenciados.

Palavras-chave: transição de fase; *sharp threshold*; análise de funções Booleanas; percolação.

Abstract

The *phase transition* concept, intrinsic to some purely deterministic models, may also be seen in systems with some stochastic component – in this context, we say that a model undergoes a *sharp threshold* if its behavior is drastically changed as the result of a small perturbation in one of its parameters. Therefore, it is important to study results that allow us to prove that some arbitrary random systems present such a characteristic.

For a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, results associated with Boolean function analysis, as in $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, play an important role in the study of this class of models. As a consequence of it, this text focuses on, throughout Section 2, introduce and prove such results.

Regarding independent random models from Statistical Physics, the Bernoulli Percolation Model may be considered the most popular one. Thus, in Section 3, we focused on replicating some “classical” results concerned with it. In order to achieve this, we used the tools developed in Section 2. At this point, it is important to stress the benefits of adopting such an approach. Some of the proofs may be extended, through similar strategies, to models defined over more general spaces – which also includes models with a structure of dependence, as discussed in Section 4.

Finally, I want to clarify that the results presented throughout this text are **not** original. This work was developed mainly based on [1] – in addition to other resources and academic articles, which was properly cited.

Keywords: phase transition; sharp threshold; Boolean functions analysis; percolation.

Sumário

Agradecimentos	I
Resumo	III
Abstract	IV
1 Introdução	1
2 Como provar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por <i>sharp threshold</i>	4
2.1 Fórmula de Russo-Margulis	4
2.2 Inequação de <i>sharp threshold</i>	6
2.3 Desigualdade de O'Donnell-Saks-Schramm-Servedio	13
3 Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)	16
3.1 Ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2	17
3.2 <i>Sharpness</i> da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d	26
4 Modelos de percolação com dependência	31
4.1 Percolação $2k$ Dependente	31
4.2 Percolação FK (ou <i>Random Cluster Model</i>)	34
Referências	41
Apêndice A – Outras demonstrações	44

1 Introdução

Na física, *transição de fase* pode ser caracterizada como a mudança descontínua do estado físico de um sistema à medida que algum de seus parâmetros varia continuamente. O exemplo mais simples vem, talvez, da mudança do estado físico da matéria: sólido, líquido ou gasoso — dependendo de parâmetros como temperatura e pressão.

Em se tratando, porém, de modelos com componentes estocásticas, diz-se que um sistema aleatório finito passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda rapidamente como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura. Nesse caso, é possível tomar como exemplo — que será formalmente enunciado e explicado ao longo da Seção 3 — o *sharp threshold* pelo qual o modelo de percolação em $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, com respeito à medida produto, passa; e como essa característica se relaciona, ao menos intuitivamente, com a ideia de *transição de fase* em sistemas que admitem esse tipo mudança.

O modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito pelo seguinte espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, tal que $\Omega = \{0, 1\}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; i.e., o conjunto das partes de Ω e \mathbb{P}_p é a medida produto Bernoulli $\prod_{i \in \{1, \dots, n\}} \mu_i$, onde $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$. Com o propósito de simplificar notação, denote o conjunto $\{1, \dots, n\}$ por $[n]$.

Dentro do espaço de probabilidade apresentado, este texto se concentrará em estudar funções do tipo $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, chamadas de *funções Booleanas*. Assim, defina $F(p) := \mathbb{E}_p(f(\omega))$, onde $\mathbb{E}(\cdot)$ é *valor esperado*. Analogamente, $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$, se a sequência de funções $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que $f_k : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Finalmente, perceba que, como \mathbb{P}_p é medida produto Bernoulli:

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1 - p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Em adição, diz-se que, se $\omega, \omega' \in \Omega$; i.e., ω, ω' são possíveis configurações de Ω , $\omega \leq \omega'$ se $\omega_i \leq \omega'_i$, $\forall i \in [n]$ — nesse caso, foi estabelecida uma ordem parcial para os elementos do espaço amostral. Assim, $f(\omega)$ é dita *crescente* se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$. Posto isso, a definição a seguir irá formalizar a ideia de *sharp threshold*.

Definição 1.1. Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp*

threshold em $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se existe $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = 0$, tal que $F_k(p_k - \delta_k) \rightarrow 0$ e $F_k(p_k + \delta_k) \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Perceba que, da Definição 1.1, é possível ver que, se $f_k(\omega) = \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$, onde $\mathbb{I}_{A_k}(\omega)$ é função indicadora de ω em $A_k \in \mathcal{F}$, então $F_k(p) = \mathbb{E}_p(f_k(\omega)) = \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{A_k}(\omega)) = \mathbb{P}_p(A_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Isto é, se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*, então, para k “grande”, $\mathbb{P}_p(A_k)$ está, exceto na região $(p_k - \delta_k, p_k + \delta_k)$, perto de 0 ou 1; o que, de alguma forma, pode estar relacionado à *transição de fase* (nesse caso, *transição de fase “afiada”*) pela qual o sistema considerado (e modelado como estrutura aleatória) é caracterizado. Abaixo, a Figura 1 apresenta um esboço desse fenômeno.

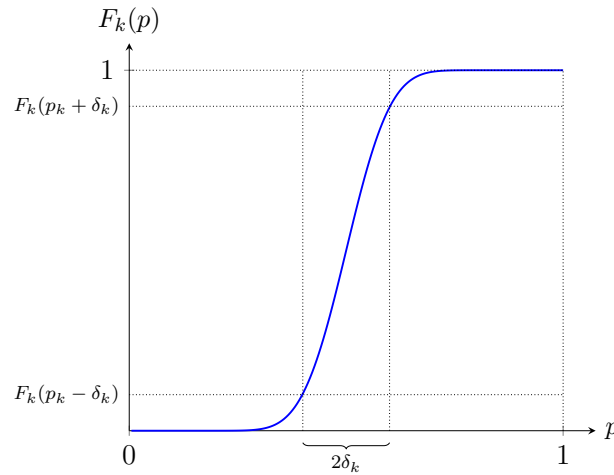


Figura 1: Esboço de $F_k(p) = \mathbb{E}_p(f_k(w))$ para k “grande”, tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

A seguir, alguns exemplos serão apresentados, com o propósito de indicar se as sequências de funções Booleanas $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ descritas passam (ou não) por *sharp threshold*.

Exemplo 1.1. Seja $f_k(\omega) = f(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_1=1\}}(\omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, o cálculo de $F_k(p) = F(p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, utilizando-se da Equação 1, é dado por

$$\begin{aligned} F_k(p) &= \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1-\omega_i} \\ &= p \sum_{\substack{\omega \in \Omega; \\ \omega_1=1}} p^{\sum_{i=2}^n \omega_i} (1-p)^{\sum_{i=2}^n 1-\omega_i} \\ &= p \cdot 1 = p = F(p). \end{aligned}$$

Nesse caso, como $F_k(p) = p$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ não passa por *sharp threshold*.

Os próximos dois cenários, entretanto, vêm de resultados apresentados, inicialmente, em [2] – conhecido como Modelo de Erdős-Rényi. Seja $G(n, p)$ grafo aleatório, com conjuntos de vértices $V = [n]$ e conjunto de elos $E = \{i \in I : \omega_i = 1\}$, onde I é o conjunto de pares de inteiros em $[n]$, tal que $|I| = \binom{n}{2}$. Aqui, note que, exceto por Ω – que deve ser definido, nesse caso, por $\Omega = \{0, 1\}^{|I|}$ –, há concordância do modelo com o espaço de probabilidade inicialmente descrito. Então, em relação às propriedades de grafo (do inglês: *graph properties* ou *graph invariants*); isto é, propriedades que dependem apenas da classe de isomorfismo de G^1 , valem os seguintes exemplos:

Exemplo 1.2 (Conectividade do grafo). Seja $A_k = \{G(k, p) \text{ é conectado}\}$ evento, onde “ser conectado” significa dizer que existe única componente conectada, e que todos os vértices $v \in V$ pertencem à essa componente. Então $(\mathbb{I}_{A_k})_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{\log k}{k}$.

Exemplo 1.3 (Existência de componente conectada “muito grande”). Definindo o evento B_k como $B_k = \{\exists \text{ componente em } G(k, p) \text{ com tamanho maior ou igual a } r_k\}$, tal que a sequência $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz $\frac{r_k}{\log k} \rightarrow +\infty$ e $\frac{r_k}{k} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$; i.e., no limite, $\log k \ll r_k \ll k$, então $(\mathbb{I}_{B_k})_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{1}{k}$.

Uma observação importante é a de que, propriedades – como as apresentadas nos exemplos acima – que não passam por *sharp threshold* devem, essencialmente, depender de uma quantidade uniformemente limitada de estados de bits que compõem uma configuração do espaço amostral (vide Exemplo 1.1). Esse tipo de afirmação é intuitiva à medida que, sob as condições descritas, $F_k(p)$ não atingirá propriedades do tipo $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k(p_k - \delta_k) = 0$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k(p + \delta_k) = 1$, para as sequências $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\delta_k \searrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Por fim, a Seção 2 mostrará alguns importantes resultados relacionados ao estudo de funções Booleanas no espaço produto. A Seção 3 se concentrará em aplicações que apresentam *transição de fase “afiada”*; considerando, principalmente, o Modelo de Percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d . E a Seção 4 irá generalizar alguns dos resultados discutidos em seções anteriores, considerando, para isso, medidas definidas sobre espaços com dependência.

¹Considere dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$, tal que V e V' são conjuntos de vértices e E e E' são conjuntos de elos. Um mapeamento $T : V \rightarrow V'$ é um isomorfismo entre G e G' se é bijeção e se $\{v_1, v_2\} \in E$ se e somente se $\{T(v_1), T(v_2)\} \in E'$. A coleção de grafos isomórficos a G é chamada de *classe de isomorfismo* de G .

2 Como provar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

2.1 Fórmula de Russo-Margulis

Seja $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, como na Seção 1, começaremos estudando o comportamento do valor esperado desse tipo de função; i.e., de $F'(p) = \frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega))$. Nesse sentido, introduza a seguinte notação: $\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega))$, onde $\text{Flip}_i(\omega)$ é a configuração $\omega \in \Omega$ obtida quando se troca o valor do i -ésimo bit da sequência que compõe ω ; ou seja, a função $\text{Flip}_i(\omega)$ pode ser definida como

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina *influência* do bit i (notação: $\text{Inf}_i(f(\omega))$) como sendo a probabilidade de $f(\omega)$ ser diferente de $f(\text{Flip}_i(\omega))$; i.e., a probabilidade de, mudando o estado de ω_i , o valor que a função f assume também ser modificado. Assim, formalmente, dizemos que

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é igual a, considerando o fato de que $|\nabla_i f(\omega)|$ assume somente valores em $\{0, 1\}$, $\mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$. Note, por fim, que, apesar de não estar explicitado na notação, $\text{Inf}_i(f(\omega))$ também depende do parâmetro p .

Agora, um importante resultado sobre a fórmula de $\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega))$, atribuído a [3] e [4], será apresentado.

Lema 2.1. (Fórmula de Margulis-Russo) Para $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ crescente, temos que

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)).$$

Demonstração:

Seja $|\omega| = \sum_{i \in [n]} \omega_i$. Assim, tomando a derivada, com respeito a p , da Equação 1 para $F_k(p) = F(p)$, é possível observar que

$$F'(p) = \left(\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) p^{|\omega|} (1-p)^{n-|\omega|} \right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\omega \in \Omega} (f(\omega) |\omega| p^{|\omega|-1} (1-p)^{n-|\omega|} - f(\omega) (n-|\omega|) p^{|\omega|} (1-p)^{n-|\omega|-1}) \\
 &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}_p(f(\omega) n - f(\omega) |\omega|) \\
 &= \mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p} \mathbb{E}_p(f(\omega) n) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} (\mathbb{E}_p(f(\omega) |\omega|) - p \mathbb{E}_p(f(\omega) n)) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p \left(f(\omega) \sum_{i \in [n]} \omega_i - p f(\omega) n \right) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \mathbb{E}_p \left(f(\omega) \sum_{i \in [n]} (\omega_i - p) \right) \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Agora perceba que, se $A_i := \{\omega \in \Omega : \nabla_i f(\omega) \neq 0\}$ e olhando para a Equação 2, é possível escrever $\mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p))$ como $\mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega)) + \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i^c}(\omega))$.

Entretanto, como em A_i^c , $f(\omega)$ é igual a $f(\text{Flip}_i(\omega))$, se $\omega \in A_i^c$, então $f(\omega)$ é independente de ω_i ; além disso, $\mathbb{E}_p(\omega_i - p) = p - p = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)) &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega)) \\
 &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) + \\
 &\quad + \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=0\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=0\}}).
 \end{aligned}$$

Finalmente, como f é crescente e $\omega \in A_i$, temos que $f(\omega) = 0$, se $\omega_i = 0$; da mesma forma, $f(\omega) = 1$, se $\omega_i = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p)) &= \mathbb{E}_p(f(\omega) (\omega_i - p) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) | \mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) \cdot \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\{\omega_i=1\}}) + 0 \\
 &= (1-p) \mathbb{P}_p(A_i | \{\omega_1 = 1\}) \cdot \mathbb{P}_p(\{\omega_i = 1\}), \text{ t.q. } A_i \text{ indep. de } \{\omega_i = 1\} \\
 &= p(1-p) \mathbb{P}_p(A_i) \\
 &= p(1-p) \text{Inf}_i(f(\omega)). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Assim, conectando a Equação 3 na Equação 2, concluímos que

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

como queríamos demonstrar. □

Um resultado imediato do Lema 2.1 é o de que $F(p)$ é não-decrescente e diferenciável. Dito isso, suponha, por um instante, que seja possível provar cotas do tipo:

$$F'(p) = \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (4)$$

onde $\mathbb{V}(\cdot)$ é *variância* e C é alguma constante “grande”. Aqui, note que, como $\text{Im}(f) = \{0, 1\}$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_p(f(\omega)) &= \mathbb{E}_p(f^2(\omega)) - \mathbb{E}_p^2(f(\omega)) \\ &= \mathbb{E}_p(f(\omega)) - \mathbb{E}_p^2(f(\omega)) = F(p) (1 - F(p)). \end{aligned} \quad (5)$$

Dessa forma, empregando a Equação 5 na Inequação 4, é possível dizer que

$$\begin{aligned} F'(p) &\geq C F(p) (1 - F(p)) \\ \implies \left(\frac{F'(p)}{F(p) (1 - F(p))} \right) &= \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C \end{aligned} \quad (6)$$

Agora, tome p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$; então, para $\delta > 0$, integrando a Inequação 6 entre $(p - \delta)$ e p , obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right) - \left(\ln \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \right) &\geq C p - C (p - \delta) \\ \implies 0 - \left(\ln \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \right) &\geq \delta C \implies \frac{F(p - \delta)}{1 - F(p - \delta)} \leq e^{-\delta C} \\ \implies F(p - \delta) &\leq e^{-\delta C}. \end{aligned} \quad (7)$$

Analogamente, integrando a Inequação 6 entre p e $(p + \delta)$, obtemos:

$$F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta C}. \quad (8)$$

O que significa que, se cotas como a apresentada na Inequação 4 forem obtidas, pela Inequação 7, $F(p - \delta)$ ficará “próximo” de 0; da mesma forma, pela Inequação 8, $F(p + \delta)$ ficará “próximo” de 1. Isso é o mesmo que dizer que, sob a hipótese de que é possível construir cotas como a que foi descrita, a janela de valores de p para os quais $F(p)$ fica “longe” de 0 e 1 é necessariamente pequena. As próximas subseções serão concentradas em argumentos que nos levarão a resultados da forma da Inequação 4.

2.2 Inequação de *sharp threshold*

Do ponto de vista histórico, o estudo do fenômeno de *sharp threshold* para medida produto em espaço discreto iniciou-se através de Russo, em [5], e Kahn, Kalai e Linial,

em [6] — que utilizaram-se da desigualdade de Bonami-Beckner ([7] e [8]) para provar o caso em que $p = \frac{1}{2}$. Bourgain, Kahn, Kalai, Katznelson e Linial (BKKKL), em [9], estenderam esse resultado para o espaço produto $[0, 1]^n$, com medida uniforme nesse intervalo; assim, por um processo de discretização dessa última prova, foi possível obter inequações de *sharp threshold* para sequências do tipo $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, definidas em $\{0, 1\}^n$ e com medida produto Bernoulli, com $p \in [0, 1]$ arbitrário, associada. Por fim, um resultado equivalente, considerando o propósito deste texto, ao de BKKKL foi provado por Talagrand, em [10], e será enunciado a seguir.

Teorema 2.1. Existe uma constante $c > 0$ tal que, para qualquer $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}. \quad (9)$$

Antes, porém, da demonstração, são necessárias algumas observações sobre esse resultado. Primeiro, note que deve existir algum i com

$$\frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} \geq \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (10)$$

onde $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)} \right)^{-1}$. Basta supor que, $\forall i \in [n]$,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} &< \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) \\ \implies \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}} &< n \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) = c_p \mathbb{V}_p(f(\omega)), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pelo enunciado do próprio Teorema 2.1. E, como resultado da Inequação 10, existe um i , tal que

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (11)$$

com c_p possivelmente modificado por um fator multiplicador. De fato, note que, ou ^(a) $\exists i$ t.q. $\text{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, ou ^(b) $\text{Inf}_i(f(\omega)) \leq c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, $\forall i \in [n]$. Se “(b)”, teríamos que, pela Inequação 10, existe algum i com $\text{Inf}_i(f(\omega)) > \frac{c_p}{n} \ln \frac{n}{\ln n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$ — que é o mesmo que dizer que, cotando $\ln \frac{n}{\ln n}$ por $\frac{\ln n}{2}$, $\exists i \in [n]$ t.q. $\text{Inf}_i(f(\omega)) > \frac{c_p}{2} \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)) = (c_p^*) \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega))$, onde $c_p^* = \frac{c_p}{2}$; nesse caso, perceba o absurdo. Dessa maneira, vale a Inequação 11. As afirmações referente às Inequações 10 e 11 também podem ser utilizadas.

Um ponto adicional que deve ser levantado antes da demonstração do teorema de interesse, é uma ferramenta que será utilizada durante essa prova: expansão de *Fourier* (ou *Fourier-Walsh*) de $f(\omega)$.

Definição 2.1. Seja $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, com medida uniforme em $\text{Im}(f)$, defina a expansão de Fourier de f como:

$$f(\omega) := \sum_{S \subset [n]} \widehat{f}(S) \chi_S,$$

onde $\chi_S := (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$ e $\widehat{f}(S) := 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \chi_S(\omega)$.

Exemplo 2.1. Seja $f : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ e defina $f_n(\omega) := \max\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Se $n = 2$, então $f_2(\omega) = \max\{\omega_1, \omega_2\}$; nesse contexto, encontre a expansão de Fourier de f_2 .

Calculando χ_S , obtemos $\chi_\emptyset = 1$ (por definição), $\chi_{\{1\}} = (-1)^{\omega_1}$, $\chi_{\{2\}} = (-1)^{\omega_2}$ e $\chi_{\{1,2\}} = (-1)^{\omega_1 + \omega_2}$. Agora, em relação aos coeficientes $\widehat{f}(S)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_2(\emptyset) &= \frac{1}{4} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{3}{4} \\ \widehat{f}_2(\{1\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^0 + 1(-1)^1) = -\frac{1}{4} \\ \widehat{f}_2(\{2\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^1) = -\frac{1}{4} \\ \widehat{f}_2(\{1, 2\}) &= \frac{1}{4} (0(-1)^0 + 1(-1)^1 + 1(-1)^1 + 1(-1)^2) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, f_2 pode ser expressa como $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_1} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_2} - \frac{1}{4}(-1)^{\omega_1 + \omega_2}$, finalizando o exemplo.

Por fim, mais duas ferramentas bastante úteis e que serão utilizadas na demonstração do Teorema 2.1:

Lema 2.2 (Teorema de Parseval). Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, então vale que

$$\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} (\widehat{f}(S))^2.$$

A demonstração do Lema 2.2 será feita no Apêndice A.

Lema 2.3 (Desigualdade de Bonami-Beckner). Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, e defina o operador $T_t(\cdot)$ como $T_t(f(\omega)) = \sum_{S \subset [n]} t^{|S|} \widehat{f}(S) \chi_S$. Se $1 \leq q \leq r < +\infty$ e for satisfeita a condição de que $t \leq \left(\frac{q-1}{r-1}\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\|T_t(f(\omega))\|_r \leq \|f(\omega)\|_q,$$

em que $\|f(\omega)\|_q = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{q}}(|f(\omega)|^q)$ é norma- q ($-r$, respec.).

A demonstração do Lema 2.3 não será feita; entretanto, é possível encontrá-la, com detalhes, em [11] (além de nos artigos originais, em [7] e [8]).

Demonstração (Teorema 2.1):

Apenas o caso onde $p = \frac{1}{2}$ será contemplado. Assim, considerando a expansão de Fourier estabelecida na Definição 2.1, perceba que:

$$\widehat{\nabla_i f}(S) = \begin{cases} 2\widehat{f}(S) & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (12)$$

já que $\widehat{\nabla_i f}(S) = 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} (f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega))) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$; que o mesmo que escrever $\widehat{f}(S) - 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$. Nessa última expressão, note que, se $i \notin S$, então $2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i} = \widehat{f}(S)$; ou seja, $\widehat{\nabla_i f}(S) = \widehat{f}(S) - \widehat{f}(S) = 0$. Porém, no caso em que $i \in S$, é possível escrever $2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} f(\text{Flip}_i(\omega)) (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i}$ como $(-\widehat{f}(S))$, e, portanto, $\widehat{\nabla_i f}(S) = \widehat{f}(S) - (-\widehat{f}(S)) = 2\widehat{f}(S)$.

Agora, como $\widehat{f}(\emptyset) = 2^{-n} \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = F(\frac{1}{2})$ e, pelo Lema 2.2, $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \subseteq [n]} (\widehat{f}(S))^2$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) - \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}^2(f(\omega)) \\ &= \sum_{S \subseteq [n]} (\widehat{f}(S))^2 - (\widehat{f}(\emptyset))^2 \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} (\widehat{f}(S))^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Considerando as Equações 12 e 13, perceba que é possível dizer que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \ni i} \frac{(\widehat{f}(S))^2}{|S|} \\ &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \ni i} \frac{(\widehat{\nabla_i f}(S))^2}{4|S|} \\ &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} \frac{(\widehat{\nabla_i f}(S))^2}{4|S|} \\ &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ S \neq \emptyset}} \frac{(\widehat{\nabla_i f}(S))^2}{2|S| + 1}, \end{aligned}$$

com $|S|$ representando a cardinalidade de S . Escrevendo, então, $\frac{1}{2|S|+1}$ como $\int_0^1 t^{2|S|} dt$, e introduzindo, para cada $t \in [0, 1]$, o operador $T_t(\cdot)$ (que faz referência à notação utilizada

no Lema 2.3), tal que

$$T_t(\widehat{\nabla_i f}(S)) = t^{|S|} \widehat{\nabla_i f}(S); \quad (14)$$

isto é, $T_t(\widehat{\nabla_i f}(S))$ suaviza, através da componente $t^{|S|}$, os coeficientes de Fourier da expansão de $\nabla_i f(\omega)$ – temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &\leq \sum_{i \in [n]} \sum_{\substack{S \subset [n] \\ S \neq \emptyset}} \int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2 dt \\ &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \subset [n]} \left[\int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2 dt \right] - \int_0^1 t^{2|\emptyset|} (\widehat{\nabla_i f}(\emptyset))^2 dt \\ &= \sum_{i \in [n]} \sum_{S \subset [n]} \left[\int_0^1 t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2 dt \right], \text{ já que } i \notin \emptyset \text{ (utilizar a Equação 12)} \\ &= \sum_{i \in [n]} \int_0^1 \left[\sum_{S \subset [n]} t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2 \right] dt, \text{ já que } t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2 \geq 0, \forall S \subset [n] \\ &= \sum_{i \in [n]} \int_0^1 \|T_t(\nabla_i f(\omega))\|_2^2 dt, \end{aligned} \quad (15)$$

onde $\|T_t(\nabla_i f(\omega))\|_2^2 = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{2}}(|T_t(\nabla_i f(\omega))|^2) = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((T_t(\nabla_i f(\omega)))^2)$, que, pelo Lema 2.2, é igual a $\sum_{S \subset [n]} (T(\widehat{\nabla_i f}(S)))^2$; agora, através da Equação 14, chegamos a $\|T_t(\nabla_i f(\omega))\|_2^2 = \sum_{S \subset [n]} t^{2|S|} (\widehat{\nabla_i f}(S))^2$.

Utilizando, então, o Lema 2.3, podemos dizer que

$$\|T_t(\nabla_i f(\omega))\|_2 \leq \|\nabla_i f(\omega)\|_{1+t^2}, \quad (16)$$

já que $t \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, para $0 \leq t \leq 1$. Em adição, como $\text{Im}(\nabla_i f) = \{-1, 0, 1\}$ (ou, como $\text{Im}(|\nabla_i f|) = \{0, 1\}$), é possível afirmar que

$$\begin{aligned} \|\nabla_i f(\omega)\|_{1+t^2} &= \left(\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(|\nabla_i f(\omega)|^{1+t^2}) \right)^{\frac{1}{1+t^2}} \\ &= (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1}{1+t^2}}, \text{ recorde que } \text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(|\nabla_i f(\omega)|). \end{aligned} \quad (17)$$

Dessa maneira, juntando a Inequação 15 com as Equações 16 e 17, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) &\leq \sum_{i \in [n]} \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{2}{1+t^2}} dt \\ &= \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Agora, fazendo mudança de variável tal que $s = 1 - t$; o que implica que $ds = -dt$, é possível escrever a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt &\leq \int_0^1 (\text{Inf}_i(f(\omega)))^{(1-t)} dt, \text{ já que } \frac{1-t^2}{1+t^2} \geq (1-t) \text{ e } \text{Inf}_i(f(\omega)) \leq 1 \\
 &= \int_1^0 -\text{Inf}_i(f(\omega))^s ds \\
 &= \int_0^1 \text{Inf}_i(f(\omega))^s ds = \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln(\text{Inf}_i(f(\omega)))} - \frac{1}{\ln(\text{Inf}_i(f(\omega)))} \\
 &\leq \frac{1}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Aplicando a Inequação 19 na Inequação 18, obtemos

$$\mathbb{V}_{\frac{1}{2}}(f(\omega)) \leq \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}},$$

o que conclui a demonstração para $p = \frac{1}{2}$. \square

Perceba, finalmente, que o resultado que acabamos de mostrar nos diz que $F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq c_p \ln \frac{1}{\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))} \mathbb{V}_p(f(\omega))$; ou seja, tomando como referência a Inequação 4, para provar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*, é necessário mostrar que $c_p \ln \frac{1}{\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))}$ é “grande” — o que é o mesmo que dizer que $\max_i(\text{Inf}_i(f(\omega)))$ é “pequeno” (i.e., $\forall i \in [n]$, $\text{Inf}_i(f(\omega))$ é “pequeno”). Porém, provar que todas as *influências* são pequenas pode não ser tarefa fácil. Nesse sentido, o resultado a seguir nos permite, sob condições específicas, utilizar o Teorema 2.1 de forma prática.

Teorema 2.2. Existe uma constante $c > 0$ tal que, para qualquer $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ que é *simétrica sob um grupo* \mathcal{G} agindo transitivamente sobre $[n]^2$:

$$F'(p) \geq c \ln(n) \mathbb{V}_p(f(\omega)).$$

Demonstração:

Tomando $f(\omega)$ simétrica sob um grupo \mathcal{G} agindo transitivamente sobre $[n]$, temos que, para todo par $i_1, i_2 \in [n]$, $f = f \circ \sigma$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$ satisfazendo $\sigma(i_1) = (i_2)$. Em particular, temos que:

$$\text{Inf}_{i_1}(f) = \text{Inf}_{i_1}(f \circ \sigma) = \text{Inf}_{i_2}(f),$$

²Dado um conjunto Λ , (Σ, ψ) é grupo simétrico \mathcal{G} se $\Sigma = \{\sigma; \sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda \text{ é bijeção}\}$ e $\psi : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$, com $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \circ \sigma_2$; nesse caso, f é dita *simétrica sob* \mathcal{G} , se $f \circ \sigma = f$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$. Além disso, \mathcal{G} age transitivamente sobre Λ se, para todo par λ_1 e λ_2 em Λ , existe $\sigma \in \mathcal{G}$, tal que $\sigma(\lambda_1) = \lambda_2$.

onde a primeira igualdade usa o fato de que $f = f \circ \sigma$, e a segunda igualdade vem da ideia de que, dada uma permutação $\sigma \in \mathcal{G}$ que satisfaz $\sigma(i_1) = i_2$, olhar para a influência de i_1 em $f \circ \sigma$, é o mesmo que olhar para a influência de i_2 em f . Dessa forma, *todas as influências são iguais*. Dito isso, existem duas possibilidades:

1. Se $\text{Inf}_i(f(\omega)) \geq \frac{\ln(n)}{n}$ para todo i , então

$$F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq \ln(n) \geq \ln(n) \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

já que $\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq 1$; ou

2. Se $\text{Inf}_i(f(\omega)) \leq \frac{\ln(n)}{n}$ para todo i , então $\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))} \geq \ln(n) - \ln(\ln(n))$, $\forall i \in [n]$; nesse caso, pelo Teorema 2.1 (com aplicação direta da Inequação 9), temos que

$$F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)) \geq c_p (\ln(n) - \ln(\ln(n))) \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

onde, como já definido, $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)} \right)^{-1}$.

Agora, modificando c_p , de modo a deixá-lo suficientemente pequeno, concluímos a demonstração. \square

Perceba que o Teorema 2.2 implica que, cumprida determinadas hipóteses sobre $f(\omega)$, e levando em consideração a Inequação 4, tomar $C = c \ln(n)$ nos permite dizer que a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Exemplo 2.2 (Propriedades monótonas em grafos). Considerando o Modelo de Erdős-Rényi descrito na Seção 1, toda sequência $(\mathbb{I}_{A_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de funções indicadoras de propriedades crescentes de grafos; i.e., propriedades que dependem da ocorrência de eventos crescentes A_k , passa por *sharp threshold*.

Para verificar que o Exemplo 2.2 é, de fato, válido, basta notar que, por definição, uma propriedade do tipo A_k depende somente da classe de isomorfismo de G ; em particular, A_k é invariante por “*renomeação dos vértices*”. Então \mathbb{I}_{A_k} é simétrica sob um grupo \mathcal{G} agindo transitivamente sobre o conjunto dos vértices do grafo. Pelo Teorema 2.2, $(\mathbb{I}_{A_k})_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*. Veja, nesse caso, que os Exemplos 1.2 e 1.3 são casos particulares de um resultado mais geral.

2.3 Desigualdade de O'Donnell-Saks-Schramm-Servedio

Uma outra desigualdade, que nos permite conseguir cotas como a sugerida na Inequação 4, será introduzida nessa subseção. Esse resultado é baseado na ideia de *algoritmo* e foi inicialmente apresentado em um dos passos rumo à Conjectura de Yao, proposta em [12].

De maneira informal, um algoritmo associado a uma função Booleana $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ toma $\omega \in \Omega$ como entrada e revela, de maneira algorítmica, o valor de ω em diferentes coordenadas, um por um, até que o valor da função $f(\omega)$ possa ser completamente determinado. Em cada passo desse processo, a coordenada que será revelada imediatamente a seguir depende do que foi revelado de ω até o momento. Nesse sentido, o algoritmo para quando o valor de $f(\omega)$ puder ser determinado independente das coordenadas não reveladas de ω . Então, a pergunta de interesse passa a ser: Quantas coordenadas de ω devem ser reveladas antes que o algoritmo pare? Essa quantidade é comumente referenciada como *complexidade computacional* de uma função Booleana.

Definição 2.2. Dados uma n -upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ e um $t \leq n$, com $t \in \mathbb{N}$, defina $x_{[t]} := (x_1, \dots, x_t)$ e $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_t})$. Um *algoritmo* \mathbf{T} é uma tripla $(i_1, \psi_t, t \leq n)$ que toma $\omega \in \Omega$ como entrada e devolve uma sequência ordenada (i_1, \dots, i_n) construída indutivamente da seguinte forma: para $2 \leq t \leq n$,

$$\mathbf{i}_t = \psi_t(\mathbf{i}_{[t-1]}, \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_{t-1}\};$$

onde ψ_t é interpretada como a regra de decisão no tempo t (ψ_t toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros $(t - 1)$ passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada i_1 é determinística. Por fim, para $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f, \mathbf{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{\mathbf{i}_{[t]}} = \omega_{\mathbf{i}_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Perceba que, da Definição 2.2, $\tau(\omega)$ diz respeito à menor quantidade de bits de $\omega \in \Omega$ que precisa ser consultada para que $f(\omega)$ seja *completamente* determinada. Sendo assim, em Ciência da Computação, os algoritmos são, de maneira geral, definidos até $\tau(\omega)$ — e não até mais do que isso.

A desigualdade de OSSS foi originalmente introduzida por O'Donnell, Saks, Schramm e Servedio em [13] com o objetivo de, como já dito, dar um passo a mais rumo à

Conjectura de Yao. Ela relaciona a variância de $f(\omega)$ com a influência e complexidade computacional de um algoritmo para a mesma função.

Teorema 2.3. Seja $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então vale que

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo \mathbf{T} e o bit i .

Antes da demonstração, perceba que, mais uma vez considerando a Inequação 4, se todas as *revelações* $\delta_i(\mathbf{T})$ forem pequenas; i.e., se existe um algoritmo que determina completamente $f(\omega)$, mas *revela* “poucos” bits, então $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Demonstração (Teorema 2.3):

Comece considerando duas sequências independentes ω e $\tilde{\omega}$ de variáveis aleatórias Bernoulli com parâmetro p , independente e igualmente distribuídas (*i.i.d.*). Construa uma sequência de índices \mathbf{i} tal que $\mathbf{i}_1 = i_1$ e, para todo $t \geq 1$, $\mathbf{i}_{t+1} := \psi_t(\mathbf{i}_{[t]}, \omega_{\mathbf{i}_{[t]}})$. Aqui, vale a observação de que a construção de \mathbf{i} depende, somente, de ω ; i.e., \mathbf{i} não envolve $\tilde{\omega}$.

Além disso, e como já havíamos feito, defina

$$\tau(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{\mathbf{i}_{[t]}} = \omega_{\mathbf{i}_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Em adição, para $0 \leq t \leq n$,

$$\omega^t := (\tilde{\omega}_{\mathbf{i}_1}, \dots, \tilde{\omega}_{\mathbf{i}_t}, \omega_{\mathbf{i}_{t+1}}, \dots, \omega_{\mathbf{i}_{\tau-1}}, \omega_{\mathbf{i}_\tau}, \tilde{\omega}_{\mathbf{i}_{\tau+1}}, \dots, \tilde{\omega}_{\mathbf{i}_n}),$$

onde $\omega^t = \tilde{\omega}$ se $t \geq \tau$.

Agora, observe que, como $\text{Im}(f) = \{0, 1\}$, temos que

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) = \mathbb{E}_p((f(\omega) - F(p))^2) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|),$$

onde a última igualdade vem do fato de que $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1 - F(p)) = p(1 - p)$ e $\mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|) = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p) = 2\mathbb{V}_p(f(\omega))$, já que $\mathbb{P}_p(|f(\omega) - F(p)| = 1 - p) = \mathbb{P}_p(f(\omega) = 1) = p$ e que $\mathbb{P}_p(|f(\omega) - F(p)| = p) = \mathbb{P}_p(f(\omega) = 0) = (1 - p)$.

Veja também que, de acordo com como definimos a n -upla ω^t , ω^0 coincide com ω no conjunto de índices $\mathbf{i}_{[\tau]}$; logo, $f(\omega^0) = f(\omega)$. Da mesma forma, $\omega^n = \tilde{\omega}$, o que nos permite dizer que $f(\omega^n) = f(\tilde{\omega})$.

Sendo assim, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
 2 \mathbb{V}_p(f(\omega)) &= \mathbb{E}_p(|f(\omega) - F(p)|) \\
 &= \mathbb{E}_p(|\mathbb{E}_p(f(\omega^0) | \omega) - \mathbb{E}_p(f(\omega^n) | \omega)|), \text{ já que } \omega \text{ e } \tilde{\omega} \text{ têm a mesma distribuição} \\
 &= \mathbb{E}_p(|\mathbb{E}_p(f(\omega^0) - f(\omega^n) | \omega)|) \\
 &\leq \mathbb{E}_p(|f(\omega^0) - f(\omega^n)|), \text{ já que } |\mathbb{E}_p(\cdot)| \leq \mathbb{E}_p(|\cdot|) \\
 &\leq \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|), \text{ por 'série telescópica' e 'desigualdade triangular'}.
 \end{aligned}$$

Além disso, como $\omega^t = \omega^{t-1}$, $\forall t > \tau$, podemos escrever que

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbb{E}_p \left[\mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| | \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) \mathbb{I}_{\{t \leq \tau\} \cap \{\mathbf{i}_t = i\}} \right], \quad (20)$$

onde, condicionado em $\omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}$ e considerando o evento para o qual o valor esperado calculado é diferente de zero; i.e., considerando a função indicadora para $\{t \leq \tau\} \cap \{\mathbf{i}_t = i\}$, temos que tanto ω^t quanto ω^{t-1} são independentes de $\omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}$ (já que as duas sequências — ω^t e ω^{t-1} — são definidas, no conjunto de índices $\mathbf{i}_{[t-1]}$, por bits de, somente, $\tilde{\omega}$). Logo, e sob essas condições, podemos dizer que

$$|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega_i^t = \omega_i^{t-1} \\ 1 & \text{se } \omega_i^t \neq \omega_i^{t-1} \text{ e } f(\omega_i^t) \neq f(\omega_i^{t-1}). \end{cases}$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})| | \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) &= \mathbb{P}_p(\{\omega_i^t \neq \omega_i^{t-1}\} \cap \{f(\omega_i^t) \neq f(\omega_i^{t-1})\}) \\
 &= \mathbb{P}_p(\{f(\omega_i^t) \neq f(\omega_i^{t-1})\}) \cdot \mathbb{P}_p(\{\omega_i^t \neq \omega_i^{t-1}\}), \text{ por independência} \\
 &= \mathbb{P}_p(\{f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega))\}) \cdot 2p(1-p)
 \end{aligned}$$

já que ω_i^t é (possivelmente) diferente de ω_i^{t-1} (aqui, note que $\omega_i^t = \tilde{\omega}_i$ e $\omega_i^{t-1} = \omega_i$).

Assim, podemos dizer que $\mathbb{E}_p(|f(\omega^t) - f(\omega^{t-1})|) = \text{Inf}_i(f(\omega)) \cdot 2p(1-p)$, o que, voltando na expressão do lado direito da Equação 20 e relembrando a definição de $\text{Inf}_i(f(\omega))$, implica que

$$2 \mathbb{V}(f(\omega)) \leq 2p(1-p) \sum_{i=1}^n \text{Inf}_i(f(\omega)) \sum_{t=1}^n \mathbb{P}(\{t \leq \tau\} \cap \{\mathbf{i}_t = i\}).$$

Finalmente, recordando que $\delta_i(\mathbf{T})$ pode ser escrito como $\sum_{t=1}^n \mathbb{P}(\{t \leq \tau\} \cap \{\mathbf{i}_t = i\})$, concluímos a demonstração. \square

3 Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Para essa seção, vamos considerar o modelo de percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d (em particular, para $d = 2$). Nesse sentido, considere o reticulado d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e E^d é conjuntos de elos.

Primeiro, denote por $x \in \mathbb{Z}^d$ um elemento do conjunto de vértices – representado por $x = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$. Defina $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$, tal que $x, y \in \mathbb{Z}^d$, como função distância. Então, dizemos que $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é o conjunto de elos.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ será ligeiramente diferente daquele que foi definido na Seção 1 desse texto. Agora, $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, onde $\omega = \{\omega_e : e \in E^d\}$ é configuração de Ω , tal que $\omega_e = 0$ representa elo e “fechado” e $\omega_e = 1$ representa elo e “aberto”, $\forall e \in E^d$. $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$; ou seja, a menor σ -álgebra gerada pela coleção dos conjuntos de configurações que dependem de uma quantidade finita de elos definidos. Por fim, \mathbb{P}_p é a medida produto Bernoulli $\prod_{e \in E^d} \mu_e$, onde $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$. Entretanto, note que se considerarmos funções booleanas do tipo $f : \bar{\Omega} \rightarrow \{0, 1\}$, onde $\bar{\Omega} \subset \Omega$ é conjunto finito, todos os resultados que demonstramos na Seção 2 ainda serão válidos; em particular f será uma função do tipo $\mathbb{I}_A(\omega)$, onde A é evento que depende de uma quantidade finita de elos.

Além do espaço de probabilidade, é necessário definir algumas outras quantidades de interesse:

Definição 3.1. Um *caminho* γ em \mathbb{L}^d é definido pela sequência $\gamma = (x_i)_{i \in [n]}$ de vértices (distintos), tal que $(x_i, x_{i+1}) \in E^d$, $\forall i \in [n] \setminus n$. Além disso, dizemos que um caminho γ é *aberto* se, para todos os elos e que compõem γ , $\omega(e) = 1$. Por fim, dizemos que “ x está conectado a y ” se existe $\gamma = (x, \dots, y)$ caminho aberto (notação: $x \leftrightarrow y$).

Definição 3.2. Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, o *aglomerado* de x em ω é definido por $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$.

Uma observação importante é a de que, ao evento $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$, damos o nome de *percolar*.

Definição 3.3. O ponto crítico (p_c) , que depende da dimensão d , é definido por $p_c(d) =$

$\sup\{p : \theta(p) = 0\}$, onde $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $p \mapsto \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$.

Sobre as propriedades da função $\theta(p)$, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1. A função $\theta(p)$ é não-decrescente; i.e., se $p_1 < p_2$, então $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$, $\forall p_1, p_2 \in [0, 1]$.

A demonstração da Proposição 3.1 será feita no Apêndice A.

Por fim, defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$, ou seja, uma caixa d -dimensional de lado $2n$, e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ (onde $\partial\Lambda_n$ representa a “fronteira” da caixa $[-n, n]^d$).

3.1 Ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2

Ao longo dessa subseção, iremos nos concentrar na demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.1. O ponto crítico para o modelo de percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, E^2)$ é $\frac{1}{2}$.

A primeira demonstração do Teorema 3.1 é atribuída a Kesten em [14]. Aqui, entretanto, a demonstração apresentada é resultado dos esforços, em um primeiro momento, de Russo em [5], e, mais tarde, de Bollobás e Riordan em [15], [16] e [17]. A prova baseia-se no fato de que funções indicadoras de eventos de cruzamento de caixas podem passar por *sharp threshold*.

Porém, antes da demonstração em si, são necessárias algumas definições e resultados parciais. Primeiro, defina, para quaisquer dois inteiros n e m , o retângulo $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$. Além disso, $\mathcal{H}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } R(n, m)\}$ e $\mathcal{V}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } R(n, m)\}$. Agora, observe a proposição a seguir.

Proposição 3.2. Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Para essa prova, defina um *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^*$ em $(\mathbb{Z}^2)^* := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ tal que $(E^2)^* = \{(x^*, y^*) \in (\mathbb{Z}^2)^* \times (\mathbb{Z}^2)^* : \delta(x^*, y^*) = 1\}$, onde, para cada elo $e \in E^2$, existe uma correspondência única com o elo e^* em $(E^2)^*$ que o cruza – de tal forma que $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$, $\forall \omega \in \Omega$. Assim, $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (E^2)^*)$. A Figura 2 ilustra esse novo reticulado.

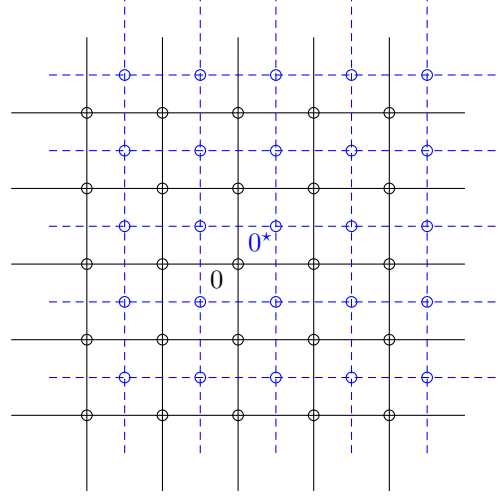


Figura 2: Reticulado original \mathbb{L}^2 (linha sólida) e *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^*$ (linha tracejada).

Agora, perceba que, da maneira como definimos o reticulado $(\mathbb{L}^2)^*$, bem como os elos que o compõem, podemos dizer que, se $\omega \sim \mathbb{P}_p$, então $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$; i.e., se a lei que determina o estado de uma configuração ω é o produto de variáveis Bernoulli independentes com parâmetro p , então a lei associada a ω^* é o produto de variáveis Bernoulli independentes com parâmetro $1 - p$. Em particular, se $p = \frac{1}{2}$, ω e ω^* têm a mesma distribuição. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right), \text{ com } \mathcal{V}^* \text{ evento no dual} \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)), \text{ por rotação e usando o fato de que } p = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 3.1. Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Note que $\mathcal{H}(n, n) \supset \mathcal{H}(n+1, n)$. Dessa forma, pela Proposição 3.2, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$. □

O que a Proposição 3.2 nos diz é que, para “quadrados” (retângulos do tipo $[n+1] \times [n]$ não são necessariamente quadrados) a probabilidade de cruzamento não tende para 0 ou para 1 quando n vai para infinito. O que vamos verificar agora é se, para retângulos “não degenerados” (no sentido de não terem altura e largura muito parecidas), a probabilidade de cruzamento ainda é uniformemente (em n) limitada. Nesse sentido, considere o teorema a seguir.

Teorema 3.2. Para qualquer $\rho > 0$, existe $c = c(\rho) > 0$ tal que, $\forall n \geq 1$,

$$c \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Porém, antes de qualquer discussão sobre o Teorema 3.2, é necessário enunciar uma ferramenta que será importante para algumas das demonstrações que vão ser apresentadas:

Lema 3.1 (Teorema de Harris (ou FKG)). Sejam X, Y variáveis aleatórias crescentes e limitadas, então

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) \geq \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

A demonstração da Proposição 3.1 será feita no Apêndice A.

Corolário 3.2. Sejam A, B eventos crescentes, então:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Demonstração:

Defina $X = \mathbb{I}_A(\omega)$ e $Y = \mathbb{I}_B(\omega)$ e aplique o Lema 3.1. \square

Agora, perceba que, em relação ao Teorema 3.2, se formos capazes de determinar a cota inferior para a probabilidade desejada, a cota superior segue facilmente. Basta notar que, de maneira similar ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.2, o complementar do evento $\mathcal{H}(\rho n, n)$ pode ser escrito como $\mathcal{V}^* \left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right] \times \left[-\frac{1}{2}, \rho n - \frac{1}{2} \right] \right)$; assim, por rotação e usando o fato de que $p = \frac{1}{2}$, chegamos a conclusão de que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c$. Um argumento similar vale para justificar o fato de que só é necessário considerarmos os casos em que $\rho \geq 1$ (veja, entretanto, que pelo Corolário 3.1, o caso $\rho = 1$ já está pronto).

Além disso, se formos capazes de encontrar uma cota inferior para $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n))$, com $\rho = 1 + \epsilon > 1$, então temos o resultado para qualquer $\rho' > 1$. Para verificar essa afirmação, defina os retângulos $R_i := [i\epsilon n, (i\epsilon + \rho)n] \times [0, n]$ e os quadrados $S_i := R_i \cap R_{i+1}$; em adição, considere os eventos $\mathcal{H}(R_i) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R_i\}$ e $\mathcal{V}(S_i) = \{\exists \text{ cruzamento vertical em } S_i\}$ (a Figura 3 mostra um esboço desses elementos). Assim,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho' n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left[\bigcap_{i=0}^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1} (\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right],$$

já que $R(\rho' n, n)$ tem largura $\rho' n$; que, em termos de R_i , pode ser descrito como $[i\epsilon + \rho]n$, para os $(i+1)$ primeiros retângulos. Nesse caso, $\rho' = [i\epsilon + \rho] \implies i = \frac{\rho' - 1}{\epsilon} - 1 \leq \lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1$.

Agora, aplicando o Corolário 3.2 (FKG) duas vezes, é possível escrever:

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left[\bigcap_{i=0}^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil - 1} (\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right] \geq \left[\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(R_i) \cap \mathcal{V}(S_i)) \right]^{\lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil} \geq c(\rho)^{2 \lceil \frac{\rho'}{\epsilon} \rceil}.$$

Por fim, e de posse das conclusões que acabamos de obter, para demonstrar o Teorema 3.2, basta que sejamos capazes de encontrar uma cota inferior (uniforme em n) para a probabilidade de cruzamento horizontal de um retângulo arbitrário R_i com largura ρn , tal que $\rho = 1 + \epsilon > 1$.

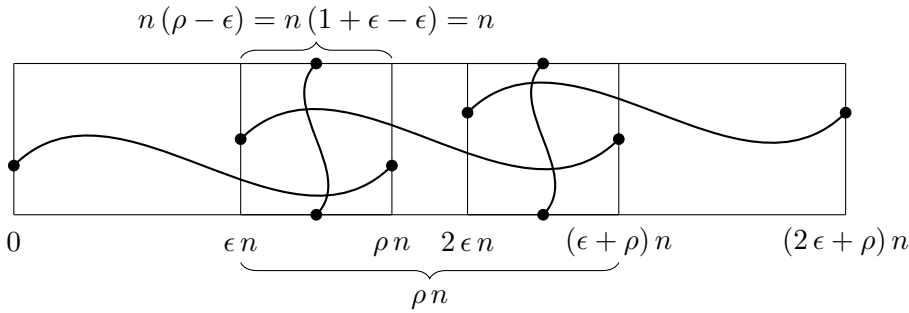


Figura 3: Esboço dos eventos $\mathcal{H}(R_i)$ e $\mathcal{V}(S_i)$ para R_i com $i = 0, 1$ e 2 e S_i com $i = 0$ e 1 .

Demonstração (Teorema 3.2):

Como acabamos de discutir, basta provar que a probabilidade de cruzamento – na direção mais difícil – de um retângulo com lado maior igual a ρ vezes o lado menor (para algum $\rho = 1 + \epsilon > 1$) é uniformemente (em n) maior do que uma constante $c(\rho) > 0$. Aqui, usaremos $\rho = \frac{3}{2}$; i.e.,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n)) \geq \frac{1}{128}.$$

Para essa demonstração, definiremos o retângulo $R := [-n, n] \times [-n, 2n]$, tal que $\mathcal{V}(2n, 3n) = \{\exists \text{ cruzamento vertical em } R\}$. Além disso, $S := [0, n] \times [0, n]$, $S' := [-n, n] \times [-n, n]$ e $l := [-n, n] \times \{-n\}$; i.e., l corresponde à parte de baixo do retângulo R (ou do quadrado S').

Em adição às componentes que acabamos de definir, sejam $A = \{\exists \text{ cruzamento vertical cima-baixo em } S\}$, $A' = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S\}$ e $B = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S \text{ que está conectado a } l \text{ em } S'\}$. Agora, para um caminho arbitrário γ que vai do lado esquerdo ao lado direito de S , denote por $\sigma(\gamma)$ a reflexão de γ com respeito a $\{0\} \times \mathbb{Z}$. Por fim, defina $V(\gamma)$ como o conjunto de vértices em S' que estão abaixo de $\gamma \cup \sigma(\gamma)$. A figura 4 ilustra o que acabamos de descrever.

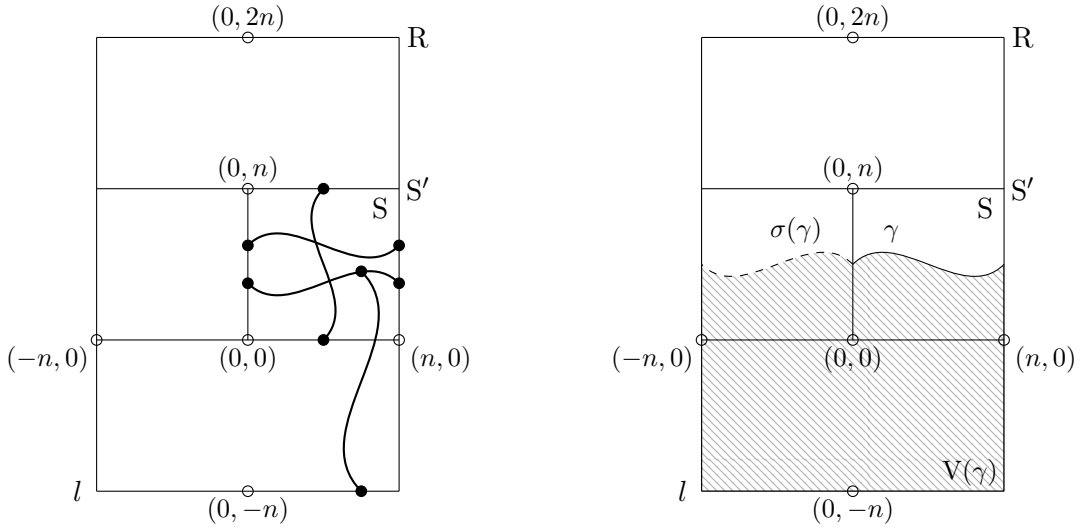


Figura 4: Caixas R, S e S' com representação dos eventos de interesse (esquerda) e conjunto de vértices $V(\gamma)$ (direita).

Assim, se Γ é o cruzamento esquerda-direita em S *mais alto*, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) &= \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B \mid A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ já que } B \subset A' \\
 &\geq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma) \mid A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ por inclusão de eventos} \\
 &= \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ por independência} \\
 &\geq \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A') \stackrel{\text{Cor. 3.1}}{\geq} \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Para justificar a primeira desigualdade da quarta linha, note que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \stackrel{\text{Cor. 3.1}}{\leq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\exists \text{ cruzamento cima-baixo em } S'\}) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\} \cup \{\sigma(\gamma) \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\}) \\
 &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)), \text{ por simetria;}
 \end{aligned}$$

o que implica que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \geq \frac{1}{4}$.

Finalmente, note que para que o evento $\{\exists \text{ cruzamento cima-baixo em } R\}$ aconteça, é suficiente que os eventos A , B e B' ocorram; onde $B' = \{\exists \text{ cruzamento horizontal esquerda-direita em } S \text{ que está conectado a } [-n, n] \times \{2n\} \text{ em } [-n, n] \times [0, 2n]\}$. Aqui, por simetria, temos que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \geq \frac{1}{8}$.

Dessa forma,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A \cap B \cap B'), \text{ por inclusão de eventos}$$

$$\stackrel{\text{FKG}}{\geq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') \geq \frac{1}{128},$$

como gostaríamos de, inicialmente, demonstrar. \square

Do Teorema 3.2, perceba que conseguimos derivar o seguinte corolário:

Corolário 3.3. Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Comece denotando por A_k o evento $\{\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}\}$. Agora, defina uma sequência (B_i) , tal que $i \in \{1, \dots, 4\}$, para $B_i = \{\exists \text{ cruzamento no lado mais fácil no retângulo } R_i\}$; onde $R_1 = [-2k, 2k] \times [k, 2k]$, $R_2 = [k, 2k] \times [-2k, 2k]$, $R_3 = [-2k, 2k] \times [-2k, -k]$ e $R_4 = [-2k, k] \times [-2k, 2k]$. Veja a Figura 5.

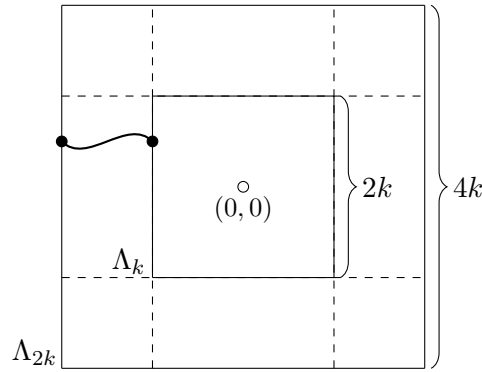


Figura 5: Caixas Λ_k e Λ_{2k} (linha sólida) com ocorrência do evento A_k e caixas R_i , com $i \in \{1, \dots, 4\}$ (linha tracejada).

Perceba que, nesse caso, $A_k \subset \bigcup_{i=1}^4 B_i$; logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_k) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i^c\right) \\ &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_1^c)^4, \text{ por rotação e utilizando FKG} \\ &\leq 1 - c^4 =: c_1 < 1, \text{ pelo Teorema 3.2.} \end{aligned}$$

Agora, seja A a intersecção dos eventos A_k , tal que k é da forma 2^m , com $m \in \mathbb{N}$, e $k \leq n$. Assim, $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} \subset A$; dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bigcap_k (\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k})\right] \\ &= \prod_k \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}), \text{ por independência} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_1^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}, \text{ pela caracterização de } k \\ &\leq n^{-\alpha}, \text{ com } \alpha \text{ pequeno o suficiente e } n \geq 1. \end{aligned}$$

Por fim, para mostrar que $p_c \geq \frac{1}{2}$, basta notar que se $n \rightarrow +\infty$, então $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$. Dessa forma, como existe uma quantidade enumerável de vértices $x \in \mathbb{Z}^2$, por invariância por translação, temos $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^2$. Assim, para $p = \frac{1}{2}$, a probabilidade de existir aglomerado de tamanho infinito é igual a zero; logo, $p_c \geq \frac{1}{2}$. \square

Agora que já vimos que a probabilidade de cruzamento, para $p = \frac{1}{2}$, está uniformemente limitada (em n) por c e $1 - c$, com $c > 0$, podemos analisar o que acontece quando $p \neq \frac{1}{2}$; em particular, para $p > \frac{1}{2}$. A proposição abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Proposição 3.3. Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$, tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

Demonstração:

Comece por definir a função Booleana $f(\omega) := \mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega)$. Agora, fixe um elo e em $R(2n, n)$ e veja que se $\nabla_e f(\omega) \neq 0$; i.e., se mudar o estado do elo e implica em mudar o valor da função f , então existe um caminho aberto na rede dual que passa pelo elo e^* e cruza (a menos de e^*) verticalmente uma caixa do tipo $R^* = [\frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$; nesse caso, pelo menos um dos dois “braços” de elos abertos na rede dual que se originam em e^* tem tamanho maior ou igual a $\frac{n}{2}$. A Figura 6 ilustra essa afirmação.

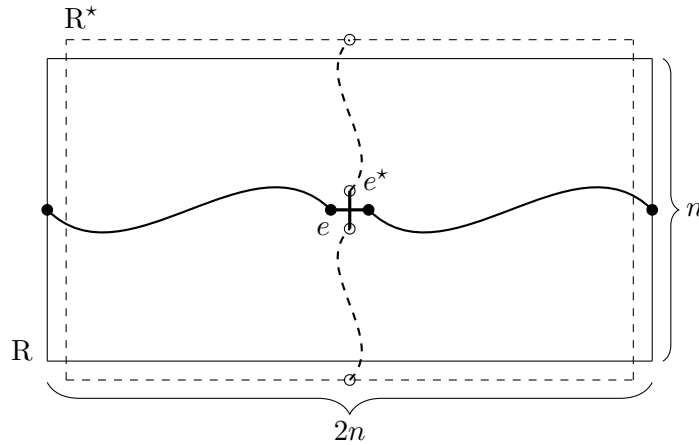


Figura 6: Caixas $R = R(2n, n)$ e R^* para um elo fixado e , tal que $\nabla_e f(\omega) \neq 0$.

Como os estados dos elos de ω^* são determinados, de maneira independente, se-

guindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1 - p$, o Corolário 3.3 nos dá, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_e(\omega))) &= \text{Inf}_e(f(\omega)) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p}(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}}), \text{ por inclusão de eventos} \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}}), \text{ já que } 1 - p < \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

O que acabamos de ver é que, para todo $e \in \mathcal{R}(2n, n)$, $\text{Inf}_e(f(\omega)) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 2.1, implica em dizer que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$F'(p) \geq c \ln(N) \mathbb{V}_p(f(\omega)). \quad (21)$$

Integrando a Inequação 21 entre $\frac{1}{2}$ e p , temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^p \ln \left(\frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' dp &\geq \int_{\frac{1}{2}}^p c \ln(N) dp \\ \implies \ln \left(\frac{F(p)}{1 - F(p)} \right) - \ln \left(\frac{F(\frac{1}{2})}{1 - F(\frac{1}{2})} \right) &\geq c \ln(N) \left(p - \frac{1}{2} \right) \\ \implies \frac{F(p)}{1 - F(p)} \cdot \frac{1 - F(\frac{1}{2})}{F(\frac{1}{2})} &\geq N^{c(p - \frac{1}{2})} \\ \implies F(p) \cdot \frac{1 - F(\frac{1}{2})}{F(\frac{1}{2})} \cdot N^{-c(p - \frac{1}{2})} &\geq 1 - F(p) \\ \implies F(p) &\geq 1 - \frac{1}{F(\frac{1}{2})} N^{-c(p - \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Relembrando que $F(p) := \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega))$ e tomando β pequeno o suficiente, concluimos a prova. \square

Antes de provarmos o teorema principal dessa subseção, precisamos de mais dois resultados – enunciados através dos lemas abaixo.

Lema 3.2. Para $d \geq 2$, $\exists p_c(d) \in (0, 1)$ tal que

$$\theta(p) : \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c(d) \\ > 0 & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

A demonstração do Lema 3.2 será feita no Apêndice A. O resultado será utilizado para a prova do Lema 3.3.

Lema 3.3. Seja $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com $p \mapsto \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : \exists \text{ aglomerado de tamanho infinito em } \omega\})$, então:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p < p_c(d) \\ 1 & \text{se } p > p_c(d). \end{cases}$$

A demonstração do Lema 3.3 será feita no Apêndice A.

Por fim, de posse dos resultados que acabamos de obter, somos capazes de demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração (Teorema 3.1):

Para provar que, em $d = 2$, p_c é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c \leq \frac{1}{2}$; já que, pelo Corolário 3.3, temos que $p_c \geq \frac{1}{2}$. Porém, a estratégia utilizada será, baseada no Lema 3.3, mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em ω ; o que implica que $p_c \leq \frac{1}{2}$.

Comece por definir os eventos $A_n := \mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $B_n := \mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$. A Figura 7 apresenta um esboço da ocorrência desses eventos.

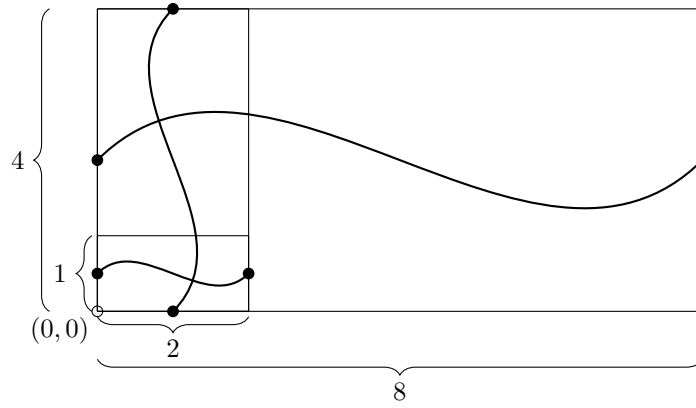


Figura 7: Ocorrência (alternada) dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$ para $n \in \{0, 1, 2\}$.

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω .

Assim, pela Proposição 3.3, e em um retângulo $R(2^{n+1}, 2^n)$, temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (22)$$

Da Inequação 22, perceba que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}$ converge; logo, por Borel-Cantelli³, A_n^c ocorre infinitas vezes com probabilidade 0; logo, $\mathbb{P}_p(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Por rotação, $\mathbb{P}_p(B_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Dessa forma, como A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em ω ; o que conclui a demonstração. \square

³O Lema de Borel-Cantelli diz que, para um sequência de eventos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, então a probabilidade de que A_n ocorra para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, é zero; i.e., $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$.

3.2 *Sharpness* da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Em dimensões maiores que $d = 2$, calcular o valor exato de p_c é tarefa difícil; de fato, não se espera que o ponto crítico, nesses casos, seja, ao menos, um número racional (ou mesmo algébrico). Entretanto, é possível mostrar que o modelo definido, para dimensões mais altas, também tem transição de fase “afiada” — o que significa dizer que a probabilidade de, por exemplo, a origem estar conectada à borda de uma caixa de lado $2n$ decai “muito” rápido (em particular, exponencialmente rápido) quando $p < p_c$. O teorema abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 3.3. Em um modelo de percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d , vale que

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe um $c > 0$ tal que $\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Sobre o resultado que acabamos de enunciar, primeiro perceba que nada foi dito quando $p = p_c$; para $d > 2$, esse é um problema particularmente difícil. O Teorema 3.3 foi provado primeiro por Aizenman e Barsky em [18] e Menshikov em [19] (uma prova mais recente pode ser vista em [20] e [21]). Para este texto, será apresentada uma demonstração introduzida em [22], e que utiliza a ideia de algoritmo discutida na Subseção 2.3.

Porém, antes da demonstração do teorema, um lema (de Análise) será necessário.

Lema 3.4. Considere uma sequência convergente de funções $f_n : [0, \bar{x}] \rightarrow [0, M]$ diferenciáveis e crescentes em x tal que, para todo $n \geq 1$,

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n, \quad (23)$$

onde $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$. Então, existe $\tilde{x} \in [0, \bar{x}]$ tal que

- a. Para qualquer $x < \tilde{x}$, existe $c_x > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $f_n(x) \leq e^{-c_x n}$.
- b. Para qualquer $x > \tilde{x}$, $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ satisfaz $f(x) \geq x - \tilde{x}$.

Demonstração:

Comece definindo

$$\tilde{x} := \inf \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Sigma_n(x)}{\ln(n)} \geq 1 \right\}.$$

Para mostrar “a.”, assumamos $x < \tilde{x}$; nesse caso, fixe um $\delta > 0$ e defina $x' := x - \delta$ e $x'' := x - 2\delta$. Iremos mostrar que existe decaimento exponencial para $f_n(x)$ em x'' em dois passos.

Primeiro, note que, pela definição de \tilde{x} , existe um inteiro N e um $\alpha > 0$ tal que $\Sigma_n(x) \leq n^{1-\alpha}$, $\forall n \geq N$. Em adição, veja que, da Inequação 23 e da cota que acabamos de estabelecer para Σ_n , temos que

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n \geq \frac{n}{n^{1-\alpha}} f_n \geq n^\alpha f_n. \quad (24)$$

Integrando a Inequação 24 entre x' e x , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x'}^x (\ln f_n(x))' dx &\geq n^\alpha \int_{x'}^x dx \\ \implies \ln \left(\frac{f_n(x)}{f_n(x')} \right) &\geq n^\alpha \delta \\ \implies f_n(x') e^{n^\alpha \delta} &\leq M, \text{ já que } f_n(x) \leq M \\ \implies f_n(x') &\leq M e^{-\delta n^\alpha}, \forall n \geq N. \end{aligned} \quad (25)$$

Em segundo lugar, da Inequação 25, perceba que existe $\Sigma < +\infty$ tal que $\Sigma_n(x') \leq \Sigma$, $\forall n \geq 1$. Além disso e de maneira similar ao que foi feito na Inequação 24, vale que

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma} f_n. \quad (26)$$

Integrando a Inequação 26 entre x'' e x' , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x''}^{x'} (\ln f_n(x))' dx &\geq \frac{n}{\Sigma} \int_{x''}^{x'} dx \\ \implies f_n(x'') &\leq M e^{-\frac{\delta}{\Sigma} n}, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Para mostrar “b.”, assumamos $x > \tilde{x}$. Aqui, para $n \geq 1$, defina $T_n := \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{i}$. Agora, note que vale

$$\begin{aligned} T_n' &= \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f_i'}{i} \\ &\stackrel{\text{Ineq. 23}}{\geq} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{i}{\Sigma_i} f_i \frac{1}{i} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\Sigma_i} \geq \frac{\ln \Sigma_{n+1} - \ln \Sigma_1}{\ln(n)}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que, para todo $i \geq 1$,

$$\frac{f_i}{\Sigma_i} \geq \int_{\Sigma_i}^{\Sigma_{i+1}} \frac{1}{t} dt = \ln \Sigma_{i+1} - \ln \Sigma_i.$$

Para $x' \in (\tilde{x}, x)$, e integrando $T_n' \geq \frac{\ln \Sigma_{n+1} - \ln \Sigma_1}{\ln(n)}$ entre x' e x , obtemos

$$\begin{aligned} T_n(x) - T_n(x') &\geq \frac{1}{\ln(n)} \left(\int_{x'}^x \ln \Sigma_{n+1}(x) - \ln(f_0(x)) dx \right) \\ &\geq \frac{(x - x')}{\ln(n)} (\ln \Sigma_n(x') - \ln(M)), \text{ já que } \Sigma_n \text{ é não-decrescente.} \end{aligned}$$

Assim, como, quando $n \rightarrow +\infty$, $T_n(x)$ converge para $f(x)$ – recorde que, para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números reais, se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, então $\frac{1}{\ln(n)} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ –, vale que

$$f(x) - f(x') \geq (x - x') \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \Sigma_n(x')}{\ln(n)} \right) \geq (x - x'), \text{ pela definição de } \tilde{x}.$$

Por fim, quando x' tende para \tilde{x} *por cima*, temos que $f(x) \geq x - \tilde{x}$. \square

Agora, defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)$. Feito isso, vamos estudar o resultado abaixo, que nos dá a última ferramenta necessária para provar o Teorema 3.3.

Lema 3.5. Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n .

A demonstração do Lema 3.5 é baseada no Teorema 2.3 e na escolha de um algoritmo \mathbf{T} conveniente para determinar $f(\omega) := \mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$. Nesse sentido, uma escolha trivial de algoritmo seria o de revelar todos os elos de Λ_n (seguindo alguma ordenação); porém, note que, aqui, $\delta_e(\mathbf{T}) = 1$ para “quase todos” os elos $e \in E_n$ – o que não ajuda.

Como alternativa à essa primeira sugestão de algoritmo, podemos utilizar a estratégia de começar a verificar os elos que compõem o aglomerado da origem a partir do centro da caixa Λ_n . Sendo assim, os elos que não estão próximos da origem seriam verificados se e somente se tivessem uma de suas extremidades conectadas a $C_0(\omega)$. Essa abordagem nos dá uma boa cota para as *revelações* dos elos longe da origem; em contrapartida, note que os elos próximos do centro da caixa ainda seriam revelados com alta probabilidade. Para mitigar esse último problema apontado, vamos, na verdade, escolher uma família de algoritmos que consulta os estados dos elos que pertencem ao aglomerado de $\partial \Lambda_k$, $\forall 1 \leq k \leq n$.

Demonstração (Lema 3.5):

Para qualquer $k \in [n]$, queremos um algoritmo \mathbf{T} para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo elo $e = (x, y)$ em E_n ,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial \Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial \Lambda_k). \quad (27)$$

Veja que se tivermos uma cota como a apresentada na Inequação 27, temos o resultado desejado. Para verificar isso, note que, para $x \in \Lambda_n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_{|k-d(0,x)|}(x)), \text{ onde } d(0,x) = \max(|x_1|, |x_2|) \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_k) = 2 S_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Da mesma forma,

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k) \leq 2 S_n. \quad (29)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.3 e utilizando a cota estabelecida pela Inequação 27, temos

$$\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{e \in E_n} (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k)) \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)),$$

o que implica, somando sobre todos os k 's, que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) &\leq p(1-p) \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k)) \\ \implies n \cdot \frac{\theta_n(p) (1 - \theta_n(p))}{p(1-p)} &\leq 4 S_n \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)), \text{ pelas Inequações 28 e 29} \\ \implies \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) &\geq \frac{n}{p(1-p) 4 S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \end{aligned}$$

De fato, basta mostrar que vale a Inequação 27. Para isso, vamos empregar um algoritmo **T** que explora, primeiro, os estados dos elos construídos a partir do conjunto de vértices que compõe o aglomerado de Λ_n intersecção com $\partial\Lambda_k$ e que não revela o estado de nenhum elo e tal que as duas extremidades de e estejam fora dessa componente conectada.

De maneira formal, defina o conjunto de índices **e** (antes, denotado por **i**) utilizando duas sequências $\partial\Lambda_k = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ e $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_k$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t .

Fixando uma ordem para os elos de E_n , defina $V_0 = \partial\Lambda_k$ e $E_0 = \emptyset$. Assuma, então, que os conjuntos $V_t \subset V_n$ e $E_t \subset E_n$ foram construídos de tal forma que, em t , uma das duas situações a seguir se aplica:

- a. Se existe elo $e = (x, y)$ em $E_n \setminus E_t$ tal que $x \in V_t$ e $y \notin V_t$ (se existir mais de um, escolha o menor deles – de acordo com a ordem estabelecida), então defina

$$\mathbf{e}_{t+1} := e, E_{t+1} := E_t \cup \{e\} \text{ e}$$

$$V_{t+1} := \begin{cases} V_t \cup \{y\} & \text{se } \omega_e = 1 \\ V_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Se e não existe, então defina \mathbf{e}_{t+1} como o menor elo em $E_n \setminus E_t$ (de acordo com a ordem estabelecida), $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$ e $V_{t+1} := V_t$.

Perceba que, enquanto estivermos na situação “a.”, ainda estamos descobrindo elos que fazem parte da componente conectada a $\partial\Lambda_k$; ao passo que, assim que mudamos para a situação “b.”, nós permanecemos nela. Nesse caso, $\tau(\omega)$ não é maior que o último t para o qual ainda estamos na situação “a.”.

Relembrando que $\delta_e(\mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e) &\leq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}) \\ &\leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k), \end{aligned}$$

o que prova a Inequação 27 e, portanto, finaliza a demonstração. \square

Finalmente, somos capazes de provar o teorema principal dessa subseção.

Demonstração (Teorema 3.3):

Seja $F(p) = \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega))$. Assim, utilizando os resultados dos Lemas 2.1 e 3.5, temos que

$$F'(p) = \theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (30)$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Inequação 30, somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$

Assim, aplicando o Lema 3.4 para $f_n(p) = (1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, existe $\tilde{p}_c \in [0, \bar{p}]$ tal que

- Para qualquer $p < \tilde{p}_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p) \leq e^{-c_p n} \implies \theta_n(p) \leq e^{-c_p n}$.
- Existe $c > 0$ tal que, para qualquer $p > \tilde{p}_c$, $\theta(p) \geq c(p - \tilde{p}_c)$.

Já que \bar{p} foi escolhido maior do que p_c , então \tilde{p}_c deve ser, necessariamente, igual a p_c (relembre que, para todo $p < p_c$, $\theta(p) = 0$ – o que está de acordo como item “a.”). \square

4 Modelos de percolação com dependência

Apesar de o Modelo de Percolação Bernoulli, como discutido na Seção 3 ser, talvez, o mais comum, ele não é, de forma alguma, o único. A independência que existe para determinação dos estados dos elos (ou vértices) nesse tipo de modelo pode não existir. Nesse sentido, modelos com dependência serão apresentados. Além disso, na Subseção 4.2, estudaremos como resultados semelhantes aos introduzidos nas Seções 2 e 3 podem ser estendidos para espaços mais gerais com medida monótona associada.

Porém, antes de iniciar uma discussão desse tipo, vale a observação de que os resultados apresentados nessa seção extrapolam o escopo do trabalho e, portanto, não serão demonstrados em sua totalidade. Ao invés disso, algumas provas serão esboçadas e outras referenciadas.

4.1 Percolação $2k$ Dependente

O primeiro (e mais simples) modelo com dependência que vamos discutir é chamado de “Percolação $2k$ Dependente”. Para defini-lo, comece, como feito na Seção 3, com um grafo d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, com \mathbb{Z}^d conjunto de vértices e E^d conjunto de elos tal que $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$ com $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $w \in \Omega$ tal que $\omega_e = 0$ para e “fechado” e $\omega_e = 1$ para e “aberto”, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$ e μ_p medida de probabilidade construída sobre (Ω, \mathcal{F}) . Além disso, defina uma sequência $(\xi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ de variáveis aleatórias *i.i.d.*, indexada pelo conjunto de vértices \mathbb{Z}^d , tal que $\mathbb{P}_p(\xi_x = 1) = p$ e $\mathbb{P}_p(\xi_x = 0) = 1 - p$. Por fim, como forma de, indiretamente, determinar $\mu_p(\omega)$, diga que, para $k \in \mathbb{N}$ fixo, $\omega_e = 1$ se existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\xi_x = 1$ e $e \in \Lambda_k(x)$; ou seja, um elo e está aberto se pertence a alguma caixa Λ_k centrada em x tal que $\xi_x = 1$. A Figura 8 mostra um recorte de uma possível configuração ω desse modelo.

Para “Percolação $2k$ ” como acabamos de definir, note que existe dependência para os estados dos elos; já que o conhecimento sobre o estado de um elo arbitrário e nos dá alguma informação sobre os estados de seus vizinhos. Porém, veja que, para dois elos $e = (x, y)$, $f = (w, z) \in E^d$, se $w, z \notin \Lambda_k(x) \cup \Lambda_k(y)$, então $\text{COV}(\omega_e, \omega_f) = 0$. Por causa dessa característica, esse tipo de modelo pode ser chamado de “modelo dependente de

curto alcance”.

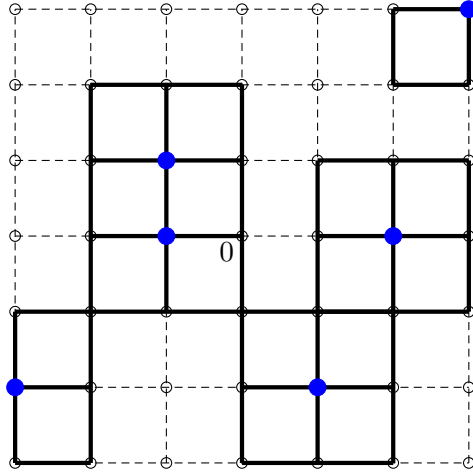


Figura 8: Configuração ω para o modelo de Percolação $2k$ Dependente com $k = 1$ em recorte de \mathbb{L}^2 .

Finalmente, e utilizando o resultado de Liggett, Schonmann e Stacey em [23], temos que, para um modelo de percolação com dependência finita em \mathbb{L}^d com $d \geq 2$, existe $p_c = p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\} < 1$ (isto é, existe transição de fase para o modelo de Percolação $2k$ Dependente), onde, de novo, $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $p \mapsto \mu_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$. Nesse sentido, como fizemos na Subseção 3.2, nos interessa estudar o comportamento da função $\theta(p)$ para $p < p_c$ e $p > p_c$. O teorema abaixo, similar ao Teorema 3.3, nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 4.1. No modelo de Percolação $2k$ Dependente em \mathbb{L}^d , existe $p_c = p_c(d, k)$ tal que vale

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe um $c > 0$ tal que $\mu_p(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Esboço da demonstração:

A estratégia adotada será muito parecida com a demonstração feita para o Teorema 3.3; de fato, considere uma família de algoritmos \mathbf{T} similar àquela definida para o Lema 3.5. Nesse caso, \mathbf{T} irá revelar o aglomerado de $\partial\Lambda_s$, com $s \in [n]$. Aqui, porém, perceba que o algoritmo explora, primeiro, os vértices $x \in \Lambda_n$ tal que $\partial\Lambda_k(x)$ está conectada, através de um caminho aberto no processo de percolação de elos, a $\partial\Lambda_s$ (notação: $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$).

Assim, para um conjunto de índices \mathbf{v} com duas sequências $\partial\Lambda_s = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n$ e $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n$, com A_t representando o conjunto de vértices x tal que

$\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$ e B_t o conjunto de vértices explorados até o instante t , temos, estabelecendo uma ordem para os vértices considerados, uma construção (em t) do seguinte tipo:

- a. Ou existe um vértice x em $\Lambda_n \setminus B_t$ tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} A_t$ (se existir mais de um, escolha o menor). Nesse caso, defina $\mathbf{v}_{t+1} := x$, $B_{t+1} = B_t \cup \{x\}$,

$$A_{t+1} := \begin{cases} A_t \cup \{x\} & \text{se } \xi_x = 1 \\ A_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Ou não existe x com tais características. Nesse caso, defina \mathbf{v}_{t+1} como o menor vértice em $\Lambda_n \setminus B_t$, $B_{t+1} := B_t \cup \{x\}$ e, por fim, $A_{t+1} := A_t$.

De novo, perceba que, em “a.”, ainda estamos descobrindo vértices x tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$; porém, se mudamos para “b.”, permanecemos nessa opção até o final da exploração. Em resumo, para $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$, $\tau(\tilde{\omega}) = \min\{t \geq 1 : \forall z \in \tilde{\Omega}, z_{\mathbf{i}_{[t]}} = \tilde{\omega}_{\mathbf{i}_{[t]}} \implies \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(z) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\tilde{\omega})\}$ não é maior que o último t para o qual a opção “a.” ainda é válida. Dessa maneira, lembrando da definição de $\delta_x(\mathbf{T})$, temos que

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\tilde{\omega}) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (31)$$

A fim de fixar notação, perceba que \mathbb{P}_p , nesse caso, é medida de probabilidade para um subconjunto mensurável de $\tilde{\Omega}$. Além disso, por inclusão de eventos e utilizando a Inequação 31, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned} \quad (32)$$

com a constante $h = h(p) \geq 1$ “pagando o preço” para abrir $\Lambda_k(x)$. Assim, utilizando as Inequações 31 e 32, temos que, para todo $x \in \Lambda_n$,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \quad (33)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.3 para $f(\tilde{\omega}) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\tilde{\omega})$ e empregando a Inequação 33 com o resultado adicional de que $\sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \leq 2S_n$, temos, seguindo exatamente os mesmos passos apresentados na primeira metade da prova do Lema 3.5, que

$$\sum_{x \in \Lambda_n} \inf_x(\mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\tilde{\omega})) \geq \frac{n}{h S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)), \quad (34)$$

onde $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : 0 \xleftrightarrow{\omega} \partial\Lambda_n\})$, $\theta_s(p) := \mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : 0 \xleftrightarrow{\omega} \partial\Lambda_s\})$ e, por último, $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$.

Finalmente, e como na demonstração do Teorema 3.3, utilizando o Lema 2.1 com a Inequação 34 e aplicando, para $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, tal que $\bar{p} \in (p_c, 1)$, o Lema 3.4, obtemos o resultado procurado para a medida \mathbb{P}_p .

Agora, a fim de estender o resultado para a medida definida sobre o processo de elos, note que $\mu_p(A)$ é, por construção, igual a $\mathbb{P}_p(\tilde{A})$, tal que \tilde{A} representa o conjunto das possíveis configurações $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ que induzem a ocorrência de A para $\omega \in \Omega$. Assim, $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : 0 \xleftrightarrow{\omega} \partial\Lambda_n\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\})$, bem como, para $C_0(\tilde{\omega}) := \{y \in \mathbb{Z}^d : 0 \xleftrightarrow{\omega} y\}$, $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : |C_0(\tilde{\omega})| = +\infty\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$, o que conclui a demonstração. \square

4.2 Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

O modelo que vamos discutir nessa subseção foi inicialmente introduzido por Fortuin e Kasteleyn em [24] e é conhecido como “Modelo de Percolação FK” (ou “*Random Cluster Model*”).

Comece definindo $G = (V, E)$ grafo finito, tal que $V \subset \mathbb{Z}^d$ é o conjunto de vértices e $E \subset E^d$ é o conjunto de elos $e = (x, y)$, com $x, y \in V$, tal que $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$.

Defina um espaço de probabilidade $(\bar{\Omega}, \mathcal{F}, \mu)$, com $\bar{\Omega} = \{0, 1\}^{|E|}$ (com $\omega_e = 0$ para elo e “fechado” e $\omega_e = 1$ para elo e “aberto”), $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\bar{\Omega})$ e, para $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$,

$$\mu_{G,p,q}(\omega) = \frac{p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|}q^{k(\omega)}}{Z_{G,p,q}},$$

onde $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$, $k(\omega)$ é o número de componentes conectadas em ω (incluindo vértices isolados) e

$$Z_{G,p,q} = \sum_{\omega \in \bar{\Omega}} p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|}q^{k(\omega)}$$

é constante normalizadora.

Note que, para $q = 1$, $\mu_{G,p,q}(\omega)$ é medida produto Bernoulli. Para $q > 1$ inteiro, o Modelo de Random Cluster se relaciona com o Modelo de Potts.

Perceba, também, que a medida μ , como acabamos de descrever, é medida monótona. De maneira geral, temos a seguinte definição:

Definição 4.1. Uma medida μ em $\{0, 1\}^{|\mathbb{E}|}$ é *monótona* se, para qualquer $e \in \mathbb{E}$, qualquer $F \subset \mathbb{E}$ e para qualquer $\xi, \zeta \in \{0, 1\}^{|\mathbb{F}|}$ satisfazendo $\xi \leq \zeta$, $\mu(\omega_e = \xi_e, \forall e \in F) > 0$ e $\mu(\omega_e = \zeta_e, \forall e \in F) > 0$, temos que

$$\mu(\omega_e = 1 \mid \omega_e = \xi_e, \forall e \in F) \leq \mu(\omega_e = 1 \mid \omega_e = \zeta_e, \forall e \in F).$$

Medidas como as da Definição 4.1 gozarão de versões estendidas de alguns dos resultados das Seções 2 e 3, discutidas ao longo dessa subseção.

Agora, a fim de estender o modelo que acabamos de descrever para um conjunto com volume infinito, defina, para $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathbb{E}^d|}$ e $\xi \in \Omega$,

$$\omega_G^\xi(e) = \begin{cases} \omega_e & \text{se } e \in G \\ \xi_e & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com ξ agindo como *boundary condition* (ou “condição de fronteira”). Assim,

$$\mu_{G,p,q}^\xi(\omega) = \begin{cases} \frac{p^{|\omega|(1-p)} |\mathbb{E}| - |\omega| q^{k(\omega, \xi)}}{Z_{G,p,q}^\xi} & \text{se } \omega \in \bar{\Omega} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $Z_{G,p,q}^\xi = \sum_{\omega \in \bar{\Omega}} p^{|\omega|(1-p)} |\mathbb{E}| - |\omega| q^{k(\omega, \xi)}$.

Em particular, estamos interessados nas medidas $\mu_{G,p,q}^0$ e $\mu_{G,p,q}^1$. A primeira delas implica que, a não ser pelas conexões dentro de G , os vértices de ∂V não estão conectados; ao passo que, na segunda, todos os vértices $x \in \partial V$ estão conectados.

Por fim, a ferramenta que vamos utilizar para argumentar em favor da extensão que gostaríamos de propor para definir uma medida $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi$ é chamada de *Thermodynamic limit*, e é apresentada na forma do teorema a seguir.

Teorema 4.2 (*Thermodynamic limit*). Seja $p \in [0, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\Lambda = (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de caixas tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$, quando $n \rightarrow +\infty$. Então, para $\xi = 0, 1$,

a. O limite

$$\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\Lambda_n,p,q}^\xi$$

existe e independe da escolha de Λ .

b. Vale que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^0 \leq \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1$, no sentido de que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^0(A) \leq \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(A)$, para todo $A \in \mathcal{F}$ evento crescente (chamado de “ordem estocástica de medidas”).

A demonstração do Teorema 4.2 não será feita, porém, é possível encontrá-la em [25] (Thm. 4.19, “a” e “c”).

Agora, de maneira similar ao que fizemos na Seção 3, podemos definir o ponto crítico como $p_c^\xi(q) = \sup\{p : \theta^\xi(p, q) = 0\}$ com $\xi \in \{0, 1\}$, tal que $\theta^\xi : [0, 1] \times [1, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $(p, q) \mapsto \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi(|C_0(\omega)| = +\infty)$. Além disso, como $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0 = \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1$ para quase todo $p \in [0, 1]$ (em [25], Thm. 4.63), $\theta^0(p, q) = \theta^1(p, q)$ para quase todo $p \in [0, 1]$; dessa forma, denotamos $p_c(q) = p_c^0(q) = p_c^1(q)$.

O teorema apresentado a seguir, que determina o ponto crítico para o modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 foi inicialmente provado em [26] (com demonstrações alternativas em [27] e [28]). Esse é um teorema “novo”, no sentido de que ele generaliza o resultado para $q \geq 1$; ao passo que, antes, apenas os casos onde $q = 1$, $q = 2$ ou q “muito grande” haviam sido demonstrados.

Teorema 4.3 (Beffara, Duminil-Copin). Para o modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 com $q \in [1, +\infty)$,

$$p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}.$$

Antes, porém, da demonstração do Teorema 4.3, são necessários alguns resultados intermediários.

Lema 4.1 (FKG). Sejam X, Y variáveis aleatórias crescentes e limitadas e μ medida monótona, então

$$\mathbb{E}_\mu(X \cdot Y) \geq \mathbb{E}_\mu(X) \cdot \mathbb{E}_\mu(Y).$$

Note que o Lema 4.1 é uma generalização do já apresentado (e demonstrado) Lema 3.1. A demonstração dessa versão mais geral, que não será feita aqui, pode ser encontrada em [25] (Thm. 2.16). Um corolário imediato, apresentado a seguir, será útil mais tarde.

Corolário 4.1. (Truque da raiz quadrada) Sejam A_1, A_2 eventos crescentes e com mesma probabilidade (determinada, nesse caso, pela medida μ). Defina $A = A_1 \cup A_2$. Então

$$\mu(A_1) \geq 1 - (1 - \mu(A))^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração:

Veja que

$$1 - \mu(A) = 1 - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$\geq 1 - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1)\mu(A_2), \text{ FKG para } X = \mathbb{I}_{A_1}(\omega) \text{ e } Y = \mathbb{I}_{A_2}(\omega)$$

$$= 1 - 2\mu(A_1) + \mu(A_1)^2 = (1 - \mu(A_1))^2, \text{ já que, por hipótese } \mu(A_1) = \mu(A_2),$$

o que implica que $\mu(A_1) \geq 1 - (1 - \mu(A))^{1/2}$. \square

Proposição 4.1. No modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 , para todo $p \in (p_c, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\xi \in \{0, 1\}$, vale que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi(\{\omega \in \Omega : N(\omega) = 1\}) = 1$, onde $N(\omega)$ conta o número de aglomerados abertos de tamanho infinito em ω .

O que a Proposição 4.1 nos diz é que, se $\theta^\xi(p, q) > 0$, existe, quase certamente, aglomerado único de elos abertos. Esse resultado também não será demonstrado aqui; entretanto, é possível encontrar a prova da proposição em [25] (Thm. 5.99).

Proposição 4.2. Se $\omega \sim \mu_{G, p, q}^0$, então $\omega^* \sim \mu_{G^*, p^*, q^*}^1$, onde ω^* é uma configuração na rede dual com $G^* = (V^*, E^*)$, tal que $q^* = q$ e p^* respeita

$$p^* = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p}, \text{ ou, de maneira equivalente } \frac{p^*p}{(1-p^*)(1-p)} = q.$$

Demonstração:

Seja $G = (V^*, E^*)$ grafo finito. Nesse caso, por definição,

$$\mu_{G, p, q}^0 \propto \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|\omega|} q^{k(\omega, 0)}. \quad (35)$$

Porém, note que $|\omega| = |E| - |\omega^*|$ e $k(\omega, 0) = h(\omega^*)$, onde $h(\cdot)$ é a função que conta as faces de um grafo planar conectado. A Figura 9 nos ajuda a ter uma ideia de o porquê a última afirmação é verdadeira.

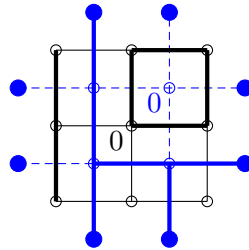


Figura 9: Configuração ω definida em G (linha sólida) e configuração correspondente ω^* definida em G^* (linha tracejada).

Além disso, pela Fórmula de Euler⁴, temos que $h(\omega^*) = |\omega^*| + k(\omega^*, 1) + 1 - |V^*|$. Assim, da Equação 35, podemos escrever

$$\mu_{G, p, q}^0 \propto \left(\frac{p}{1-p} \right)^{|E| - |\omega^*|} q^{|\omega^*| + k(\omega^*, 1) + 1 - |V^*|}$$

⁴Para qualquer grafo planar (conectado) com $|V|$ vértices, $|E|$ elos e $|H|$ faces, vale que $|V| - |E| + |H| = 2$.

$$\begin{aligned} &\propto \left(q \cdot \frac{1-p}{p} \right)^{|\omega^*|} q^{k(\omega^*, 1)} \\ &= \left(\frac{p^*}{1-p^*} \right)^{|\omega^*|} q^{k(\omega^*, 1)} \propto \mu_{G^*, p^*, q^*}^1, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. \square

Proposição 4.3. No modelo de Percolação FK, $\mu_{G,p,q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração:

Nessa prova, a fim de não sobrecarregar a notação, defina $R(n, m) := [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}] \times [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]$; e, por consequência, $\mathcal{H}(n, m) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n, m)\}$ (determine $\mathcal{V}(n, m)$ de forma análoga). Assim, para $k \ll n$ e usando o Corolário 4.1, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \text{lado A de } \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}) &\geq 1 - (1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}))^{\frac{1}{4}} \\ &= 1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &\geq 1 - \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}}, \text{ por inclusão de eventos.} \end{aligned}$$

Agora, para $R := R(n+1, n)$, note que

$$\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0 \left(\left\{ \partial\Lambda_k \left(-\frac{k}{2}, 0 \right) \leftrightarrow \text{lado A de } \partial R \right\} \cap \left\{ \partial\Lambda_{k'} \left(\frac{k}{2}, 0 \right) \leftrightarrow \text{lado B de } \partial R \right\} \right) \geq 1 - 2 \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial\Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}}, \quad (36)$$

onde $\Lambda_{k'}$ é uma caixa deslocada de k unidades para o lado em relação à caixa Λ_k (veja a Figura 10). Perceba que, para a desigualdade acima, utilizamos o fato de que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(A_i^c)$, para qualquer sequência finita de eventos $\{A_i\}_{i=1}^n$.

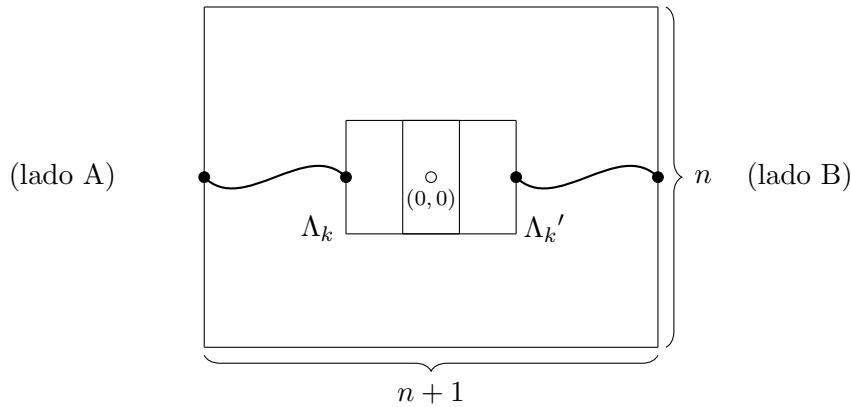


Figura 10: Esboço da ocorrência do evento $\{\partial\Lambda_k(-\frac{k}{2}, 0) \leftrightarrow \text{lado A de } \partial R\} \cap \{\partial\Lambda_{k'}(\frac{k}{2}, 0) \leftrightarrow \text{lado B de } \partial R\}$.

Pela Proposição 4.1; i.e., usando o fato de que na região supercrítica o aglomerado aberto com tamanho infinito existe e é único (quase certamente), e empregando a cota determinada através da Inequação 36,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \geq 1 - 2 \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0(\partial \Lambda_k \not\leftrightarrow +\infty)^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, \text{ para todo } p > p_c,$$

o que conclui a demonstração desse pequeno fato. \square

Além disso, e como mencionado em parágrafos anteriores, alguns dos resultados já discutidos em outras seções podem ser estendidos para medidas monótonas; em particular, para $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi$. Nesse sentido, vale uma extensão do Teorema 2.3, enunciada a seguir.

Teorema 4.4. Seja $n \in \mathbb{N}$ e μ medida monótona em $[n]$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então vale que

$$\mathbb{V}_\mu(f(\omega)) \leq \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i^\mu(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T})$ é definido da mesma forma que foi feito para o Teorema 2.3.

A prova do Teorema 4.4, que se assemelha à demonstração do Teorema 2.3, pode ser encontrada em [22].

Como aplicação do Teorema 4.4 temos que, como no Teorema 3.3, a probabilidade da origem estar conectada à borda de uma caixa de lado $2n$ decai, na região subcrítica do modelo considerado, exponencialmente rápido com n . O teorema abaixo nos dá um resultado desse tipo.

Teorema 4.5. No modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^d , com $q \geq 1$, vale que

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe $c > 0$ tal que $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

A demonstração do Teorema 4.5 é, mais uma vez, similar à apresentada como prova para o Teorema 3.3, e pode ser encontrada, também, em [22].

Finalmente, e de posse de todas essas ferramentas, podemos nos concentrar na demonstração do principal resultado dessa subseção, o Teorema 4.3.

Esboço da demonstração (Teorema 4.3):

Para a prova desse resultado, vamos, de novo, dividir os casos em que $p_c(q) \geq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$ e $p_c(q) \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$; o que concluiria a demonstração.

Note, primeiro, que, para p tal que $p = p^*$ (chamado de ponto *self-dual*, ou p_{sd}), vale que $p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Nesse caso, para $p = p_{sd}$,

$$\begin{aligned}\mu_{G,p,q}^1(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mu_{G^*,p^*,q^*}^0(\mathcal{V}^*(n, n+1)), \text{ pela Proposição 4.2} \\ &\geq 1 - \mu_{G^*,p^*,q^*}^1(\mathcal{V}^*(n, n+1)), \text{ pelo item "b." do Teorema 4.2,}\end{aligned}$$

o que implica, por rotação e utilizando o fato de que, por hipótese, $p = p^*$, em

$$\mu_{G,p,q}^1(\mathcal{H}(n+1, n)) \geq \frac{1}{2} \stackrel{\text{Similarmente}}{\geq} \mu_{G,p,q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Agora, sob o resultado da Proposição 4.3, que diz que $\forall p > p_c$, $\mu_{G,p,q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$, temos que, pelo lado direito da Inequação 37, $p_c \geq p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Para mostrar que $p_c \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$ e finalizar a prova, utilizaremos o item "a." do Teorema 4.5. Para isso, assumamos $p_c > p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Nesse caso,

$$\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(\mathcal{H}(n+1, n)) \leq n \mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ pelo Teorema 4.5,}$$

o que é um absurdo, já que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(\mathcal{H}(n+1, n)) \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (pelo lado esquerdo da Inequação 37). Logo, $p \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. \square

Referências

- [1] Hugo Duminil-Copin. Sharp threshold phenomena in statistical physics. *Japanese Journal of Mathematics*, 14(1):1–25, 2019.
- [2] P Erdős and A Rényi. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, 1959.
- [3] Grigorii Aleksandrovich Margulis. Probabilistic characteristics of graphs with large connectivity. *Problemy peredachi informatsii*, 10(2):101–108, 1974.
- [4] Lucio Russo. On the critical percolation probabilities. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 56(2):229–237, 1981.
- [5] Lucio Russo. An approximate zero-one law. *Probability Theory and Related Fields*, 61(1):129–139, 1982.
- [6] Jeff Kahn, Gil Kalai, and Nathan Linial. The influence of variables on boolean functions. In *29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 68–80. IEEE, 1988.
- [7] William Beckner. Inequalities in fourier analysis. *Annals of Mathematics*, 102(1):159–182, 1975.
- [8] Aline Bonami. Étude des coefficients de fourier des fonctions de $L^p(G)$. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 20, pages 335–402, 1970.
- [9] Jean Bourgain, Jeff Kahn, Gil Kalai, Yitzhak Katznelson, and Nathan Linial. The influence of variables in product spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 77(1-2):55–64, 1992.
- [10] Michel Talagrand et al. On Russo’s approximate zero-one law. *The Annals of Probability*, 22(3):1576–1587, 1994.
- [11] Ryan O’Donnell. Lecture 16 of “Analysis of Boolean functions”. <http://www.cs.cmu.edu/~odonnell/boolean-analysis/>, 2007. [Acesso em 12-Novembro-2019].

- [12] Andrew Chi-Chin Yao. Probabilistic computations: Toward a unified measure of complexity. In *18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1977)*, pages 222–227. IEEE, 1977.
- [13] Ryan O’Donnell, Michael Saks, Oded Schramm, and Rocco A Servedio. Every decision tree has an influential variable. In *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’05)*, pages 31–39. IEEE, 2005.
- [14] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Communications in mathematical physics*, 74(1):41–59, 1980.
- [15] Béla Bollobás and Oliver Riordan. The critical probability for random voronoi percolation in the plane is $1/2$. *Probability theory and related fields*, 136(3):417–468, 2006.
- [16] Béla Bollobás and Oliver Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [17] Béla Bollobás and Oliver Riordan. A short proof of the harris–kesten theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 38(3):470–484, 2006.
- [18] Michael Aizenman and David J Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Communications in Mathematical Physics*, 108(3):489–526, 1987.
- [19] Mikhail V Menshikov. Coincidence of critical points in percolation problems. In *Soviet Mathematics Doklady*, volume 33, pages 856–859, 1986.
- [20] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation and the ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725–745, 2016.
- [21] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation on \mathbb{Z}^d . *L’Enseignement Mathématique*, 62:199–206, 2016.
- [22] Hugo Duminil-Copin, Aran Raoufi, and Vincent Tassion. Sharp phase transition for the random-cluster and potts models via decision trees. *Annals of Mathematics*, 189(1):75–99, 2019.

- [23] Thomas M Liggett, Roberto H Schonmann, Alan M Stacey, et al. Domination by product measures. *The Annals of Probability*, 25(1):71–95, 1997.
- [24] Cornelius Marius Fortuin and Piet W Kasteleyn. On the random-cluster model: I. introduction and relation to other models. *Physica*, 57(4):536–564, 1972.
- [25] Geoffrey Grimmett. *The random-cluster model*. Springer, 2004.
- [26] Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin. The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probability Theory and Related Fields*, 153(3-4):511–542, 2012.
- [27] Hugo Duminil-Copin and Ioan Manolescu. The phase transitions of the planar random-cluster and potts models with $q \geq 1$ are sharp. *Probability Theory and Related Fields*, 164(3-4):865–892, 2016.
- [28] Hugo Duminil-Copin, Aran Raoufi, Vincent Tassion, et al. A new computation of the critical point for the planar random-cluster model with $q \geq 1$. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 54(1):422–436, 2018.
- [29] Sam Spiro. REU 2016. Fourier Analysis of Boolean Functions. <http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Spiro.pdf>, 2016. [Acesso em 12-Novembro-2019].
- [30] Bernardo N. B. de Lima. V Simpósio Nacional — Jornadas de Iniciação Científica. Introdução à Percolação. https://www.youtube.com/playlist?list=PLo4jXE-LdDTSG0AA88TVAqiLJoeNG_YSs, 2010. [Acesso em 15-Maio-2020].
- [31] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. Springer, 1999.

Apêndice A – Outras demonstrações

A seguir, serão apresentadas as demonstrações de alguns dos resultados que foram utilizados ao longo do texto e que não tinham relação direta com o assunto que estava sendo discutido; e, portanto, não foram provados. Para ler o enunciado do Lema ou Proposição de interesse, volte à subseção apropriada.

Demonstração do Lema 2.2 (baseado em [29]):

Seja $f(\omega) = \sum_{S \in [n]} \hat{f}(S) \chi_S$ e $g(\omega) = \sum_{T \in [n]} \hat{g}(T) \chi_T$, então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{S \in [n]} \hat{f}(S) \chi_S \right) \cdot \left(\sum_{T \in [n]} \hat{g}(T) \chi_T \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S \in [n]} \sum_{T \in [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \chi_S \chi_T \right). \end{aligned}$$

Agora, note que:

$$\begin{aligned} \chi_S \chi_T &= (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i} (-1)^{\sum_{j \in T} \omega_j} \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S} \omega_i + \sum_{j \in T} \omega_j} \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i + \sum_{j \in S \cap T} 2\omega_j}, \text{ onde } S \Delta T \text{ é a diferença simétrica entre } S \text{ e } T \\ &= (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i} ((-1)^2)^{\sum_{j \in S \cap T} \omega_j} = (-1)^{\sum_{i \in S \Delta T} \omega_i} = \chi_{S \Delta T}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) &= \mathbb{E}_{\frac{1}{2}} \left(\sum_{S \in [n]} \sum_{T \in [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \chi_{S \Delta T} \right) \\ &= \sum_{S \in [n]} \sum_{T \in [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(T) \cdot \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T}), \end{aligned}$$

onde $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_{S \Delta T})$ é igual a 0, se $S \neq T$ (note que, se $A \neq \emptyset$, então $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_A) = \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\sum_{i \in A} \omega_i})$; que é o mesmo que dizer que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(\chi_A) = \prod_{i \in A} \mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\omega_i}) = 0$, visto que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}((-1)^{\omega_i}) = 0$, $\forall i \in A$) – ou é igual a 1, se $S = T$ (já que $\chi_{\emptyset} = 1$). Dessa forma:

$$\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f(\omega) \cdot g(\omega)) = \sum_{S \in [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(S).$$

Por fim, tomando $f(\omega) = g(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$, segue que $\mathbb{E}_{\frac{1}{2}}(f^2(\omega)) = \sum_{S \in [n]} (\hat{f}(S))^2$, como queríamos demonstrar. \square

Demonstração da Proposição 3.1 (baseado em [30]):

Para mostrar que $\theta(p)$ é não-decrescente, usaremos a ideia de acoplamento. Assim, seja $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independente e igualmente distribuídas tal que $\zeta_i \sim U[0, 1]$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Agora, defina um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ “maior”, com $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} [0, 1]$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$ e onde \mathbb{P} é medida produto.

Nesse caso, dizemos que um elo é p -aberto se $\zeta(e) \leq p$. Agora, note que, se $p_1 < p_2$, então um elo p_1 -aberto é, também, p_2 -aberto. Portanto,

$$\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_1)| = +\infty\} \subset \{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_2)| = +\infty\};$$

o que implica em

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_1)| = +\infty\}) \leq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega, p_2)| = +\infty\}),$$

que é o mesmo que dizer que $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$. □

Demonstração do Lema 3.1 (baseado em [31]):

Suponha, inicialmente, que X e Y sejam variáveis aleatórias que dependem dos estados de uma quantidade finita (e_1, e_2, \dots, e_n) de elos. Nesse caso, a prova será feita por indução em n .

$X(\omega(e_1))$ e $Y(\omega(e_1))$ são, por hipótese, funções crescentes. Assim, para $n = 1$, temos que

$$[X(\omega_1(e_1)) - X(\omega_2(e_1))] [Y(\omega_1(e_1)) - Y(\omega_2(e_1))] \geq 0,$$

para quaisquer duas possíveis configurações ω_1 e ω_2 independentes e definidas no mesmo espaço de probabilidade. Dessa forma,

$$\mathbb{E}_p[[X(\omega_1(e_1)) - X(\omega_2(e_1))] [Y(\omega_1(e_1)) - Y(\omega_2(e_1))]] \geq 0.$$

Aplicando a propriedade de linearidade da esperança, independência e usando o fato de que ω_1 e ω_2 estão definidas em um mesmo espaço, segue que

$$\mathbb{E}_p[X(\omega(e_1))Y(\omega(e_1))] \geq \mathbb{E}_p[X(\omega(e_1))] \mathbb{E}_p[Y(\omega(e_1))].$$

Agora, suponha válida a hipótese de indução; i.e., para $n = k$, vale que

$$\mathbb{E}_p[X(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))Y(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))] \geq \mathbb{E}_p[X(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))] \mathbb{E}_p[Y(\omega(e_1), \dots, \omega(e_k))].$$

Para $n = k+1$, considere $X = X(w(e_1), \dots, w(e_{k+1}))$ e $Y = Y(w(e_1), \dots, w(e_{k+1}))$. Sendo assim, temos que

$$\mathbb{E}_p(XY) = \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[XY \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]].$$

Como, para $\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)$ fixados, X e Y dependem apenas do estado do $(k+1)$ -ésimo elo, podemos dizer que

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)] \mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]].$$

Aqui, como $\mathbb{E}_p[\cdot \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_k)]$ é função de $\omega(e_1), \dots, \omega(e_k)$, podemos aplicar a hipótese de indução e o resultado, para $n = k+1$, é obtido.

Por fim, temos que retirar a hipótese adicional de que X e Y dependem dos estados de uma quantidade finita de elos para concluir a prova. Para isso, seja e_1, e_2, \dots uma ordenação dos elos de E^d ; então, defina $X_n = \mathbb{E}_p[X \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$ e $Y_n = \mathbb{E}_p[Y \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_n)]$. Assim, pelos argumentos apresentados acima,

$$\mathbb{E}_p[X_n Y_n] \geq \mathbb{E}_p[X_n] \mathbb{E}_p[Y_n]. \quad (38)$$

Como, por hipótese, X e Y são limitadas, pelo Teorema de Convergência de Martingais, quando $n \rightarrow +\infty$, $X_n \rightarrow X$ e $Y_n \rightarrow Y$ quase certamente; de modo que $\mathbb{E}_p[X_n] \rightarrow \mathbb{E}_p[X]$ e $\mathbb{E}_p[Y_n] \rightarrow \mathbb{E}_p[Y]$, quando $n \rightarrow +\infty$. Agora, em relação ao termo $\mathbb{E}_p[X_n Y_n]$, é possível afirmar, aplicando as desigualdades “triangular” e “de Cauchy-Schwarz” (respec.), que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[|X_n Y_n - XY|] &= \mathbb{E}_p[|(X_n - X)Y_n + (Y_n - Y)X|] \\ &\leq \mathbb{E}_p[|(X_n - X)Y_n| + |(Y_n - Y)X|] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_p[(X_n - X)^2] \mathbb{E}_p[Y_n^2]} + \sqrt{\mathbb{E}_p[(Y_n - Y)^2] \mathbb{E}_p[X^2]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \end{aligned}$$

logo, $\mathbb{E}_p(X_n Y_n) \rightarrow \mathbb{E}_p(XY)$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Tomando o limite, quando $n \rightarrow +\infty$, na Inequação 38, concluímos a prova. \square

Demonstração do Lema 3.2 (baseado em [30]):

Utilizando a Proposição 3.1, é suficiente provar que valem as seguintes afirmações.

1. $\exists \hat{p} > 0$, tal que, $\forall p < \hat{p}$, $\theta(p) = 0$; e
2. $\exists \tilde{p} < 1$, tal que, $\forall p > \tilde{p}$, $\theta(p) > 0$.

Afirmação 1:

Primeiro, note que $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) = \sum_{n \in \mathbb{N}} [n \cdot \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = n)] + (+\infty \cdot \theta(p))$; onde $|C_0(\omega)|$ pode ser escrita como $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{I}_{(0 \leftrightarrow x)}(\omega)$. Aqui, para mostrar que $\theta(p) = 0$, basta verificar que $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) < +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) &= \mathbb{E}_p \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{I}_{(0 \leftrightarrow x)}(\omega) \right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{\gamma=(0, \dots, x)} \gamma \text{ é aberto} \right) \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}). \end{aligned}$$

Nesse caso, note que $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} (\cdot)$ corresponde à soma de todos os caminhos finitos que começam na origem e terminam em algum vértice $x \in \mathbb{Z}^d$. Dessa forma, é possível escrever que

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma=(0, \dots, x)} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\gamma=(0, \dots, x_n) \\ |\gamma|=n}} \mathbb{P}(\gamma \text{ é aberto}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \cdot \sigma(n),$$

onde $\sigma(n)$ representa o número de caminhos que partem da origem e tem tamanho n .

Agora, note que $\sigma(n) \leq 2d \cdot (2d-1)^{(n-1)}$. Sendo assim,

$$\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) \leq 2dp \sum_{n=1}^{+\infty} (p(2d-1))^{n-1} < +\infty, \text{ se } |p(2d-1)| < 1;$$

ou seja, $\mathbb{E}_p(|C_0(\omega)|) < +\infty$ se $p < \frac{1}{2d-1}$. Aqui, $\hat{p} = \frac{1}{2d-1}$.

Afirmação 2:

Para verificar a segunda parte, basta considerar o caso $d = 2$; já que, se $(0 \leftrightarrow +\infty)$ ocorre com probabilidade estritamente positiva em \mathbb{L}^2 , o mesmo evento acontece em \mathbb{L}^d , para $d > 2$.

Para mostrar que, para algum $p \in (0, 1)$, vale $\theta(p) > 0$, basta mostrar que $\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) < 1$. Nesse caso, comece considerando o reticulado dual $(\mathbb{L}^2)^*$ introduzido na demonstração da Proposição 3.2. Agora, perceba que o aglomerado da origem tem tamanho finito se existe pelo menos um circuito $\gamma^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_1^*)$ aberto em $(\mathbb{L}^2)^*$ que envolve $C_0(\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) &= \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{\gamma^* \text{ que envolve } 0} \gamma^* \text{ é aberto} \right) \leq \sum_{\gamma^* \text{ que envolve } 0} \mathbb{P}_p(\gamma^* \text{ é aberto}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\gamma^* \text{ que envolve } 0 \\ |\gamma^*|=n}} \mathbb{P}_p(\gamma^* \text{ é aberto}). \end{aligned}$$

De maneira similar ao que fizemos na prova da **Afirmção 1**, defina $\lambda(n)$ como sendo o número de circuitos abertos em $(\mathbb{L}^2)^*$ que envolvem $C_0(\omega)$. Nesse caso, perceba que $\lambda(n) \leq n \cdot 3^{(n-1)}$. Dessa forma,

$$\mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) \leq (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot [3(1-p)]^{n-1} < +\infty, \text{ se } |3(1-p)| < 1;$$

ou seja, $\phi(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| < +\infty) < +\infty$ se $p > \frac{2}{3}$. Além disso, note que, se a condição sobre p for satisfeita, então $\phi(p) = \frac{1-p}{(2-3p)^2}$, tal que $\phi(p)$ é contínua e decrescente em $p \in (\frac{2}{3}, 1]$ e $\phi(1) = 0$. Sendo assim, $\exists \tilde{p} \in (\frac{2}{3}, 1)$, tal que, $\forall p > \tilde{p}$, $\phi(p) < 1$. \square

Demonstração do Lema 3.3 (baseado em [31]):

Seja $A = \{\exists \text{ aglomerado de tamanho infinito em } \omega\}$. Agora, note que A não depende dos estados de uma quantidade finita de elos em E^d . Nesse caso, pela *lei zero-um de Kolmogorov*⁵, $\mathbb{P}_p(A) = 0$ ou $\mathbb{P}_p(A) = 1$.

Defina $\psi(p) := \mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(\{\exists x \in \mathbb{Z}^d : |C_x(\omega)| = +\infty\})$; assim,

$$\psi(p) = \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\} \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}).$$

Se $p < p_c$, por invariância por translação e utilizando o Lema 3.2, temos que $\mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d$; logo, $\psi(p) = 0$.

Por outro lado, se $p > p_c$, então

$$\begin{aligned} \psi(p) &\geq \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}), \text{ por inclusão de eventos} \\ &> 0, \text{ pelo Lema 3.2.} \end{aligned}$$

Aplicando a *lei zero-um*, $\psi(p) = 1$. \square

⁵Sejam $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias independentes, $\mathcal{F}_n^{+\infty} = \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\chi = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n^{+\infty}$. Se $A \in \chi$, então $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.