Transição de Fase em Modelos de Percolação

André Victor Ribeiro Amaral[†]
Orientador: Roger William Câmara Silva

Exame de Qualificação

Universidade Federal de Minas Gerais — ICEx, Departamento de Estatística.
(06/07/2020)

[†] E-mail: avramaral@gmail.com

Sumário

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda "rapidamente" como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, onde $\Omega = \{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{i \in [n]} \mu_i$, tal que $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$; com $[n] = \{1, \cdots n\}$.

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda "rapidamente" como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, onde $\Omega = \{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{i \in [n]} \mu_i$, tal que $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$; com $[n] = \{1, \cdots n\}$.

Em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $f_k : \Omega \to \{0,1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, definindo $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$, para $k \in \mathbb{N}$, temos, com $\mathbb{P}_p$ medida produto,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega)\, p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \tag{1}$$

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda "rapidamente" como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, onde $\Omega = \{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{i \in [n]} \mu_i$, tal que $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$; com $[n] = \{1, \cdots n\}$.

Em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $f_k : \Omega \to \{0,1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, definindo $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$, para $k \in \mathbb{N}$, temos, com $\mathbb{P}_p$ medida produto,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega)\, p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \tag{1}$$

Por fim, e com a intenção de estabelecer uma ordem parcial para as possíveis configurações do espaço amostral, dizemos que, para $\omega, \omega' \in \Omega$, $\omega \leq \omega'$ se $\omega_i \leq \omega'_i$, $\forall i \in [n]$. Assim, $f(\omega)$ é *crescente* se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$.

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold*** em $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se existe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{k\to+\infty}\delta_k = 0$, tal que $F_k(p_k-\delta_k)\to 0$ e $F_k(p_k+\delta_k)\to 1$, quando $k\to+\infty$.

Graficamente,

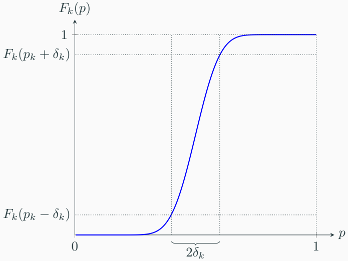

Figura 1: Esboço de $F_k(p)$ para k "muito grande", t.q. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold***.

Introdução

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold*** em $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se existe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{k\to+\infty}\delta_k = 0$, tal que $F_k(p_k-\delta_k)\to 0$ e $F_k(p_k+\delta_k)\to 1$, quando $k\to+\infty$.

Graficamente,

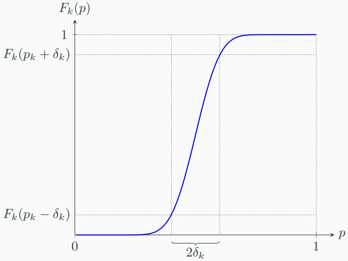

Figura 1: Esboço de $F_k(p)$ para k "muito grande", t.q. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold***.

Note que se $f_k(\omega)=\mathbb{I}_{A_k}(\omega)$ tem essa característica, então $F_k(p)=\mathbb{P}_p(A_k)$ está "perto" de 0 ou 1 para k "muito grande".

Como provar que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja $f : \Omega \to \{0,1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\mathrm{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\mathrm{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1-\omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit i como

$$\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\mathrm{Flip}_i(\omega)))$.

Como provar que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja $f : \Omega \to \{0,1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\mathrm{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\mathrm{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1-\omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit i como

$$\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\mathrm{Flip}_i(\omega)))$.

Nesse sentido, o primeiro resultado importante é enunciado através do teorema a seguir.

Teorema 1 (Fórmula de Russo-Margulis)

Para $f : \Omega \to \{0,1\}$ crescente, vale:

$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}_p(f(\omega)) = F'(p) = \sum_{i\in[n]} \mathrm{Inf}_i(f(\omega)).$$

Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediado do Teorema 1 é o de que, para $f(\omega)$ crescente, $F(p)$ é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C \; \mathbb{V}_p(f(\omega)), \tag{2}$$

para uma constante C "grande" e $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)\,(1 - F(p))$. Então vale que, reescrevendo a Equação 2,

$$\left(\frac{F'(p)}{F(p)\,(1 - F(p))} \right) = \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C. \tag{3}$$

Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediado do Teorema 1 é o de que, para $f(\omega)$ crescente, $F(p)$ é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C\ \mathbb{V}_p(f(\omega)), \tag{2}$$

para uma constante C "grande" e $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)\,(1 - F(p))$. Então vale que, reescrevendo a Equação 2,

$$\left(\frac{F'(p)}{F(p)\,(1 - F(p))}\right) = \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)}\right)' \geq C. \tag{3}$$

Agora, tome p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$. Então, para $\delta > 0$ e integrando a Equação 3 entre $(p - \delta)$ e p, vale que

$$F(p - \delta) \leq e^{-\delta\, C}.$$

Analogamente, integrando a Equação 3 entre p e $(p + \delta)$, obtemos

$$F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta\, C}.$$

Ou seja, a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associada passa por ***sharp threshold***.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \to \{0,1\}$,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

Note que, do Teorema 2, para mostrar que a sequência associada $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold***, temos que mostrar que $\left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1} \ln \frac{1}{\max(\mathrm{Inf}_i(f(\omega)))}$ é "grande"; i.e., $\forall i \in [n]$, $\mathrm{Inf}_i(f(\omega))$ é "pequeno".

Porém, provar que todas as *influências* são "pequenas" pode ser o verdadeiro desafio.

Alternativamente, podemos utilizar a ideia de *algoritmo* para conseguir cotas como a da Equação 2.

Definição 2 (Algoritmo)

Dados uma n-upla $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e um $t \leq n$, com $t \in \mathbb{N}$, defina $x_{[t]} := (x_1, \cdots, x_t)$ e $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \cdots, \omega_{x_t})$. Um *algoritmo* $\mathbf{T}$ é uma tripla $(i_1, \psi_t, t \leq n)$ que toma $\omega \in \Omega$ como entrada e devolve uma sequência ordenada $(i_1, \cdots, i_n)$ construída indutivamente da seguinte forma: para $2 \leq t \leq n$,

$$i_t = \psi_t(i_{[t-1]}, \omega_{i_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \cdots, i_{t-1}\};$$

onde ψ_t é interpretada como a regra de decisão no tempo t (ψ_t toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros $(t-1)$ passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada i_1 é determinística. Por fim, para $f : \Omega \to \{0, 1\}$, defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f,\mathbf{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{i_{[t]}} = \omega_{i_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Desigualdade de O'Donnel-Saks-Schramm-Servedio

Teorema 3 (Desiguladade de OSSS)

Seja $p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega \to \{0,1\}$ e um algoritmo $\mathbf{T}$; então vale que:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \operatorname{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo $\mathbf{T}$ e o bit i.

Perceba que, sobre a Equação 2, se todas as revelações $\delta_i(\mathbf{T})$ forem pequenas; ou seja, se existe um algoritmo que determina de forma completa $f(\omega)$, mas revela "poucos" bits, então $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por ***sharp threshold***.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathrm{E}^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $\mathrm{E}^d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x,y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathrm{E}^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $\mathrm{E}^d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x,y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \{0,1\}^{|\mathrm{E}^d|}$, $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos) e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{e \in \mathrm{E}^d} \mu_e$, tal que $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathrm{E}^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $\mathrm{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathrm{E}^d|}$, $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos) e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{e \in \mathrm{E}^d} \mu_e$, tal que $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

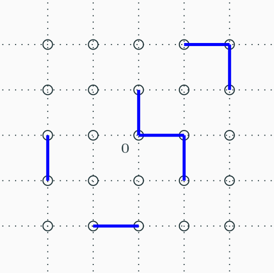

Figura 2: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.25$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathrm{E}^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $\mathrm{E}^d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x,y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \{0,1\}^{|\mathrm{E}^d|}$, $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos) e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{e \in \mathrm{E}^d} \mu_e$, tal que $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

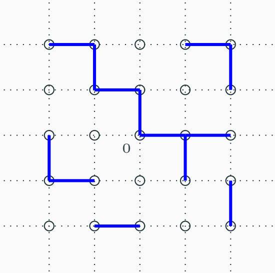

Figura 3: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.50$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathrm{E}^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $\mathrm{E}^d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x,y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \{0,1\}^{|\mathrm{E}^d|}$, $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos) e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{e \in \mathrm{E}^d} \mu_e$, tal que $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

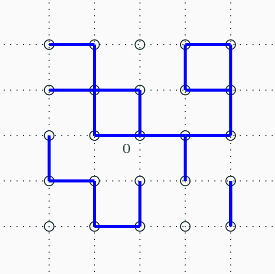

Figura 4: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.75$.

Perceba, porém que, se considerarmos funções Booleanas do tipo $f : \bar{\Omega} \to \{0,1\}$, com $\bar{\Omega} \subset \Omega$ finito, então resultados como os dos Teoremas 2 e 3 ainda valem.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento ***percolar*** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$, ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n.
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n,m) := [0,n] \times [0,m]$ e os eventos $H(n,m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n,m)\}$ e $V(n,m) := \{\exists$ cruzamento vertical em $R(n,m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento ***percolar*** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n.
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $B(n, m) := [0, n] \times [0, m]$ e os eventos $H(n, m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $B(n, m)\}$ e $V(n, m) := \{\exists$ cruzamento vertical em $B(n, m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento ***percolar*** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n.
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $B(n, m) := [0, n] \times [0, m]$ e os eventos $H(n, m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $B(n, m)\}$ e $V(n, m) := \{\exists$ cruzamento vertical em $B(n, m)\}$.

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento ***percolar*** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n.
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{N}$ defina a caixa $R(n,m) := [0,n] \times [0,m]$ e os eventos $H(n,m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n,m)\}$ e $V(n,m) := \{\exists$ cruzamento vertical em $R(n,m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{L}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in \mathrm{E}^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento ***percolar*** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n.
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $\mathrm{R}(n, m) := [0, n] \times [0, m]$ e os eventos $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $\mathrm{R}(n, m)\}$ e $\mathcal{V}(n, m) := \{\exists$ cruzamento vertical em $\mathrm{R}(n, m)\}$).

Notações e definições:

- Defina um *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^\star = ((\mathbb{Z}^2)^\star, (\mathrm{E}^2)^\star)$ onde $(\mathbb{Z}^2)^\star = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é conjunto de vértices e $(\mathrm{E}^2)^\star = \{(x^\star, y^\star) \in (\mathbb{Z}^2)^\star \times (\mathbb{Z}^2)^\star : \delta(x^\star, y^\star) = 1\}$ é conjunto de elos. Além disso, para cada elo $e \in \mathrm{E}^2$, denote por $e^\star \in (\mathrm{E}^2)^\star$ o elo no *reticulado dual* que o cruza; por fim, defina $\omega^\star_{e^\star} := 1 - \omega_e$.

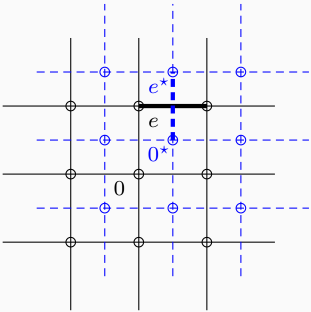

Figura 5: Reticulado original $\mathbb{L}^2$ (linha sólida) e *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^\star$ (linha tracejada).

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^2$ é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^2$ é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Proposição 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

A partir da Proposição 1 e recordando a definição de $p_c(d)$, para verificar que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$, basta notar que, se $n \to +\infty$, então $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^2$ é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Proposição 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

A partir da Proposição 1 e recordando a definição de $p_c(d)$, para verificar que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$, basta notar que, se $n \to +\infty$, então $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$.

Proposição 2

Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$, tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Demonstração:

Comece por definir a função Booleana $f(\omega) := \mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n,n)}(\omega)$. Fixe um elo e em $\mathrm{R}(2n, n)$ e veja que se $\nabla_e f(\omega) \neq 0$, então existe um caminho aberto na rede dual que passa pelo elo $e^\star$ e cruza verticalmente (a menos de $e^\star$) a caixa $\mathrm{R}^\star = \left[\frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$. Assim, pelo menos um dos dois "braços" de elos abertos na rede dual que se originam em $e^\star$ tem tamanho maior ou igual a $\frac{n}{2}$.

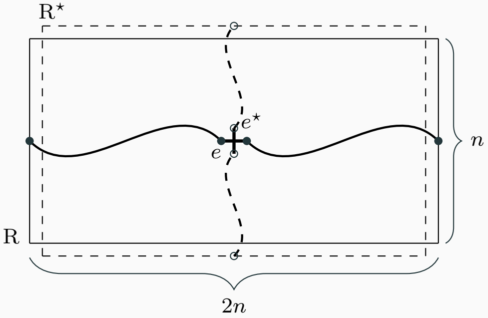

Figura 6: Caixas $\mathrm{R} = \mathrm{R}(2n, n)$ e $\mathrm{R}^\star$ para um elo fixado e, tal que $\nabla_e f(\omega) \neq 0$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Como os estados dos elos de $\omega^\star$ são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1-p$, a Proposição 1 nos dá que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\mathrm{Flip}_e(\omega))) = \mathrm{Inf}_e(f(\omega)) &\leq 2\,\mathbb{P}_{1-p}\left(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}\right), \text{ por inclusão de eventos} \\
&\leq 2\,\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}\right), \text{ já que } 1-p < \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Como os estados dos elos de $\omega^\star$ são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1-p$, a Proposição 1 nos dá que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\mathrm{Flip}_e(\omega))) = \mathrm{Inf}_e(f(\omega)) &\leq 2\,\mathbb{P}_{1-p}\left(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}\right),\ \text{por inclusão de eventos}\\ &\leq 2\,\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}\right),\ \text{já que } 1-p < \frac{1}{2}\\ &\leq \frac{1}{N},\ \text{onde } N = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

O que acabamos de ver é que, para todo $e \in \mathrm{R}(2n, n)$, $\mathrm{Inf}_e(f(\omega)) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 2, implica em dizer que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$F'(p) \geq c' \ln(N)\ \mathbb{V}_p(f(\omega)),\ \text{onde } c' = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Assim, integrando a Equação 4 entre $\frac{1}{2}$ e p, obtemos

$$F(p) \geq 1 - \frac{1}{F\left(\frac{1}{2}\right)} N^{-c'\left(p-\frac{1}{2}\right)} \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta},$$

para β pequeno o suficiente. $\square$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Demonstração (Teorema 4):

Para provar que, em $d = 2$, $p_c(d)$ é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$; já que, pela Proposição 1, temos que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$. Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito.

`Demonstração (Teorema 4):`

Para provar que, em $d = 2$, $p_c(d)$ é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$; já que, pela Proposição 1, temos que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$. Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito.

Defina, como na Figura 7, os eventos $A_n := \mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $B_n := \mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$.

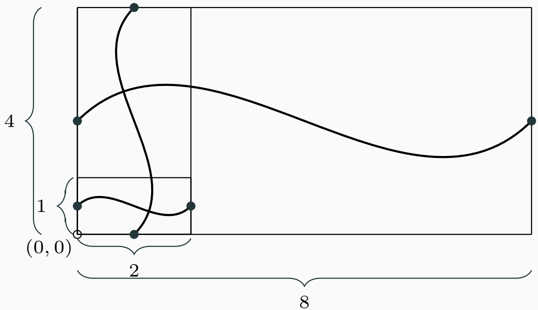

Figura 7: Ocorrência (alternada) dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$ para $n \in \{0, 1, 2\}$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω.

Assim, pela Proposição 2, e considerando um retângulo do tipo $\mathrm{R}(2^{n+1}, 2^n)$, temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p({A_n}^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta\, n}. \tag{5}$$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω.

Assim, pela Proposição 2, e considerando um retângulo do tipo $\mathrm{R}(2^{n+1}, 2^n)$, temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p({A_n}^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta\, n}. \tag{5}$$

Da Equação 5, perceba que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta\, n}$ converge; logo, por Borel-Cantelli, ${A_n}^c$ ocorre infinitas vezes com probabilidade 0; logo, $\mathbb{P}_p(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Por rotação, $\mathbb{P}_p(B_n \text{ infinitas vezes}) = 1$. Dessa forma, como A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$ – exceto por uma quantidade finita desses valores –, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito. $\square$

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^d$

Teorema 5 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p\, n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c\,(p - p_c)$.

Outras provas para resultados como o do Teorema 5 foram desenvolvidas por Menshikov (1986) e Aizenman e Barsky (1987), além de H. Duminil-Copin e V. Tassion (2016).

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^d$

Teorema 5 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p\, n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c\,(p - p_c)$.

Outras provas para resultados como o do Teorema 5 foram desenvolvidas por Menshikov (1986) e Aizenman e Barsky (1987), além de H. Duminil-Copin e V. Tassion (2016).

Lema 1

Considere uma sequência de funções convergentes $f_n : [0, \bar{x}] \to [0, M]$ diferenciáveis e crescentes em x tal que, para todo $n \geq 1$,

$$f_n' \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n,$$

onde $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$. Então existe $\tilde{x} \in [0, \bar{x}]$ tal que

a. Para qualquer $x < \tilde{x}$, existe $c_x > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $f_n(x) \leq e^{c_x\, n}$.

b. Para qualquer $x > \tilde{x}$, $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ satisfaz $f(x) \geq x - \bar{x}$.

Defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$. Nesse caso, vale o resultado abaixo.

Proposição 3

Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in \mathrm{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p)\,(1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n.

A partir do Teorema 3, é possível mostrar que, para a demonstração da Proposição 3, basta provar que para qualquer $s \in [n]$, temos um algoritmo $\mathbf{T}$ para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo $e = (x, y) \in \mathrm{E}_n$,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s).$$

Defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$. Nesse caso, vale o resultado abaixo.

Proposição 3

Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in \mathrm{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p)\,(1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n.

A partir do Teorema 3, é possível mostrar que, para a demonstração da Proposição 3, basta provar que para qualquer $s \in [n]$, temos um algoritmo $\mathbf{T}$ para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo $e = (x, y) \in \mathrm{E}_n$,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s).$$

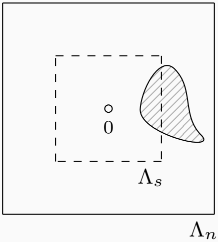

Figura 8: Algoritmo $\mathbf{T}$ para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$.

Demonstração:

Defina o conjunto de índices **e** utilizando duas sequências $\partial\Lambda_s = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_n$ e $\emptyset = \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{E}_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_s$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t.

Demonstração:

Defina o conjunto de índices $\mathbf{e}$ utilizando duas sequências $\partial\Lambda_s = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_n$ e $\emptyset = \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{E}_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_s$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t.

Fixando uma ordem para os elos de E_n, defina $\mathrm{V}_0 = \partial\Lambda_s$ e $\mathrm{E}_0 = \emptyset$. Assuma, então, que os conjuntos $\mathrm{V}_t \subset \mathrm{V}_n$ e $\mathrm{E}_t \subset \mathrm{E}_n$ foram construídos de tal forma que, em t, uma das duas situações a segui se aplica:

a. Se existe elo $e = (x, y)$ em $\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{E}_t$ tal que $x \in \mathrm{V}_t$ e $y \notin \mathrm{V}_t$ (se existir mais de um, escolha o menor deles – de acordo com a ordem estabelecida), então defina $\mathbf{e}_{t+1} := e$, $\mathrm{E}_{t+1} := \mathrm{E}_t \cup \{e\}$ e

$$\mathrm{V}_{t+1} := \begin{cases} \mathrm{V}_t \cup \{y\} & \text{se } \omega_e = 1 \\ \mathrm{V}_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b. Se e não existe, então defina $\mathbf{e}_{t+1}$ como o menor elo em $\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{E}_t$ (de acordo com a ordem estabelecida), $\mathrm{E}_{t+1} := \mathrm{E}_t \cup \{e\}$ e $\mathrm{V}_{t+1} := \mathrm{V}_t$.

Perceba que, enquanto estivermos na situação “a.”, ainda estamos descobrindo elos que fazem parte da componente conectada a $\partial\Lambda_s$; ao passo que, assim que mudamos para a situação “b.”, nós permanecemos nela. Nesse caso, $\tau(\omega)$ não é maior que o último t para o qual ainda estamos na situação “a.”.

Relembrando a definição de $\delta_e(\mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e) &\leq \mathbb{P}_p\left(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_s\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_s\}\right)\\ &\leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s),\end{aligned}$$

finalizando a demonstração. $\square$

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0\leftrightarrow\partial\Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n{}'(p) = \sum_{e \in \mathrm{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{0\leftrightarrow\partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n}\,\theta_n(p)\,(1-\theta_n(p)). \tag{6}$$

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n{}'(p) = \sum_{e \in \mathrm{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n}\, \theta_n(p)\,(1 - \theta_n(p)). \tag{6}$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Inequação 6, somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})}\, \theta_n(p)\right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1}\, S_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})}\, \theta_n(p)\right).$$

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0\leftrightarrow\partial\Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n{}'(p) = \sum_{e\in \mathrm{E}_n} \mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{0\leftrightarrow\partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n}\,\theta_n(p)\,(1-\theta_n(p)). \tag{6}$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1-\theta_n(p) \geq 1-\theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Inequação 6, somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1-\theta_1(\bar{p})}\,\theta_n(p)\right)' \geq \frac{n}{(1-\theta_1(\bar{p}))^{-1}\,S_n}\cdot\left(\frac{1}{1-\theta_1(\bar{p})}\,\theta_n(p)\right).$$

Assim, aplicando o Lema 1 para $f_n(p) = (1-\theta_1(\bar{p}))^{-1}\,\theta_n(p)$, $\exists\ \tilde{p}_c \in [0,\bar{p}]$ tal que

a. Para qualquer $p < \tilde{p}_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $\theta_n(p) \leq e^{-c_p\,n}$.
b. Existe $c > 0$ tal que, para qualquer $p > \tilde{p}_c$, $\theta(p) \geq c\,(p-\tilde{p}_c)$.

Por fim, já que $\bar{p}$ foi escolhido maior do que p_c, então $\tilde{p}_c$ deve ser, necessariamente, igual a p_c. $\square$

Referências

Hugo Duminil-Copin.
Sharp Threshold Phenomena in Statistical Physics.
Japanese Journal of Mathematics, 14(1):1–25, 2019.