

Transição de Fase em Modelos de Percolação via Funções Booleanas

André Victor Ribeiro Amaral[†]

Orientador: Roger William Câmara Silva

Defesa do Trabalho de Dissertação

Universidade Federal de Minas Gerais — ICEx, Departamento de Estatística.
(10/08/2020)

[†] E-mail: avramaral@gmail.com

Introdução

Como provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*?

Fórmula de Russo-Margulis

Inequação de *sharp threshold*

Desigualdade de O'Donnell-Saks-Schramm-Servedio

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Modelos de Percolação com dependência

Percolação $2k$ Dependente

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Referências

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, tal que $\Omega_n = \{0, 1\}^n$, com $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_n)$ e $\mathbb{Q}_p(\omega) = \prod_{i:\omega_i=1} p \prod_{i:\omega_i=0} (1-p)$ é a medida produto Bernoulli; onde $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, tal que $\Omega_n = \{0, 1\}^n$, com $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_n)$ e $\mathbb{Q}_p(\omega) = \prod_{i:\omega_i=1} p \prod_{i:\omega_i=0} (1-p)$ é a medida produto Bernoulli; onde $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Em $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $f_n : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, definindo $F_n(p) := \mathbb{E}_p(f_n(\omega))$, para $n \in \mathbb{N}$, temos, com \mathbb{Q}_p medida produto,

$$F_n(p) = \sum_{\omega \in \Omega_n} f_n(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \quad (1)$$

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, tal que $\Omega_n = \{0, 1\}^n$, com $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_n)$ e $\mathbb{Q}_p(\omega) = \prod_{i:\omega_i=1} p \prod_{i:\omega_i=0} (1-p)$ é a medida produto Bernoulli; onde $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Em $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{Q}_p)$, nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $f_n : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, definindo $F_n(p) := \mathbb{E}_p(f_n(\omega))$, para $n \in \mathbb{N}$, temos, com \mathbb{Q}_p medida produto,

$$F_n(p) = \sum_{\omega \in \Omega_n} f_n(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \quad (1)$$

Por fim, e com a intenção de estabelecer uma ordem parcial para as possíveis configurações do espaço amostral, dizemos que, para $\omega, \omega' \in \Omega_n$, $\omega \leq \omega'$ se $\omega_i \leq \omega'_i$, $\forall i \in [n]$. Assim, $f(\omega)$ é *crescente* se $f(\omega) \leq f(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$.

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$, tal que $F_n(p_n - \delta_n) \rightarrow 0$ e $F_n(p_n + \delta_n) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Graficamente,

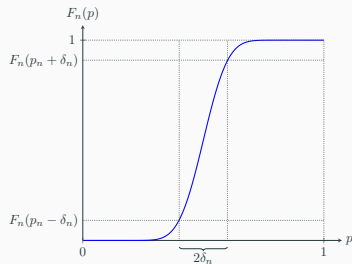


Figura 1: Esboço de $F_n(p)$ para n “muito grande”, t.q. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se existe $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$, tal que $F_n(p_n - \delta_n) \rightarrow 0$ e $F_n(p_n + \delta_n) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Graficamente,

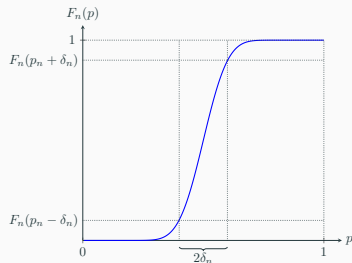


Figura 1: Esboço de $F_n(p)$ para n “muito grande”, t.q. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*. Note que se $f_n(\omega) = \mathbb{I}_{A_n}(\omega)$ tem essa característica, então $F_n(p) = \mathbb{Q}_p(A_n)$ está “perto” de 0 ou 1 para n “muito grande”.

Como provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*?

Seja $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit i como

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{Q}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$.

Como provar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*?

Seja $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit i como

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{Q}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$.

Nesse sentido, o primeiro resultado importante é enunciado através do teorema a seguir.

Teorema 1 (Fórmula de Russo-Margulis)

Para $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ crescente, vale:

$$\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega)) = F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)).$$

Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediato do Teorema 1 é o de que, para $f(\omega)$ crescente, $F(p)$ é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (2)$$

para uma constante C “grande” e $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1 - F(p))$. Então vale que, reescrevendo a Expressão 2,

$$\left(\frac{F'(p)}{F(p)(1 - F(p))} \right) = \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C. \quad (3)$$

Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediato do Teorema 1 é o de que, para $f(\omega)$ crescente, $F(p)$ é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (2)$$

para uma constante C “grande” e $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1 - F(p))$. Então vale que, reescrevendo a Expressão 2,

$$\left(\frac{F'(p)}{F(p)(1 - F(p))} \right) = \left(\ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C. \quad (3)$$

Agora, tome p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$. Então, para $\delta > 0$ e integrando a Expressão 3 entre $(p - \delta)$ e p , vale que

$$F(p - \delta) \leq e^{-\delta C}.$$

Analogamente, integrando a Expressão 3 entre p e $(p + \delta)$, obtemos

$$F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta C}.$$

Ou seja, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associada passa por *sharp threshold*.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

Note que, do Teorema 2, para mostrar que a sequência associada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*, temos que mostrar que $\left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1} \ln \frac{1}{\max(\text{Inf}_i(f(\omega)))}$ é “grande”; i.e., $\forall i \in [n]$, $\text{Inf}_i(f(\omega))$ é “pequeno”.

Porém, provar que todas as *influências* são “pequenas” pode ser o verdadeiro desafio.

Alternativamente, podemos utilizar a ideia de *algoritmo* para conseguir cotas como a da Expressão 2.

Definição 2 (Algoritmo)

Dados uma n -upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ e um $t \leq n$, com $t \in \mathbb{N}$, defina $x_{[t]} := (x_1, \dots, x_t)$ e $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_t})$. Um *algoritmo* \mathbf{T} é uma tripla $(i_1, \psi_t, t \leq n)$ que toma $\omega \in \Omega_n$ como entrada e devolve uma sequência ordenada $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ construída indutivamente da seguinte forma: para $2 \leq t \leq n$,

$$i_t = \psi_t(\mathbf{i}_{[t-1]}, \omega_{\mathbf{i}_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_{t-1}\};$$

onde ψ_t é interpretada como a regra de decisão no tempo t (ψ_t toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros $(t-1)$ passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada i_1 é determinística. Por fim, para $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f, \mathbf{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega_n, x_{\mathbf{i}_{[t]}} = \omega_{\mathbf{i}_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Teorema 3 (Desigualdade de OSSS)

Seja $p \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então, vale que

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{Q}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo \mathbf{T} e o bit i .

Perceba que, sobre a Expressão 2, se todas as revelações $\delta_i(\mathbf{T})$ forem pequenas; ou seja, se existe um algoritmo que determina de forma completa $f(\omega)$, mas revela “poucos” bits, então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e \mathbb{P}_p é a medida produto Bernoulli; ou seja, $\mathbb{P}(\omega) = \prod_{e:\omega_e=1} p \prod_{e:\omega_e=0} (1-p)$.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e \mathbb{P}_p é a medida produto Bernoulli; ou seja, $\mathbb{P}(\omega) = \prod_{e: \omega_e=1} p \prod_{e: \omega_e=0} (1-p)$.

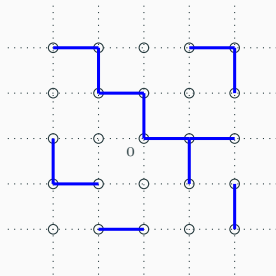


Figura 3: $\omega \in \Omega$ em \mathbb{L}^2 com $p = 0.50$.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$ é conjunto de elos, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ é definido por $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e \mathbb{P}_p é a medida produto Bernoulli; ou seja, $\mathbb{P}(\omega) = \prod_{e: \omega_e=1} p \prod_{e: \omega_e=0} (1-p)$.

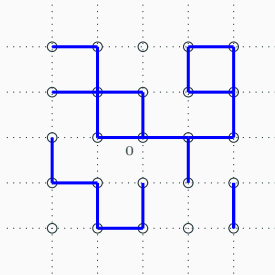


Figura 4: $\omega \in \Omega$ em \mathbb{L}^2 com $p = 0.75$.

Porém, note que, se considerarmos funções do tipo $f_n : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$, com $\Omega_n = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$ e $E \subset E^d$ finito, então resultados como os dos Teoremas 2 e 3 ainda valem.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x . Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{Z}^d)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x . Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n .

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x . Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n .
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$. Nesse caso, é possível mostrar que $\theta(p)$ é não-decrescente em p .



Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{Z}^d)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x . Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n .
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$. Nesse caso, é possível mostrar que $\theta(p)$ é não-decrescente em p .
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ “aberto” é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x . Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é chamado de evento **percolar** (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\Lambda_n := [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ centrada na origem e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; ou seja, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n .
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$. Nesse caso, é possível mostrar que $\theta(p)$ é não-decrescente em p .
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$ e os eventos $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n, m)\}$  e $\mathcal{V}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento vertical em } R(n, m)\}$ .

Aplicações em percolação Bernoulli (\mathbb{L}^d)

Notações e definições:

- Defina um *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (E^2)^*)$ onde $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é conjunto de vértices e $(E^2)^* = \{(x^*, y^*) \in (\mathbb{Z}^2)^* \times (\mathbb{Z}^2)^* : \delta(x^*, y^*) = 1\}$ é conjunto de elos. Além disso, para cada elo $e \in E^2$, denote por $e^* \in (E^2)^*$ o elo no *reticulado dual* que o cruza; por fim, defina $\omega_{e^*}^* := 1 - \omega_e$.

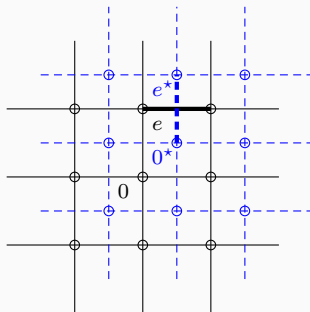


Figura 5: Reticulado original \mathbb{L}^2 (linha sólida) e *reticulado dual* $(\mathbb{L}^2)^*$ (linha tracejada).

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2 é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2 é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Proposição 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

A partir da Proposição 1 e recordando a definição de $p_c(d)$, para verificar que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$, basta notar que, se $n \rightarrow +\infty$, então $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^2 é $\frac{1}{2}$.

O Teorema 4 será demonstrado em duas partes. Primeiro, veremos o resultado de que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ e, por fim, provaremos que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$.

Proposição 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$. Em particular $p_c \geq \frac{1}{2}$.

A partir da Proposição 1 e recordando a definição de $p_c(d)$, para verificar que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$, basta notar que, se $n \rightarrow +\infty$, então $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$.

Proposição 2

Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$, tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Demonstração:

Comece por definir a função Booleana $f_n(\omega) := \mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n,n)}(\omega)$. Fixe um elo e em $R(2n,n)$ e veja que se $\nabla_e f(\omega) \neq 0$, então existe um caminho aberto na rede dual que conecta a parte de cima (de baixo, respec.) de uma caixa do tipo $R^* = [\frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ à extremidade superior (inferior, respec.) do elo e^* . Nesse caso, note que pelo menos um dos dois “braços” de elos abertos na rede dual com início em e^* tem tamanho $\geq \frac{n}{2}$.

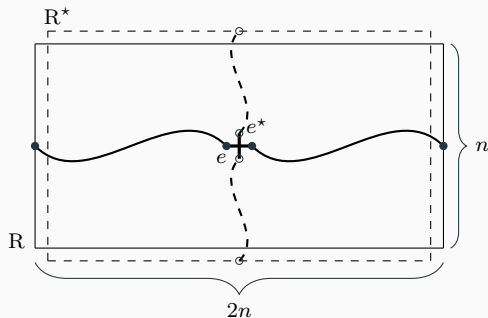


Figura 6: Caixas $R = R(2n,n)$ e R^* para um elo fixado e , tal que $\nabla_e f_n(\omega) \neq 0$.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Como os estados dos elos de ω^\star são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1 - p$, a Proposição 1 nos dá que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{Inf}_e(f_n(\omega)) = \mathbb{P}_p(f_n(\omega) \neq f_n(\text{Flip}_e(\omega))) &\leq 2 \mathbb{P}_{1-p} \left(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ por inclus. de eventos} \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left(0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ já que } 1 - p < \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Como os estados dos elos de ω^* são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro $1 - p$, a Proposição 1 nos dá que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\text{Inf}_e(f_n(\omega)) &= \mathbb{P}_p(f_n(\omega) \neq f_n(\text{Flip}_e(\omega))) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}), \text{ por inclus. de eventos} \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{\frac{n}{2}}), \text{ já que } 1 - p < \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

O que acabamos de ver é que, para todo $e \in R(2n, n)$, $\text{Inf}_e(f_n(\omega)) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 2, implica em dizer que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$F'_n(p) \geq c' \ln(N) \mathbb{V}_p(f_n(\omega)), \text{ onde } c' = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1}. \quad (4)$$

Assim, integrando a Expressão 4 entre $\frac{1}{2}$ e p , obtemos

$$F_n(p) \geq 1 - \frac{1}{F_n\left(\frac{1}{2}\right)} N^{-c' \left(p - \frac{1}{2}\right)} \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta},$$

para β pequeno o suficiente. □

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Demonstração (Teorema 4):

Para provar que, em $d = 2$, $p_c(d)$ é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$; já que, pela Proposição 1, temos que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$. Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Demonstração (Teorema 4):

Para provar que, em $d = 2$, $p_c(d)$ é igual a $\frac{1}{2}$, basta mostrar que $p_c(2) \leq \frac{1}{2}$; já que, pela Proposição 1, temos que $p_c(2) \geq \frac{1}{2}$. Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para $p > \frac{1}{2}$, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito.

Defina, como na Figura 7, os eventos $A_n := \mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $B_n := \mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$.

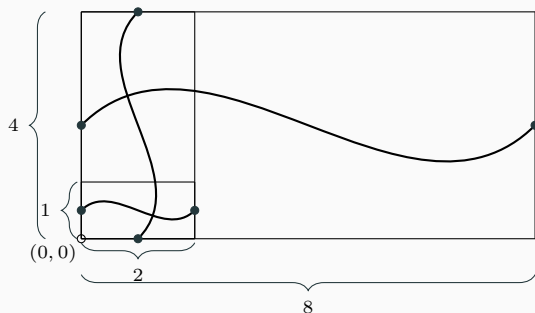


Figura 7: Ocorrência (alternada) dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$ para $n \in \{0, 1, 2\}$.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de uma quantidade finita de vezes, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω .

Assim, pela Proposição 2, e considerando um retângulo do tipo $R(2^{n+1}, 2^n)$, temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (5)$$

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Agora, note que se A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$, com exceção de uma quantidade finita de vezes, então existe aglomerado de tamanho infinito em ω .

Assim, pela Proposição 2, e considerando um retângulo do tipo $R(2^{n+1}, 2^n)$, temos que, para $p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (5)$$

Da Expressão 5, perceba que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}$ converge; logo, por Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(A_n^c \text{ infinitas vezes}) = 0$. O que significa que, com probabilidade 1, A_n não ocorre, no máximo, uma quantidade finitas de vezes. Usando invariância por translação, $\mathbb{P}_p(B_n^c \text{ infinitas vezes}) = 0$. Dessa forma, como A_n e B_n ocorrem para todo $n \in \mathbb{N}$, exceto para uma quantidade finita de termos dessas sequências, então existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em ω . \square

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Alternativamente, podemos adotar a seguinte estratégia. Veja que, para $p = \frac{1}{2}$, e relembrando da definição da rede dual; i.e., se $\omega \sim \mathbb{P}_p$, então $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) = 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) \implies \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Alternativamente, podemos adotar a seguinte estratégia. Veja que, para $p = \frac{1}{2}$, e relembrando da definição da rede dual; i.e., se $\omega \sim \mathbb{P}_p$, então $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) = 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) \implies \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Assim, se pudermos mostrar que, para $p \in (p_c, 1]$, $\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$, então temos que $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Ponto crítico para percolação em \mathbb{L}^2

Alternativamente, podemos adotar a seguinte estratégia. Veja que, para $p = \frac{1}{2}$, e relembrando da definição da rede dual; i.e., se $\omega \sim \mathbb{P}_p$, então $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) = 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) \implies \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Assim, se pudermos mostrar que, para $p \in (p_c, 1]$, $\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$, então temos que $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Agora, devemos mostrar que $p_c \leq \frac{1}{2}$. Para isso, suponha $p_c > \frac{1}{2}$. Assim,

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{i=1}^n (0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)\right) \leq n \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n);$$

o que, se, para $p \in [0, p_c)$, pudermos mostrar que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \rightarrow 0$ “rápido o suficiente”, quando $n \rightarrow +\infty$, é um absurdo – já que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, queremos provar que, para $p \in [0, p_c)$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ decai (exponencialmente rápido) com n .

Teorema 5 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Para percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d ,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Outras provas para resultados como o do Teorema 5 foram desenvolvidas por Menshikov (1986) e Aizenman e Barsky (1987), além de H. Duminil-Copin e V. Tassion (2016).

Teorema 5 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Para percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d ,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Outras provas para resultados como o do Teorema 5 foram desenvolvidas por Menshikov (1986) e Aizenman e Barsky (1987), além de H. Duminil-Copin e V. Tassion (2016).

Lema 1

Considere uma sequência de funções convergentes $f_n : [0, \bar{x}] \rightarrow [0, M]$ diferenciáveis e crescentes em x tal que, para todo $n \geq 1$,

$$f'_n \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n,$$

onde $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$. Então existe $\tilde{x} \in [0, \bar{x}]$ tal que

- a. Para qualquer $x < \tilde{x}$, existe $c_x > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $f_n(x) \leq e^{-c_x n}$.
- b. Para qualquer $x > \tilde{x}$, $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ satisfaz $f(x) \geq x - \bar{x}$.

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$. Nesse caso, vale o resultado abaixo.

Proposição 3

Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n .

Para a demonstração da Proposição 3, é suficiente provar que para qualquer $1 \leq s \leq n$, temos um algoritmo \mathbf{T} para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo $e = (x, y) \in E_n$,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s).$$

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Defina $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$ e $S_n := \sum_{s=0}^{n-1} \theta_s(p)$. Nesse caso, vale o resultado abaixo.

Proposição 3

Para qualquer $n \geq 1$, temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde E_n é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de e estão em Λ_n .

Para a demonstração da Proposição 3, é suficiente provar que para qualquer $1 \leq s \leq n$, temos um algoritmo \mathbf{T} para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ tal que, para todo $e = (x, y) \in E_n$,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s).$$

De fato, pelo Teorema 3 (Desigualdade de OSSS),

$$\sum_{s=1}^n \mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \leq \sum_{s=1}^n p(1-p) \sum_{e \in E_n} (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s)) \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)).$$

Rescrevendo $\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega))$ e dizendo que $\sum_{s=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s) \leq 4 S_n$, temos o resultado desejado.

Nesse caso, o algoritmo de exploração \mathbf{T} poderá se representado, para cada $1 \leq s \leq n$, pela Figura 8.

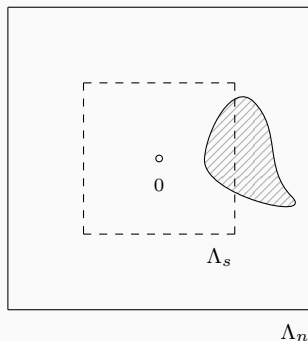


Figura 8: Algoritmo de exploração \mathbf{T} , com $1 \leq s \leq n$, para a função $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$.

Aqui, lembre-se de que queremos demonstrar que $\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial \Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial \Lambda_s)$.

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Demonstração:

Defina o conjunto de índices \mathbf{e} utilizando duas sequências $\partial\Lambda_s = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ e $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_s$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t .

Demonstração:

Defina o conjunto de índices \mathbf{e} utilizando duas sequências $\partial\Lambda_s = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n$ e $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n$. Aqui, V_t representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a $\partial\Lambda_s$ e E_t representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante t .

Fixando uma ordem para os elos de E_n , defina $V_0 = \partial\Lambda_s$ e $E_0 = \emptyset$. Assuma, então, que os conjuntos $V_t \subset V_n$ e $E_t \subset E_n$ foram construídos de tal forma que, em t , uma das duas situações a seguir se aplica:

- Se existe elo $e = (x, y)$ em $E_n \setminus E_t$ tal que $x \in V_t$ e $y \notin V_t$ (se existir mais de um, escolha o menor deles – de acordo com a ordem estabelecida), então defina $\mathbf{e}_{t+1} := e$, $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$ e

$$V_{t+1} := \begin{cases} V_t \cup \{y\} & \text{se } \omega_e = 1 \\ V_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Se e não existe, então defina \mathbf{e}_{t+1} como o menor elo em $E_n \setminus E_t$ (de acordo com a ordem estabelecida), $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$ e $V_{t+1} := V_t$.

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em \mathbb{L}^d

Perceba que, enquanto estivermos na situação “a.”, ainda estamos descobrindo elos que fazem parte da componente conectada a $\partial\Lambda_s$; ao passo que, assim que mudamos para a situação “b.”, nós permanecemos nela. Nesse caso, $\tau(\omega)$ não é maior que o último t para o qual ainda estamos na situação “a.”.

Relembrando a definição de $\delta_e(\mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e) &\leq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_s\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_s\}) \\ &\leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_s),\end{aligned}$$

finalizando a demonstração. □

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (6)$$

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (6)$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Expressão 6, somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$

Demonstração (Teorema 5):

Para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$, utilize o Teorema 1 e a Proposição 3 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (6)$$

Fixando $\bar{p} \in (p_c, 1)$, veja que, para $p \leq \bar{p}$, $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$; dessa forma, considerando a Expressão 6, somos capazes de dizer que

$$\left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$

Assim, aplicando o Lema 1 para $f_n(p) = (1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, $\exists \tilde{p}_c \in [0, \bar{p}]$ tal que

- Para qualquer $p < \tilde{p}_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para qualquer $n \geq 1$, $\theta_n(p) \leq e^{-c_p n}$.
- Existe $c > 0$ tal que, para qualquer $p > \tilde{p}_c$, $\theta(p) \geq c(p - \tilde{p}_c)$.

Por fim, já que \bar{p} foi escolhido maior do que p_c , então \tilde{p}_c deve ser, necessariamente, igual a p_c . □

Percolação $2k$ Dependente

Comece com um grafo d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, com \mathbb{Z}^d conjunto de vértices e E^d conjunto de elos tal que $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Percolação $2k$ Dependente

Comece com um grafo d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, com \mathbb{Z}^d conjunto de vértices e E^d conjunto de elos tal que $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$, tal que $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e μ_p medida de probabilidade construída sobre (Ω, \mathcal{F}) .

Percolação $2k$ Dependente

Comece com um grafo d dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$, com \mathbb{Z}^d conjunto de vértices e E^d conjunto de elos tal que $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$, tal que $\Omega = \prod_{e \in E^d} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e μ_p medida de probabilidade construída sobre (Ω, \mathcal{F}) .

Além disso, defina $(\Xi, \mathcal{G}, \mathbb{P}_p)$, tal que $\Xi = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$, com $\xi = (\xi_x : x \in \mathbb{Z}^d)$, $\mathcal{G} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos finito-dimensionais})$ e $\mathbb{P}_p(\omega) = \prod_{x: \xi_x=1} p \prod_{x: \xi_x=0} (1-p)$.

Por fim, como forma de determinar $\mu_p(\omega)$, diga que, para $k \in \mathbb{N}$ fixo, $\omega_e = 1$ se existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\xi_x = 1$ e $e \in \Lambda_k(x)$.

Formalmente, se $q : \Xi \rightarrow \Omega$ é tal que $q^{-1}(A) = \{\xi \in \Xi : q(\xi) \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{F}$, então $\mu_p(A) = (q_*(\mathbb{P}_p))(A) = \mathbb{P}_p(q^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

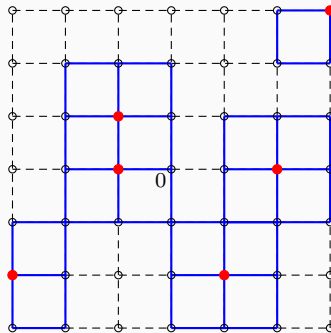


Figura 9: Configuração ω para o modelo de Percolação $2k$ Dependente com $k = 1$ em \mathbb{L}^2 .

Teorema 6 (Decaimento exponencial)

Para o modelo de Percolação $2k$ Dependente em \mathbb{L}^d , existe $p_c = p_c(d, k)$ tal que

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mu_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Teorema 6 (Decaimento exponencial)

Para o modelo de Percolação $2k$ Dependente em \mathbb{L}^d , existe $p_c = p_c(d, k)$ tal que

1. Para $p < p_c$, existe um $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mu_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Demonstração:

Considere um algoritmo **T** para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}^\omega(\xi)$ similar ao que foi definido para a Proposição 3. Nesse caso, **T** irá revelar o aglomerado de $\partial\Lambda_s$, com $1 \leq s \leq n$. Aqui, porém, perceba que o algoritmo explora, primeiro, os vértices $x \in \Lambda_n$ tal que $\partial\Lambda_k(x)$ está conectada, através de um caminho aberto no processo de percolação de elos, a $\partial\Lambda_s$ (notação: $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$).

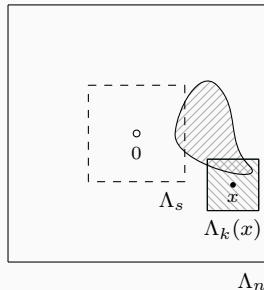


Figura 10: Algoritmo **T** para $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}^\omega(\xi)$.

Percolação $2k$ Dependente

Para um conjunto de índices \mathbf{v} com duas seqüências $\partial\Lambda_s = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n$ e $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n$, com A_t representando o conjunto de vértices x tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$ e B_t o conjunto de vértices explorados até o instante t , temos, dada uma ordem para os vértices considerados, uma construção (em t) do seguinte tipo:

- a. Ou existe um vértice x em $\Lambda_n \setminus B_t$ tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} A_t$ (se existir mais de um, escolha o menor). Nesse caso, defina $\mathbf{v}_{t+1} := x$, $B_{t+1} = B_t \cup \{x\}$,

$$A_{t+1} := \begin{cases} A_t \cup \{x\} & \text{se } \xi_x = 1 \\ A_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Ou não existe x com tais características. Nesse caso, defina \mathbf{v}_{t+1} como o menor vértice em $\Lambda_n \setminus B_t$, $B_{t+1} := B_t \cup \{x\}$ e, por fim, $A_{t+1} := A_t$.

Perceba que, em “a.”, ainda estamos descobrindo vértices x tal que $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$; porém, quando em “b.”, permanecemos nessa opção até o final da exploração. Em resumo, para $\xi \in \Xi = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$, $\tau(\xi)$ não é maior que o último t para o qual a opção “a.” ainda é válida.

Assim, relembrando a definição de $\delta_x(\mathbf{T})$, temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\xi) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (7)$$

Assim, relembrando a definição de $\delta_x(\mathbf{T})$, temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\xi) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (7)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Expressão 7 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com $h = h(p) \geq 1$ “pagando o preço” para abrir $\Lambda_k(x)$. Dessa forma, para todo $x \in \Lambda_n$,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Assim, relembrando a definição de $\delta_x(\mathbf{T})$, temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\xi) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (7)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Expressão 7 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com $h = h(p) \geq 1$ “pagando o preço” para abrir $\Lambda_k(x)$. Dessa forma, para todo $x \in \Lambda_n$,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Agora, aplicando o Teorema 3 para $f_n(\xi) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)$ com a cota apresentada na Expressão 8, empregando a mesma estratégia adotada na prova da Proposição 3 e utilizando o Teorema 1 e o Lema 1 para $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, tal que $\bar{p} \in (p_c, 1)$, obtemos o resultado desejado para a medida \mathbb{P}_p .

Assim, relembando a definição de $\delta_x(\mathbf{T})$, temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\xi) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (7)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Expressão 7 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com $h = h(p) \geq 1$ “pagando o preço” para abrir $\Lambda_k(x)$. Dessa forma, para todo $x \in \Lambda_n$,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Agora, aplicando o Teorema 3 para $f_n(\xi) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\xi)$ com a cota apresentada na Expressão 8, empregando a mesma estratégia adotada na prova da Proposição 3 e utilizando o Teorema 1 e o Lema 1 para $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$, tal que $\bar{p} \in (p_c, 1)$, obtemos o resultado desejado para a medida \mathbb{P}_p .

Para estender o resultado para μ_p , note que, para q função que mapeia o processo de vértices no processo de elos, $\mu_p(A) = \mathbb{P}(q^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Sendo assim $\mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\})$; bem como, para o *cluster* $C_0(\xi) := \{y \in \mathbb{Z}^d : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} y\}$, $\mathbb{P}_p(\{\xi \in \Xi : |C_0(\xi)| = +\infty\}) = \mu_p(\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty)$. \square

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Introduzido por Fortuin e Kasteleyn (1972), estudaremos o “Modelo de Percolação FK”.

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado d dimensional, onde \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e E^d é conjunto de elos, tal que, para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina o grafo *finito* $\mathbb{G} = (V, E)$, onde $V \subset \mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E \subset E^d$ é conjunto de elos $e = (x, y)$, tal que $x, y \in V$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Introduzido por Fortuin e Kasteleyn (1972), estudaremos o “Modelo de Percolação FK”.

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado d dimensional, onde \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e E^d é conjunto de elos, tal que, para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina o grafo *finito* $\mathbb{G} = (V, E)$, onde $V \subset \mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E \subset E^d$ é conjunto de elos $e = (x, y)$, tal que $x, y \in V$.

Inicialmente, defina um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, tal que $\Omega = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E)$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, para $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$,

$$\mu_{G,p,q}(\omega) = \frac{p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}}{Z_{G,p,q}},$$

onde $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$, $k(\omega)$ é o número de componentes conexas em ω (incluindo vértices isolados) e

$$Z_{G,p,q} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}$$

é constante normalizadora.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Introduzido por Fortuin e Kasteleyn (1972), estudaremos o “Modelo de Percolação FK”.

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado d dimensional, onde \mathbb{Z}^d é conjunto de vértices e E^d é conjunto de elos, tal que, para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$.

Defina o grafo *finito* $\mathbb{G} = (V, E)$, onde $V \subset \mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E \subset E^d$ é conjunto de elos $e = (x, y)$, tal que $x, y \in V$.

Inicialmente, defina um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, tal que $\Omega = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$, com $\omega = (\omega_e : e \in E)$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e, para $p \in [0, 1]$ e $q \in (0, +\infty)$,

$$\mu_{G,p,q}(\omega) = \frac{p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}}{Z_{G,p,q}},$$

onde $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$, $k(\omega)$ é o número de componentes conexas em ω (incluindo vértices isolados) e

$$Z_{G,p,q} = \sum_{\omega \in \Omega} p^{|\omega|} (1-p)^{|E|-|\omega|} q^{k(\omega)}$$

é constante normalizadora.

Note que, para $q = 1$, $\mu_{G,p,q}(\omega)$ é medida produto Bernoulli e obtemos o modelo de percolação independente com parâmetro p .

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

A fim de estender o modelo descrito para um conjunto com volume infinito, defina, para $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, com $\omega, \xi \in \Omega$,

$$\omega_{\mathbb{G}}^{\xi}(e) = \begin{cases} \omega_e & \text{se } e \in \mathbb{G} \\ \xi_e & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

tal que ξ age como *boundary condition* (ou “condição de fronteira”). Assim, para $\Omega_{\mathbb{G}}^{\xi}$ subconjunto *finito* de Ω , tal que $\omega_e = \xi_e, \forall e \in \mathbb{E}^d \setminus \mathbb{E}$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}(\omega) = \begin{cases} \frac{p^{|\omega|}(1-p)^{|\mathbb{E}|-|\omega|}q^{k(\omega,\xi)}}{Z_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}} & \text{se } \omega \in \Omega_{\mathbb{G}}^{\xi} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $k(\omega, \xi)$ e $Z_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}$ definidos de maneira apropriada.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

A fim de estender o modelo descrito para um conjunto com volume infinito, defina, para $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$, com $\omega, \xi \in \Omega$,

$$\omega_{\mathbb{G}}^{\xi}(e) = \begin{cases} \omega_e & \text{se } e \in \mathbb{G} \\ \xi_e & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

tal que ξ age como *boundary condition* (ou “condição de fronteira”). Assim, para $\Omega_{\mathbb{G}}^{\xi}$ subconjunto *finito* de Ω , tal que $\omega_e = \xi_e, \forall e \in \mathbb{E}^d \setminus \mathbb{E}$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}(\omega) = \begin{cases} \frac{p^{|\omega|}(1-p)^{|\mathbb{E}| - |\omega|} q^{k(\omega, \xi)}}{Z_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}} & \text{se } \omega \in \Omega_{\mathbb{G}}^{\xi} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $k(\omega, \xi)$ e $Z_{\mathbb{G},p,q}^{\xi}$ definidos de maneira apropriada.

Teorema 7 (*Thermodynamic limit*)

Seja $p \in [0, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\Lambda = (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de caixas tal que $\Lambda_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$, quando $n \rightarrow +\infty$. Então, para $\xi = 0, 1$, **existe** o limite

$$\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^{\xi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{\Lambda_n,p,q}^{\xi}.$$

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Defina $p_c^\xi(q) = \sup\{p : \theta^\xi(p, q) = 0\}$ com $\xi \in \{0, 1\}$, tal que $\theta^\xi : [0, 1] \times [1, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $(p, q) \mapsto \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi(|C_0(\omega)| = +\infty)$. Aqui, $\theta^\xi(\cdot, q)$ é não-decrescente.

Além disso, como $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0 = \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1$ para quase todo $p \in [0, 1]$, temos que $\theta^0(p, q) = \theta^1(p, q)$ para quase todo $p \in [0, 1]$; dessa forma, denotamos $p_c(q) = p_c^0(q) = p_c^1(q)$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Defina $p_c^\xi(q) = \sup\{p : \theta^\xi(p, q) = 0\}$ com $\xi \in \{0, 1\}$, tal que $\theta^\xi : [0, 1] \times [1, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ é função que mapeia $(p, q) \mapsto \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^\xi(|C_0(\omega)| = +\infty)$. Aqui, $\theta^\xi(\cdot, q)$ é não-decrescente.

Além disso, como $\mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^0 = \mu_{\mathbb{Z}^d, p, q}^1$ para quase todo $p \in [0, 1]$, temos que $\theta^0(p, q) = \theta^1(p, q)$ para quase todo $p \in [0, 1]$; dessa forma, denotamos $p_c(q) = p_c^0(q) = p_c^1(q)$.

Teorema 8 (Beffara, Duminil-Copin)

Para o modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^2 com $q \in [1, +\infty)$,

$$p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{q}}.$$

Para demonstrar o Teorema 8 vamos precisar de alguns resultados intermediários, enunciados a seguir.

Proposição 4

Se $\omega \sim \mu_{\mathbb{G},p,q}^0$, então $\omega^* \sim \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^1$, onde ω^* é uma configuração no reticulado dual com $\mathbb{G}^* = (V^*, E^*)$, tal que $q^* = q$ e p^* respeita

$$p^* = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p}, \text{ ou, de maneira equivalente } \frac{p^*p}{(1-p^*)(1-p)} = q.$$

Da proposição 4 note que, para p tal que $p = p^*$ (chamado de ponto *self-dual*, ou p_{sd}), vale que $p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Proposição 4

Se $\omega \sim \mu_{\mathbb{G},p,q}^0$, então $\omega^* \sim \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^1$, onde ω^* é uma configuração no reticulado dual com $\mathbb{G}^* = (V^*, E^*)$, tal que $q^* = q$ e p^* respeita

$$p^* = \frac{(1-p)q}{(1-p)q+p}, \text{ ou, de maneira equivalente } \frac{p^*p}{(1-p^*)(1-p)} = q.$$

Da proposição 4 note que, para p tal que $p = p^*$ (chamado de ponto *self-dual*, ou p_{sd}), vale que $p_{sd}(q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Proposição 5

No modelo de Percolação FK, para todo $p \in (p_c, 1]$ e $q \in [1, +\infty)$, vale que $\mu_{G,p,q}^0(\mathcal{H}(n+1, n)) \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Para demonstração da Proposição 5 podemos utilizar o fato de que, para $p \in (p_c, 1]$, $q \in [1, +\infty)$ e $\xi \in \{0, 1\}$, vale que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^\xi(\{\omega \in \Omega : N(\omega) = 1\}) = 1$, onde $N(\omega)$ conta o número de aglomerados abertos de tamanho infinito em ω .

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Teorema 9 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_{\mathbb{G},p,q}^{\xi} = \mu$ medida definida em um grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ *finito* para o modelo de Percolação FK, tal que $\xi \in \{0, 1\}$. Fixe uma função Booleana crescente $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então, vale que

$$\mathbb{V}_{\mu}(f(\omega)) \leq \sum_{e \in E} \delta_e(\mathbf{T}) \operatorname{Inf}_e^{\mu}(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T})$ é definido da mesma forma que foi feito para o Teorema 3.

O desafio de toda essa subseção mora em demonstrar o Teorema 9, que é uma versão mais geral da Desigualdade de OSSS. Na verdade, o Teorema 9 vale para qualquer medida μ *monótona* em $[n]$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Teorema 9 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_{\mathbb{G},p,q}^{\xi} = \mu$ medida definida em um grafo $\mathbb{G} = (V, E)$ *finito* para o modelo de Percolação FK, tal que $\xi \in \{0, 1\}$. Fixe uma função Booleana crescente $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ e um algoritmo \mathbf{T} ; então, vale que

$$\mathbb{V}_{\mu}(f(\omega)) \leq \sum_{e \in E} \delta_e(\mathbf{T}) \operatorname{Inf}_e^{\mu}(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\mathbf{T})$ é definido da mesma forma que foi feito para o Teorema 3.

O desafio de toda essa subseção mora em demonstrar o Teorema 9, que é uma versão mais geral da Desigualdade de OSSS. Na verdade, o Teorema 9 vale para qualquer medida μ *monótona* em $[n]$.

Teorema 10 (H. Duminil-Copin, A. Raoufi e V. Tassion, 2019)

No modelo de Percolação FK em \mathbb{Z}^d , com $q \geq 1$, vale que

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que para todo $n \geq 1$, $\mu_{\Lambda_n,p,q}^1(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$.
2. Para $p > p_c$, existe $c > 0$ tal que $\mu_{\mathbb{Z}^d,p,q}^1(|C_0(\omega)| = +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Demonstração (Teorema 8):

Relembrando, $p_{sd} = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Assim, para $p = p_{sd}$,

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)) &= 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^1(\mathcal{V}^*(n,n+1)), \text{ pela Proposição 4} \\ &\leq 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^0(\mathcal{V}^*(n,n+1)), \text{ já que } \mu_{\mathbb{G},p,q}^0 \leq \mu_{\mathbb{G},p,q}^1.\end{aligned}$$

o que implica em, por invariância por translação e usando o fato de que $p = p^*$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \stackrel{\text{Similarmente}}{\geq} \frac{1}{2} \geq \mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Usando a Proposição 5, temos que, pelo lado direito da Expressão (9), $p_c \geq p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Percolação FK (ou *Random Cluster Model*)

Demonstração (Teorema 8):

Relembrando, $p_{sd} = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Assim, para $p = p_{sd}$,

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)) &= 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^1(\mathcal{V}^*(n,n+1)), \text{ pela Proposição 4} \\ &\leq 1 - \mu_{\mathbb{G}^*,p^*,q^*}^0(\mathcal{V}^*(n,n+1)), \text{ já que } \mu_{\mathbb{G},p,q}^0 \leq \mu_{\mathbb{G},p,q}^1.\end{aligned}$$

o que implica em, por invariância por translação e usando o fato de que $p = p^*$,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \stackrel{\text{Similarmente}}{\geq} \frac{1}{2} \geq \mu_{\mathbb{G},p,q}^0(\mathcal{H}(n+1,n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Usando a Proposição 5, temos que, pelo lado direito da Expressão (9), $p_c \geq p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

Para mostrar que $p_c \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$, utilizaremos o Teorema 10. Para isso, assumamos $p_c > p = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. Nesse caso,

$$\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \leq n \mu_{\mathbb{G},p,q}^1(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

pelo Teorema 10; o que é um absurdo, já que $\mu_{\mathbb{G},p,q}^1(\mathcal{H}(n+1,n)) \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ – pelo lado esquerdo da Expressão (9). Logo, $p \leq \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$. \square



Michael Aizenman and David J Barsky.

Sharpness of the phase transition in percolation models.

Communications in Mathematical Physics, 108(3):489–526, 1987.



Vincent Beffara and Hugo Duminil-Copin.

The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$.

Probability Theory and Related Fields, 153(3-4):511–542, 2012.



Hugo Duminil-Copin.

Sharp Threshold Phenomena in Statistical Physics.

Japanese Journal of Mathematics, 14(1):1–25, 2019.



Hugo Duminil-Copin, Aran Raoufi, and Vincent Tassion.

Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees.

Annals of Mathematics, 189(1):75–99, 2019.

 Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion.

A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation on \mathbb{Z}^d .

L'Enseignement Mathématique, 62:199–206, 2016.

 H. Kesten.

The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$.

Communications in mathematical physics, 74(1):41–59, 1980.

 Mikhail V Menshikov.

Coincidence of critical points in percolation problems.

Soviet Mathematics Doklady, 33:856–859, 1986.