RASCUNHO

Considerando o problema de Percolação $2k$ Dependente, e com $\mathbb{P}_p$ medida de probabilidade para um subconjunto mensurável de $\tilde{\Omega} = \prod_{x\in\mathbb{Z}^d}\{0,1\}$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s) &\overset{\text{Inc. de ev.}}{\leq} \sum_{s=1}^{n}\mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_{|s-\mathrm{d}(0,x)|}(x)), \text{ com } \mathrm{d}(0,x) = \max(|x_1|,|x_2|) \\ &= \sum_{j=0}^{\mathrm{d}(0,x)-1}\mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^{n-\mathrm{d}(0,x)}\mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j(x)),\end{aligned}$$

tal que o primeiro somatório considera o caso no qual, para x fixo, $x \in \Lambda_s$, enquanto que para o segundo, $x \notin \Lambda_s$. Assim, por invariância por translação,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s) &\leq \sum_{j=0}^{\mathrm{d}(0,x)-1}\mathbb{P}_p(0 \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j) + \sum_{j=1}^{n-\mathrm{d}(0,x)}\mathbb{P}_p(0 \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}_p(0 \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j) + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}_p(0 \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_j) = 2\,S_n.\end{aligned}$$

Tentando resolver o problema de passar de um "modelo de percolação de vértices que *olha* para cruzamento de elos" para um "modelo de percolação de vértices *puro* (i.e., com cruzamento de vértices)" para Percolação $2k$ Dependente:

Ou seja, quero sair de $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s\})$ para $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : x \overset{\tilde{\omega}}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s\})$ (alternativamente, $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : x \leftrightarrow \partial\Lambda_s\}) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_s)$); isto é, eu quero poder escrever algo como $\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : x \overset{\omega}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s\} \cap \{\text{Vértices sobressalentes em } \Lambda_n\backslash\Lambda_s \text{ estão abertos}\} = \{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : x \overset{\tilde{\omega}}{\leftrightarrows} \partial\Lambda_s\}$.

Problema 1: *não* existe independência entre os eventos $\{\omega \in \Omega : x \leftrightarrow \partial\Lambda_s\}$ e {Elos sobressalentes em $\Lambda_n\backslash\Lambda_s$ estão abertos tal que existe caminho de cruzamento de vértices}. E, na verdade, o segundo evento **não** pode ser garantido, mesmo com a abertura de todos os elos.

Problema 2: No caso de conseguirmos superar o ponto anterior (?) e *definirmos adequadamente a Inequação 34*, ainda temos que voltar de um "modelo de percolação de vértices *puro*" para um "modelo de percolação de elos *induzido*", de forma a obter as desigualdades apropriadas para o teorema que queremos demonstrar. As desigualdades nesse caso, **não** nos favorecem.

No caso de mostrarmos que $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p\, n}$, teremos

$$\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} = \{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} \cap \{\text{Elos sobressalentes em } \Lambda_n\backslash\Lambda_s \text{ estão abertos}\}$$

o que implica em, superado o problema de independência entre os eventos (?),

$$e^{-c_p\, n} \geq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) = h\,\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n),$$

o que, para $h \in [0,1]$, **não** nos dá uma desigualdade que funciona.