

# Sharp Threshold Phenomena in Statistical Physics

André Victor Ribeiro Amaral<sup>†</sup>

Orientador: Roger William Câmara Silva

Exame de Qualificação

Universidade Federal de Minas Gerais — ICEx, Departamento de Estatística.  
(06/07/2020)

<sup>†</sup> E-mail: avramaral@gmail.com

Introdução

Como provar que  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold*

Fórmula de Russo-Margulis

Inequação de *sharp threshold*

Desigualdade de O'Donnel-Saks-Schramm-Servedio

Aplicações em percolação Bernoulli ( $\mathbb{L}^d$ )

Ponto crítico para percolação em  $\mathbb{L}^2$

*Sharpness* da transição de fase para percolação Bernoulli em  $\mathbb{L}^d$

Modelos de Percolação com dependência

Percolação  $2k$  Dependente

Percolação FK

Referências

# Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{i \in [n]} \mu_i$ , tal que  $\mu_i(\omega_i = 1) = p$  e  $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$ ; com  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{i \in [n]} \mu_i$ , tal que  $\mu_i(\omega_i = 1) = p$  e  $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$ ; com  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

Em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $f_k : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .

Além disso, definindo  $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , temos, com  $\mathbb{P}_p$  medida produto,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1 - p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \quad (1)$$

Em modelos com componentes estocásticas, dizemos que um sistema aleatório **finito** passa por *sharp threshold* se o seu comportamento muda “rapidamente” como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Nesse sentido, o modelo probabilístico assumido, a menos que seja dito o contrário, será descrito por  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{i \in [n]} \mu_i$ , tal que  $\mu_i(\omega_i = 1) = p$  e  $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$ ; com  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

Em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ , nos concentraremos em analisar sequências de *funções Booleanas*; i.e., sequências do tipo  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $f_k : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .

Além disso, definindo  $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , temos, com  $\mathbb{P}_p$  medida produto,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega) p^{\sum_{i \in [n]} \omega_i} (1 - p)^{\sum_{i \in [n]} 1 - \omega_i}. \quad (1)$$

Por fim, e com a intenção de estabelecer uma ordem parcial para as possíveis configurações do espaço amostral, dizemos que, para  $\omega, \omega' \in \Omega$ ,  $\omega \leq \omega'$  se  $\omega_i \leq \omega'_i$ ,  $\forall i \in [n]$ . Assim,  $f(\omega)$  é *crescente* se  $f(\omega) \leq f(\omega')$  sempre que  $\omega \leq \omega'$ .

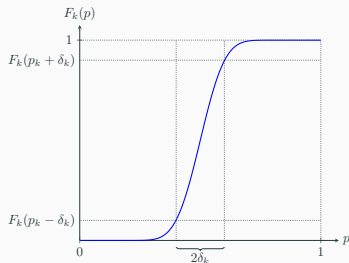
## Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold* em  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  se existe  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = 0$ , tal que  $F_k(p_k - \delta_k) \rightarrow 0$  e  $F_k(p_k + \delta_k) \rightarrow 1$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

## Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold* em  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  se existe  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = 0$ , tal que  $F_k(p_k - \delta_k) \rightarrow 0$  e  $F_k(p_k + \delta_k) \rightarrow 1$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Graficamente,



**Figura 1:** Esboço de  $F_k(p)$  para  $k$  “muito grande”, t.q.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold*. Note que se  $f_k(\omega) = \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$  tem essa característica, então  $F_k(p) = \mathbb{P}_p(A_k)$  está “perto” de 0 ou 1 para  $k$  “muito grande”.



## Como provar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit  $i$  como

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que  $\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$ .

## Como provar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit  $i$  como

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que  $\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$ .

Nesse sentido, o primeiro resultado importante é enunciado através do teorema a seguir.

### Teorema 1 (Fórmula de Russo-Margulis)

Para  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  crescente, vale:

$$\frac{d}{dp} \mathbb{E}_p(f(\omega)) = F'(p) = \sum_{i \in [n]} \text{Inf}_i(f(\omega)).$$

## Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediato do Teorema 1 é o de que, para  $f(\omega)$  crescente,  $F(p)$  é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (2)$$

para uma constante  $C$  “grande” e  $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1 - F(p))$ . Então vale que, reescrevendo a Equação 2,

$$\left( \frac{F'(p)}{F(p)(1 - F(p))} \right) = \left( \ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C. \quad (3)$$

## Fórmula de Russo-Margulis

Um resultado imediato do Teorema 1 é o de que, para  $f(\omega)$  crescente,  $F(p)$  é crescente e diferenciável.

Além disso, suponha por um instante que seja possível provar cotas do tipo

$$F'(p) \geq C \mathbb{V}_p(f(\omega)), \quad (2)$$

para uma constante  $C$  “grande” e  $\mathbb{V}_p(f(\omega)) = F(p)(1 - F(p))$ . Então vale que, reescrevendo a Equação 2,

$$\left( \frac{F'(p)}{F(p)(1 - F(p))} \right) = \left( \ln \frac{F(p)}{1 - F(p)} \right)' \geq C. \quad (3)$$

Agora, tome  $p$  tal que  $F(p) = \frac{1}{2}$ . Então, para  $\delta > 0$  e integrando a Equação 3 entre  $(p - \delta)$  e  $p$ , vale que

$$F(p - \delta) \leq e^{-\delta C}.$$

Analogamente, integrando a Equação 3 entre  $p$  e  $(p + \delta)$ , obtemos

$$F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta C}.$$

Ou seja, a sequência  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  associada passa por *sharp threshold*.

## Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante  $c > 0$  tal que,  $\forall p \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , vale que, para qualquer função Booleana crescente  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

# Inequação de *sharp threshold*

## Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante  $c > 0$  tal que,  $\forall p \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , vale que, para qualquer função Booleana crescente  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\text{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\text{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

Note que, do Teorema 2, para mostrar que a sequência associada  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold*, temos que mostrar que  $\left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1} \ln \frac{1}{\max(\text{Inf}_i(f(\omega)))}$  é “grande”; i.e.,  $\forall i \in [n]$ ,  $\text{Inf}_i(f(\omega))$  é “pequeno”.

Porém, provar que todas as *influências* são “pequenas” pode ser o verdadeiro desafio.

Alternativamente, podemos utilizar a ideia de *algoritmo* para conseguir cotas como a da Equação 2.

## Definição 2 (Algoritmo)

Dados uma  $n$ -upla  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e um  $t \leq n$ , com  $t \in \mathbb{N}$ , defina  $x_{[t]} := (x_1, \dots, x_t)$  e  $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_t})$ . Um *algoritmo*  $\mathbf{T}$  é uma tripla  $(i_1, \psi_t, t \leq n)$  que toma  $\omega \in \Omega$  como entrada e devolve uma sequência ordenada  $(i_1, \dots, i_n)$  construída indutivamente da seguinte forma: para  $2 \leq t \leq n$ ,

$$i_t = \psi_t(i_{[t-1]}, \omega_{i_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_{t-1}\};$$

onde  $\psi_t$  é interpretada como a regra de decisão no tempo  $t$  ( $\psi_t$  toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros  $(t-1)$  passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada  $i_1$  é determinística. Por fim, para  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f, \mathbf{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{i_{[t]}} = \omega_{i_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

## Teorema 3 (Desigualdade de OSSS)

Seja  $p \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Fixe uma função Booleana crescente  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  e um algoritmo  $\mathbf{T}$ ; então vale que:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde  $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$  é chamado de *revelação* de  $f$  para o algoritmo  $\mathbf{T}$  e o bit  $i$ .



## Teorema 3 (Desigualdade de OSSS)

Seja  $p \in [0, 1]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Fixe uma função Booleana crescente  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  e um algoritmo  $\mathbf{T}$ ; então vale que:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\mathbf{T}) \text{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde  $\delta_i(\mathbf{T}) = \delta_i(f, \mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$  é chamado de *revelação* de  $f$  para o algoritmo  $\mathbf{T}$  e o bit  $i$ .

Perceba que, sobre a Equação 2, se todas as revelações  $\delta_i(\mathbf{T})$  forem pequenas; ou seja, se existe um algoritmo que determina de forma completa  $f(\omega)$ , mas revela “poucos” bits, então  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passa por *sharp threshold*.

FAZER COMENTÁRIOS ADICIONAIS SOBRE, TALVEZ, A INTERPRETAÇÃO.

# Aplicações em percolação Bernoulli ( $\mathbb{L}^d$ )

Seja  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$  reticulado tal que  $\mathbb{Z}^d$  é conjunto de vértices e  $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$  é conjunto de elos, onde  $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ .

## Aplicações em percolação Bernoulli ( $\mathbb{L}^d$ )

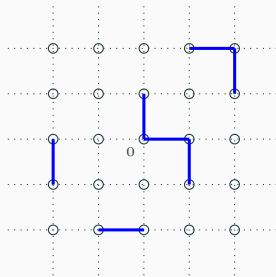
Seja  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$  reticulado tal que  $\mathbb{Z}^d$  é conjunto de vértices e  $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$  é conjunto de elos, onde  $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$  é definido por  $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{e \in E^d} \mu_e$ , tal que  $\mu_e(\omega_e = 1) = p$  e  $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$ .

# Aplicações em percolação Bernoulli ( $\mathbb{L}^d$ )

Seja  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$  reticulado tal que  $\mathbb{Z}^d$  é conjunto de vértices e  $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$  é conjunto de elos, onde  $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$  é definido por  $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{e \in E^d} \mu_e$ , tal que  $\mu_e(\omega_e = 1) = p$  e  $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$ .



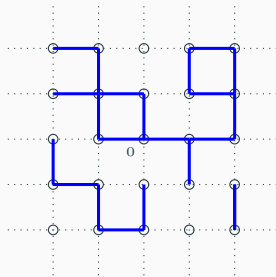
**Figura 2:**  $\omega \in \Omega$  em  $\mathbb{L}^2$  com  $p = 0.25$ .



## Aplicações em percolação Bernoulli ( $\mathbb{L}^d$ )

Seja  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$  reticulado tal que  $\mathbb{Z}^d$  é conjunto de vértices e  $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$  é conjunto de elos, onde  $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$  é definido por  $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathbb{E}^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mathbb{P}_p$  é a medida produto Bernoulli  $\prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$ , tal que  $\mu_e(\omega_e = 1) = p$  e  $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$ .



**Figura 4:**  $\omega \in \Omega$  em  $\mathbb{L}^2$  com  $p = 0.75$ .

Perceba, porém que, se considerarmos funções Booleanas do tipo  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \{0, 1\}$ , com  $\bar{\Omega} \subset \Omega$  finito, então resultados como os dos Teoremas 2 e 3 ainda valem.

Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).

Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento *percolar* (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).



## Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento ***percolar*** (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).
- Defina  $\Lambda_n := [-n, n]^d$  caixa d-dimensional de lado  $2n$  e  $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ ; ou seja,  $\partial\Lambda_n$  é a fronteira de  $\Lambda_n$ .

Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento ***percolar*** (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).
- Defina  $\Lambda_n := [-n, n]^d$  caixa d-dimensional de lado  $2n$  e  $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ ; ou seja,  $\partial\Lambda_n$  é a fronteira de  $\Lambda_n$ .
- Defina  $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$ .

## Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento *percolar* (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).
- Defina  $\Lambda_n := [-n, n]^d$  caixa d-dimensional de lado  $2n$  e  $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ ; ou seja,  $\partial\Lambda_n$  é a fronteira de  $\Lambda_n$ .
- Defina  $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$ .
- Defina  $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$ .

## Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento *percolar* (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).
- Defina  $\Lambda_n := [-n, n]^d$  caixa d-dimensional de lado  $2n$  e  $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ ; ou seja,  $\partial\Lambda_n$  é a fronteira de  $\Lambda_n$ .
- Defina  $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$ .
- Defina  $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$ .
- Para  $n, m \in \mathbb{Z}$ , defina a caixa  $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$  e os eventos  $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n, m)\}$  e  $\mathcal{V}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento vertical em } R(n, m)\}$ .

## Notações e definições:

- Sejam  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , então  $x$  está conectado a  $y$  se existe caminho de elos abertos ( $e \in E^d$  “aberto” é o mesmo que  $\omega_e = 1$ ) que conecta  $x$  a  $y$  (notação:  $x \leftrightarrow y$ ).
- Dado  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$  é dito *cluster* de  $x$ . Nesse sentido,  $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$  é chamado de evento *percolar* (notação:  $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$ ).
- Defina  $\Lambda_n := [-n, n]^d$  caixa d-dimensional de lado  $2n$  e  $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$ ; ou seja,  $\partial\Lambda_n$  é a fronteira de  $\Lambda_n$ .
- Defina  $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0(\omega)| = +\infty)$ .
- Defina  $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$ .
- Para  $n, m \in \mathbb{Z}$ , defina a caixa  $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$  e os eventos  $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n, m)\}$  e  $\mathcal{V}(n, m) := \{\exists \text{ cruzamento vertical em } R(n, m)\}$ .
- Defina um *reticulado dual*  $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (E^2)^*)$  onde  $(\mathbb{Z}^2)^* = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  é conjunto de vértices e  $(E^2)^* = \{(x^*, y^*) \in (\mathbb{Z}^2)^* \times (\mathbb{Z}^2)^* : \delta(x^*, y^*) = 1\}$  é conjunto de elos. Além disso, para cada elo  $e \in E^2$ , denote por  $e^* \in (E^2)^*$  o elo no *reticulado dual* que o cruza; por fim, defina  $\omega_{e^*}^* := 1 - \omega_e$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em  $\mathbb{L}^2$  é  $\frac{1}{2}$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em  $\mathbb{L}^2$  é  $\frac{1}{2}$ .

O Teorema 4 será demonstrado através de resultados parciais.

## Proposição 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Teorema 4 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em  $\mathbb{L}^2$  é  $\frac{1}{2}$ .

O Teorema 4 será demonstrado através de resultados parciais.

## Proposição 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$ .

**Demonstração:**

Comece observando que, pela definição do reticulado dual, se  $\omega \sim \mathbb{P}_p$ , então  $\omega^* \sim \mathbb{P}_{1-p}$ . Em particular, se  $p = \frac{1}{2}$ , então  $\omega$  e  $\omega^*$  têm a mesma distribuição. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\mathcal{V}^*\left(\left[\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)), \text{ por rotação e utilizando o fato de que } p = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ .



# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Corolário 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Corolário 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$ .

Demonstração:

Como  $\mathcal{H}(n, n) \supset \mathcal{H}(n+1, n)$ , pela Proposição 1,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Corolário 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$ .

Demonstração:

Como  $\mathcal{H}(n, n) \supset \mathcal{H}(n+1, n)$ , pela Proposição 1,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$ .

## Proposição 2

Para qualquer  $\rho > 0$ , existe  $c = c(\rho) > 0$  tal que,  $\forall n \geq 1$ ,

$$c \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Para demonstrar a Proposição 2, é suficiente determinar a cota inferior para a probabilidade desejada para algum  $\rho = 1 + \epsilon > 1$ , com  $\epsilon > 0$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Corolário 1

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \frac{1}{2}$ .

Demonstração:

Como  $\mathcal{H}(n, n) \supset \mathcal{H}(n+1, n)$ , pela Proposição 1,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n, n)) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$ .

## Proposição 2

Para qualquer  $\rho > 0$ , existe  $c = c(\rho) > 0$  tal que,  $\forall n \geq 1$ ,

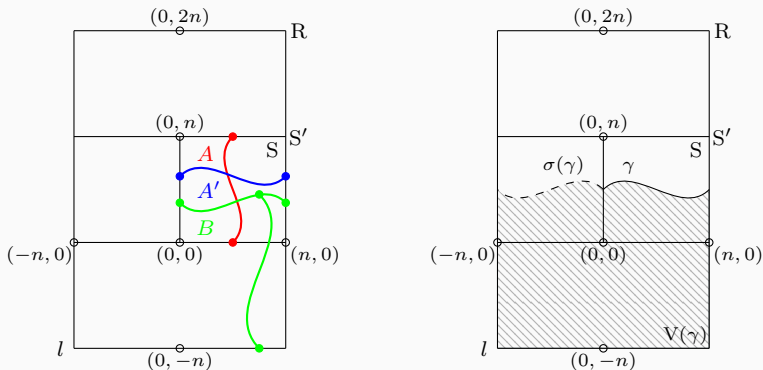
$$c \leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Para demonstrar a Proposição 2, é suficiente determinar a cota inferior para a probabilidade desejada para algum  $\rho = 1 + \epsilon > 1$ , com  $\epsilon > 0$ .

Demonstração (Proposição 2):

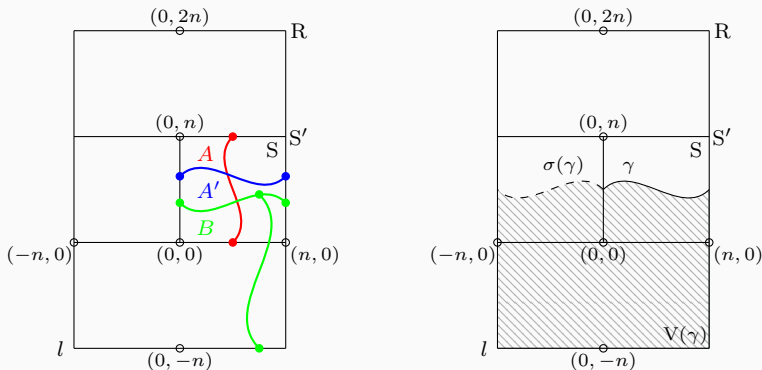
Para  $\rho = \frac{3}{2}$ , queremos determinar a cota inferior para  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n))$ . Nesse caso, considere as componentes representadas através da Figura 5.

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$



**Figura 5:** Caixas  $R$ ,  $S$  e  $S'$  com *eventos* de interesse (esq.) e conjunto de vértices  $V(\gamma)$  (dir.).

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$



**Figura 5:** Caixas  $R$ ,  $S$  e  $S'$  com *eventos* de interesse (esq.) e conjunto de vértices  $V(\gamma)$  (dir.).

Assim, se  $\Gamma$  é o cruza. horizontal em  $S$  *mais alto*, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) &= \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B \mid A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ já que } B \subset A' \\ &\geq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma) \mid A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ incl. de eventos} \end{aligned}$$

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) &\geq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ por independência} \\ &\stackrel{\square}{\geq} \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A') \stackrel{\text{Cor. 1}}{\geq} \frac{1}{8},\end{aligned}$$

onde “ $\square$ ” vale, pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \stackrel{\text{Cor. 1}}{\leq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\exists \text{ cruza. vertical em } S'\}) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\} \cup \{\sigma(\gamma) \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\}) \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)), \text{ por simetria;}\end{aligned}$$

o que implica que  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \geq \frac{1}{4}$ .

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) &\geq \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}), \text{ por independência} \\ &\stackrel{\square}{\geq} \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A' \cap \{\Gamma = \gamma\}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A') \stackrel{\text{Cor. 1}}{\geq} \frac{1}{8},\end{aligned}$$

onde “ $\square$ ” vale, pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \stackrel{\text{Cor. 1}}{\leq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\exists \text{ cruza. vertical em } S'\}) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\} \cup \{\sigma(\gamma) \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)\}) \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)), \text{ por simetria;}\end{aligned}$$

o que implica que  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\gamma \leftrightarrow l \text{ em } V(\gamma)) \geq \frac{1}{4}$ .

Finalmente, note que para  $\mathcal{V}(2n, 3n)$  acontecer, é suficiente que  $A$ ,  $B$  e  $B'$  aconteçam, onde  $B' = \{\exists \text{ cruza. horizontal em } S \text{ que está conectado a } [-n, n] \times \{2n\} \text{ em } [-n, n] \times [0, 2n]\}$ . Aqui, observe que, por simetria,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \geq \frac{1}{8}$ . Dessa forma, vale que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(2n, 3n)) &\geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A \cap B \cap B'), \text{ por inclusão de eventos} \\ &\stackrel{\text{FKG}}{\geq} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B) \cdot \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B') \geq \frac{1}{128}.\end{aligned}$$



## Corolário 2

Existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$ . Em particular  $p_c \geq \frac{1}{2}$ .



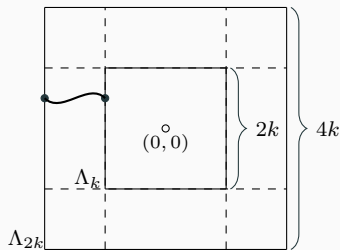
# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

## Corolário 2

Existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq n^{-\alpha}$ . Em particular  $p_c \geq \frac{1}{2}$ .

Demonstração:

Denote por  $A_k = \{\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}\}$ . Agora, defina a sequência  $(B_i)$ , t.q.  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , para  $B_i = \{\exists \text{ cruzamento no lado mais fácil no retângulo } R_i\}$ ; onde  $R_1 = [-2k, 2k] \times [k, 2k]$ ,  $R_2 = [k, 2k] \times [-2k, 2k]$ ,  $R_3 = [-2k, 2k] \times [-2k, -k]$  e  $R_4 = [-2k, k] \times [-2k, 2k]$ .



**Figura 6:** Caixas  $\Lambda_k$  e  $\Lambda_{2k}$  (linha sólida) com ocorrência do evento  $A_k$  e caixas  $R_i$ , com  $i \in \{1, \dots, 4\}$  (linha tracejada).

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Perceba que, nesse caso,  $A_k \subset \bigcup_{i=1}^4 B_i$ ; logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_k) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i^c\right) \leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_1^c)^4, \text{ por rotação e FKG} \\ &\leq 1 - c^4 =: c_1 < 1, \text{ pela Proposição 2.}\end{aligned}$$

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Perceba que, nesse caso,  $A_k \subset \bigcup_{i=1}^4 B_i$ ; logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_k) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i^c\right) \leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_1^c)^4, \text{ por rotação e FKG} \\ &\leq 1 - c^4 =: c_1 < 1, \text{ pela Proposição 2.}\end{aligned}$$

Agora, seja  $A$  a intersecção dos eventos  $A_k$ , tal que  $k$  é da forma  $2^m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , e  $k \leq n$ . Assim,  $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} \subset A$ ; dessa forma,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bigcap_k (\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k})\right] \\ &= \prod_k \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}), \text{ por independência} \\ &\leq c_1^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \leq n^{-\alpha}, \text{ com } \alpha \text{ pequeno o suficiente e } n \geq 1.\end{aligned}$$

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Perceba que, nesse caso,  $A_k \subset \bigcup_{i=1}^4 B_i$ ; logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A_k) &\leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i^c\right) \leq 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(B_1^c)^4, \text{ por rotação e FKG} \\ &\leq 1 - c^4 =: c_1 < 1, \text{ pela Proposição 2.}\end{aligned}$$

Agora, seja  $A$  a intersecção dos eventos  $A_k$ , tal que  $k$  é da forma  $2^m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ , e  $k \leq n$ . Assim,  $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\} \subset A$ ; dessa forma,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) &\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(A) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bigcap_k (\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k})\right] \\ &= \prod_k \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\partial\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_{2k}), \text{ por independência} \\ &\leq c_1^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \leq n^{-\alpha}, \text{ com } \alpha \text{ pequeno o suficiente e } n \geq 1.\end{aligned}$$

Por fim, para mostrar que  $p_c \geq \frac{1}{2}$ , basta notar que se  $n \rightarrow +\infty$ , então  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}) = 0$ . Assim, como existe uma quantidade enumerável de vértices  $x \in \mathbb{Z}^2$ , por invariância por translação, temos  $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = +\infty\}) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{Z}^2$ ; o que implica que  $p_c \geq \frac{1}{2}$ .

## Proposição 3

Para qualquer  $p > \frac{1}{2}$ , existe  $\beta = \beta(p) > 0$ , tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

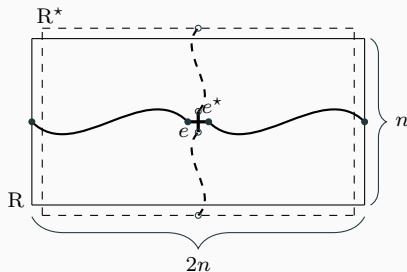
## Proposição 3

Para qualquer  $p > \frac{1}{2}$ , existe  $\beta = \beta(p) > 0$ , tal que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \geq 1 - \frac{1}{\beta} n^{-\beta}.$$

Demonstração:

Comece por definir a função Booleana  $f(\omega) := \mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega)$ . Fixe um elo  $e$  em  $R(2n, n)$  e veja que se  $\nabla_e f(\omega) \neq 0$ , então existe um caminho aberto na rede dual que passa pelo elo  $e^*$  e cruza (a menos de  $e^*$ ) verticalmente uma caixa do tipo  $R^* = [\frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ ; nesse caso, pelo menos um dos dois “braços” de elos abertos na rede dual que se originam em  $e^*$  tem tamanho maior ou igual a  $\frac{n}{2}$ .



**Figura 7:** Caixas  $R = R(2n, n)$  e  $R^*$  para um elo fixado  $e$ , tal que  $\nabla_e f(\omega) \neq 0$ .

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Como os estados dos elos de  $\omega^*$  são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro  $1 - p$ , o Corolário 2 nos dá que, para  $p > \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_e(\omega))) &= \text{Inf}_e(f(\omega)) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p} \left( 0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ por inclusão de eventos} \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left( 0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ já que } 1 - p < \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} \right)^\alpha.\end{aligned}$$



## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Como os estados dos elos de  $\omega^*$  são determinados, de maneira independente, seguindo uma distribuição Bernoulli de parâmetro  $1 - p$ , o Corolário 2 nos dá que, para  $p > \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_e(\omega))) &= \text{Inf}_e(f(\omega)) \leq 2 \mathbb{P}_{1-p} \left( 0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ por inclusão de eventos} \\ &\leq 2 \mathbb{P}_{\frac{1}{2}} \left( 0 \leftrightarrow \partial \Lambda_{\frac{n}{2}} \right), \text{ já que } 1 - p < \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{N}, \text{ onde } N = \frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} \right)^\alpha.\end{aligned}$$

O que acabamos de ver é que, para todo  $e \in R(2n, n)$ ,  $\text{Inf}_e(f(\omega)) \leq \frac{1}{N}$ ; o que, pelo Teorema 2, implica em dizer que, para  $p > \frac{1}{2}$ ,

$$F'(p) \geq c' \ln(N) \mathbb{V}_p(f(\omega)), \text{ onde } c' = \left( c \ln \frac{1}{p(1-p)} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Assim, integrando a Equação 4 entre  $\frac{1}{2}$  e  $p$ , obtemos

$$F(p) \geq 1 - \frac{1}{F\left(\frac{1}{2}\right)} N^{-c' \left(p - \frac{1}{2}\right)}.$$

Por fim, basta relembrar que  $F(p) := \mathbb{E}_p(\mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n, n)}(\omega))$  e tomar  $\beta$  pequeno o suficiente.

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Demonstração (Teorema 4):

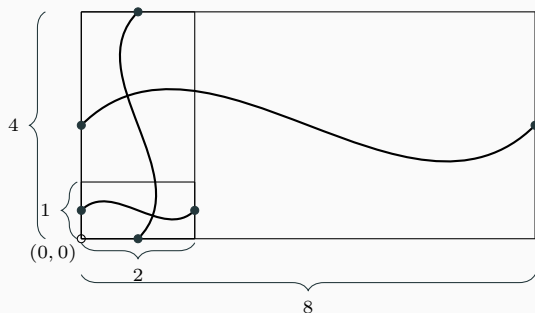
Para provar que, em  $d = 2$ ,  $p_c$  é igual a  $\frac{1}{2}$ , basta mostrar que  $p_c \leq \frac{1}{2}$ ; já que, pelo Corolário 2, temos que  $p_c \geq \frac{1}{2}$ . Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para  $p > \frac{1}{2}$ , existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em  $\omega$ .

# Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Demonstração (Teorema 4):

Para provar que, em  $d = 2$ ,  $p_c$  é igual a  $\frac{1}{2}$ , basta mostrar que  $p_c \leq \frac{1}{2}$ ; já que, pelo Corolário 2, temos que  $p_c \geq \frac{1}{2}$ . Porém, a estratégia utilizada aqui será a de mostrar que, para  $p > \frac{1}{2}$ , existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em  $\omega$ .

Defina, como na Figura 8, os eventos  $A_n := \mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$  e  $B_n := \mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$ .



**Figura 8:** Ocorrência (alternada) dos eventos  $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$  e  $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$  para  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Agora, note que se  $A_n$  e  $B_n$  ocorrem para todo  $n \in \mathbb{N}$  – exceto por uma quantidade finita desses valores –, então existe aglomerado de tamanho infinito em  $\omega$ .

Assim, pela Proposição 3, e considerando um retângulo do tipo  $R(2^{n+1}, 2^n)$ , temos que, para  $p > \frac{1}{2}$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (5)$$

## Ponto crítico para percolação em $\mathbb{L}^2$

Agora, note que se  $A_n$  e  $B_n$  ocorrem para todo  $n \in \mathbb{N}$  – exceto por uma quantidade finita desses valores –, então existe aglomerado de tamanho infinito em  $\omega$ .

Assim, pela Proposição 3, e considerando um retângulo do tipo  $R(2^{n+1}, 2^n)$ , temos que, para  $p > \frac{1}{2}$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(A_n^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}. \quad (5)$$

Da Equação 5, perceba que  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\beta n}$  converge; logo, por Borel-Cantelli,  $A_n^c$  ocorre infinitas vezes com probabilidade 0; logo,  $\mathbb{P}_p(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$ . Por rotação,  $\mathbb{P}_p(B_n \text{ infinitas vezes}) = 1$ . Dessa forma, como  $A_n$  e  $B_n$  ocorrem para todo  $n \in \mathbb{N}$  – exceto por uma quantidade finita desses valores –, existe, com probabilidade 1, aglomerado de tamanho infinito em  $\omega$ .

## Teorema 5 (Decaimento exponencial)

Para percolação Bernoulli em  $\mathbb{Z}^d$ ,

1. Para  $p < p_c$ , existe  $c_p > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$ .
2. (Mean Field Lower Bound) Existe  $c > 0$  tal que  $p > p_c$ ,  $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$ .

## Teorema 5 (Decaimento exponencial)

Para percolação Bernoulli em  $\mathbb{Z}^d$ ,

1. Para  $p < p_c$ , existe  $c_p > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$ .
2. (Mean Field Lower Bound) Existe  $c > 0$  tal que  $p > p_c$ ,  $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$ .

O Teorema 5 será demonstrado através de resultados parciais.

## Lema 1

Considere uma sequência de funções convergentes  $f_n : [0, \bar{x}] \rightarrow [0, M]$  diferenciáveis e crescentes em  $x$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$f'_n \geq \frac{n}{\Sigma_n} f_n,$$

onde  $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$ . Então existe  $\tilde{x} \in [0, \bar{x}]$  tal que

- a. Para qualquer  $x < \tilde{x}$ , existe  $c_x > 0$  tal que, para qualquer  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) \leq e^{c_x n}$ .
- b. Para qualquer  $x > \tilde{x}$ ,  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  satisfaz  $f(x) \geq x - \bar{x}$ .

# Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^d$

Defina  $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$  e  $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)$ .

## Proposição 4

Para qualquer  $n \geq 1$ , temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde  $E_n$  é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de  $e$  estão em  $\Lambda_n$ .



Defina  $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$  e  $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)$ .

## Proposição 4

Para qualquer  $n \geq 1$ , temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde  $E_n$  é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de  $e$  estão em  $\Lambda_n$ .

Note que para provar o resultado da Proposição 4, basta de mostrar que para qualquer  $k \in [n]$ , temos um algoritmo  $\mathbf{T}$  para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$  tal que, para todo  $e = (x, y) \in E_n$ ,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k). \quad (6)$$

# Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^d$

Defina  $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n)$  e  $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k(p)$ .

## Proposição 4

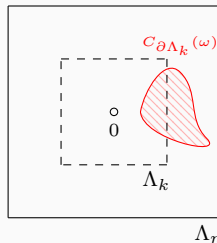
Para qualquer  $n \geq 1$ , temos que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)),$$

onde  $E_n$  é o conjunto de elos tal que as duas extremidades de  $e$  estão em  $\Lambda_n$ .

Note que para provar o resultado da Proposição 4, basta de mostrar que para qualquer  $k \in [n]$ , temos um algoritmo **T** para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$  tal que, para todo  $e = (x, y) \in E_n$ ,

$$\delta_e(\mathbf{T}) \leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k). \quad (6)$$



**Figura 9:** Revelação para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$ .

## Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{L}^d$

De fato, assumindo que é verdade que  $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) \leq 2 S_n$  (a mesma cota vale para  $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k)$ ), então, aplicando o Teorema 3 para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)$  e utilizando a cota para as revelações estabelecida pela Equação 6, temos que

$$\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{e \in E_n} (\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k)) \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)),$$

o que implica em, somando sobre todos os  $k$ 's e substituindo o valor de  $\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega))$ ,

$$\sum_{k=1}^n \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) \leq 4 S_n p(1-p) \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)),$$

que o mesmo que

$$\sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{p(1-p) 4 S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)).$$

Assim, e como já dito, basta provar a Equação 6.

Demonstração (Proposição 4):

Defina o conjunto de índices  $\mathbf{e}$  utilizando duas sequências  $\partial\Lambda_k = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n$  e  $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n$ . Aqui,  $V_t$  representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a  $\partial\Lambda_k$  e  $E_t$  representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante  $t$ .

Demonstração (Proposição 4):

Defina o conjunto de índices  $\mathbf{e}$  utilizando duas sequências  $\partial\Lambda_k = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n$  e  $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n$ . Aqui,  $V_t$  representa o conjunto de vértices que o algoritmo verificou estar conectado a  $\partial\Lambda_k$  e  $E_t$  representa o conjunto de elos explorados pelo algoritmo até o instante  $t$ .

Fixando uma ordem para os elos de  $E_n$ , defina  $V_0 = \partial\Lambda_k$  e  $E_0 = \emptyset$ . Assuma, então, que os conjuntos  $V_t \subset V_n$  e  $E_t \subset E_n$  foram construídos de tal forma que, em  $t$ , uma das duas situações a seguir se aplica:

- a. Se existe elo  $e = (x, y)$  em  $E_n \setminus E_t$  tal que  $x \in V_t$  e  $y \notin V_t$  (se existir mais de um, escolha o menor deles – de acordo com a ordem estabelecida), então defina  $\mathbf{e}_{t+1} := e$ ,  $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$  e

$$V_{t+1} := \begin{cases} V_t \cup \{y\} & \text{se } \omega_e = 1 \\ V_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Se  $e$  não existe, então defina  $\mathbf{e}_{t+1}$  como o menor elo em  $E_n \setminus E_t$  (de acordo com a ordem estabelecida),  $E_{t+1} := E_t \cup \{e\}$  e  $V_{t+1} := V_t$ .

Perceba que, enquanto estivermos na situação “a.”, ainda estamos descobrindo elos que fazem parte da componente conectada a  $\partial\Lambda_k$ ; ao passo que, assim que mudamos para a situação “b.”, nós permanecemos nela. Nesse caso,  $\tau(\omega)$  não é maior que o último  $t$  para o qual ainda estamos na situação “a.”.

Relembrando a definição de  $\delta_e(\mathbf{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e)$ , temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : e_t = e) &\leq \mathbb{P}_p(\{x \leftrightarrow \partial\Lambda_k\} \cup \{y \leftrightarrow \partial\Lambda_k\}) \\ &\leq \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \partial\Lambda_k) + \mathbb{P}_p(y \leftrightarrow \partial\Lambda_k),\end{aligned}$$

o que prova a Inequação 6 e, portanto, finaliza a demonstração.

Demonstração (Teorema 5):

Para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$ , utilize o Teorema 1 e a Proposição 4 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (7)$$

Demonstração (Teorema 5):

Para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$ , utilize o Teorema 1 e a Proposição 4 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (7)$$

Fixando  $\bar{p} \in (p_c, 1)$ , veja que, para  $p \leq \bar{p}$ ,  $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$ ; dessa forma, considerando a Inequação 7, somos capazes de dizer que

$$\left( \frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left( \frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$



Demonstração (Teorema 5):

Para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)$ , utilize o Teorema 1 e a Proposição 4 para dizer que

$$\theta_n'(p) = \sum_{e \in E_n} \text{Inf}_e(\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial \Lambda_n}(\omega)) \geq \frac{n}{S_n} \theta_n(p) (1 - \theta_n(p)). \quad (7)$$

Fixando  $\bar{p} \in (p_c, 1)$ , veja que, para  $p \leq \bar{p}$ ,  $1 - \theta_n(p) \geq 1 - \theta_1(\bar{p}) > 0$ ; dessa forma, considerando a Inequação 7, somos capazes de dizer que

$$\left( \frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right)' \geq \frac{n}{(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} S_n} \cdot \left( \frac{1}{1 - \theta_1(\bar{p})} \theta_n(p) \right).$$

Assim, aplicando o Lema 1 para  $f_n(p) = (1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p)$ ,  $\exists \tilde{p}_c \in [0, \bar{p}]$  tal que

- Para qualquer  $p < \tilde{p}_c$ , existe  $c_p > 0$  tal que, para qualquer  $n \geq 1$ ,  
 $(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1} \theta_n(p) \leq e^{-c_p n} \implies \theta_n(p) \leq e^{-c_p n}.$
- Existe  $c > 0$  tal que, para qualquer  $p > \tilde{p}_c$ ,  $\theta(p) \geq c(p - \tilde{p}_c).$

Já que  $\bar{p}$  foi escolhido maior do que  $p_c$ , então  $\tilde{p}_c$  deve ser, necessariamente, igual a  $p_c$ .

## Percolação $2k$ Dependente

Comece com um grafo  $d$  dimensional  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , com  $\mathbb{Z}^d$  conjunto de vértices e  $E^d$  conjunto de elos tal que  $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$ .

## Percolação 2k Dependente

Comece com um grafo  $d$  dimensional  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , com  $\mathbb{Z}^d$  conjunto de vértices e  $E^d$  conjunto de elos tal que  $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$  é definido por com  $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathbb{E}^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mu_p$  medida de probabilidade construída sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

## Percolação $2k$ Dependente

Comece com um grafo  $d$  dimensional  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , com  $\mathbb{Z}^d$  conjunto de vértices e  $E^d$  conjunto de elos tal que  $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$  é definido por com  $\Omega = \{0, 1\}^{|\mathbb{E}^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mu_p$  medida de probabilidade construída sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Além disso, defina uma sequência  $(\xi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  de variáveis aleatórias *i.i.d.*, indexada pelo conjunto de vértices  $\mathbb{Z}^d$ , tal que  $\mathbb{P}_p(\xi_x = 1) = p$  e  $\mathbb{P}_p(\xi_x = 0) = 1 - p$ .

## Percolação $2k$ Dependente

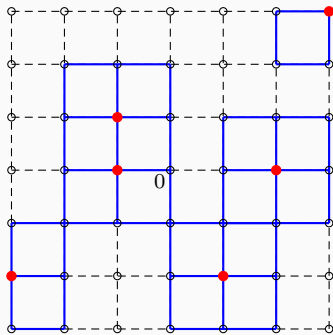
Comece com um grafo  $d$  dimensional  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , com  $\mathbb{Z}^d$  conjunto de vértices e  $E^d$  conjunto de elos tal que  $E^d = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\}$ .

O espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_p)$  é definido por com  $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$ ,  $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$  e  $\mu_p$  medida de probabilidade construída sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Além disso, defina uma sequência  $(\xi_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  de variáveis aleatórias *i.i.d.*, indexada pelo conjunto de vértices  $\mathbb{Z}^d$ , tal que  $\mathbb{P}_p(\xi_x = 1) = p$  e  $\mathbb{P}_p(\xi_x = 0) = 1 - p$ .

Por fim, como forma de, indiretamente, determinar  $\mu_p(\omega)$ , diga que, para  $k \in \mathbb{N}$  fixo,  $\omega_e = 1$  se existe  $x \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $\xi_x = 1$  e  $e \in \Lambda_k(x)$ .

Para esse modelo, note que existe dependência (*finita*) para os estados dos elos.



**Figura 10:** Configuração  $\omega$  para o modelo de Percolação  $2k$  Dependente com  $k = 1$  em  $\mathbb{L}^2$ .

## Teorema 6 (Decaimento exponencial)

Para o modelo de Percolação  $2k$  Dependente em  $\mathbb{L}^d$ , existe  $p_c = p_c(d, k)$  tal que

1. Para  $p < p_c$ , existe um  $c_p > 0$  tal que para todo  $n \geq 1$ ,  $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$ .
2. (Mean Field Lower Bound) Existe  $c > 0$  tal que  $p > p_c$ ,  $\mu_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$ .

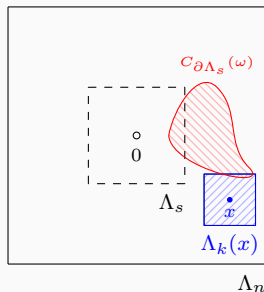
## Teorema 6 (Decaimento exponencial)

Para o modelo de Percolação  $2k$  Dependente em  $\mathbb{L}^d$ , existe  $p_c = p_c(d, k)$  tal que

1. Para  $p < p_c$ , existe um  $c_p > 0$  tal que para todo  $n \geq 1$ ,  $\mu_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p n}$ .
2. (Mean Field Lower Bound) Existe  $c > 0$  tal que  $p > p_c$ ,  $\mu_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$ .

### Demonstração:

Considere uma família de algoritmos  $\mathbf{T}$  similar àquela definida para a Proposição 4. Nesse caso,  $\mathbf{T}$  irá revelar o aglomerado de  $\partial\Lambda_s$ , com  $s \in [n]$ . Aqui, porém, perceba que o algoritmo explora, primeiro, os vértices  $x \in \Lambda_n$  tal que  $\partial\Lambda_k(x)$  está conectada, através de um caminho aberto no processo de percolação de elos, a  $\partial\Lambda_s$  (notação:  $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$ )



**Figura 11:** Revelação para  $\mathbb{I}_{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n}^\omega(\tilde{\omega})$ .

## Percolação $2k$ Dependente

Para um conjunto de índices  $\mathbf{v}$  com duas seqüências  $\partial\Lambda_s = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n$  e  $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n$ , com  $A_t$  representando o conjunto de vértices  $x$  tal que  $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$  e  $B_t$  o conjunto de vértices explorados até o instante  $t$ , temos, dada uma ordem para os vértices considerados, uma construção (em  $t$ ) do seguinte tipo:

- a. Ou existe um vértice  $x$  em  $\Lambda_n \setminus B_t$  tal que  $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} A_t$  (se existir mais de um, escolha o menor). Nesse caso, defina  $\mathbf{v}_{t+1} := x$ ,  $B_{t+1} = B_t \cup \{x\}$ ,

$$A_{t+1} := \begin{cases} A_t \cup \{x\} & \text{se } \xi_x = 1 \\ A_t & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- b. Ou não existe  $x$  com tais características. Nesse caso, defina  $\mathbf{v}_{t+1}$  como o menor vértice em  $\Lambda_n \setminus B_t$ ,  $B_{t+1} := B_t \cup \{x\}$  e, por fim,  $A_{t+1} := A_t$ .

Perceba que, em “a.”, ainda estamos descobrindo vértices  $x$  tal que  $\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s$ ; porém, quando em “b.”, permanecemos nessa opção até o final da exploração. Em resumo, para  $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$ ,  $\tau(\tilde{\omega})$  não é maior que o último  $t$  para o qual a opção “a.” ainda é válida.



Assim, relembando a definição de  $\delta_x(\mathbf{T})$ , temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\tilde{\omega}) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Assim, relembrando a definição de  $\delta_x(\mathbf{T})$ , temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\tilde{\omega}) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Equação 8 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com  $h = h(p) \geq 1$  “pagando o preço” para abrir  $\Lambda_k(x)$ . Dessa forma, para todo  $x \in \Lambda_n$ ,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (9)$$

Assim, relembrando a definição de  $\delta_x(\mathbf{T})$ , temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\tilde{\omega}) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Equação 8 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com  $h = h(p) \geq 1$  “pagando o preço” para abrir  $\Lambda_k(x)$ . Dessa forma, para todo  $x \in \Lambda_n$ ,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (9)$$

Agora, aplicando o Teorema 3 para  $f(\tilde{\omega}) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\tilde{\omega})$  com a cota apresentada na Equação 9, empregando a mesma estratégia adotada na prova da Proposição 4 e utilizando o Teorema 1 e o Lema 1 para  $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1}\theta_n(p)$ , tal que  $\bar{p} \in (p_c, 1)$ , obtemos o resultado desejado para a medida  $\mathbb{P}_p$ .

Assim, relembando a definição de  $\delta_x(\mathbf{T})$ , temos

$$\mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\tilde{\omega}) : v_t = x) \leq \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (8)$$

Perceba, porém, que podemos reescrever o lado direito da Equação 8 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\{\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s\} \cap \{\Lambda_k(x) \text{ está aberta}\}) &\leq \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) \\ \implies \mathbb{P}_p(\partial\Lambda_k(x) \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s) &\leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s), \end{aligned}$$

com  $h = h(p) \geq 1$  “pagando o preço” para abrir  $\Lambda_k(x)$ . Dessa forma, para todo  $x \in \Lambda_n$ ,

$$\delta_x(\mathbf{T}) \leq h \mathbb{P}_p(x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_s). \quad (9)$$

Agora, aplicando o Teorema 3 para  $f(\tilde{\omega}) = \mathbb{I}_{0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n}(\tilde{\omega})$  com a cota apresentada na Equação 9, empregando a mesma estratégia adotada na prova da Proposição 4 e utilizando o Teorema 1 e o Lema 1 para  $f_n(p) = h(1 - \theta_1(\bar{p}))^{-1}\theta_n(p)$ , tal que  $\bar{p} \in (p_c, 1)$ , obtemos o resultado desejado para a medida  $\mathbb{P}_p$ .

Para estender o resultado para  $\mu_p$ , note que, por construção,  $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda_n\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\})$ ; bem como, para o *cluster*  $C_0(\tilde{\omega}) := \{y \in \mathbb{Z}^d : 0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} y\}$ ,  $\mathbb{P}_p(\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : |C_0(\tilde{\omega})| = +\infty\}) = \mu_p(\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\})$ .

COMPLETAR.

