Sharp Threshold Phenomena in Statistical Physics

André Victor Ribeiro Amaral[†]

Orientador: Roger William Câmara Silva

Universidade Federal de Minas Gerais — ICEx, Departam. de Estatística.

(09/12/2019)

[†] E-mail: avramaral@gmail.com

Sumário

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, diz que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda "rapidamente" como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Observação

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ será tal que $\Omega = \{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos) e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{i \in [n]} \mu_i$, com $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$, onde $[n] = \{1, \dots, n\}$.

Introdução

Em modelos com componentes estocásticas, diz que um sistema aleatório **finito** passa por ***sharp threshold*** se o seu comportamento muda "rapidamente" como resultado de uma pequena perturbação dos parâmetros que governam sua estrutura.

Observação

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ será tal que $\Omega = \{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$ e $\mathbb{P}_p$ é a medida produto Bernoulli $\prod_{i\in[n]} \mu_i$, com $\mu_i(\omega_i = 1) = p$ e $\mu_i(\omega_i = 0) = 1 - p$; onde $[n] = \{1, \cdots n\}$.

Introdução

Seja $f_k : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ sequência de funções Booleanas, então defina $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega)\, p^{\sum_{i\in[n]} \omega_i} (1-p)^{\sum_{i\in[n]} 1-\omega_i}. \tag{1}$$

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se existe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{k\to+\infty}\delta_k = 0$, tal que $F_k(p_k - \delta_k) \longrightarrow 0$ e $F_k(p_k + \delta_k) \longrightarrow 1$, quando $k \longrightarrow +\infty$.

Introdução

Seja $f_k : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ sequência de funções Booleanas, então defina $F_k(p) := \mathbb{E}_p(f_k(\omega))$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso,

$$F_k(p) = \sum_{\omega \in \Omega} f_k(\omega)\, p^{\sum_{i\in[n]} \omega_i} (1 - p)^{\sum_{i\in[n]} 1-\omega_i}. \tag{1}$$

Definição 1

Uma sequência de funções Booleanas crescentes $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se existe $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0$, tal que $F_k(p_k - \delta_k) \longrightarrow 0$ e $F_k(p_k + \delta_k) \longrightarrow 1$, quando $k \to +\infty$.

Introdução

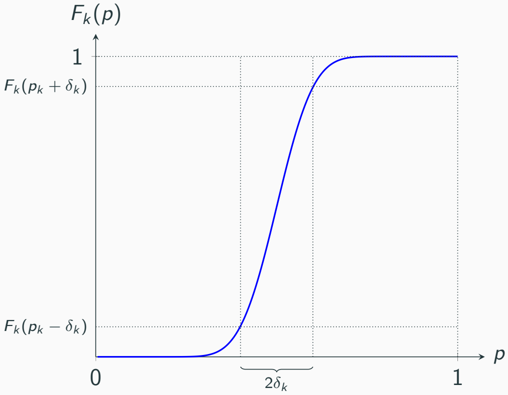

Figura 1: Esboço de $F_k(p) = \mathbb{E}_p(f_k(w))$ para algum k “grande”, tal que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Introdução

Exemplo 1

Seja $f_k(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_1 = 1\}}(\omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $F_k(p) = p$; dessa forma, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **não** passa por *sharp threshold*.

(Modelo de Erdös-Rényi) Seja $G(n, p)$ grafo aleatório, então:

Exemplo 2 (Conectividade do grafo)

Seja $A_k = \{G(k, p)$ é conectado$\}$, então $(\mathbb{I}_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_c = \frac{\log k}{k}$.

Exemplo 3 (Exist. de comp. conectada "grande")

Seja $B_k = \{\exists$ comp. em $G(k, p)$ com tam. maior que $\eta_k\}$, tal que $\log k \ll \eta_k \ll k$, então $(\mathbb{I}_{B_k})_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_c = \frac{1}{k}$.

Introdução

Exemplo 1

Seja $f_k(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_1 = 1\}}(\omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $F_k(p) = p$; dessa forma, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **não** passa por *sharp threshold*.

(Modelo de Erdös-Rényi) Seja $G(n, p)$ grafo aleatório, então:

Exemplo 2 (Conectividade do grafo)

Seja $A_k = \{G(k, p)$ é conectado$\}$; então $(\mathbb{I}_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{\log k}{k}$.

Exemplo 3 (Exist. de comp. conectada "grande")

Seja $B_k = \{\exists$ comp. em $G(k, p)$ com tam. maior que $\eta_k\}$, tal que $\log k \ll \eta_k \ll k$, então $(\mathbb{I}_{B_k})_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{1}{k}$.

Introdução

Exemplo 1

Seja $f_k(\omega) = \mathbb{I}_{\{\omega_1 = 1\}}(\omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $F_k(p) = p$; dessa forma, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **não** passa por *sharp threshold*.

(Modelo de Erdös-Rényi) Seja $G(n,p)$ grafo aleatório, então:

Exemplo 2 (Conectividade do grafo)

Seja $A_k = \{G(k,p) \text{ é conectado}\}$; então $(\mathbb{I}_{A_k})_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{\log k}{k}$.

Exemplo 3 (Exist. de comp. conectada "grande")

Seja $B_k = \{\exists \text{ comp. em } G(k,p) \text{ com tam. maior que } r_k\}$, tal que $\log k \ll r_k \ll k$; então $(\mathbb{I}_{B_k})_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* em $p_k = \frac{1}{k}$.

Como provar que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\text{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\text{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1 - \omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a influência do bit i como

$$\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\text{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\text{Flip}_i(\omega)))$.

Como provar que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*

Seja $f:\Omega \longrightarrow \{0,1\}$, então defina:

$$\nabla_i f(\omega) := f(\omega) - f(\mathrm{Flip}_i(\omega)),$$

onde

$$\mathrm{Flip}_i(\omega)_j = \begin{cases} \omega_j & \text{para } j \neq i \\ 1-\omega_j & \text{para } j = i. \end{cases}$$

Além disso, defina a **influência** do bit i como

$$\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) := \mathbb{E}_p(|\nabla_i f(\omega)|),$$

que é o mesmo que $\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) = \mathbb{P}_p(f(\omega) \neq f(\mathrm{Flip}_i(\omega)))$.

Fórmula de Russo-Margulis

Teorema 1 (Fórmula de Russo-Margulis)

Para $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ crescente, vale:

$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}_p(f(\omega)) = F'(p) = \sum_{i\in[n]} \mathrm{Inf}_i(f(\omega)).$$

Nesse sentido, ser for possível provar cotas do tipo:

$$F'(p) \geq C\,\mathrm{Var}_p(f(\omega)), \tag{2}$$

para constante C "grande", então vale que, tomando p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$, $\forall \delta > 0$,

$$F(p-\delta) \leq e^{-\delta C} \quad \text{e} \quad F(p+\delta) \geq 1 - e^{-\delta C},$$

i.e., a seq. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associada passa por *sharp threshold*.

Fórmula de Russo-Margulis

Teorema 1 (Fórmula de Russo-Margulis)

Para $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ crescente, vale:

$$\frac{d}{dp}\,\mathbb{E}_p(f(\omega)) = F'(p) = \sum_{i \in [n]} \mathrm{Inf}_i(f(\omega)).$$

Nesse sentido, ser for possível provar cotas do tipo:

$$F'(p) \geq C\ \mathbb{V}_p(f(\omega)), \tag{2}$$

para constante C "grande", então vale que, tomando p tal que $F(p) = \frac{1}{2}$, $\forall \delta > 0$,

$$F(p - \delta) \leq e^{-\delta\, C} \quad \text{e} \quad F(p + \delta) \geq 1 - e^{-\delta\, C};$$

i.e., a seq. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associada passa por *sharp threshold*.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

De maneira equivalente, deve existir alguma influência i com

$$\frac{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}} \geq \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \tag{3}$$

onde $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1}$.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 2 (Talagrand)

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$,

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq c \ln \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i \in [n]} \frac{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}}.$$

De maneira equivalente, deve existir alguma influência i com

$$\frac{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}{\ln \frac{1}{\mathrm{Inf}_i(f(\omega))}} \geq \frac{c_p}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)), \tag{3}$$

onde $c_p = \left(c \ln \frac{1}{p(1-p)}\right)^{-1}$.

Inequação de *sharp threshold*

Continuando, a Inequação 3 implica em: existe pelo menos uma influência tal que

$$\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

com c_p possivelmente modificado por um fator multiplicador.

Por fim, fazendo referência à Inequação 2, o Teorema 2 pode ser traduzido como

$$F'(p) > c_p \ln \frac{1}{\max_i(\mathrm{Inf}_i(f(\omega)))} \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

ou seja, se $C = c_p \ln \frac{1}{\max_i(\mathrm{Inf}_i(f(\omega)))}$ é "grande", então a seq. $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associada passa por *sharp threshold*.

Inequação de *sharp threshold*

Continuando, a Inequação 3 implica em: existe pelo menos uma influência tal que

$$\mathrm{Inf}_i(f(\omega)) > c_p \frac{\ln n}{n} \mathbb{V}_p(f(\omega)),$$

com c_p possivelmente modificado por um fator multiplicador.

Por fim, fazendo referência à Inequação 2, o Teorema 2 pode ser traduzido como

$$F'(p) > c_p \ln \frac{1}{\max_i(\mathrm{Inf}_i(f(\omega)))} \mathbb{V}_p(f(\omega));$$

ou seja, se $C = c_p \ln \frac{1}{\max_i(\mathrm{Inf}_i(f(\omega)))}$ é “grande”, então a seq. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associada passa por *sharp threshold*.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 3

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ que é *simétrica sob um grupo* $\mathcal{G}$ *agindo transitivamente sobre* $[n]$[1],

$$F'(p) \geq c \ln(n) \, \mathbb{V}_p(f(\omega)).$$

Nesse contexto, para todo par i_1 e $i_2 \in [n]$, vale que:

$$\mathrm{Inf}_{i_1}(f) = \mathrm{Inf}_{i_1}(f \circ \sigma) = \mathrm{Inf}_{i_2}(f).$$

[1] Dado um conjunto Λ, (Σ, ψ) é grupo simétrico $\mathcal{G}$ se $\Sigma = \{\sigma; \sigma : \Lambda \longrightarrow \Lambda \text{ é bijeção}\}$ e $\psi : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$, com $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \circ \sigma_2$; nesse caso, f é dita *simétrica sob* $\mathcal{G}$, se $f \circ \sigma = f$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$. Além disso, $\mathcal{G}$ *age transitivamente* sobre Λ se, para todo par λ_1 e λ_2 em Λ, existe $\sigma \in \mathcal{G}$, tal que $\sigma(\lambda_1) = \lambda_2$.

Inequação de *sharp threshold*

Teorema 3

Existe constante $c > 0$ tal que, $\forall p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale que, para qualquer função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ que é *simétrica sob um grupo* $\mathcal{G}$ *agindo transitivamente sobre* $[n]$[1],

$$F'(p) \geq c \ln(n) \, \mathbb{V}_p(f(\omega)).$$

Nesse contexto, para todo par i_1 e $i_2 \in [n]$, vale que:

$$\mathrm{Inf}_{i_1}(f) = \mathrm{Inf}_{i_1}(f \circ \sigma) = \mathrm{Inf}_{i_2}(f).$$

---

[1] Dado um conjunto Λ, (Σ, ψ) é grupo simétrico $\mathcal{G}$ se $\Sigma = \{\sigma; \sigma : \Lambda \longrightarrow \Lambda \text{ é bijeção}\}$ e $\psi : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$, com $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1 \circ \sigma_2$; nesse caso, f é dita *simétrica sob* $\mathcal{G}$, se $f \circ \sigma = f$, $\forall \sigma \in \mathcal{G}$. Além disso, $\mathcal{G}$ *age transitivamente* sobre Λ se, para todo par λ_1 e λ_2 em Λ, existe $\sigma \in \mathcal{G}$, tal que $\sigma(\lambda_1) = \lambda_2$.

Inequação de *sharp threshold*

Mais uma vez, fazendo referência à Inequação 2, e tomando $C = c\ \ln(n)$, é possível dizer, então, que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* sempre que forem satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.

Exemplo 4 (Propriedades monótonas em grafos)
Considerando o Modelo de Erdős-Rényi, toda sequência $(\mathbb{I}_{A_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de funções indicadoras de propriedades crescentes de grafos, i.e., propriedades que dependem da ocorrência de eventos crescentes A_k, passa por *sharp threshold*.

Perceba que os Exemplos 2 e 3 são casos particulares do Exemplo 4.

Inequação de *sharp threshold*

Mais uma vez, fazendo referência à Inequação 2, e tomando $C = c\ \ln(n)$, é possível dizer, então, que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold* sempre que forem satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.

Exemplo 4 (Propriedades* monótonas em grafos)

Considerando o Modelo de Erdös-Rényi, toda sequência $(\mathbb{I}_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de funções indicadoras de propriedades crescentes de grafos; i.e., propriedades que dependem da ocorrência de eventos crescentes A_k, passa por *sharp threshold*.

Perceba que os Exemplos 2 e 3 são casos particulares do Exemplo 4.

Desigualdade de O'Donnel-Saks-Schramm-Servedio

Definição 2 (Algoritmo)

Dados uma n-upla $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e um $t \leq n$, com $t \in \mathbb{N}$, defina $x_{[t]} := (x_1, \cdots, x_t)$ e $\omega_{x_{[t]}} := (\omega_{x_1}, \cdots, \omega_{x_t})$. Um *algoritmo* $\boldsymbol{T}$ é uma tripla $(i_1, \psi_t, t \leq n)$ que toma $\omega \in \Omega$ como entrada e devolve uma sequência ordenada $(i_1, \cdots, i_n)$ construída indutivamente da seguinte forma: para $2 \leq t \leq n$,

$$i_t = \psi_t(i_{[t-1]}, \omega_{i_{[t-1]}}) \in [n] \setminus \{i_1, \cdots, i_{t-1}\};$$

onde ψ_t é interpretada como a regra de decisão no tempo t (ψ_t toma, como argumentos, a localização e o valor dos bits para os primeiros $(t-1)$ passos do processo de indução, e, então, decide qual o próximo bit que será consultado). Aqui, note que a primeira coordenada i_1 é determinística. Por fim, para $f : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, defina:

$$\tau(\omega) = \tau_{f,\boldsymbol{T}}(\omega) := \min\{t \geq 1 : \forall x \in \Omega, x_{i_{[t]}} = \omega_{i_{[t]}} \implies f(x) = f(\omega)\}.$$

Desigualdade de O'Donnel-Saks-Schramm-Servedio

Teorema 4 (Desiguladade de OSSS)

Seja $p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ e um algoritmo $\boldsymbol{T}$; então vale que:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\boldsymbol{T}) \, \mathrm{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\boldsymbol{T}) = \delta_i(f, \boldsymbol{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo $\boldsymbol{T}$ e o bit i.

Sobre a Inequação 2, se todas as revelações $\delta_i(\boldsymbol{T})$ forem pequenas, i.e., se existe um algoritmo que determina de forma completa $f(\omega)$, mas *revela* "poucos" bits, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Desigualdade de O'Donnel-Saks-Schramm-Servedio

Teorema 4 (Desiguladade de OSSS)

Seja $p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fixe uma função Booleana crescente $f : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ e um algoritmo $\boldsymbol{T}$; então vale que:

$$\mathbb{V}_p(f(\omega)) \leq p(1-p) \sum_{i \in [n]} \delta_i(\boldsymbol{T}) \, \mathrm{Inf}_i(f(\omega)),$$

onde $\delta_i(\boldsymbol{T}) = \delta_i(f, \boldsymbol{T}) := \mathbb{P}_p(\exists t \leq \tau(\omega) : i_t = i)$ é chamado de *revelação* de f para o algoritmo $\boldsymbol{T}$ e o bit i.

Sobre a Inequação 2, se todas as *revelações* $\delta_i(\boldsymbol{T})$ forem pequenas; i.e., se existe um algoritmo que determina de forma completa $f(\omega)$, mas *revela* "poucos" bits, então $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ passa por *sharp threshold*.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E^d = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ tal que:

- $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$;
- $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos);
- $\mathbb{P}_p$ é medida produto Bernoulli $\prod_{e \in E^d} \mu_e$, com $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E^d = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ tal que:

- $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$;
- $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos);
- $\mathbb{P}_p$ é medida produto Bernoulli $\prod_{e \in E^d} \mu_e$, com $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

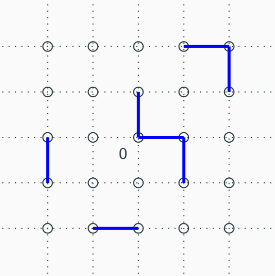

Figura 2: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.25$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E^d = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x,y) = 1\}$, onde $\delta(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ tal que:

- $\Omega = \{0,1\}^{|E^d|}$;
- $\mathcal{F} = \sigma(\text{conjuntos cilíndricos})$;
- $\mathbb{P}_p$ é medida produto Bernoulli $\prod_{e \in E^d} \mu_e$, com $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

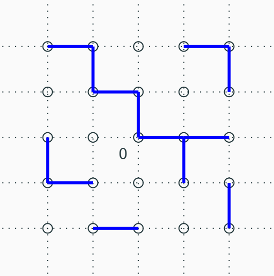

Figura 3: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.50$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ reticulado tal que $\mathbb{Z}^d$ é conjunto de vértices e $E^d = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \delta(x, y) = 1\}$, onde $\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$.

Defina $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ tal que:

- $\Omega = \{0, 1\}^{|E^d|}$;
- $\mathcal{F} = \sigma$(conjuntos cilíndricos);
- $\mathbb{P}_p$ é medida produto Bernoulli $\prod_{e \in E^d} \mu_e$, com $\mu_e(\omega_e = 1) = p$ e $\mu_e(\omega_e = 0) = 1 - p$.

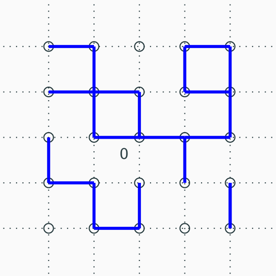

Figura 4: $\omega \in \Omega$ em $\mathbb{L}^2$ com $p = 0.75$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é o evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty)$.
- Defina $p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n,m) = [0,n] \times [0,m]$ e $\mathcal{H}(n,m) = \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n,m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é o evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty)$.
- Defina $p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n,m) = [0,n] \times [0,m]$ e $\mathcal{H}(n,m) = \{\exists \text{ cruzamento horizontal em } R(n,m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é o evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty)$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n, m) = [0, n] \times [0, m]$ e $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n, m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é o evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty)$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n,m) = [0,n] \times [0,m]$ e $\mathcal{H}(n,m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n,m)\}$.

Aplicações em percolação Bernoulli ($\mathbb{Z}^d$)

Notações e definições:

- Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^d$, então x está conectado a y se existe caminho de elos abertos ($e \in E^d$ "aberto" é o mesmo que $\omega_e = 1$) que conecta x a y (notação: $x \leftrightarrow y$).
- Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, $C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ é dito *cluster* de x. Nesse sentido, $\{\omega \in \Omega : |C_0(\omega)| = +\infty\}$ é o evento *percolar* (notação: $\{0 \leftrightarrow +\infty\}$).
- Defina $\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C_0| = +\infty)$.
- Defina $p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\}$.
- Para $n, m \in \mathbb{Z}$, defina a caixa $R(n, m) := [0, n] \times [0, m]$ e $\mathcal{H}(n, m) := \{\exists$ cruzamento horizontal em $R(n, m)\}$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Teorema 5 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^2$ é $\frac{1}{2}$; i.e.,

$$p_c(2) = \frac{1}{2}.$$

Uma intuição desse resultado é dada por:

Proposição 1

Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$.

Figura 5: Evento $\mathcal{H}(n+1, n)$

Teorema 5 (Kesten, 1980)

O ponto crítico para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^2$ é $\frac{1}{2}$; i.e.,

$$p_c(2) = \frac{1}{2}.$$

Uma intuição desse resultado é dada por:

Proposição 1

Temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1, n)) = \frac{1}{2}$.

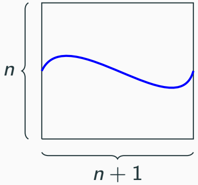

Figura 5: Evento $\mathcal{H}(n+1, n)$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Seja $(\mathbb{Z}^2)^\star = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2$, defina, para $\omega^\star \in \{0,1\}^{|(E^d)^\star|}$, $\omega^\star_{e^\star} := 1 - \omega_e$.

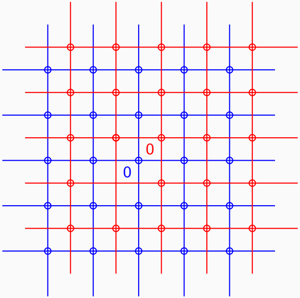

Figura 6: Rede dual $(\mathbb{Z}^2)^\star$ – em vermelho.

Esboço da prova da Proposição 1:

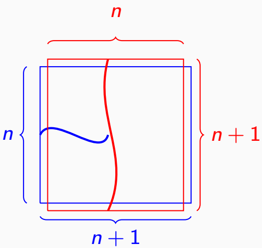

Figura 7: Esboço dos eventos $\mathcal{H}(n+1,n)^c$ e $\mathcal{V}(n,n+1)$.

Sejam $R = (n+1, n)$ e $R^\star = (n, n+1)$; além de $\mathcal{H}(n+1,n)$, defina $\mathcal{V}(n,n+1)$ como o evento no qual existe cruz. vertical em $R^\star$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Esboço da prova da Proposição 1:

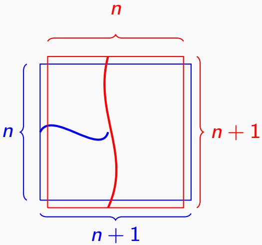

Figura 7: Esboço dos eventos $\mathcal{H}(n+1,n)^c$ e $\mathcal{V}(n,n+1)$.

Sejam $R = (n+1, n)$ e $R^\star = (n, n+1)$; além de $\mathcal{H}(n+1,n)$, defina $\mathcal{V}(n,n+1)$ como o evento no qual existe cruz. vertical em $R^\star$.

Note que $\omega \sim \mathbb{P}_p$ e $\omega^\star \sim \mathbb{P}_{1-p}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)^c)\\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(n,n+1))\\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n))\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)) = \frac{1}{2}.$$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Esboço da prova da Proposição 1:

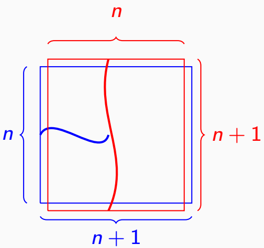

Figura 7: Esboço dos eventos $\mathcal{H}(n+1,n)^c$ e $\mathcal{V}(n,n+1)$.

Sejam $R = (n+1,n)$ e $R^\star = (n,n+1)$; além de $\mathcal{H}(n+1,n)$, defina $\mathcal{V}(n,n+1)$ como o evento no qual existe cruz. vertical em $R^\star$.

Note que $\omega \sim \mathbb{P}_p$ e $\omega^\star \sim \mathbb{P}_{1-p}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)) &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)^c)\\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{V}(n,n+1))\\ &= 1 - \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n))\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(n+1,n)) = \frac{1}{2}.$$

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Teorema 6

Para qualquer $\rho > 0$, existe $c = c(\rho) > 0$ tal que. $\forall n \geq 1$,

$$c < \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Seja $\Lambda_n = [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ e $\partial\Lambda_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$, isto é, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n. Então vale o seguinte resultado:

Corolário 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$.
Em particular, $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Teorema 6

Para qualquer $\rho > 0$, existe $c = c(\rho) > 0$ tal que. $\forall n \geq 1$,

$$c < \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}(\rho n, n)) \leq 1 - c.$$

Seja $\Lambda_n = [-n, n]^d$ caixa d-dimensional de lado $2n$ e $\partial\Lambda_n := \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1}$; isto é, $\partial\Lambda_n$ é a fronteira de Λ_n. Então vale o seguinte resultado:

Corolário 1

Existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Em particular, $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Proposição 2

Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$ tal que,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \leq 1 - \frac{1}{\beta\, n^{\beta}}.$$

Na demonstração da Proposição 2 é possível mostrar que, $\forall e \in E$, $\mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n,n)}) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 3, nos dá o resultado.

Por fim, para terminar a prova do Teorema 5, basta olhar para os eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$. Nesse caso, pela Proposição 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\beta n}}$. Por Borel-Cantelli e simetria dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$, o resultado segue.

Ponto crítico para percolação em $\mathbb{Z}^2$

Proposição 2

Para qualquer $p > \frac{1}{2}$, existe $\beta = \beta(p) > 0$ tal que,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2n, n)) \leq 1 - \frac{1}{\beta\, n^{\beta}}.$$

Na demonstração da Proposição 2 é possível mostrar que, $\forall e \in E$, $\mathrm{Inf}_e(\mathbb{I}_{\mathcal{H}(2n,n)}) \leq \frac{1}{N}$; o que, pelo Teorema 3, nos dá o resultado.

Por fim, para terminar a prova do Teorema 5, basta olhar para os eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$. Nesse caso, pela Proposição 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)^c) \leq \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\beta n}}$. Por Borel-Cantelli e simetria dos eventos $\mathcal{H}(2^{n+1}, 2^n)$ e $\mathcal{V}(2^n, 2^{n+1})$, o resultado segue.

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$

Teorema 7

Para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p\, n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Observação:

A demonstração do Teorema 7 vem da escolha de um algoritmo T apropriado, para que, então, seja possível aplicar o Teorema 4 (Desigualdade de OSSS).

Sharpness da transição de fase para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$

Teorema 7

Para percolação Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$,

1. Para $p < p_c$, existe $c_p > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq e^{-c_p\, n}$.
2. (Mean Field Lower Bound) Existe $c > 0$ tal que $p > p_c$, $\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow +\infty) \geq c(p - p_c)$.

Observação:

A demonstração do Teorema 7 vem da escolha de um algoritmo $\boldsymbol{T}$ apropriado, para que, então, seja possível aplicar o Teorema 4 (Desigualdade de OSSS).

Referências

Hugo Duminil-Copin.
Sharp Threshold Phenomena in Statistical Physics.
Japanese Journal of Mathematics, 14(1):1–25, 2019.