# Лабораторная работа № 5

## Дискретная случайная величина

Дискретной случайной величиной ( $X$ ) называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с определёнными вероятностями $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется законом распределения дискретной случайной величины:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ··· | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ··· | $p_n$ |

Выполняется условие: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон (ряд) распределения можно изобразить графически, в виде точек с координатами $(x_i, p_i)$, соединённых отрезками. Получим многоугольник распределения вероятностей (полигон распределения).

Дискретная случайная величина может быть задана функцией распределения. Функцией распределения случайной величины $X$ называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что $X$ примет значение, меньшее чем $x$:

$$F(x) = P(X < x)$$

*Пример.* Закон распределения случайной величины $X$:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,198 | 0,457 | 0,293 | 0,052 |

Проверка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}198 + 0{,}457 + 0{,}293 + 0{,}052 = 1$

Функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины $X$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}198, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}198 + 0{,}457 = 0{,}655, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}198 + 0{,}457 + 0{,}293 = 0{,}948, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}198 + 0{,}457 + 0{,}293 + 0{,}052 = 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}198, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}655, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}948, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

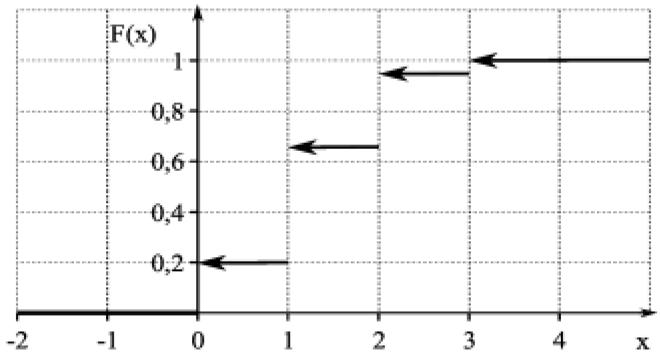


График функции распределения.

<u>Числовые характеристики дискретной случайной величины.</u>

Математическое ожидание случайной величины $X$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$$

Дисперсия случайной величины $X$:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2-(M(X))^2$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ .

Обобщёнными числовыми характеристиками для случайных величин в теории вероятностей, а также математической статистике являются начальные и центральные моменты. Начальным моментом $k$-го порядка случайной величины $X$ называют математическое ожидание от величины в $k$-ой степени:

$$\nu_k = M\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^k,\ k=1,2,3,...$$

Начальный момент первого порядка: $\nu_1 = M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$

Начальный момент второго порядка: $\nu_2 = M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2$

Начальный момент третьего порядка: $\nu_3 = M\left(X^3\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^3$

Центральным моментом $k$-го порядка случайной величины $X$ называют математическое ожидание от величины $(X-M(X))^k$ :

$$\mu_k = M\left(\left(X - M(X)\right)^k\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M(X)\right)^k, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Центральный момент первого порядка: $\mu_1 = M\left(X - M(X)\right) = M(X) - M(X) = 0$

Центральный момент второго порядка:

$$\mu_2 = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M(X)\right)^2 = D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = inu_2 - inu_1^2$$

Центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = M\left(\left(X - M(X)\right)^3\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i - M(X)\right)^3$$

Задания для лабораторной работы

1. Построить многоугольник распределения.
2. Составить функцию распределения и построить её график.
3. Найти начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядка.
4. Найти числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение).

Исходные данные к заданиям

Вариант № 1

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 23 | 28 | 34 | 45 | 47 | 52 | 56 | 67 | 69 | 73 |
| *P* | 0,01 | 0,03 | 0,04 | 0,13 | 0,15 | 0,28 | 0,16 | 0,08 | 0,06 | 0,06 |

Вариант № 2

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 35 | 40 | 46 | 57 | 59 | 64 | 68 | 79 | 81 | 85 |
| *P* | 0,05 | 0,07 | 0,14 | 0,31 | 0,18 | 0,11 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |

Вариант № 3

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 65 | 115 | 175 | 285 | 305 | 355 | 395 | 505 | 525 | 565 |
| *P* | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,16 | 0,24 | 0,09 | 0,03 |

Вариант № 4

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 64 | 79 | 97 | 130 | 136 | 151 | 163 | 196 | 202 | 214 |
| *P* | 0,01 | 0,04 | 0,08 | 0,13 | 0,34 | 0,18 | 0,12 | 0,07 | 0,02 | 0,01 |

Вариант № 5

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 61 | 71 | 83 | 105 | 109 | 119 | 127 | 149 | 153 | 161 |
| *P* | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,25 | 0,19 | 0,18 | 0,16 | 0,08 | 0,04 | 0,03 |

Вариант № 6

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 14 | 18 | 25 | 36 | 42 | 54 | 63 | 69 | 75 | 82 |
| *P* | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,12 | 0,15 | 0,26 | 0,15 | 0,09 | 0,08 | 0,06 |

Вариант № 7

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 26 | 30 | 37 | 48 | 54 | 66 | 75 | 81 | 87 | 94 |
| *P* | 0,05 | 0,07 | 0,12 | 0,26 | 0,18 | 0,14 | 0,07 | 0,05 | 0,04 | 0,02 |

Вариант № 8

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 5 | 25 | 60 | 115 | 145 | 205 | 250 | 280 | 310 | 345 |
| *P* | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,12 | 0,14 | 0,15 | 0,17 | 0,19 | 0,09 | 0,04 |

Вариант № 9

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 37 | 49 | 70 | 103 | 121 | 157 | 184 | 202 | 220 | 241 |
| *P* | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,13 | 0,24 | 0,22 | 0,15 | 0,09 | 0,04 | 0,03 |

Вариант № 10

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 43 | 51 | 65 | 87 | 99 | 123 | 141 | 153 | 165 | 179 |
| *P* | 0,03 | 0,04 | 0,08 | 0,23 | 0,17 | 0,14 | 0,12 | 0,09 | 0,06 | 0,04 |

Вариант № 11

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 55 | 58 | 64 | 71 | 77 | 83 | 89 | 92 | 97 | 103 |
| *P* | 0,01 | 0,03 | 0,04 | 0,13 | 0,15 | 0,28 | 0,16 | 0,08 | 0,06 | 0,06 |

Вариант № 12

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 67 | 70 | 76 | 83 | 89 | 95 | 101 | 104 | 109 | 115 |
| *P* | 0,05 | 0,07 | 0,14 | 0,31 | 0,18 | 0,11 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 |

Вариант № 13

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 0 | 9 | 27 | 48 | 66 | 84 | 102 | 111 | 126 | 144 |
| *P* | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,16 | 0,24 | 0,09 | 0,03 |

Вариант № 14

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 160 | 169 | 187 | 208 | 226 | 244 | 262 | 271 | 286 | 304 |
| *P* | 0,01 | 0,04 | 0,08 | 0,13 | 0,34 | 0,18 | 0,12 | 0,07 | 0,02 | 0,01 |

Вариант № 15

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | 125 | 131 | 143 | 157 | 169 | 181 | 193 | 199 | 209 | 221 |
| *P* | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,25 | 0,19 | 0,18 | 0,16 | 0,08 | 0,04 | 0,03 |

*Литература*

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 479 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-00211-9.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 404 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-00247-8.