

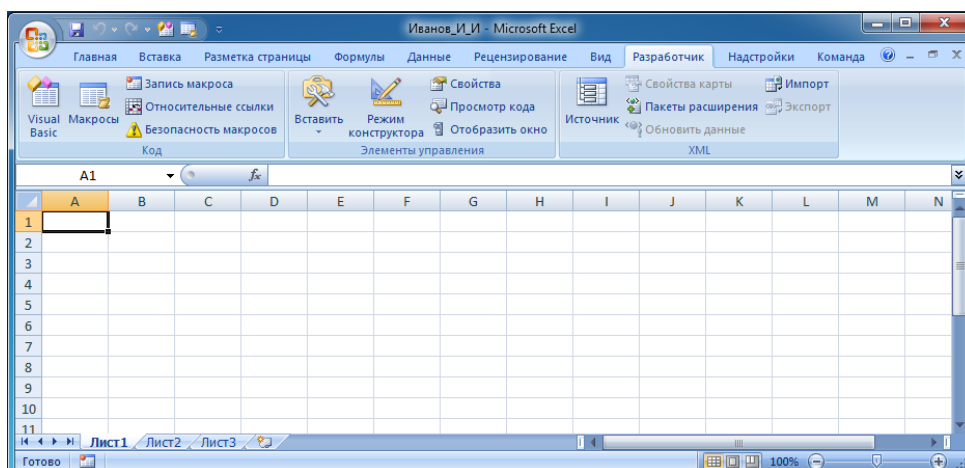
Лабораторная работа №3

Цель: изучение связи между вероятностью события и относительной частотой его появления в серии независимых испытаний.

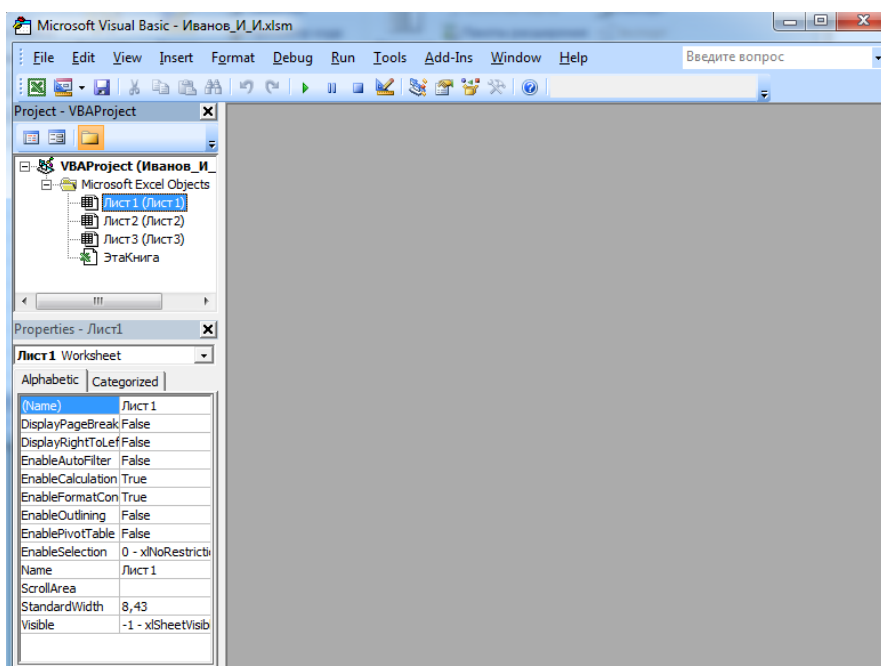
Задачи: 1) Написание программы генерации случайного события на языке VBA; 2) моделирование серий повторных испытаний, приводящих к появлению заданного события, средствами MS EXCEL; 3) экспериментальное подтверждение сближения частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний.

VBA (Visual Basic for Applications) — это упрощенная версия Visual Basic, встроенная в множество продуктов линейки Microsoft Office. Она позволяет писать программы прямо в файле конкретного документа. Вам не требуется устанавливать различные IDE — всё, включая отладчик, уже есть в Excel.

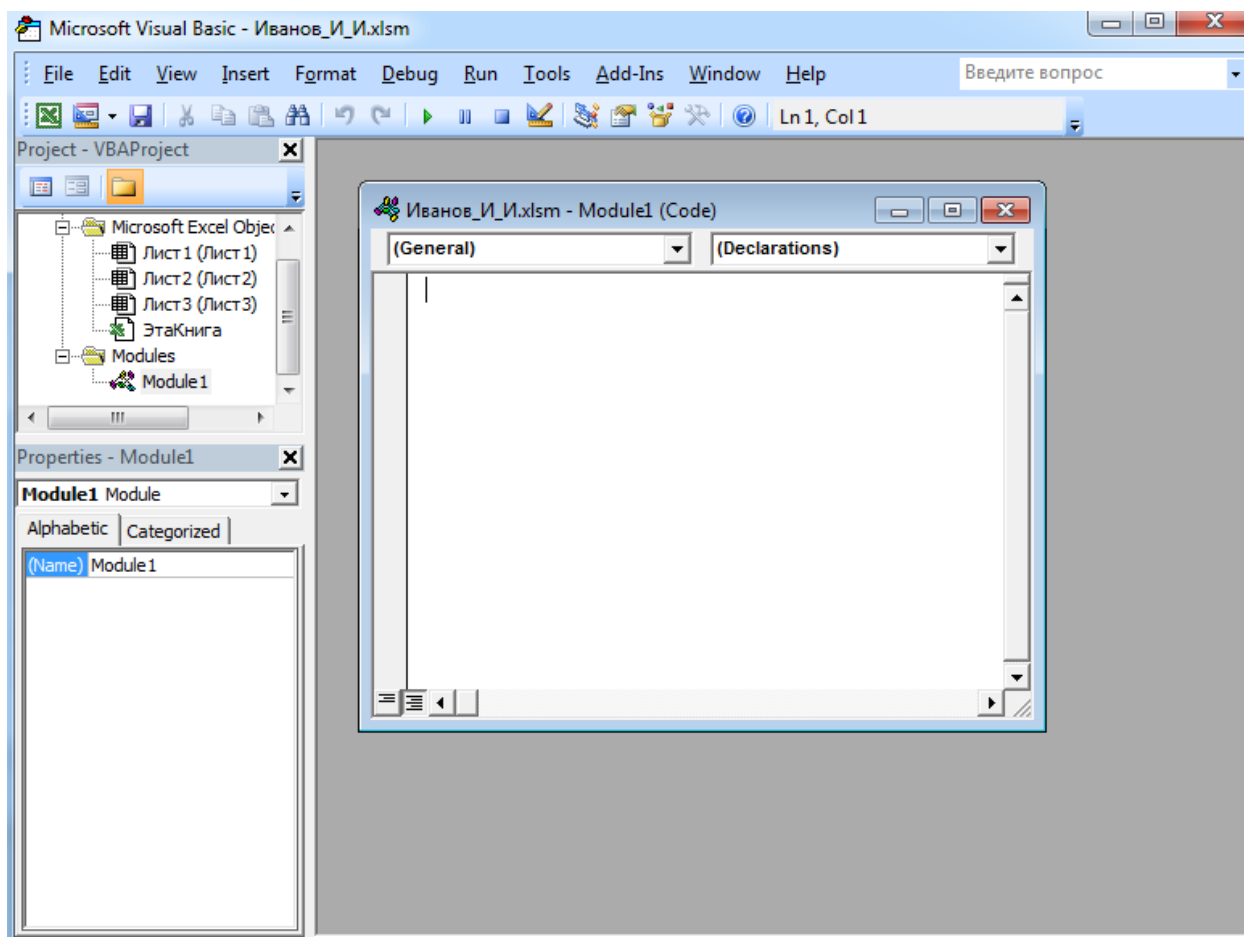
Запустите MS Excel. Сохраните файл с именем «Фамилия_И_О» как книгу *Excel с поддержкой макросов*. Перейдите на вкладку **Разработчик**.



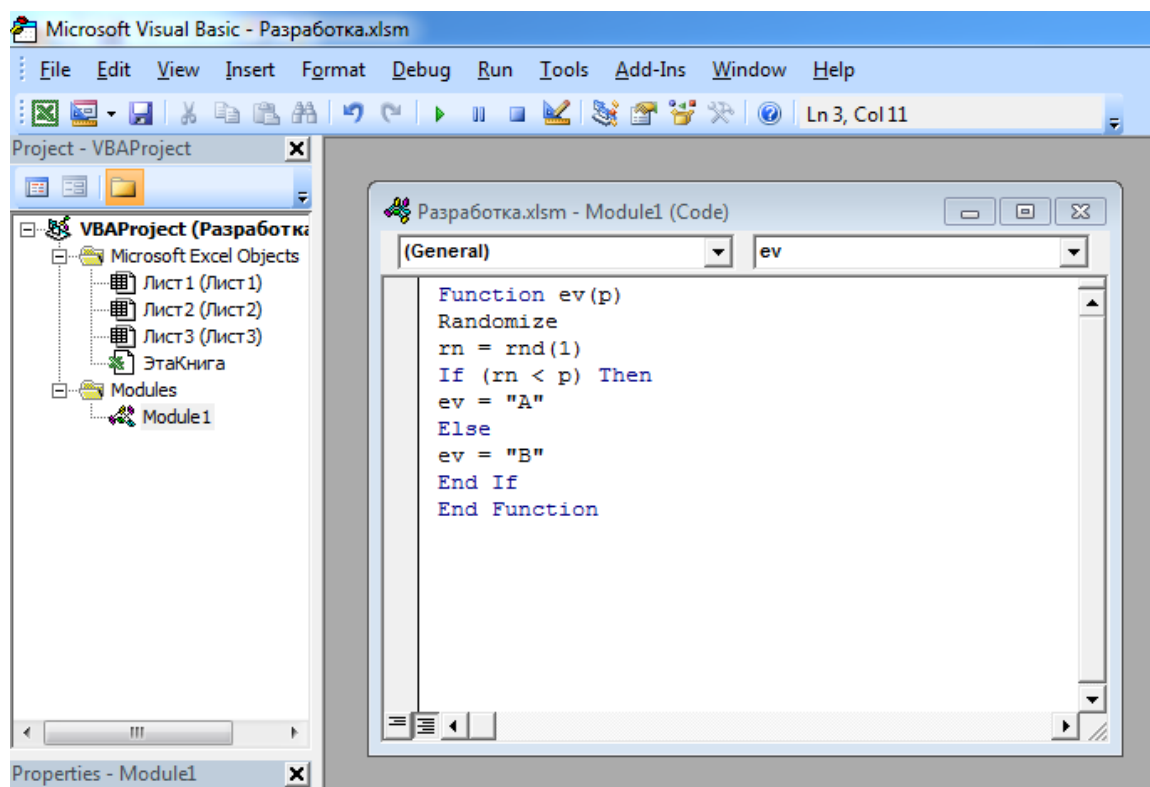
Щелкните мышью по кнопке **Visual Basic**.



Выберите пункт меню **Insert->Module**



В появившемся окне введите текст программы:



Допустим мы умеем генерировать случайные числа, равномерно распределенные на интервале $(0,1)$. Для моделирования случайного события A , вероятность которого равна p , достаточно сформировать одно такое число. При попадании r в интервал $(0,p)$ считают, что событие A наступило, в противном случае – нет.

Рис. 1. Схема использования генератора случайных чисел для имитации случайного события

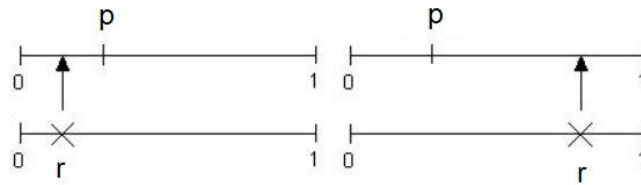
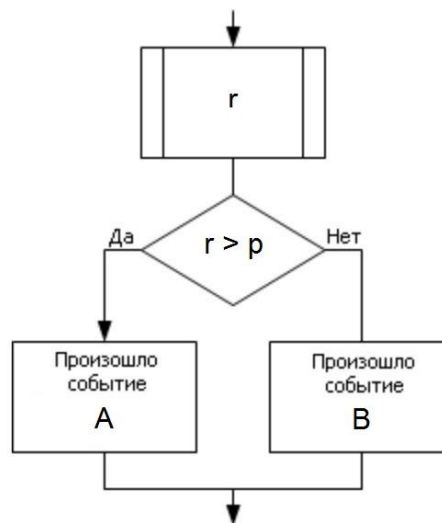



Рис. 2. Блок-схема алгоритма имитации случайного события

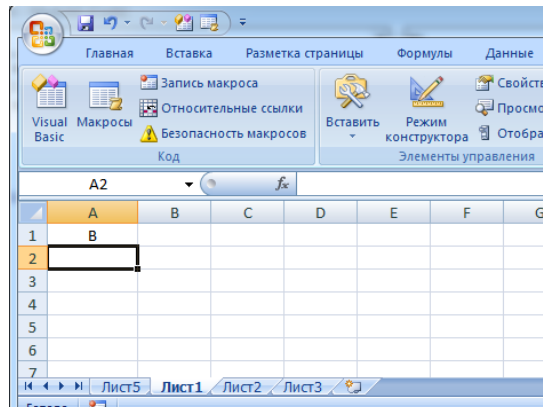
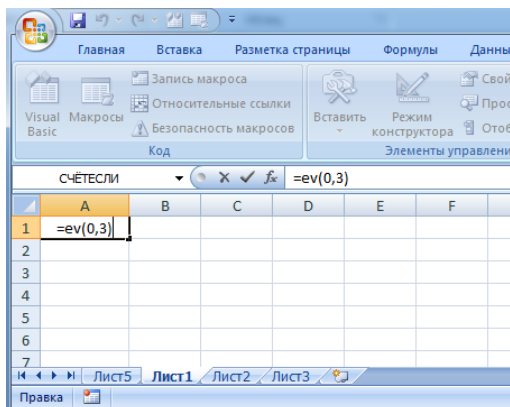


Рассмотрим текст подпрограммы – функции $ev(p)$. Здесь входной параметр: p – вероятность события A . Следовательно, p может принимать значения только из отрезка $[0,1]$. Противоположное событие обозначено как B . Таким образом, $P(A) + P(B) = 1$.

В VBA встроенная функция $rnd(1)$ генерирует случайное число из промежутка $[0,1)$. Если это число меньше чем p , значению функции ev присваивается символ “A”. В противном случае ev принимает значение “B”.

Сохраните текст модуля.

Щелкнув по кнопке  перейдите в книгу Excel. Мы создали пользовательскую функцию $ev(x)$.



Нажмите Enter. В ячейке появится либо значение А с вероятностью 0.3, либо В с вероятностью $1-0.3=0.7$. Нажатием комбинации **Ctrl-Alt-F9** можно пересчитать содержимое рабочего листа Excel. Каждый такой пересчет соответствует некоторому испытанию, в результате которого в выбранной ячейке соответствующей вероятностью будет возникать либо символ А, либо символ В. Другими словами, в результате испытания появляется либо событие А, либо противоположное ей событие В.

Повторные испытания можно моделировать можно и другим способом. Достаточно скопировать содержимое ячейки в другие строки средствами Excel. Например, наведите курсор на нижний правый угол ячейки и когда курсор примет форму $+$, удерживая в нажатом состоянии левую кнопку мыши протащите маркер в виде крестика на необходимое число строк. Если теперь отпустить правую кнопку мыши, все выделенные ячейки заполнятся значениями А или В. Число независимых испытаний будет соответствовать количеству строк.

Подсчитаем количество случаев, когда появилось событие А. Можно воспользоваться функцией Excel **СЧЁТЕСЛИ**(Диапазон;"А"). Например, СЧЁТЕСЛИ(А1:А100;"А") подсчитает количество строк в которых появилось событие А. Отнеся это количество к общему числу испытаний получим частоту события А.

Относительной частотой события А называют отношение числа испытаний m , в которых данное событие появилось, к общему числу n фактически проведённых испытаний:

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

Между относительной частотой и вероятностью события есть определённая связь: если каким-то образом установлено, что вероятность случайного события равняется числу p , тогда при большом числе испытаний при неизменных условиях частота события приблизительно равняется вероятности, то есть: $W(A) \approx p$.

При небольшом числе испытаний частота события носит в значительной мере случайный характер и может заметно изменяться от одной серии испытаний к другой. Однако при увеличении числа испытаний частота все более теряет случайный характер; случайные обстоятельства, свойственные каждому отдельному испытанию, в совокупности взаимно погашаются, и частота проявляет тенденцию стабилизироваться, приближаясь с незначительными колебаниями к некоторой средней, постоянной величине.

Это свойство «устойчивости частот», многократно проверенное экспериментально и есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях. Математическую формулировку этой закономерности впервые дана в теореме Бернулли.

Теорема Бернулли. Если в каждом из N независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то при достаточно большом числе испытаний отклонение относительной частоты от вероятности вероятности p будет сколь угодно малым, т.е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{M}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Смысл этой теоремы сводится к тому, что при неограниченном увеличении числа повторных независимых испытаний при одних и тех же условиях с практической достоверностью можно утверждать, что частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности. Проверить такое предположение мы, естественно, можем только для таких событий, вероятности которых могут быть вычислены непосредственно.

В данной работе необходимо сгенерировать случайное событие с заданной вероятностью и установить ее связь с относительной частотой события. Для этого составьте следующую таблицу. Вероятность события A выбирайте в соответствии с вариантом.

Число испытаний	Число появлений события A	Относительная частота появления события A
10		
100		
1000		
10000		

Например, для $p=0,3$ может получиться

Число испытаний	Число появлений события A	Относительная частота w появления события A
10	4	0,4
100	25	0,4
1000	283	0,283
10000	2963	0,2963

Сделайте вывод.

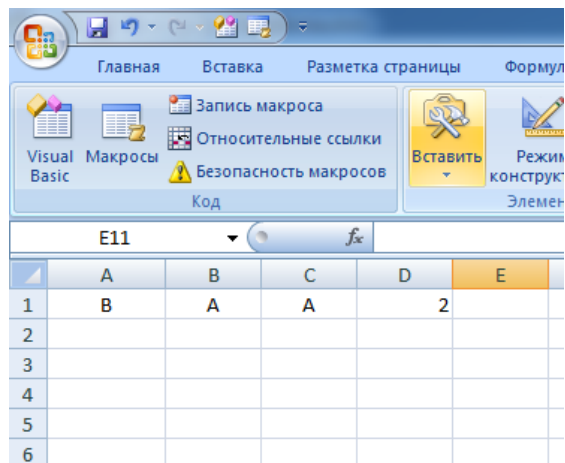
Формула вероятности повторных испытаний Бернулли.

Другой случай, когда мы заранее можем вычислить вероятность события, связана с формулой Бернулли.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Пусть выполняются N повторных испытаний, в которых может появиться событие A с вероятностью p . Для определенности в данном примере возьмем $N=3$ и $p=0,3$. Скопируем ячейку $A1$ вправо в ячейки $B1$ и $C1$. В ячейку $D1$ внесем формулу $\text{СЧЁТЕСЛИ}(A1:C1;"A")$, по которой будет подсчитано число появления события A в заданных трех испытаниях.

Например, может получиться:



Обновляя рабочий лист Excel будем получать различные другие реализации серии повторных независимых 3-х испытаний (убедитесь).

Пусть серия из 3-х испытаний повторяется N раз. Для определенности рассмотрим случай N=10. Выделите диапазон A1:D1 и скопируйте его до N-й строки. Таким образом мы получим повторение серии трех испытаний 10 раз. Далее, уже известным способом, подсчитаем число случаев, когда событие A в каждой серии повторных испытаний появляется k раз, где $k = 0, 1, 2, 3$.

Для этого в ячейку E1 внесем формулу СЧЁТЕСЛИ(\$D1:\$D10; "0"). Копируя данную формулу в соседние ячейки F1, G1, H1 изменим в них критерий сравнения "0" на "1", "2", "3", соответственно. В результате, в указанных ячейках будет подсчитываться количество серий испытаний, в которых событие A появилось $k = 0, 1, 2, 3$ раз.

Например, получим:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	B	B	A	1	4	4	2	0	
2	B	B	B	0					
3	B	B	B	0					
4	B	A	B	1					
5	A	A	B	2					
6	B	B	A	1					
7	B	A	A	2					
8	B	B	B	0					
9	B	B	B	0					
10	B	A	B	1					
11									
12									

Ячейки для подсчета выделены красным.

Постройте таблицы:

	Число появления события А в n испытаниях k раз							
N	0	1	2	3	...	k	...	n
10								
100								
1000								
10000								

	Относительная частота появления события А в n испытаниях k раз							
N	0	1	2	3	...	k	...	n
10								
100								
1000								
10000								
	Вероятность появления события А в n испытаниях k раз							
$P_n(k)$								

Сравните относительную частоту появления события А в n испытаниях ровно k раз с вероятностью этого, рассчитанной по формуле Бернулли. Сделайте выводы по полученным результатам.

Варианты заданий

№ варианта	n	p
1	3	0,2
2	3	0,4
3	3	0,5
4	3	0,6
5	3	0,7
6	3	0,8
7	4	0,2
8	4	0,3
9	4	0,4
10	4	0,5
11	4	0,6
12	4	0,7
13	4	0,8
14	5	0,4
15	5	0,5