Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра ПМт

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Расчетно-графическая работа

Термогравитационная конвекция

Факультет: ПМИ

Группа: ПМ-92

Студенты: Иванов В., Кутузов И.

Преподаватель: Бердников В. С.

Новосибирск
2022

1. Цель работы

Определить критическое значение числа Рэлея при заданном значении числа Прандтля и относительном размере полости. Исследовать характеристики течения в условиях термогравитационной конвекции в нагретых прямоугольных областях (вертикальный и горизонтальный слои) при различных типах стенок. Построить зависимости полей изолиний функции тока и изотерм с ростом числа Рэлея, построить распределения температуры по высоте слоя в восходящих, нисходящих потоках в отдельном вале ячеистого течения, а также в центральном сечении вала. Построить распределение локальных тепловых потоков на верхней и нижней границах горизонтального слоя. Определить значение числа Нуссельта и построить зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея.

2. Постановка задачи

Система уравнений термогравитационной конвекции

Для однокомпонентной несжимаемой жидкости тепломассоперенос описывается системой уравнений Навье-Стокса, дополненной уравнением энергии:

$$\begin{cases} \rho[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V}] = -\nabla p + \mu \nabla \bar{V} + \bar{g} p \\ C_p \rho[\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla T)] = \lambda \Delta T \\ \nabla \bar{V} = 0 \end{cases}$$

где ρ – плотность, $\bar{V}$ – скорость, t – время, p – давление, μ – динамическая вязкость, $\bar{g}$ – ускорение свободного падения, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, T – температура, λ – теплопроводность.

При математическом моделировании удобно представить систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, при котором зависимость плотности от температуры учитывается только при массовых силах, а все остальные свойства считаются постоянными и не зависящими от температуры:

$$\begin{cases} \rho_0[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V}] = -\nabla p + \mu \nabla \bar{V} + \bar{g}\rho(T) \\ C_p \rho_0[\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla T)] = \lambda \Delta T \\ \nabla \bar{V} = 0 \end{cases}$$

где ρ_0 – плотность жидкости при некой равновесной температуре (T_0), а $\rho(T)$ вычисляется по соотношению $\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, где β – коэффициент объемного расширения жидкости. Приближение Буссинеска применимо при условии: $\beta(T - T_0) \ll 1$. Таким образом, система приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \bar{V} - (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{V} + \bar{g}(1 - \beta(T - T_0)) \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T - (\bar{V} \cdot \nabla T) \\ \nabla \bar{V} = 0 \end{cases}$$

где ν – кинематическая вязкость, α – температуропроводность.

Система уравнений в переменных вихрь, функция тока, температура

При постановке краевой задачи удобно записать систему уравнений через вихрь, векторный потенциал поля скорости и температуру. В случае двумерной задачи в декартовых координатах векторный потенциал поля скорости будет функцией тока. Изолинии функции тока совпадают с линиями тока жидкости. Для стационарного процесса изолинии функции тока совпадают с траекториями движения частиц. Вихрь ω и векторный потенциал поля скорости ψ находятся следующим образом:

$$\omega = \nabla \times \bar{V}, \qquad \bar{V} = \nabla \times \psi$$

Система уравнений для термогравитационной конвекции в переменных вихрь, векторный потенциал поля скорости и температура в двумерном случае в декартовых координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \beta g_y \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \end{cases}$$

Система уравнений в переменных вихрь, функция тока, температура в безразмерном виде

Приведем записанную систему к безразмерному виду. В качестве геометрического масштаба выберем L. Масштабом скорости выберем νL^{-1}. Таким образом, масштабом функции тока будет кинематическая вязкость ν, а масштабом вихря $-\nu L^{-2}$. За масштаб температуры примем $\Delta T = T_1 - T_0$, а за масштаб по времени $\nu^{-1} L^2$.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr}(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}) - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} - Gr \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \end{cases}$$

где Pr – число Прандтля, а Gr – число Грасгофа.

Число Прандтля

Число Прандтля характеризует теплофизические свойства жидкостей (это отношение времен релаксации гидродинамических возмущений $\tau_\nu = H^2/\nu$, определяемых вязкостью жидкости, и времен релаксации возмущений температуры $\tau_\lambda = H^2/\alpha$, определяемых температуропроводностью), является отношение диссипативных сил движения жидкости к ее температуропроводности и показывает, какие возмущения будут развиваться в системе в первую очередь (гидродинамические или тепловые).

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости $(\nu = \frac{\mu}{\rho})$;

ν – коэффициент температуропроводности жидкости $(\nu = \frac{\lambda}{\rho C_p})$;

μ – коэффициент динамической вязкости жидкости;

p – теплоемкость при постоянном давлении;

λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

Число Грасгофа

Число Грасгофа характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности температуры и из-за этого разности плотностей. Оно является критерием подобия, характеризующим отношение силы плавучести, обусловленную неравномерным распределением плотности жидкости либо газа, находящихся в поле тяжести, и сил вязкого трения.

$$Gr = \frac{g\beta\upsilon_c H^3}{\nu^2}$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости;

g – ускорение свободного падения;

β – коэффициент объемного теплового расширения жидкости $(\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T})$;

υ_c – разница между температурой поверхности жидкости и температурой жидкости $(\upsilon_c = t_c - t_0)$;

H – размер тела;

Число Рэлея

Число Рэлея – безразмерное число, определяющее поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Число Рэлея – критерий подобия, характеризующий отношение работы силы плавучести, возникающей вследствие неравномерности поля температуры у поверхности тела, к потерям энергии за счет теплоотдачи всплывающих молей жидкости в окружающую среду и работы сил вязкого трения.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\alpha\nu} = Gr \cdot Pr$$

g – ускорение свободного падения;
β – коэффициент объемного теплового расширения жидкости;
ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости;
H – высота слоя жидкости;
α – коэффициент температуропроводности жидкости;
ΔT – перепад температуры между границами слоя;

Число Нуссельта

Число Нуссельта – безразмерный коэффициент теплоотдачи, характеризует теплообмен на границе стенка-жидкость. Число Нуссельта характеризует соотношение между интенсивностью теплообмена за счет конвекции и интенсивностью теплообмена за счет теплопроводности (в условиях неподвижной среды).

$$Nu = \frac{\alpha H}{\lambda} = \frac{q_c}{q_\lambda}$$

α – коэффициент теплоотдачи;
H – характерный размер тела;
λ – коэффициент теплопроводности среды;
q_c – тепловой поток за счет конвекции;
q_λ – тепловой поток за счет теплопроводности.

2. Используемые средства

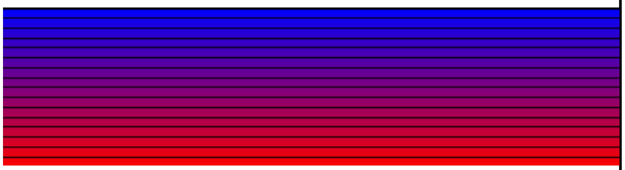
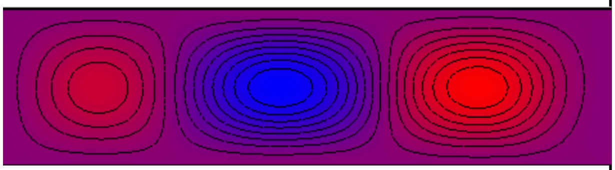
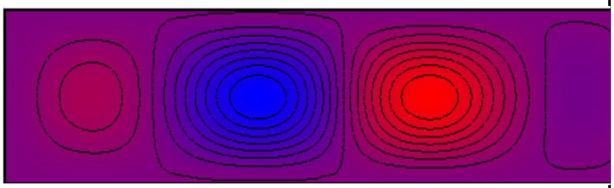
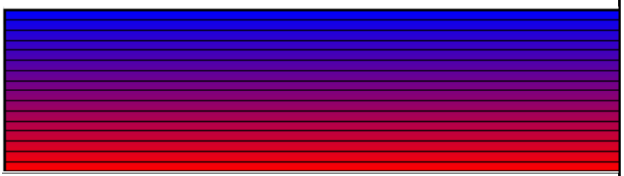
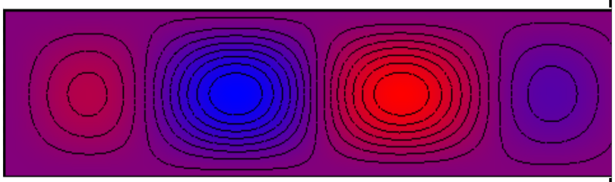
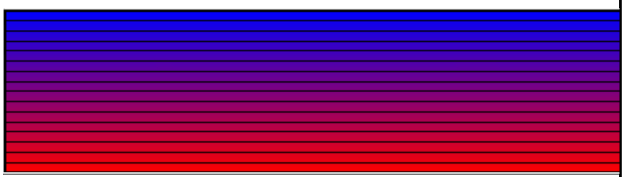
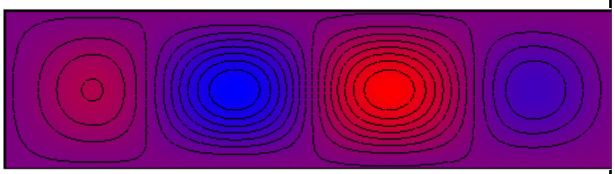
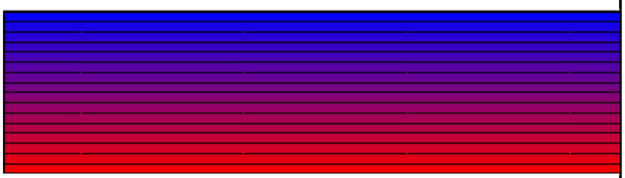
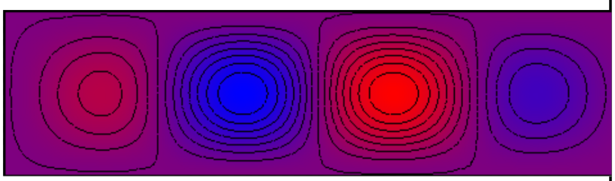
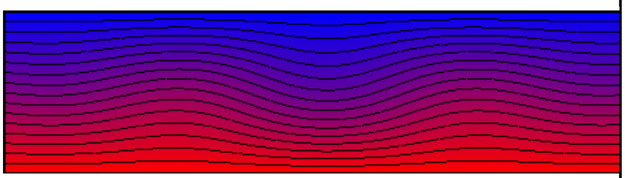
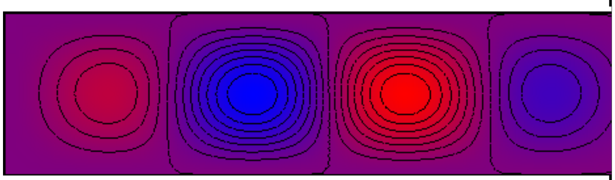
Для выполнения расчетно-графического задания используется программный комплекс QNavierStokes, разработанный для студентов ВУЗов для наглядного представления явления термогравитационной конвекции путем решения тестовых конвективных задач.

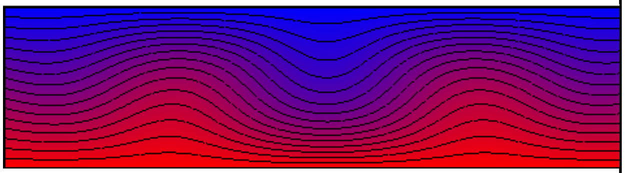
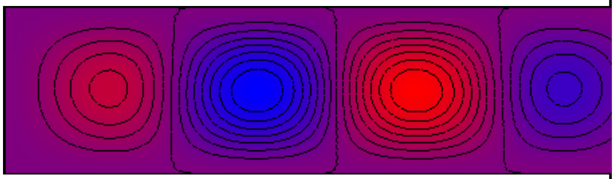
3. Исследования

Поиск критического значения в зависимости от H/L

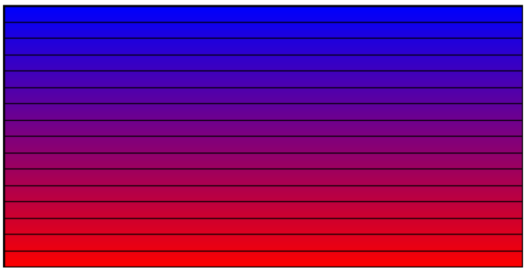
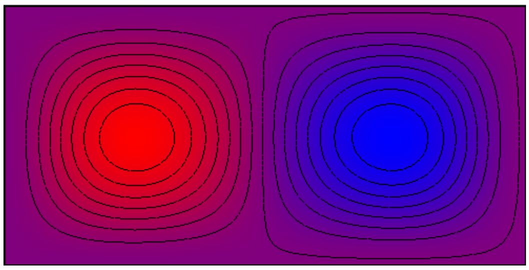
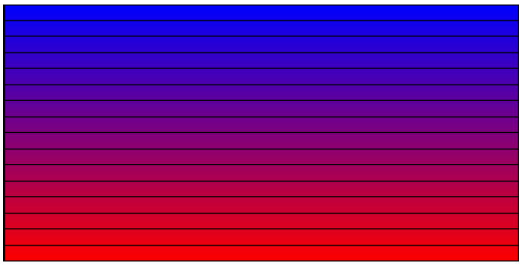
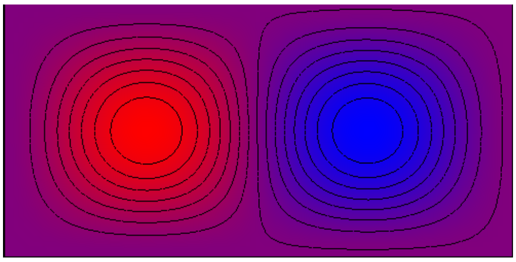
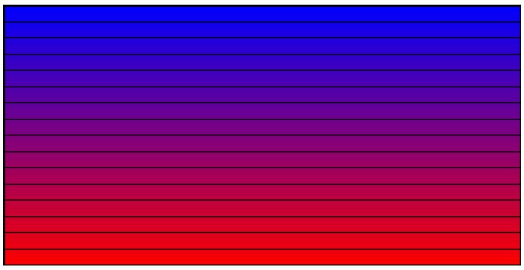
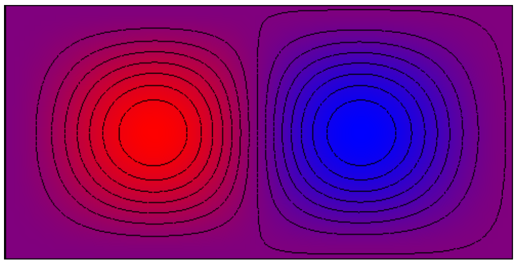
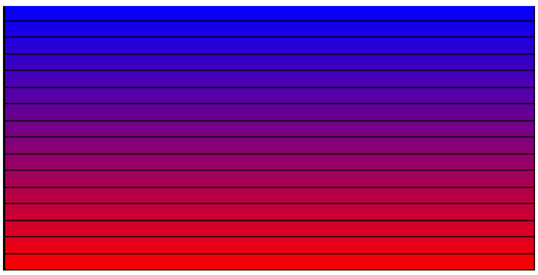
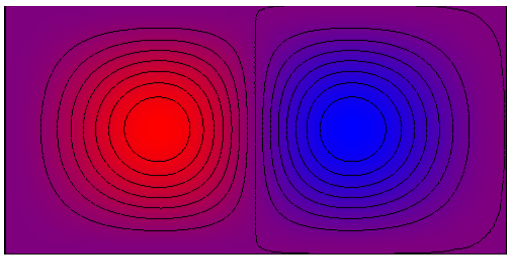
Pr = 886
Все стенки жесткие

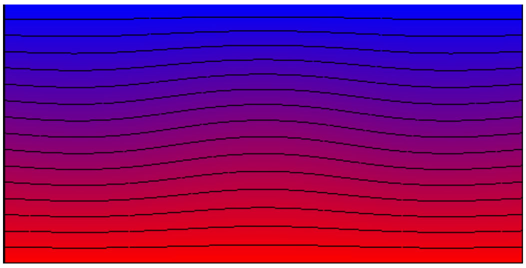
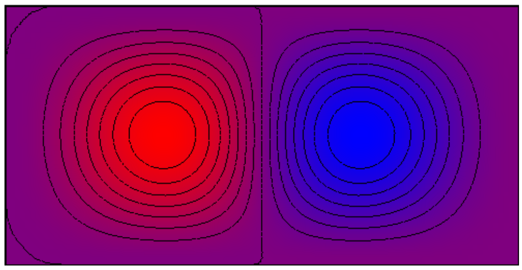
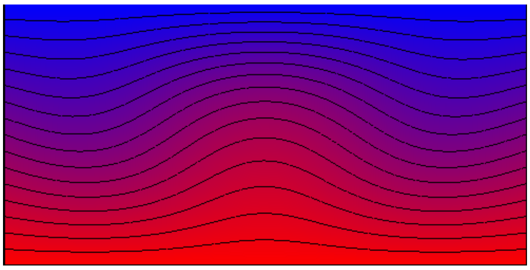
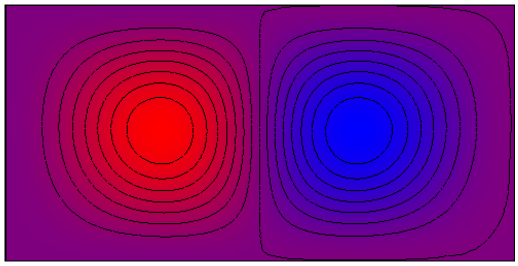
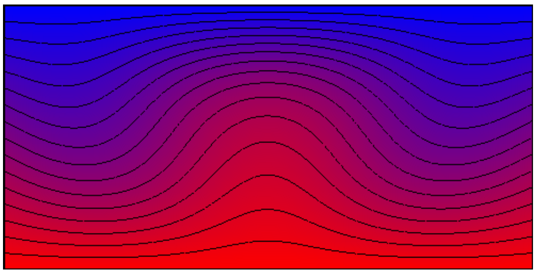
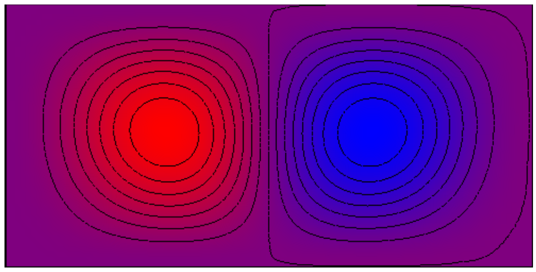
H/L = 0.25

Gr	Ra	T	Ψ
1.0	886		
1.2	1063		
1.5	1329		
1.8	1594		
2.0	**1772**		
2.2	1949		

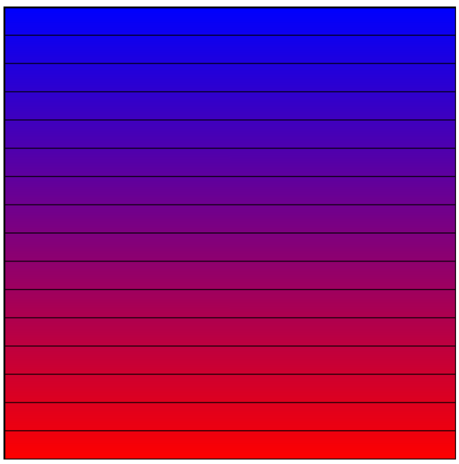
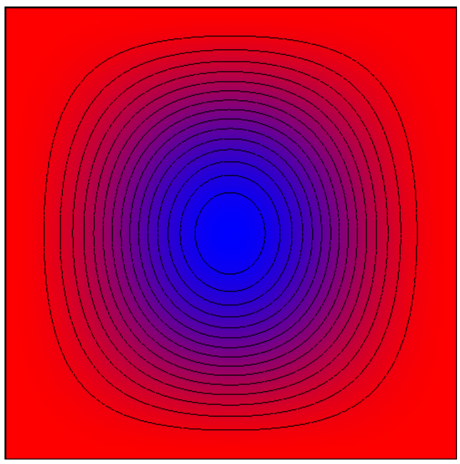
2.5	2215		

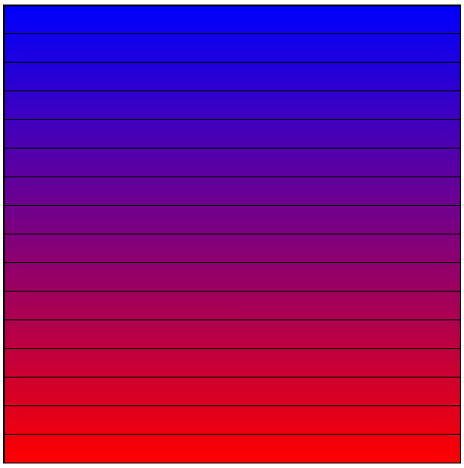
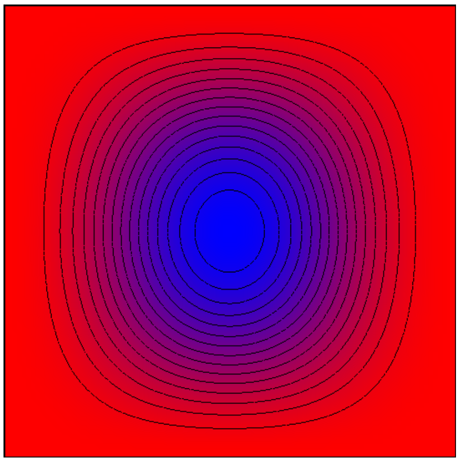
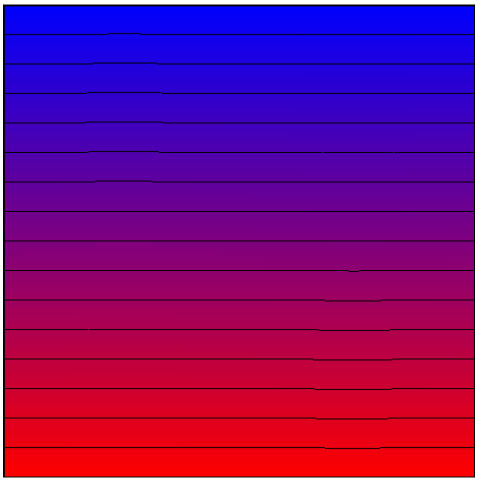
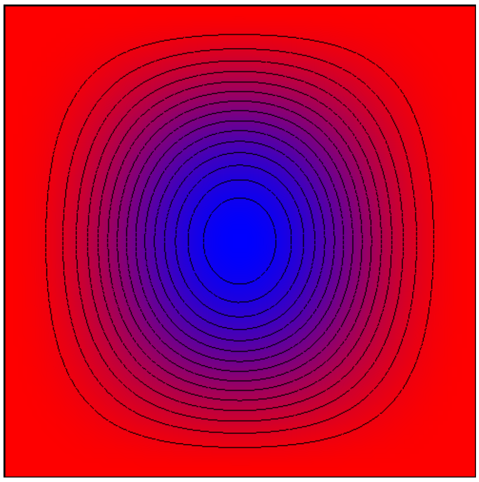
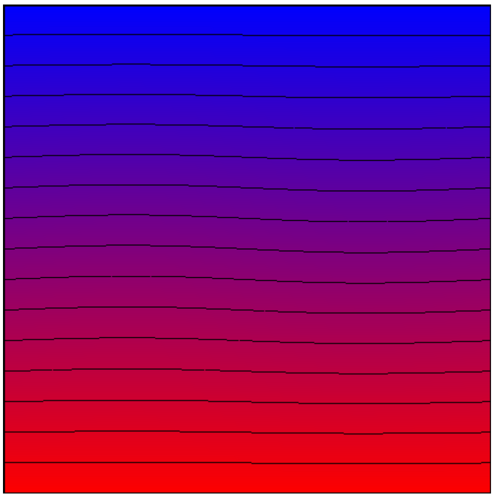
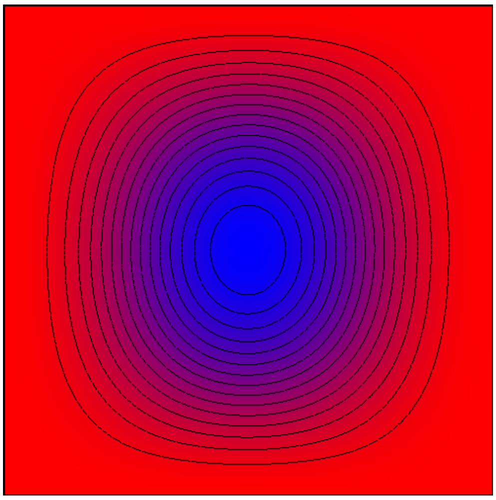
H/L = 0.5

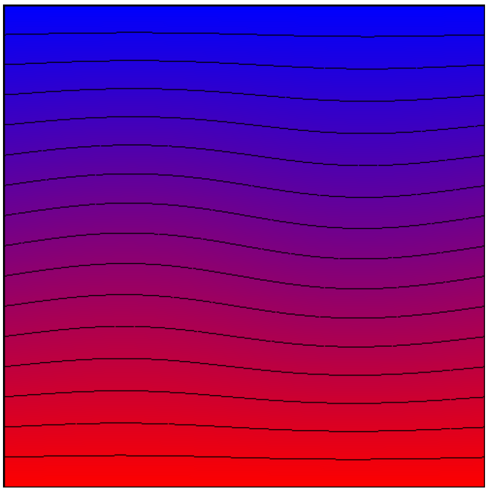
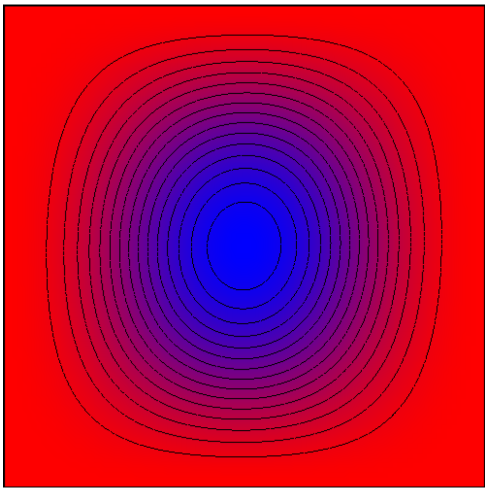
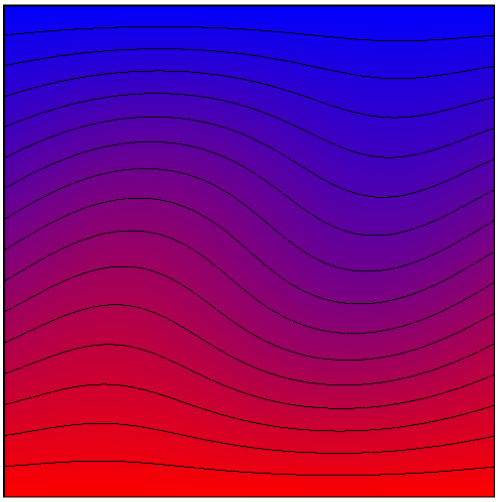
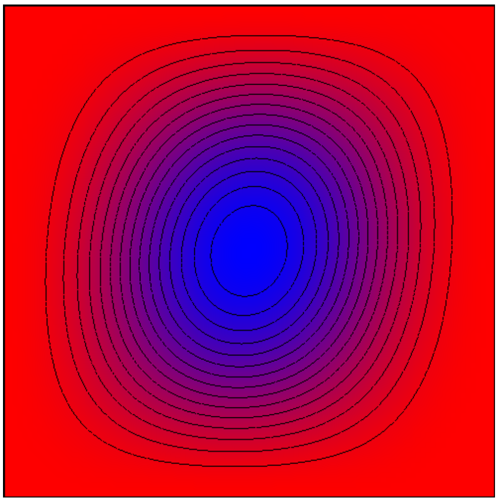
Gr	Ra	T	Ψ
1.0	886		
1.5	1329		
2.0	1772		
2.5	**2215**		

2.75	2436		
3.0	2658		
3.5	3101		

H/L = 1

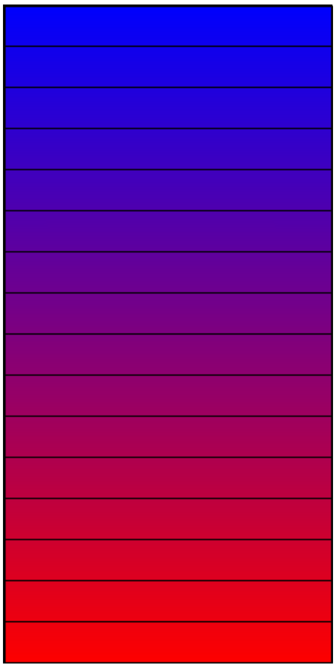
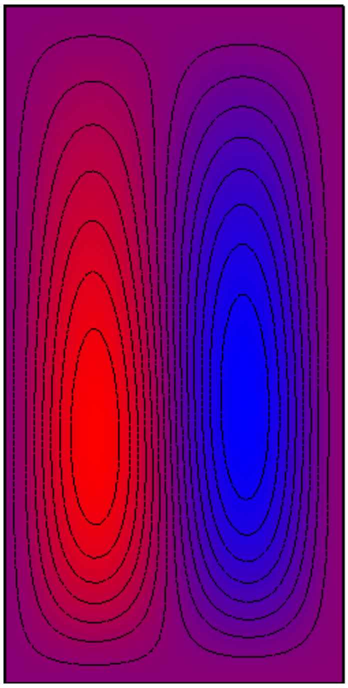
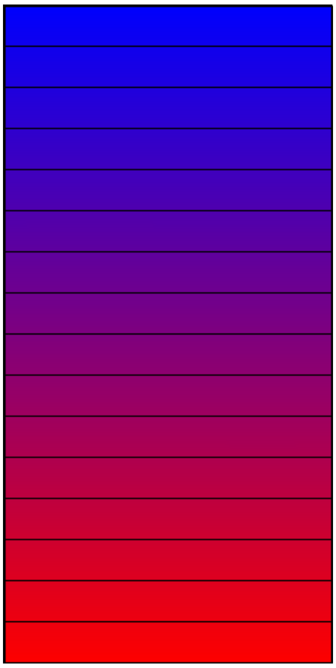
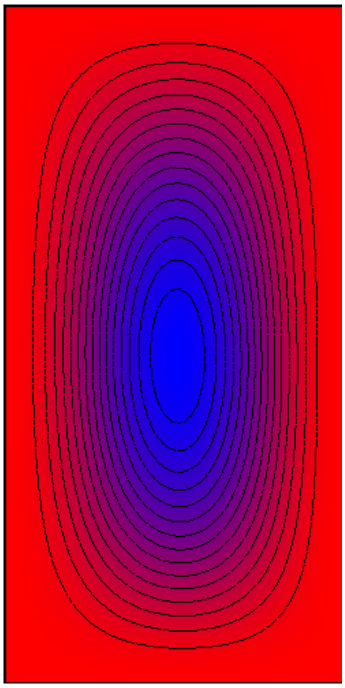
Gr	Ra	T	Ψ
4.0	3544		

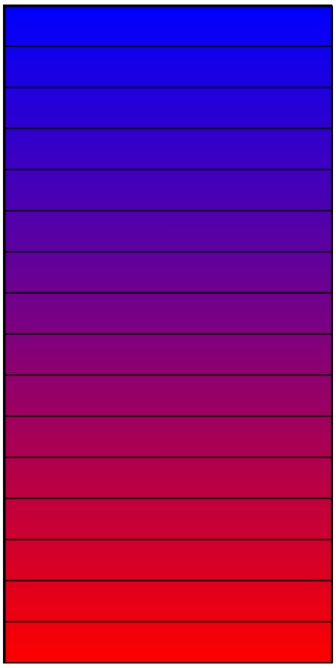
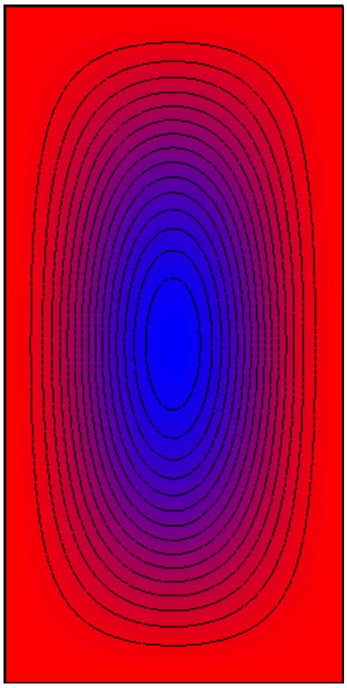
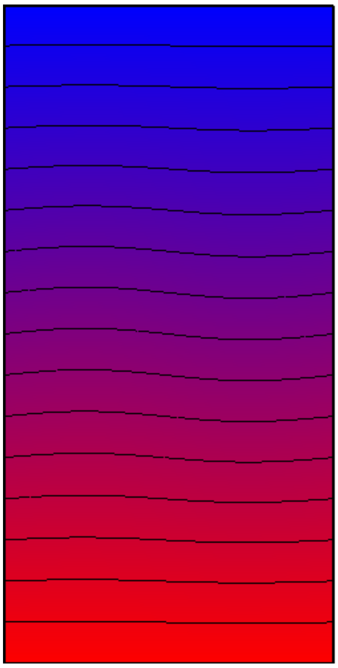
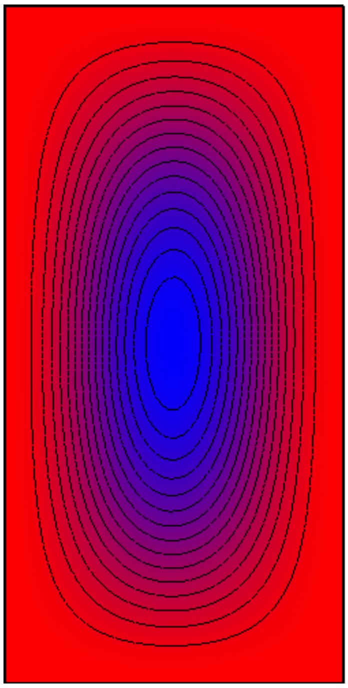
5.0	4430		
5.5	**4873**		
5.8	5138		

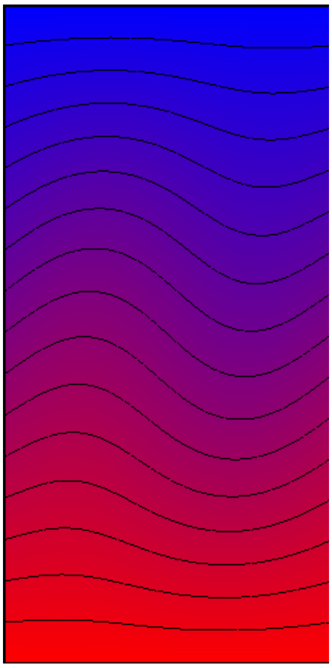
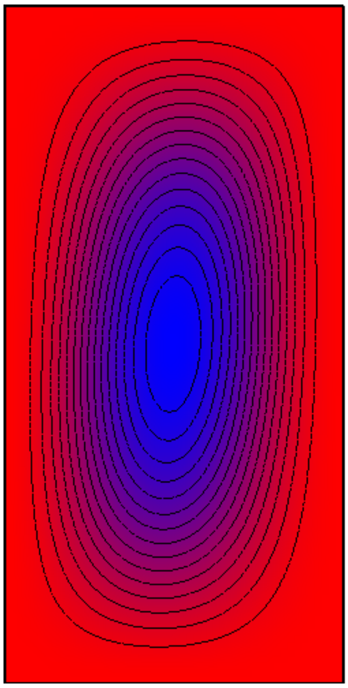
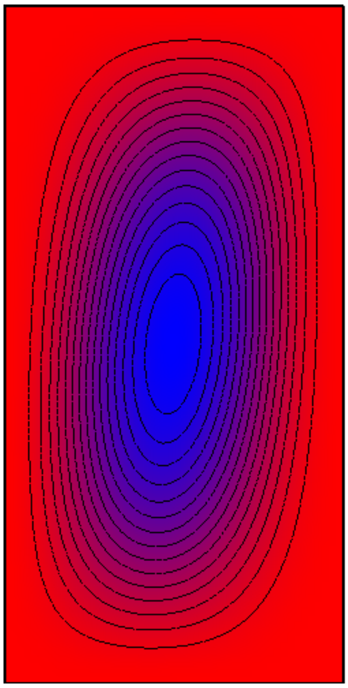
6.0	5316		
6.5	5759		

H/L = 2

Gr	Ra	T	Ψ

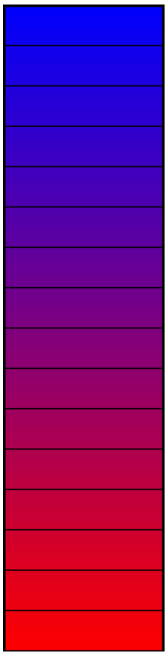
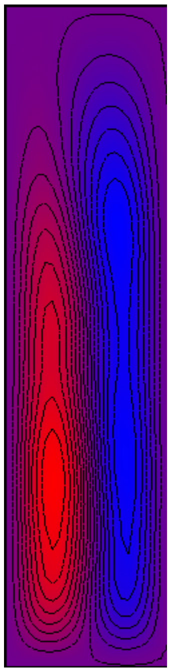
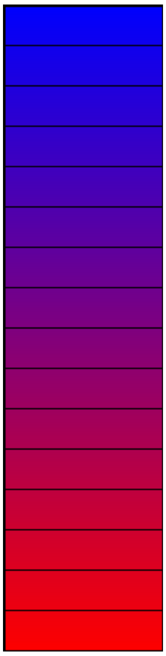
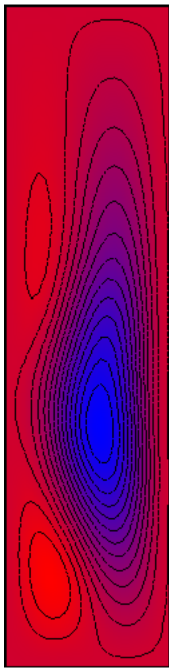
20.0	17720		
30.0	26580		

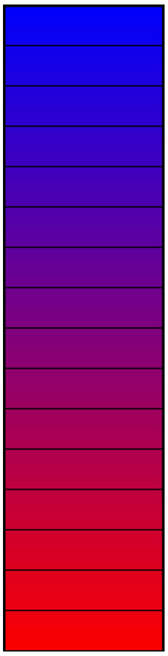
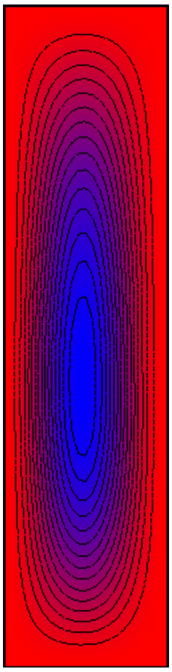
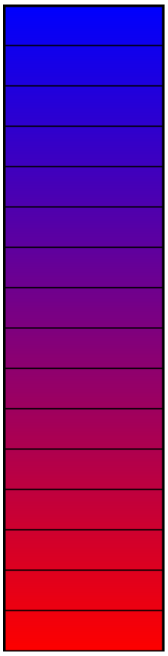
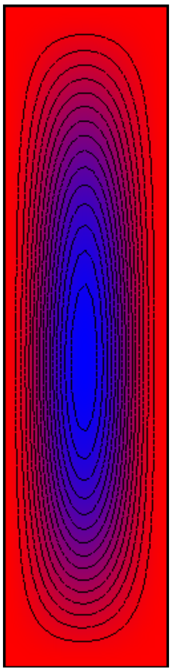
35.0	**31010**		
37.5	33225		

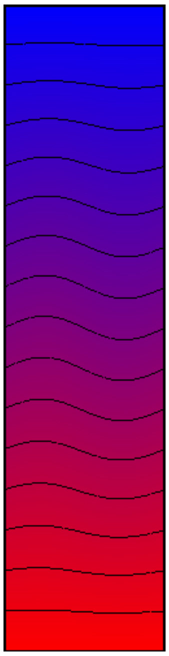
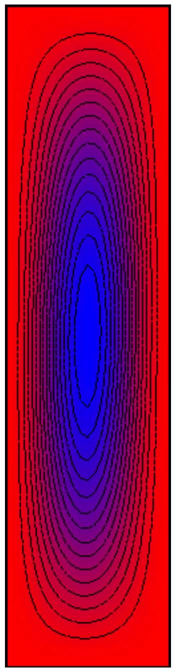
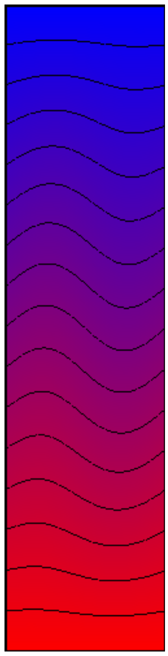
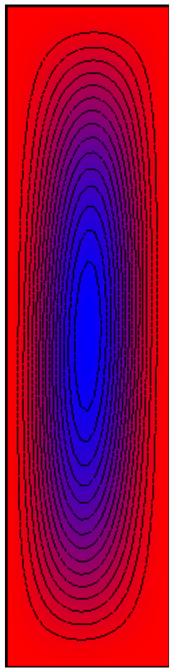
40.0	35440		
45.0	39870		

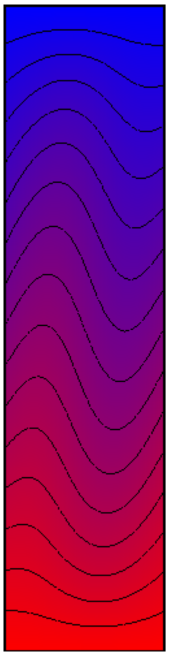
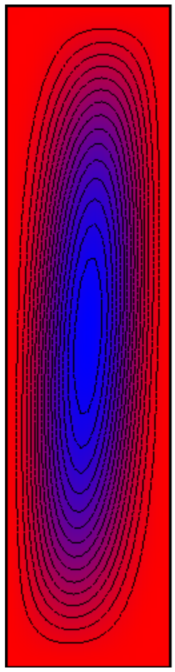
H/L = 4

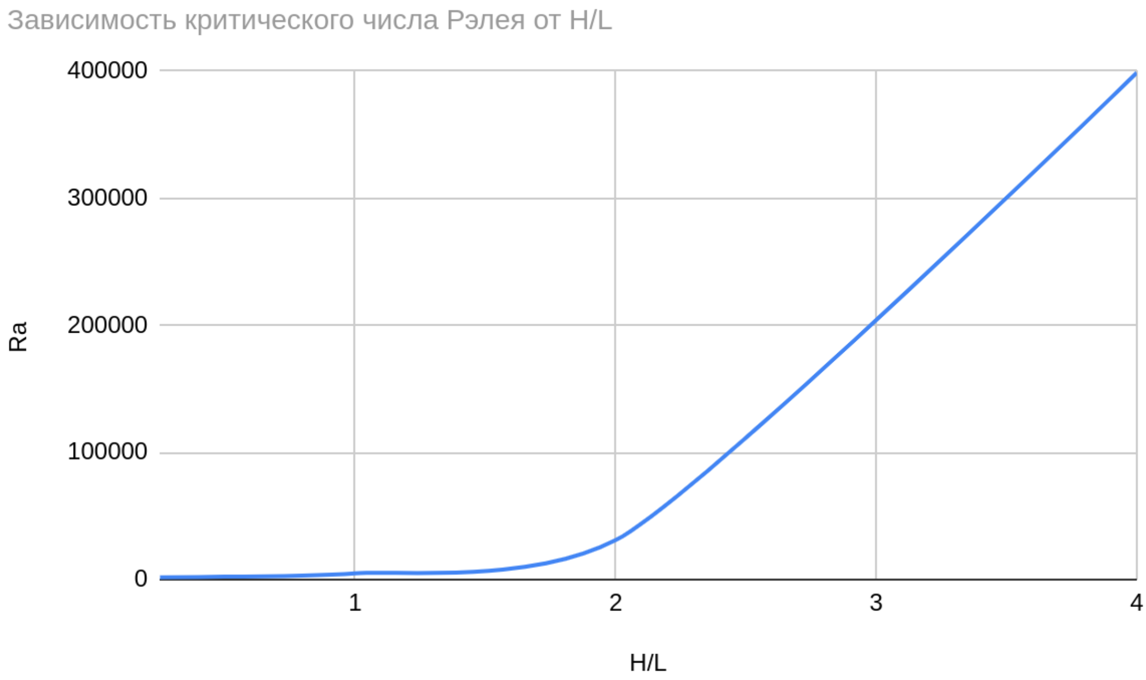
Gr	Ra	T	Ψ

200.0	177200		
300.0	265800		

400.0	354400		
450.0	**398700**		

485.0	429710		
500.0	443000		

600.0	531600		

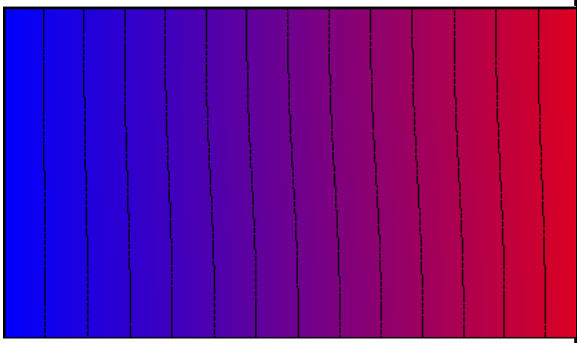
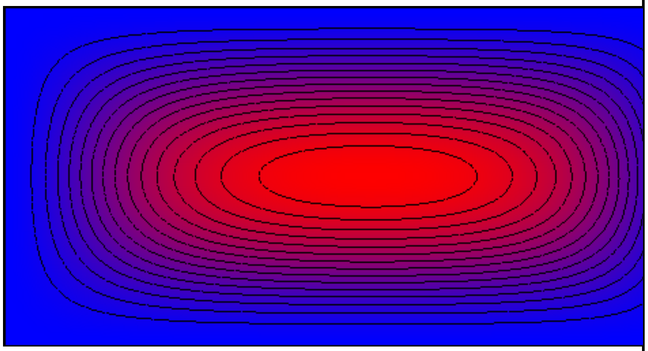
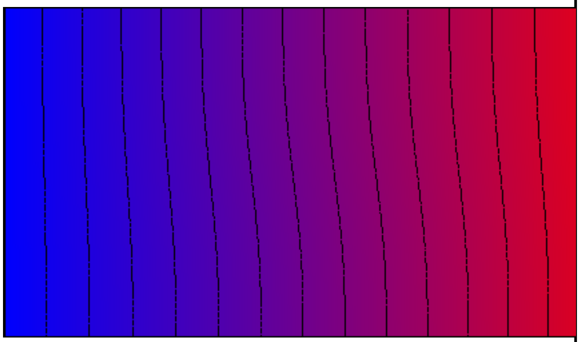
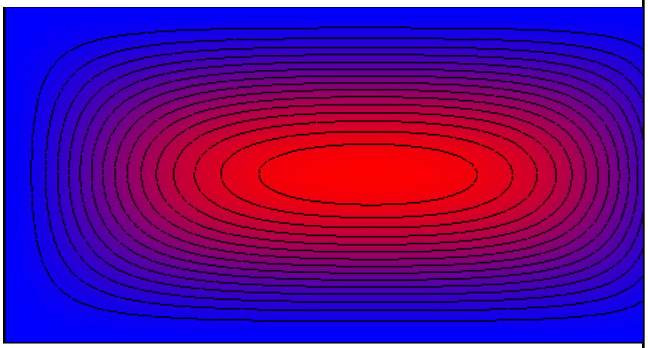
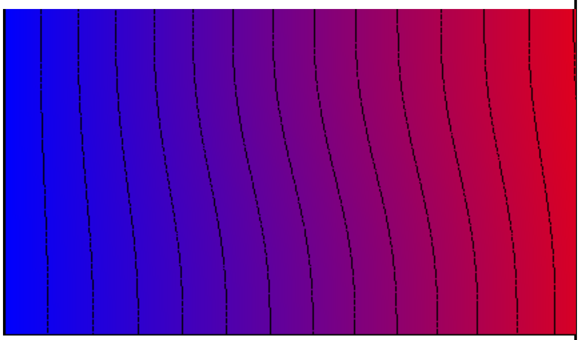
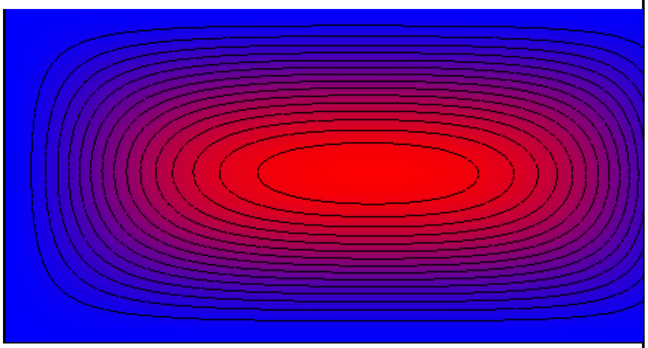
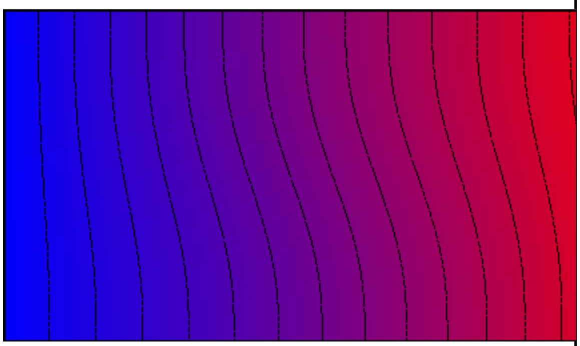
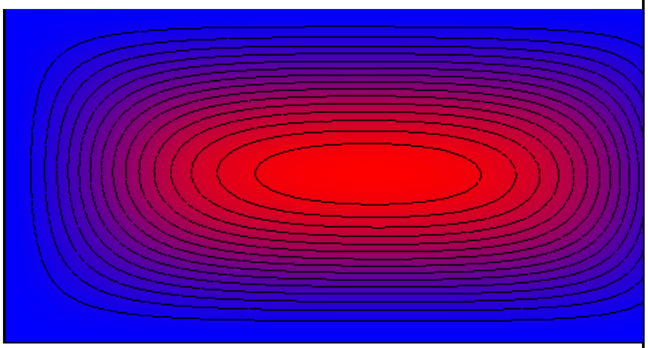


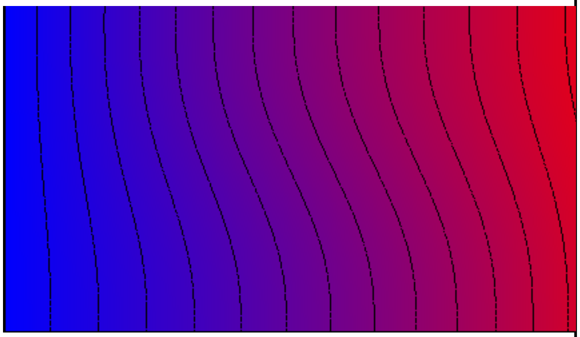
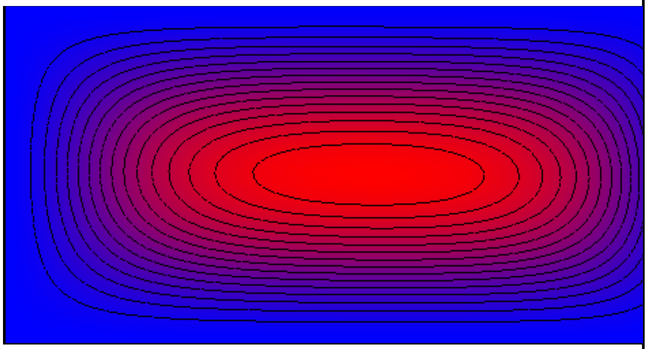
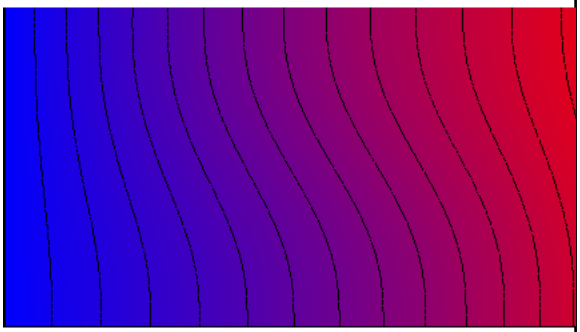
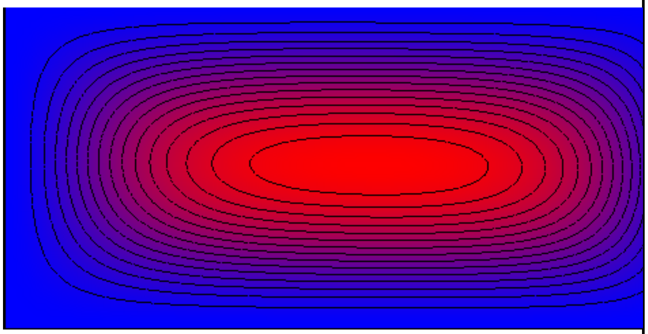
Вывод: Чем больше H/L, тем больше критическое значение Рэлея.

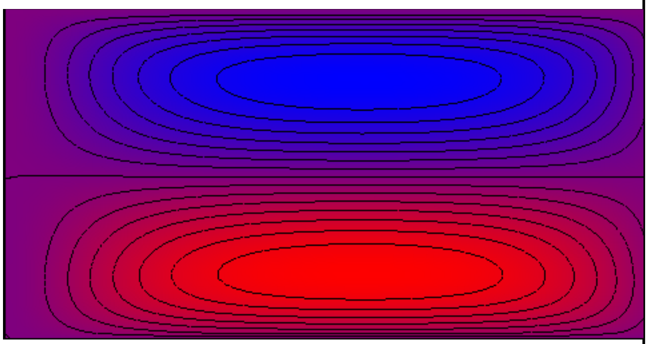
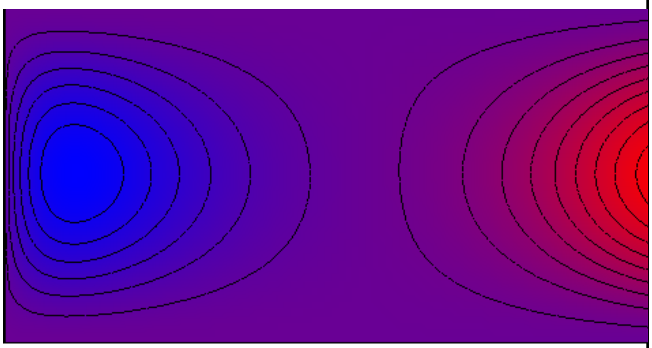
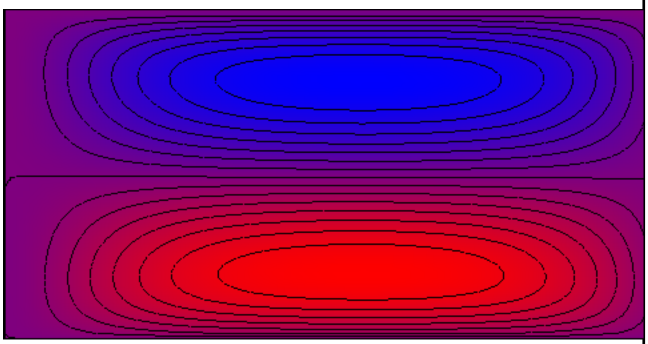
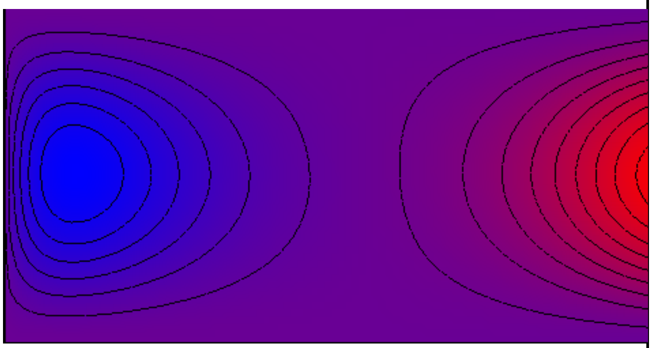
Исследования для вертикальных слоев (нагрев сбоку)

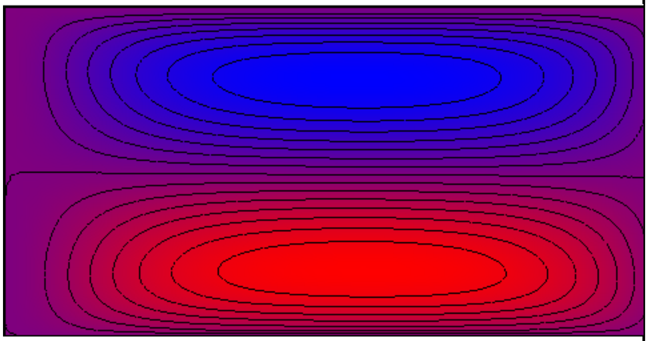
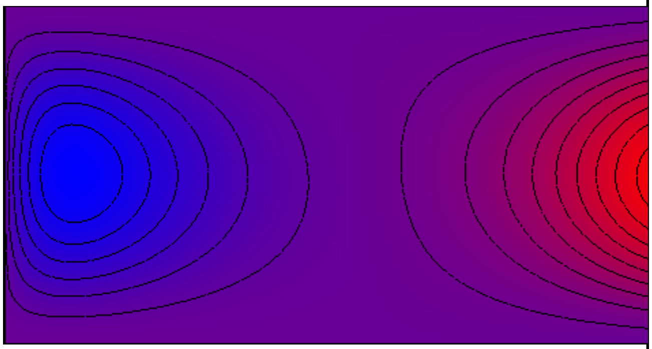
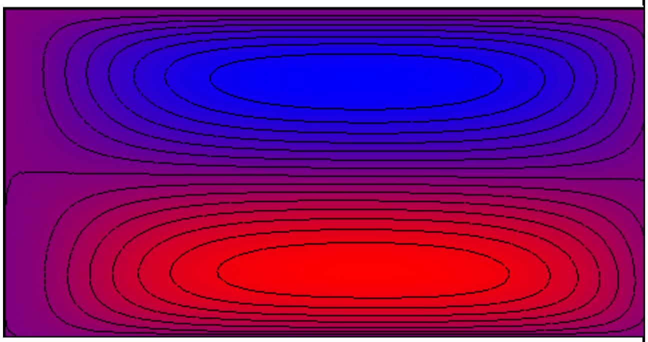
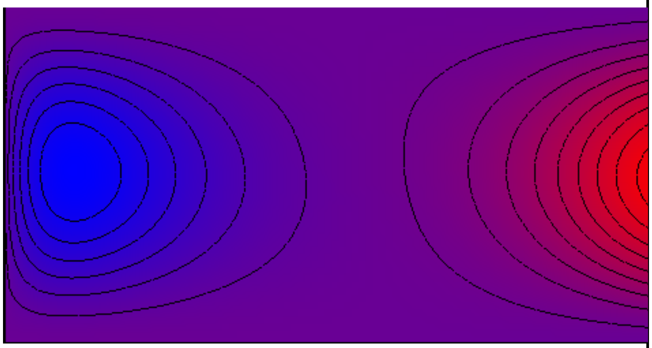
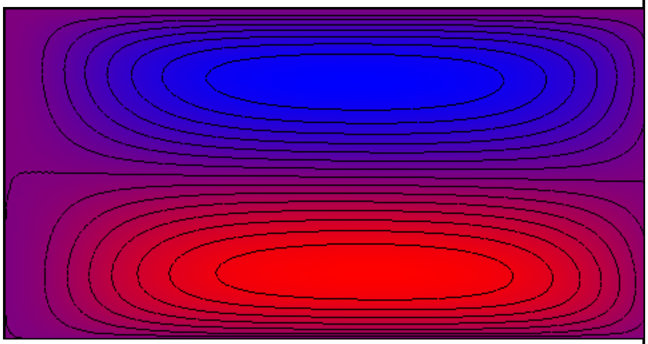
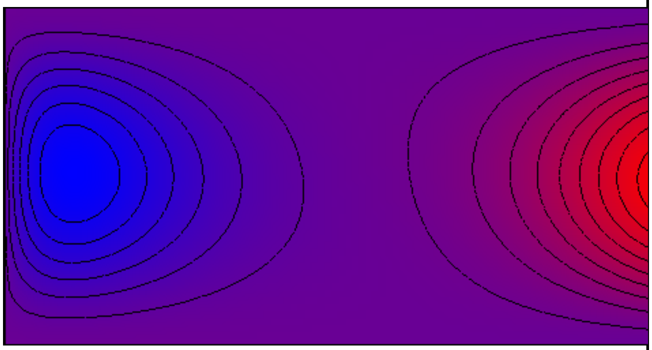
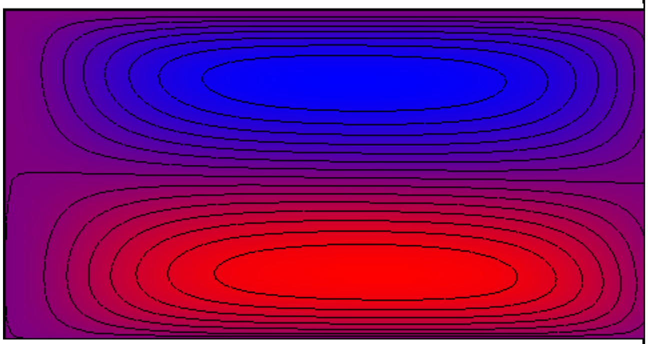
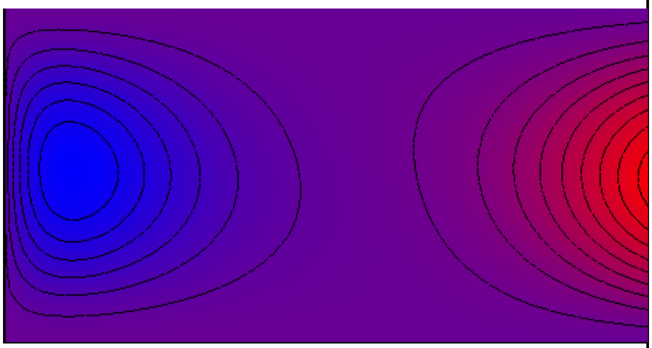
Pr = 886
H/L = 0.5

Левая стенка жесткая, правая свободная

Gr	Ra	T	Ψ
0.5	443		
1.0	886		
2.0	1772		
3.0	2658		

4.0	3544		
5.0	4430		

Gr	Ra	Vx	Vy
0.5	443		
1.0	886		

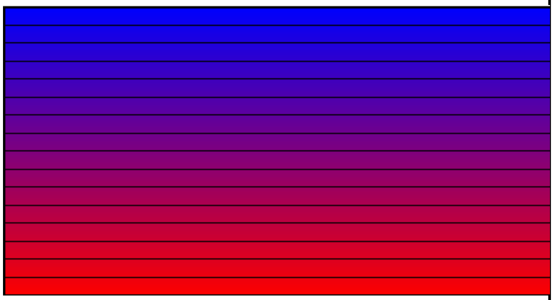
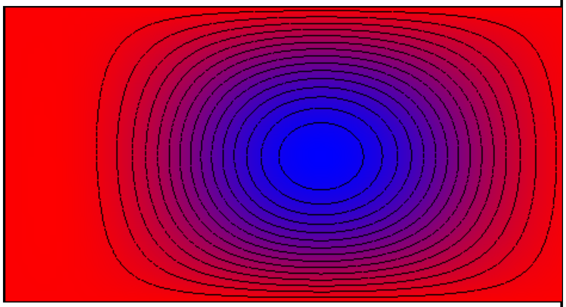
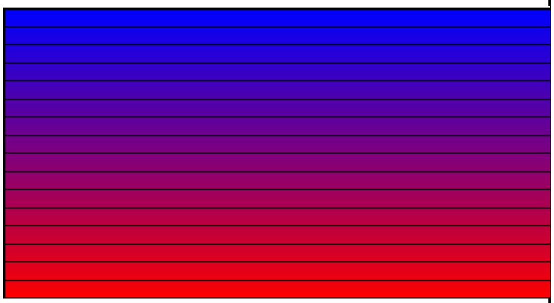
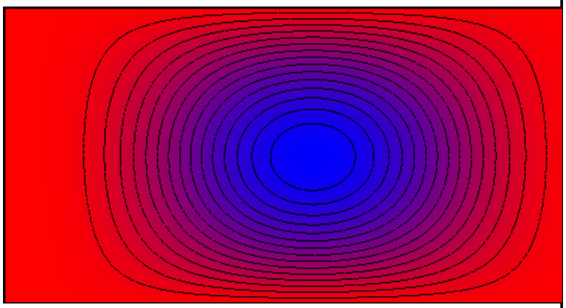
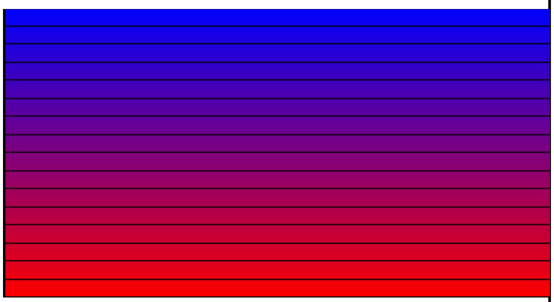
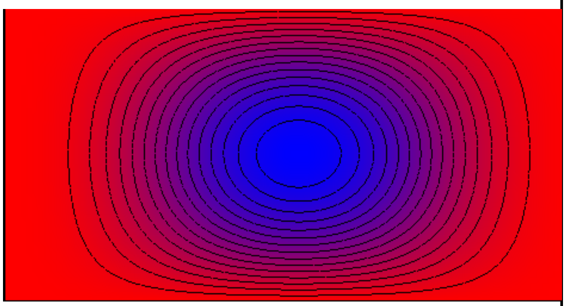
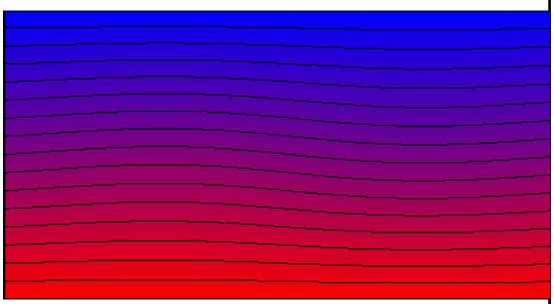
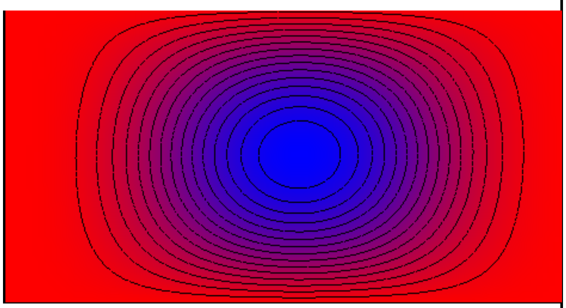
2.0	1772		
3.0	2658		
4.0	3544		
5.0	4430		

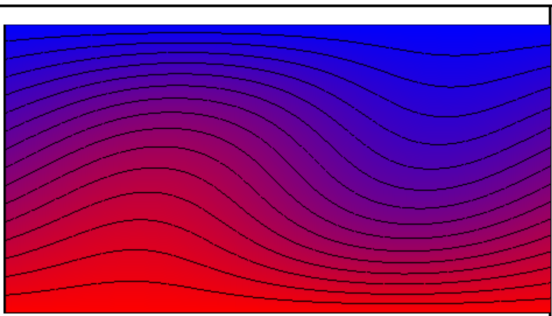
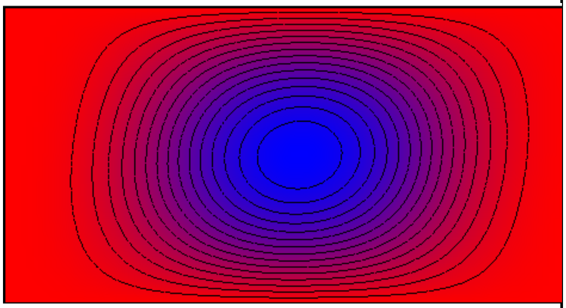
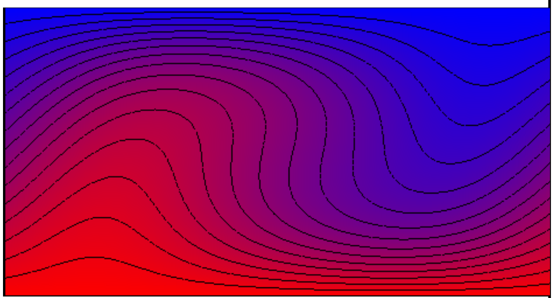
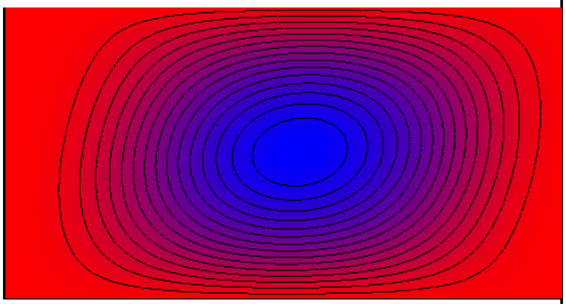
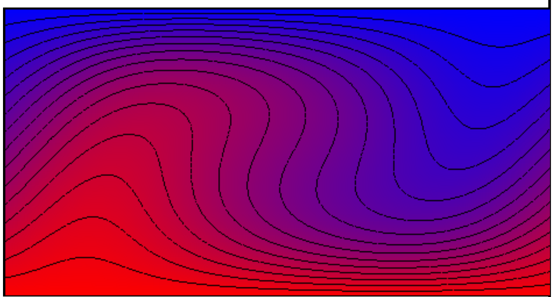
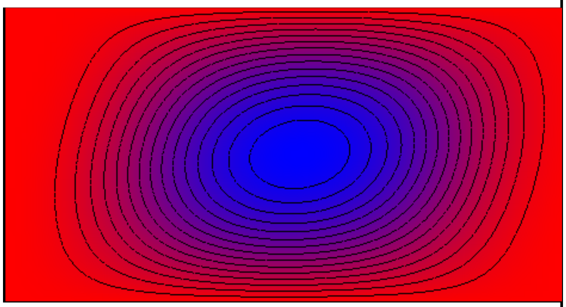
Вывод: Поведение системы в случае с вертикальными слоями нестабильно.

Зависимость от граничных условий

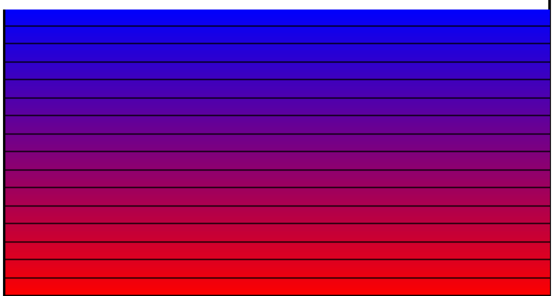
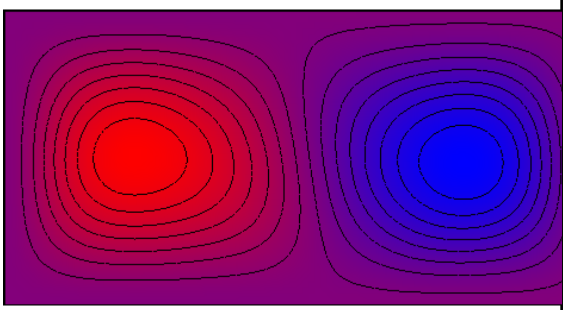
Pr = 886
H/L = 0.5

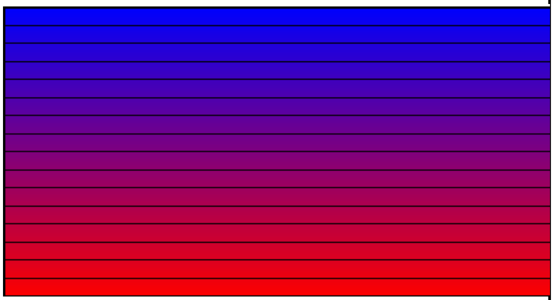
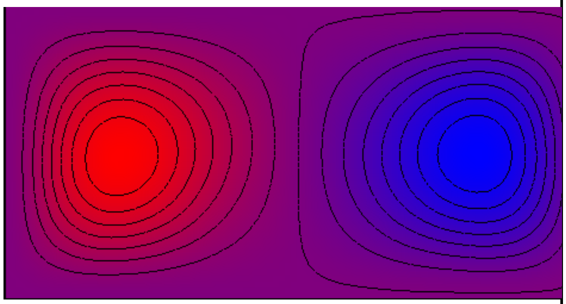
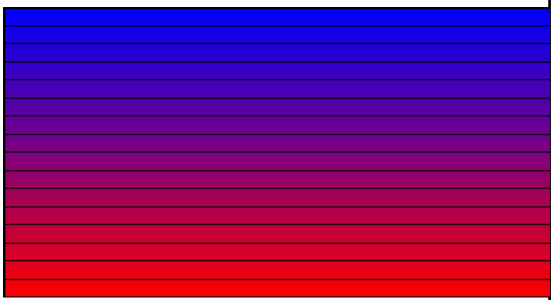
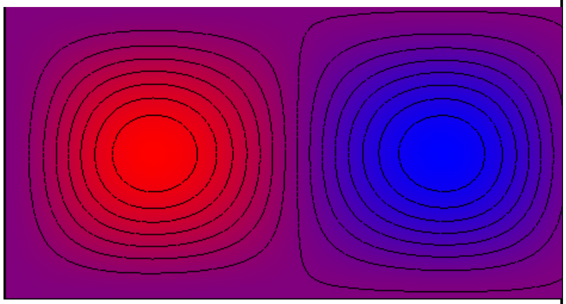
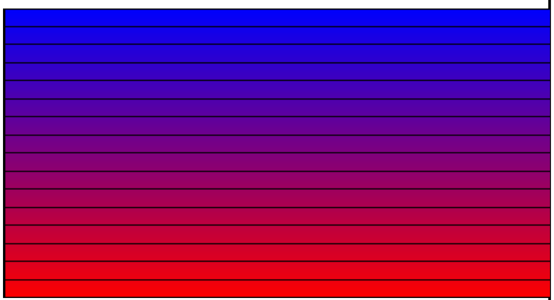
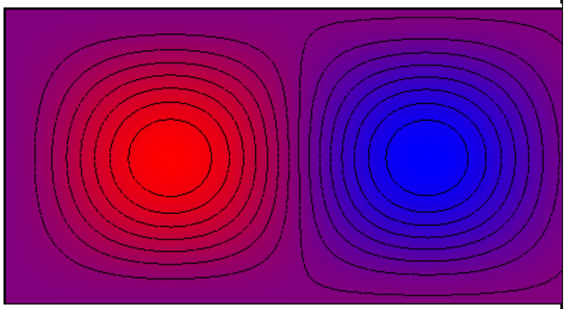
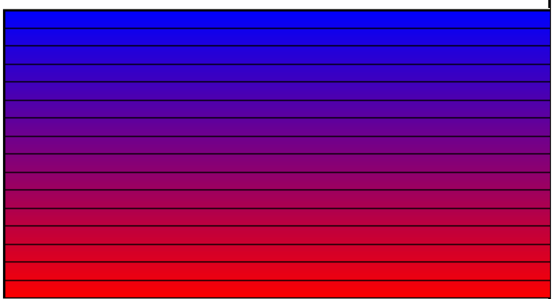
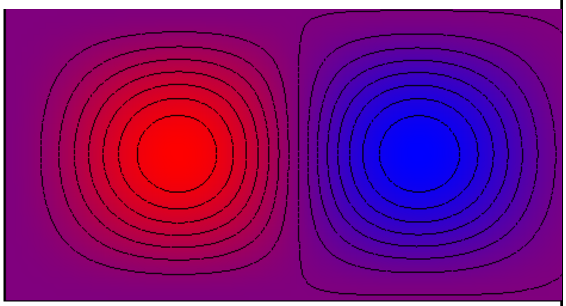
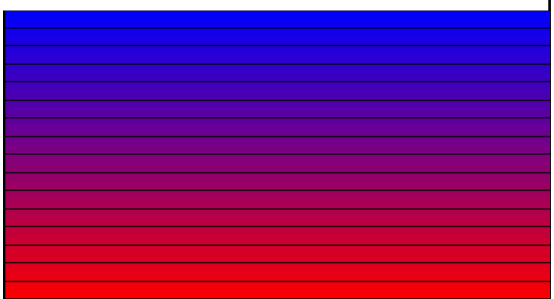
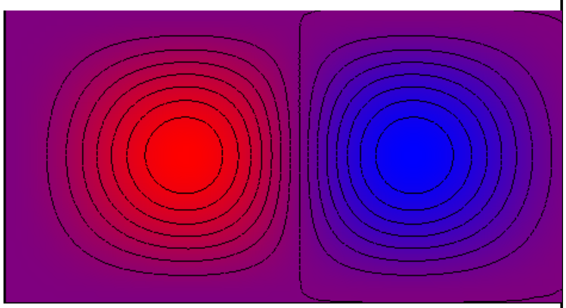
Все стенки свободные

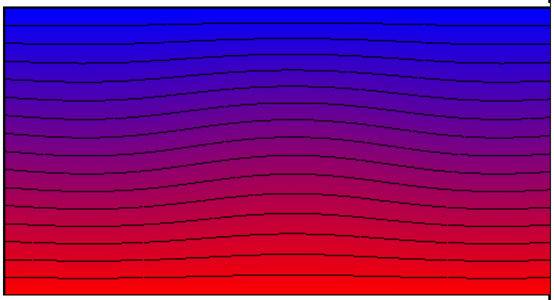
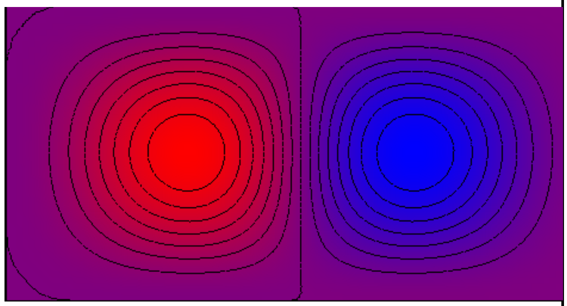
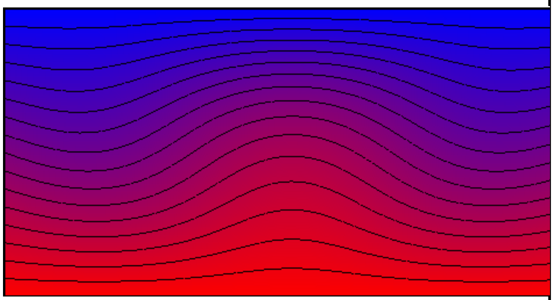
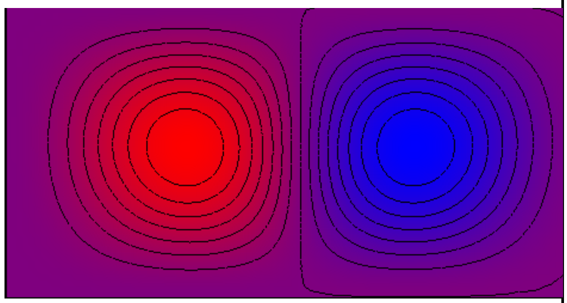
Gr	Ra	T	Ψ
0.25	221.5		
0.5	443		
1.0	**886**		
1.3	1151.8		

1.5	1329		
2.5	2215		
3.0	2658		

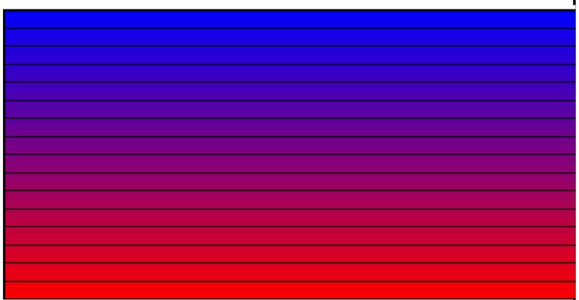
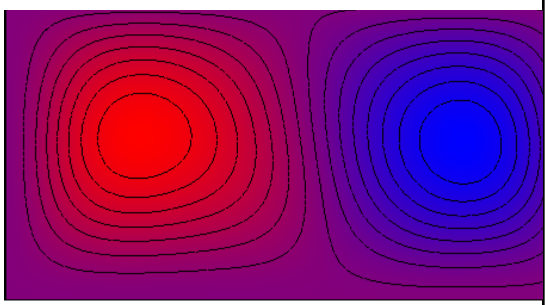
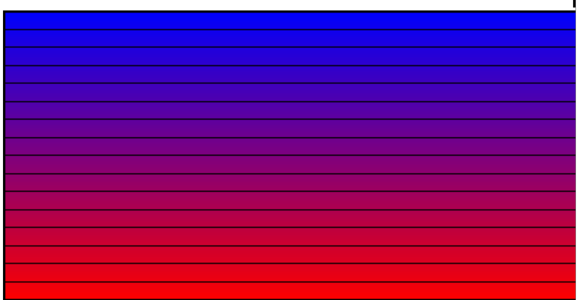
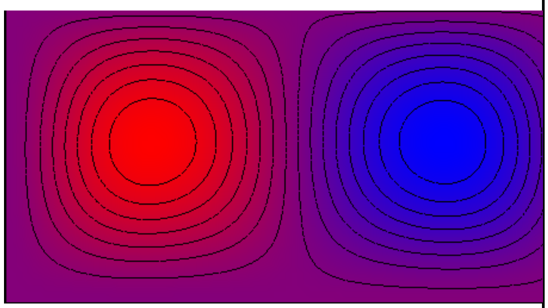
Все стенки жесткие

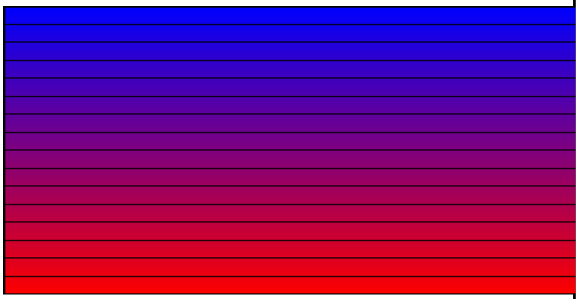
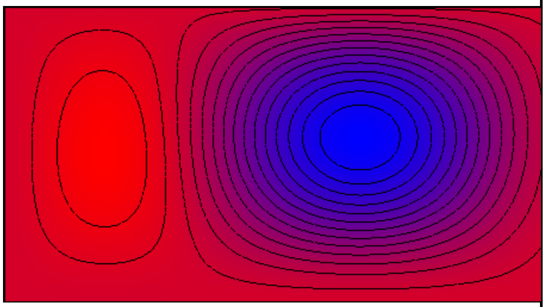
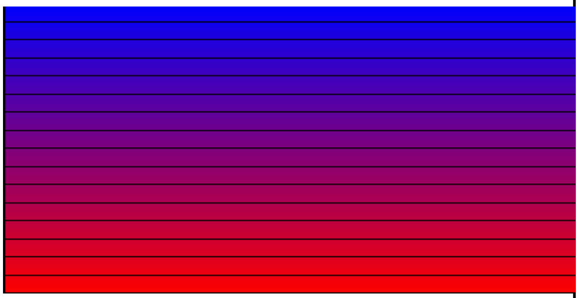
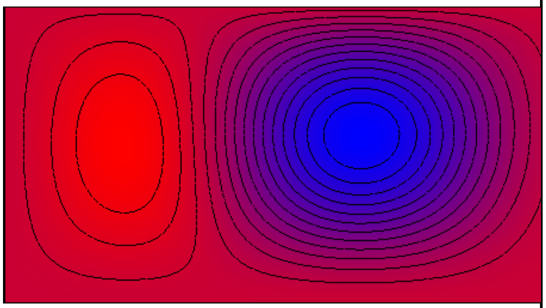
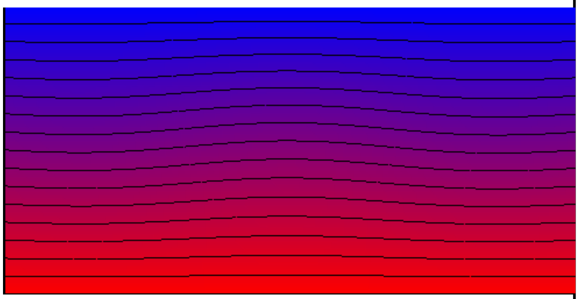
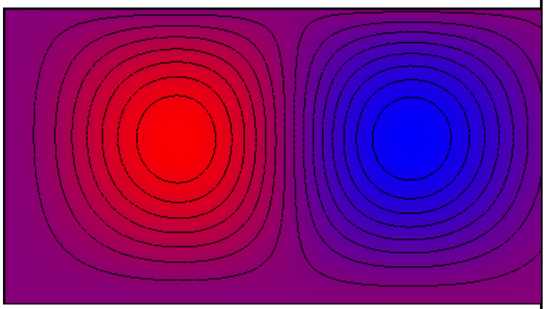
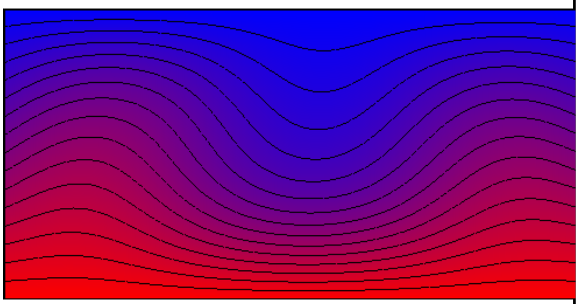
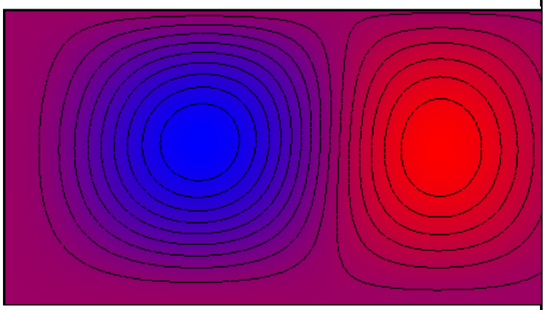
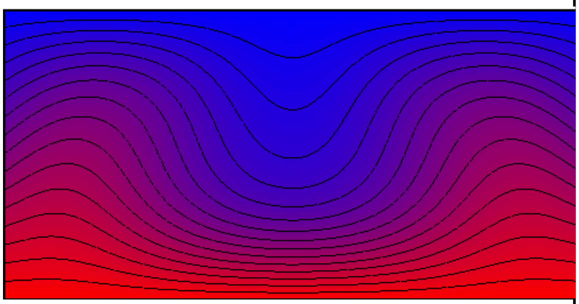
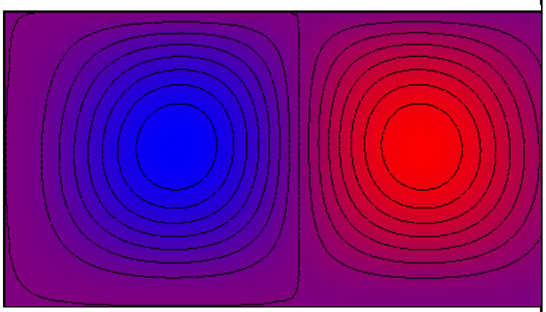
Gr	Ra	T	Ψ
0.25	221.5		

0.5	443		
1.0	886		
1.5	1329		
2.0	1772		
2.5	**2215**		

2.75	2436.5		
3.0	2658		

Верхняя свободная, нижняя закреплена

Gr	Ra	T	Ψ
0.25	221.5		
0.5	443		

1.0	886		
1.5	**1329**		
2.0	1772		
2.5	2215		
3.0	2658		

Тип граничных условий	**Критическое Ra**

Все стенки свободные	886
Все стенки жесткие	2215
Верхняя свободная, нижняя закреплена	1329

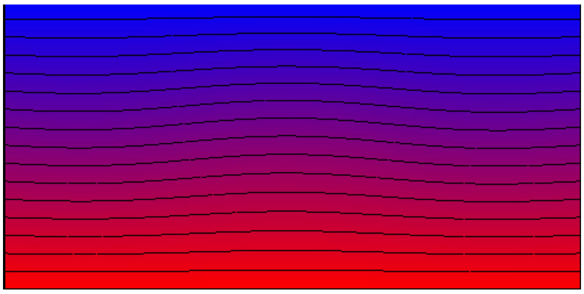
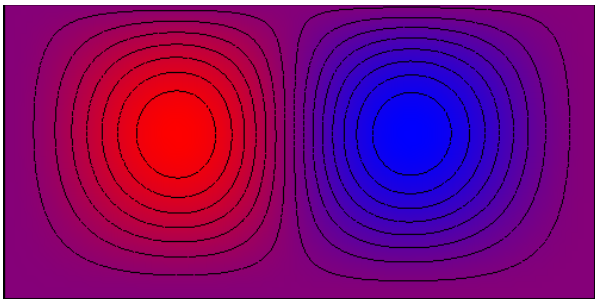
Таким образом, из приведенных выше таблиц видно, что при одинаковых значениях числа Прандтля и размера слоя жидкости для различных типов граничных условий сверху и снизу критические значения числа Рэлея получаются разными.

Из идеализированной задачи Рэлея (при L стремящейся к бесконечности) известны критические числа для каждого рассмотренного типа границ соответственно 657, 1708 и 1100. В результате нашего исследования получились критические значения, отличающиеся от данных. Это обусловлено тем, что значение критического числа Рэлея зависит от выбранного отношения H/L – чем оно больше, тем больше значение Ra критического.

Зависимость критического Ra от Pr

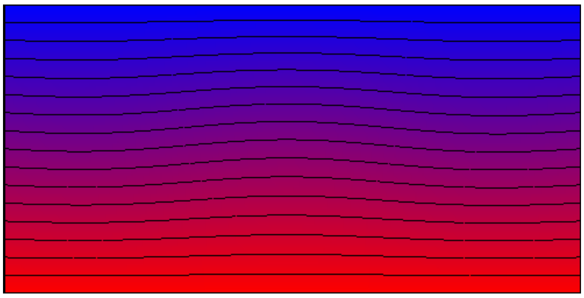
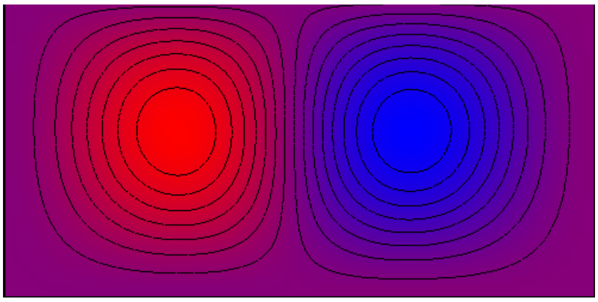
Ra = 1772

Pr = 886

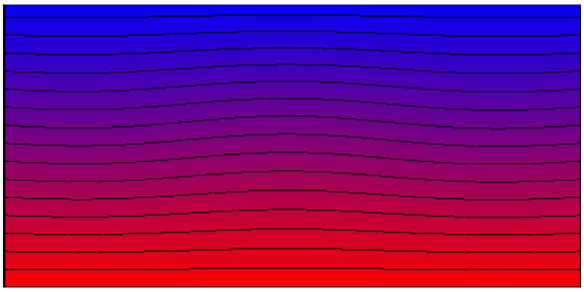
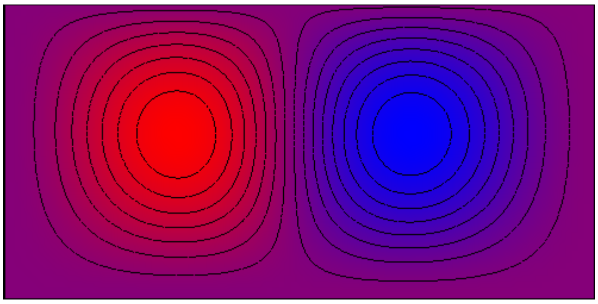
Gr	T	Ψ
2.0		

Pr = 500

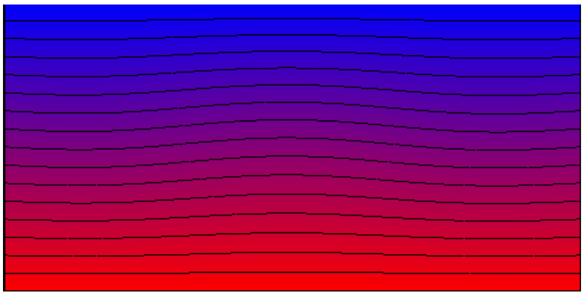
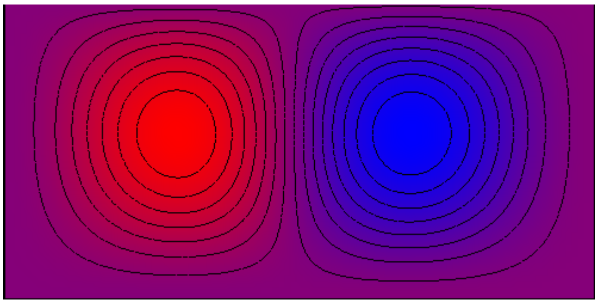
Gr	T	Ψ

3.544		

Pr = 250

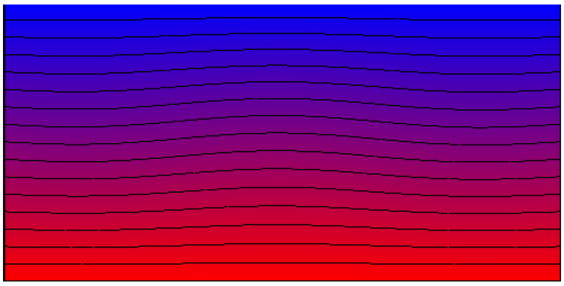
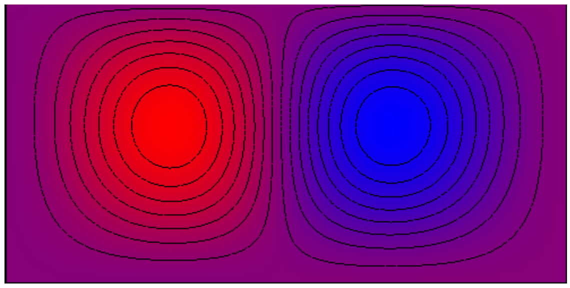
Gr	T	Ψ
7.088		

Pr = 100

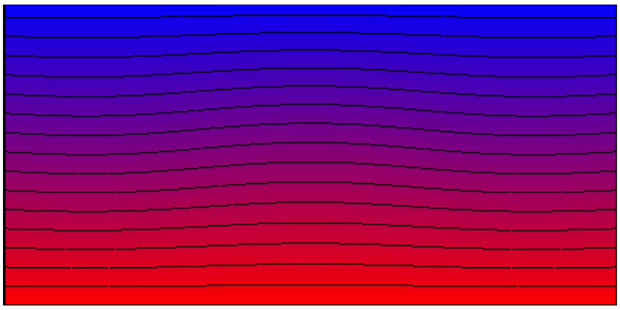
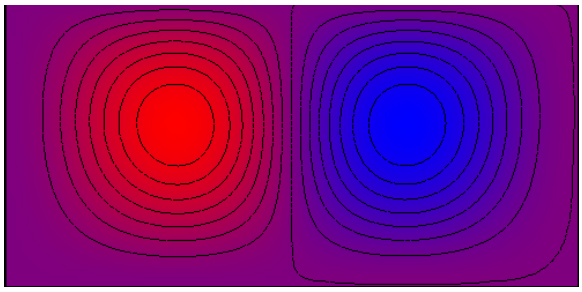
Gr	T	Ψ
17.72		

Pr = 13.5

Gr	T	Ψ

131.259		

Pr = 0.115

Gr	T	Ψ
15408.696		

4. Выводы

В результате проведенных исследований:

- определено значение критического числа Рэлея: для области с большим количеством жестких стенок критическое число Рэлея больше;
- определена зависимость критического числа Рэлея от значения H/L: число Рэлея прямо зависит от отношения высоты слоя жидкости к длине области;
- выявлена независимость критического числа Рэлея от числа Прандтля;
- построены поля изотерм и изолиний функций тока;

Изотермы показывают линии с одинаковой температурой. Параллельные линии показывают равномерное распределение тепла в слоях. Кривые же линии – направления движения жидкости:

горячая движется вверх, холодная – вниз. Вращение в слоях обусловлено именно подъемом жидкости в результате конвекции.

Густота изолиний тока отражает интенсивность движения частиц жидкости в конвективном течении.

Увеличение критического числа Рэлея с количеством жестких стенок обусловлено наличием на них трения. Это препятствует движению конвекционного потока.

Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея прямая: с ростом числа Рэлея растет значение числа Нуссельта, так как число Рэлея показывает рост интенсивности конвективного течения, а число Нуссельта есть отношение теплового потока за счет конвекции к тепловому потоку за счет теплопроводности.