לינארית 2 - תרגיל 4

1. **על דברים עצמיים**

(א) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה. יהי $k \in \mathbb{F}$, ונניח כי הסכום של כל שורה ב־A שווה ל־k. הוכיחו כי k הוא ערך עצמי של A.

(ב) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. הוכיחו כי V_λ הוא תת־מרחב של $\mathbb{F}^n$.

(ג) יהי f אופרטור של מרחב וקטורי V, ויהי $v \in V$ וקטור עצמי של f. הוכיחו כי לכל k טבעי, v הוא וקטור עצמי של האופרטור f^k. לאיזה ערך עצמי הוא שייך?

(ד) יהי f אופרטור של מרחב V ממימד n. נניח כי קיימים n ערכים עצמיים שונים של f. הוכיחו כי קיים בסיס של V המורכב רק מוקטורים עצמיים של f. עבור בסיס $\mathcal{B}$ כזה, איך נראית המטריצה $[f]_{\mathcal{B}}$?

(ה) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות מתחלפות. הוכיחו כי לכל λ מרחב הוקטורים העצמיים של A ששייכים לערך העצמי λ הוא B־אינווריאנטי.

2. **בכל סעיף נתונה $A \in M_3(\mathbb{R})$. מצאו את כל הערכים העצמיים שלהן, ולכל ערך עצמי מצאו את המרחב העצמי שלו:**

(א) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(ב) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

3. **תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה משולשית עליונה. הוכיחו כי $a_{i,i}$ הוא ערך עצמי של A לכל $1 \leq i \leq n$, וכי כל ערך עצמי של A שווה ל־$a_{i,i}$ עבור i כלשהו.**
<u>תזכורת:</u> A תיקרא משולשית עליונה אם מתקיים $a_{i,j} = 0$ כאשר $i > j$ (כלומר, מתחת לאלכסון הראשי יש רק אפסים)

4. **יהי V מרחב וקטורי עם בסיס (v_1, v_2). נתבונן באופרטור f של V המוגדר בעזרת הדרישות $f(v_1) = v_1$ ו־$f(v_2) = v_1 + v_2$.**

(א) (לינארית 1) הסבירו למה קיים אופרטור f כזה.

(ב) הוכיחו כי $\text{span}(v_1)$ הוא תת־מרחב f־אינווריאנטי של V.

(ג) הוכיחו שלא קיים תת־מרחב f־אינווריאנטי U של V כך שיתקיים $V = \text{span}(v_1) \oplus U$.

5. **ענו על הסעיפים הבאים:**

(א) יהיו U, W, Z שלושה תתי־מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכיחו כי הסכום שלהם הוא ישר אם ורק אם $U \cap W = \{0\}$ וגם $(U+W) \cap Z = \{0\}$.

(ב) יהיו $U_1, \cdots, U_k$ תתי מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכיחו כי $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ אם ורק אם כל וקטור $v \in V$ אפשר לכתוב בצורה יחידה בתור $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, כאשר $u_i \in U_i$ לכל $i = 1, 2, \cdots, k$.

6. **נתבונן במרחב הוקטורי $V = M_2(\mathbb{F})$, ובתתי־מרחבים שלו**

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{F} \right\},\ D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\},\ U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{F} \right\}.$$

הוכיחו כי $V = L \oplus D \oplus U$.