(Null
2em

תרגיל 4 ליניארית 2

אברהם אסרף 315774570

10 באפריל 2022

שאלה 1.

א. תהי $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ מטריצה $k \in \mathbb{F}$, נניח כי הסכום של כל שורה בA שווה ל k. הוכיחו כי k הוא ערך עצמי של $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$.

תשובה:

עבור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$f_A(v) = Av = \begin{pmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} k$$

ב. תהי $A \in M_{nn}(\mathbb{F})$ מטריצה, $\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר. הוכיחו כי V_λ הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$.

תשובה:

יהיו $w, u \in V_\lambda$ כך ש$w = av, u = bv$

$$\begin{aligned} & f_A(w+u) \\ =& f_A(w) + f_A(u) \\ =& f_A(av) + f_A(bv) \\ =& a \cdot f_A(v) + b \cdot f_A(v) \\ =& a\lambda v + b\lambda v \\ =& \lambda (a+b) v \in \text{Span }(v) \end{aligned}$$

יהי $a \in \mathbb{F}$ $av \in \text{Span }(v)$
עבור $a = 0$ $av = 0 \in \text{Span }(v)$

ג. יהי $f : V \to V$ אופרטור ליניארי, ויהי $v \in V$ וקטור עצמי של f. הוכיחו כי לעל $k \in \mathbb{N}$, מתקיים v וקטור עצמי של f^k. בנוסף ציינו לאיזה ערך עצמי הוא שייך.

תשובה:

קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של f עבורו $f(v) = \lambda v$
מכיון שf ליניארית

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 (v)$$

אזי

$$\begin{aligned}&f^k(v)\\=&f_1\circ...\circ f_k(v)\\=&f_1(...f_k(v))\\=&f_1(...f_{k-1}(\lambda v))\\=&f_1\left(...f_{k-2}\left(\lambda^2 v\right)\right)\end{aligned}$$

ולכן ניתן להסיק

$$f^k(v)=\lambda^k\cdot v$$

ד. יהי f אופרטור של V ממימד n. נניח כי קיימים n ערכים עצמיים שונים של f. הוכיחו כי קיים בסיס של Vהמורכב רק מוקטורים עצמיים של f. עבור בסיס β כזה איך ניראת המטירצה $[f]_\beta$?

תשובה:

נסמן את הערכים העצמיים השונים ב$(\lambda_1...,\lambda_n)$

נסמן את התתי מרחבים העצמיים שלהם $V_1...,V_n$, בכל אחד מהם קיים וקטור $v_i\in V_i$, $v_i\neq 0$ המקיים $f(v_i)=\lambda_i v_i$ לכל $i\in[n]$

נסמן את הסדרה $\beta=(v_1...,v_n)$,לפי טענה מהשיעור הסדרה β בת"ל.

לפי מה שלמדנו בליניארית 1 קבוצה בת"ל בגודל המימד מהווה בסיס.

לכל $v_i\in\beta$ מתקיים $[f(v_i)]_\beta=[\lambda_i v_i]=\lambda_i$ לכן

$$[f]_\beta=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$

ה. תהיינה $A,B\in M_{nn}(\mathbb{F})$ מטריצות מתחלפות, הוכיחו כי לכל λ מרחב הוקטורים העצמיים של A ששייכים לערך העצמי λ הוא B אינווי'

תשובה:

צריך שאם $v\in V_\lambda$ אז $Bv\in V_\lambda$

יהי $v\in V_\lambda$

מתקיים

$$ABv=BAv=B(\lambda v)=\lambda Bv$$

מכיון ש$A(Bv)=\lambda(Bv)$ גם $Bv\in V_\lambda$ כנדרש

שאלה 2.

נתונות מטריצות מצאו את כל הערכים העצמיים שלהם ולכל ערך עצמי מיצאו את המרחב העצמי שלו

א. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&-1\\0&2&3\end{pmatrix}$

תשובה:

נכפול את המטריצה ב $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ונבדוק מתי מתקיימת מערכת

$$\begin{cases}x_1 & =\lambda x_1\\6x_2-x_3 & =\lambda x_2\\2x_2+3x_3 & =\lambda x_3\end{cases}$$

נציב את המטריצה במערכת משוואות הומוגנית

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\0 & 6-\lambda & -1\\0 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

נניח $\lambda \neq 6$

$$r_3-r_2\cdot\frac{2}{6-\lambda}\begin{pmatrix}1-\lambda, & 0, & 0\\0, & 6-\lambda, & 0\\0, & 0, & 3-\lambda+\frac{2}{6-\lambda}\end{pmatrix}$$

נחשב את הפתרונות הלא טרוויאלים של מערכת המשוואת נוכל א"כ לחשב בנפרד

$$1-\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=1$$

$$\begin{aligned}&3-\lambda+\frac{2}{6-\lambda}=0\\&\Rightarrow(3-\lambda)(6-\lambda)+2=0\\&=18-9\lambda+\lambda^2+2=0\\&=\lambda^2-9\lambda+20=0\\&=(\lambda-5)(\lambda-4)=0\\&\Rightarrow\lambda_2=4,\lambda_3=5\end{aligned}$$

נציב את המספרים במטריצה ונראה את המרחבים היוצאים ממנו

ב.

שאלה 3.

תהי $A\in M_{nn}(\mathbb{F})$ מטריצה משולשית עליונה, הוכיחו כי כל a_{ii} הוא ערך עצמי של A וכל ערך עצמי של A שווה לa_{jj} כלשהוא

תשובה:

הוכחנו בליניארית 1 שהדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת האברים באלכסון.
לפי מה שהוכחנו בשיעור מרכיבי הפולינום האופייני מהווים ערכים עצמיים
נחשב את הפולינום האופייני

$$\det\left(A-\mathrm{Id}\lambda\right)=\left(a_{11}-\lambda\right)....\left(a_{nn}-\lambda\right)$$

שורשי הפולינום הם $a_{11}...,a_{nn}$ כלומר הם מהווים ערכים עצמיים

שאלה 4.

יהי V מרחב וקטורי עם בסיס $\left(v_1,v_2\right)$ נתבונן באופרטור f המוגדר בעזרת הדרישות $f\left(v_1\right)=v_1$, $f\left(v_2\right)=v_1+v_2$

א. הסבירו למה קיים אופרטור כזה?

תשובה:
האופרטור המוגדר ע"י

$$[f]_\beta=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

ב. הוכיחו כי $\left(v_1\right)$ Span הוא תת מרחב f אנווי' של V

תשובה: יהי $v\in\mathrm{Span}\left(v_1\right)$, $v=av_1$
לפי הגדרת העתקה ליניארית

$$f\left(v\right)=f\left(av_1\right)=af\left(v_1\right)\in\mathrm{Span}\left(v_1\right)$$

ג. הוכיחו שלא קיים תת מרחב f אנווי' של U כך שיתקיים $V=\mathbf{Span}\left(v_1\right)\oplus U$

תשובה:
נניח בשלילה שקיים תת מרחב U המהווה סכום ישר, אזי $\dim U=1$ לפי מה שלמדנו בשיעור. מרידוקציה $v_2\in U$ כלומר $U=\mathrm{Span}\left(v_2\right)$.
אבל $f\left(v_2\right)=v_1+v_2\notin U$

שאלה 5.

א. יהיו U,W,Z תתי מרחבים של V. הוכיחו כי סכום ישר אמ"מ $U\cap W=\{0\}$ וגם $\{U+W\}\cap Z=\{0\}$

תשובה:
$\Leftarrow$
אם U,W,Z סכום ישר
אזי לכל u,w,z מתוך U,W,Z בהתאמה $au+bw+cz=0$ אמ"מ $a,b,c=0$ כלומר $\{u,w,z\}$ בת"ל
נניח בשלילה קיים $v\in\{U+W\}\cap Z$ או $v\in U\cap W$ אזי $\{u,w,z\}$ ת"ל בסתירה
$\Rightarrow$
אם $U\cap W=\{0\}$ וגם $\{U+W\}\cap Z=\{0\}$
צריך להוכיח שלכל u,w,z מתוך U,W,Z מתקיים $au+bw+cz=0\Leftrightarrow a,b,c=0$
יהיו u,w,z מתוך U,W,Z
נבנה את הקבוצה $\{u,w,z\}$

$$U \cap W = \{0\} \Rightarrow u \notin \text{Span }(w)$$

כיון ש$\text{Span }(w) \in W$
וכן

$$\{U + W\} \cap Z = \{0\} \Rightarrow z \notin \text{Span }(w, u)$$

לפי משפט בליניארית 1 גם $\{u, w, z\}$ בת"ל
אזי $au + bw + cz = 0 \Leftrightarrow a, b, c = 0$ כנדרש.

ב. יהיו $U_1..., U_k$ **תתי מרחבים של** V **הוכיחו כי** $V = U_1...\oplus U_k$ **אמ"מ כל** $v \in V$ **אפשר לכתוב בצורה יחידה** $v = v_1...+v_k$
כך ש$v_i \in V_i$
תשובה:
$\Leftarrow$
נניח $V = U_1... \oplus U_k$
נסמן $\{u_{i,1}..., u_{i,l}\}$ בסיס של U_i לכל $i \in [k]$
נסמן $\beta = \{u_{k,1}...., u_{k,l_k}\} \cup ... \{u_{1,1}..., u_{1,l_1}\}$, לפי טענה מהשיעור β מהווה בסיס לV.
יהי $v \in V$
נציג את v לפי בסיס β

$$v = \{a_{1,1}u_{1,1}... + a_{l_1}u_{1,l_1}.... + a_{k,1}u_{k,1}... + a_{k,l_k}u_{k,l_k}\}$$

נקבץ את הקוטורים מאותו המרחב $a_{1,1}u_{1,1}... + a_{l_1}u_{1,l_1} = v_1 \in U_1, ...a_{k,1}u_{k,1}... + a_{k,l_k}u_{k,l_k} = v_k \in U_k$
כלומר

$$v = \{v_1.... + v_k\}$$

לפי כל בסיס שנקח מU_i מתקיים $a_{1,1}u_{1,1}... + a_{l_1}u_{1,l_1} = v_1$
ולכן זאת צורת הצגה יחידה
$\Rightarrow$
נניח שכל $v \in V$ אפשר לכתוב בצורה יחידה $v = v_1... + v_k$ כך ש $v_i \in U_i$ לכל $i \in [k]$
לכל $\beta = (u_1..., u_k)$ כך שכל $u_i \in U_i$
מכיון שקיימת הצגה יחידה ו$u_i = u_i$ לכל $u_i \in \beta$ $u_i \notin \beta \backslash \{u_i\}$
הוכחנו בליניארית 1 שקבוצה כזאת היא בת"ל ולכן מתאפסת רק בצירוף הטרוויאלי.
לפי מה שהוכחנו בשיעור מכיון ש$U_1.., U_k$ מקיימים את התנאי הזה הם מהווים סכום ישר

שאלה 6.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{F} \right\}, D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{F} \right\}, U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{F} \right\}$$

הוכיחו כי $V = U \oplus D \oplus L$

תשובה:
נסמן את הבסיסים של U, D, L

$$L = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right), D = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right), U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

הקבוצה $\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ פורשת את $M_2\left(\mathbb{F}\right)$
לפי מה שלמדנו בשיעור מכיון שאיחוד הקבוצות פורשת את המרחב הוא מהווה סכום ישר.
כמו כן ניתן לראות שהיא פורשת את V כנדרש.