Управление движением автономного транспортного средства по заданной траектории методом NMPC

А.В. Сахаров

1 Модель ТС

Рассматривается четырехколесное автономное транспортное средство (ТС), перемещающееся по горизонтальной шероховатой поверхности. Передняя ось несет два колеса, на которые подаются рулевое управление и привод двигателя. Углы поворота колес (в результате воздействия рулевого управления) различны и определяются по принципу Аккермана (вычисляются в соответствующем разделе). Задняя ось ТС несет два пассивно вращающихся колеса, ось вращения которых совпадает с осью вала.

Введем две системы координат: неподвижную и связанную с ТС. Неподвижная система координат расположена так, что ее оси X, Y, Z образуют правую тройку, причем ось Z направлена вертикально вверх. Связанная с ТС система координат x, y, z расположена таким образом, что ее начало совпадает с центром масс ТС, ось x направлена вдоль продольной оси симметрии (рисунок 1). Предполагается, что в начальный момент времени неподвижная и связанная системы координат совпадали. Пусть $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_y$ — орты осей x и y, $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости центра масс ТС относительно неподвижной системы координат, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость. Тогда в базисе $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ имеем:

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y,$$
$$\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}_x \boldsymbol{e}_x + \dot{v}_y \boldsymbol{e}_y + v_x \dot{\boldsymbol{e}}_x + v_y \dot{\boldsymbol{e}}_y = (\dot{v}_x - v_y \omega)\, \boldsymbol{e}_x + (\dot{v}_y + v_x \omega)\, \boldsymbol{e}_y.$$

Положение ТС определяется координатами x, y его центра масс относительно неподвижной системы координат и углом φ его поворота относительно начальной ориентации. Их измнение определяются кинематическими уравнениями:

$$\dot{x} = v_x \cos\varphi - v_y \sin\varphi, \quad \dot{y} = v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \tag{1}$$

Запишем теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента ТС:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \sum_i \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_a + m\boldsymbol{g}, \quad J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i, \quad i \in \{fl, fr, rl, rr\}.$$

где m и J — масса и момент инерции ТС, вычисленный относительно оси z, $\boldsymbol{F}_i$ — результирующая сила, действующая на i-е колесо, $\boldsymbol{r}_i$

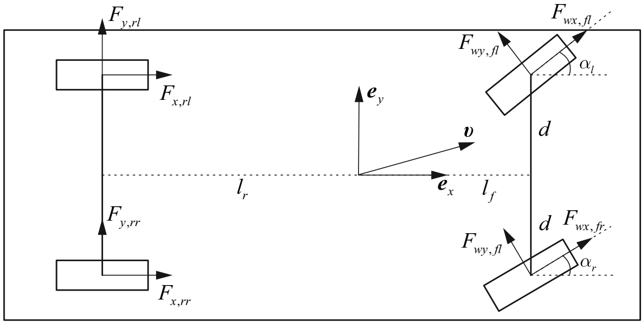

Рис. 1: Модель ТС

— радиус-вектор, проведенный из центра масс ТС к i-й результирующей силе, индексы fl, fr, rl, rr обозначают переднее левое, переднее правое, заднее левое и заднее правое колеса соответственно, $\boldsymbol{F}_a$ — результирующая сила лобового аэродинамического сопротивления, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения. Пусть l_f и l_r — расстояние от центра масс до передней и задней оси ТС, соответственно. Запишем результирующие силы и радиус-векторы в связанном с ТС базисе:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{F}_{fj} = (F_{wx,fj}\cos\alpha_j - F_{wy,fj}\sin\alpha_j)\,\boldsymbol{e}_x + \\
+ (F_{wx,fj}\sin\alpha_j + F_{wy,fj}\cos\alpha_j)\,\boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{F}_{rj} = F_{x,rj}\boldsymbol{e}_x + F_{y,rj}\boldsymbol{e}_y, \quad j \in \{l, r\}, \\
\boldsymbol{r}_{fl} = l_f\boldsymbol{e}_x + d\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{r}_{fr} = l_f\boldsymbol{e}_x - d\boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{r}_{rl} = -l_r\boldsymbol{e}_x + d\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{r}_{rr} = -l_r\boldsymbol{e}_x - d\boldsymbol{e}_y, \\
\boldsymbol{F}_a = -C_a v_x^2\boldsymbol{e}_x.
\end{gathered}$$

Предполагается, что поверхность, по которой движется ТС, локально представляется плоскостью. Ориентацию этой плоскости, относительно неподвижной горизонтальной плоскости, будем задавать самолетными углами ψ_x (угол крена) и ψ_y (угол тангажа). Соответствующие матрицы поворота запишутся в виде

$$\mathrm{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_x & \sin\psi_x \\ 0 & -\sin\psi_x & \cos\psi_x \end{bmatrix}, \quad \mathrm{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\psi_y & 0 & \sin\psi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi_y & 0 & \cos\psi_y \end{bmatrix}.$$

Тогда результирующий вектор силы тяжести действующий на ТС в связанной системе отсчета будет иметь вид:

$$m\boldsymbol{g} = \mathrm{R}_x\mathrm{R}_y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} = -mg \begin{bmatrix} \sin\psi_y \\ \cos\psi_y \sin\psi_x \\ \cos\psi_y \cos\psi_x \end{bmatrix}$$

На данный момент, плоскость, по которой движется ТС, будем считать горизональной ($\psi_x = \psi_y = 0$).

Проецируя векторные уравнения движения на локальный базис связанной с ТС системы координат $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$, получим:

$$\begin{gathered}
\dot{v}_x = v_y\omega + (F_{wx,fl}\cos\alpha_l - F_{wy,fl}\sin\alpha_l + \\
+F_{wx,fr}\cos\alpha_r - F_{wy,fr}\sin\alpha_r + F_{x,rl} + F_{x,rr} - C_a v_x^2\right) /m, \\
\dot{v}_y = -v_x\omega + (F_{wx,fl}\sin\alpha_l + F_{wy,fl}\cos\alpha_l + \\
+F_{wx,fr}\sin\alpha_r + F_{wy,fr}\cos\alpha_r + F_{y,rl} + F_{y,rr}) /m, \\
\dot{\omega} = (l_f\,(F_{wx,fl}\sin\alpha_l + F_{wy,fl}\cos\alpha_l + F_{wx,fr}\sin\alpha_r + \\
F_{wy,fr}\cos\alpha_r) + d\,(F_{wx,fr}\cos\alpha_r - F_{wy,fr}\sin\alpha_r - \\
-F_{wx,fl}\cos\alpha_l + F_{wy,fl}\sin\alpha_l) - \\
-l_r\,(F_{y,rl} + F_{y,rr}) - d\,(F_{x,rl} - F_{x,rr}))\,/J.
\end{gathered} \tag{2}$$

Вместе выражения (1) и (2) определяют кинематические и динамические уравнения движения ТС.

2 Модели сил, действующих на колеса

Продольная и поперечная компоненты сил, действующих на передние колеса, вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered}
F_{wx,fj} = M/r, \quad F_{wy,fj} = -C_y v_{wy,fj} \\
v_{wy,fj} = -v_{x,fj}\sin\alpha_j + v_{y,fj}\cos\alpha_j, \quad j \in \{l, r\}, \\
v_{x,fl} = v_x - \omega d, \quad v_{x,fr} = v_x + \omega d, \quad v_{y,fj} = v_y + \omega l_f
\end{gathered} \tag{3}$$

где r — радиус колеса, C_y — коэффициент, отвечающий поперечной жесткости шины, M — момент, подаваемый на передние колеса, $v_{x,i}$ и $v_{y,i}$ — продольная и поперечная компоненты скорости центра i-го колеса, определяемые формулой Эйлера $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$.

В силу того, что тяга двигателя передается только на передние колеса, силы, действующие со стороны поверхности на шины задних колес, определим следующим образом:

$$F_{x,rj} = 0, \quad F_{y,rj} = -C_y v_{y,rj}, \quad v_{y,rj} = v_y - \omega l_r, \quad j \in \{l, r\}. \tag{4}$$

3 Параметры модели

Параметры модели приведены в таблице. Параметры взяты из книги Particle Filtering and Optimal Control for Vehicles and Robots by Karl Berntorp, страницы mathworks, а также оценивались исходя из физических представлений о движении ТС.

Параметр	Величина	Единица измерения
m	2100	кг
J	3900	кг · м^2
l_f	1.3	м
l_r	1.5	м
d	0.8	м
r	0.3	м
C_y	10^4	кг / с
C_a	0.5	кг / м

4 Принцип Аккермана

Вычислим углы α_l и α_r поворота левого и правого передних колес ТС как функции угла эффективного поворота ТС α. Координаты мгновенного центра скоростей ТС (в связанной с ТС системе координат) $x_C = -l_r$, $y_C = R$. Тогда:

$$\tan\alpha = \frac{l_r + l_f}{R}, \quad \tan\alpha_l = \frac{l_r + l_f}{R - d}, \quad \tan\alpha_r = \frac{l_r + l_f}{R + d},$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \arctan\left(\frac{(l_r + l_f)\tan\alpha}{l_r + l_f - d\tan\alpha}\right), \\ \alpha_r &= \arctan\left(\frac{(l_r + l_f)\tan\alpha}{l_r + l_f + d\tan\alpha}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Предполагается, что вспомогательный угол α изменяется в пределах от $-\pi/3$ до $\pi/3$. График зависимости углов α_l и α_r от α представлен на рисунке 2.

5 Задача управления

Вектор состояния и управления в модели:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & \varphi & v_x & v_y & \omega \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \alpha & M \end{bmatrix}^T$$

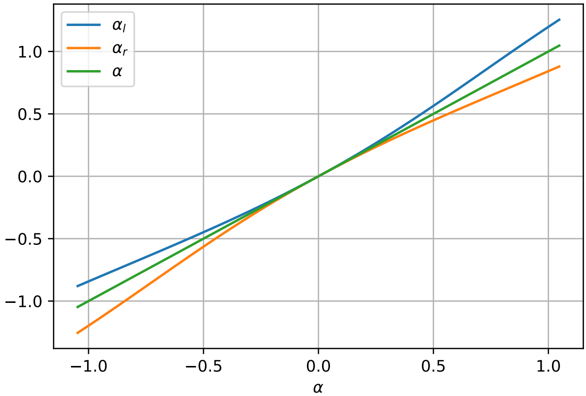

Рис. 2: Угол поворота левого α_l и правого α_r колес в зависимости от эффективного угла поворота α

Эволюция вектора состояния модели определяется уравнениями (1), (2), используя при этом уравнения (3), (4), (5).

Задача проведения ТС по заданной траектории состоит в минимизации разницы $x(t) - x_{ref}(t)$ и $y(t) - y_{ref}(t)$, где $x_{ref}(t), y_{ref}(t)$ — заданная на плоскости траектория. Пусть

$$\boldsymbol{x}_{ref} = \begin{bmatrix} x_{ref} \\ y_{ref} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_{ref}(t)$. Для решения этой задачи минимизируется функционал:

$$\min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{PC}(\mathcal{U})} J(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u}, t_k),$$

$$J(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{u}, t_k, \boldsymbol{x}(t_k)) = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{e}(t_k + i\Delta t)^T \mathrm{Q} \boldsymbol{e}(t_k + i\Delta t) +$$

$$+ \boldsymbol{u}(t_k + i\Delta t)^T \mathrm{R} \boldsymbol{u}(t_k + i\Delta t) + \boldsymbol{e}(t_k + N\Delta t)^T \mathrm{Q}_f \boldsymbol{e}(t_k + N\Delta t),$$

при следующих ограничениях:

$$\boldsymbol{x}(t_k+T)=\boldsymbol{x}(t_k)+\int\limits_{t_k}^{t_k+T}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))dt,\quad \forall T\in[t_k,t_k+N\Delta t],$$

$$x(0)=x_{ref}(0),\quad y(0)=y_{ref}(0),\quad \varphi(0)=\arctan\frac{dy_{ref}(0)}{dx_{ref}(0)},$$

$$v_x(0)=v_y(0)=\omega(0)=0,$$

$$\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}=\{x\in\mathcal{X}_x,\, y\in\mathcal{X}_y\},$$

$$\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}=\left\{-\pi/3\leqslant\alpha\leqslant\pi/3,\, -10^5\leqslant M\leqslant 4\cdot 10^3\right\}.$$

где $\mathcal{X}_x,\mathcal{Y}_y$ — возможные положения центра масс ТС на плоскости. Непрерывное время t заменяется дискретными отсчетами $t_k=k\Delta t$, где $k\in\{0,1,2,\ldots\}$. Диагональные квадратные матрицы Q, Q_f, R задают соответствующие квадратичные формы:

$$\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_f=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{diag}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.$$