

פעולה	זמן ריצה במקרה הגרוע	זמן ריצה לשיעורין
$insert(k, info)$	$O(1)$	$O(1)$
$findMin()$	$O(1)$	$O(1)$
$deleteMin()$	$O(n)$	$O(\log(n))$
$decreaseKey(x, d)$	$O(n)$	$O(1)$
$delete(x)$	$O(n)$	$O(\log(n))$
$totalLinks()$	$O(1)$	$O(1)$
$totalCuts()$	$O(1)$	$O(1)$
$meld(heap2)$	$O(1)$	$O(1)$
$size()$	$O(1)$	$O(1)$
$numTrees()$	$O(1)$	$O(1)$

חלק תאורטי:

א.

הלמה תהיה אותו דבר רק שדרגת y_i תהיה לכל הפחות $i - c$.
ההוכחה של הלמה:

יהיה x עם n בנים y_1, y_2, \dots, y_n , יהיה y_i , אז אנחנו יודעים ש y_i התאחד עם x כאשר x היה $i - 1$ ילדים, y_1, \dots, y_{i-1} .
אז נובע שגם ל y_i היו $i - 1$ ילדים כאשר איחדנו אותו עם x , ואז מהגדרת $cascading\ cut$ נובע שלכל היותר יכולנו לחתוך ל y_i
לכל היותר $c - 1$ ילדים בלי ש $cascading\ cut$ גם יחתוך אותו, ולכן ל y_i יש לכל הפחות $i - 1 - (c - 1)$ ילדים, שזה $i - c$ וזו בדיוק הטענה שרצינו להוכיח.

ב.

נשתמש בפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה, אז $\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0, \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-k} = 0 \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} - a_{n-k} = 0$
אז יש k פתרונות לפולינום.
נשים לב שאחד הפתרונות האלה גדול מ 1 ממשפט ערך הבניים של קושי, כי $1^k - 1^{k-1} - 1 = -1 \leq 0$ אבל $2^k - 2^{k-1} - 1 = 2^{k-1} - 1 \geq 0$
לכן יש שורש ב $(2, 1)$. נסמן את השורש הזה ב λ_r , נשים לב שגם זה השורש היחיד שגדול מ 1, אפשר לראות זאת מהעבודה ש עבור $\lambda > 1$ הנגזרת של הפולינום חיובית ממש לכל λ , לכן נחצה את 0 רק פעם אחת. אז עבור כל סדרה a_n שמשלב מסויים גדלה ממש חייב להיות שהמקדם של α_r, λ_r אינו 0. לכן נניח שהסדרה עולה ממש ממקום מסויים ונקבל את המשוואה הזו, עבור n גדול מספיק ועבור $1 < b < \lambda_r$.

$$|a_n| = \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i^n \right| \geq |\alpha_r| |b^n| = |\alpha_r| b^n \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha_r \neq 0} |a_n| = \Omega(b^n) \Rightarrow a_n = \Omega(b^n)$$

ג.

נשים לב שבערימה עם n אברים בעלת עץ עם דרגה מקסימלית, מכל הערימות האפשריות עם n אברים יהיה בהכרח עץ 1.

נגדיר סדרה בצורה הבאה, מספר הילדים המינימלי האפשרי לעץ בדרגה k , ונסמנה S_k
נגדיר נוסחת נסיגה $a_n = a_{n-1} + a_{n-c}$, $a_i = i + 1$ $0 \leq i < c$, לצומת בדרגה k יש לפחות a_n צאצאים כולל עצמו.
נשתמש באינדוקציה שלמה, אז הבסיס לטענה זו עבור $0 \leq i < c$, לעץ מדרגה i יש בדיוק i ילדים, ולכן לכל הפחות יש לו $i + 1$ צאצאים כולל עצמו לכן $S_i \geq i + 1 = a_i$.

נסתכל על עץ בדרגה k , אז ללא הצומת האחרונה שהוספנו אליו הוא עץ מדרגה $k - 1$, נשתמש בטענה ונקבל שיש לו לפחות a_{k-1} צאצאים כולל עצמו, נסתכל על הילד k שלו.
מהלמה הראשונה הוא מדרגה לכל הפחות $k - c$, לכן מהאינדוקציה יש לו לכל הפחות a_{k-c} צאצאים, לכן בסה"כ לעץ יש לו לפחות $S_k \geq a_{k-1} + a_{k-c} = a_k$ צאצאים.
מתקיים ש a_n סדרה עולה ממש ומקודם הוכחנו שנוסחת נסיגה כזו מקיימת $a_k = \Omega(b^k)$ עבור $b > 1$.

אז אם יש לנו ערימה בעלת n אברים, כל עץ בדרגה k בערימה זו מקיים שיש לו $O(n)$ צמתים וגם $\Omega(b^k)$ צמתים, לכן

$$k = O(\log(n)) \Leftarrow k \leq \log_b(c \cdot n) \Leftarrow b^k \leq \underbrace{c}_{c>0} \cdot n \Leftarrow b^k = O(n)$$

חלק ניסויי:

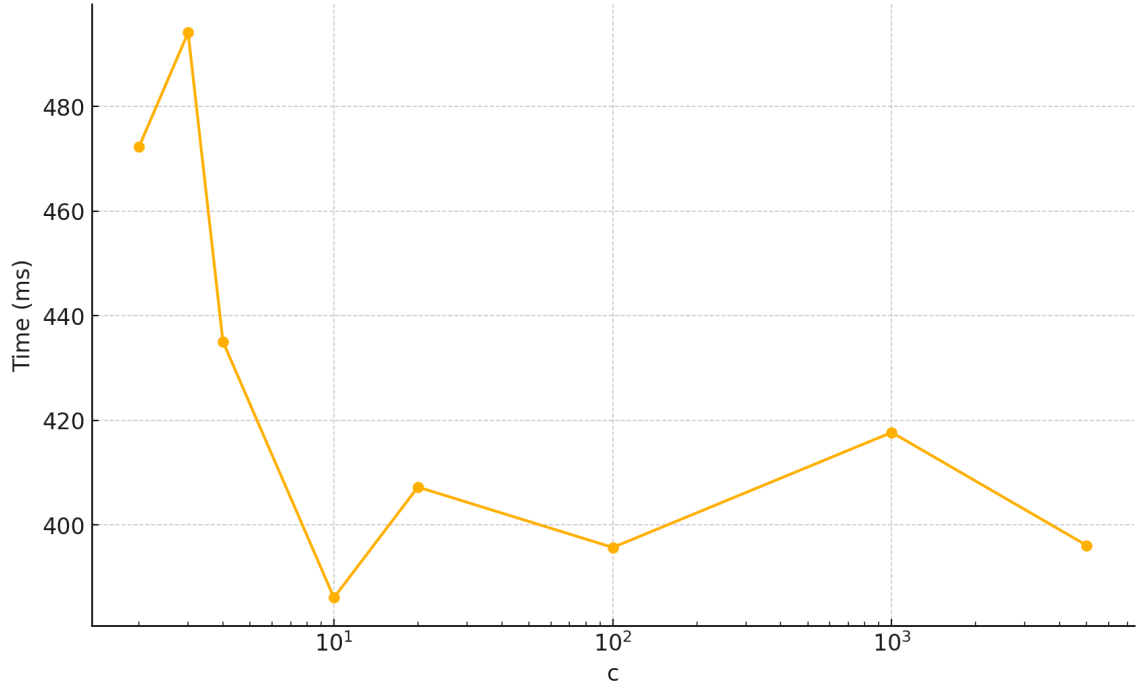
טבלה 1: Experiment 1 results

c	Time (ms)	FinalSize	NumCuts	NumLinks	NumTrees
2	472.30	46.00	749135.90	749178.75	3.15
3	494.15	46.00	553380.55	553423.25	3.30
4	435.05	46.00	500829.50	500872.45	3.05
10	386.10	46.00	465046.15	465089.70	2.45
20	407.25	46.00	464596.25	464640.50	1.75
100	395.70	46.00	464596.15	464640.60	1.55
1000	417.70	46.00	464596.25	464640.75	1.50
5000	396.10	46.00	464596.00	464640.35	1.65

טבלה 2: Experiment 2 results

c	Time (ms)	FinalSize	NumCuts	NumLinks	NumTrees
2	232.15	464644.00	464633.55	929269.30	8.25
3	227.10	464644.00	464633.85	929269.35	8.50
4	240.40	464644.00	464633.20	929268.25	8.95
10	243.90	464644.00	464631.50	929266.90	8.60
20	229.55	464644.00	464594.40	929227.90	10.50
100	242.50	464644.00	464594.40	929227.35	11.05
1000	243.70	464644.00	464594.55	929227.95	10.60
5000	242.85	464644.00	464594.60	929227.90	10.70

Experiment 1: Time vs c



Experiment 2: Time vs c

