זמן ריצה לשיעורין	זמן ריצה במקרה הגרוע	פעולה
$O(1)$	$O(1)$	$insert(k, info)$
$O(1)$	$O(1)$	$findMin()$
$O(log(n))$	$O(n)$	$deleteMin()$
$O(1)$	$O(n)$	$decreaseKey(x, d)$
$O(log(n))$	$O(n)$	$delete(x)$
$O(1)$	$O(1)$	$totalLinks()$
$O(1)$	$O(1)$	$totalCuts()$
$O(1)$	$O(1)$	$meld(heap2)$
$O(1)$	$O(1)$	$size()$
$O(1)$	$O(1)$	$numTrees()$

חלק תאורטי:

א.

הלמה תהיה אותו דבר רק שדרגת y_i תהיה לכל הפחות $i-c$.

ההוכחה של הלמה:

יהיה x עם n בנים $y_1, y_2..., y_n$ יהיה y_i, אז אנחנו יודעים שy_i התאחד עם x כאשר לx היה $i-1$ ילדים, $y_1, ...y_{i-1}$.

אז נובע שגם לy_i היו $i-1$ ילדים כאשר איחדנו אותו עם x, ואז מהגדרת $cascading\ cut$ נובע שלכל היותר יכולנו לחתוך לy_i

לכל היותר $c-1$ ילדים בלי ש$cascading\ cut$ גם יחתוך אותו, ולכן לy_i יש לכל הפחות $i-1-(c-1)$ ילדים, שזה $i-c$ וזו בדיוק הטענה שרצינו להוכיח.

ב.

נשתמש בפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה, אז $\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-k} = 0 \Leftarrow a_n - a_{n-1} - a_{n-k} = 0$, $\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0$

אז יש k פתרונות לפולינום.

נשים לב שאחד הפתרונות האלה גדול מ1 ממשפט ערך הביניים של קושי, כי $1^k - 1^{k-1} - 1 = -1 \leq 0$ אבל $2^k - 2^{k-1} - 1 = 2^{k-1} - 1 \geq 0$.

לכן יש שורש ב$[2,1)$. נסמן את השורש הזה בλ_r, נשים לב שגם זה השורש היחיד שגדול מ1, אפשר לראות זאת מהעבודה ש עבור $\lambda > 1$ הנגזרת

של הפולינום חיובית ממש לכל λ, לכן נחצה את 0 רק פעם אחת. אז עבור כל סדרה a_n שמשלב מסויים גדלה ממש חייב להיות שהמקדם של λ_r, α_r

איננו 0. לכן נניח שהסדרה עולה ממש ממקום מסויים ונקבל את המשוואה הזו, עבור n גדול מספיק ועבור $1 < b < \lambda_r$.

$$|a_n| = |\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n| \geq |\alpha_r||b^n| = |\alpha_r| b^n \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha_r \neq 0} |a_n| = \Omega(b^n) \Rightarrow a_n = \Omega(b^n)$$

ג.

נשים לב שבערימה עם n אברים בעלת עץ עם דרגה מקסימלית, מכל הערימות האפשריות עם n אברים יהיה בהכרח עץ 1.

נגדיר סדרה בצורה הבאה, מספר הילדים המינימלי האפשרי לעץ בדרגה k, ונסמנה S_k

נגדיר נוסחת נסיגה $a_n = a_{n-1} + a_{n-c}$ $a_i = i + 1$, $0 \leq i < c$ לצומת בדרגה k יש לפחות a_n צאצאים כולל עצמו.

נשתמש באינדוקציה שלמה, אז הבסיס לטענה זו עבור $0 \leq i < c$, לעץ מדרגה i יש בדיוק i ילדים, ולכן לכל הפחות יש לו $i+1$ צאצאים כולל עצמו לכן $S_i \geq i + 1 = a_i$.

נסתכל על עץ בדרגה k, אז ללא הצומת האחרונה שהוספנו אליו הוא עץ מדרגה $k-1$, נשתמש בטענה ונקבל שיש לו לפחות a_{k-1} צאצאים כולל עצמו, נסתכל על הילד הk שלו.

מהלמה הראשונה הוא מדרגה לכל הפחות $k-c$, לכן מהאינדוקציה יש לו לכל הפחות a_{k-c} צאצאים, לכן בסה"כ לעץ יש לו לפחות$S_k \geq a_{k-1} + a_{k-c} = a_k$ צאצאים.

מתקיים שa_n סדרה עולה ממש ומקודם הוכחנו שנוסחת נסיגה כזו מקיימת $a_k = \Omega(b^k)$ עבור $b > 1$.

אז אם יש לנו ערימה בעלת n אברים, כל עץ בדרגה k בערימה זו מקיים שיש לו $O(n)$ צמתים וגם $\Omega(b^k)$ צמתים, לכן

$$k = O(log(n)) \Leftarrow k \leq log_b(c \cdot n) \Leftarrow b^k \leq \underbrace{c}_{c>0} \cdot n \Leftarrow b^k = O(n)$$