„Теоретико-сложностные основы криптографии“. Заметки к курсу в СПбАУ

А.В. Смаль

22 февраля 2018 г.

Аннотация

Курс посвящён изучению теоретических оснований, на которых строится надёжность криптографических протоколов.

Содержание

Введение

Мы будем предполагать, что алгоритмы шифрования/дешифрования всем известны (т.е. no security by obscurity).

1. Совершенная надёжность

Определение 1.1. *Система шифрования с закрытым ключом* — это пара алгоритмов $E(k, m)$ и $D(k, c)$, такая, что для любых k и m выполняется $D(k, E(k, m)) = m$. Система называется *совершенно надёжной*, если для любых двух сообщений m_1 и m_2 случайные величины $E(k, m_1)$ и $E(k, m_2)$ при $k \leftarrow \mathcal{U}(K)$ распределены одинаково ($\mathcal{K}$ — пространство ключей).

Замечание 1.1. Система шифрования с одноразовым шифроблокнотом является совершенно надёжной.

Замечание 1.2. Для совершенной надёжности необходимо, чтобы длина ключа была не менее длины сообщения.

Теорема 1.1. *Пусть $P = NP$. Тогда для любой системы шифрования с закрытым ключом (E, D) с полиномиальным алгоритмом E, в которой $|m| > |k|$, существуют сообщения m_0 и m_1 и полиномиальный алгоритм A, для которого*

$$\left|\Pr_k[A(E(k, m_0)) = 1] - \Pr_k[A(E(k, m_1)) = 1]\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Не уменьшая общности предположим, что $\mathcal{K} = \{0, 1\}^{n-1}$. Возьмём в качестве $m_0 = 0^n$. Пусть $S = \{E(k, 0^n) \mid k \in \mathcal{K}\}$. Легко видеть, что $S \in NP$ и $|S| \leq 2^{n-1}$. Возьмём в качестве алгоритма A полиномиальный разрешающий алгоритм для S, т.е. $A(y) := [y \in S]$ (он существует по предположению $P = NP$).

Для каждого сообщения m рассмотрим $t_m = \big|\{k \mid E(k, m) \in S\}\big|$. Если существует сообщение m^*, для которого $t_{m^*} \leq 2^{n-1}$, то $m_1 = m^*$ удовлетворяет требованиям.

Предположим теперь, что $t_m > 2^{n-2}$ для любого m. Это значит, что существуют более $2^{n-2} \cdot 2^n = 2^{2n-2}$ пар ключ-сообщение (k, m), для которых $E(k, m) \in S$. Следовательно, для некоторого $y \in S$ существует более $2^{2n-2}/|S| \geq 2^{n-1}$ пар $(k, m) : E(k, m) = y$, т.е. существуют ключ k и два различных сообщения m' и m'': $E(k, m') = E(k, m'')$. Это противоречит корректности системы шифрования. $\square$

2. Односторонние функции

Доказывать надёжность криптографических протоколов без каких-либо предположений, к сожалению, не получается — из такого доказательства следовало бы $P \neq NP$. Было бы здорово показать, что криптография возможна, если $P \neq NP$, но это тоже не получается сделать. Поэтому в дальнейшем мы будем отталкиваться от более сильного предположение — предположения о существовании *односторонней функции*.

В дальнейшем мы будем рассматривать семейства функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$, где $k(n)$ и $l(n)$ будут некоторыми полиномами. Кроме того, нас почти всегда будут интересовать функции, которые можно вычислить за полиномиальное время.

Определение 2.1. Семейство функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *полиномиально вычислимым*, если имеется алгоритм, который получая на вход число n и x длины $k(n)$ вычисляет $f_n(x)$ за полиномиальное от n время.

2.1. Односторонние функции с худшем случае

Определение 2.2. Полиномиально вычислимое семейство функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *односторонним в худшем случае*, если не существует полиномиально вычислимой функции g_n, что для любого $x \in \{0,1\}^{k(n)}$ верно $f_n(g_n(f_n(x))) = f_n(x)$.

Теорема 2.1. *Односторонние функции с худшем случае существуют* $\iff P \neq NP$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Пусть $P = NP$. Определим язык $L = \{(1^n, y, z) \mid \exists x, |x| = k(n), z \sqsubset x, f_n(x) = y\}$, $L \in NP$. По предположению для L существует полиномиальный разрешающий алгоритм. Для нахождения прообраза y запустим этот алгоритм сначала на слове $(1^n, y, \lambda)$, где λ — пустая строка. Если это слово не принадлежит L, то y не имеет прообраза. В противном случае восстановим прообраз y по битам: сначала запустим алгоритм для слова $(1^n, y, 0)$ и проверим, есть ли у y прообраз начинающийся с нуля. Далее аналогично восстановим второй и все последующие биты. Нам потребуется $k(n)+1$ запуск полиномиального алгоритма, т.е. прообраз можно найти алгоритмически за полиномиальное время.

- $\Leftarrow$ Если $P \neq NP$, то можно построить одностороннюю в худшем на основе любой NP-трудной задачи. Пусть $R(x, y)$ — это отношение, задающее NP-трудную задачу S (например, для $S = SAT$: $R(\phi, a) = 1 \iff \phi(a) = 1$). Пусть $f_n(x, y) = (x, R(x, y))$. Если f_n^{-1} вычисляется за полиномиальное время, то и задачу S можно решить за полиномиальное время, вычислив $f^{-1}(x, 1)$.

□

2.2. Односторонние функции для алгоритмов

Мы будем определять *односторонние функции* для противника, который является вероятностным полиномиальным алгоритмом, т.е. для *равномерного противника.*

Определение 2.3. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *слабо односторонним для равномерного противника*, если существует такой полином p, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,R}[f_n(R(1^n, f_n(x))) = f_n(x)] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определение 2.4. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *сильно односторонним для равномерного противника*, если существует такой полином q, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,R}[f_n(R(1^n, f_n(x))) = f_n(x)] < \frac{1}{q(n)}.$$

2.3. Односторонние функции для неравномерного противника

Аналогичным образом можно определить односторонние функции для противника, являющегося последовательностью схем, т.е. для *неравномерного противника*.

Определение 2.5. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *слабо односторонним для неравномерного противника*, если существует такой полином p, что для любой последовательности схем C_n полиномиального размера при всех достаточно больших n

$$\Pr_x[f_n(x) = f_n(C_n(f_n(x)))] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определение 2.6. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *сильно односторонним для неравномерного противника*, если существует такой полином q, что для любой последовательности схем C_n полиномиального размера при всех достаточно больших n

$$\Pr_x[f_n(x) = f_n(C_n(f_n(x)))] < \frac{1}{q(n)}.$$

Замечание 2.1. Односторонние функции для неравномерного противника можно было бы определять для *вероятностных* схем, т.е. для схем, которым на вход подают не только $f_n(x)$, но и некоторую строку со случайными битами r. Однако, легко показать, что от случайных битов в таких определениях можно избавиться: для этого нужно для каждого n выбрать одну "самую лучшую" строку r_n, на которой достигается максимальная вероятность обращения f_n и "зашить" её в схему. Нетрудно увидеть, что вероятность обращения при $r = r_n$ будет не меньше, чем по всем r в среднем.

В дальнейшем мы часто будем говорить про односторонние *функции*, подразумевая под этим *семейства* односторонних функций. Когда говорят про *одностороннюю функцию*, то имеется в виду сильно односторонняя функция.

Определение 2.7. Если в определении односторонней функции убрать требование полиномиальной вычислимости, то получится определение *необратимой* функции.

2.4. Примеры односторонних функций

Неизвестно, существуют ли односторонние или хотя бы слабо односторонние функции (даже для равномерного противника). Доказательство их существования повлечёт за собой $P \neq NP$.

Теорема 2.2. *Если $P = NP$, то любое полиномиально вычислимое семейство функций f_n не является слабо необратимым даже для равномерного противника. Более того, существует детерминированный алгоритм, который для всех x по n и $f_n(x)$ за полиномиальное от n время находит некоторый прообраз $f_n(x)$ длины $k(n)$.*

Доказательство. См. пункт “$\Rightarrow$” доказательства теоремы 2.1. □

Пример 2.1 (произведение натуральных чисел). Семейство f_n устроено следующим образом: $k(n) = l(n) = 2n$, вход x делится пополам, каждая половинка представляет собой n-битовое число, результат f_n — произведение этих чисел (получится не более чем $2n$-битовое число).

Пример 2.2 (SUBSET-SUM). Семейство f_n для SUBSET-SUM устроено следующим образом: $k(n) = n^2 + n$, $l(n) = n^2 + 2n + \lceil \log n \rceil$, вход x разбивается на $n+1$ блок длины n, первые n блоков интерпретируются как n-битовые числа $x_1, \ldots, x_n$, а последний блок интерпретируется как подмножество $[n]$. Тогда $f_n(x) = \left\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \sum_{i \in I} x_i \right\rangle$.

2.5. Построение сильно односторонних функций из слабо односторонних

Теорема 2.3. *Если существуют слабо односторонние функции, то существуют и сильно односторонние функции (это верно для любых противников).*

Доказательство. Будем доказывать для равномерного противника — для неравномерного доказательство будет аналогичным. Пусть f — слабо односторонняя функция, т.е. существует такой полином p, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,r}[f_n(x) = f_n(R(1^n, f_n(x), r))] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определим функцию F, которая определяется следующим соотношением:

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle f_n(x_1), f_n(x_2), \ldots, f_n(x_N) \rangle,$$

т.е. $F_n : \{0,1\}^{N \cdot k(n)} \to \{0,1\}^{N \cdot l(n)}$. Для того, чтобы обратить F_n нам нужно N раз обратить функцию f_n. В каждом случае вероятность ошибки не меньше $1/p(n)$, поэтому общая вероятность успеха не более $\left(1 - 1/p(n)\right)^N$. Для $N = n \cdot p(n)$ эта вероятность близка к e^{-n}, что убывает быстрее любого обратного полинома. Таким образом функция F — сильно односторонняя.

В предыдущем рассуждении кроется ошибка. Дело в том, что мы предполагаем, что обращающий алгоритм будет обязательно устроен следующим образом: он будет пытаться N раз обратить f_n, т.е. найти прообразы для $f_n(x_1), f_n(x_2), \ldots, f_n(x_N)$. Это не обязательно так — мы не можем предполагать, что этот алгоритм будет устроен каким-то конкретным образом. Поэтому предыдущее доказательство ошибочное, хотя получившаяся функция F действительно сильно односторонняя.

Корректное доказательство этого факта будет устроено другим образом. Мы предположим, что функция F не является сильно односторонней и из этого покажем, что в свою очередь функция f не является слабо односторонней. Для этого мы воспользуемся алгоритмом, который обращает F, для построения алгоритма обращения f. Предположим, что алгоритм R_F умеет обращать F с вероятностью успеха более $1/q(n)$ для некоторого полинома q. Тогда мы покажем, что существует алгоритм R_f, который обращает f с вероятностью успеха более $1 - 1/p(n)$.

Алгоритм R_f мог бы быть устроен так: для обращения y мы выберем случайные $x_2, x_3, \ldots, x_N$ и запустим алгоритм R_F на входе $\langle y, f_n(x_2), f_n(x_3), \ldots, f_n(x_N) \rangle$. Действительно, если R_F найдёт прообраз для этого входа, то он в т.ч. найдёт и прообраз для y. Вероятность успеха R_F на таком входе для случайного y не менее вероятности успеха R_F для случайных $x_1, \ldots, x_N$. Однако нам этого недостаточно — мы хотели бы получить вероятность успеха близкую к единице.

Для этого будем использовать два дополнительных приёма:

- будем пытаться подставить y не только на место $f_n(x_1)$, а для каждого i будем запускать алгоритм R_F на входе $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), y, f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N) \rangle$ для случайных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$;[1]

- будем повторять каждую итерацию M раз для различных случайных независимых наборов $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$.

Давайте выделим один *раунд* алгоритма R_f: для каждого i выбирается независимый случайный набор $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$ и вызывается алгоритм R_F на входе $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), y, f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N) \rangle$. Этот этап будет повторён M раз. Значение M мы выберем позже, это будут некоторый полином от n.

Введём обозначение $s_i(x)$ — вероятность того, что алгоритм R_F найдёт прообраз $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), f_n(x), f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N) \rangle$ для случайных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$. Через $\hat{s}(x)$ обозначим вероятность успеха одного раунда алгоритма R_f. Эта вероятность заведомо не меньше максимальной вероятности среди всех $s_i(x)$, т.е. $\hat{s}(x) \geq \max_i s_i(x)$.

Рассмотрим отдельно входы x, которые наш алгоритм R_f обращает с маленькой вероятностью, т.е. это "трудные" для обращения входы. Будем говорить, что x — трудный, если $\hat{s}(x) < \epsilon$ для некоторого обратного полинома ϵ, который мы выберем дальше. Долю трудных "трудных" слов среди всех слов длины n мы обозначим через δ, т.е. $\delta = \Pr_{x \leftarrow U_n}[\hat{s}(x) < \epsilon]$.

Дальнейшее доказательство будет построено так: мы предположим, что получившийся алгоритм R_f не обращает функцию f с нужной вероятностью, т.е. вероятность его ошибки большее $1/p(n)$. Из этого будет следовать, что доля трудных слов δ довольно большая (больше некоторого обратного полинома). А раз трудных слов много, то

[1] Этот приём необходим, т.к. в противном случае у нас не получится увеличивать вероятность успеха. Действительно, если представить, что алгоритм R_F не работает на строках, у которых первый бит нулевой, то вероятность успеха такого алгоритма вполне может быть $1/2$. Но тогда и вероятность успеха R_f не может быть выше $1/2$.

и вероятность успеха R_F не может быть больше $1/q(n)$. Таким образом мы придём к противоречию. Для реализации этого плана потребуется следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Вероятность ошибки R_f при обращении слова $f_n(x)$ для случайного x не больше $\delta + (1-\epsilon)^M$.*

Доказательство. По формуле полной вероятности вероятность ошибки R_f при обращении слова $f_n(x)$ для случайного x можно расписать как вероятность ошибки на "трудных" входах и на простых входах.

$$\begin{aligned}\Pr_{x,r}[\text{ошибка } R_f] &= \Pr_r[\text{ошибка } R_f \mid \hat{s}(x) < \epsilon] \cdot \Pr_x[\hat{s}(x) < \epsilon] \\ &\quad + \Pr_r[\text{ошибка } R_f \mid \hat{s}(x) \geq \epsilon] \cdot \Pr_x[\hat{s}(x) \geq \epsilon] \\ &\leq 1 \cdot \delta + (1-\epsilon)^M \cdot 1.\end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. *Вероятность успеха алгоритма R_F при обращении слова $F(\bar{x})$ для случайного $\bar{x} = x_1, \ldots, x_N$ не больше $N\delta\epsilon + (1-\delta)^N$.*

Доказательство. Оценим вероятность успеха сверху по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}\Pr_{\bar{x},r}[\text{успех } R_F] &= \Pr_r[\text{успех } R_F \mid \exists i, \hat{s}(x_i) < \epsilon] \cdot \Pr_{\bar{x}}[\exists i, \hat{s}(x_i) < \epsilon] \\ &\quad + \Pr_r[\text{успех } R_F \mid \forall i, \hat{s}(x_i) \geq \epsilon] \cdot \Pr_{\bar{x}}[\forall i, \hat{s}(x_i) \geq \epsilon] \\ &\leq \epsilon \cdot N\delta + 1 \cdot (1-\delta)^N.\end{aligned}$$

□

Предположим теперь, что у получившегося алгоритма R_f вероятность ошибки больше, чем $1/p(n)$, т.е. R_f обращает f с вероятностью успеха меньше $1 - p(n)$. Положим $M = n/\epsilon$. Тогда второе слагаемое в лемме 2.1 будет порядка e^{-n}, что при при достаточно больших n меньше, чем $\frac{1}{2p(n)}$. Таким образом $\delta > \frac{1}{2p(n)}$.

Теперь мы хотим определить N и ϵ так, чтобы вероятность успеха R_F оказалась меньше, чем $1/q(n)$. Выберем $N = n \cdot p(n)$, тогда при $\delta > \frac{1}{2p(n)}$ мы получаем, что второе слагаемое в лемме 2.2 будет порядка $e^{-n/2}$:

$$(1-\delta)^N < \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)^{n \cdot p(n)} = \left[\left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)^{2p(n)}\right]^{n/2} \approx e^{-n/2}.$$

При достаточно больших n это меньше, чем $\frac{1}{2q(n)}$. Осталось определить ϵ так, чтобы и первое слагаемое лемме 2.2 было меньше $\frac{1}{2q(n)}$. Например, это достигается при

$$\epsilon = \frac{1}{2N \cdot q(n)} = \frac{1}{2n \cdot p(n) \cdot q(n)}.$$

При таким M, N и ϵ получается, что алгоритм R_f вызовет полиномиальный алгоритм R_F не более $M \cdot N = 2n^3 \cdot p^2(n) \cdot q(n)$ раз, т.е. R_f сам по себе будет полиномиальным.

□

2.6. Частичные односторонние функции

Односторонние функции, которые мы определили выше, определены для всех слов длины $k(n)$. Можно обобщить это определение на случай частичных функций, которые определены на некотором $D_n \subset \{0,1\}^{k(n)}$. Для формализации этого определения нам описать, как будет устроено равномерное распределение на D_n.

Определение 2.8. Последовательность распределений вероятностей μ_n на множестве двоичных слов называется *полиномиально моделируемой*, если существует полиномиальный вероятностный алгоритм K, такой, что для всех $x \in \{0,1\}^*$

$$\Pr_r[K(1^n, r) = x] = \mu_n(x).$$

Определение 2.9. *Статистическим расстоянием* между распределениями вероятностей μ и ν называется

$$\delta(\mu, \nu) = \max_{A \subset \{0,1\}^*} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Не сложно показать, что максимум достигается при A равном $\{x \mid \mu(x) > \nu(x)\}$ и его дополнению. Таким образом

$$\delta(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Определение 2.10. Последовательности распределений μ_n и ν_n называются *статистически неотличимыми*, если статистическое расстояние между ними стремится к нулю быстрее любого обратного полинома от n при $n \to \infty$.

Определение 2.11. Случайные величины α_n и β_n называются *статистически неотличимыми*, если их распределения $\mu_n(x) = \Pr[\alpha_n = x]$ и $\nu_n(x) = \Pr[\beta_n = x]$ статистически неотличимы.

Определение 2.12. Распределение μ_n называется *доступным*, если оно статистически неотличимо от некоторого полиномиально моделируемого распределения ν_n.

Определение 2.13. Семейство частичных функций f_n с областями определения D_n называется *сильно односторонним*, если f_n полиномиально вычислимо, равномерное распределение на D_n доступно, и существует такой полином q, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R,

$$\Pr_{x \leftarrow D_n, r}[f_n(x) = f_n(R(1^n, f_n(x), r))] < \frac{1}{q(n)}$$

при всех достаточно больших n. Сильно одностороннее семейство частичных функций f_n называется *сильно односторонней перестановкой*, если для всех n оно является перестановкой своей области определения D_n.

Аналогичным образом определяются *слабо односторонние* функции и *односторонние функции* для неравномерного противника.

Пример 2.3 (Предположительно сильно односторонние частичные функции).

1. *Функция Рабина.* Функция f_n определена на словах вида xy длины $4n$, где $|x| = |y| = 2n$. При этом x и y интерпретируются как $2n$-битовые числа, удовлетворяющих следующим требованиям:

   (a) $y = p \cdot q$, где p и q простые n-битовые числа вида $4k + 3$;

   (b) $x = z^2 \bmod y$ для некоторого z, взаимно простого с y.

   Значение функции на xy равно конкатенации слов $x^2 \bmod y$ и y.

2. *Функция RSA.* Функция RSA является обобщением функции Рабина. Она определена на словах вида xyz, где x, y и z имеют длину $2n$ и интерпретируются как двоичные записи чисел, удовлетворяющие следующим требованиям:

   (a) $y = p \cdot q$, где p и q простые n-битовые числа;

   (b) $x \in [1, pq - 1]$ и взаимно просто с y;

   (c) z взаимно просто $\phi(pq) = (p - 1) \cdot (q - 1)$.

   Значение функции на xyz равно конкатенации слов $(x^z \bmod y)$, y и z.

3. *Дискретная экспонента.* Функция определена на словах вида xyz, где x, y и z имеют длину n и соответствующие числа удовлетворяют следующим требованиям:

   (a) y — n-битовое простое число,

   (b) $x \in [2, y - 1]$, порождает всю мультипликативную группу вычетов по модулю y (т.е. любой ненулевой вычет является степенью x),

   (c) $z \in [1, y - 1]$.

   Значение функции на xyz равно конкатенации слов x, y и $(x^z \bmod y)$. Обращение этой функции — является дискретным логарифмированием.

Более подробно об этих примерах см. [1].

Определение 2.14. Частичная функция $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *проверяемой*, если по n, любому слову x длины $k(n)$ и любому слову y из множества значений f_n можно за полиномиальное время проверить, верно ли, что f_n определена на x и её значение на x равно y.

Замечание 2.2. Неизвестно, является ли функция Рабина проверяемой, т.к. неясно, как за полиномиальное время проверить, является ли данное число квадратичным вычетом по составному модулю.

3. Генераторы псевдослучайных чисел

3.1. Вычислительно неотличимые случайные величины

Определение 3.1 (Для неравномерного противника)**.** Случайные величины α_n и β_n, зависящие от натурального параметра n, со значениями в множестве слов некоторой длины $l(n)$ называются *вычислительно неотличимыми*, если для любой последовательности схем $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ размера $\mathrm{poly}(n)$ (с $l(n)$ входами и одним выходом) вероятность событий $C_n(\alpha_n) = 1$ и $C_n(\beta_n) = 1$ отличаются на пренебрежимо малую величину, т.е.

$$\left|\Pr[C_n(\alpha_n) = 1] - \Pr[C_n(\beta_n) = 1]\right| < \epsilon_n,$$

где ϵ_n убывает быстрее любого обратного полинома. Схема C_n в этом контексте называется *тестом* и мы говорим, что случайная величина α_n проходит тест C_n, если $C_n(\alpha_n) = 1$. Таким образом, мы требуем, чтобы α_n и β_n проходили любые тесты полиномиального размера с приблизительно равной вероятностью.

Определение 3.2 (Для равномерного противника)**.** Случайные величины α_n и β_n, зависящие от натурального параметра n, со значениями в множестве слов некоторой длины $l(n)$ называются вычислительно неотличимыми, если для любого вероятностного полиномиального алгоритма T вероятность событий $T(1^n, \alpha_n) = 1$ и $T(1^n, \beta_n) = 1$ отличаются на пренебрежимо малую величину, соответственно

$$\left|\Pr[T(1^n, \alpha_n) = 1] - \Pr[T(1^n, \beta_n) = 1]\right| < \epsilon_n,$$

где ϵ_n убывает быстрее любого обратного полинома. Алгоритм T в этом контексте называется *тестом* и мы говорим, что случайная величина α_n проходит тест T, если $T(1^n, \alpha_n) = 1$.

Замечание 3.1. Если α_n и β_n статистически неотличимы, то они и вычислительно неотличимы (например, для неравномерного противника), поскольку разность вероятностей α_n и β_n в множество $\{x \mid C_n(x)\}$, задаваемое тестом C_n, не превосходит статистического расстояния между α_n и β_n.

Лемма 3.1 (Свойства вычислительной неотличимости)**.**

1. *Отношение вычислительной неотличимости рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

2. *Для неравномерного противника: вычислительно неотличимые последовательности случайных величин α_n и β_n вычислительно неотличимы и вероятностными тестами полиномиального размера. Это означает, что для любой последовательности T_n вероятностных схем полиномиального от n размера с $l(n)$ входами, вероятности событий $T_n(\alpha_n) = 1$ и $T_n(\beta_n) = 1$ приблизительно равны.*

3. *Если α_n и β_n вычислительно неотличимы, а C_n — последовательность вероятностных схем полиномиального размера с $l(n)$ входами, то и случайные величины $C_n(\alpha_n)$ и $C_n(\beta_n)$ вычислительно неотличимы. Аналогично для равномерного противника.*

4. *Пусть случайные величины α_n, β_n и γ_n имеют совместное распределение. И пусть для любой последовательности значений c_n случайной величины γ_n случайные величины $(\alpha_n \mid \gamma_n = c_n)$ и $(\beta_n \mid \gamma_n = c_n)$ вычислительно неотличимы. Тогда и $\alpha_n\gamma_n$ и $\beta_n\gamma_n$ вычислительно неотличимы.*

   Для равномерного противника это свойство справедливо только для независимых случайных величин α_n, γ_n, причём случайная величина должны быть полиномиально моделируемой.

Доказательство.

1-2. Очевидно.

3. Пусть дана последовательность тестов T_n позволяет отличать $C_n(\alpha_n)$ и $C_n(\beta_n)$. Тогда последовательность схем $D_n(x) = T_n(C_n(x))$ будет вероятностным тестом полиномального размера для случайных величин α_n и β_n.

4. (Задача в ДЗ)

$\square$

3.2. Генераторы псевдослучайных чисел

Определение 3.3. Пусть даны многочлены $k(n)$ и $l(n)$ такие, что $l(n) > k(n)$ для всех n. *Генератором псевдослучайных чисел типа $k(n) \to l(n)$* будем называть семейство функций $G_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Семейство G_n вычислимо за полиномиальное от n время.

2. (Надежность генератора ПСЧ.) Случайная величина $G_n(s)$ для равномерного случайного s вычислительно неотличима от случайной величины равномерно распределенной на всех словах длины $l(n)$.

Определение 3.4. *Генератор псевдослучайных чисел типа $k(n) \to \infty$* будем называть семейство отображений $G_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^*$, удовлетворяющее следующим требованиям.

1. Существует алгоритм, который по слову s и натуральному числу l вычисляет элемент последовательности $G_n(s)$ с номером l за время, полиномиальное от $|s|+l$.

2. Случайная величина $G_n(s)$ вычислительно неотличима от равномерно распределённой бесконечной последовательности нулей и единиц. (Это означает, что для любого полинома $p(n)$ первые $p(n)$ битов $G_n(s)$ вычислительно неотличимы от случайной величины равномерно распределённой на всех словах длины $p(n)$.)

Замечание 3.2. По генератору ПСЧ типа $k(n) \to \infty$ можно построить генератор ПСЧ типа $k(n) \to l(n)$ для любого полинома $l(n)$ (нужно взять первый $l(n)$ битов).

Теорема 3.1. *Если существует генератор ПСЧ G_n типа $k(n) \to l(n)$, то существуют и односторонние функции.*

Доказательство. Действительно, можно рассмотреть сам генератор G_n как слабо одностороннюю функцию. Давайте покажем, что никакая последовательность схем полиномиального размера C_n не обращает G_n с вероятностью успеха более 3/4 для бесконечно многих n. Предположим, что такая последовательность существует. Тогда можно рассмотреть следующий полиномиальный тест для последовательностей длины $l(n)$: для входа y проверяем, что $G_n(C_n(y)) = y$. Если это верно (т.е. обращение произошло удачно), то выдаём 1, а иначе 0. Вероятность того, что G_n пройдёт такой тест не менее 3/4. При этом равномерно распределённая на $l(n)$ случайная величина пройдёт этот тест с вероятностью не более 1/2 (т.к. размер образа G_n не более 1/2). $\square$

Обратное утверждение тоже верно.

Теорема 3.2 ([4]). *Если существует односторонняя функция, то существует и генератор псевдослучайных чисел типа $n \to \infty$.*

Мы же докажем более простое утверждение.

Теорема 3.3. *Если существует односторонняя перестановка, то существует и генератор псевдослучайных чисел типа $n \to \infty$.*

В дальнейшем мы будем говорить про *полиномиального противника* подразумевая под этим две возможных формулировки: полиномиальный вероятностный алгоритм и семейство схем полиномиального размера.

3.3. Трудный бит

Определение 3.5. Для пары совместно распределённых случайных величин (γ_n, β_n), где β_n распределена на $\{0, 1\}$ будем говорить, что β_n является *вычислительно трудной* относительно γ_n, если для любого полиномиального противника B

$$\left|\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] - \tfrac{1}{2}\right| < \frac{1}{p(n)}$$

для любого полинома p для достаточно больших n.

Теорема 3.4. *Случайная величина β_n вычислительно трудна относительно γ_n тогда и только тогда, когда случайная величина $\beta_n\gamma_n$ вычислительно неотличима от $r_n\gamma_n$, где r_n — это равномерно распределённая на $\{0, 1\}$ случайная величина.*

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть существует противник B, который для бесконечного числа n предсказывает β_n по γ_n с хорошей вероятностью, т.е.

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] \geq \tfrac{1}{2} + \epsilon_n,$$

где ϵ_n — обратный полином. Используя противника B построим противника A, который различает $\beta_n\gamma_n$ и $r_n\gamma_n$.

$$A(x, y) = \begin{cases} 1, & B(y) = x, \\ 0, & B(y) \neq x. \end{cases}$$

Тогда $\Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] \geq \frac{1}{2} + \epsilon_n$, а $\Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Пусть существует противник A, который для бесконечного числа n различает $\beta_n\gamma_n$ и $r_n\gamma_n$ с хорошей вероятностью, т.е.

$$\Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] \geq \epsilon_n,$$

где ϵ_n — обратный полином. Построим противника B, который предсказывает β_n по γ_n.

$$B(x) = \begin{cases} r, & A(0x) = 0,\ A(1x) = 0, \\ 1, & A(0x) = 0,\ A(1x) = 1, \\ 0, & A(0x) = 1,\ A(1x) = 0, \\ r, & A(0x) = 1,\ A(1x) = 1, \end{cases}$$

где r означает случайный бит.

Покажем, что

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] = \frac{1}{2} + \Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] \geq \frac{1}{2} + \epsilon_n.$$

Давайте докажем это равенство для фиксированного $\gamma_n = x$:

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n \mid \gamma_n = x] = \frac{1}{2} + \Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1 \mid \gamma_n = x] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1 \mid \gamma_n = x].$$

Отсюда по формуле полной вероятности получается требуемое равенство. Для того, чтобы убедиться, что это равенство верно, нужно подставить все четыре возможные варианта из определения B и проверить, что равенство выполняется.

Замечание 3.3. В случае неравномерного противника данная конструкция даёт вероятностную схему, которую, как описано выше можно переделать в детерминированную. В случае равномерного противника нам потребовалось бы также фиксировать внутренние биты вероятностного алгоритма.

$\square$

Определение 3.6. Для односторонней перестановки $f_n : D_n \to D_n$, где $D_n \subset \{0,1\}^{k(n)}$, будем называть *трудным битом* такую полиномиально вычислимую функцию $h_n : D_n \to \{0,1\}$, для которой случайная величина $h_n(U(D_n))$ трудна для $f_n(U(D_n))$.

Утверждение 3.1. *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка с трудным битом $h_n : D_n \to \{0,1\}$. Тогда случайная величина $h_n(x)f_n(x)$ вычислительно неотличима от rx, где $x \leftarrow U(D_n)$, а $r \leftarrow U_1$.*

Доказательство. Заметим, что $f_n(x)$ распределено так же, как x (важно, что f_n — перестановка). Поэтому $rf_n(x)$ распределено так же, как rx. Осталось применить теорему 3.4 для $rf_n(x)$ и $h_n(x)f_n(x)$. □

Это конструкцию можно итерировать. Например, $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ позволяет получить два бита. Заметим, что если случайная величина $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ отличима от $rh_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$, то отличимы $h_n(x)f_n(x)$ и $rf_n(x)$ (первые можно получить из вторых). Продолжая рассуждение получаем, что $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ неотличима от $rr'x$, где $r, r' \leftarrow U_1$.

Теорема 3.5. *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка с трудным битом $h_n : D_n \to \{0,1\}$. Тогда случайная величина*

$$h_n(x)h_n(f_n(x))\dots h_n(f^{(p(n))})f_n^{(p(n)+1)}(x)$$

вычислительно неотличима от случайной величины

$$r_1r_2\dots r_{p(n)}x,$$

где $r_1, \dots, r_{p(n)} \leftarrow U_1$, $x \leftarrow U(D_n)$.

Следствие 3.1. $G_n(x) = h_n(x)h_n(f_n(x))\cdots h_n(f^{(p(n))})f_n^{(p(n)+1)}(x)$ *является надёжным генератором псевдослучайных чисел.*

Доказательство. Доказательство „гибридным“ методом.

$$\begin{array}{llllll}
T_0 = & h_n(x) & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n))}) & f_n^{(p(n)+1)}(x) \\
T_1 = & r_1 & h_n(x) & \dots & h_n(f^{(p(n)-1)}) & f_n^{(p(n))}(x) \\
T_2 = & r_1 & r_2 & \dots & h_n(f^{(p(n)-2)}) & f_n^{(p(n)-1)}(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
T_{p(n)} = & r_1 & r_2 & \dots & r_{p(n)} & x
\end{array}$$

Пусть взломщик B отличает T_0 от $T_{p(n)}$, т.е. $\Pr[B(T_0) = 1] - \Pr[B(T_0) = 1] \geq \epsilon_n$ для бесконечного числа n и обратного полинома ϵ_n. Тогда существует такое i, что

$$\Pr[B(T_i) = 1] - \Pr[B(T_{i+1}) = 1] \geq \epsilon_n/p(n).$$

Т.е. мы научились отличать

$$\begin{array}{llllllll} r_1 & \dots & r_i & h_n(x) & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i)}) & f_n^{(p(n)-i+1)}(x) \\ r_1 & \dots & r_i & r_{i+1} & h_n(x) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i-1)}) & f_n^{(p(n)-i)}(x) \end{array}$$

Можно воспользоваться тем, что x распределён также как $f_n(x)$ и переписать T_{i+1}

$$\begin{array}{llllllll} r_1 & \dots & r_i & h_n(x) & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i)}) & f_n^{(p(n)-i+1)}(x) \\ r_1 & \dots & r_i & r_{i+1} & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i)}) & f_n^{(p(n)-i+1)}(x) \end{array}$$

Используя противника, который отличает эти две случайные величины мы можем отличать $h_n(f)f_n(x)$ от $rf_n(x)$ — по этим случайным величинам можно детерминированным алгоритмом построить T_i и T_{i+1}.

Замечание 3.4. В этом доказательстве мы воспользовались тем, что наш у нас неравномерный противник, т.е. для схема, т.к. мы в эту схему зашили число i. В случае с алгоритмами можно взять случайное i и доказать, что с хорошей вероятностью оно подойдёт.

□

Теорема 3.6 (Голдрейх, Левин). *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка, $D_n \subseteq \{0,1\}^{k(n)}$. Рассмотрим две функции: $g_n : D_n \times \{0,1\}^{k(n)} \to D_n \times \{0,1\}^{k(n)}$ и $h_n : D_n \times \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}$, такие что*

$$g_n(xy) = f_n(x)y, \quad h_n(x,y) = x \odot y = \bigoplus_{i=1}^{k(n)} x_i y_i = \sum_{i=1}^{k(n)} x_i y_i \mod 2.$$

Тогда g_n — односторонняя перестановка с трудным битом h_n.

Определение 3.7. *Код Уолша-Адамара* — это код исправляющий ошибки $WH : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{2^k}$, определяющий следующим соотношением $WH(x) = (x \odot y)_{y \in \{0,1\}^k}$.

Код Уолша-Адамара не очень удобен в практических применениях, т.к. он удлиняет строки в экспоненту раз. Однако он обладает одним очень хорошим свойством.

Утверждение 3.2. *Код Уолша-Адамара имеет расстояние 2^{k-1}.*

Доказательство. Пусть $x_i \neq y_i$. Рассмотрим r и $r^{\oplus i}$, где $r, r^{\oplus i} \in \{0,1\}^k$ и отличаются только в бите i. Тогда либо $x \odot r$ отличается от $x \odot r^{\oplus i}$, либо $y \odot r$ отличается от $y \odot r^{\oplus i}$. Т.е. все $\{0,1\}^k$ можно разбить на пары, различающиеся в одном бите, то все пары строк имеют коды, отличающиеся ровно в половине всех битов. □

Лемма 3.2. *Пусть $s \in \{0,1\}^{2^m}$ и $\Pr_i[s_i \neq WH(x)] \leq 1/2 - \epsilon$ (в терминах расстояния Хеммнига $\Delta(WH(x), s) \leq (1/2 - \epsilon)2^m$). Существует вероятностный алгоритм A^s со временем работы $\mathrm{poly}(m, \frac{1}{\epsilon})$, который выдаёт список L слов длины m такой, что $x \in L$ с вероятностью не менее $1/2$ (алгоритм получает оракульный доступ к строке s).*

Доказательство теоремы Голдрейха-Левина. Функция g_n является перестановкой. Легко показать, что если противник взламывает g_n, то он взламывает и f_n, т.е. g_n является односторонней перестановкой.

Теперь нужно показать, что h_n является трудным битом g_n. Пусть существует неравномерный противник B (в дальнейшем будем предполагать, что противник — это всегда семейство схем), который предсказывает h_n, т.е.

$$\Pr_{x \leftarrow U(D_n), y \leftarrow U_{k(n)}}[B(f(x)y) = x \odot y] \geq 1/2 + \epsilon_n$$

для бесконечного числа n и обратного полинома ϵ_n. Построим противника C, который обращает f_n, т.е.

$$\Pr_{x \leftarrow U(D_n)}[C(f_n(x)) = x] \geq \epsilon_n/4.$$

Противник C будет использовать алгоритм декодирования списком кода Уолша-Адамара из леммы 3.2 и при обращении к биту y выдаём значение $B(f(x)y)$. В списке L, который возвращает алгоритм A ищем z такое, что $f_n(z) = f_n(x)$. Если такое z нашлось, то выдаём его, иначе выдаём любую строку.

Пусть $M \subseteq D_n$ и $x \in M \iff \Pr_{y \leftarrow U_{k(n)}}[B(f_n(x)y) = x \odot y] \geq 1/2 + \epsilon_n/2$. Давайте покажем, что $\Pr_{x \leftarrow U(D_n)}[x \in M] \geq \epsilon_n/2$. Пусть это не так, тогда

$$\begin{aligned}
\Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y] &= \Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y \mid x \in M] \cdot \Pr_x[x \in M] \\
&\quad + \Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y \mid x \notin M] \cdot \Pr_x[x \notin M] \\
&< 1 \cdot \epsilon_n/2 + (1/2 + \epsilon_n/2) \cdot 1 < 1/2 + \epsilon_n.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\Pr_x[C(f_n(x)) = x \mid x \in M] \geq 1/2$, т.к. с вероятность не менее $1/2$ в списке будет искомый элемент. Поэтому получаем

$$\Pr_x[C(f_n(x)) = x] \geq \Pr_x[C(f_n(x)) = x \mid x \in M] \cdot \Pr_x[x \in M] \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_2}{2} = \frac{\epsilon_n}{4}.$$

□

Доказательство леммы 3.2. Будем рассматривать код Уолша-Адамара как таблицу истинности некоторой функции $f : \{0,1\}^m \to 1$. Пусть $WH(x)$ соответствует f, а кодовое слово s — некоторой функции $\tilde{f}$. Таким образом для восстановления x нам нужно вычислить f на входах $100 \cdots 0$, $010 \cdots 0$, $001 \cdots 0$,... Действительно,

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(100 \cdots 0) \\
x_2 &= f(100 \cdots 0) \\
&\vdots \\
x_n &= f(000 \cdots n)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы вычислить $f(z)$ выберем случайный r и вычислим $f(z) = f(r) + f(z+r)$. Проблема в том, что у нас есть доступ только к $\tilde{f}$, т.е. мы можем попробовать вычислять

$f(z) = \tilde{f}(r) + \tilde{f}(z+r)$. Если бы ошибка в $\tilde{f}$ случалась с вероятностью менее $1/4 - \epsilon$, то суммарная ошибка при таком вычислении $f(z)$ была бы не более $1/2 - 2\epsilon$. Тогда мы могли бы её амплифицировать и получить $f(z)$ с хорошей вероятностью. Однако, ошибка в f случается с большей вероятностью.

Если бы у нас был доступ к истинному значению, то тогда бы тоже всё сработало $f(z) = f(r) + \tilde{f}(z+r)$, но доступа к f у нас нет. Давайте попытаемся вычислить верное $f(r)$: выберем случайные $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и вычислим $\mathrm{Maj}_i\{f(r_i) + f(r + r_i)\}$.

Замечание 3.5. Неравенство Чебышёва (закон больших чисел для 2-независимых случайных величин). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — одинаково распределённые попарно-независимые Бернулиевские случайные величины, $\forall i, \Pr[X_i = 1] = p$, тогда

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_i X_i}{N} - p\right| \geq \delta\right] \leq \frac{1}{\delta^2 N}.$$

Давайте выберем $N = 2^k - 1$. Выберем $t_1, t_2, \ldots, t_k \leftarrow U_m$ — независимые случайные строки. Из этих случайных строк можно сгенерировать N попарно независимых следующим образом:

$$\forall J \subseteq \{1, \ldots, k\},\ J \neq \emptyset,\ r_J = \bigoplus_{i \in J} t_i.$$

Утверждение 3.3. *Если $J_1 \neq J_2$, то r_{J_1} и r_{J_2} будут независимыми.*

Следствие 3.2. *$\{r_J\}_J$ — 2-независимые случайные величины.*

Теперь опишем алгоритм декодирования кода Уолша-Адамара. Выберем $N = 2^k - 1$. Сгененируем независимые $t_1, t_2, \ldots, t_k \leftarrow U_m$. Для всех $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$ добавим в список строку $x_1, \ldots, x_m$, где

$$x_i = \mathrm{Maj}_J\Big\{\bigoplus_{j \in J} a_j + \tilde{f}(0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0 + r^J)\Big\},$$

где $r_J = \bigoplus_{i \in J} t_i$. Для успеха x_i должен быть верен с вероятностью не менее $1 - \frac{1}{10m}$. Определим случайные величины $\{X_J\}$ такие, что

$$X_J = 1 \iff \tilde{f}(0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0 + r^J) = f(0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0 + r^J).$$

По закону больших чисел вероятность того, что при вычислении Maj мы получим более половины неправильных значений $\tilde{f}$ не более $\frac{1}{\epsilon^2 N}$. Т.е. требуется, что $\frac{1}{\epsilon^2 N} \leq \frac{1}{10m}$.

$$\Pr[x_i \text{ вычислен не верно}] = \Pr\Big[\frac{1}{N}\sum X_J \leq \frac{1}{2}\Big] \leq \frac{1}{\epsilon^2 N}.$$

Таким образом $N > \frac{10m}{\epsilon^2}$. □

4. Протоколы с секретным ключом

Определение 4.1. Пусть дана доступная случайная величина d_n. Пусть даны два вероятностных полиномиальных по времени алгоритма $E(d_n, x)$ и $D(d_n, m)$ такие, что $D(d_n, E(d_n, x)) = x$, будем называть *одноразовым протоколом с секретным ключом.* Будем говорить, что этот протокол *надёжный*, если для любого полинома k, последовательности x_n слов длины $k(n)$ и последовательности y_n длины $k(n)$ случайные величины $E(d_n, x_n)$ и $E(d_n, y_n)$ вычислительно неотличимы.

Такой протокол мы уже можем построить. Возьмём генератор псевдослучайных чисел $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{k(n)}$. Возьмём $d_n = U_n$ и для $x \in \{0,1\}^{k(n)}$ определим

$$E(d_n, x) = G(d_n) \oplus x,$$
$$D(d_n, m) = G(d_n) \oplus m.$$

Если бы противник научился бы отличать случайные величины $E(d_n, x_n)$ и $E(d_n, y_n)$, то он также научился бы отличать одну из этих случайных величин от равномерного распределения $U_{k(n)}$. Пусть он умеет отличать $E(d_n, x_n)$ от $U_{k(n)}$. Тогда мы можем зашить x_n в схему и таким образом научиться отличать образ $G(d_n)$ от $U_{k(n)}$.

Определение 4.2. Пусть $S_n \subseteq \{0,1\}^{l(n)}$ и для любого $s \in S_n$ определена функция $f_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$. Множество функций $\{f_s\}_{s \in S_n}$ называется *семейством псевдослучайных функций*, если выполняются следующие свойства.

1. Существует полиномиальный по времени алгоритм, который по (s, x) вычисляет $f_s(x)$.

2. Распределение $U(S_n)$ доступно.

3. (*слабая надёжность*) Для любого полинома p и для любого набора различных $t_1, \ldots, t_{p(n)} \in \{0,1\}^n$ случайная величина $f_s(t_1) f_s(t_2) \cdots f_s(t_{p(n)})$ вычислительно неотличима от $U_{np(n)}$, где $s \leftarrow U(S_n)$.

3$'$. (*сильная надёжность*) Для любого полинома p, любого семейства схем полиномиального размера $\{C_i\}_{i=1}^{p(n)-1}$ и любого $t_1 \in \{0,1\}^n$ определим случайные величины $\{y_i\}_{i=1}^{p(n)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
s &\leftarrow U(S_n),\\
y_1 &= f_s(t_1),\\
t_2 &= C_1(t_1, y_1),\\
y_2 &= f_s(t_2),\\
t_3 &= C_1(t_1, y_1, y_2),\\
y_3 &= f_s(t_3),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

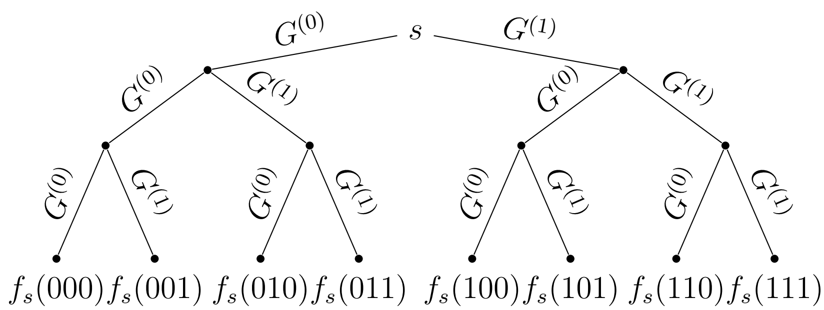
Тогда случайная величина $y_1 y_2 \cdots y_{p(n)}$ вычислительно неотличима от $U_{np(n)}$ (при условии, что все t_i различны).

Теорема 4.1. *Если существует генератор псевдослучайных чисел, то существует и семейство псевдослучайных функций.*

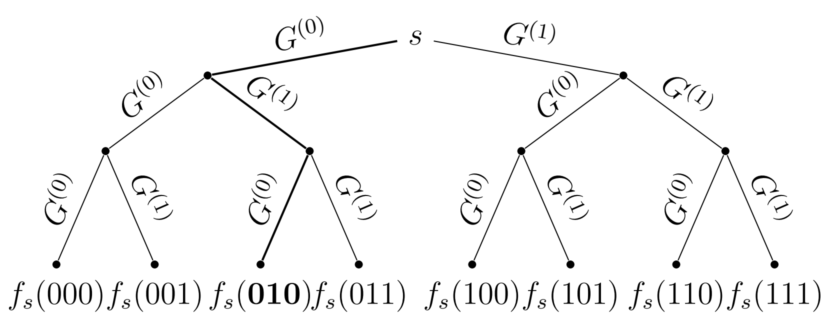
Доказательство. Пусть $G_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{2n}$. Для $S_n = \{0,1\}^n$ определим $\{f_s\}_{s \in S_n}$ следующим образом. Определим функции $G_n^{(0)}, G_n^{(1)} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ исходя из следующего соотношения: $G_n(r) = G_n^{(0)}(r)\, G_n^{(1)}(r)$. Теперь определим

$$f_s(x) = G_n^{(x_n)}(\cdots G_n^{(x_2)}(G_n^{(x_1)}(s))\cdots).$$

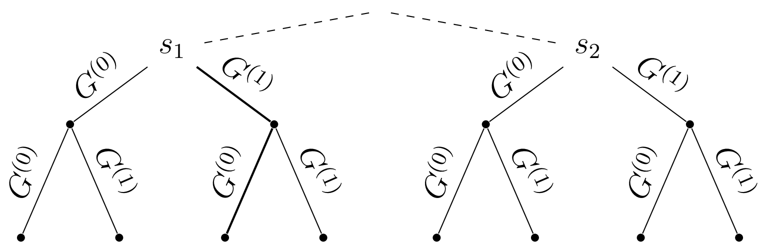
Можно представить вычисление f_s на всевозможных x в виде бинарного дерева: в корне записано число s, если в вершине записано число z, то в его наследниках будут записаны $G^{(0)}(z)$ и $G^{(1)}(z)$, в листьях дерева окажутся все возможные $f_s(x)$.



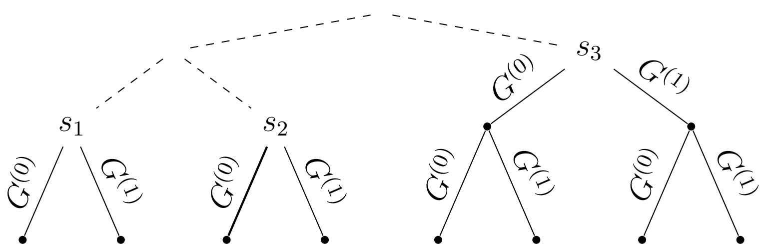
Будем доказывать гибридным методом. Для этого нам нужно построить последовательность распределений, которые постепенно сходятся к равномерному. Изначальное распределение задаёт дерево T, в корне которого выбирается s, а дальше вычисление происходит детерминировано. Каждое t_i задаёт некоторый путь от корня к листьям. Мы будем модифицировать исходное дерево следующим образом: для каждой вершины на пути соответствующему t_1 мы будем удалять эту вершину из дерева и заменять её сыновей на случайные строки из $U(S_n)$.



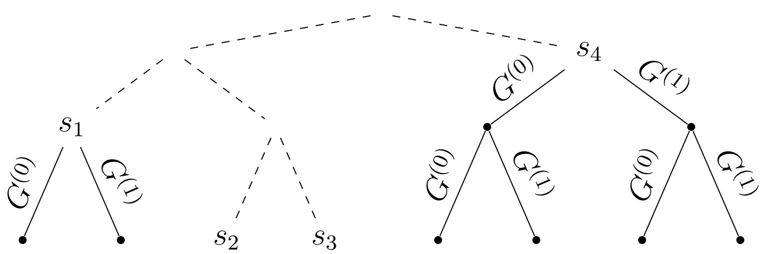
Для примера $t_1 = 010$.



Удаляем корневую вершину и заменяем её сыновей на $s_1, s_2 \leftarrow U(S_n)$



Удаляем следующую вершину и заменяем сыновей на случайные элементы из $U(S_n)$.



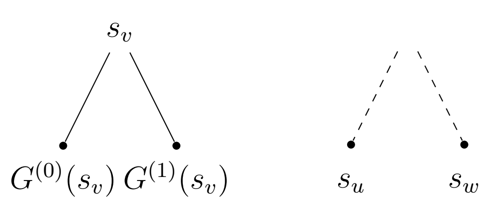
Удаляем последнюю вершину и заменяем сыновей на случайные элементы из $U(S_n)$.

В конце этого процесса в вершине, которая раньше соответствовала t_1 будет некоторый $s_j \leftarrow U(S_n)$. Мы повторяем этот процесс для всех t_i. Таким образом получается последовательность $n \cdot p(n)$ деревьев, которые задают распределения $\{T_i\}_{i=1}^{np(n)}$. В последнем распределении $T_{np(n)}$ значение для каждого $f_n(t_i)$ выбирается из $U(S_n)$.

Если есть противник, который отличает первое распределение от последнего, т.е. конкретные два последовательных распределения, которые этот противник различает с вероятностью.

$$\Pr_{z \leftarrow T_1}[B(z)=1] - \Pr_{z \leftarrow T_{np(n)}}[B(z)=1] \geq \epsilon_n \implies \exists i : \Pr_{z \leftarrow T_i}[B(z)=1] - \Pr_{z \leftarrow T_{i+1}}[B(z)=1] \geq \frac{\epsilon_n}{np(n)}.$$

Дерево распределения T_{i+1} отличается от T_i в трёх вершинах:



T_i T_{i+1}

Таким образом противник может отличить образ генератора $G(s_v) = G^{(0)}(s_v)G^{(1)}(s_v)$ от полностью случайной строки $s_u s_w$ с вероятностью больше $\epsilon_n/(n \cdot p(n))$. □

Замечание 4.1. Это было доказательство надёжности в смысле п.3. То же самое доказательство работает и для п.3′.

Определение 4.3. Пусть d_n — доступная случайная величина $d_n \in \{0,1\}^{k(n)}$. *Многоразовый протокол с секретным ключом* — это пара полиномиальный по времени вероятностных алгоритмов $E(d_n, x)$ и $D(d_n, m)$ таких, что $D(d_n, E(d_n, x)) = x$ и выполняются следующее условие надёжности.

a) (*слабая надёжность*) Для любых полиномов p и q и для любых $x_1, \ldots, x_{p(n)} \in \{0,1\}^{q(n)}$ случайные величины $E(d_n, x_1) \cdots E(d_n, x_{p(n)})$ и $E(d_n, 0^{q(n)}) \cdots E(d_n, 0^{q(n)})$ вычислительно неотличимы.

b) (*сильная надёжность*) Для любых полиномов p и q, любого $x_1 \in \{0,1\}^{q(n)}$ и семейства схем $\{C_i\}_{i=1}^{p(n)-1}$ полиномиального размера определим $\{x_i\}_{i=2}^{p(n)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_2 &= C_1(x_1, E(d_n, x_1)), \\ x_3 &= C_2(x_1, E(d_n, x_1), E(d_n, x_2)), \\ x_4 &= C_3(x_1, E(d_n, x_1), E(d_n, x_2), E(d_n, x_3)), \\ &\vdots \\ x_{p(n)} &= C_{p(n)-1}(x_1, E(d_n, x_1), \ldots, E(d_n, x_{p(n)-1})). \end{aligned}$$

Случайные величины $E(d_n, x_1) \cdots E(d_n, x_{p(n)})$ и $E(d_n, 0^{q(n)}) \cdots E(d_n, 0^{q(n)})$ должны быть вычислительно неотличимы.

Теорема 4.2. *Если существует семейство псевдослучайных функций, то существует многоразовый протокол с секретным ключом.*

Доказательство. Докажем для сообщения из одного бита. Из этого будет следовать, что есть протокол для сообщения любой длины. Пусть $f_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — семейство псевдослучайных функций, $s \in \{0,1\}^n$. Определим случайную величину d_n следующим образом: $d_n = (s_n, z_n)$, где $s_n, z_n \leftarrow U_n$. Алгоритм шифрования $E(d_n, m)$ для ключа s_n и бита $m \in \{0,1\}$ выбирает $z \leftarrow U_n$ и выдаёт $(m \oplus f_{s_n}(z), z)$. Алгоритм дешифровки $D(s_n, y)$, где $y \in \{0,1\}^{n+1}$, $y = bz$, выдаёт $b \oplus f_{s_n}(z)$. Корректность протокола очевидна. Нужно доказать многоразовую надёжность.

Разобраться с обозначениями для d_n.

Пусть есть сообщения $m_1, \ldots, m_{p(n)}$. Их коды соответственно

$$f_{s_n}(z_1) \oplus m_1, \ldots f_{s_n}(z_{p(n)}) \oplus m_{p(n)}$$

. Нужно показать, что такая случайная величина вычислительно неотличима от строки из $U_{(n+1)\cdot p(n)}$. Если это так, то мы могли бы отличить псевдослучайные функции от равномерного распределения. □

Замечание 4.2. У этой схемы есть существенный недостаток: длина шифра в $n+1$ раз длиннее самого сообщения.

4.1. Эффективная схема шифрования с закрытым ключом

Пусть $m \in \{0,1\}^{k(n)}$. Нам потребуется семейство псевдослучайных функций $f_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$. Тогда алгоритма шифрования может работать так: выберем случайное $z \leftarrow U_n$. Пусть $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{k(n)}$ — ГПСЧ. Определим шифрование так $E(s_n, m) = (G(f_{s_n}(z)) \oplus m, z)$.

Утверждение 4.1. *Описанная схема шифрования надёжна.*

Схема доказательства. Доказываем гибридным методом в два этапа. Сначала заменяем функции f_s на случайные строки длины n (за один шаг), а потом заменяем применения генераторов на случайные строки длины $k(n)$ (за $p(n)$ шагов). □

5. Протоколы с открытым ключом

Определение 5.1. Пусть (d_n, e_n) — доступные случайные величины. Пара вероятностных полиномиальных алгоритмов (E, D) называется *системой шифрования с отрытым ключом*, если Алгоритмы шифрования и дешифрования $E(e_n, m)$ и $D(e_n, d_n, c)$ связанны следующим соотношением (корректность): $E(e_n, d_n, E(e_n, m)) = m$. Надёжность протокола определяется следующим образом: для любого полинома p и любой последовательности сообщений $x_n, y_n \in \{0,1\}^{p(n)}$ случайные величины $e_n E(e_n, x_n)$ и $e_n E(e_{n,n})$ вычислительно неотличимы.

Замечание 5.1. В такой системе шифрования значение e_n сообщается всем (*публичный ключ*), а d_n — никому (*секретный ключ*).

Определение 5.2 (trapdoor permutation)**.** Пусть задан полиномиальный вероятностный алгоритм K, который получив на вход 1^n генерирует пару слов $\langle e, d\rangle$ или выдаёт $\perp$ (символ неудачи), причём последнее происходит с пренебрежимо малой вероятностью. Слова e, d будут называться *открытым и закрытым ключами*. Будем через A_n обозначать первые компоненты всех возможных пар $\langle e, d\rangle$, генерируемых алгоритмом K на входе 1^n. Пусть для каждого $e \in A_n$ задана перестановка f_n^e некоторого множества слов D_n^e длины $\mathrm{poly}(n)$. Последовательность пар $\langle\langle e_n, d_n\rangle, \{f_n^e\}\rangle$ будем называть *односторонней перестановкой с секретом*, если выполнены следующие условия.

1. (Полиномиальная вычислимость.) Функция $\langle 1^n, e, x\rangle \to f_n^e(x)$ вычислима за полиномиальное от n время.

2. (Необратимость.) Для любой последовательности схем C_n полиномиального размера вероятность того, что C_n по $\langle e, f_n^e(x)\rangle$ найдёт x, стремится к нулю быстрее любого обратного полинома от n (e выбирается случайно из A_n, x выбирается независимо от e).

3. (Доступность равномерного распределения на области определения). Существует вероятностный полиномиальный алгоритм B, который по 1^n и любому $e \in A_n$ генерирует случайную величину, статистически неотличимую от равномерного распределения случайной величина в D_n^e при известном e_n. (Т.е. пара, состоящая из e и выхода алгоритма B статистически неотличима от пары, состоящей из e и случайной строки D_n^e.)

   Из этого условия следует доступность случайной величины

$$\langle e_n, \text{случайный элемент } D_n^e \rangle.$$

4. (Возможность обращения при известном закрытом ключе.) Существует полиномиальный вероятностный алгоритм, который по тройке $\langle 1^n, d, f_n^e(x) \rangle$ с вероятностью приблизительно равной 1 вычисляет x. Здесь пара $\langle e, d \rangle$ выбирается генератором случайный величины $\langle e_n, d_n \rangle$, а x выбирается равномерно в D_n^e.

Замечание 5.2. Предположение о существовании односторонних перестановок с секретом сильнее, чем существование односторонних функций. Если функция Рабина или RSA является односторонней, то существуют односторонние перестановки с секретом.

Список литературы

[1] Н.К. Верещагин. *Курс лекций “Теоретико-сложностные проблемы криптографии”*, МГУ, http://lpcs.math.msu.su/~ver/teaching/cryptography/index.html.

[2] Д.М. Ицыксон. *Курс “Теоретико-сложностные основы криптографии”*, CS центр, https://compsciclub.ru/courses/cryptography-foundations/2016-spring/.

[3] O. Goldreich. *Foundations of cryptography.*

[4] J. Håstad, R. Impagliazzo, L.A. Levin, M. Luby. *A Pseudorandom Generator from any One-way Function*. SIAM J. Comput. 28, 4 (March 1999), 1364-1396. DOI: https://doi.org/10.1137/S0097539793244708

[5] J. Katz, Y. Lindell. *Introduction to Modern Cryptography.*

Todo list