SUR LA JACOBIENNE INTERMÉDIAIRE DE L'HYPERSURFACE CUBIQUE DANS $\mathbb{P}^4$

AJAY SRINIVASAN

Table des matières

1. Introduction

Dans cette note, nous nous intéressons d'un résultat vital dans la géométrie birationnelle des 3-variétés. Rappelons qu'une *application rationnelle* f d'une variété X à une variété Y (où X et Y sont des variétés irreductibles sur un corps algébriquement clos, comme $\mathbb{C}$) est simplement un morphisme d'un ouvert (non-vide, et ouvert dans le sens de Zariski) $U \subset X$ à Y (dénoté par $f : X \dashrightarrow Y$). Localement, une application rationnelle est donné par une famille des fonctions rationnelles. Nous disons qu'une application rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ est *birationnelle* s'il a un inverse rationnel (c'est-à-dire une application rationnelle $Y \dashrightarrow X$ qui est l'inverse de f dans le sens usuel), et s'il existe une application birationnelle de X à Y, nous disons que X et Y sont *equivalent birationnellement*. Finalement, on dit qu'une variété X est *rationnelle* s'il est equivalent birationnellement à $\mathbb{P}^n$ pour quelque n. Un example qui est particulièrement éclairant est celle d'une hypersurface quadrique (de n'importe quelle dimension). Une hypersurface quadrique est toujours rationnelle, grâce à la projection stéréographique.

Notre objectif en particulier, est d'étudier la rationalité de l'hypersurface cubique (lisse) dans $\mathbb{P}^4$. Particulièrement, on va développer la notion de la Jacobienne intermediaire d'une 3-variété V – et grâce à ses propriétés, développer une invariant birationnelle au fur et à mesure de notre discussion de la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit V une 3-variété cubique (lisse). V n'est pas rationnelle.*

L'utilisation de la Jacobienne intermédiaire dans les études de la géométrie birationnelle des 3-variétés est un peu comme l'utilisation de la variété Jacobienne dans les études de la géométrie birationnelle des courbes algebriques (introduit en

Date: 12 septembre 2024.

2). Cette note[1] est fortement inspiré d'une conférence de Claire Voisin au Collége de France en 2019 (regardez à partir de 1 : 06 : 12 en [Voi19]). On fait également référence à [CG72] et [Voi02] pour plusieurs éléments de cette exposition.

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Joseph Helfer, de m'avoir permis de participer à son cours "Topics in Algebraic Geometry," et pour bien plus encore. Nos discussions, dépassant parfois plusieurs heures, ont servi de base à cet article et à la conférence que j'ai donnée ensuite en classe. Je remercie également les doctorants du département, particulièrement mes camarades de classe Baran Cetin et Yash Somaiya, pour les discussions algébro-géométriques tout au long de semestre.

2. La Jacobienne Intermédiaire d'une 3-Variété

Soit X une variété projective et lisse à 3 dimensions sur $\mathbb{C}$ telle que $H^{3,0}(X) \cong 0$ et $H^1_B(X, \mathbb{Z}) \cong 0$ (ici $H^1_B(C, \mathbb{Z})$ signifie la première cohomologie Betti integrale). Particulièrement, une 3-variété cubique (lisse) et $\mathbb{P}^3$ sont des exemples de ce type de variétés. Regarde la sous-section 17.3 en [Ara12] pour des détails sur le structure de Hodge d'une hypersurface projective. Que $H^{3,0}(X) \cong 0$ pour une 3-variété cubique découle alternativement d'un calcul rapide avec la formule d'adjonction. C'est parce que la formule d'adjonction nous dit que la fibré en droit canonique d'une 3-variété cubique n'admet pas les sections. Néanmoins, connaître toute la decomposition de Hodge nous servira bientôt. De plus, par le théorème de l'hyperplan de Lefschetz (voir p.156 en [GH94]), on a que $H^1_B(X, \mathbb{Z}) \cong 0$. Pour $\mathbb{P}^3$, tous les hypothèses ci-dessus sont trivialement satisfaits (car la première et la troisième cohomologie de $\mathbb{P}^3$ sont triviales). Donc désormais, on utilise le mot *3-variété* pour signifier une 3-variété qui satisfait les hypothéses ci-dessus. Pour un tel X, remarquez que la decomposition de Hodge de la troisiéme cohomologie est donné par $H^3(X, \mathbb{C}) \cong H^{1,2}(X) \oplus H^{2,1}(X)$, où $H^{1,2}(X) = \overline{H^{2,1}(X)}$. Puisque $H^3(X, \mathbb{R}) \cong H^{1,2}(X)$ comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $H^3(X, \mathbb{Z}) \subset H^3(X, \mathbb{R})$ peut être considéré comme un réseau dans $H^{1,2}(X)$. Donc on peut definir la *Jacobienne intermediaire* $J(X)$ de X comme étant le tore complexe obtenu par la quotient de $H^{1,2}(X)$ par ce reseau – c'est-à-dire que $J(X) := H^{1,2}(X)/(H^3(X, \mathbb{Z})$ (modulo torsion)).

De plus, $J(X)$ est une variété abelienne car elle admet une forme d'intersection (plus particulièrement, ce qu'on appelle une *forme Riemann*) $\langle , \rangle \in \Lambda^2 H_1(J(X), \mathbb{Z})^\vee$ qui satisfait les conditions de Riemann (voir [GH94] pp. 200-207 pour un résumé de ces conditions). Remarquez d'abord que puisque $J(X)$ était définie par la quotient d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (donc cet espace est isomorphe à $\mathbb{C}^g$ pour quelque g) par le réseau $H^3(X, \mathbb{Z})$, on a le fait $H_1(J(X), \mathbb{Z}) \cong H^3(X, \mathbb{Z})$. Donc pour trouver une forme d'intersection sur le réseau $H_1(J(X), \mathbb{Z})$ il suffit d'en trouver une sur $H^3(X, \mathbb{Z})$. Mais il existe une forme d'intersection (non-dégénéré) si naturelle (par la dualité de Poincaré) sur $H^3(X, \mathbb{Z})$ donné par $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{X_{\mathrm{an}}} \alpha \smile \beta$ (où X_{an} est l'analytification de X). Dans cette façon, on obtient une *polarisation*[2] sur le

1. Qui est une traduction de l'une de mes projets en Anglais

2. Remarquez qu'en [GH94] une polarisation est definie comme une classe dans $H^2(J(X), \mathbb{Z})$ qui satisfait les conditions de Riemann. C'est effectivement la même chose qu'on a fait ici, parce que $H^2(J(X), \mathbb{Z}) \cong \Lambda^2 H_1(J(X), \mathbb{Z})$ par le cup-produit.

tore complexe $J(X)$, ce qui en fait une variété abelienne. Cette forme bilinéaire sur $H_1(J(X),\mathbb{Z})$ est *unimodulaire* aussi (c'est-à-dire considéré comme une matrice entière, son déterminant est ± 1, ou de manière equivalent, elle est inversible) par la dualité Poincaré, ce qui fait de $J(X)$ une *variété abelienne principalement polarisée* (parfois appelé une *vapp*). C'est-à-dire, une variété abelienne principalement polarisée est une paire (A,θ) (où A est une variété abelienne avec polarisation $\theta \in \mathrm{Pic}(A)$) telle que la forme d'intersection bilinéaire $\langle,\rangle_\theta$ definie par θ est unimodulaire. Remarquez que cette notation quelque peu nouvelle est justifiable par l'argument suivante. Avant, on a défini une polarisation sur $J(X)$ comme étant (dans une manière équivalent) une forme bilinéaire dans $\Lambda^2 H_1(J(X),\mathbb{Z})^\vee$ ou une classe dans $H^2(J(X),\mathbb{Z})$. La première classe de Chern nous donne un isomorphisme $H^2(J(X),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Pic}^0(J(X))$. Donc une variété abelienne (principalement) polarisée est vraiment une paire (A,θ) avec A un tore complexe, et $\theta \in \mathrm{Pic}^0(A)$ une polarisation (principale) sur A.

Comme promis en 1, la Jacobienne intermédiaire est une généralisation de la variété Jacobienne d'une courbe algébrique que l'on définit ainsi. Soit C une courbe algébrique (lisse) de genre g. Chaque élément $[\gamma] \in H_1(C,\mathbb{Z})$ définit une application sur l'espace des sections globales de 1-formes holomorphes sur C par intégration $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$, et de cette façon $H_1(C,\mathbb{Z})$ peut être considéré comme un réseau dans $H^{0,1}(C) \cong H^0(C,\Omega^1_C)^\vee$. On peut alors définir la variété Jacobienne de C comme étant le tore complexe définie comme $J(C) := H^{0,1}(C)/(H_1(C,\mathbb{Z})\ (\text{modulo torsion}))$ (notez que ce tore est clairement de la forme $\mathbb{C}^g/\Lambda$ vu du diamant de Hodge de C). Comme avant, on obtient une forme d'intersection unimodulaire sur $H_1(C,\mathbb{Z})$ grâce à la dualité de Poincaré. De cette façon, $J(C)$ devient une variété abelienne principalement polarisée[3]. Pour voir le rôle vital joué par la variété Jacobienne dans la géométrie birationnelle des courbes, le lecteur souhaitera (peut-être) se référer au théorème de Torelli qui énonce que la variété Jacobienne (comme une vapp) d'une courbe (algébrique et lisse) caractérise la courbe de manière unique à isomorphisme près (voir [GH94] p.359 pour des détails et une exposition sur son importance).

Malheureusement, la Jacobienne intermédiaire $J(X)$ d'une 3-variété X avec la polarisation principale discutée ci-dessus, n'est pas un invariant birationnel. Cela peut être vu en considérant l'éclatement $\hat{X}_C$ de X le long d'une courbe $C \subset X$. En ce cas, la Jacobienne intermédiaire de $\hat{X}_C$ est donné par la somme directe de la Jacobienne intermédiaire de X et la Jacobienne de C (voir la démonstration du Thm. 2.2 pour une explication obtenue en lisant le diamant de Hodge de l'éclatement). Néanmoins, cet échec nous indique comment construire un invariant birationnelle des 3-variétés considéré dans cette section. Le Thm. 2.2 montre qu'on peut construire un invariant birationnel de 3-variétés par décomposant d'abord la Jacobienne intermédiaire en un produit de variétés abeliennes irréductibles principalement polarisées, et ensuite en supprimant les variétés abeliennes qui sont des Jacobiennes de courbes. Pour suivre cette procédure, on utilise le resultat suivant, un corollaire du théorème de réductibilité complète (pas prouvé ici, mais voir le Cor. 3 du Thm. 34. en [Swi74] pour des détails).

3. En fait, par le théorème de Abel-Jacobi, elle s'identifie à la variété de Picard des diviseurs de degré 0 sur C modulo équivalence linéaire.

Théorème 2.1. *Soit (A, θ) une variété abelienne principalement polarisée. (A, θ) se décompose d'une maniére unique (à l'ordre près) comme :*

$$A = \prod_i A_i$$
$$\theta = \sum_i \mathrm{pr}_i^* \theta_i$$

où chaque (A_i, θ_i) est une variété abelienne irréductible principalement polarisée, et $\mathrm{pr}_i : A \to A_i$ est l'application de projection au i-ème facteur comme d'habitude.

Le Thm. 2.1 nous permet de introduire l'invariant birationnel suivant pour les 3-variétés.

Théorème 2.2. *[l'Invariant de Clemens-Griffith] Soit X une 3-variété, et $J(X)$ sa Jacobienne intermediaire discutée dans cette section. Supposons que $J(X) = \prod_i A_i$ soit la decomposition de $J(X)$ obtenu du Thm. 2.1.*

$$J(X)_{\mathrm{CG}} = \prod_{i \in \mathcal{J}} A_i$$

où $\mathcal{J}$ contient ces indices i telle que le A_i correspondant n'est pas isomorphe à la Jacobienne d'une courbe (algébrique et lisse), est un invariant birationnel.

Démonstration. La démonstration se déroule en deux parties. L'argument première montre que chaque application birationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ est factorisée à travers une suite d'éclatements le long des sous-variétés lisses (un résultat de Hironaka en [Hir64], et peut être de Włodarczyk en [Wło03]). Par conséquent, il suffit que vérifier l'invariance de $J(X)_{\mathrm{CG}}$ sous les éclatements. L'argument deuxième est un calcul explicite de la Jacobienne intermédiaire d'une éclatement le long d'une sous-variété (lisse) $Z \subset X$ comme conséquence du Thm. 7.31 en [Voi02].

L'argument première est un résultat grâce à [Hir64] qui est complètement non-triviale, mais on esquisse ici l'intuition dans le cas des surfaces. Cette argument était présenté dans un ensemble de notes de cours de Ravi Vakil sur les éclatements des surfaces (voir section 3.1 en [Vak02]). Même si ce n'est pas ce dont on a besoin, on espère que cela servira d'exemple sur la façon dont les singularités sont résolus dans la pratique.

En cours (mais peut-être omis).

Par le raisonnement ci-dessus, il suffit que vérifier l'invariance de $J(X)_{\mathrm{CG}}$ sous les éclatements de X le long de sous-variétés lisses. Car $\dim(X) = 3$, on a deux possibilités pour les éclatements – on peut considérer l'éclatement de X en un point $p \in X$ ou le long d'une courbe $C \subset X$. Mais notez que l'éclatement de X en un point $p \in X$ ne changera pas la troisième cohomologie de X (voir le Thm. 7.31 en [Voi02] pour le structure de Hodge d'une éclatement), donc elle ne changera pas la Jacobienne intermédiaire de X (et bien sûr $J(X)_{\mathrm{CG}}$ ne changera pas aussi). Supposons que $\hat{X}_C$ soit l'éclatement de X le long d'une courbe $C \subset X$. Par le Thm. 7.31 en [Voi02], $H^3(\hat{X}_C, \mathbb{C}) \cong H^3(X, \mathbb{C}) \oplus H^1(C, \mathbb{C})$. En particulier, l'isomorphisme des structures de Hodge du Thm. 7.31 en [Voi02] induit egalement un isomorphisme des tores complexes comme $J(\hat{X}_C) \cong J(X) \cong J(C)$. Cette décomposition passe également à la forme d'intersection de $J(\hat{X}_C)$ comme $\langle,\rangle_{\hat{X}_C} = \langle,\rangle_X - \langle,\rangle_C$. Donc $J(\hat{X}_C) \cong J(X) \oplus J(C)$ comme des variétés abeliennes principalement polarisées. C'est claire maintenant que $J(\hat{X}_C)_{\mathrm{CG}} \cong J(X)_{\mathrm{CG}}$. ■

3. Le Théorème d'Irrationalité

Un corollaire immédiat du Thm. 2.2 est le suivant.

Théorème 3.1. *Soit X une 3-variété rationnelle. La Jacobienne intermédiaire se décompose comme un produit de Jacobiennes de courbes irreductibles. C'est-à-dire que $J(X) \cong \prod_i J(C_i)$ où chaque C_i est une courbe (algébrique et lisse).*

Démonstration. Soit X une 3-variété rationnelle. Il existe une application birationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$. Par le Thm. 2.2, $J(X)_{\mathrm{CG}} \cong J(\mathbb{P}^3)_{\mathrm{CG}}$. Mais rappelons que la troisième cohomologie de $\mathbb{P}^3$ est triviale, donc $J(\mathbb{P}^3) = 0$. C'est claire que $J(X)_{\mathrm{CG}} = 0$ aussi. Par la définition, on obtient que $J(X) \cong \prod_i J(C_i)$ où chaque C_i est une courbe (algébrique et lisse). ■

Maintenant, on arrive à notre objectif final, l'irrationalité de la 3-variété cubique.

Théorème 3.2. *Soit V est une 3-variété cubique. La Jacobienne intermédiaire de V est irréductible, mais elle n'est pas isomorphe à la Jacobienne d'une courbe. Donc V n'est pas rationnelle.*

Demonstration (un très bref aperçu). Pour la plupart, on renvoie le lecteur à [CG72] pour la démonstration. Ici, on souligne plusieurs points clés dans une démonstration peut-être plus simple presentée pour la premiére fois par Beauville en [Bea82] (qui à son tour attribue le point clé à Mumford) qui vise à prouver un désaccord entre les dimensions des lieux singuliers des θ-diviseurs [4] de $J(V)$ et de la Jacobienne d'une courbe (en particulier, on obtient irréductibilité en cours de route).

Soit Θ un θ-diviseur de $J(V)$. La punchline en [Bea82] est que Θ a exactement une singularité (avec multiplicité 3). Dont on conclut que Θ est irréductible (et ainsi) [5] $J(V)$ est irreductible. Si Θ_{sing} désigne le lieu singulier de Θ, on conclut que $\dim(\Theta_{\mathrm{sing}}) = 0$. Pour une courbe (algébrique et lisse) de genre g avec le θ-diviseur de sa Jacobienne Ξ, on a le fait que $\dim(\Xi_{\mathrm{sing}}) = g - 4$ (voir le Cor. 4.5 et le Lem. 3.3 en [ACGH13] pour la description de la théorie de Brill-Noether du lieu singulier d'un diviseur). Si $J(V) \cong J(C)$ pour une courbe C, il faut avoir que $g \leq 4$. Mais $\dim(J(C)) = g$ et $\dim(J(V)) = 5$ (grâce au diamant de Hodge des hypersurfaces presenté en [Ara12] sous-section 17.3), donc si $J(V) \cong J(C)$, il faut avoir que $g = 5$. Il s'ensuit que $J(V) \ncong J(C)$ pour n'importe quelle courbe C. L'irrationalité de V découle du Thm. 3.1. ■

Références

[ACGH13] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths et J.D. Harris. *Geometry of Algebraic Curves : Volume I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer New York, 2013. isbn : 9781475753233. url : https://books.google.com/books?id=LanxBwAAQBAJ.

4. Pour une vapp (A, θ), on dit qu'un diviseur qui correspond à $\theta \in \mathrm{Pic}^0(A)$ est un θ-diviseur de A.

5. Une vérification de routine, comme en [CG72] Lem. 3.20, montre que (A, θ) est irréductible si et seulement si θ est irreductible comme un diviseur.

[Ara12] D. Arapura. *Algebraic Geometry over the Complex Numbers*. Universitext. Springer New York, 2012. isbn : 9781461418092. url : https://books.google.com/books?id=FQslb7pH8EgC.

[Bea82] Arnaud Beauville. "Les singularites du diviseur Θ de la jacobienne intermediaire de l'hypersurface cubique dans IP4". In : *Algebraic Threefolds*. Sous la dir. d'Alberto Conte. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1982, p. 190-208. isbn : 978-3-540-39342-9.

[CG72] C. Herbert Clemens et Phillip A. Griffiths. "The Intermediate Jacobian of the Cubic Threefold". In : *Annals of Mathematics* 95.2 (1972), p. 281-356. issn : 0003486X. url : http://www.jstor.org/stable/1970801.

[GH94] Phillip Griffiths et Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, Ltd, 1994. isbn : 9781118032527. doi : https://doi.org/10.1002/9781118032527.ch2. url : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118032527.

[Hir64] Heisuke Hironaka. "Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero : I". In : *Annals of Mathematics* 79.1 (1964), p. 109-203. issn : 0003486X. url : http://www.jstor.org/stable/1970486.

[Swi74] H.P.F. Swinnerton-Dyer. *Analytic Theory of Abelian Varieties*. Lecture note series. Cambridge University Press, 1974. isbn : 9780521205269. url : https://books.google.com/books?id=SZm7SdqVyWEC.

[Vak02] Ravi Vakil. *Complex Algebraic Surfaces Class 7*. Oct. 2002. url : https://math.stanford.edu/~vakil/02-245/sclass7B.pdf.

[Voi02] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Sous la dir. de Translator Leila Schneps. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002. url : https://doi.org/10.1017/CBO9780511615344.

[Voi19] Claire Voisin. *Dimension 3 : les invariants de Clemens-Griffiths et Artin-Mumford*. 2019. url : https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/invariants-birationnels/dimension-3-les-invariants-de-clemens-griffiths-et-artin-mumford.

[Wło03] Jarosław Włodarczyk. "Toroidal varieties and the weak factorization theorem". In : *Inventiones mathematicae* 154.2 (2003), p. 223-331. issn : 1432-1297. doi : https://doi.org/10.1007/s00222-003-0305-8. url : https://link.springer.com/article/10.1007/s00222-003-0305-8.

Department of Mathematics, University of Southern California, Los Angeles, CA 90007
Email address: avsriniv@usc.edu