SUR UN PRINCIPE DE RECONNAISSANCE MOTIVIQUE

AJAY SRINIVASAN

Table des matières

Introduction

Nous appliquons le cadre nouvellement développé dans [KMZ24] à la théorie homotopique motivique pour écrire un analogue $\mathbb{A}^1$ homotopique de la monadicité de Beck comme presenté dans [May09]. A ce niveau, il n'y a aucune mentione de complétions groupées, ni de monades externes. Il est cependant fructueux de dire quelque chose sur les algèbres sur une monade externe de l'adjonction (car il arrive souvent qu'une telle monade possède des informations de calcul invisibles à la monade d'adjonction). Nous identifions une telle monade, celle qui naît de l'opérade de Barratt-Eccles, et nous écrivons un principe de reconnaissance correspondant pour ses algèbres. Des travaux récents dans [EHK+21] prouvent un analogue du principe de reconnaissance Ségalique pour les espaces de lacets infinis motiviques. Ce que nous recherchons ici est un analogue d'un principe de reconnaissance opéradique dans la théorie homotopique motivique. L'histoire se déroule naturellement en deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude de l'adjonction de lacet et suspension entre les espaces et les spectres, et la monade qui naît de cette adjonction.

Date: 15 septembre 2024.

Le point de départ pour la théorie homotopique des schémas est la définition de la catégorie de modèles fermée d'éspaces algébriques de Morel et Voevodsky (nous désignerons cette catégorie par $\mathscr{T}$, et appellerons ses objets *espaces*). Les propriétés clés de leur construction sont rappelées dans Section 1. Quant aux spectres, on peut choisir d'utiliser la catégorie des $\mathbb{T}$-spectres de Voevodsky (crée par analogie avec Ω-spectres séquentiels dans topologie) qui est monoïdal symétrique sous le smash-produit. Cependant, un résultat de G. Lewis dans [Lew91], rend ce choix incompatible avec l'adjonction de lacet et suspension telle que le spectre de sphère est une unité pour le smash-produit. Le choix que nous faisons est celui de la catégorie de spectres sans cordonnées définie par P. Hu dans [Hu03] (nous désignerons cette catégorie par $\mathscr{S}$, et appellerons ses objets *spectres*). C'est la notion analogue des spectres sans coordonnées topologiques dans [EKMM97] et [LMSM86]. Le point essentiel des spectres sans cordonnées de P. Hu est qu'ils sont indexées sur des sous-espaces cofinis d'un univers $\mathcal{U} \cong \mathbb{A}^\infty$ (par opposition aux espaces de dimension finie, comme dans les spectres de EKMM et LMS). L'adjonction de lacet et suspension qui est naturellement intégrée dans le contexte de [Hu03], et qui est en complète analogie avec l'histoire topologique, sera notre point de départ dans ce programme. Nous désignerons cette adjonction par $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$, où $\Sigma^\infty \colon \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{S}$ est donné par le spectre de suspension, et $\Omega^\infty \colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}$ est donné par l'espace zéro. Les objets dans l'image de Ω^∞ sont appelés *espaces de lacets infinis*. Section 2 offres une presentation de spectres sans coordonnées de P. Hu, et la définition de l'adjonction de $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$. Dans Section 3 nous présentons les propriétés des objets simpliciaux dans $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$. Ces propriétés sont essentielles pour les resultats de cet article, et leur verification est nécessaire pour utiliser le cadre de [KMZ24]. Soit $\Gamma = \Sigma^\infty\Omega^\infty$ dénotant la monade d'adjonction dans notre contexte. Γ agit naturellement sur l'image de Ω^∞ dans $\mathscr{T}$. Soit $\Gamma[\mathscr{T}]$ dénotant la catégorie des Γ-algèbres dans $\mathscr{T}$. Il existe une variante plus structurée de l'adjonction qui intègre la Γ-action dans $\Gamma[\mathscr{T}]$. Plus précisément, le foncteur d'espace zéro $\Omega^\infty_\Gamma \colon \mathscr{S} \longrightarrow \Gamma[\mathscr{T}]$ comme avant est un adjoint à droit, avec un adjoint à gauche $\Sigma^\infty_\Gamma \colon \Gamma[\mathscr{T}] \longrightarrow \mathscr{S}$ (nous pensons de Σ^∞ comme une version coégalisée de Σ^∞ par rapport à la Γ-action). Le but de la première partie de l'article est de pouvoir collecter suffisamment de préliminaires homotopiques pour utiliser le cadre de [KMZ24] et obtenir les résultats suivants [1].

Théorème 0.1. *Il existe un foncteur* $\mathrm{Bar} \colon \Gamma[\mathscr{T}] \longrightarrow \Gamma[\mathscr{T}]$, *écrit* $Y \mapsto \overline{Y}$, *et une équivalence homotopique naturelle* $\zeta \colon \overline{Y} \longrightarrow Y$ *telle que l'unité* $\eta_\Gamma \colon \overline{Y} \longrightarrow \Omega^\infty_\Gamma \Sigma^\infty_\Gamma \overline{Y}$ *est une équivalence faible.*

Théorème 0.2. *La paire* $(\Sigma^\infty_\Gamma, \Omega^\infty_\Gamma)$ *induit une équivalence adjointe entre la catégorie homotopique des* Γ*-algèbres dans* $\mathscr{T}$ *et la catégorie homotopique des spectres connectifs dans* $\mathscr{S}$.

Ceci est fait dans la Section 4. Le manque de nécessité pour les objets comme-groupes et complétions groupées dans ces résultats est curieux, et il nous dit que la catégorie des Γ-algèbres et celle des spectres connectifs ne sont pas homotopiquement distincts. Ceci est la version homotopique de la monadicité de Beck dans notre contexte. Nous somme maintenant intéressés par les monades extérieures à cette adjonction pour lesquelles la monadicité de Beck échoue. Ceux-ci s'avèrent

1. Le terme *connectif* dans Thm. 0.2 est souvent remplacé par *très efficace* dans la littérature, mais nous utilisons connectif ici pour souligner le sens axiomatisé.

être des exemples intéressants dans la nature, car ils fournissent des informations sur la *structure* des espaces de lacets infinis invisibles à Γ.

La deuxième partie est consacrée de l'étude des complétions groupées dans le contexte motivique, et algèbres sur l'opérade de Barratt-Eccles. L'opérade de Barratt-Eccles a été définie dans la suite d'articles suivant [BE74a] pour l'étude des espaces de lacets infinis dans topologie. Leur approche, assez simplicielle, s'applique à notre contexte aussi. Dit simplement, l'opérade de Barratt-Eccles est definie par $\mathscr{P}(j) = N\mathscr{E}\Sigma_j$ (où $\mathscr{E}$ désigne le foncteur de catégorie indiscrète, et N désigne le nerf d'une catégorie). Désignerons par $\mathbb{P}$, la monade associée à $\mathscr{P}(*)$. Les propriétés clés de l'opérade de Barratt-Eccles sont résumés rapidement dans Section 5. Le cadre de [KMZ24] et nos travaux dans Partie 1 exigeraient que $\mathbb{P}$ agisse sur l'image de Ω^∞. Ce n'est pas tout à fait vrai.

Remerciements

Première partie 1. La monade d'adjonction et monadicité homotopique

1. Préliminaires

2. Spectres sans cordonnées et le $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$ adjonction

3. Objets simpliciaux

4. Le théorème de monadicité homotopique motivique

Deuxième partie 2. Complétions groupées et l'opérade de Barratt-Eccles

5. L'opérade de Barratt-Eccles

6. Une adjonction complétée

7. Objets comme-groupes et complétions groupées

8. Le théorème d'approximation

9. Un principe de reconnaissance motivique

Références

[AE17] Benjamin Antieau et Elden Elmanto. “A primer for unstable motivic homotopy theory”. In : *Surveys on recent developments in algebraic geometry*. T. 95. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, p. 305-370. isbn : 978-1-4704-3557-8. doi : 10.1090/pspum/095/01637. url : https://doi.org/10.1090/pspum/095/01637.

[And78] D. W. Anderson. “Fibrations and geometric realizations”. In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 84.5 (1978), p. 765-788. issn : 0002-9904. doi : 10.1090/S0002-9904-1978-14512-1. url : https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1978-14512-1.

[BE74a] M. G. Barratt et Peter J. Eccles. “Γ^+-structures. I. A free group functor for stable homotopy theory”. In : *Topology* 13 (1974), p. 25-45. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/0040-9383(74)90036-6. url : https://doi.org/10.1016/0040-9383(74)90036-6.

[BE74b] M. G. Barratt et Peter J. Eccles. “Γ^+-structures. II. A recognition principle for infinite loop spaces”. In : *Topology* 13 (1974), p. 113-126. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/0040-9383(74)90002-0. url : https://doi.org/10.1016/0040-9383(74)90002-0.

[BF78] A. K. Bousfield et E. M. Friedlander. “Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets”. In : *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*. T. 658. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1978, p. 80-130. isbn : 3-540-08859-8.

[BK72] A.K. Bousfield et D.M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972. isbn : 9783540061052.

[BM11] Clemens Berger et Ieke Moerdijk. “On an extension of the notion of Reedy category”. In : *Math. Z.* 269.3-4 (2011), p. 977-1004. issn : 0025-5874,1432-1823. doi : 10.1007/s00209-010-0770-x. url : https://doi.org/10.1007/s00209-010-0770-x.

[Bro06] Ronald Brown. *Topology and groupoids*. Third. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006, p. xxvi+512. isbn : 1-4196-2722-8.

[EHK+21] Elden Elmanto, Marc Hoyois, Adeel A. Khan, Vladimir Sosnilo et Maria Yakerson. “Motivic infinite loop spaces”. In : *Camb. J. Math.* 9.2 (2021), p. 431-549. issn : 2168-0930,2168-0949. doi : 10.4310/CJM.2021.v9.n2.a3. url : https://doi.org/10.4310/CJM.2021.v9.n2.a3.

[EKMM97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell et J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*. T. 47. Mathematical Surveys and Monographs. With an appendix by M. Cole. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, p. xii+249. isbn : 0-8218-0638-6. doi : 10.1090/surv/047. url : https://doi.org/10.1090/surv/047.

[FN62] Edward Fadell et Lee Neuwirth. “Configuration spaces”. In : *Math. Scand.* 10 (1962), p. 111-118. issn : 0025-5521,1903-1807. doi : 10.7146/math.scand.a-10517. url : https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10517.

[GRSØ12] Javier J. Gutiérrez, Oliver Röndigs, Markus Spitzweck et Paul Arne Østvær. “Motivic slices and coloured operads”. In : *J. Topol.* 5.3 (2012), p. 727-755. issn : 1753-8416,1753-8424. doi : 10.1112/jtopol/jts015. url : https://doi.org/10.1112/jtopol/jts015.

[Hu03] Po Hu. “S-modules in the category of schemes”. In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 161.767 (2003), p. viii+125. issn : 0065-9266,1947-6221. doi : 10.1090/memo/0767. url : https://doi.org/10.1090/memo/0767.

[Jar87] J. F. Jardine. “Simplicial presheaves”. In : *J. Pure Appl. Algebra* 47.1 (1987), p. 35-87. issn : 0022-4049,1873-1376. doi : 10.1016/0022-4049(87)90100-9. url : https://doi.org/10.1016/0022-4049(87)90100-9.

[KMZ24] Hana Jia Kong, J. Peter May et Foling Zou. *Group completions and the homotopical monadicity theorem*. 2024. arXiv : 2402.03649.

[Lew91] L. Gaunce Lewis Jr. “Is there a convenient category of spectra ?” In : *J. Pure Appl. Algebra* 73.3 (1991), p. 233-246. issn : 0022-4049,1873-1376. doi : 10.1016/0022-4049(91)90030-6. url : https://doi.org/10.1016/0022-4049(91)90030-6.

[LMSM86] L. G. Lewis Jr., J. P. May, M. Steinberger et J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*. T. 1213. Lecture Notes in Mathematics. With contributions by J. E. McClure. Springer-Verlag, Berlin, 1986, p. x+538. isbn : 3-540-16820-6. doi : 10.1007/BFb0075778. url : https://doi.org/10.1007/BFb0075778.

[May09] J. P. May. “What precisely are E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra ?” In : *New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008)*. T. 16. Geom. Topol. Monogr. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009, p. 215-282. doi : 10.2140/gtm.2009.16.215. url : https://doi.org/10.2140/gtm.2009.16.215.

[May67] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. T. No. 11. Van Nostrand Mathematical Studies. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967, p. vi+161.

[May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. T. Vol. 271. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, p. viii+175.

[May74] J. P. May. “E_∞ spaces, group completions, and permutative categories”. In : *New developments in topology (Proc. Sympos. Algebraic Topology, Oxford, 1972)*. T. No. 11. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, London-New York, 1974, p. 61-93.

[May77] J. Peter May. E_∞ *ring spaces and* E_∞ *ring spectra*. T. Vol. 577. Lecture Notes in Mathematics. With contributions by Frank Quinn, Nigel Ray, and Jørgen Tornehave. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, p. 268.

[MMO22] J. Peter May, Mona Merling et Angélica M. Osorno. *Equivariant infinite loop space theory, the space level story*. 2022. arXiv : 1704.03413.

[Mor05] Fabien Morel. "The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems". In : *K-Theory* 35.1-2 (2005), p. 1-68. issn : 0920-3036,1573-0514. doi : 10.1007/s10977-005-1562-7. url : https://doi.org/10.1007/s10977-005-1562-7.

[Mor12] Fabien Morel. $\mathbb{A}^1$*-algebraic topology over a field*. T. 2052. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012, p. x+259. isbn : 978-3-642-29513-3. doi : 10.1007/978-3-642-29514-0. url : https://doi.org/10.1007/978-3-642-29514-0.

[Mor99] Fabien Morel. "Théorie homotopique des schémas". In : *Astérisque* 256 (1999), p. vi+119. issn : 0303-1179,2492-5926.

[MT78] J. P. May et R. Thomason. "The uniqueness of infinite loop space machines". In : *Topology* 17.3 (1978), p. 205-224. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/0040-9383(78)90026-5. url : https://doi.org/10.1016/0040-9383(78)90026-5.

[MV99] Fabien Morel et Vladimir Voevodsky. "$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes". In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 90 (1999), p. 45-143. issn : 0073-8301,1618-1913. url : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__90__45_0.

[Ree73] C. L. Reedy. *Homotopy Theory of Model Categories*. Preprint. 1973. url : https://math.mit.edu/~psh/reedy.pdf.

[SGA4V2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*. T. Vol. 270. Lecture Notes in Mathematics. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, p. iv+418.

[Shi22] Yuri Shimizu. "Relative $\mathbb{A}^1$-homology and its applications". In : *Homology Homotopy Appl.* 24.1 (2022), p. 129-141. issn : 1532-0073,1532-0081. doi : 10.4310/hha.2022.v24.n1.a7. url : https://doi.org/10.4310/hha.2022.v24.n1.a7.

[SØ12a] Markus Spitzweck et Paul Arne Østvær. "Motivic twisted K-theory". In : *Algebr. Geom. Topol.* 12.1 (2012), p. 565-599. issn : 1472-2747,1472-2739. doi : 10.2140/agt.2012.12.565. url : https://doi.org/10.2140/agt.2012.12.565.

[SØ12b] Markus Spitzweck et Paul Arne Østvær. "Motivic twisted K-theory". In : *Algebr. Geom. Topol.* 12.1 (2012), p. 565-599. issn : 1472-2747,1472-2739. doi : 10.2140/agt.2012.12.565. url : https://doi.org/10.2140/agt.2012.12.565.

[Ste79] Richard Steiner. "A canonical operad pair". In : *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 86.3 (1979), p. 443-449. issn : 0305-0041,1469-8064. doi : 10.1017/S0305004100056292. url : https://doi.org/10.1017/S0305004100056292.

[Voe96] Vladimir Voevodsky. *The Milnor Conjecture*. Preprint. 1996. url : http://k-theory.org/0170/.

[VRØ07] Vladimir Voevodsky, Oliver Röndigs et Paul Arne Østvær. "Voevodsky's Nordfjordeid lectures : motivic homotopy theory". In : *Motivic homotopy theory*. Universitext. Springer, Berlin, 2007, p. 147-221. isbn : 978-3-540-45895-1 ; 3-540-45895-6. doi : 10.1007/978-3-540-45897-5_7. url : https://doi.org/10.1007/978-3-540-45897-5_7.

Department of Mathematics, University of Southern California, Los Angeles, CA 90007
Email address: avsriniv@usc.edu