## Модель

Модель основывается на равновесных зависимостях предельной производительности, выведенных из производственной функции ПЭЗ. Напомним сначала, что для двухфакторной модели производства предельный продукт труда $\partial X/\partial N$ равняется $w/p$, где $w$ — ставка заработной платы, а $p$ — цена продукта. Отсюда

$$\frac{\partial X}{\partial N}=\frac{w}{p}, \tag{12.1}$$

или

$$\frac{N}{X}\frac{\partial X}{\partial N}=\frac{wN}{pX}, \tag{12.2}$$

где $wN/pX$ — доля труда в стоимости продукта. Из разложения Эйлера имеем:

$$1-\frac{\partial X}{\partial N}\frac{N}{X}=\frac{\partial X}{\partial C}\frac{C}{X}.$$

Таким образом, получим

$$\frac{\partial X}{\partial C}\frac{C}{X}=\frac{qC}{pX}, \tag{12.3}$$

где $q$ есть процент на единицу капитала.

Разделив (12.3) на (12.2), имеем

$$\frac{\partial X/\partial C}{\partial X/\partial N}\frac{C}{N}=\frac{qC}{wN}. \tag{12.4}$$

Если посчитать частные производные в терминах производственной функции ПЭЗ, (12.4) примет вид

$$\frac{qC}{wN}=\frac{k}{1-k}\left(\frac{N}{C}\right)^{(1/\sigma)-1}, \tag{12.5}$$

где $k/(1-k)(N/C)^{1/\sigma}$ представляет собой знакомую предельную норму замены капитала трудом в функции ПЭЗ. Позже будет удобнее работать с (12.5) в следующем виде:

$$S=\frac{wN}{\pi}=\left(\frac{1-k}{k}\right)^{\sigma}\left(\frac{q}{w}\right)^{\sigma-1}, \tag{12.6}$$

где $\pi$ — доля капитала ($qC$).

## Факторы, воздействующие на относительные доли дохода

С помощью (12.6) можно исследовать неоклассические положения об относительных долях дохода. Если технология не изменяется, то из (12.6) следует, что относительный рост (падение) ставки заработной платы или относительный рост (падение) предложения капитала, увеличивает (сокращает) долю дохода труда, если $\sigma$ меньше единицы. Таков второй вывод Хикса, о котором упоминалось во введении в данной главе. Иными словами, доля дохода более быстро растущего фактора производства имеет тенденцию к приросту, если эластичность замены превышает единицу; величина эластичности меньше единицы ведет в этих условиях к сокращению доли дохода более быстро растущего фактора.



Влияние ненейтрального технического прогресса на относительные доли дохода может быть также определено из (12.6). Однако чтобы его специфицировать, нужно обратиться к результатам, приведенным в гл. 4. Там было доказано, что возрастание является капиталорасходующим и означает увеличение доли капитала. В терминах (12.6) прирост $(1-k)/k$, несомненно, указывает на то, что при этом увеличивается доля труда. Относительно изменения эластичности замены было отмечено, что увеличение $\sigma$ является трудосберегающим, если капитал растет быстрее, чем труд, т. е. если $q/w<1$, когда все переменные даны в виде индексов. Следовательно, возрастание $\sigma$ сокращает долю труда, если $q/w<1$, и увеличивает ее, если $q/w>1$.

Помимо ненейтрального технического прогресса и динамики относительного предложения факторов, на относительные доли дохода оказывают воздействие степень эксплуатации одного фактора другим, о чем говорилось выше, и (на трехфакторном рынке) эластичности предложения различных факторов. Т. е. когда анализ охватывает более, чем два фактора производства, влияние на относительную долю дохода одного фактора зависит не только от частичных эластичностей замены, но и от эластичностей предложения других факторов. Дело в том, что рост цены одного фактора может изменить пропорции, в которых используются другие факторы; когда эти пропорции меняются, оказывается затронутой взаимозаменимость по отношению к первому фактору и, таким образом, относительная доля этого фактора в доходе [151]. Если несмотря на это другие факторы продолжают использоваться в той же пропорции, то относительная доля первого фактора не зависит от эластичностей их предложения. Но это — сильное допущение, и мы благоразумно избегаем его, оставаясь в пределах схемы добавленной стоимости, в которой действуют только два фактора производства — труд и капитал.

Теперь мы имеем возможность подготовить модель для оценивания. Нет, однако, необходимости проделывать дополнительную работу, потому что можно использовать для оценивания производную зависимость ПЭЗ, разработанную в предыдущей главе; здесь мы повторим ее еще раз:

$$\log u=a+\sigma\log\rho+\lambda\log u_{-1}. \tag{12.7}$$

Оценки $a$, $\sigma$ и $\lambda$ дают нам все необходимое для определения влияния, оказываемого изменениями в предложении факторов на их относительные доли в доходе.

7 Зак. 271

Уравнение (12.7) предполагает отсутствие ненейтрального технического прогресса, что приводит к задаче выделения технологических периодов в том смысле, как мы их определяем. Применяя анализ устойчивости, можно выделить эти периоды и получить по периодам оценки $k$, $\sigma$ и $\lambda$. И наконец, мы можем вычислить влияние, которое оказывает на относительные доли в доходе изменяющаяся технология и изменяющееся предложение факторов методом конечно-разностной аппроксимации уравнения (12.7) между любыми моментами времени, которые нас интересуют.

## Предварительные результаты

Модель была проверена на данных по частному внутреннему несельскохозяйственному сектору Соединенных Штатов за период 1890—1958 гг.; эти же данные использованы в гл. 11 для сопоставления с моделью технологической занятости. Производная зависимость ПЭЗ оценивается по трем технологическим периодам, и результаты приводятся в табл. 11.1. Они составляют основу наших вычислений в данной главе. Напомним, что мы обнаружили, что параметр капиталоемкости падал от первого ко второму технологическому периоду, но затем возрастал от второго к третьему технологическому периоду, хотя и продемонстрировал долговременную тенденцию к падению между первым и третьим периодами. Кроме того, временная траектория как кратковременной, так и долговременной эластичностей замены подобна траектории переменной капиталоемкости: от высокого уровня на первом технологическом периоде они упали до низкого во втором и затем снова возросли в третьем, не достигнув, однако, того уровня, что был в первом периоде.

Качественное влияние этих изменений технологии на относительные доли в доходе может быть определено следующим образом. Как отмечалось выше, уменьшение трудоемкости ведет к сокращению $S$ — отношения доли труда к доле капитала. Но в условиях, когда предложение капитала увеличивается быстрее, чем предложение труда, уменьшение $\sigma$ ведет к росту $S$, частично компенсируя, таким образом, трудосберегающий эффект ненейтрального технического прогресса. Другой силой, которая компенсирует $S$ при падении трудоемкости технологии, является понижение процента на капитал в сравнении со ставкой заработной платы, потому что $\sigma$ меньше единицы во всех технологических периодах.

Ненейтральный технический прогресс и относительное предложение ресурсов — две силы, оказывающие воздействие на относительные доли в доходе, продемонстрировали серьезные колебания за изучавшийся период времени. Несмотря на это, относительные доли в доходе сами по себе обнаружили гораздо большую устойчивость, чем каждая из сил, воздействовавших на них. Следовательно, мы можем сделать предварительный вывод, что имело место противоположное движение этих сил, которое генерировало устойчивую, или «линейную», временную траекторию относительных долей в доходе.



Утверждение, что труд действовал рационально, пытаясь увеличить $\varpi$ путем сокращения $N$, справедливо только в условиях $\sigma < 1$. Но именно это имело место в рассматриваемый сверхдолговременный период. Кроме того, технический прогресс, сделавший замену труда капиталом более затруднительной и сопровождавшийся относительным дефицитом труда, дал возможность $q/\varpi$ упасть ниже, чем упало $N/C$, улучшив, таким образом, долю труда. В этом случае для труда предпочтительнее сокращение $\sigma$ — заключение, которое не является интуитивно очевидным. Сектор капитала, с другой стороны, будет, несомненно, стремиться к введению капиталорасходующей технологии, но для него будет также выгодно и возрастание $\sigma$. В этом случае все три силы, воздействующие на $\Delta S$, будут отрицательными, если капитал будет продолжать расти быстрее, чем труд. Однако трудно представить себе технологию, которая использует относительно больше капитала и в то же время облегчает замену труда капиталом.

Теперь мы перейдем к количественному измерению сил, действующих на относительные доли в доходе.

## Удельный вес различных сил, действующих на относительные доли в доходе, в различные технологические периоды

В табл. 12.1 приводятся фактические значения $\log S$ и $S$ и сравниваются с расчетными значениями этих же величин, вычисленными на основе оценок параметров (11.7), которые даны в табл. 1 гл. 11. Очевидно, что для каждого технологического периода наши расчетные значения близко совпали с фактическими значениями относительных долей в доходе, причем наибольшая ошибка (10%) получилась в первом технологическом периоде. В первом и третьем технологических периодах мы завысили, а во втором — занизили относительные доли в доходе (напомним, что доля труда находится в числителе). Хотя и нечестно взваливать вину на статистические данные, было бы, вероятно, получено более близкое соответствие, если бы данные о ценах были

Таблица 12.1

**Фактические и расчетные средние значения log S и S для последних пяти лет каждого из трех технологических периодов**

| Технологические периоды | Фактические | | Расчетные | | Ошибка |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\log S$ $\left(S=\frac{\varpi N}{q C}\right)$ | $S$[1] | $\log S$ | $S$[1] | в $S$ (%) |
| 1890—1918 | —0,412 | 0,39 | —0,365 | 0,43 | +10 |
| 1919—1937 | —0,299 | 0,50 | —0,324 | 0,47 | —6 |
| 1939—1958 | —0,201 | 0,63 | —0,184 | 0,66 | +5 |

[1] Фактически $S$ больше единицы. Однако при вычислении данные о ценах были использованы в виде индексов, а $N$ и $C$ — нет. 1929 г. был взят за базисный для индексов, так что в действительности каждый из приведенных выше коэффициентов $S$ был умножен на $q/\varpi$ для 1929 г.

более достоверными и если бы мы сосредоточили внимание на отдельных секторах (укрупненных отраслях — *пер.*) экономики.

Влияние какой из сил, воздействовавших на изменение относительных долей в доходе, было наибольшим в расчете на единицу измерения? Табл. 12.2 показывает влияние, которое оказывали на $\log S$ единичные изменения в $\sigma$, $\log[(1-k)/k]$ и $\log\ q/w$ по технологическим периодам. Столбец 2 показывает влияние единичного изменения $\sigma$; столбец 3 — влияние единичного изменения $\log[\overline{(1-k)/k}]$[1]; и столбец 4 влияние единичного изменения $\log q/w$. При изменениях от одного технологического периода к другому $\sigma$ оказывает наибольшее влияние в расчете на единицу изменения, $\log q/w$ стоит на втором месте и $\log[\overline{(1-k)/k}]$ — на последнем. Очевидно, что максимальное воздействие на изменение относительных долей между периодами может быть достигнуто путем изменения эластичности замены, а наименьшее воздействие — путем изменения параметра трудоемкости.

Таблица 12.2

**Частные производные $\log S$, полученные из изменений кривизны изоквант между технологическими периодами.**

| Интервалы | $\dfrac{\partial \log S}{\partial \sigma}$ | $\dfrac{\partial \log S}{\partial \log\left(\frac{1-k}{k}\right)}$ | $\dfrac{\partial \log S}{\partial \log (q/w)}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Технологические периоды 1—2 . . . . | —4,0871 | +0,2116 | —0,7884 |
| Технологические периоды 2—3 . . . . | —5,3084 | +0,0946 | —0,8054 |

## Фактические источники изменения относительных долей дохода

Нам хотелось бы выяснить, как различные силы, которые мы рассматриваем, фактически повлияли на относительные доли в доходе в период 1890—1958 гг. Иными словами, установлено, что колебания $\sigma$, $\log[\overline{(1-k)/k}]$ и $\log\ q/w$ оказывают воздействие на относительные доли в доходе, и мы хотим дать количественное определение каждого из них в отдельности. Эта проблема измерения может быть решена методом конечных разностей (приложение В).

Данные, приведенные в табл. 12.3, получены путем применения метода конечных разностей к уравнению относительных долей в доходе для технологических периодов. Появилась возможность объяснить, какое влияние эти силы оказывают на $\log S$. Сложив столбцы 2 и 3, можно выяснить, как ненейтральный технический прогресс влияет на $\Delta\log S$. Между первым и вторым технологическими периодами ненейтральный технический прогресс является чисто трудосберегающим, потому что $\Delta\log S$ имело тенденцию к снижению под влиянием суммарного воздействия $\Delta\sigma$ и $\log[\overline{(1-k)/k}]$. Обратное явление наблюдалось между вторым и третьим технологическими периодами, когда влияние $\Delta\sigma + \Delta\log[\overline{(1-k)/k}]$ было положительным, указывая, таким образом, на *трудорасходующий* технический прогресс[1].

[1] $\overline{(1-k)}/k$ является долговременной оценкой $(1-k)/k$.



Таблица 12.3

**Источники долговременных изменений $\log S$ между технологическими периодами**

| Интервал | $\Delta\ \sigma$ | $\Delta \log \overline{[(1-k)/k]}$ | $\Delta \log (q/w)$ | Расчетные $\Delta \log S$ | Фактические $\Delta \log S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Технологические периоды 1—2 . . . . | +0,399 | —0,413 | +0,055 | +0,041 | +0,113 |
| Технологические периоды 2—3 . . . . | —0,106 | +0,202 | +0,044 | +0,140 | +0,098 |

Интересно, что влияние изменяющегося относительного предложения капитала и труда, воплощенное в $\log q/w$, оказывало сравнительно меньший эффект на $\log S$, чем ненейтральный технический прогресс между первым и вторым технологическими периодами, и сравнительно больший эффект между вторым и третьим технологическими периодами. Это, однако, всего-навсего предположение, потому что мы не приняли в расчет ошибку выборки. Все же, вообще говоря, можно утверждать, что основные данные, полученные в этом исследовании (табл. 12.3), таковы, что влияние технического прогресса на относительные доли в доходе является величиной того же порядка, что и влияние изменений относительных цен факторов[2]. Если этот результат будет подтвержден дополнительными доказательствами, то следует при любом объяснении относительных долей в доходе придавать техническому прогрессу большее значение и пытаться также определить относительный вклад сил, связанных с техническим прогрессом.

[1] Мы получили этот неожиданный результат в ходе другого исследования, где наши данные доведены до 1960 г., см. [152]. Он совместим с результатами, полученными приблизительно для того же периода в гл. 10.

[2] Вывод был бы, вероятно, более интересен, если бы было устранено смещение вниз оценки влияния технического прогресса, возникшее при оценивании производной зависимости ПЭЗ.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

### Вывод производственных функций Леонтьева, Кобба-Дугласа и ПЭЗ

Ниже излагается вывод производственной функции ПЭЗ, производственной функции Кобба-Дугласа и функции Леонтьева. Все три функции предполагают постоянную эластичность замены между капиталом и трудом. Их вывод исходит непосредственно из определения эластичности замены.

В производственной функции, которая выражает выпуск $Z$ как функцию затрат $x$ и $y$ двух факторов производства, эластичность замены определяется как отношение процентного изменения соотношения затрат к процентному изменению предельной нормы замены при условии, что затраты изменяются таким образом, что выпуск остается постоянным [153]. Эластичность замены является, таким образом, свойством изоквант производственной поверхности. Чтобы представить себе это, запишем производственную функцию в общем виде:

$$Z = Z(x, y). \tag{A.1}$$

Можно принять $Z$ постоянным при некотором значении $Z^+$ решить (А.1) так, чтобы выразить $y$ явным образом как функцию $x$, исключив $Z^+$, поскольку последняя остается постоянной:

$$y = y(x). \tag{A.2}$$

Предельная норма замены есть тангенс угла наклона касательной к (А.2) с обратным знаком.

$$\frac{\partial Z/\partial x}{\partial Z/\partial y} = -\frac{dy}{dx} = -y', \tag{A.3}$$

а $\sigma$ — эластичность замены, записывается в виде

$$\sigma = \frac{d(y/x)/(y/x)}{dy'(x)/y'(x)} = \frac{-y'(x)\,d(y/x)}{(y/x)[-dy'(x)]} = y'\frac{x}{y}\frac{d(y/x)}{dy'}. \tag{A.4}$$



Теперь имеем:

$$\frac{d(y/x)}{dy'} = \frac{x\,(dy/dy') - y\,(dx/dy')}{x^2} = \frac{1}{y''}\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right), \tag{A.5}$$

поскольку

$$\frac{dy}{dy'} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy'} = y'\frac{1}{y''},$$

$$\frac{dx}{dy'} = \frac{1}{y''},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'\frac{dy'}{dy}. \tag{A.6}$$

После подстановки (А.5) в (А.4) и перегруппировки членов получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\sigma xyy'' = xy'^2 - yy'. \tag{A.7}$$

Решение (А.7), содержащее $\sigma$ в явном виде в качестве параметра и две произвольные постоянные, будет представлять собой уравнение изокванты, т. е. явную форму (А.2). Решив уравнение (А.7), можно построить производственные функции с произвольными (но постоянными) эластичностями замены и степенями однородности.

Рассмотрим решение (А.7) несколько подробнее, потому что нас интересуют три случая: $\sigma$ равна нулю, единице и бесконечности, и случаи, отличные от этих особых. В случае нулевой эластичности замены уравнение решается легко. В этом случае левая часть (А.7) становится тождественной нулю и мы имеем

либо

$$y' = 0, \tag{A.8}$$

либо

$$xy' - y = 0. \tag{A.9}$$

Решение (А.8): $y = c$ (А.10)

и решение (А.9): $y = cx$, (А.11)

поскольку

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

или

$$\log y + \log a = \log x + \log b,$$

откуда получаем (А.11).

Мы можем исключить решение (А.11) как не имеющее экономического смысла. Это говорит о том, что по мере того, как растут затраты одного фактора, затраты другого фактора тоже должны расти, чтобы сохранить выпуск постоянным. Это предполагает производственную функцию нулевого порядка однородности. Уравнение (А.10), которое представляет собой изокванту типа Леонтьева, означает, что при заданном выпуске затраты $y$ определяются однозначно. Факторы производства соединяются в фиксированных пропорциях и замена одного фактора другим становится невозможной. Изокванта при $\sigma$, равной нулю, может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} y=y_0,\ \ x\geqslant x_0, \\ x=x_0,\ \ y\geqslant y_0, \end{array}\right\}, \tag{A.12}$$

т. е. изокванта представляет собой две исходящие из одной точки полупрямые, расположенные в первом квадрате и параллельные осям координат.

Предположим далее, что $\sigma$ больше нуля, и сделаем в (A.7) следующую замену переменных:

$$x=e^u, \tag{A.13}$$

где

$$du/dx=e^{-u},$$

$$d^2u/dx^2=-e^{-2u}$$

и

$$d^2y/dx^2=y''e^{-2u}-y'e^{-2u}.$$

После исключения $e^{-u}$ имеем

$$\sigma yy''+yy'(1-\sigma)-y'^2=0, \tag{A.14}$$

где производные взяты по $u$. Поскольку (A.14) не содержит $u$ в явном виде, можно понизить порядок уравнения (A.14), сделав замену

$$p=y'. \tag{A.15}$$

Тогда мы имеем после сокращения $p$:

$$\sigma y(dp/dy)+y(1-\sigma)-p=0, \tag{A.16}$$

так как

$$\frac{dy'}{dy}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{du}=\frac{dp}{dy}y'.$$

Применив $y^{-(1+1/\sigma)}$ в качестве интегрирующего множителя, будем иметь решение (A.16)*:

$$p=y+cy^{1/\sigma}. \tag{A.17}$$

* Задача заключается в том, чтобы свести уравнение (A.16) к уравнению в полных дифференциалах. Обозначим через $M$ некоторую функцию, домножение на которую уравнения (A.16) приводит к уравнению в полных дифференциалах. Предположим, что $M$ зависит только от $y$. Из условия, необходимого и достаточного для того, чтобы некоторое уравнение являлось уравнением в полных дифференциалах (условия равенства соответствующих частных производных), имеем

$$(M\sigma y)'_y=(M[(1-\sigma)y-p])'_p, \quad \text{откуда} \quad \frac{dM}{M}=-\frac{(1+\sigma)}{\sigma}\frac{dy}{y} \quad \text{и} \quad M=y^{-(1+1/\sigma)}.$$

Далее домножаем уравнение (A.16) на $y^{-(1+1/\sigma)}$ и решаем полученное уравнение в полных дифференциалах. (См., например, А. Ф. Берман т, *Курс математического анализа*, ч. II. М., Физматгиз, 1959, стр. 242—248). — *Прим. ред.*



Вспомнив определение $p$(A.15), мы получим:

$$dy/du=y+cy^{1/\sigma}, \tag{A.18}$$

т. е. уравнение первого порядка. Рассмотрим два случая: $\sigma$ равна единице и $\sigma$ отлична от единицы.

Если $\sigma$ равна единице, то решение (A.18) имеет следующий вид:

$$y=ke^{u(1+c)}, \tag{A.19}$$

поскольку

$$dy/y=(1+c)\,du,$$

или

$$\log y=(1+c)\,u+\text{const}.$$

Принимая во внимание (A.13), имеем

$$y=kx^{1+c}, \tag{A.20}$$

в качестве уравнения изокванты. Чтобы построить производственную функцию, однородную степени $\nu$, мы запишем:

$$Z=Z(x^{1+c}/y)=Z(w). \tag{A.21}$$

Согласно разложению Эйлера, мы имеем:

$$\nu Z=x\frac{\partial Z}{\partial x}+y\frac{\partial Z}{\partial y}=(1+c)\frac{x^c}{y}x\frac{dZ}{dw}-\frac{x^{1+c}}{y^2}\frac{dZ}{dw}=cw\frac{dZ}{dw}. \tag{A.22}$$

Это может быть записано следующим образом:

$$\frac{dZ}{Z}=\frac{\nu}{c}\frac{dw}{w}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Z=k(x^{1+c}/y)^{\nu/c}ky^{-\nu/c}x^{\nu/c+\nu}. \tag{A.23}$$

Уравнение (A.23) представляет собой производственную функцию Кобба-Дугласа

$$Z=ky^{\beta}x^{\gamma} \tag{A.24}$$

в несколько видоизмененной форме, где

$$\left.\begin{array}{l} \nu=\gamma+\beta, \\ c=-\dfrac{\gamma+\beta}{\beta}. \end{array}\right\} \tag{A.25}$$

Следовательно, однородность производственной функции и единичная эластичность замены приводят к выражению производственной функции Кобба-Дугласа в терминах уравнения (А.18).

Если в (А.18) $\sigma$ не равна единице, то мы имеем очень простую форму уравнения Бернулли. Уравнение может быть записано в виде

$$x(dy/dx) = y + cy^{1/\sigma},$$

поскольку

$$\frac{dy}{du} = x\frac{dy}{dx},$$

или

$$\frac{dy}{y(1+cy^{(1/\sigma)-1})} = \frac{dx}{x}.$$

Решение в неявном виде будет таково:

$$y^{1-1/\sigma} - kx^{1-1/\sigma} = \text{const}. \qquad (\text{А.26})^*$$

По мере того как $\sigma$ стремится к бесконечности, изокванта стремится к прямой линии. В этом случае факторы производства являются совершенными заменителями друг друга. Вообще говоря, эта линия должна иметь отрицательный наклон, который означает, что произвольная постоянная $k$ отрицательна.

Для вывода производственной функции, однородной степени $\nu$, мы применим тот же аппарат, который мы использовали в уравнениях (А.22) и (А.23), предположив на этот раз, что

$$Z = Z(y^{1-1/\sigma} - kx^{1-1/\sigma}) = Z(w). \qquad (\text{А.27})$$

В результате получается функция следующего вида:

$$Z = (k_1(y^{-\alpha} - kx^{-\alpha})^{-\nu/\alpha}, \qquad (\text{А.28})$$

где

$$\alpha = (1/\sigma) - 1. \qquad (\text{А.29})$$

Эта функция отличается от формы ПЭЗ, использованной в тексте, только записью. Если (А.26) есть решение (А.18), то решением (А.18) будет

$$ky^{1-1/\sigma} - (1-k)x^{1-1/\sigma} = M,$$

где $k$ и $M$ константы. Использовав это выражение вместо (А.26), получаем ту форму функции ПЭЗ, которая встречалась в тексте.

* Это решение получается следующим образом. Введем переменную $Z = y^{1-1/\sigma}$. Тогда наше уравнение примет вид $\frac{d(Z+c)}{(1-1/\sigma)(Z+c)} = \frac{dx}{x}$, откуда и получаем (А.26). — *Прим. ред.*



Приложение Б

## Обобщение Удзава производственной функции ПЭЗ на $n$-факторов

В этом приложении излагаются обобщения производственной функции ПЭЗ на $n$ факторов, разработанные Х. Удзава [154]. За доказательствами мы отсылаем читателя к указанной статье. Пусть, как прежде, $X$ будет валовым выпуском, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — затраты. Первое обобщение имеет вид:

$$X = A(\alpha_1 X_1^{-\beta} + \ldots + \alpha_n X_n^{-\beta})^{-1/\beta}, \qquad (\text{Б.1})$$

где $A$ и $\alpha_i$ — константы, $\sigma = 1/(1+\beta)$, $\sigma$ — эластичность замены. Эта функция является однородной первой степени, отражает убывающую отдачу всех факторов. Предполагается, что $\sigma$ одинакова для любой пары факторов. Это весьма сильное предположение Удзава ослабляет в своем втором обобщении. В качестве примера последнего обобщения рассмотрим производственный процесс с четырьмя факторами производства: степень осуществимости замены (частная эластичность замены) между $x_1$ и $x_2$ равна $\sigma_{12}$; между $x_3$ и $x_4$ равна $\sigma_{34}$; между $x_1$ и $x_3$, между $x_1$ и $x_4$, между $x_2$ и $x_3$, между $x_2$ и $x_4$ частные эластичности замены равны 1, т. е. $\sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 1$. Функция, отражающая эти условия, имеет вид:

$$X = A(\alpha_1 x_1^{-\beta_{12}} + \alpha_2 x_2^{-\beta_{12}})^{-\rho_1/\beta_{12}}(\alpha_3 x_3^{-\beta_{34}} + \alpha_4 x_4^{-\beta_{34}})^{-\rho_2/\beta_{34}}, \qquad (\text{Б.2})$$

где $A$ и $\alpha$ являются, как и прежде, константами

$$\beta_{12} = -\left(1 - \frac{1}{\sigma_{12}}\right), \quad \beta_{34} = -\left(1 - \frac{1}{\sigma_{34}}\right),$$

и $\rho_i$ таковы, что $\rho_1 + \rho_2 = 1$, чем обеспечивается постоянство отдачи на единицу масштаба производства. Смысл этой функции заключается в следующем: $x_1$ и $x_2$ образуют систему, характеризующуюся той же частной эластичностью замены; $x_3$ и $x_4$ образуют другую систему с другой частной эластичностью; на частную эластичность замены между переменными двух разных систем введено ограничение: она равняется единице. Функция имеет следующие экономические свойства: постоянную отдачу на единицу масштаба производства и убывающую отдачу от последовательных затрат всех факторов[1]. Трудность состоит в том, что для этой функции эластичность замены между переменными двух разных систем всегда равна единице. Тем не менее уравнение (Б.2) является наиболее общей производственной функцией с постоянной эластичностью замены из всех когда-либо разработанных.

[1] Можно легко ослабить предположение о постоянной отдаче, допустив, что $\rho_1 + \rho_2 = \rho$, где $\rho$ является произвольным. Это может быть выведено с помощью разложения Эйлера.

Каким образом оцениваются параметры уравнения (Б.2)? Пусть $f_1 = \partial X/\partial x_1$, $f_2 = \partial X/\partial x_2$, ....., и $p_1$ — цена услуг $x_1$, $p_2$ — цена услуг $x_2$ и т. д. Запишем:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{p_1}{p_2};\ \frac{f_1}{f_3}=\frac{p_1}{p_3};\ \frac{f_1}{f_4}=\frac{p_1}{p_4},$$

$$\frac{f_2}{f_3}=\frac{p_2}{p_3},\ \frac{f_2}{f_4}=\frac{p_2}{p_4};$$

$$\frac{f_3}{f_4}=\frac{p_3}{p_4}. \tag{Б.3}$$

Нам неизвестно априори, какие переменные входят в некоторую систему. Поэтому все уравнения (Б.3) должны быть оценены. Запишем одно из них и исследуем его: возьмем

$$\frac{f_2}{f_4}=\frac{p_2}{p_4}$$

или

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right)\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1/\sigma_{24}}=\frac{p_2}{p_4}.$$

Это уравнение можно прологарифмировать и получить оценки параметров. Допустим, что оценка $\sigma_{24} \neq 1$, тогда очевидно, что $x_2$ и $x_4$ принадлежат одной системе. Теперь оценим $f_2/f_3 = p_2/p_3$; если обнаружим, что $\sigma_{23} = \sigma_{24}$, то $x_2$, $x_3$ и $x_4$ принадлежат одной системе и т. д. Этим способом определяются системы и при этом оцениваются параметры капиталоемкости и эластичности замены. Эти оценки могут быть введены в обобщенную функцию

$$X=A\prod_{S=1}^{S}\left[\left(\sum_{i\in S}\alpha_i x_i^{-\beta_s}\right)^{-1/\beta_s}\right]^{\rho_s}, \tag{Б.4}$$

где $S$ есть число систем, и в нашем примере $i = 1, 2, 3, 4$. Затем уравнение (Б.4) может быть прологарифмировано и получены оценки остальных параметров, т. е. $A$ и $\rho_s$.

## Приложение В

### Конечно-разностная аппроксимация полного дифференциала

Целью этого приложения является объяснение численного метода аппроксимации полного дифференциала, который применялся в данной работе. Сначала метод рассматривается подробно с точки зрения трех независимых переменных, и кратко описывается его обобщение на $n$ переменных.

Рассмотрим функцию $Z = F(x_1, x_2, x_3)$, которая оценена на основе данных, относящихся к двум разным совокупностям. Значения $x_1$, $x_2$, $x_3$



были получены либо оценкой, либо из данных наблюдения? Пусть $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ будут либо оценками, либо данными наблюдений, полученными из первой совокупности, и $\hat{x}_1 + h$, $\hat{x}_2 + k$, $\hat{x}_3 + e$ будут соответствующими величинами, полученными из второй совокупности.

Мы можем записать:

$$\hat{\Delta} Z = F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3). \tag{В.1}$$

Нас интересует оценка раздельного влияния на $\hat{\Delta}Z$, которое оказывают

$$\hat{x}_1+h-\hat{x}_1,\ \hat{x}_2+k-\hat{x}_2 \text{ и } \hat{x}_3+e-\hat{x}_3. \tag{В.2}$$

Включим теперь в (В.1) несколько дополнительных членов, которые взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}Z = {} & F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) + F(\hat{x}_1, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - \\ & - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e) + F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3).\end{aligned} \tag{В.3}$$

Это в свою очередь может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}Z = {} & \frac{F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e)}{h}h + \\ & + \frac{F(\hat{x}_1\ \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e)}{k}k + \\ & + \frac{F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{e}e.\end{aligned} \tag{В.4}$$

Поскольку (В.3) и (В.4) тождественны, а (В.3) легче вычислять, мы используем модифицированную форму (В.3). Существуют четыре записи члена, выражающего приращение функции в результате приращения какого-либо из аргументов, допустим $\Delta x_1$, а именно:

$$\left.\begin{aligned}(а)\ & \frac{\hat{\Delta}Z}{\Delta x_1}\Delta x_1 = \frac{F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3+e)}{h}h, \\ (б)\ & \frac{\hat{\Delta}Z}{\Delta x_1}\Delta x_1 = \frac{F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3+e)}{h}h, \\ (в)\ & \frac{\hat{\Delta}Z}{\Delta x_1}\Delta x_1 = \frac{F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2+k, \hat{x}_3)}{h}h, \\ (г)\ & \frac{\hat{\Delta}Z}{\Delta x_1}\Delta x_1 = \frac{F(\hat{x}_1+h, \hat{x}_2, \hat{x}_3) - F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{h}h.\end{aligned}\right\} \tag{В.5}$$

Уравнение (В.4) может быть записано шестью различными способами в зависимости от порядка построения частных разностей, т. е. 3! = 6; это дает 18 членов. Вышеприведенные формы (а) и (г) появляются дважды в этих шести способах, а формы (*б*) и (*в*) появляются каждая один раз. Следовательно, хорошая оценка $(\partial Z/\partial x_1)dx_1$ будет представлять собой средневзвешенную форму (В.5), причем веса (*а*) и (*г*) вдвое превышают веса (*б*) и (*в*). Формы, подобные В.5 (*а*) — В.5 (*г*), но имеющие отношение к $(\partial Z/\partial x_2)dx_2$ и $(\partial Z/\partial x_3)\ dx_3$ также содержатся в этих 18 членах.

Распространение этой схемы на $n$ переменных представляется трудным для вычисления. При $n$ переменных существует $2^{n-1}$ способа записи любой части разности и $n!$ порядков вычисления разностей. Будем рассуждать следующим образом: запишем функцию $F(x_i, x_j, \ldots, x_k)$ от $n$ аргументов. Имеется $n!$ способов записи с перестановкой аргументов. Условимся всегда строить разности в таком порядке, в котором следуют индексы аргументов. Предположим, что в некоторой перестановке $x_j$ стоит на месте $k$. Существует $(n-1)!$ порядков вычисления разностей, в которых это имеет место. Предшествующим $x_j$ $k-1$ переменным придают нижнее значение $x_i$, а $n-k$ переменным, которые следуют за $x_j$, придают верхнее значение $x_i+h_i$. Первые переменные могут быть расположены $(k-1)!$ способами, и $(n-k)$ переменных, которые следуют за $x_j$, могут быть расположены $(n-k)!$ способами. Следовательно, некоторая частная форма $(\hat{\Delta}Z/\Delta x_j)\Delta x_j$ с некоторым множеством $(k-1)$ переменных, принимающих нижнее значение, и некоторым множеством $(n-k)$ переменных, принимающих верхние значения, предстает в виде $(k-1)!\,(n-k)!$ форм $\hat{\Delta}Z$. Тогда при усреднении каждая форма $(\hat{\Delta}Z/\Delta x_j)\Delta x_j$ с $k-1$ переменными, принимающими нижнее значение, и $(n-k)$ переменными, принимающими верхнее значение, получает вес $(k-1)!\,(n-k)!$ При фиксировании $x_j$ имеется $\binom{n-1}{k-1}$ способов выбора переменных, которые будут удерживаться на их нижних уровнях, и

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}=2^{n-1}, \qquad (\text{В.6})$$

которая является общим числом способов построения частных разностей по $x_j$.

Пример. Рассмотрим $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Существует 4! порядка построения разностей и 8 способов построения разностей по $x_1$ (и каждому другому аргументу). Запишем их вместе с их весами.

| Форма разности | Вес |
|---|---|
| $F(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_2+h_2, x_3+h_3, x_4+h_4) - F(\boldsymbol{x}_1, x_2+h_2, x_3+h_3, x_4+h_4)$ | $0!\,3!=6$ |
| $F(x_4, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_3+h_3, x_2+h_2) - F(x_4, \boldsymbol{x}_1, x_3+h_3, x_2+h_2)$ | $1!\,2!=2$ |
| $F(x_3, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_2+h_2, x_4+h_4) - F(x_2, \boldsymbol{x}_1, x_2+h_2, x_4+h_4)$ | $1!\,2!=2$ |
| $F(x_2, x_4, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_2+h_2) - F(x_3, x_4, \boldsymbol{x}_1, x_2+h_2)$ | $2!\,1!=2$ |
| $F(x_2, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_3+h_3, x_4+h_4) - F(x_2, \boldsymbol{x}_1, x_3+h_3, x_4+h_4)$ | $1!\,2!=2$ |
| $F(x_2, x_3, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_4+h_4) - F(x_2, x_3, \boldsymbol{x}_1, x_4+h_4)$ | $2!\,1!=2$ |
| $F(x_2, x_4, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1, x_3+h_3) - F(x_2, x_4, \boldsymbol{x}_1, x_3+h_3)$ | $2!\,1!=2$ |
| $F(x_2, x_3, x_4, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{h}_1) - F(x_2, x_3, x_4, x_1)$ | $3!\,0!=6$ |



Сумма весов равна 24, что является общим числом способов записи частного приращения $\frac{\hat{\Delta}Z}{\Delta x_1}\Delta x_1$. Остальные частные разности могут быть усреднены тем же способом. Поскольку при сложении каждой из разностей, построенных $n!$ способами, получается $\hat{\Delta}Z$, то и сумма средних взвешенных частных разностей тоже даст $\hat{\Delta}Z$.

Если получим хорошее согласие оценки параметров регрессии в обоих выборках, то $\hat{\Delta}Z \approx \Delta Z$.

## Приложение Г

### Статистические данные по частному внутреннему несельскохозяйственному сектору Соединенных Штатов 1890—1960 гг.

Временные ряды продукции, затрат труда и основного капитала в США, составленные Джоном Кендриком [155] с годовым шагом, обеспечивают исходные данные для анализа, выполненного в гл. 10. Это — ряды для валового продукта частного внутреннего несельскохозяйственного сектора, человеко-часов, отработанных за год в этом секторе, и фонда основного капитала в этом же секторе в ценах 1929 г. (включая здания и сооружения, оборудование и запасы). Временные ряды Кендрика были продолжены до 1960 г. путем стыковки их с соответствующими рядами Министерства торговли за 1954 г. Процентные измерения фонда чистого основного капитала были получены из «The Capital Goods Study» [156].

Ряды Кендрика о количестве отработанных человеко-часов в год отражают реальный поток услуг труда. Следовательно, ряды трудовых показателей предполагают однородность этого вида затрат. Это совместно с допущением, что изменения качества услуг труда и изменения в структуре находят отражение в изменениях коэффициентов производственной функции.

Мера услуг капитала аппроксимируется с помощью рядов фонда чистого основного капитала (см. гл. 6). Однако ряды фонда чистого основного капитала измеряют только наличное производительное оборудование, а не степень его использования. Уже давно считается, что наличный капитал является неадекватной базой для оценки производственных функций, поскольку, вероятно, недооценивает производительность капитала. Следовательно, представляется необходимым как можно лучше корректировать ряды наличного основного капитала в случае неполной загрузки мощностей, несмотря на то, что меры загрузки мощностей нельзя признать вполне удовлетворительными.

В табл. Г.1 представлены данные о валовом продукте, отработанных человеко-часах, наличном капитале и о первой аппроксимации используемого основного капитала.

В качестве первой аппроксимации рядов загрузки мощностей используется метод Уортонской школы [157]. Вкратце, он состоит в проведении линий тренда по пиковым точкам временных рядов объема продукции, исходя, таким образом, из допущения, что выпуск продукции в пиковых точках соответствует полной загрузке мощностей. При этом реальная продукция для каждого года в интервале между пиками выражается в виде процента соответствующей трендовой величины для этого года, показывая процент загрузки мощностей в этом году.

Следует отметить некоторые недостатки этого метода. Во-первых, индекс опирается на изменения в рядах совокупного продукта и исходит, таким образом, из допущения, что все отрасли промышленности и фирмы достигают своего наивысшего потенциала в выпуске продукции в одно и то же время. В идеальном случае индекс следовало бы строить на рядах продукции каждой отрасли промышленности и взвешивать в зависимости от важности этой отрасли в агрегированном выпуске. Во-вторых, индекс, построенный как на агрегированной, так и на дезагрегированной основе, предполагает, что в любом году, когда выпуск продукции достигает пика, мощности загружены полностью. В-третьих, индекс основан на допущении, что линейная интерполяция между пиковыми точками выпуска является хорошим приближением темпов роста мощностей. В-четвертых, индекс не дает оценки изменениям в оборудовании, сопутствующим изменениям выпуска продукции. Понижения уровней выпуска сопровождаются скорее отказом от менее эффективного оборудования, чем равномерным сокращением использования капитала. Это затрагивает проблему получения меры загрузки мощностей на основе различных физических единиц капитала, входящих в основной капитал, — проблему, которая еще ожидает своего разрешения на теоретическом уровне. И наконец, индекс построен на допущении отсутствия экономии от масштаба производства и нейтральных технологических сдвигов.

Вторая аппроксимация индекса загрузки мощностей рассматривается в гл. 10. По крайней мере, она лишена последнего из недостатков, свойственных первой. Обе аппроксимации приводятся в табл. Г.2.



Таблица Г.1

**Валовой продукт, отработанные человеко-часы, наличный фонд основного капитала и используемый (первая аппроксимация) фонд основного капитала в частном несельскохозяйственном секторе Соединенных Штатов, 1890—1960 гг.**

| Годы | Валовой продукт (в млн. долл., 1929 г.) | Чистый основной капитал (в млн. долл., 1929 г.) | Используемый основной капитал (в млн. долл., 1929 г.) | Отработанные человеко-часы |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1890 | 18 536 | 65 869 | 53 778 | 39 532 |
| 1891 | 19 405 | 70 952 | 60 072 | 40 915 |
| 1892 | 22 370 | 76 844 | 73 898 | 42 733 |
| 1893 | 21 057 | 82 391 | 74 514 | 41 845 |
| 1894 | 19 988 | 85 984 | 74 128 | 39 386 |
| 1895 | 22 867 | 90 343 | 88 164 | 42 968 |
| 1896 | 21 706 | 94 422 | 81 851 | 42 743 |
| 1897 | 24 043 | 97 667 | 88 813 | 44 579 |
| 1898 | 24 214 | 101 382 | 86 686 | 44 771 |
| 1899 | **27 306** | **105 093** | **95 557** | **49 471** |
| 1900 | 28 185 | 109 228 | 97 431 | 50 136 |
| 1901 | 32 551 | 113 244 | 111 236 | 53 195 |
| 1902 | 32 985 | 117 442 | 113 567 | 56 357 |
| 1903 | 34 795 | 122 224 | 119 833 | 58 560 |
| 1904 | 33 942 | 125 872 | 112 276 | 57 174 |
| 1905 | 37 071 | 130 183 | 120 769 | 61 035 |
| 1906 | 42 041 | 136 334 | 133 259 | 64 236 |
| 1907 | 43 245 | 142 854 | 139 594 | 66 046 |
| 1908 | 38 486 | 148 070 | 124 407 | 61 985 |
| 1909 | **44 664** | **151 960** | **144 029** | **66 563** |
| 1910 | 44 910 | 156 810 | 145 971 | 68 831 |
| 1911 | 47 195 | 161 332 | 153 217 | 70 102 |
| 1912 | 48 226 | 165 156 | 155 898 | 72 786 |
| 1913 | 51 937 | 170 652 | 167 904 | 73 839 |
| 1914 | 45 886 | 175 916 | 150 029 | 71 210 |
| 1915 | 46 676 | 179 412 | 153 573 | 70 859 |
| 1916 | 56 293 | 182 944 | 181 178 | 78 007 |
| 1917 | 52 695 | 186 901 | 170 961 | 79 459 |
| 1918 | 56 365 | 190 488 | 183 374 | 78 283 |
| 1919 | **58 985** | **193 927** | **192 208** | **75 422** |
| 1920 | 59 734 | 198 597 | 196 262 | 76 336 |
| 1921 | 58 698 | 202 714 | 182 617 | 68 167 |
| 1922 | 62 084 | 206 480 | 188 741 | 74 269 |
| 1923 | 71 285 | 214 037 | 209 628 | 81 994 |
| 1924 | 74 284 | 222 980 | 217 853 | 79 197 |
| 1925 | 75 481 | 231 905 | 223 531 | 82 429 |
| 1926 | 81 366 | 242 777 | 229 674 | 86 127 |
| 1927 | 81 833 | 253 140 | 241 562 | 86 508 |
| 1928 | 83 097 | 261 488 | 247 105 | 87 083 |
| 1929 | **88 562** | **269 602** | **265 545** | **89 467** |
| 1930 | 79 817 | 275 514 | 244 430 | 81 854 |
| 1931 | 73 021 | 275 724 | 224 878 | 72 386 |
| 1932 | 60 665 | 270 177 | 184 815 | 62 069 |
| 1933 | 57 772 | 262 117 | 171 212 | 61 248 |
| 1934 | 65 041 | 256 151 | 187 276 | 62 366 |

*Продолжение*

| Годы | Валовой продукт (в млн. долл., 1929 г.) | Чистый основной капитал (в млн. долл. 1929 г.) | Используемый основной капитал (в млн. долл., 1929 г.) | Отработанные человеко-часы |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1935 | 74 221 | 253 032 | 209 962 | 66 023 |
| 1936 | 83 278 | 253 260 | 234 236 | 73 426 |
| 1937 | 90 884 | 256 519 | 254 890 | 77 568 |
| 1938 | 83 743 | 257 976 | 217 606 | 70 460 |
| 1939 | **91 530** | **258 073** | **221 746** | **75 131** |
| 1940 | 101 313 | 261 238 | 228 757 | 79 694 |
| 1941 | 116 415 | 267 526 | 250 238 | 89 276 |
| 1942 | 127 434 | 271 939 | 266 469 | 97 056 |
| 1943 | 136 274 | 271 011 | 266 154 | 101 633 |
| 1944 | 146 470 | 268 028 | 269 520 | 100 124 |
| 1945 | 145 052 | 265 260 | 263 098 | 94 920 |
| 1946 | 140 288 | 269 194 | 252 357 | 96 671 |
| 1947 | 142 022 | 279 813 | 262 536 | 100 072 |
| 1948 | 149 895 | 291 586 | 285 700 | 101 304 |
| 1949 | **147 122** | **302 616** | **277 522** | **96 784** |
| 1950 | 163 620 | 314 695 | 307 946 | 100 352 |
| 1951 | 173 398 | 330 176 | 322 436 | 104 801 |
| 1952 | 178 864 | 343 826 | 334 878 | 106 168 |
| 1953 | 186 264 | 356 394 | 350 110 | 109 195 |
| 1954 | 183 526 | 367 734 | 346 097 | 104 477 |
| 1955 | 198 759 | 382 076 | 374 905 | 109 878 |
| 1956 | 205 298 | 396 213 | 378 491 | 113 141 |
| 1957 | 206 773 | 403 345 | 397 780 | 112 383 |
| 1958 | 198 419 | 401 732 | 378 387 | 109 068 |
| 1959 | **216 475** | **409 483** | **393 440** | **114 445** |
| 1960 | 221 541 | 414 686 | 403 843 | 115 234 |

Примечания. Данные о валовом продукте заимствованы из: Kendrick, Productivity Trends in the United States, pp. 298—301, table A. 3, столбец 7 минус столбец 8.

Данные о чистом основном капитале заимствованы из: Kendrick, op. cit., pp. 320—322, Table A. 15.

Данные об используемом основном капитале получены как произведение множителя загрузки (первая аппроксимация, см. табл. Г. 2) и двухгодичной скользящей средней временного ряда наличного фонда чистого основного капитала.

Данные по отработанным человеко-часам заимствованы из: Kendrick, op. cit., pp. 311—313, Table A. 10.



Таблица Г.2

**Первая и вторая аппроксимация рядов загрузки мощностей, частный внутренний несельскохозяйственный сектор Соединенных Штатов, 1890—1960 гг.**

| Первая аппроксимация рядов загрузки мощностей, полученная с помощью метода Уортонской школы | | | | Вторая аппроксимация рядов загрузки мощностей, полученная с помощью итеративного процесса | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 2 | | | |
| 1890 | 84,3 | 1925 | 98,3 | 1890 | 79,3 | 1925 | 96,0 |
| 1891 | 87,8 | 1926 | 100,0 | 1891 | 83,8 | 1926 | 100,0 |
| 1892 | 100,0 | 1927 | 97,4 | 1892 | 100,0 | 1927 | 96,4 |
| 1893 | 93,6 | 1928 | 96,1 | 1893 | 90,6 | 1928 | 96,2 |
| 1894 | **88,1** | 1929 | **100,0** | 1894 | **82,8** | 1929 | **100,0** |
| 1895 | 100,0 | 1930 | 89,7 | 1895 | 100,0 | 1930 | 84,1 |
| 1896 | 88,6 | 1931 | 81,6 | 1896 | 82,1 | 1931 | 72,6 |
| 1897 | 92,5 | 1932 | 67,7 | 1897 | 87,0 | 1932 | 51,8 |
| 1898 | 87,1 | 1933 | 64,3 | 1898 | 79,6 | 1933 | 48,1 |
| 1899 | **92,6** | 1934 | **72,3** | 1899 | **86,4** | 1934 | **56,3** |
| 1900 | 90,9 | 1935 | 82,5 | 1900 | 84,3 | 1935 | 67,3 |
| 1901 | 100,0 | 1936 | 92,5 | 1901 | 100,0 | 1936 | 78,5 |
| 1902 | 98,5 | 1937 | 100,0 | 1902 | 99,8 | 1937 | 100,0 |
| 1903 | 100,0 | 1938 | 84,6 | 1903 | 100,0 | 1938 | 74,5 |
| 1904 | **90,5** | 1939 | **85,9** | 1904 | **85,5** | 1939 | **74,6** |
| 1905 | 94,3 | 1940 | 88,1 | 1905 | 90,4 | 1940 | 77,1 |
| 1906 | 100,0 | 1941 | 94,7 | 1906 | 100,0 | 1941 | 85,0 |
| 1907 | 100,0 | 1942 | 98,8 | 1907 | 100,0 | 1942 | 89,5 |
| 1908 | 85,5 | 1943 | 89,0 | 1908 | 76,4 | 1943 | 89,4 |
| 1909 | **96,0** | 1944 | **100,0** | 1909 | **89,4** | 1944 | **100,0** |
| 1910 | 94,6 | 1945 | 98,7 | 1910 | 89,2 | 1945 | 99,8 |
| 1911 | 96,3 | 1946 | 94,8 | 1911 | 91,3 | 1946 | 94,2 |
| 1912 | 95,5 | 1947 | 95,6 | 1912 | 91,2 | 1947 | 94,3 |
| 1913 | 100,0 | 1948 | 100,0 | 1913 | 100,0 | 1948 | 100,0 |
| 1914 | **86,6** | 1949 | **93,4** | 1914 | **78,4** | 1949 | **90,3** |
| 1915 | 86,4 | 1950 | 99,8 | 1915 | 78,4 | 1950 | 98,7 |
| 1916 | 100,0 | 1951 | 100,0 | 1916 | 100,0 | 1951 | 100,0 |
| 1917 | 82,5 | 1952 | 99,4 | 1917 | 88,7 | 1952 | 99,9 |
| 1918 | 97,2 | 1953 | 100,0 | 1918 | 94,7 | 1953 | 100,0 |
| 1919 | **100,0** | 1954 | **95,6** | 1919 | **100,0** | 1954 | **93,7** |
| 1920 | 100,0 | 1955 | 100,0 | 1920 | 100,0 | 1955 | 100,0 |
| 1921 | 91,0 | 1956 | 100,0 | 1921 | 86,4 | 1956 | 100,0 |
| 1922 | 92,3 | 1957 | 99,5 | 1922 | 86,6 | 1957 | 99,9 |
| 1923 | 99,7 | 1958 | 94,0 | 1923 | 96,2 | 1958 | 91,9 |
| 1924 | 99,7 | 1959 | 97,0 | 1924 | 96,2 | 1959 | 95,9 |
| | | 1960 | 98,0 | | | 1960 | 96,0 |

## Библиография

1. Resource and Output Trends in the United States Since 1870, *Papers and Proceedings of the American Economic Associattion*, vol. 46 (May 1956), p. 5—23.
2. Ibid., p. 11.
3. R. Solow. Technical Change and the Aggregate Production Function, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 39, (August, 1957), p. 312—320; J. Kendrick, *Productivity Trends in the United States* (Princeton, National Bureau of Economic Research, 1961), p. 65 ff. Русский перевод: Д. Кендрик, *Тенденции производительности в США*. М., «Статистика», 1967; B. F. Massell, Capital Formation and Technological Change in United States Manufacturing, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 42 (May, 1960),p. 182—188; M. Brown and J. Popkin, A. Measure of Technological Change and Returns to Scale, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 44 (November, 1962), p. 402—441.
4. E. Dennison, The Sources of Economic Growth in the United States and the Alternatives Before Us, *Supplementary Paper* No. 13, Committee for Economic Development, 1962.
5. См. рецензию Абрамовича на книгу Деннисона: Economic Growth in the United States, *The American Economic Review*, vol. 52 (September 1962), p. 762—782.
6. W. E. G. Salter, *Productivity and Technical Change* (Cambridge University Press, 1960).
7. Концепция производственной функции тщательно разработана в следующих источниках:
J. Schumpeter, *History of Economic Analysis* (Oxford University Press, 1954), p. 1026 ff.; W. E. G. Salter, *Productivity and Technical Change*; H. B. Chenery, Process and Production Functions from Engineering Data, in *Studies in the Structure of the American Economic*, by W. W. Leontief et al. (Oxford University Press, 1953) В. Леонтьев, *Исследования структуры американской экономики*. М., 1958; S. Carlson, *A Study on the Pure Theory of Production* (Blackwell, 1939); J. R. Hicks, *Value and Capital* (Oxford University Press, 1957).
8. Carlson, op. cit., p. 14.
9. См. Х. Ченери, цит. соч. Обзор литературы, в которой производственные функции выводятся из инженерных данных, см. в A. A. Walters, Production and Cost Functions: An Econometric Survey, *Econometrica*, vol. 31 (January—April 1963), p. 11—14.
10. См. M. Brown and A. Conrad, *Fundamental Economic Variables in a General System of Production* (Division of Balanced International Growth, Netherlands Economic Institute, 1962), R. Nelson, Aggregate Production Functions and Medium Range Growth Projections, *American Economic Review* (September 1964).
11. R. Dorfman, P. Samuelson, and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis* (McGraw-Hill, 1958), p. 130 ff.; P. Samuelson, Parable and Realism in Capital Theory; The Surrogate Production Function, *The Review of Economic Studies*, vol. 39 (June 1962), p. 193—206.
12. A. Marshall, *Principles of Economics* (London, Macmillan, 1922), p. 266.
13. Д. Робертсон подчеркивает роль внутренней экономии в статье D. H. Robertson Increasing Returns and the Representative firm, *Economic Journal*, vol. 40 (March 1930), p. 87. См., также интересную статью G. Stigler, Division of Labor is Limited by the Extent of the Market, *Journal of Political Economy*, vol. 59 (June, 1951), p. 185—193. Для выяснения роли экономии от масштаба производства в процессе экономического роста см. A. Young. Increasing Returns and Economic Progress, *Economic Journal*, vol. 38 (December, 1928), p. 527—542.
14. J. R. Hicks, *The Theory of Wages* (New York, Macmillan, 1932). W. Fellner, Two Propositions in the Theory of Induced Inventions, *The Economic Journal*, vol. 71 (June 1961), p. 306—308; N. Rosenberg, Capital Goods, Technology and Economic Growth, *Oxford Economic Papers*, vol. 15 (November 1963), p. 217—227.
15. A. Marshall, *Principles of Economics*, p. 521.
16. *Ibid*., p. 356.
17. J. R. Hicks, *The Theory of Wages*, p. 119—135, 233—246; Joan Robinson, *The Economics of Imperfect Competition* (Macmillan, 1933), p. 256, 330.
18. Вывод этих свойств см. в R. G. D. Allen. *Mathematical Analysis for Economists* (London, Macmillan, 1950), p. 341. Р. Аллен, *Математическая экономия*, М., 1963.
19. См., J. R. Hicks, *op. cit*., p. 132.
20. Эти определения разработаны Дж. Р. Хиксом в *The Theory of Wages*, p. 121—127. Иной подход дает Р. Харрод в The Neutrality of Improvements, *The Economic Journal*, P. H. Douglas and M. J. Handsaker, The Theory of Marginal Productivity Tested by Data for Manufacturing in Victoria, *Quarterly Journal of Economic*, vol. 52, (February 1937), p. 1—36; P. H. Douglas and G. T. Gunn, Further Measures in Marginal Productivity, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 54 (February 1939), p. 399—428; P. H. Douglas and G. T. Gunn. The Production Function for Australian Manufacturing, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 56 (February 1941), p. 108—129; P. H. Douglas and G. T. Gunn. Production Function for American Manufacturing in 1914 *Journal of Political Economy*, vol. 50 (February, 1942), p. 595—602; P. H. Douglas and G. T. Gunn, A. Production Function for American Manufacturing in 1919, *American Economic Review*, vol. 31, p. 67—80; P. H. Douglas and P. Daly, Production Function for Canadian Manufactures, *Journal of American Statistical Association*, vol. 38. (1943), p. 178—186; P. H. Douglas, P. Daly and E. Olsen, The Production Function for Manufacturing in the United States, 1904, *Journal of Political Economy*, vol. 51 (February, 1943), p. 61—65. В ответ на критику (см. ниже) Дуглас вместе с М. Бронфенбреннером (M. Bronfenbrenner) опубликовал «Cross Section Studies in the Cobb-Douglas Function», *Journal of Political Economy*, vol. 47 (December 1939), p. 761—783. И наконец, Дуглас подвел итоги своим исследованиям в классической обзорной статье «Are there Laws of Production», *American Economic Review*, vol. 38 (March, 1948), p. 1—41. Обзор последних эконометрических работ см. A. Walters, Production and Cost Functions: An Econometric vol. 71 (June, 1961), p. 300—304. W. E. G. Salter (*Rroductivity and Technical Change*, p. 32—34) при обсуждении сравнивает оба подхода. См. также C. Kennedy, Harrod on «Neutrality», *Economic Journal*, vol. 72 (March 1962), p. 249—350. Автор статьи показывает, что определения, данные Харродом и Хиксом нейтральному техническому прогрессу, относятся к одному и тому же явлению на уровне национальной экономики, если $\sigma = 1$. Это также рассматривает M. Blaug, A. Survey of the Theory Process Innovations, *Economica*, vol. 30 (Fubruary 1963), p. 13—32. Различные критерии ненейтрального технического прогресса исследованы в A. Lowe, Structural Analysis of Real Capital Formation, *Capital Fomation and Economic Growth*, National Bureau of Economic Research (Princeton, 1961), p. 622 ff.
21. Солтер приходит к такому же выводу (*Productivity and Technical Change*, p. 40).
22. Общее обсуждение желательных свойств производственной функции см. R. G. D. Allen, *Mathematical Analysis for Economists*, p. 286 ff. Р. Аллен, *Математическая экономия*, М., 1963.
23. Впервые она появилась в работах Кнута Викзелла (Knut Wicksell *Finanztheoretische Untersuchungen. Jena*, 1896), p. 53. в ограниченной форме $\alpha+\beta=1$ она впервые появилась и была проверена эмпирически в G. W. Cobb and P. H. Douglas, A theory of Production, *American Economic Review*, Supplement (Merch, 1928), p. 139—165. Дуглас и его коллеги широко использовали спецификацию без ограничений в следующих работах: Survey, *Econometrica*, vol. 31. Кроме исследований, проделанных Дугласом и его коллегами, существуют численные приложения функции к сельскохозяйственным