

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE
MADRID**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE TELECOMUNICACIÓN**



PROYECTO FIN DE CARRERA

**CONSTRUCCIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS
PARA COMUNICACIONES PRIVADAS**

**ALEXANDRE WAGEMAKERS
OCTUBRE 2003**

Proyecto: Construcción de sistemas caóticos para comunicaciones privadas

Autor: Alexandre Wagemakers

Tribunal:

Presidente: D. Vicente Alcober Bosch

Vocal: Dña. Pilar Mareca López

Secretario: D. Angel Sanz Sáenz

Suplente: Claudio Aroca Hernández-Ros

Fecha de Lectura: 28 de octubre, 2003

Calificación:

Resumen del proyecto:

El proyecto tiene como objetivo el estudio de tres sistemas caóticos y sus posibles aplicaciones para las comunicaciones privadas. El estudio consiste en primer lugar en usar todos los procedimientos disponibles para el análisis de los sistemas caóticos, así como el desarrollo de los programas de simulaciones correspondientes. En segundo lugar se realiza la construcción y el estudio de los tres sistemas. Finalmente se trata de estudiar los procedimientos de sincronización de los sistemas caóticos y de aplicar estos métodos a los tres sistemas.

La segunda parte trata de estudiar los procedimientos de sincronización de sistemas caóticos y aplicar estos métodos a los sistemas estudiados precedentemente. También se construyen y se analizan los circuitos electrónicos al final del estudio teórico.

Palabras clave:

Sistemas caóticos, sincronización de sistemas no lineales, control, mapas de retorno, exponentes de Lyapunov, espectro de Fourier, función de autocorrelación, soluciones analíticas, diagramas de bifurcación, simulaciones numéricas, PSpice, Matlab

Índice general

1. Introducción a los sistemas dinámicos	14
1.1. Introducción	15
1.2. Características del Caos	16
1.3. Procedimientos para el estudio del caos	18
1.3.1. Sistemas dinámicos	18
1.3.2. El espacio de las fases	19
1.3.3. El teorema de Poincaré-Bendixon	22
1.3.4. Exponentes de Lyapunov	22
1.3.5. Mapas de Poincaré	30
1.3.6. Mapas de retorno	31
1.3.7. Diagramas de bifurcación	35
1.3.8. Espectros, autocorrelación y estadísticas	38
1.3.9. Dimensión fractal	39
2. Estudio de los sistemas caóticos	47
2.1. Introducción	47
2.2. No linealidad del tipo “valor absoluto”	49
2.2.1. Solución analítica	49
2.2.2. Simulaciones con Matlab	51
2.2.3. Exponentes de Lyapunov	54
2.2.4. Espectro y Autocorrelación	58
2.2.5. Secciones de Poincaré	58
2.2.6. Mapa de retorno	61
2.2.7. Ruta hacia el caos	76
2.2.8. El circuito electrónico	81
2.2.9. Simulaciones con PSpice	83
2.2.10. Construcción y análisis del circuito	84
2.3. No linealidad del tipo “diodo inverso”	90

ÍNDICE GENERAL

5

2.3.1. Solución analítica	90
2.3.2. Exponentes de Lyapunov	91
2.3.3. Dimensión fractal del atrácto	93
2.3.4. Espectro y autocorrelación	95
2.3.5. Secciones de Poincaré	96
2.3.6. Mapas de retorno	97
2.3.7. Ruta hacia el caos	97
2.3.8. El circuito electrónico	100
2.3.9. Simulaciones con PSpice	104
2.3.10. Construcción y análisis del circuito	106
2.4. No linealidad de tipo “Salto”	110
2.4.1. Solución analítica	111
2.4.2. Simulaciones con Matlab	112
2.4.3. Exponentes de Lyapunov	114
2.4.4. Espectro y autocorrelación	116
2.4.5. Mapa de retorno	117
2.4.6. Secciones de Poincaré	122
2.4.7. Ruta hacia el caos	125
2.4.8. Circuito electrónico	125
2.4.9. Simulaciones con PSpice	127
2.4.10. Construcción y análisis del circuito	127
2.5. Discusión Comparativa de los tres sistemas estudiados	130
2.5.1. Discusión comparativa de los exponentes de Lyapunov	131
2.5.2. Discusión comparativa de los espectros	131
2.5.3. Discusión comparativa de las funciones de autocorrelación	133
2.5.4. Discusion comparativa de las dimensiones fractales de los atráctores	133
3. Aplicaciones a las comunicaciones seguras	137
3.1. Sincronización Maestro-Esclavo	138
3.2. Sincronización con técnicas de control	145
3.3. Sincronización con realimentación lineal	151
3.3.1. Simulaciones con Matlab	155
3.3.2. Variante de la sincronización con realimentación lineal	162
3.3.3. Estimación de la calidad de la comunicación con Matlab	172
Pliego de condiciones	174

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	6
Presupuesto	176
Bibliografía	178
A. Programas Matlab	179
A.1. Cálculo de los mapas de retorno y de la densidad invariante	179
A.2. Diagramas de bifurcación	182
A.3. Cálculo de la solución analítica	182
A.4. Diagramas de bloques Simulink	185
A.4.1. Integración de la ecuación diferencial	185
A.4.2. Sincronización con técnicas de control	186
B. Justificaciones teóricas	187
B.1. Expresión analítica de los autovalores	187
B.2. Desarrollo de la solución analítica del sistema “salto”	188
B.3. Demostración de la sincronización con la realimentación lineal modificada	190
C. Planos de los circuitos PSpice	194
C.1. Sincronización con realimentación lineal	195
C.2. Sincronización con realimentación lineal, esquema modificado .	196

Índice de figuras

1.1.	Ejemplos de trayectorias con el juego del billar (los obstáculos aparecen en negro)	17
1.2.	Desplazamiento de una masa pequeña colocada en el extremo de un muelle	19
1.3.	Un espacio de las fases de tres dimensiones y una trayectoria tratada sobre él	21
1.4.	Divergencia de las trayectorias	25
1.5.	Distintos tipos de atráctores	28
1.6.	Curva fractal realizada con el programa xfractint	29
1.7.	Ejemplo de mapa de Poincaré	30
1.8.	Ejemplo de mapa de retorno	32
1.9.	Mapa de retorno después de algunas iteraciones	32
1.10.	Aplicación logística iterada para varios valores del parámetro a	34
1.11.	Diagrama de bifurcación de un sistema sencillo	36
1.12.	Diagrama de bifurcación de un sistema caótico	37
1.13.	Auto-similitud de un diagrama de bifurcación	38
1.14.	Ejemplos de atráctores, espectros y funciones de autocorrelación (a la izquierda el atráctor, en el centro el espectro y a la derecha la función de autocorrelación) de algunas situaciones dinámicas que aparecen en el estudio del caos	40
1.15.	Ejemplos de PDH y el atráctor correspondiente	41
1.16.	Construcción de la curva de Von Koch	42
1.17.	Recubrimiento con cuadrados de un atráctor	43
2.1.	Solución analítica $x(t)$ de la ecuación (2.3) para las condiciones iniciales $x = 0,01$; $\dot{x} = 0$; $\ddot{x} = 0$	52
2.2.	Atráctor en el espacio de las fases $\{x, \dot{x}, \ddot{x}\}$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”	53

ÍNDICE DE FIGURAS

8

2.3. Atráctor desarrollado sobre una banda	53
2.4. Divergencia de dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”	55
2.5. Divergencia de dos trayectorias en escala logarítmica para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”	56
2.6. Exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sistema “valor absoluto”	57
2.7. Espectro de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”	58
2.8. Autocorrelación de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”	59
2.9. Sección de Poincaré para $A = 0,65$ en el sistema “valor absoluto”. En los puntos rojos el corte de la trayectoria con el plano es arriba hacia abajo y en los puntos azules es de abajo hacia arriba.	60
2.10. Sección de Poincaré para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”. En los puntos rojos el corte de la trayectoria con el plano es arriba hacia abajo y en los puntos azules es de abajo hacia arriba.	62
2.11. Mapa de retorno de $x(t)$ en el sistema “valor absoluto”	63
2.12. Mapa de retorno aproximado por rectas y por un polinomio de orden tres	64
2.13. Trayectorias construidas a partir del mapa de retorno para cien iteraciones. A la izquierda el mapase aproxima por dos rectas y a la derecha por un polinomio (fig. 2.12).	65
2.14. Ejemplo de como una aplicación deforma las densidades de probabilidad (es decir de como evoluciona la densidad de probabilidad compuesta por la función f)	66
2.15. (a) y (b) representan histogramas de las trayectorias de mapa iterados y las densidades de probabilidad obtenidas con el operador de Perron-Frobenius, comparados con el histograma en tiempo continuo y la funcion densidad de probabilidad representado en (c)	68
2.16. Arriba se muestra el diagrama de bifurcación obtenido a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden tres y abajo aparece el diagrama de bifurcación del sistema obtenido de manera rigurosa	71

2.17. Arriba se muestran los exponentes de Lyapunov obtenidos a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden tres. Abajo aparece el exponente de Lyapunov máximo calculado con la ecuación variacional	72
2.18. Arriba se muestra el diagrama de bifurcación obtenido a partir de mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden cinco y abajo aparece el diagrama de bifurcación del sistema obtenido de manera rigurosa	73
2.19. Arriba se muestran los exponentes de Lyapunov obtenidos a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden cinco. Abajo aparece el exponente de Lyapunov máximo calculado con la ecuación variacional	74
2.20. Evolución con A de los atráctores y del espectro del sistema “valor absoluto”	77
2.21. Evolución de los atráctores con el diagrama de bifurcación del sistema “valor absoluto”	78
2.22. Superposición del diagrama de bifurcación y del exponente máximo de Lyapunov en el sistema “valor absoluto”	79
2.23. Circuito caótico no lineal a trozos objeto de este proyecto	81
2.24. No linealidad denominada “valor absoluto”	82
2.25. Atráctor en el plano $\{x, \dot{x}\}$ obtenido con PSpice (sistema “valor absoluto”)	84
2.26. Espectro de x con Matlab (abajo) y PSpice (arriba) (sistema “valor absoluto”)	85
2.27. Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.77; 0.70$ y 0.65). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x}	87
2.28. Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.6418; 0.6327$ y 0.61). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x}	88

2.29. Estudio comparativo entre el atrácto obtenido con Matlab (a la izquierda), y el atrácto obtenido con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para $A = 0,59$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .	89
2.30. No linealidad del diodo inverso $g(x)$	90
2.31. Exponente máximo de Lyapunov en función del parámetro de control A para el circuito de diodo inverso	92
2.32. Divergencia de dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “diodo inverso”	93
2.33. Divergencia de dos trayectorias en escala logarítmica para $A = 0,61$ en el sistema “diodo inverso”	94
2.34. Espectro de la variable $x(t)$ del sistema con diodo inverso para $A = 0,6$	95
2.35. Autocorrelación de la variable $x(t)$ del sistema con diodo inverso para $A = 0,6$	96
2.36. Sección de Poincaré en un caso regular para $A = 0,4$ en el sistema “diodo inverso”	97
2.37. Sección de Poincaré en el caso caótico para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”	98
2.38. Mapa de retorno a partir de la variable $x(t)$ para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”	98
2.39. Diagrama de bifurcación en función de A en el sistema “diodo inverso”	99
2.40. Evolución con A de los espectros y de los atráctores (cambios de régimen de funcionamiento) en el sistema “diodo inverso”	101
2.41. Diagrama de bifurcación en función de A con los atráctores correspondientes a distintas regiones de funcionamiento para el sistema “diodo inverso”	102
2.42. Diagrama de bifurcación y exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sistema “diodo inverso”	103
2.43. Esquema eléctrico de la nolinealidad correspondiente al sistema dotado de “diodo inverso”	104
2.44. Espectro y atrácto simulados con Matlab y PSpice para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”	105

2.45. Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electronico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para diferentes valores del parametro de control ($A=0.9; 0.8$ y 0.61). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x}	107
2.46. Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electronico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para diferentes valores del parametro de control ($A=0.575; 0.568$ y 0.532). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x}	108
2.47. Estudio comparativo entre el atrácto obtenido con Matlab (a la izquierda), y el atrácto obtenido con el circuito electronico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para $A = 0,42$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x}	109
2.48. No linealidad $g(x)$ de tipo “salto”	110
2.49. La solución $x(t)$ cambia de punto de oscilación para cada frag- mento, saltando del $+d/c$ al $-d/c$, en el sistema de tipo “salto”.	113
2.50. Atrácto en el espacio de las fases para $A = 0,61$ y $c = 1,2$ en el sistema de “tipo salto”	113
2.51. Exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sis- tema de “tipo salto”	115
2.52. Exponente máximo de Lyapunov en el espacio de parámetros $\{A, c\}$ para el sistema de “tipo salto”	116
2.53. Divergencia entre dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto”	117
2.54. Divergencia entre dos trayectorias representada en escala log- arítmica para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto”	118
2.55. Espectro de potencia de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema de “tipo salto”	119
2.56. Función de autocorrelación para $A = 0,61$ en el sistema de “tipo salto”	120
2.57. Mapa de retorno para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto” . . .	121
2.58. Secciones de Poincaré para $A = 1,2$ en el sistema de tipo “salto”	123
2.59. Secciones de Poincaré para $A = 0,6$ en el sistema de “tipo salto”	124
2.60. Diagrama de bifurcación del sistema de “ tipo salto”	125

2.61. Esquema eléctrico de la no linealidad $g(x)$ para el sistema de “tipo salto”	126
2.62. Espectro y atráktor simulado con PSpice ($A = 0,6$) para el sistema “tipo salto”	128
2.63. Fotografias de atráctores del circuito electronico “salto” para $A = 0,6$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} . Las unidades de la cuadricula son 1V/lado del cuadrado en X y 0.1V/lado del cuadrado en Y en el sistema “tipo salto”	129
2.64. Exponentes máximos de Lyapunov de los tres sistemas estudiados en función del parámetro de control A	132
2.65. Espectros de potencia de los tres sistemas estudiados para el valor $A = 0,61$ del parámetro de control	134
2.66. Funciones de autocorrelación de los tres sistemas estudiados para el valor $A = 0,61$ del parámetro de control	135
3.1. Esquema de la sincronización Maestro/Eslavo	138
3.2. Esquema de la transmisión de información enmascarada con una sincronización Maestro/Eslavo	140
3.3. Error de sincronización definida como $x_2 - x'_2$ para un sistema Maestro/Eslavo cuya la señal excitadora es $x_1(t)$	145
3.4. señal transmitida y recuperada con la sincronización Maestro/Eslavo, a la izquierda la amplitud de la señal original es de 0.02V y a la derecha de 0.2V	146
3.5. Esquema de la sincronización con un control lineal (parte receptor)	147
3.6. Esquema completo de la sincronización con un control lineal realizado con Simulink	148
3.7. Error de sincronización con un control lineal para distintos valores de K. A la izquierda aparece el error de sincronización (el eje horizontal es el tiempo en ms y el eje vertical representa la diferencia $x_1 - x'_1$), a la derecha se muestran los atráctores correspondientes en el plano $\{x, \dot{x}\}$ (en rojo el atráctor del receptor y en azul el atráctor del emisor)	150
3.8. Señal recuperada con el método de control lineal con una diferencia de potencia 68dB (a la izquierda) y 14dB (a la derecha) entre la señal y la portadora ($K = 10$)	151
3.9. Esquema de la sincronización de Brucoli [4]	152

3.10. Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “valor absoluto”, ($g(x) = x - 2$)	157
3.11. Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “salto” ($g(x) = -1,2x + 2sign(x)$)	158
3.12. Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “diodo inverso” ($g(x) = -6max(x, 0) + 0,5$)	160
3.13. Esquema de la simulación con PSpice de la sincronización con realimentación lineal	161
3.14. Señal recuperada para el sistema salto con la sincronización con realimentación lineal (simulación PSpice)	161
3.15. Esquema de la sincronización modificada	162
3.16. Circuito Emisor correspondiente a la sincronización con realimentación lineal modificada preparado para su estudio con PSpice	164
3.17. Esquema del receptor de la sincronización con realimentación lineal modificada (diseño realizado con PSpice)	166
3.18. Señal recuperada con el método de realimentación lineal modificado (simulación PSpice)	167
3.19. Desviación típica del error (en voltios) de recuperación en función de la frecuencia de la señal enviada (sistema de sincronización con realimentación lineal modificado)	167
3.20. Fotografías de $x(t)$ en función de $x(t)'$ sobre un osciloscopio (circuito electrónico con la no linealidad $g(x) = -1,2x + 2sign(x)$)	169
3.21. Resultados de la sincronización obtenidos con la tarjeta de adquisición de datos. A la izquierda y en el centro aparecen la forma de onda y el espectro de la señal recuperada. A la derecha se representa el espectro de la señal transmitida por el canal.	170
3.22. Señal recuperada sobre un osciloscopio	171
3.23. Evolución del error de sincronización cuando aumenta la relación señal ruido. Sistema de sincronización lineal modificada trabajando con una señal regular de 0.1V y 1500Hz	173
B.1. Esquema de la sincronización modificada	191

Capítulo 1

Introducción a los sistemas dinámicos

1.1. Introducción

El descubrimiento reciente de lo que se irá convenido en llamar caos ha tenido aplicaciones en ciencias tan distintas como la biología, la física de los semiconductores, el estudio de población de animales etc... El estudio del caos no es nada nuevo; hace 200 años ya se estudiaban ciertos fenómenos que presentaban un comportamiento “extraño”. Lo que entendemos por caos no es el desorden absoluto descrito en los diccionarios sino un cierto tipo de comportamiento de los sistemas dinámicos. Se puede representar un sistema dinámico como un fenómeno (físico o matemático) evolucionando de manera continua. Un péndulo, el sistema solar o la evolución de una población de mosquitos son ejemplos de sistemas dinámicos. A partir de estos fenómenos naturales los científicos crearon modelos matemáticos intentando ajustar los datos experimentales a estos modelos. La mayoría de los fenómenos naturales son no lineales, por lo tanto los modelos que se emplean para describirlos son también no lineales.

El caos se descubrió a partir de estas modelizaciones; se comprobó que empleando los modelos deterministas, la evolución de ciertos sistemas no se correspondía con la teoría. Por ejemplo la posición de la luna puede calcularse con precisión hasta un cierto tiempo. Para conocer la posición de la luna dentro de miles de años haría falta medir la posición actual de luna con una precisión inalcanzable para nuestros aparatos de medida. Esto es una característica común a todos los sistemas caóticos: la sensibilidad a las condiciones iniciales. La sensibilidad a las condiciones iniciales significa que un pequeño cambio del punto de partida del sistema genera una evolución distinta del mismo. Recordamos, por otra parte, que un sistema determinista es un sistema cuyo estado presente está totalmente determinado por sus condiciones iniciales. O, dicho de otra forma, si conocemos con exactitud el estado presente del sistema, entonces podemos calcular con precisión toda su evolución futura.

Hace algunas décadas se formalizó lo que se llama el estudio de la dinámica no lineal. La ciencia de los sistemas dinámicos no lineales incluye los fenómenos caóticos, los cuales constituyen un subconjunto de estos. El estudio del caos presenta muchas aplicaciones. Ahora el caos se puede “controlar”, sabemos usar estos fenómenos para las aplicaciones industriales (química, láseres, semiconductores), o para explicar fenómenos físicos. El control del

caos significa reproducir los comportamientos caóticos que encontramos interesantes para luego aplicarlos, o bien sincronizar sistemas caóticos para que desarrollen el mismo tipo de caos. Estos dos últimos conceptos aplicados a los circuitos electrónicos son el objeto de esta memoria.

El objetivo de este trabajo es, pues, el estudio de una clase de sistemas dinámicos no lineales a fin de reproducir comportamientos caóticos y luego sincronizar dos sistemas idénticos que hagan el papel en la práctica de emisor y de receptor en un sistema de comunicaciones. La sincronización significa que los dos sistemas van a converger hacia un mismo estado de comportamiento caótico. Una aplicación práctica de esta sincronización va a consistir en el envío de mensajes cifrados entre un receptor y un emisor y la posterior recuperación de la información. Pero este concepto será desarrollado mas adelante en el capítulo 3.

1.2. Características del Caos

Las condiciones necesarias para la aparición de comportamientos caóticos en un sistema dinámico son:

- que el sistema posea al menos 3 dimensiones
- que exista una no linealidad en el sistema
- que aparezca al menos una dirección de expansión
- que exista una dirección de contracción en una o más de las dimensiones
- que se manifieste una sensibilidad a las condiciones iniciales

Vamos a discutir cada uno de estos puntos. Lo primero es que no se puede obtener un comportamiento temporal caótico en sistemas con menos de tres dimensiones. Un teorema fundamental impide la aparición de trayectorias caóticas en un sistema de menos de tres dimensiones . Es el teorema de Poincaré-Bendixon de cual hablaremos (sección 1.3.3).

La no linealidad de un sistema lleva la mayor parte del tiempo a soluciones no integrables. Hoy en día con los progresos de la matemática computacional se pueden obtener estas soluciones numéricas aunque no sea posible llegar a

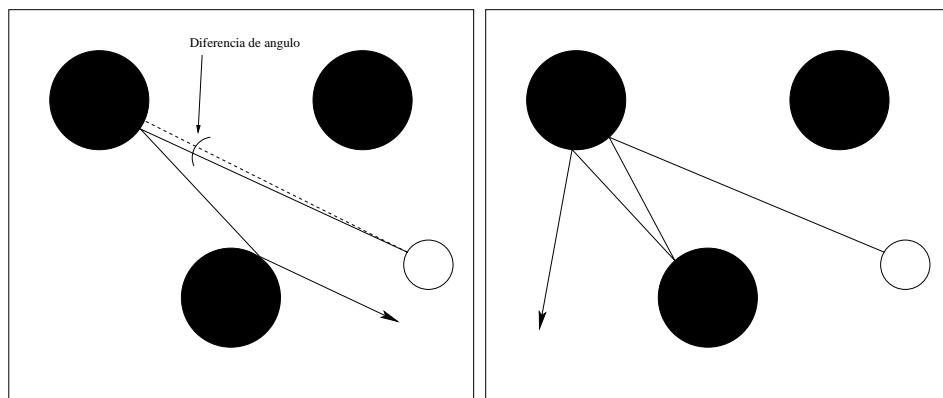


Figura 1.1: Ejemplos de trayectorias con el juego del billar (los obstáculos aparecen en negro)

ninguna solución analítica. La solución de un sistema no lineal es la superposición de muchos efectos lineales (¡gracias al potente teorema de superposición!). La no linealidad en el sistema puede adquirir muchas formas, puede ser una función trigonométrica, una variable al cuadrado o cualquier otra forma no lineal que se puede imaginar. La existencia de una no linealidad es una condición necesaria pero no suficiente para la aparición del caos.

Para obtener una divergencia local de dos trayectorias y por lo tanto trayectorias globalmente estables, el sistema debe de tener una dimensión de contracción y otra de expansión. De la combinación de estos dos efectos puede nacer una trayectoria caótica. En efecto, la sensibilidad para las condiciones iniciales implica la aparición de la divergencia de dos trayectorias con las condiciones iniciales muy próximas (es la dimensión de expansión). Para que el sistema se mantenga estable hace falta otra tendencia que impida a estas trayectorias divergir hacia el infinito. La dimensión de contracción es la que hace que las trayectorias se mantengan en un espacio limitado llamado conjunto atrácteur (ver [5]).

Como ya hemos dicho antes, la sensibilidad a las condiciones iniciales se manifiesta como una divergencia de dos trayectorias muy cercanas al principio. Para ilustrar un poco esta idea tomamos el ejemplo de un juego de billar con tres obstáculos situados en forma de un triángulo. Este juego sim-

ple está representado en la figura 1.1, los tres obstáculos aparecen en negro y la bola en blanco. Si damos un impulso a la bola con una cierta dirección, esta va a rebotar con algunos de los obstáculos antes de salir del terreno de juego. Si modificamos ligeramente el ángulo o la fuerza con la que enviamos la bola vamos a tener una trayectoria totalmente distinta. También sucederá lo mismo si desplazamos un poco la posición inicial de la bola. Esto es un ejemplo sencillo de sistema sensible a las condiciones iniciales. El juego podría modelizar, por ejemplo, el choque de una partícula atómica contra un conjunto de tres átomos.

La sensibilidad a las condiciones iniciales puede estudiarse mediante los exponentes de Lyapunov. Estos presentan una gran importancia en el estudio de los fenómenos caóticos, porque nos indican el grado con el que las trayectorias divergen (la rapidez de la divergencia). Esta herramienta es muy importante para el estudio del caos y será descrita a continuación de forma mas teórica (sección 1.3.4). Podemos decir, por ahora, que para que un sistema de tres dimensiones describa un comportamiento caótico hace falta un exponente de Lyapunov positivo. Tal sistema caótico viene descrito por tres exponentes de Lyapunov, uno es positivo (es el que proporciona la sensibilidad a las condiciones iniciales), uno es negativo (es la dimensión disipativa que proporciona un decrecimiento temporal), y el último es nulo.

1.3. Procedimientos para el estudio del caos

1.3.1. Sistemas dinámicos

Para aclarar la noción de sistema dinámico vamos a presentar un ejemplo sencillo. La mecánica proporciona muchos ejemplos de sistemas dinámicos. Y el muelle es uno de lo mas conocido por todos los estudiantes del mundo (figura 1.2). Consideraremos una pequeña masa suspendida verticalmente de un muelle. Si despreciamos las pérdidas en el muelle, tenemos un sistema con una dimensión (o con un grado de libertad, según la terminología de la mecánica) y sin pérdida de energía. Aplicando el principio fundamental de la dinámica al sistema considerando, la masa m , la constante de elasticidad del muelle k y la variable de desplazamiento alrededor del punto de equilibrio x . Se obtiene la ecuación:

$$m\ddot{x} = -kx$$

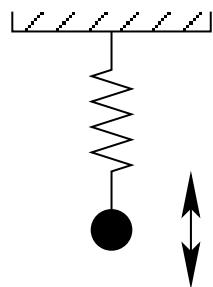


Figura 1.2: Desplazamiento de una masa pequeña colocada en el extremo de un muelle

cuya solución general es:

$$x(t) = A\sin(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + B\cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$$

La evolución del sistema esta descrita completamente por la solución anterior. Por otro lado los coeficientes A y B dependen únicamente del estado inicial del sistema (la posición y la velocidad inicial de la masa).

Un sistema dinámico viene representado, en general, por una **ecuación diferencial** y su estado futuro está determinado por las **condiciones iniciales**. En nuestro ejemplo la masa presentará un comportamiento sinusoidal “ad infinitum” en ausencia de una fuerza disipativa. Para estudiar los sistemas de dimensión superior a uno disponemos de un método de análisis de las trayectorias muy potente. Ya no estudiamos cada una de las variables por separado sino juntas todas ellas en el espacio de las fases.

1.3.2. El espacio de las fases

En los sistemas mas complejos hay, a menudo, varias magnitudes dinámicas. Por ejemplo en los sistemas mecánicos podemos tener la posición, la velocidad y la aceleración. Pero estas variables podrían ser en otro sistema una temperatura, una concentración de productos o bien un ángulo. Cada una de estas variables puede presentar una evolución temporal relacionada con las otras variables. Los sistemas de n variables dinámicas están descritos

por un sistema de n ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Estas ecuaciones diferenciales (lineales o no lineales) determinan la evolución temporal de cada una las n variables. A fin de simplificar la escritura de este sistema de ecuaciones escribimos los vectores:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x_1 x_2 \dots, x_n] \\ \mathbf{F} &= [F_1 F_2 \dots, F_n]\end{aligned}\tag{1.2}$$

y a partir de ellos podemos reescribir el sistema (1.1) de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\tag{1.3}$$

Con esta simplificación formal tenemos presentada en una sola ecuación todo el comportamiento del sistema. Los sistemas así escritos no necesariamente corresponden a sistemas de primer orden. Los sistemas de orden superior pueden expresarse de esta forma mediante los oportunos cambios de variables.

Hay que hacer notar que el sistema así expresado no depende directamente del tiempo; se observa que en el miembro de derecha de la ecuación (1.3) no aparece la variable temporal t . Los sistemas de este tipo se llaman **sistemas autónomos**. Se pueden representar de esta forma muchos sistemas incluso cuando hay dependencia con el tiempo. Entonces podemos tomar el tiempo como una variable dinámica mas (poniendo $x_{n+1} = t$).

Para representar la evolución del sistema en su totalidad usamos un espacio de dimensión n donde cada una de las variables viene representada por una dimensión. Por ejemplo en un sistema de tres grados de libertad podemos representar la evolución de las tres variables en un espacio de tres dimensiones. Es el caso de la figura 1.3 que recoge la evolución de la posición, la velocidad y la temperatura del sistema. Esta representación es muy útil y en el ejemplo que acabamos de ver podemos observar el comportamiento del sistema y la relación entre las tres variables. Cuando hay mas de tres dimensiones podemos hacer proyecciones. Se puede representar un sistema de dimensión n sobre un sub-espacio de dimensión inferior a n (la dimensión 1

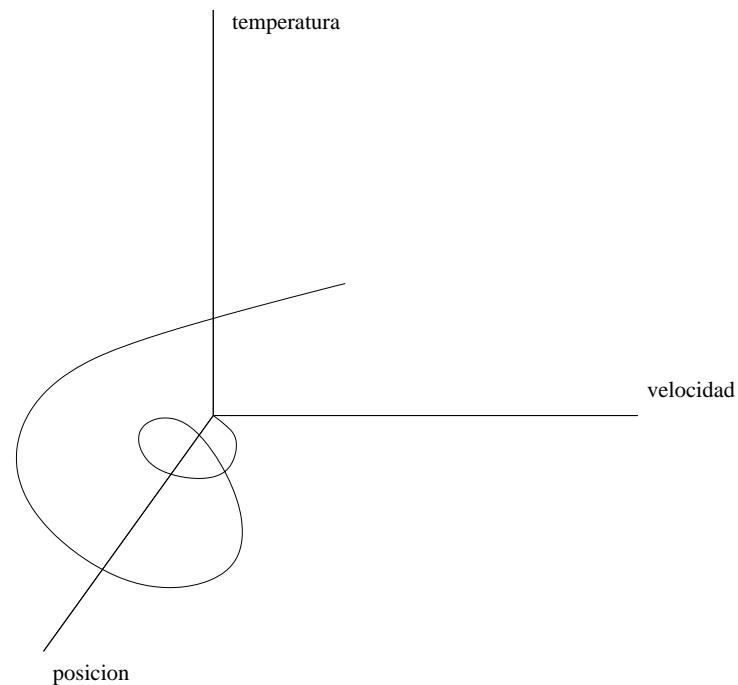


Figura 1.3: Un espacio de las fases de tres dimensiones y una trayectoria tratada sobre él

es la representación de una variable función del tiempo). Otra forma de hacer estas proyecciones es usando las mapas de Poincaré, procedimiento que presentaremos mas adelante (sección 1.3.5).

1.3.3. El teorema de Poincaré-Bendixon

El teorema de Poincaré-Bendixon es muy importante en la ciencia de la dinámica no lineal. Su demostración requiere conocimientos de topología y, por lo tanto, solo se presentarán aquí los resultados fundamentales. Consideremos un sistema dinámico autónomo de dos dimensiones:

$$\dot{x} = F(x)$$

El teorema supone que:

1. Existe un conjunto R cerrado y acotado en el plano.
2. $\dot{x} = F(x)$ es diferenciable sobre el conjunto R
3. R no contiene ningún punto fijo y
4. Existe una trayectoria C en el espacio de las fases contenida en R tal que su evolución permanece en R cuando $t \rightarrow \infty$.

El teorema concluye entonces que C será una órbita cerrada o bien una trayectoria que tiende a una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$. Enunciado así el teorema solo nos dice que en dos dimensiones las únicas órbitas posibles en un conjunto sin puntos fijos son ciclos límites cerrados. No hay, por tanto, mas trayectorias posibles, lo que rechaza la aparición de órbitas caóticas (comportamiento aperiódico formando un objeto llamado atrácto extraño). Este teorema demuestra, pues, que el caos solo puede aparecer en sistemas de mas de dos dimensiones dado que no se aplica para sistemas de dimensiones $n \geq 2$.

1.3.4. Exponentes de Lyapunov

La estabilidad de los sistemas lineales se estudia mediante los autovalores de la función F de la ecuación (1.3) . En un sistema lineal podemos escribir la ecuación (1.3) de la forma:

$$\dot{x} = Mx$$

Siendo M una matriz $n \times n$ de coeficientes constantes. El estudio de los autovalores de la matriz nos permite conocer la naturaleza de los puntos de equilibrio. Damos solo un ejemplo, si un sistema tiene el cero como punto de equilibrio, entonces este punto será estable si todas las partes reales de los autovalores de M son negativas. No vamos a tratar más el caso lineal, dado que puede considerarse como un caso particular del caso no lineal. Es preferible generalizar la noción de estabilidad.

En un sistema no lineal la definición de la estabilidad es diferente y es preciso hablar de la estabilidad de las trayectorias. Sucede que el estudio de los puntos de equilibrio no siempre indica el comportamiento del sistema. Existen sistemas con puntos de equilibrio inestables pero con una solución globalmente estable. El estudio de los puntos de equilibrio del sistema se efectúa de manera parecida al caso lineal, se linealiza el sistema alrededor de estos puntos y luego se estudian los autovalores aparte. Tomemos el sistema autónomo no lineal definido por (1.3):

$$\dot{x} = F(x)$$

Supongamos que existe un punto de equilibrio x_s tal que $\dot{x}_s = 0$. Para estudiar el comportamiento de una trayectoria cerca de estos puntos consideremos una trayectoria x muy cerca del punto x_s :

$$x = x_s + \tilde{x}$$

siendo $|\tilde{x}| \ll 1$. Se estudia como va a crecer el vector \tilde{x} en el tiempo. Si introducimos esta nueva variable en la ecuación del sistema autónomo (1.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_s + \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x} &= F(x) = F(x_s) + \frac{\partial F(x_s)}{\partial x} \tilde{x} + \mathcal{O}(\tilde{x}^2) \end{aligned} \tag{1.4}$$

La evolución de la perturbación alrededor de este punto viene dada en primera aproximación por:

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial F(x_s)}{\partial x} \tilde{x} \tag{1.5}$$

Si ponemos:

$$\frac{\partial F(x_s)}{\partial x} = M$$

basta estudiar los autovalores de la matriz M para tener una idea del comportamiento del sistema alrededor de los puntos de equilibrio.

Para generalizar la noción de estabilidad de las trayectorias introduzcamos la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Una trayectoria $x(t)$ con una condición inicial x_0 es estable en el sentido de Lyapunov si todas las trayectorias cuyas condiciones iniciales están cerca de x_0 se mantienen cerca de $x(t)$. De manera más formal, la solución $x_1(t)$ es estable si existe un δ tal que:

$$\begin{aligned} |x(t_0) - x_1(t_0)| &< \delta \\ \text{lo que implica} \quad |x(t) - x_1(t)| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{1.6}$$

para $t > t_0$ y para cualquier trayectoria $x(t)$ cuyas condiciones iniciales se encuentran dentro de la distancia δ . El otro criterio de estabilidad es muy sencillo y se llama estabilidad asintótica. Se define como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_1(t)| = 0 \tag{1.7}$$

para todas las condiciones iniciales.

Estos criterios de estabilidad son muy importantes en la teoría de los sistemas lineales y no lineales. Sin embargo, en el estudio del caos hace falta un procedimiento más sutil para estudiar la estabilidad de las trayectorias. En 1968 Oseledec desarrolló una herramienta muy potente para el estudio de los sistemas dinámicos no lineales. Los exponentes de Lyapunov permiten a la vez estudiar la estabilidad de los ciclos límites y medir la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Los exponentes de Lyapunov miden la divergencia exponencial entre dos trayectorias cuyas condiciones iniciales sean muy próximas. O sea la velocidad con la que se alejan dos trayectorias en el espacio de las fases cuando su separación era muy pequeña al principio. La figura 1.4 representa la evolución de esta pequeña diferencia.

Presentamos a continuación el desarrollo teórico de los exponentes de Lyapunov. Consideraremos un sistema autónomo no lineal

$$\dot{x} = F(x) \tag{1.8}$$

donde queremos medir la evolución de una pequeña perturbación en una trayectoria. La diferencia en las condiciones iniciales puede interpretarse co-

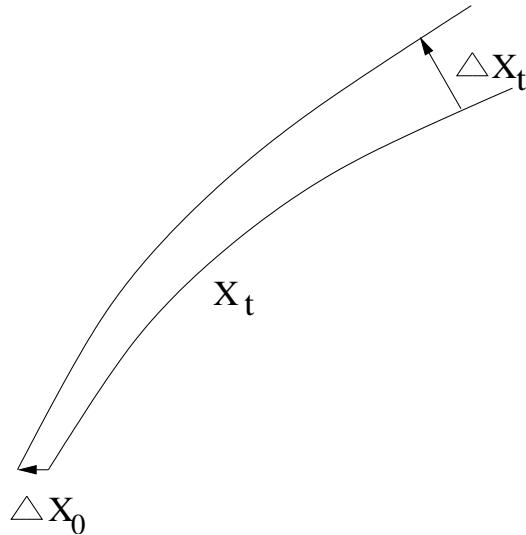


Figura 1.4: Divergencia de las trayectorias

mo el valor inicial de la perturbación. Entonces podemos expresar la trayectoria $x(t)$ perturbada como:

$$x(t) = x_p(t) + \tilde{x}(t)$$

siendo $\tilde{x}(t)$ la evolución temporal de la perturbación. Introducimos estas variables en la ecuación (1.8) y linealizamos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_p + \dot{\tilde{x}} \\ \dot{x} &= F(x_p + \tilde{x}) = F(x_p) + \frac{\partial F(x_p)}{\partial x} \tilde{x} + \mathcal{O}(\tilde{x}^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si despreciamos los términos de orden superior, a partir de estas dos ecuaciones obtenemos la evolución temporal de la perturbación:

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial F(x_p)}{\partial x} \tilde{x} \quad (1.10)$$

Dado que la derivada de F es una matriz dependiente del tiempo (de la trayectoria $x_p(t)$), entonces lo que tenemos es una ecuación diferencial con los coeficientes dependientes del tiempo. Si llamamos $\Phi(t)$ a esta matriz, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\dot{\tilde{x}} = \Phi(t) \tilde{x} \quad (1.11)$$

La resolución de este sistema es muy difícil pero disponemos de herramientas computacionales para integrarla. El vector (o matriz) \tilde{x} describe la perturbación en un espacio de dimensión n . Finalmente, los exponentes de Lyapunov se definen como:

$$\sigma(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{x}(t_0)} \right| \quad (1.12)$$

Expliquemos un poco esta fórmula. En un primer paso integramos la ecuación diferencial (1.11). Esta nos proporciona la evolución de la perturbación en el espacio de las fases. A cada dirección (o dimensión) del espacio de fase le corresponde un exponente de Lyapunov. Luego hay tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones en el espacio de las fases. Podemos ordenarlos por orden decreciente de la manera siguiente:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \quad (1.13)$$

Es el espectro de los exponentes de Lyapunov. La fórmula (1.12) no permite encontrar todos los exponentes correspondiente a cada subespacio, el exponente definido en (1.12) es el límite superior y solo proporciona el exponente mayor. Si definimos una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en el espacio de las fases entonces el vector \tilde{x} es una combinación lineal de estos vectores:

$$\tilde{x} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n \quad (1.14)$$

y la ecuación (1.12) nos da solo el primer exponente $\sigma(\tilde{x}) = \sigma_1$ (es límite superior en la ecuación (1.12)). Los exponentes de Lyapunov para cada dirección se definen como:

$$\sigma(e_i) = \sigma_i \quad (1.15)$$

Otra forma de definir los exponentes de Lyapunov es usando los exponentes de Lyapunov de orden p (Oseledec 1968). En la ecuación 1.12 estudiamos la expansión o la contracción según una dirección (según \tilde{x}). En el caso de los exponentes de orden p estudiamos la tasa de divergencia exponencial de un volumen V_p definido por un paralelepípedo de dimensión p en el espacio de las fases:

$$\sigma^p(V_p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln \frac{V_p(t)}{V_p(0)} \quad (1.16)$$

Si consideráramos un volumen definido por los vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ entonces el exponente de orden p valdría:

$$\sigma^p(V_p) = \sigma(e_1) + \sigma(e_2) + \cdots + \sigma(e_n) \quad (1.17)$$

dado que el volumen viene descrito por estos vectores. Este método permitirá encontrar todos los exponentes de Lyapunov porque se verifica la particularidad:

$$\begin{aligned}\sigma^1(V_1) &= \sigma_1 \\ \sigma^2(V_2) &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ &\dots \\ \sigma^n(V_n) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n\end{aligned}\tag{1.18}$$

y, a partir de una combinación de los $\sigma^p(V_p)$ se pueden encontrar todos los σ_n . En el fondo son los exponentes de Lyapunov expresados en una base distinta.

J.P. Eckmann y D. Ruelle elaboraron un algoritmo para calcular los exponentes de Lyapunov con ordenador. Hay que hacer notar que la perturbación evoluciona de forma exponencial, por lo que los ordenadores alcanzan rápidamente sus limitaciones. La idea es de encontrar una nueva base para el vector \tilde{x} y normalizarla (así impedimos que el vector alcance valores grandes). Para cada renormalización se realiza una media temporal de $|\tilde{x}(t)|$. Así se van obteniendo los n exponentes de Lyapunov. Ya sabemos que estos miden la divergencia entre dos trayectorias de condiciones iniciales muy cercanas.

En los sistemas dinámicos de tres dimensiones se puede determinar su comportamiento solo a partir del signo de los exponentes de Lyapunov. Además estos exponentes definen toda la dinámica del sistema y su comportamiento asintótico. El conjunto sobre la cual evolucionan las trayectorias se llama un atrácteur. El espectro de Lyapunov indica que tipo de atrácteur es:

Signos	Tipo de atrácteur
(-, -, -)	Punto fijo
(0, -, -)	Ciclo límite
(0, 0, -)	Toros
(+, 0, -)	Atrácteur caótico

En la figura 1.5 se representan ejemplos de estos tipos de atráctores. El atrácteur caótico es el más interesante, parece que las trayectorias llenan una cierta zona del espacio de las fases. Los atráctores poseen ciertas particularidades. Primero, la estructura de tales atráctores se compone de varias “capas”. La trayectoria en el espacio de fase forma un mil-hojas de espesor finito pero con un gran número de capas. El objeto formado posee una cierta dimensión fractal asociada (ver sección 1.3.9). Algunos de los atráctores

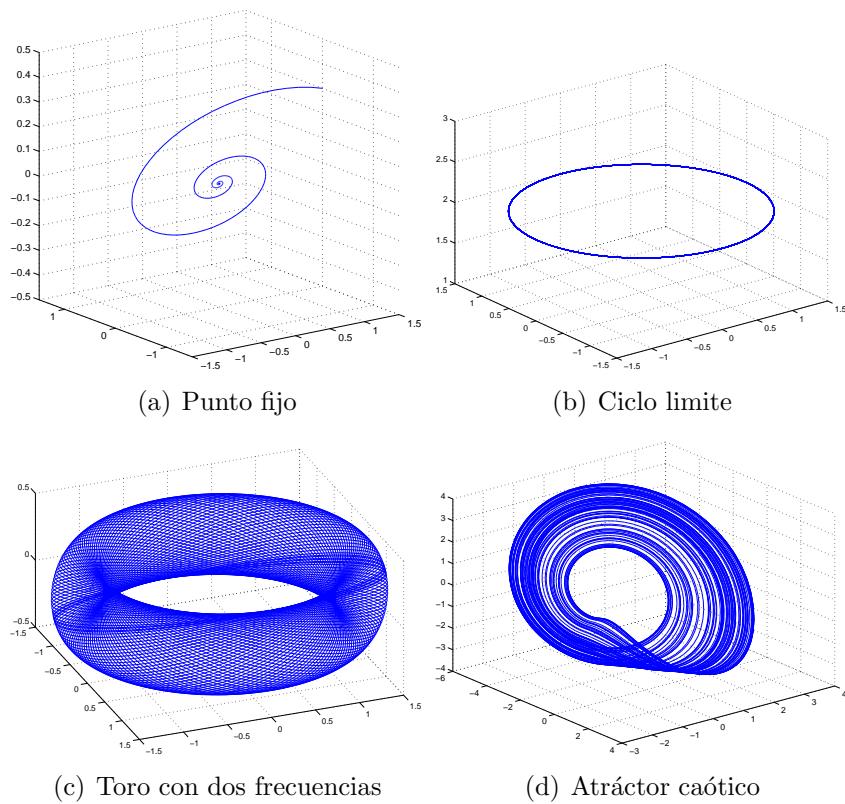


Figura 1.5: Distintos tipos de atráctores

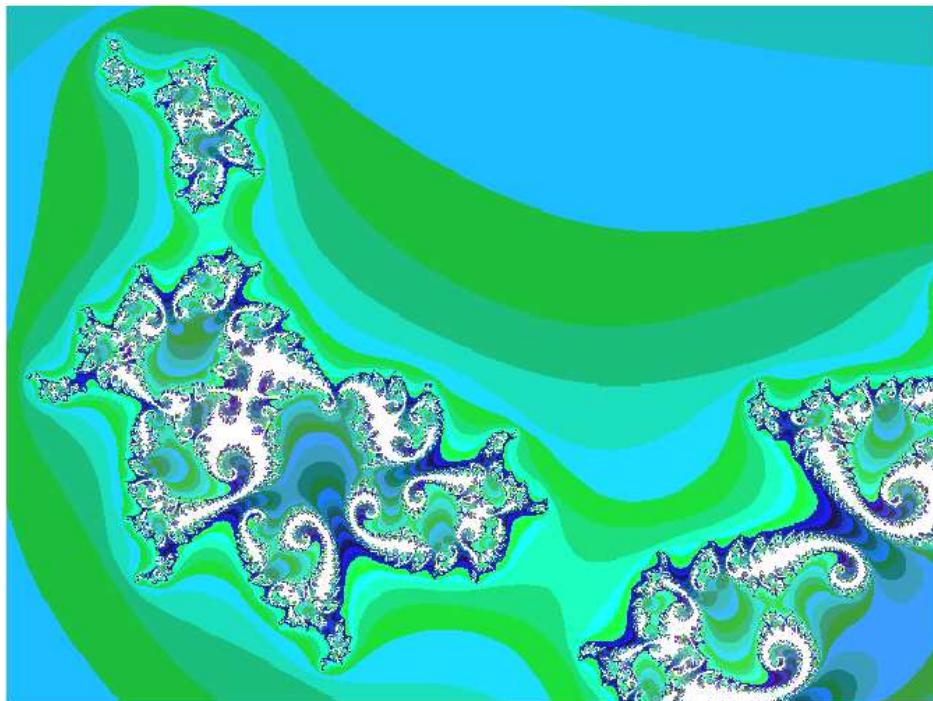


Figura 1.6: Curva fractal realizada con el programa xfractint

tienen la propiedad de auto-similitud. Si ampliamos una parte del atrácto r podremos ver el mismo motivo que a la escala superior, lo que es característico de las famosas curvas fractales (ver un ejemplo en la figura 1.6).

Tal como se vio en la introducción, el caos puede ocurrir solo en un sistema que tiene por lo menos una dimensión de contracción de los volúmenes y otra de expansión. Un exponente de Lyapunov negativo corresponde a una dimensión contractiva, y uno positivo a una dimensión expansiva. Hay un teorema que afirma que toda trayectoria que no acaba en un punto fijo posee por lo menos un exponente nulo (ver [5]). Sucede entonces que en tres dimensiones hay solo un caso posible para la aparición del caos, el $(+,0,-)$.

Otro aspecto importante de los sistemas caóticos es la tasa de contracción de los volúmenes. Dicha tasa es un número que indica como evolucionan globalmente los volúmenes. En un sistema autónomo del tipo (1.8) la contracción

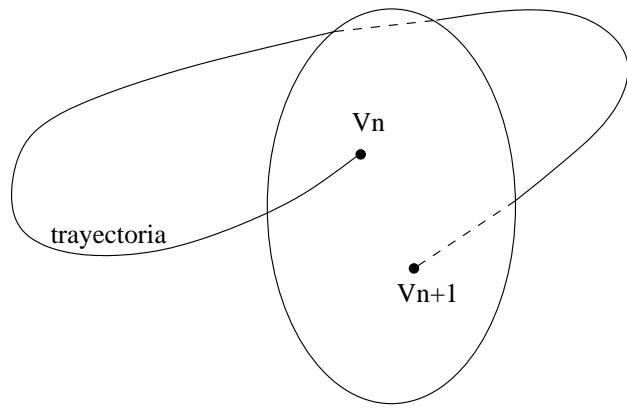


Figura 1.7: Ejemplo de mapa de Poincaré

(o expansión) de los volúmenes viene dado por:

$$\Lambda = \text{div}F \quad (1.19)$$

Esta fórmula procede del teorema de Liouville (este teorema relaciona la variación de los volúmenes con la divergencia de F). La tasa Λ puede relacionarse con los exponentes de Lyapunov de manera muy sencilla. La ecuación (1.16) calcula la evolución de los volúmenes en el espacio de las fases. El teorema de Liouville relaciona las dos ecuaciones y lleva a la conclusión:

$$\text{div}F = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n \quad (1.20)$$

Esta relación permite calcular fácilmente la suma de los exponentes de Lyapunov. En los sistemas disipativos la suma de los exponentes de Lyapunov es negativa y, por lo tanto, también lo es en los sistemas caóticos.

Los exponentes de Lyapunov fueron calculados en el proyecto con un programa de Matlab basado en el algoritmo de J.P. Eckmann y D. Ruelle en [5].

1.3.5. Mapas de Poincaré

Las mapas de Poincaré permiten estudiar una trayectoria en el espacio de dimensión n sobre un mapa de dimensión $n-1$. Es decir en el caso tridimensional estudiamos la intersección de la trayectoria en tres dimensiones con un

plano. Tenemos, pues, una aplicación del plano sobre si mismo. Definámoslo de manera un poco mas formal.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas:

$$\dot{v} = F(v)$$

donde v es un punto de \mathbb{R}^n (un vector) y F una aplicación sobre \mathbb{R}^n . Sea v_γ una órbita periódica del sistema y V_0 un punto de esta órbita. Cortamos el flujo con un disco \mathcal{D} de dimensión $n-1$ transversal a v_γ en V_0 . La aplicación iterada del disco sobre si mismo viene definida por:

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ & V_n \rightarrow V_{n+1} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Esto permite simplificar mucho el estudio de una aplicación; pero hay que encontrar la ecuación de esta aplicación lo que, en ocasión, es de gran complejidad. La sección de Poincaré permite ver los comportamientos caóticos y regulares de un atrácto, lo que hace de ella un procedimiento de trabajo interesante. Por ejemplo, se puede ver fácilmente la periodicidad de un ciclo límite o la quasi-periodicidad de un ciclo. La figura 1.7 muestra como cortar una trayectoria en el espacio de las fases para obtener la aplicación de Poincaré.

1.3.6. Mapas de retorno

Al estudiar su sistema caótico, Lorenz ([9]) tuvo la brillante idea de expresar los máximos de una señal en función de los máximos siguientes. Se dio cuenta que la aplicación así definida poseía propiedades interesantes. El mapa de primer retorno consiste en dibujar el máximo de una variable dinámica en función del siguiente, si llamamos x_k a los máximos de una de las variables, la ecuación del mapa es :

$$x_k = f(x_{k+1})$$

En algunos casos se puede encontrar una expresión de la función f . Así podemos estudiar el sistema bajo la forma de una aplicación iterada. Por ejemplo Lorenz encontró una clase de función para su sistema de ecuaciones diferenciales [6]. En la figura 1.8 presentamos un ejemplo de mapa de

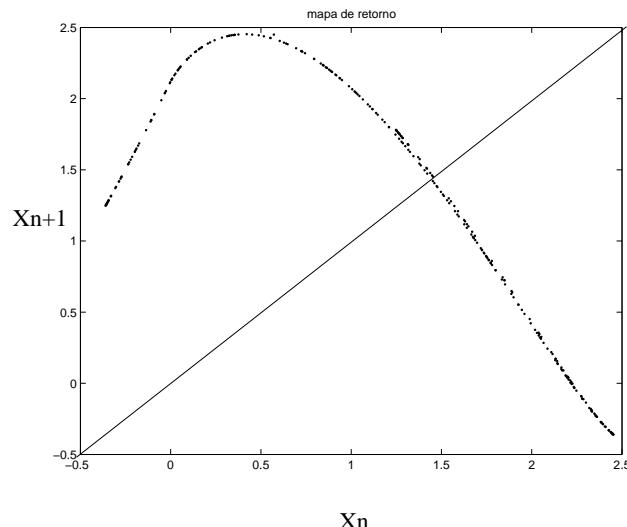


Figura 1.8: Ejemplo de mapa de retorno

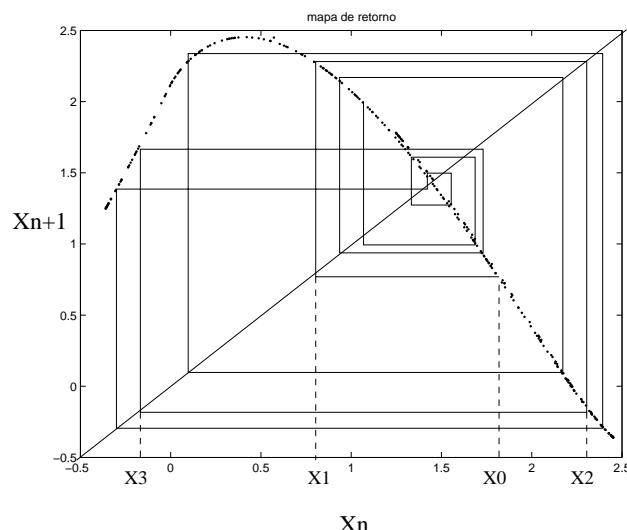


Figura 1.9: Mapa de retorno después de algunas iteraciones

retorno para un sistema que estudiaremos en detalle después (sección 2.2.6).

El mapa de retorno permite estudiar fenómenos como ciclos límites, puntos fijos o trayectorias caóticas. En la figura 1.8 se ha dibujado también la función $g(x) = x$ o sea, la bisectriz. Esta recta permite iterar el mapa de manera gráfica (ver figura 1.9). Primero se escoge un x_0 , y a partir de él se obtiene el primer máximo, el segundo paso es encontrar x_1 aplicando g y continuar con este proceso. La figura 1.10 representa varios ejemplos de trayectorias, obtenidas a partir del mapa logístico. El mapa logístico es, pues, un mapa unidimensional de bastante utilidad en los estudios caóticos. Presenta varios tipos de atráctores e incluso de comportamientos caóticos. La ecuación del mapa es muy sencilla:

$$f(x_k) = ax_k(x_k - 1)$$

La aplicación logística es un paradigma para el estudio del caos. Presenta todos los comportamientos típicos de un sistema caótico y se pueden aplicar muchos de los procedimientos que se han visto antes (estudio de la estabilidad etc). Variando el parámetro a en la ecuación (1.5) se obtienen puntos fijos estables ($a = 2,95$), ciclos límites de períodos 2 y 4 ($a = 3,1$ y $a = 3,5$) y régimen caótico ($a = 4$).

Si dado un sistema dinámico, se encuentra una función para el mapa de retorno ya no es preciso integrar la ecuación diferencial para estudiar la dinámica del sistema. El mapa de retorno puede proporcionar, pues, mucha información.

En una aplicación caótica las trayectorias van a recorrer todo el intervalo definido por el mapa de retorno. Las trayectorias van a llenar el intervalo con un cierta densidad de probabilidad. Es decir que algunos intervalos estarán más o menos visitados que otros. La teoría ergódica permite relacionar una media temporal con una media espacial (es decir la distribución espacial de las trayectorias). Si el sistema es ergódico se puede caracterizar el comportamiento dinámico del sistema a partir de cualquier trayectoria. Haremos mas precisiones teóricas durante el estudio de los sistemas (sección 2.2.6).

Los mapas de retorno tienen la particularidad de poder relacionar el exponente de Lyapunov del sistema en tiempo continuo con el exponente máximo de Lyapunov del mapa de retorno. Los puntos fijos del sistema son inestables si la derivada de la trayectoria del mapa en ellos presenta un módulo superior

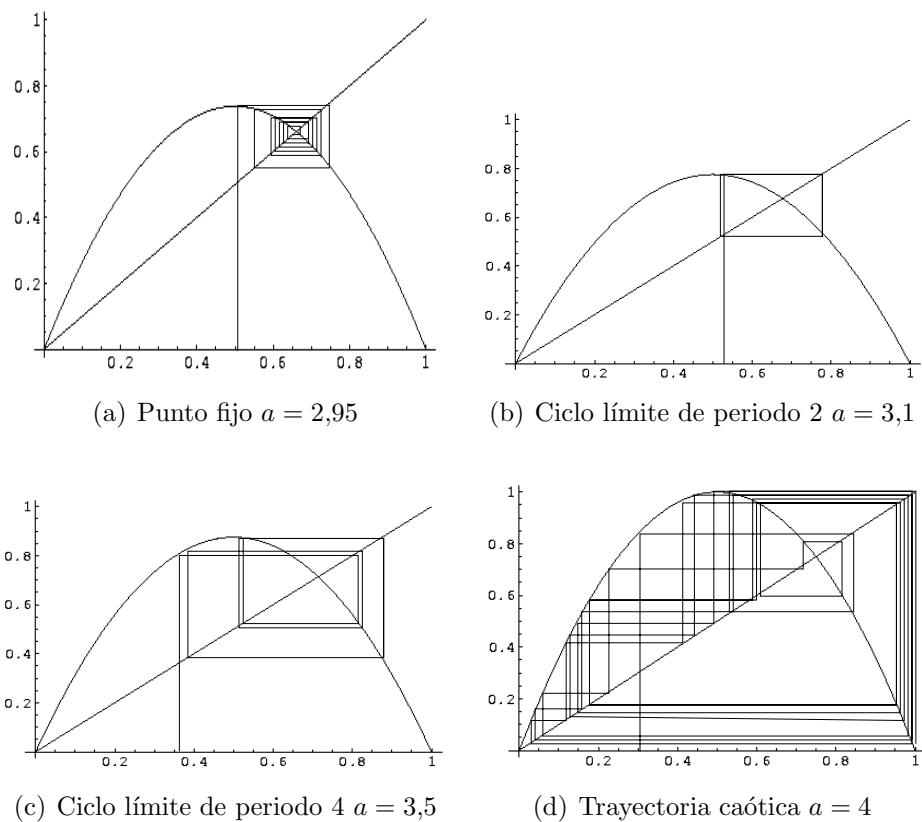


Figura 1.10: Aplicación logística iterada para varios valores del parámetro a

a 1. La demostración es muy sencilla y sigue las mismas normas que hemos visto antes pero en una dimensión.

Tomamos un punto fijo x_p es decir un punto tal que:

$$x_p = f(x_p)$$

Estudiamos el comportamiento del sistema alrededor de este punto observando el efecto de una pequeña perturbación $x_k = x_p + \delta_k$:

$$x_{k+1} = f(x_p + \delta_k)$$

Linealizamos y obtenemos:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_p) + f'(x_p)\delta_k + \mathcal{O}(x_p^2) \\ \delta_{k+1} &= f'(x_p)\delta_k \end{aligned} \quad (1.22)$$

Entonces el punto fijo es inestable si $|f'(x_p)| > 1$. Si el sistema no tiene ciclos límites estables entonces es muy posible que sea caótico. La divergencia exponencial de las trayectorias se simplifica con el estudio de la derivada en cada punto de la trayectoria. Aplicando la definición:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |f'(x_n)| \quad (1.23)$$

observamos que el sistema tendrá un exponente de Lyapunov positivo si en promedio la derivada de f es superior a 1. En caso contrario el exponente puede ser cero (ciclo límite) o negativo (punto fijo).

1.3.7. Diagramas de bifurcación

En muchos sistemas dinámicos la variación de un parámetro o un coeficiente puede llevar a cambios importantes del comportamiento del sistema. Por ejemplo el parámetro de control puede ser la atenuación en un oscilador, o la cantidad de comida en una población de mosquitos. Si dibujamos los máximos de una variable dinámica para cada valor de este parámetro obtenemos lo que se llama un diagrama de bifurcación. Cada vez que el sistema cambia de estado se dice que se produce una bifurcación.

En la figura 1.11 se muestra un ejemplo sencillo de diagrama de bifurcación. Al principio (para valores del parámetro de control comprendidos

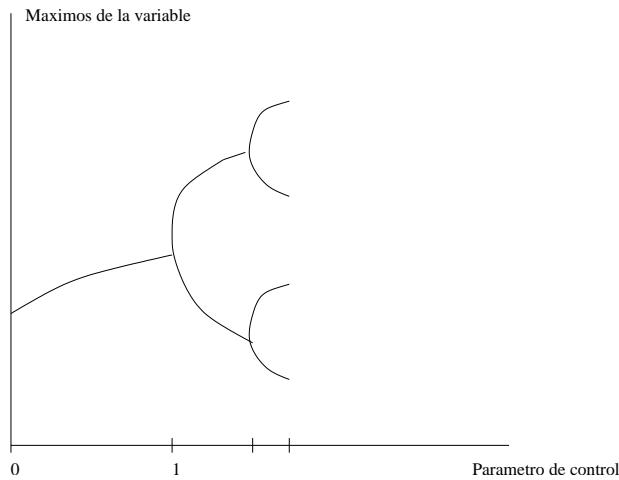


Figura 1.11: Diagrama de bifurcación de un sistema sencillo

entre 0 y 1) el sistema es periódico de período 1 (el máximo crece ligeramente de valor). Cuando el parámetro alcanza el valor 1 el sistema presenta un desdoblamiento de período, ahora hay 2 máximos lo que significa un ciclo límite de período 2. Para un valor todavía mayor del parámetro de control aparece un nuevo desdoblamiento con un ciclo límite de cuatro períodos. En otros sistemas más complejos se presentan más tipos de bifurcaciones y, desde luego hay bifurcaciones que llevan a un estado caótico del sistema. Con este estudio podemos determinar para qué valores del parámetro de control del sistema podemos obtener una situación de caos. No vamos a entrar en los detalles de la teoría de las bifurcaciones, solo vamos a comentar las más importantes.

En la figura 1.12 tenemos el ejemplo de un sistema más complejo; al disminuir el parámetro de control desde el extremo derecho de la figura se observan desdoblamientos de períodos hasta entrar en un comportamiento caótico, estado que se caracteriza por una gran densidad de puntos. En la zona más a la derecha, pues, el sistema es estable de período 1, cuando disminuimos el parámetro de control se produce la primera bifurcación. Esta bifurcación corresponde a un cambio en la estabilidad del ciclo límite. Los autovalores del sistema linealizado (ver (1.5)) antes de la bifurcación poseen partes reales negativas; después de la bifurcación los autovalores tienen partes

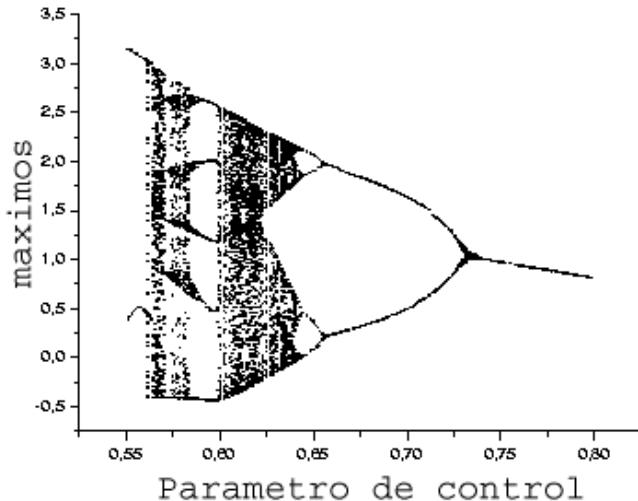


Figura 1.12: Diagrama de bifurcación de un sistema caótico

reales positivas, el ciclo es por lo tanto estable. Una bifurcación de este tipo se llama **bifurcación de Hopf**. Cuando se disminuye todavía más el parámetro de control, el ciclo de período dos estable vuelve a su vez a ser inestable y se convierte en un ciclo de período 4 estable. Este tipo de transición es una bifurcación por **desdoblamiento de período**. Los desdoblamientos continúan hasta que el sistema llega a una zona aperiódica. Es el comienzo de la zona caótica.

También existen transiciones de un estado caótico a un estado regular cuando se disminuye el parámetro de control. Estas zonas se llaman ventanas de periodicidad. El sistema vuelve a ser periódico y, además, se pueden producir, a su vez, otros desdoblamientos de período.

El diagrama de bifurcación presenta una particularidad interesante de auto similitud, y para observarlo se ha ampliado una parte del diagrama en la figura 1.13. Una propiedad todavía más sorprendente es la relación entre los valores para los cuales ocurren las bifurcaciones. Si llamamos α_k al valor del parámetro de control para el cual ocurre la k -ésima bifurcación, se verifica

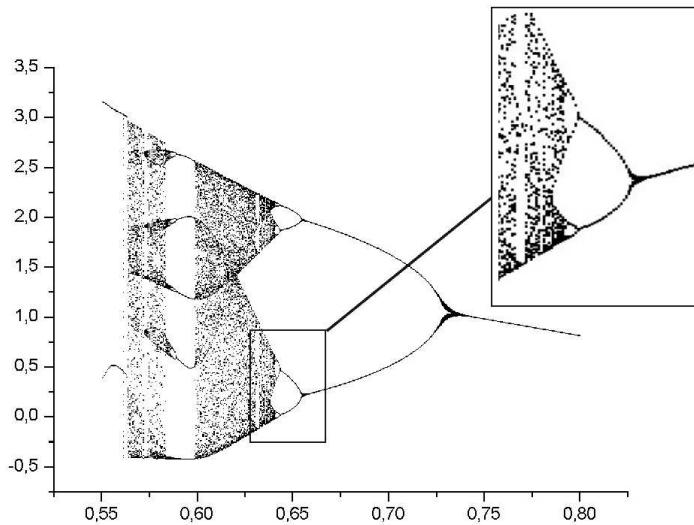


Figura 1.13: Auto-similitud de un diagrama de bifurcación

(ver [10]):

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \quad (1.24)$$

Este límite es un número δ conocido como la constante de Feigenbaum y vale para toda una clase de diagramas de bifurcación, es un fenómeno universal.

1.3.8. Espectros, autocorrelación y estadísticas

El análisis de Fourier permite representar las funciones de manera única en un espacio de funciones periódicas. Ya no representamos las variables evolucionando en el tiempo sino en el dominio de las frecuencias. Con esta nueva representación se pueden obtener informaciones valiosas para el estudio de los sistemas. En primer lugar se puede saber si el sistema es regular o caótico. Si el sistema se compone de una combinación de tonos puros, entonces posee un comportamiento regular. Si, por el contrario, el sistema presenta un aspecto de “ruido” el sistema puede ser caótico. Existen muchas herramientas para el cálculo numérico de estos espectros. En la figura 1.14 se muestran los espectros de las señales típicas que se encuentran en el estudio del caos.

La función de autocorrelación mide la auto-similitud de la señal en el tiempo. Es una función del tiempo que asocia una medida de la similitud de una función f consigo misma en un tiempo anterior:

$$a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(\tau - t)dt \quad (1.25)$$

El máximo de la función se encuentra para $\tau = 0$ lo que representa la energía de la función f . La autocorrelación es una indicación de la capacidad de memoria del sistema de sus estados pasados. Cuando el sistema no repite los comportamientos que tuvo antes entonces la autocorrelación es decreciente. Si, por el contrario, la señal es periódica entonces la función de autocorrelación es periódica también. Por tanto permite evaluar la naturaleza caótica de los sistemas caóticos . Los sistemas caóticos pierden la memoria de sus estados pasados, es decir que la función de autocorrelación es decreciente y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. La velocidad con que decrece la autocorrelación indica el grado con que el sistema es caótico.

Las estadísticas como la densidad de probabilidad de la solución (PDH), dan una idea de como se distribuyen los valores que adquiere la amplitud de la señal. Los histogramas de las señales estiman la densidad de probabilidad de una señal, su mayor o menor permanencia dentro de cada valor numérico. Para obtenerla se toman valores de la función durante un cierto tiempo y se cuenta el número de veces que la función pasa por cada intervalo de amplitud. Para las señales periódicas la PDH presenta un número de máximos locales que se corresponden con el número de períodos del ciclo (ver figura 1.15.a). Para una señal caótica la repartición es mucho mas “aleatoria” y consta de una multitud de máximos locales. La PDH sirve para reconocer la presencia de las señales caóticas. Así como para las señales regulares la PDH converge hacia una gráfica cada vez mejor definida al aumentar el tiempo de observación, para las señales caóticas no cesa de fluctuar sin tender nunca a una forma definida.

1.3.9. Dimensión fractal

Se ha mencionado antes la particularidad de los atráctores extraños. Estos objetos presentan a veces una estructura compuesta de una infinidad de

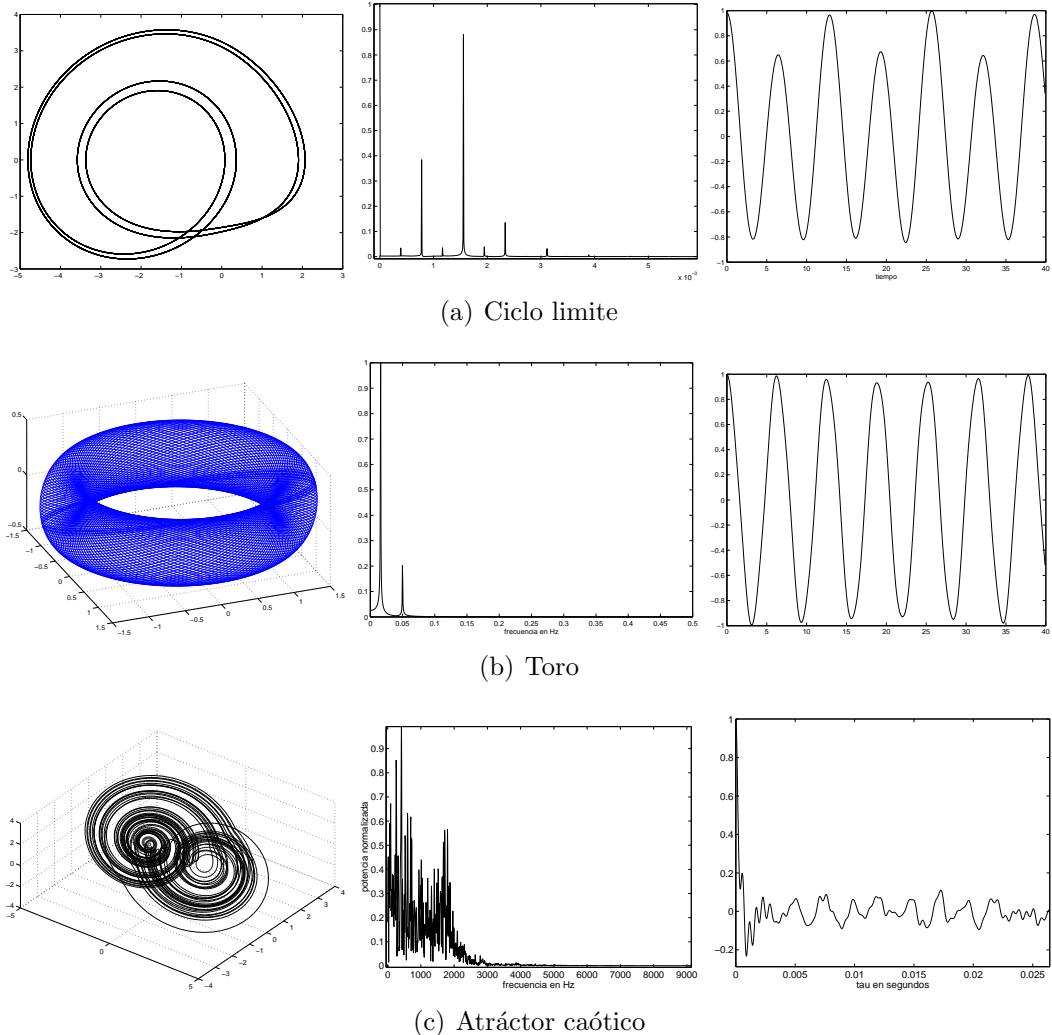


Figura 1.14: Ejemplos de atráctores, espectros y funciones de autocorrelación (a la izquierda el atráctor, en el centro el espectro y a la derecha la función de autocorrelación) de algunas situaciones dinámicas que aparecen en el estudio del caos

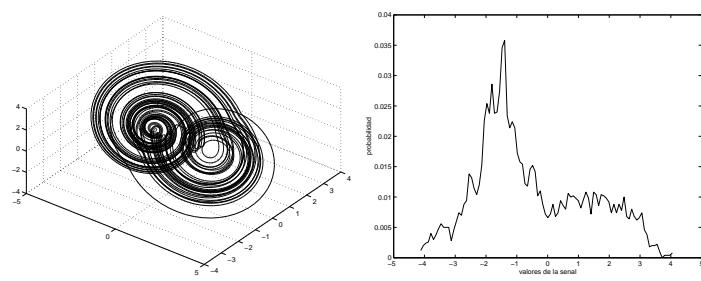
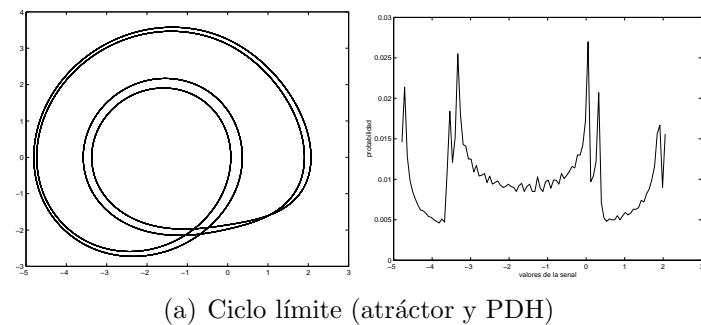


Figura 1.15: Ejemplos de PDH y el atráctor correspondiente

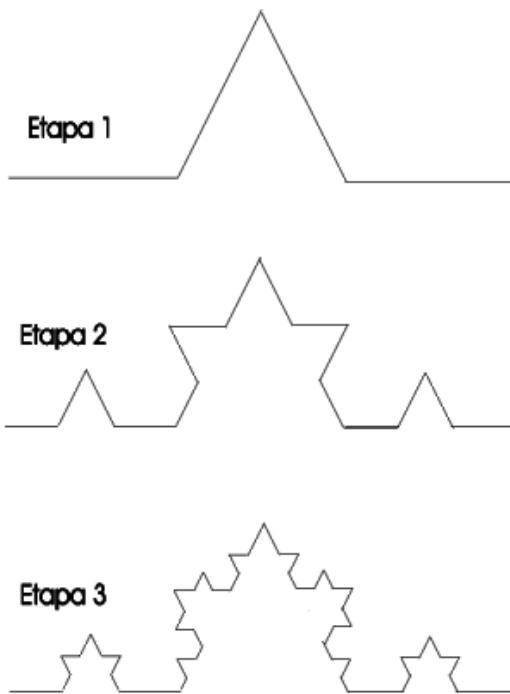


Figura 1.16: Construcción de la curva de Von Koch

hojas superpuestas pero de espesor nulo. ¿ Cómo se puede caracterizar un conjunto tan peculiar ? La respuesta viene de manos de la geometría fractal, la ciencia que estudia las curvas y conjuntos fractales. La citada ciencia trata de racionalizar los objetos matemáticos más extraños (y, por tanto, más interesantes). Una particularidad muy interesante de los fractales consiste en que poseen una estructura fina que se repite indefinidamente a cualquier escala. Estas curvas son continuas pero no son derivables por ninguna parte. Sin embargo, la geometría fractal asocia una dimensión a estos objetos. La dimensión no es entera, y se pueden tener objetos, por ejemplo, de dimensiones comprendidas entre la línea (1) y el punto (0); o entre el plano (2) y el volumen (3).

La curva de Von Koch (o el copo de nieve de Von Koch) es una curva que se obtiene iterando un motivo muy simple. La construcción de la curva se representa en la figura 1.16. En la primera operación se suprime el tercio central del segmento y se le pone un ángulo equilátero en su lugar. Esta operación

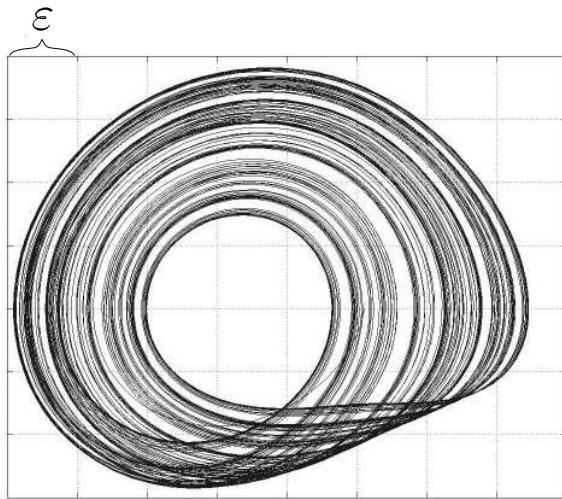


Figura 1.17: Recubrimiento con cuadrados de un atráctor

se repite hasta el infinito. La longitud de la curva así definida es infinita pero se encuentra descrita en un espacio finito. El concepto de dimensión fractal se puede definir a partir de este ejemplo.

La dimensión de capacidad (o Box dimensión) consiste primero en recubrir un atráctor con cubos n dimensionales y de tamaño ε^n . Luego se cuenta el número mínimo de cubos que hacen falta para recubrir todo el atráctor (ver el caso de la figura 1.17). Sea $N(\varepsilon)$ este número. La dimensión de capacidad se define entonces como:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (1.26)$$

En el caso de la curva de Von Koch la longitud de la línea se multiplica por $4/3$ para cada iteración, luego $N(\varepsilon) \propto 4^k$ y $\varepsilon \propto (1/3)^k$ (la dimensión de cada segmento se reduce en un tercio cada vez). La dimensión fractal de la curva cuando $k \rightarrow \infty$ es, aplicando (1.26) $D_c = \ln 4 / \ln 3 = 1,26$. Por tanto la curva obtenida es algo comprendido entre una línea y un plano.

La dimensión de capacidad es un caso particular de la dimensión fractal de Hausdorff. La dimensión de Hausdorff (o Hausdorff-Besicovitch) se construye de la misma manera pero el tamaño de los cubos n dimensionales puede vari-

ar (varia el borde ϵ_i). Se presentan problemas prácticos para calcular estas dimensiones numéricamente, no es nada sencillo encontrar un recubrimiento mínimo (mas todavía con la dimensión de Hausdorff). Existen otras definiciones de dimensión fractal más accesibles para el cálculo numérico, como la dimensión de correlación o la dimensión de información (ver [5], [9], [10]).

Dimensión generalizada

Este concepto de la dimensión apareció en una publicación de Hentschel y Procaccia (1983). La definición de la dimensión reagrupa las dimensiones de tipo geométrico (como la capacidad o la dimensión de Hausdorff) y las dimensiones basadas en propiedades estadísticas de los atráctores.

Para empezar se divide el espacio de las fases en cubos n-dimensionales de longitud ε (ver figura 1.17). Si llamamos $W(\varepsilon)$ al número de cubos que contienen los puntos del atráctor, sea N el número total de puntos del atráctor y N_i el número de puntos en el cubo i . La probabilidad de que un punto dado se encuentre en el cubo i es $p_i = N_i/N$. Ahora se puede definir lo que se llama información media de orden q (o información de Rényi):

$$\bar{I}_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{W(\varepsilon)} (p_i)^q \quad (1.27)$$

y siguiendo la linea de definición de la dimensión de capacidad D_c se puede introducir la dimensión generalizada de orden q como:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{I}_q(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (1.28)$$

Esta definición engloba la dimensión de capacidad, la dimensión de información y la dimensión de correlación según los valores que toma q :

- $q=0$ (Dimensión de capacidad)

A partir de las dos ecuaciones anteriores encontramos:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln W(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (1.29)$$

Se comprueba la coincidencia con (1.26): $D_0 = D_c$

- q=1 (Dimensión de información)

La dimensión generalizada con q=1 corresponde a la entropía total del sistema (en el sentido de la teoría de la información). La dimensión D_1 puede expresarse de la manera siguiente:

$$D_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{W(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln 1/\varepsilon} \quad (1.30)$$

Esta dimensión coincide con D_I (ver [10]).

- q=2 (Dimensión de correlación)

En este caso la suma $\sum_{i=1}^{W(\varepsilon)} p_i^2$ expresa la probabilidad de que dos puntos del atrácto se encuentran en el mismo cubo i. Esta probabilidad es la misma que encontrar dos puntos a una distancia inferior o igual a ε . La probabilidad se puede calcular con una función de correlación entre los puntos, por eso a D_2 se le llama también dimensión de correlación. La dimensión de correlación se expresa como:

$$D_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{W(\varepsilon)} p_i^2}{\ln 1/\varepsilon} \quad (1.31)$$

y coincide con D_K (ver [10]).

Entre todas estas dimensiones se verifica la relación de orden:

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0 \quad (1.32)$$

Una aplicación práctica de estas nociones de las dimensiones es la reconstrucción de atráctores a partir de la dimensión de correlación. Tomando la serie temporal correspondiente a una variable bien escogida podemos reconstruir el atrácto en el espacio de las fases.

La dimensión caracteriza también la naturaleza del atrácto: así como una dimensión entera significa un movimiento periódico, sin embargo los valores no enteros caracterizan las trayectorias irregulares y no previsibles. La información proporcionada por estas dimensiones no sirven siempre para decidir con certeza sobre la naturaleza del movimiento. Por ejemplo un atrácto con

una dimensión próxima a un número entero ($D_c = 1,97$), no significa que las trayectorias en el espacio de las fases sean caóticas. Hace falta comprobar el espectro de Lyapunov para que no quepan dudas.

Citamos por último la dimensión de Kaplan-York y la dimensión de Lyapunov las cuales están relacionadas con los exponentes de Lyapunov [9], [10].

Capítulo 2

Estudio de los sistemas caóticos

2.1. Introducción

Se van a estudiar los circuitos caóticos generados por una ecuación diferencial de la forma:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} = g(x) \quad (2.1)$$

donde $g(x)$ es una función no lineal. Esta clase de ecuaciones diferenciales se llaman “jerk function” y, entre otros autores fueron estudiados por J.C. Sprott [1]. Este autor propone circuitos electrónicos que simulan estas ecuaciones diferenciales donde la no linealidad se construye agrupando zonas lineales a trozos. Los circuitos son sencillos y fáciles de realizar o de simular con herramientas informáticas. La no linealidad a trozos produce un caos mas o menos importante según el salto provocado.

El objetivo de los estudios de estos sistemas es elegir cual de los circuitos es más adecuado para su aplicación a las comunicaciones seguras. En este estudio se van usar todos los procedimientos que disponemos para el análisis del caos descritos en la introducción teórica (capítulo 1.3).

Los sistemas lineales a trozos definidos por la ecuación genérica (2.1) pueden estudiarse de tres maneras:

1. Analíticamente a partir de un estudio de la solución generada. La solución se puede implementar numéricamente para ver el comportamiento del sistema. También se pueden aplicar otros procedimientos para

completar el conocimiento sobre el comportamiento del sistema (por ejemplo el estudio de los autovalores).

2. mediante una integración numérica de la solución con programas de simulación. Estas simulaciones permiten conocer mejor el comportamiento del sistema para distintos valores de los parámetros de control.
3. mediante la realización de un circuito electrónico y la medición directa de las tensiones.

A su vez, las simulaciones numéricas pueden realizarse de dos maneras:

- la primera es la integración directa de la ecuación con Matlab, lo que permite conocer precisamente el comportamiento del sistema para un valor determinado del parámetro de control. También se pueden obtener estimaciones de los espectros, exponentes de Lyapunov, etc.
- la segunda es la simulación de la ecuación diferencial mediante un circuito electrónico y un software de CAO. Esta forma de simular permite averiguar si la implementación electrónica funciona correctamente. Además, se pueden también obtener estimaciones de los espectros, función de autocorrelación y exponentes de Lyapunov.

En este capítulo se estudiarán las ecuaciones diferenciales empleando varios métodos y aplicando los procedimientos de estudio expuestos.

2.2. No linealidad del tipo “valor absoluto”

En esta sección llamamos a sistema “valor absoluto” al sistema dinámico no lineal descrito por la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} - c|x| + d = 0 \quad (2.2)$$

Se estudia a continuación este sistema empleando varios procedimientos de análisis lineal y no lineal.

2.2.1. Solución analítica

Sprott estudió una solución de la ecuación (2.2) con los coeficientes $c = 1$ y $d = 1$ (en [1]). Por otra parte se ha fijado el coeficiente b a 1, dado que este coeficiente así definido no influye en el estudio que sigue. Estos convenios permiten reducir los parámetros de control del sistema a uno. Al coeficiente a lo llamaremos adelante parámetro de control A

La solución analítica de esta ecuación es continua y las derivadas también son continuas hasta el orden 3. De acuerdo con los valores los valores de A el sistema puede presentar o no un comportamiento caótico. La solución de (2.1) se puede obtener a partir de la solución de la ecuación:

$$\ddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} \pm x + 1 = 0 \quad (2.3)$$

Esta ecuación tiene una solución que depende del signo de x . Se establece el convenio de tomar el signo $(-)$ cuando $x \geq 0$ y el $(+)$ cuando $x < 0$. El esqueleto de la solución es el siguiente:

$$x(t) = \pm(-1) + \sum_{k=1}^3 C_{(k)} e^{\rho_{\pm}^{(k)} t} \quad (2.4)$$

Los coeficientes $C_{(k)}$ vienen determinados por las condiciones iniciales y los $\rho_{\pm}^{(k)}$ son las soluciones de la ecuación característica:

$$(\rho_{\pm}^{(k)})^3 + A(\rho_{\pm}^{(k)})^2 + (\rho_{\pm}^{(k)}) \pm 1 = 0 \quad (2.5)$$

Dependiendo del signo de x esta ecuación posee soluciones distintas. El sistema presenta dos puntos fijos: $x^* = \{-1; +1\}$. Si linealizamos la ecuación

(2.3) alrededor de estos de estos puntos (siguiendo el método visto en el apartado 1.3.4), la condición de estabilidad viene dada a partir de la ecuación:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda - \text{sign}(x^*) = 0 \quad (2.6)$$

Para que los puntos $x^* = \{-1; +1\}$ sean estables hace falta que las soluciones tengan todas las partes reales negativas. El punto fijo $x^* = +1$ es inestable para cualquier de A , en cambio el punto fijo $x^* = -1$ es estable para $A > 1$ y se vuelve inestable via una bifurcación de Hopf para $A \leq 1$.

La solución consta de tres exponentiales, una es real y las otras dos son complejas conjugadas (ecuación (2.4)). La exponencial real en una ecuación diferencial lineal determina el comportamiento de la solución. Una exponencial de la forma $e^{\alpha t}$ con $\alpha < 0$ tendrá un comportamiento estable cuando $t \rightarrow \infty$ ($e^{\alpha t} \rightarrow 0$). Pero si $\alpha > 0$ entonces la exponencial diverge ($e^{\alpha t} \rightarrow \infty$). La exponencial real de la solución de (2.3) presenta un α negativo o positivo dependiendo del signo de la variable x . No obstante la solución es estable debido a la oscilación de x , la alternancia del signo de la variable x (y por tanto la alternancia del signo del exponente real), proporciona una solución estable.

La solución global se descompone según el signo de x , el cual define segmentos de la solución. El signo de x es constante en cada segmento. La solución se expresa:

$$x(t) = \sum_{j=1}^N x_j(t) \Phi(t - t_{j-1}) [1 - \Phi(t - t_j)] \quad (2.7)$$

donde Φ la función de Heavyside y $x_j(t)$ la solución correspondiente al segmento j , y depende directamente del signo de x en el segmento j (el signo es $s(j)$). La expresión del segmento $x_j(t)$ en el tiempo $[t_{j-1}, t_j]$ es

$$x_j(t) = s(j)(-1) + \sum_{k=1}^3 C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t} \quad (2.8)$$

Las constantes $C_{s(j)}^{(k)}$ están definidas por las condiciones iniciales del segmento para el tiempo t_{j-1} y deben estar calculadas para cada trozo. Partimos de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x_j(t_{j-1}) = 0 \\ \dot{x}_j(t_{j-1}) = \dot{x}_{j-1}(t_{j-1}) \\ \ddot{x}_j(t_{j-1}) = \ddot{x}_{j-1}(t_{j-1}) \end{array} \right\} j = 2, 3, \dots$$

Las soluciones de la ecuación (2.5) se calculan manteniendo el $s(j)$. El signo selecciona directamente las soluciones a elegir. Si $s(j) = +1$ [respectivamente $s(j) = -1$] entonces tenemos una solución real y positiva $\rho_-^{(1)} > 0$ [$\rho_+^{(1)} < 0$] y dos soluciones complejas conjugadas $\rho_-^{(2)} = \sigma_-^{(2)} \pm i\omega_-$ con una parte real $\sigma_-^{(2)} < 0$ [$\sigma_+^{(2)} > 0$].

Los coeficientes $C_{s(j)}^{(k)}$ se calculan a partir del sistema lineal:

$$0 = s(j)(-1) + \sum_{k=1}^3 C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

$$\dot{x}_j(t_{j-1}) = \sum_{k=1}^3 \rho_{s(j)}^{(k)} C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

$$\ddot{x}_j(t_{j-1}) = \sum_{k=1}^3 [\rho_{s(j)}^{(k)}]^2 C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

El sistema se puede expresar de forma matricial (llamaremos a las tres raíces $\rho_{s(j)}^{(k)}$ como ρ_1, ρ_2, ρ_3 para mas comodidad):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{s(j)}^{(1)} e^{\rho_1 t} \\ C_{s(j)}^{(2)} e^{\rho_2 t} \\ C_{s(j)}^{(3)} e^{\rho_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(j) \\ \dot{x}_j(t_{j-1}) \\ \ddot{x}_j(t_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La matriz cuadrada corresponde a una matriz de Vandermonde y su inversa se puede calcular fácilmente en forma analítica. Al final podemos obtener los coeficientes en forma analítica e introducirlos en Matlab para el cálculo, así no perdemos precisión al invertir la matriz. Pero los cálculos no son muy estables numéricamente, debido a que las exponenciales crecen rápidamente con el tiempo. En consecuencia surgen problemas de computación con Matlab a partir de un cierto tiempo t .

2.2.2. Simulaciones con Matlab

La primera ecuación estudiada es la ecuación (2.1) con la no linealidad $g(x) = |x| - 2$. Esta ecuación fue estudiada teóricamente y tiene la particu-

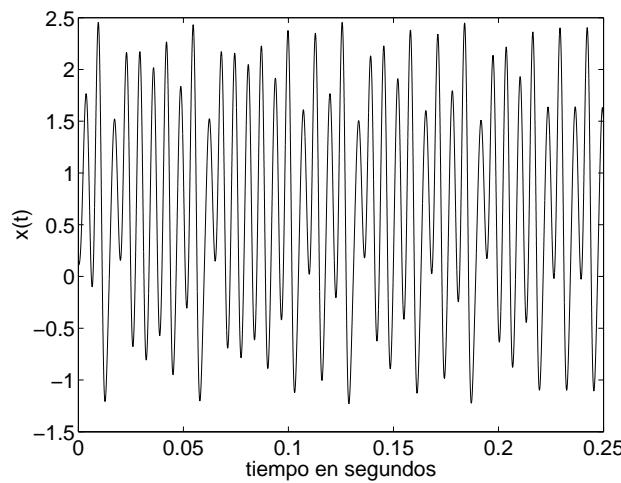


Figura 2.1: Solución analítica $x(t)$ de la ecuación (2.3) para las condiciones iniciales $x = 0,01$; $\dot{x} = 0$; $\ddot{x} = 0$

lidad de poseer una solución analítica. La simulación de esta solución ha proporcionado los comportamientos caóticos para un margen del parámetro de control A . Hubo dificultades de orden numérico, las exponenciales crecen con el tiempo y se alcanza el máximo de precisión de Matlab a partir de un cierto tiempo t . La solución $x(t)$ para las condiciones iniciales $x = 0,01$; $\dot{x} = 0$; $\ddot{x} = 0$ y $A = 0,61$ viene representada en la figura 2.1.

Se puede ver que los máximos no presentan periodicidad, lo que es típico de un comportamiento caótico. El atrácteur correspondiente a esta solución presenta una estructura caótica y fractal (figura 2.2).

El atrácteur “mezcla” las trayectorias; si lo cortamos y desarrollamos en una banda se puede observar que las trayectorias se mezclan debido al fenómeno de estiramiento y pegado descrito por el “Smale Horse shoe” en [7] (figura 2.3).

La figura muestra este fenómeno, la flecha indica donde se pega el otro extremo del atrácteur. Este atrácteur se puede encontrar en otros sistemas caóticos; por ejemplo Rösler [9] encontró un sistema con un atrácteur muy parecido. Además el mapa de retorno de su sistema tiene la misma topología

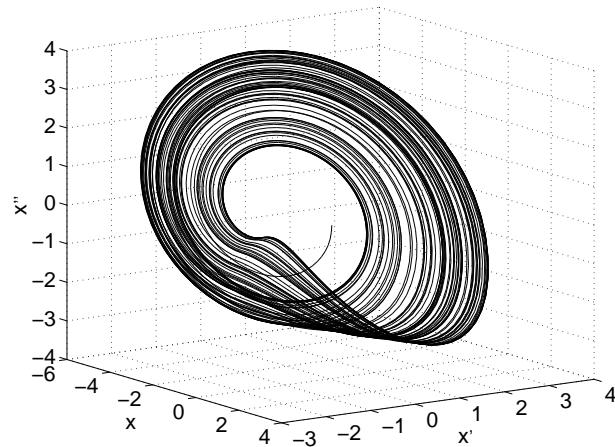


Figura 2.2: Atráctor en el espacio de las fases $\{x, \dot{x}, \ddot{x}\}$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”

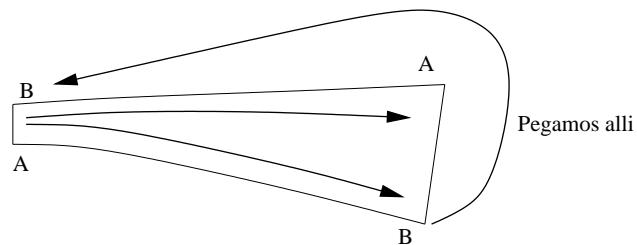


Figura 2.3: Atráctor desarrollado sobre una banda

que la ecuación (2.1) con la no linealidad $g(x) = |x| - 1$, como se verá mas adelante (sección 2.2.6).

2.2.3. Exponentes de Lyapunov

Se puede estudiar la evolución del exponente máximo de Lyapunov cuando variamos el parámetro de control A . Dependiendo de su valor, el circuito presenta comportamientos caóticos o regulares. La simulación da una estimación del grado de “caoticidad” mediante los exponentes de Lyapunov (la divergencia exponencial entre dos trayectorias o, dicho de otra manera, el grado de sensibilidad a las condiciones iniciales).

Una manera de ver la divergencia entre dos trayectorias consiste en integrar la ecuación diferencial dos veces con unas condiciones iniciales muy próximas (del orden de 10^{-10}). La figura 2.4 muestra la diferencia entre las dos trayectorias y la figura 2.5 es la misma pero en escala logarítmica (el tiempo en esta figura esta normalizado). Las trayectorias coinciden hasta un cierto tiempo, después son totalmente distintas (es la saturación que se observa después). Sobre la figura en escala logarítmica se observa una cierta pendiente al principio, y a partir de ella se puede estimar el exponente máximo de Lyapunov. Por ejemplo si calculamos la pendiente entre los dos puntos marcados P_1 y P_2 sobre la figura 2.5 tenemos:

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{0,6 \times 10^2} = 0,05$$

La estimación obtenida es bastante buena y nos da una idea del grado de caoticidad del sistema (en este caso es bastante bajo).

En la figura 2.6 se ha dibujado el valor del exponente máximo de Lyapunov en función del parámetro de control A . Se observan ventanas de periodicidad (exponente igual a cero) dentro de las zonas caóticas (exponente positivo). Estas zonas serán estudiadas más en detalle con el diagrama de bifurcación (sección 2.2.7).

Hablando globalmente, el exponente máximo presenta valores bastante pequeños; no se pueden alcanzar valores altos sin que el sistema se vuelva inestable.

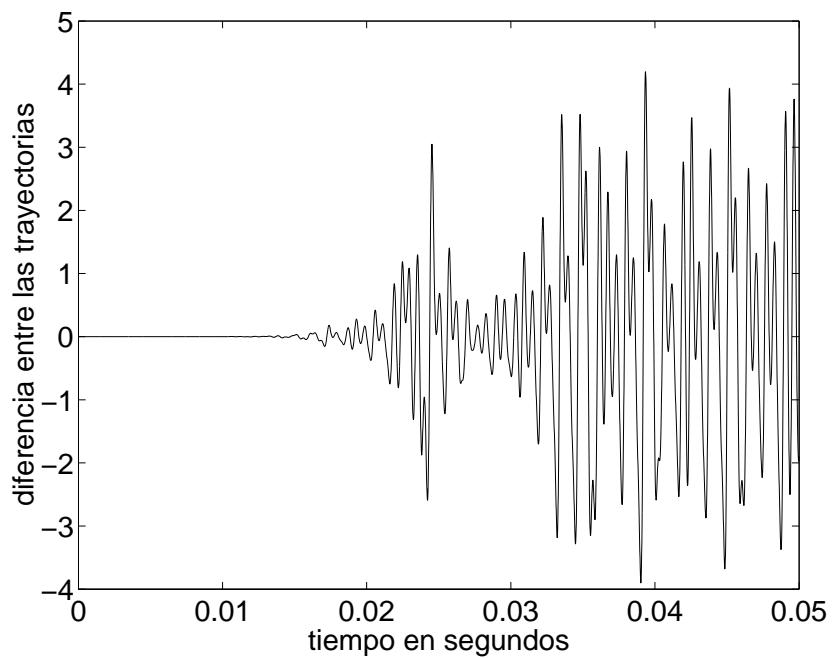


Figura 2.4: Divergencia de dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”

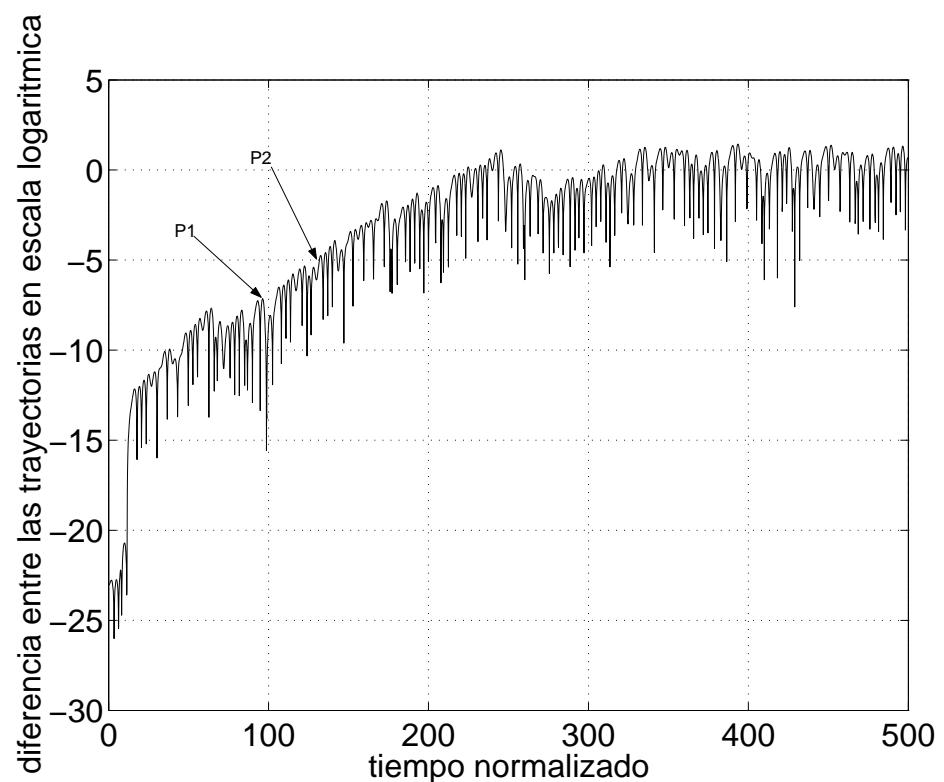


Figura 2.5: Divergencia de dos trayectorias en escala logarítmica para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”

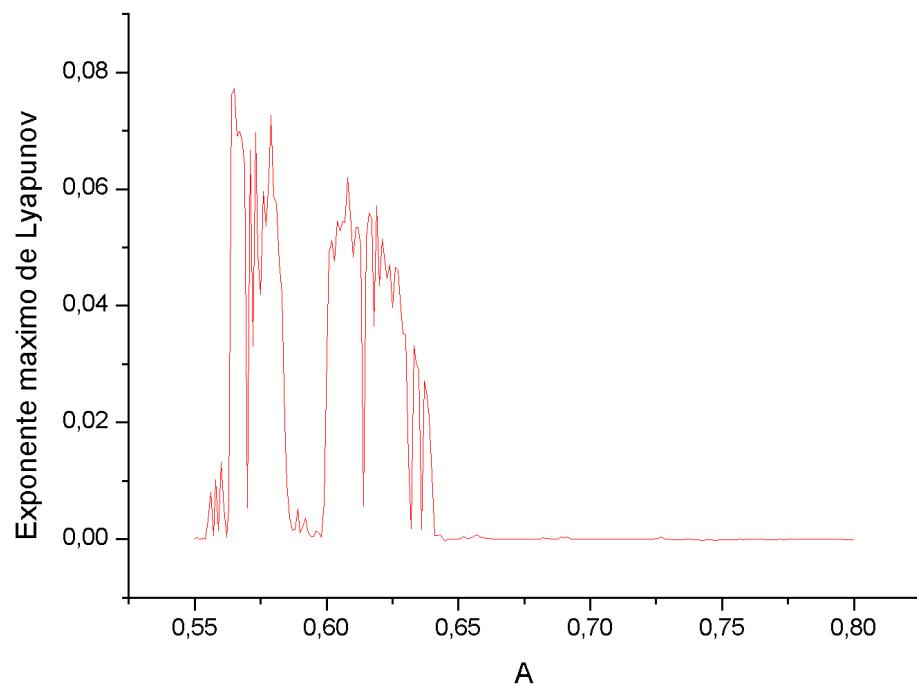


Figura 2.6: Exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sistema “valor absoluto”

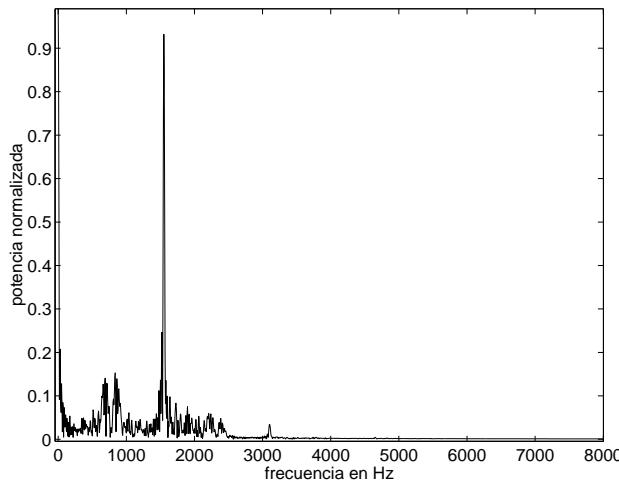


Figura 2.7: Espectro de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”

2.2.4. Espectro y Autocorrelación

Ahora integramos la ecuación diferencial directamente con Matlab y fijamos el parámetro de control $A = 0,61$. El espectro obtenido comporta una frecuencia principal (el sistema oscila a una frecuencia bien determinada) y presenta un espectro ancho (figura 2.7). Como veremos después con la función de autocorrelación el sistema es muy poco caótico.

Podemos observar un espectro ancho lo que es típico de un régimen caótico. Sin embargo, domina mucho la frecuencia de oscilación. Por otro lado, si bien la función de autocorrelación de un sistema caótico debe tender a cero cuando el tiempo de correlación crece, en nuestro caso el decrecimiento es muy lento (figura 2.8). Este decrecimiento está relacionado con el grado de caos del sistema. Para el valor del parámetro de control seleccionado el exponente de Lyapunov máximo es de 0.055, lo que supone una divergencia exponencial muy lenta.

2.2.5. Secciones de Poincaré

Para mostrar la complejidad del atráctore en régimen caótico podemos hacer un corte en el atráctore. Es decir observar la intersección del atráctore

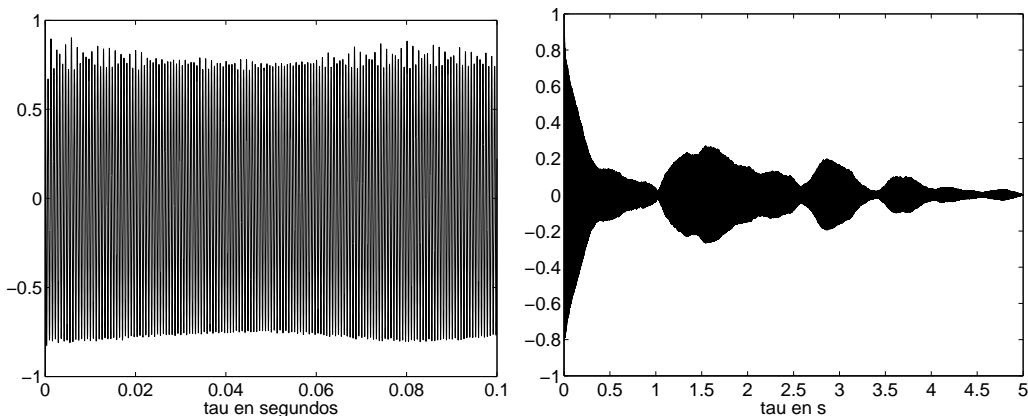


Figura 2.8: Autocorrelación de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”

con un plano. La elección del plano es arbitraria pero tenemos que elegirlo de tal manera que se puedan observar bien las características del atrátor. La sección proporciona información sobre todo cualitativa. Para obtener más información hay que encontrar una función que proporcione el valor del punto x_n en función del siguiente (x_{n+1}). Es lo que se pretende hacer con el mapa de retorno (ver sección siguiente 2.2.6).

La primera sección de Poincaré (figura 2.9) representa el atrátor en tres dimensiones así como el plano de corte de la sección. El sistema está en régimen regular, de forma que las trayectorias describen un ciclo límite. La sección de Poincaré (los puntos rojos y azules) muestra un régimen regular pero casi a punto de pasar a un régimen caótico. Los puntos ya empiezan a dispersarse. El color de los puntos indica el sentido de cruce de la trayectoria con el plano. Los puntos rojos significan que la trayectoria va de arriba hacia abajo y los puntos azules que va de abajo hacia arriba.

La segunda sección de Poincaré muestra el sistema en régimen caótico (figura 2.10). Se observa muy bien en la sección que los puntos se dispersan siguiendo un cierta estructura. Los puntos azules parecen seguir una estructura en forma de croissant. Esta estructura corresponde al atrátor cuando se dobla sobre si mismo. Es el fenómeno de estiramiento y pegamiento visto antes. Los puntos rojos se reparten en una nube concentrada en una región

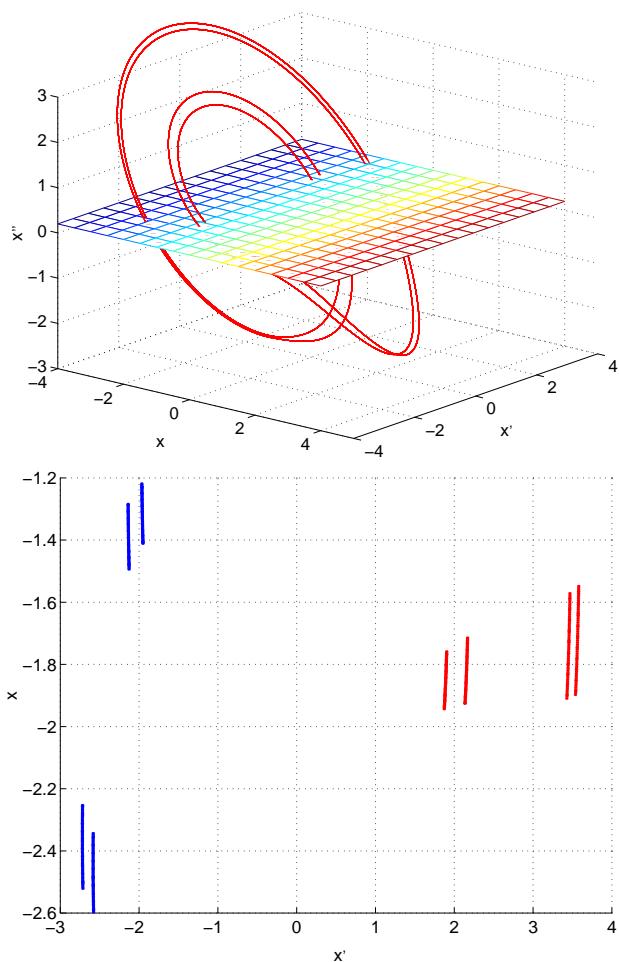


Figura 2.9: Sección de Poincaré para $A = 0,65$ en el sistema “valor absoluto”. En los puntos rojos el corte de la trayectoria con el plano es arriba hacia abajo y en los puntos azules es de abajo hacia arriba.

del mapa. Sin embargo no se puede obtener mas información de esta sección, no hay acceso a un desarrollo analítico del mapa de Poincaré correspondiente.

2.2.6. Mapa de retorno

Para simplificar el estudio del sistema se ha elegido la variable $x(t)$ para su estudio. En el mapa de retorno se representa un maximó en función del siguiente. Lo que aparece así no es una curva “caótica” sino una función regular que permite conocer el máximo siguiente a partir del anterior. El mapa de retorno del sistema como ya sabemos (1.3.6) es unidimensional.

El mapa de retorno nos informa también sobre la naturaleza caótica del sistema, ya que como veremos a continuación la pendiente de este es mayor que uno (en valor absoluto). Esto quiere decir que si existe un ciclo límite, este es necesariamente inestable. Para explicar este hecho podemos partir de un punto fijo x^* del mapa unidimensional de la función f . Si tomamos una condición inicial muy cerca de este punto, por ejemplo $x^* + \delta_0$ el punto siguiente será:

$$x_2 = f(x^* + \delta_0)$$

Linealizamos esta ecuación para valores pequeños δ_0 y obtenemos:

$$x_2 = f'(x^*)\delta_0 + x^*$$

Esta fórmula significa que si $|f'(x^*)| > 1$ entonces el punto fijo es inestable y la trayectoria se va alejando de este.

Otro parámetro que podemos obtener del mapa de retorno es su exponente de Lyapunov (ver introducción 1.3.6), que se puede calcular promediando sobre una trayectoria la derivada en la iteración x_n .

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |f'(x_n)| \quad (2.10)$$

σ se puede estimar sin problemas de convergencia para una trayectoria muy larga. Además existe una correspondencia entre los exponentes de Lyapunov de un mapa y el exponente máximo del sistema en tiempo continuo. Si llamamos λ_i al exponente en tiempo continuo y $\bar{\lambda}_i$ al exponente del mapa de retorno entonces se verifica la correspondencia (Ver [5]):

$$\lambda_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{\langle \tau_i \rangle} \quad (2.11)$$

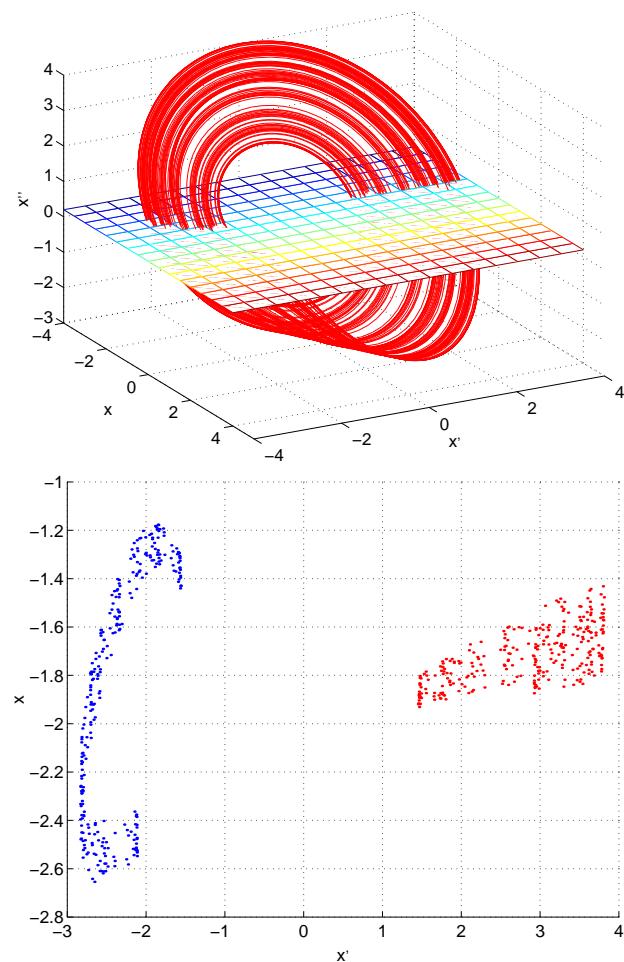


Figura 2.10: Sección de Poincaré para $A = 0,61$ en el sistema “valor absoluto”. En los puntos rojos el corte de la trayectoria con el plano es arriba hacia abajo y en los puntos azules es de abajo hacia arriba.

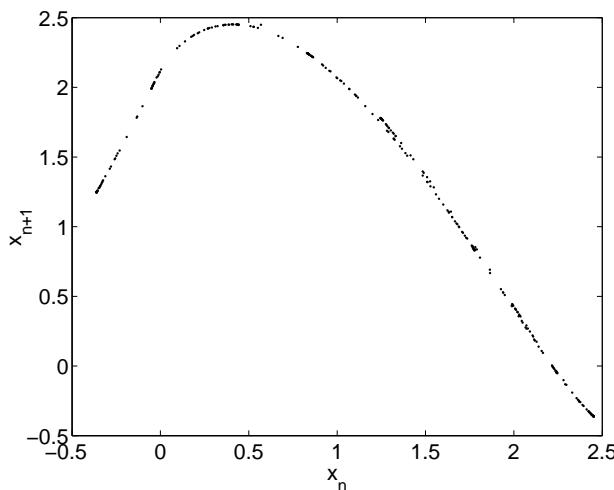


Figura 2.11: Mapa de retorno de $x(t)$ en el sistema “valor absoluto”

Donde $\langle \tau_i \rangle$ es el tiempo medio que sigue la trayectoria en el espacio de las fases entre dos pasos sobre el mapa de retorno (Ver [5]).

Si pudiéramos estimar esta curva mediante una función f tendríamos una herramienta para estudiar el caos del sistema en una aplicación iterada. En la figura 2.11 se muestra el mapa de retorno para el parámetro de control $A = 0,61$. Este mapa presenta una topología similar a la del mapa logístico o a la del mapa triangular (ver [6], [7]). Aproximaremos el mapa, en primer lugar por dos rectas para simplificar su estudio, pero de forma más rigurosa, realizaremos una aproximación mediante un polinomio de orden n a partir de los datos obtenidos de la simulación.

Las dos aproximaciones obtenidas con Matlab para el mapa con el parámetro de control $A = 0,61$ son:

tipo	$x \in [-0,3847; 0,409]$	$x \in [0,409; 2,4759]$
rectas	$x_{n+1} = 1,5870x_n + 1,8033$	$x_{n+1} = -1,3726x_n + 3,0138$
polinomio	$x_{k+1} = 0,354x_k^3 - 1,93x_k^2 + 1,61x_k + 2,08$	

Estas dos aproximaciones se observan gráficamente sobre la figura 2.12.

A partir de estos mapas se pueden dibujar trayectorias iterando el mapa de retorno con la recta $y = x$, y partiendo de una cierta condición ini-

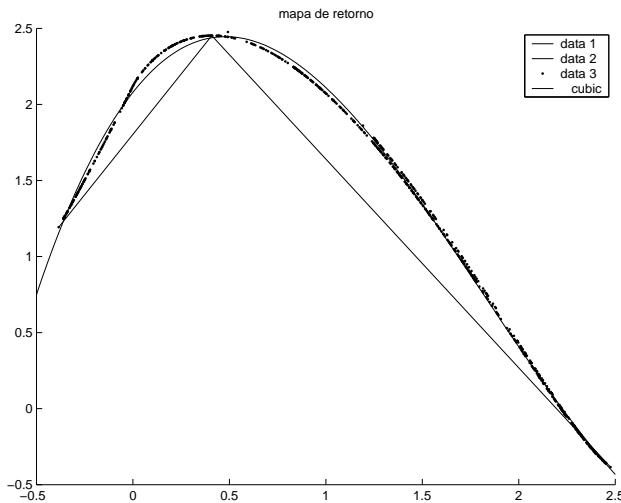


Figura 2.12: Mapa de retorno aproximado por rectas y por un polinomio de orden tres

cial dentro del intervalo $[-0,3847; 2,4759]$. Sobre la figura 2.13 se puede ver una trayectoria para las dos aproximaciones (triangular y polinómica). La diferencia entre estas dos trayectorias se puede estudiar merced a la función densidad de probabilidad de la trayectorias. La teoría de la ergodicidad nos asegura la correspondencia entre las medias temporales y las medias estadísticas, es decir que las medias temporales deben de corresponder con las medias espaciales. Así se puede obtener la densidad de probabilidad del mapa de retorno con cualquier trayectoria. Al analizar la figura 2.13 se ve un fenómeno de crecimiento exponencial con la aproximación a una recta, la trayectoria parece crecer exponencialmente (globalmente) hasta un cierto punto y luego hay una contracción. Este fenómeno puede corresponder a un comportamiento caótico, pero hay que asegurarse de ello calculando el exponente de Lyapunov.

La función densidad de probabilidad es la probabilidad $\rho(x)$ de que la trayectoria x se encuentre en el intervalo dx . Podemos estimar numéricamente la densidad de probabilidad gracias a un algoritmo propuesto en [7]; este usa el operador de Perron-Frobenius que indica como la aplicación (el mapa) actúa sobre la densidad de probabilidad. Es decir, como evoluciona la

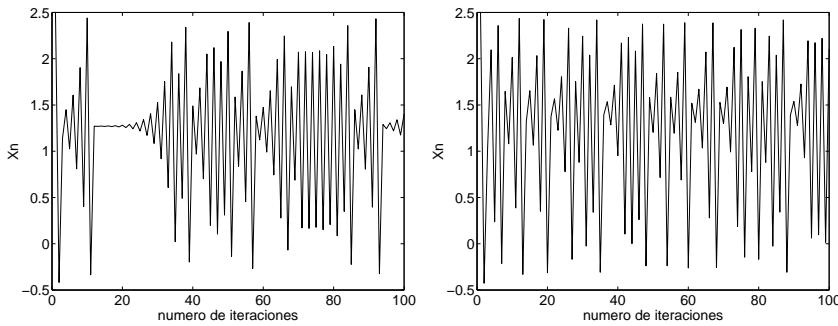


Figura 2.13: Trayectorias construidas a partir del mapa de retorno para cien iteraciones. A la izquierda el mapase aproxima por dos rectas y a la derecha por un polinomio (fig. 2.12).

densidad si aplicamos el mapa de retorno del sistema. Hay que notar que se puede estimar la densidad de probabilidad a partir de los dos mapas aproximados porque disponemos de su expresión analítica. Con el mapa obtenido experimentalmente es imposible estimar la densidad; tenemos solo una serie de puntos y eso no nos permite aplicar el operador de Perron-Frobenius. El operador P de Perron-Frobenius para una aplicación f es el siguiente (ver [7]):

$$P\rho(x) = \sum_{y=f^{-1}(x)} \frac{\rho(y)}{|f'(y)|} \quad (2.12)$$

El operador P expresa como actúa f sobre la densidad de probabilidad. En esta ecuación ρ es una densidad de probabilidad, y f' es la derivada de la aplicación f . En la figura 2.14 tenemos un ejemplo de como actúa la función sobre las densidades. El intervalo dx posee dos intervalos antecedentes por la función f : dx_1 y dx_2 . La probabilidad que una trayectoria de la función f pase por estos dos intervalos es respectivamente $\rho(x_1)dx_1$ y $\rho(x_2)dx_2$ (siendo $\rho(x)$ la densidad de probabilidad asociada a las trayectorias de la aplicación f). Ahora se puede preguntar con qué probabilidad una trayectoria puede visitar el intervalo dx . Esta es, sencillamente, la suma de las probabilidades asociadas a los dos intervalos antecedentes dx_1 y dx_2 , lo que se puede expresar:

$$\rho(x)dx = \rho(x_1)dx_1 + \rho(x_2)dx_2$$

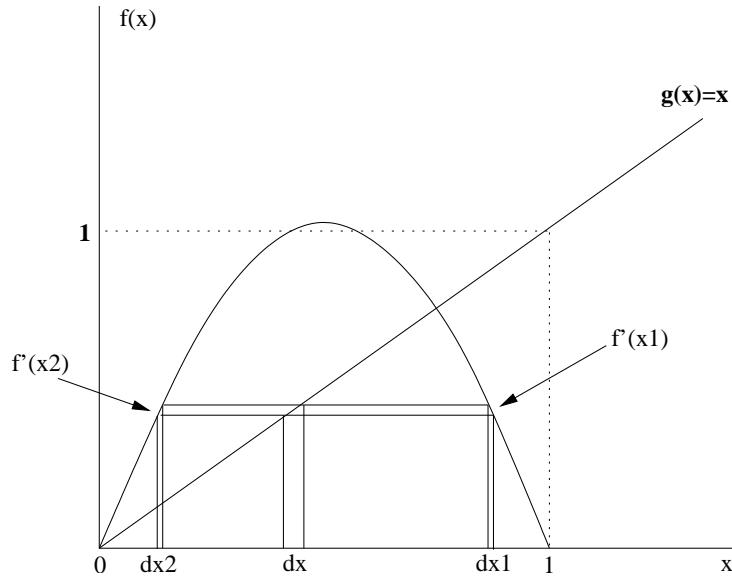


Figura 2.14: Ejemplo de como una aplicación deforma las densidades de probabilidad (es decir de como evoluciona la densidad de probabilidad compuesta por la función f)

y poniendo

$$\frac{dx}{dx_1} = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_1}, \dots$$

se obtiene al final la expresión de $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \frac{\rho(x_1)}{|df/dx|_{x_1}} + \frac{\rho(x_2)}{|df/dx|_{x_2}}$$

El operador de Perron-Frobenius generaliza este procedimiento para cualquiera aplicación f . En el algoritmo que desarrollamos a continuación, se usa esta técnica para encontrar la densidad de probabilidad.

Por otro lado, se necesita que la densidad ρ sea invariante para asegurar que existe la media temporal definida en (2.10). Es decir que esta densidad no cambia cuando se le aplica el operador P , o sea:

$$P\rho = \rho$$

Para el mapa con rectas y el mapa cúbico definido anteriormente, para cada punto x hay por lo menos un antecedente sobre el intervalo $[-0,3847; 2,4759]$. Es decir que cada punto x de este intervalo tendrá uno o más antecedentes x_i tal que $f(x_i) = x$. Para estimar la función densidad de probabilidad empezamos con la densidad uniforme ρ_1 sobre el intervalo $[-0,3847; 2,4759]$ cuya expresión es¹ :

$$\rho_1(x) = \frac{1}{0,3847 + 2,4759} u(-0,3847; 2,4759)$$

Buscamos los antecedentes (x_1 y x_2 por ejemplo) para cada punto x del mapa y aplicamos el operador P :

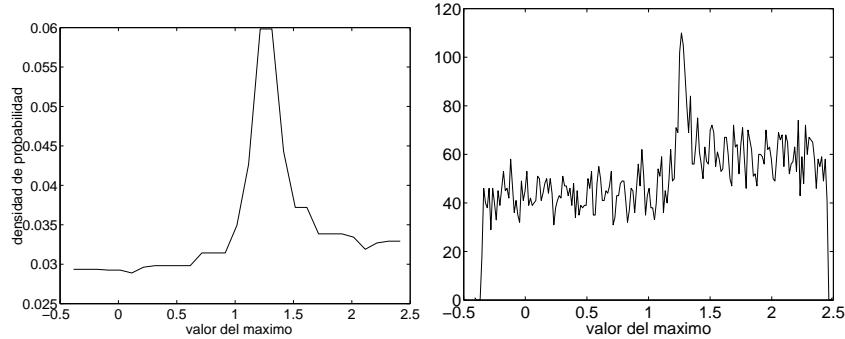
$$\rho_{i+1}(x) = \frac{\rho_i(x_1)}{|f'(x_1)|} + \frac{\rho_i(x_2)}{|f'(x_2)|} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (2.13)$$

Al cabo de varias iteraciones conseguimos una buena estimación de la densidad invariante (el algoritmo converge). Para el mapa de retorno aproximado por las rectas hicieron falta 40 iteraciones mientras que para el mapa aproximado con un polinomio solo hicieron falta 30 iteraciones. Este método ha sido implementado en el proyecto con una función Matlab (ver anexos de los programas).

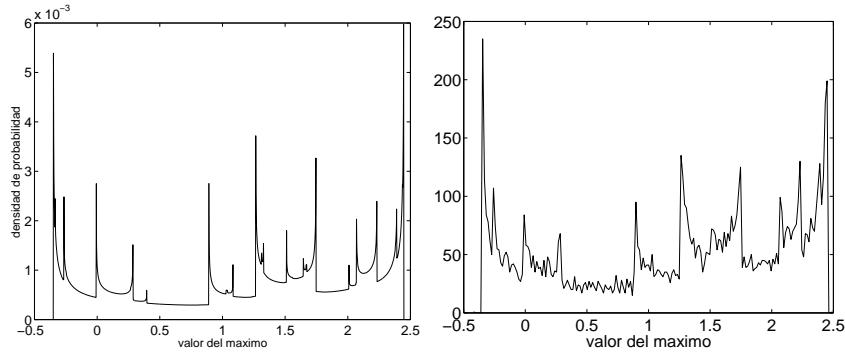
Los histogramas obtenidos a partir de las trayectorias son bastante distintos para las dos aproximaciones (2.15). En ellos las densidades han sido calculadas con el operador de Peron-Frobenius, se puede observar una gran similitud entre los histogramas y las densidades de probabilidad, lo que supone una ergodicidad del sistema y, por tanto, la existencia de una densidad invariante para estas aproximaciones. La figura 2.15 se ha completado con el histograma de una trayectoria del sistema en tiempo continuo (histograma de la variable x) y al lado, el histograma de los máximos obtenidos a partir de esta trayectoria. El histograma de los máximos se parece a la densidad de probabilidad obtenida con la aproximación del mapa de retorno por un polinomio de orden tres. Esta similitud confirma que esta aproximación del mapa es bastante buena, frente a la simple aproximación por rectas, que como se observa, da un mal resultado.

Ahora se calculan los exponentes de Lyapunov del mapa a partir de las trayectorias. Los exponentes de Lyapunov calculados con la ecuación (2.10)

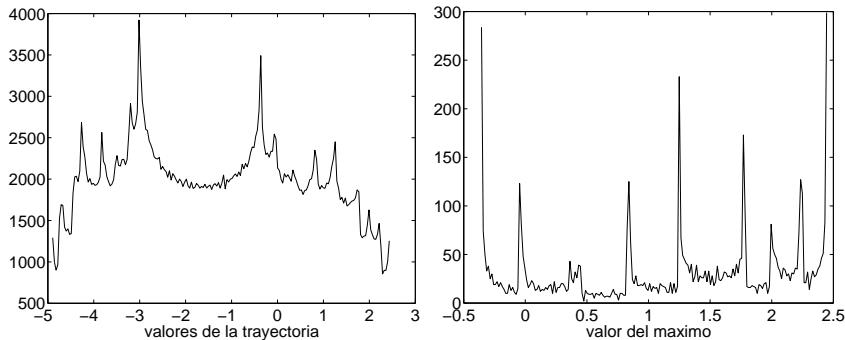
¹siendo $u(a; b)$ la función unidad sobre el intervalo $[a; b]$ y 0 fuera del intervalo



(a) Aproximación por rectas (a la izquierda aparece la densidad de probabilidad obtenida con el operador de Perron y a la derecha el histograma de una trayectoria del mapa)



(b) Aproximación por un polinomio (a la izquierda aparece la densidad de probabilidad obtenida con el operador de Perron y a la derecha el histograma de una trayectoria del mapa)



(c) Histograma de una trayectoria del sistema en tiempo continuo (variable x) y a la derecha la densidad de probabilidad de los máximos de la trayectoria

Figura 2.15: (a) y (b) representan histogramas de las trayectorias de mapa iterados y las densidades de probabilidad obtenidas con el operador de Perron-Frobenius, comparados con el histograma en tiempo continuo y la función densidad de probabilidad representado en (c)

para las dos aproximaciones son:

tipo de aproximación	Exponente de Lyapunov
rectas	$\sigma = 0,349$
polinomio	$\sigma = 0,3678$

Podemos ahora comprobar que estos exponentes de Lyapunov corresponden, en efecto, al sistema estudiado. Para ello aplicamos la expresión (2.11) que relaciona el exponente de Lyapunov del mapa con el sistema en tiempo continuo.

El tiempo medio entre dos máximos del sistema estudiado es bastante regular, observándose una frecuencia dominante en el espectro (figura 2.7). El tiempo de retorno sera el inverso de esta frecuencia. En las simulaciones realizadas con Matlab el paso de integracion utilizado es $T_e = 0,01s$, y la frecuencia de oscilación de este sistema es de $\nu = 1,54810^{-3}$ en valor normalizado². El mapa de retorno dibuja un punto cada $T = \frac{1}{f}$, y sabemos que $\nu = \frac{f}{f_e}$ (con $f_e = \frac{1}{T_e}$). De aquí obtenemos: $T = <\tau_i> = \frac{1}{f} = \frac{T_e}{\nu} = 6,4599s$. El exponente en tiempo continuo será por tanto³:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0,349/6,4599 = 0,054 \\ \lambda_2 &= 0,3678/6,4599 = 0,0569\end{aligned}$$

Con el parámetro de control establecido en $A = 0,61$ hemos obtenido un exponente de Lyapunov de 0.055 (con la integración directa de la ecuación variacional). Esto significa que los mapas de retorno estimado proporcionan una buena aproximación del exponente máximo.

También podemos calcular el exponente máximo de Lyapunov de otra forma, aprovechando las propiedades de ergodicidad del mapa de retorno. El teorema de ergodicidad de Birkhoff permite relacionar las medias temporales y las medias estadísticas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log|f'(x_i)| = \int_{\Omega} \log|f'(x)|\rho(x)dx \quad (2.14)$$

²Para denormalizar hace falta usar el paso de integracion

³ λ_1 para el mapa rectas y λ_2 para el mapa cúbico

Siendo ρ un densidad invariante, $f \in \Omega$ una función continua y Ω el dominio de definición. En nuestro caso la función f es la expresión del mapa de retorno y ρ su densidad de probabilidad invariante asociada. Esta última ecuación establece la correspondencia entre una media sobre una trayectoria temporal del sistema (el miembro de izquierda) y la integración de la función en el espacio con los pesos correspondiente a cada valor de x (la función de peso es ρ). Usando la ultima ecuación hemos evaluado con Matlab el segundo miembro. Se ha hecho una integración discreta a partir de la expresión del mapa de retorno aproximado f y de la densidad de probabilidad estimada con el operador de Perron-Frobenius. Los resultados corresponden a la medida temporal de λ_1 y λ_2 .

El estudio precedente corresponde a un solo valor del parámetro de control, es decir $A = 0,6$. Se puede preguntar ahora lo que pasa para los otros valores del parámetro de control. Se ha realizado un estudio del sistema para un cierto margen de valores del parámetro A . Primero se han obtenido los mapas de retorno a partir de la integración de la ecuación diferencial para el margen $[0,57; 0,76]$ del parámetro de control A con un paso de 0.01. En segundo lugar se ha aproximado cada uno de estos mapas mediante un polinomio de grado n (con $n \geq 3$). Se ha obtenido así una expresión analítica del mapa aproximado para cada valor del parámetro de control aparte. A partir de los mapas de retorno aproximados se pueden encontrar informaciones bastante interesantes. En primer lugar se puede representar un diagrama de bifurcación a partir de las trayectorias de cada mapa. En efecto, cuando el sistema en tiempo continuo tiene un comportamiento regular se obtienen comportamientos regulares de los mapas de retorno (y, lo mismo para el comportamiento caótico). La otra información valiosa proporcionada por los mapas de retorno son los exponentes de Lyapunov (ecuaciones (2.11) y (2.10)). Los resultados obtenidos están representados en las figuras 2.16, 2.17, 2.18 y 2.19. Junto a cada una de estas figuras se han situado a efecto de comparación, el diagrama de bifurcación y los exponentes de Lyapunov calculados de manera rigurosa.

En primer lugar podemos comparar los diagramas de bifurcación obtenidos con el mapa de retorno con los obtenidos de manera rigurosa (integrando la ecuación diferencial). Se observa que son muy similares aparte de algunas zonas en la cual la aproximación del mapa por un polinomio no proporciona un buen resultado (por ejemplo en la figura 2.16 la ventana de periodicidad

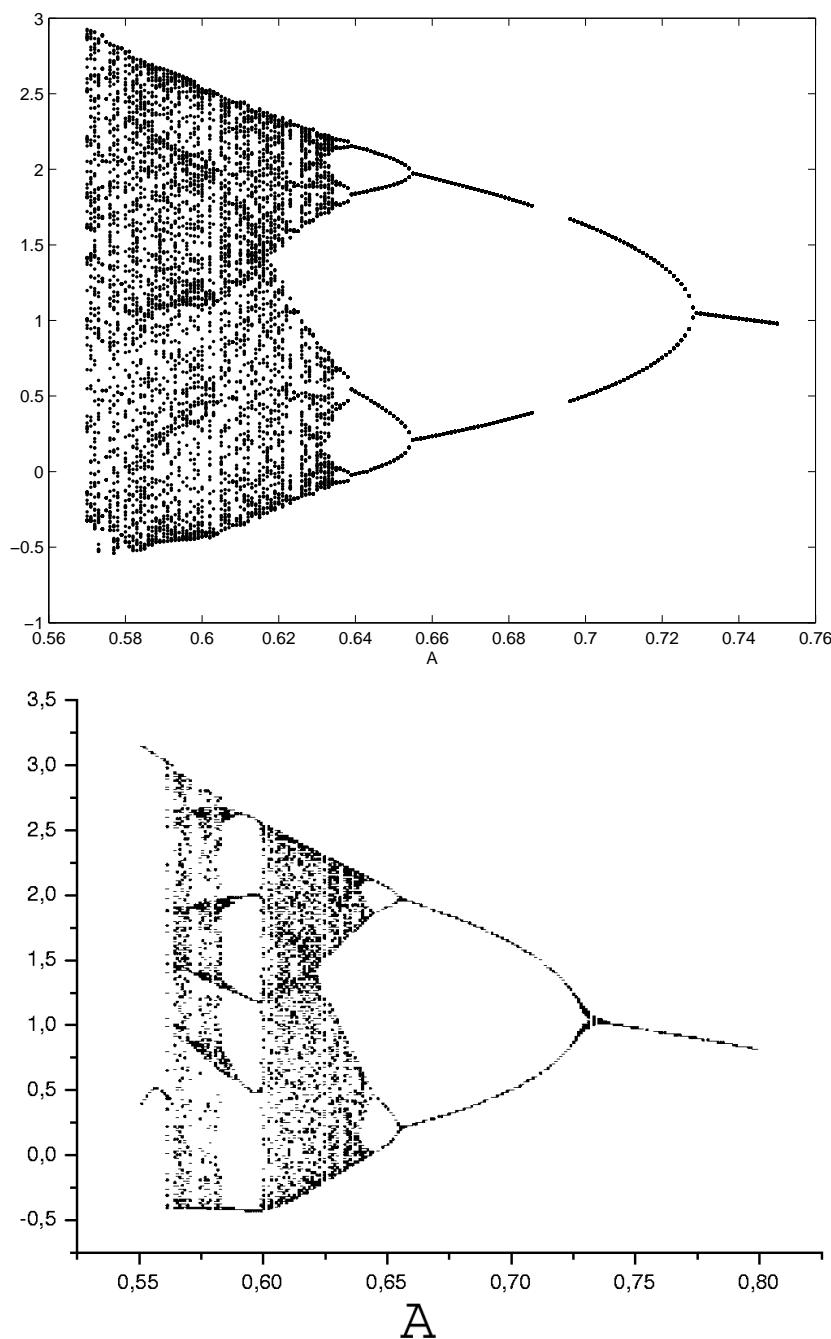


Figura 2.16: Arriba se muestra el diagrama de bifurcación obtenido a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden tres y abajo aparece el diagrama de bifurcación del sistema obtenido de manera rigurosa

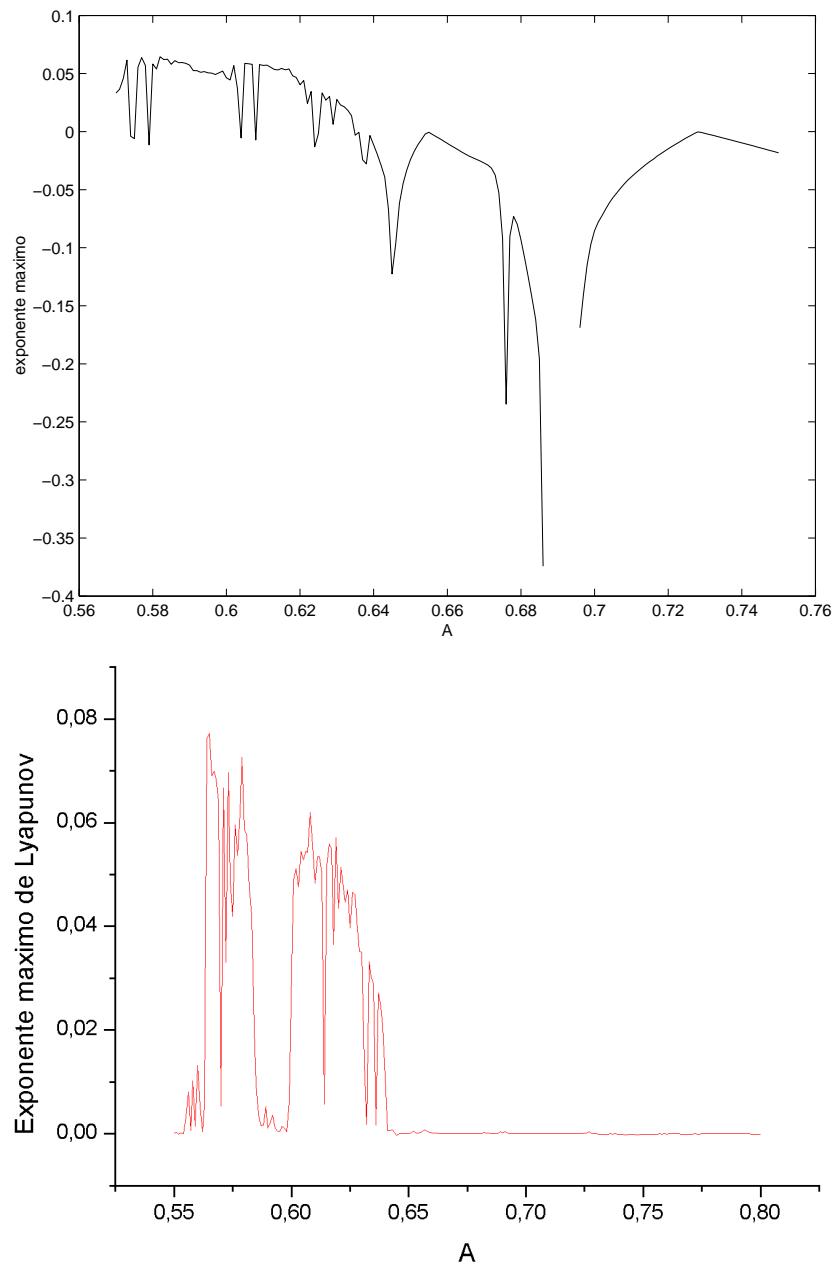


Figura 2.17: Arriba se muestran los exponentes de Lyapunov obtenidos a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden tres. Abajo aparece el exponente de Lyapunov máximo calculado con la ecuación variacional

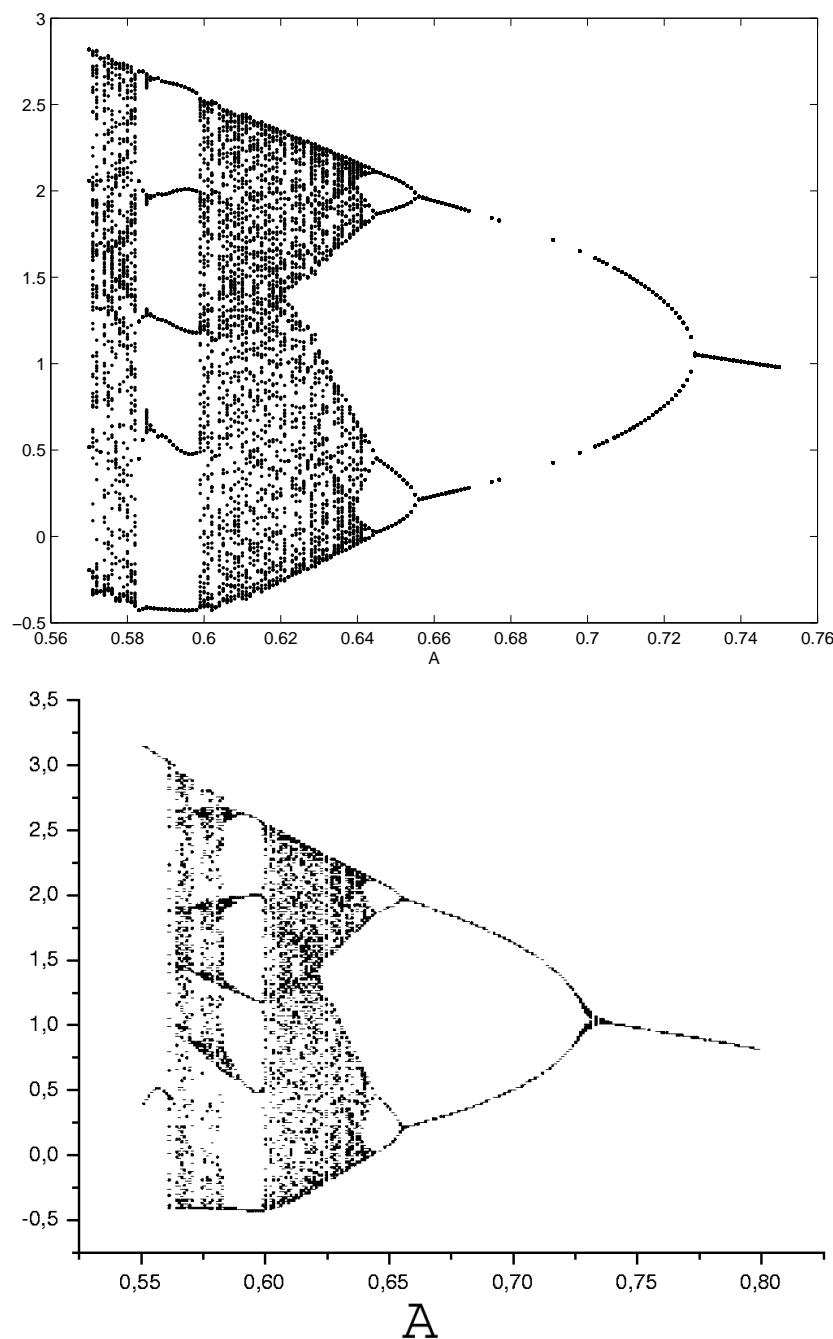


Figura 2.18: Arriba se muestra el diagrama de bifurcación obtenido a partir de mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden cinco y abajo aparece el diagrama de bifurcación del sistema obtenido de manera rigurosa

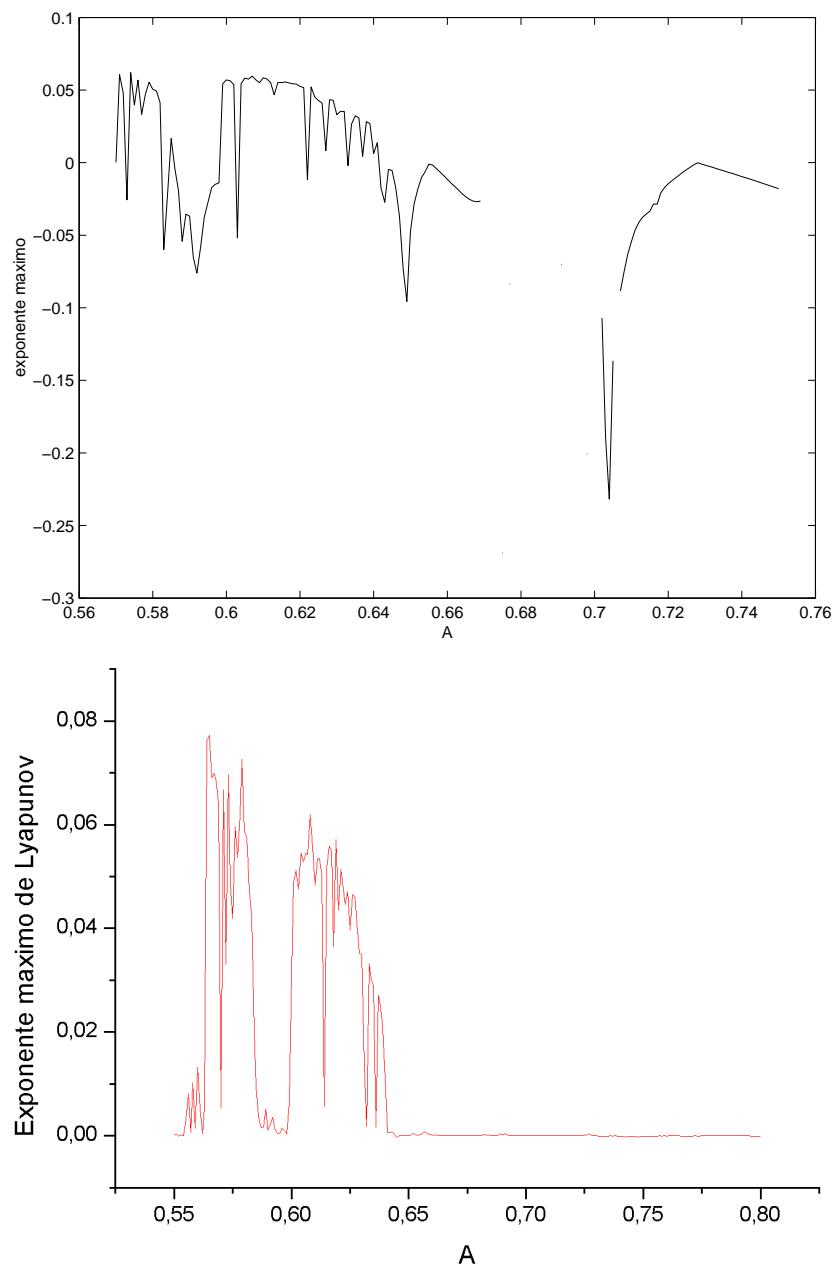


Figura 2.19: Arriba se muestran los exponentes de Lyapunov obtenidos a partir de los mapas de retorno aproximados por un polinomio de orden cinco. Abajo aparece el exponente de Lyapunov máximo calculado con la ecuación variacional

para el valor $A = 0,59$ del parámetro de control no aparece aunque se observan zonas mas oscuras donde hay una concentración mayor de puntos). Conviene insistir en que son diagramas de bifurcación obtenidos a partir del mapa unidimensional, el cual contiene bastante menos información que el propio atrátor en el espacio de fases de tres dimensiones.

Las figuras 2.18 y 2.19 corresponden a las aproximaciones del mapa de retorno por un polinomio de orden 5. En la figura 2.18 el diagrama de bifurcación se corresponde muy bien con el diagrama obtenido de manera rigurosa exceptuando algunas zonas donde la aproximación por un polinomio de orden 5 no da buenos resultados. En estos casos las trayectorias no son estables. No obstante, el aspecto general del diagrama representa muy bien el comportamiento del sistema. La aproximación por un polinomio de orden 5 se obtienen mejores resultados que la aproximación por un polinomio de orden 3 como era de esperar. Cabe destacar en la figura 2.18 la muy buena caracterización de la ruta hacia el caos cuando el mapa de retorno se aproxima con un orden 5 en el polinomio, indicando que es muy sensible al orden de la aproximación.

Es sorprendente obtener el diagrama de bifurcación del sistema solo a partir de los mapas de retorno; además, cuando se calculan los exponentes máximos de Lyapunov en función del parámetro de control aparece un comportamiento similar al sistema en tiempo continuo. También se puede observar una zona del parámetro de control ($A = 0,69$) para la cual el exponente tiende a $-\infty$. Se observan zonas donde el exponente maximo de Lyapunov no aparece, en estas zonas las trayectorias correspondientes divergen. Son zonas en las cuales las aproximaciones no convienen.

El estudio del mapa de retorno fue posible en nuestro caso porque el atrátor presenta una estructura muy plana. Se ha calculado la dimensión fractal del atrátor caótico con el parámetro de control $A = 61$, proporcionando los siguientes valores:

$$\begin{aligned} D_h &= 1,9478 \\ D_c &= 1,9077 \\ D_i &= 1,89 \end{aligned} \tag{2.15}$$

siendo D_h la dimensión de Hausdorff, D_c la dimensión de correlación y D_i la dimensión de información. Se puede observar que el atrátor posee una

dimensión inferior pero muy próxima a 2. Por tanto aunque está muy cerca del plano, conserva algo de la dimensión lineal.

2.2.7. Ruta hacia el caos

El sistema en estudio es poco caótico, el exponente máximo de Lyapunov para todo el margen del parámetro de control no supera el valor 0.1 (figuras 2.19 y 2.17). Cuando variamos el parámetro de control en todo el margen donde el sistema es estable observamos un comportamiento muy similar a otros sistemas estudiados en la literatura [10], [9], [6]. Posee ventanas de periodicidad, ciclos límites de varios períodos y comportamientos caóticos. En la figura 2.20 se pueden ver como evoluciona el atrácto (en el plano x, \dot{x}) y el espectro correspondiente, al variar A .

Para ver mejor en que zona del parámetro de control se pueden encontrar estos atráctores, los hemos dibujado junto al diagrama de bifurcación de sistema (figura 2.21). Se observa así una ruta hacia el caos muy clásica. Primero aparece un ciclo límite estable (sinusoidal), el ciclo límite se desdobra vía una bifurcación de Hopf y se pasa a un doble ciclo. Este ciclo límite vuelve también a transformarse en un ciclo de cuatro períodos y después de estos desdoblamientos aparece el régimen caótico. Dentro de este régimen existen ventanas de periodicidad para algunos valores del parámetro de control. Concretamente aparece una ventana muy ancha que corresponde a un ciclo estable de período 5.

El diagrama de bifurcación del sistema presenta ciertas analogías con los diagramas de bifurcación de otros sistemas estudiado en la literatura. Por ejemplo el diagrama de bifurcación de la aplicación logística [10] es parecido al diagrama de bifurcación que hemos obtenido. Posee tambien una bifurcación de Hopf, ventanas de periodicidad y comportamientos caóticos.

En un mismo diagrama se han superpuesto el diagrama de bifurcación y el exponente máximo de Lyapunov correspondiente (figura 2.22). En el se observa la correspondencia entre los regímenes caóticos y los exponentes positivos o bien los regímenes regulares con exponentes casi nulos. En la figura 2.22, se observan las ventanas de periodicidad gracias a los exponentes de Lyapunov ya que no se observan en el diagrama de bifurcación (por una falta de resolución).

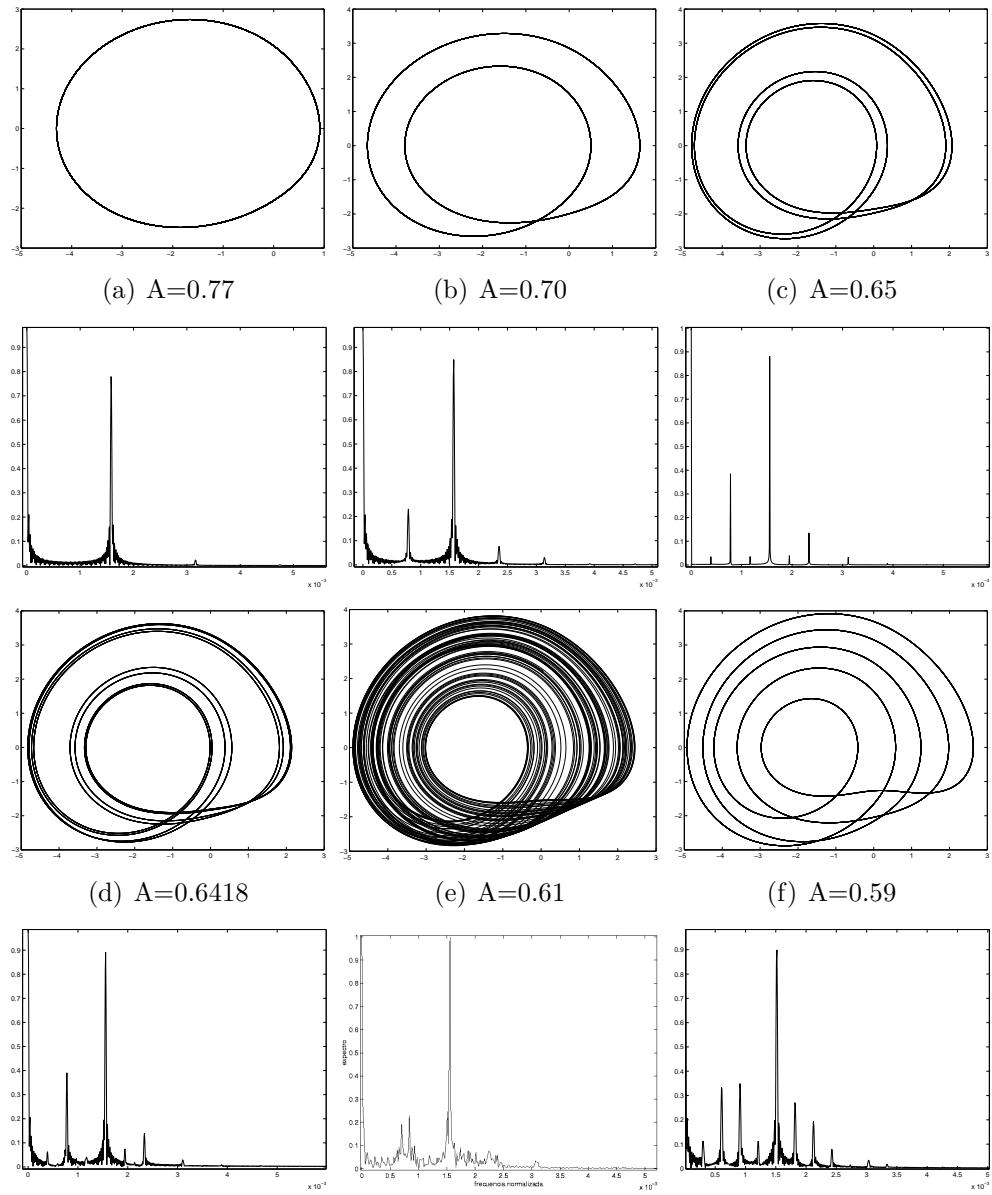


Figura 2.20: Evolución con A de los atráctores y del espectro del sistema “valor absoluto”

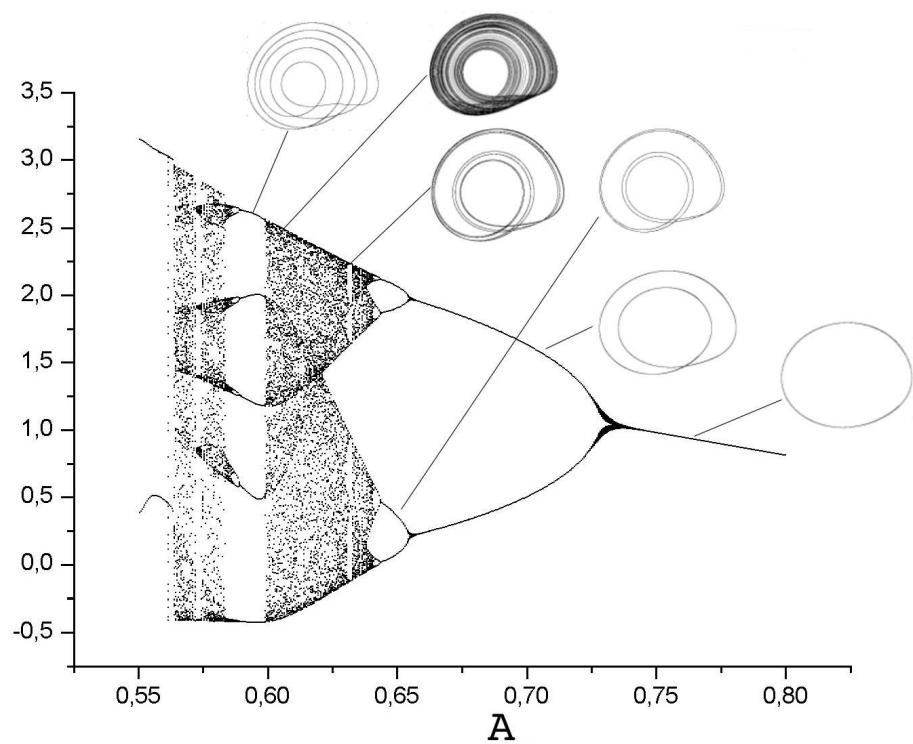


Figura 2.21: Evolución de los atráctores con el diagrama de bifurcación del sistema “valor absoluto”

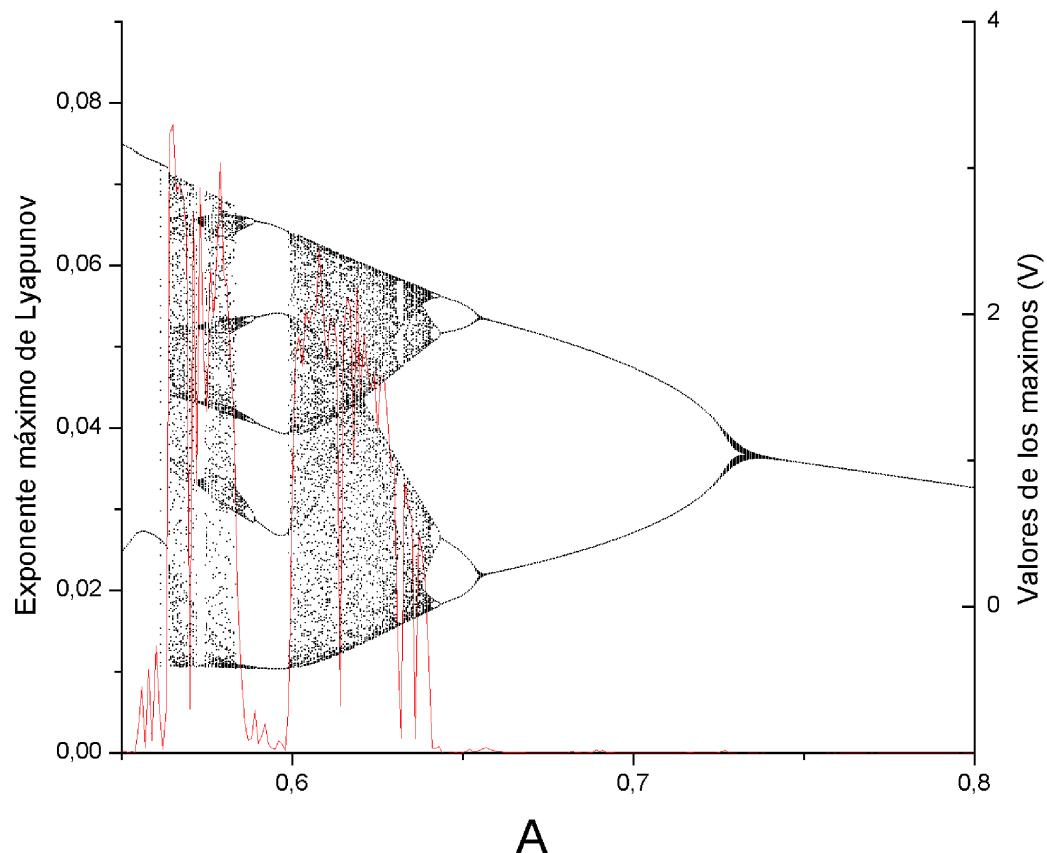


Figura 2.22: Superposición del diagrama de bifurcación y del exponente máximo de Lyapunov en el sistema “valor absoluto”

Este circuito presenta un interés meramente pedagógico. Lo que buscamos para un buen enmascaramiento son circuitos con un nivel de caos mas elevado que el ofrecido por este sistema.

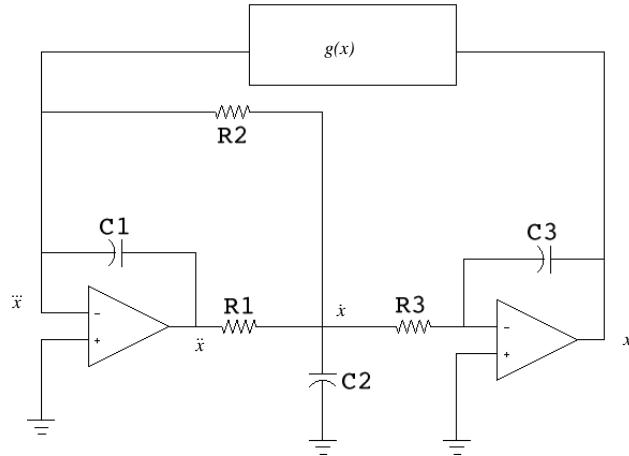


Figura 2.23: Circuito caótico no lineal a trozos objeto de este proyecto

2.2.8. El circuito electrónico

El modelo de circuito caótico lineal a trozos que nos proponemos, cuya base se puede ver en [1], comporta tres integradores y una no linealidad realizada mediante diodos y amplificadores lineales. El modelo genérico que corresponde a la ecuación (2.1) se compone de dos integradores con amplificadores lineales y un integrador analógico (figura 2.23).

La no linealidad $g(x)$ tiene por objeto realizar el valor absoluto y se compone de un amplificador lineal y de un diodo para forzar la salida de este (figura 2.24). Cuando la entrada es positiva el amplificador funciona normalmente y la ganancia es $\frac{-R_5}{R_4}$. Cuando la señal de entrada es negativa el diodo a la salida fuerza el operacional a invertir su salida para dejar pasar la corriente. La amplificación es entonces $\frac{R_5}{R_4}$. Obtenemos así la función valor absoluto de forma muy sencilla.

La ecuación diferencial generada por el circuito completo es:

$$\ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_2 \dot{x} - A_3 |x| + A_4 V_0 = 0 \quad (2.16)$$

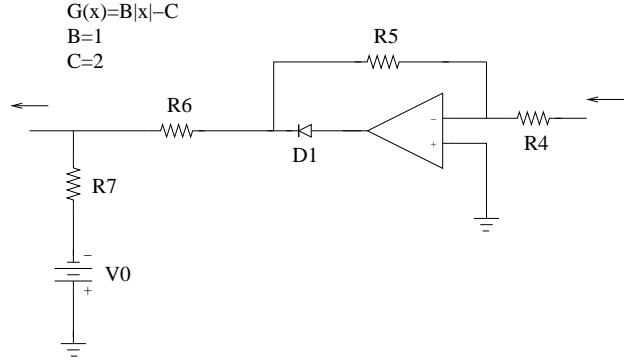


Figura 2.24: No linealidad denominada “valor absoluto”

Los parámetros tienen las siguientes expresiones:

$$A_1 = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{R_1 C_2 R_2 C_1}$$

$$A_3 = \frac{R_5}{C_1 R_6 R_4 R_1 C_2 R_3 C_3}$$

$$A_4 = \frac{1}{R_1 C_2 R_7 C_1 R_3 C_3}$$

Efectuando el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow |A_2|^{-3/2} A_4 x \\ t &\rightarrow |A_2|^{-1/2} t \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde A_2 es distinto de cero, se puede expresar la ecuación (2.16) de la forma siguiente:

$$\ddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} - C|x| + D = 0 \tag{2.18}$$

Con el cambio del parámetro A por $A = A_1 |A_2|^{-1/2}$ y en función de los parámetros del circuito ahora se expresa por:

$$A = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_1 R_2 \frac{C_1}{C_2}} \tag{2.19}$$

Con los valores $R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$, $C_1 = 20nF$ y $C_2 = 500nF$ se obtiene $A = 0,6$ y el sistema funciona en régimen caótico (ver figura 2.21)

y 2.22). Por otra parte el coeficiente C de la ecuación 2.18 viene dado por: $C = |A_2|^{-3/2} A_3 \text{sign}(A_4)$ y en función de los componentes del circuito:

$$C = \frac{R_2 R_5 \sqrt{R_1 C_2 R_2 C_2}}{R_6 R_4 R_3 C_3} \quad (2.20)$$

Con los valores precedentes de los componentes y $C_3 = 10nF$, $R_4 = 3333\Omega$, $R_5 = 1667\Omega$, $R_6 = 5000\Omega$, el parámetro C vale 1.

Primero se ha simulado este circuito con el programa PSPICE para comprobar su funcionamiento. Luego el circuito ha sido implementado físicamente para proceder a un estudio experimental.

2.2.9. Simulaciones con PSpice

Los estudios numéricos se han llevado a cabo independientemente con los programas de cálculo PSpice que simula el circuito electrónico y Matlab que simula la ecuación diferencial. Los resultados obtenidos por ambos procedimientos concuerdan perfectamente como se irá viendo a continuación.

El atrátor proyectado en el plano x, \dot{x} muestra un comportamiento caótico para el parámetro $A = 0,6$ (figura 2.25).

Este atrátor obtenido con PSpice se corresponde muy bien con las simulaciones numéricas de Matlab, el circuito simula bien la ecuación diferencial. El estudio resulta facilitado al comprobar la concordancia de los dos tipos de simulaciones. Así podemos hacer el estudio del sistema con Matlab y luego reproducir los comportamientos interesantes con PSpice.

Un ejemplo de esta correspondencia entre los procedimientos es el espectro de potencia; las simulaciones con Matlab y con PSpice proporcionan espectros muy similares (figura 2.26). Debido al carácter caótico de la solución los dos espectros no son rigurosamente iguales pero poseen las mismas particularidades.

Se puede calcular un diagrama de bifurcación a partir de los datos obtenidos con las simulaciones. Para variar el parámetro de control podemos, por ejemplo, fijar C_2 y cambiar C_1 ; a su vez C_1 se puede expresar en función de A y C_2 :

$$C_1 = \left(\frac{A}{3}\right)^2 C_2$$

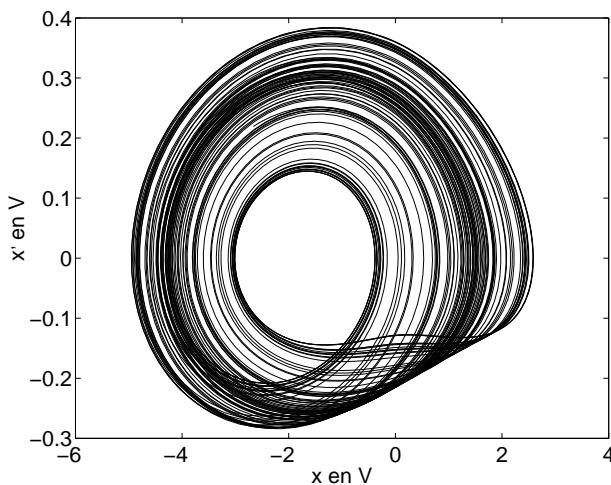


Figura 2.25: Atráctor en el plano $\{x, \dot{x}\}$ obtenido con PSpice (sistema “valor absoluto”)

Hemos fijado las resistencias R_1, R_2 y R_3 a $1k\Omega$ y C_2 a $500nF$.

2.2.10. Construcción y análisis del circuito

La construcción del circuito basado en los esquemas de las figuras 2.23 y 2.24 ha dado buenos resultados y, se ha podido comprobar el comportamiento caótico del mismo. Para el parámetro de control $A \simeq 0,6$ se observa el atráctor de la figura 2.25. La principal dificultad es la obtención de valores muy precisos de los coeficientes.

Los resultados mostrados a continuación han sido obtenidos con un circuito construido con componentes de precisión. La tolerancia de los valores es de 1% para las resistencias y para los condensadores. Esto nos permite controlar el parámetro de control con mas precisión y obtener así todos los regímenes que nos interesan. Para obtener estas figuras hemos empleado una cámara digital, y después hemos tratado las fotografías con un programa de tratamiento de imágenes (como photoshop, por ejemplo). El resultado de las medidas nos da una muy buena correspondencia entre los atráctores obtenidos con las simulaciones Matlab. A continuación mostramos comparativamente las figuras obtenidas con el circuito y los atráctores obtenidos

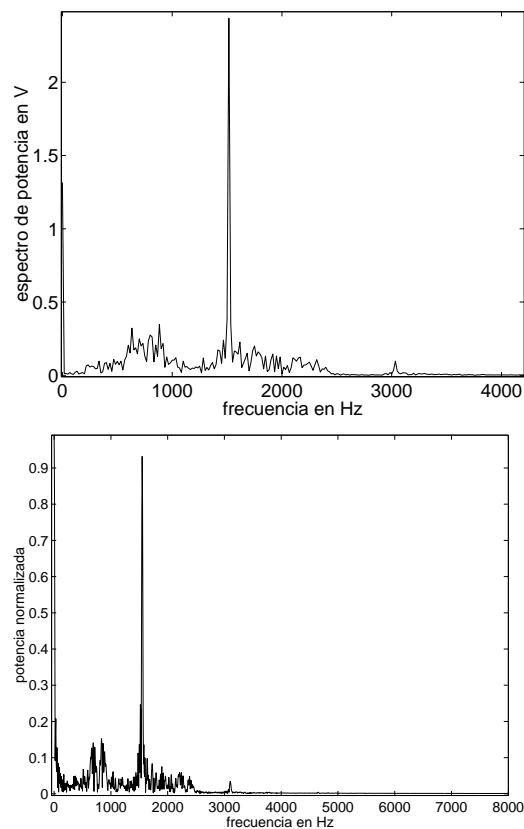
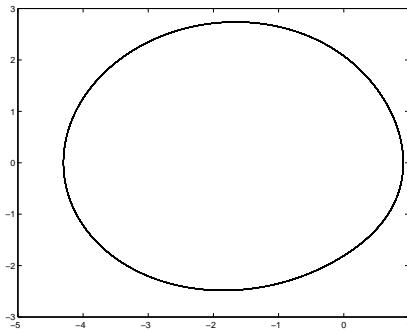
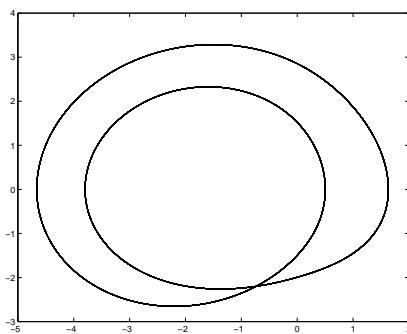
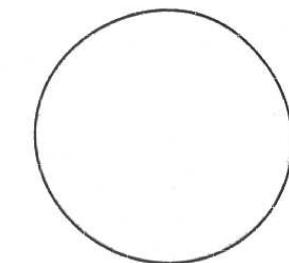


Figura 2.26: Espectro de x con Matlab (abajo) y PSpice (arriba) (sistema “valor absoluto”)

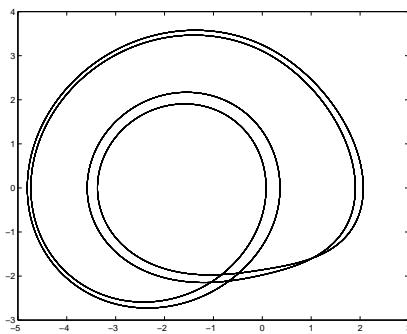
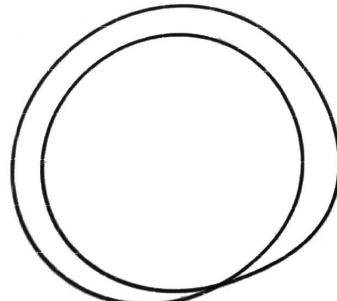
con Matlab (figuras 2.27 a 2.29). Los atráctores se han presentado por orden decreciente del parámetro de control A .



(a) $A = 0.77$, atráctor de periodo 1. Dimensión del atráctor: 5V de anchura (eje x) y 550mV de altura (eje y)



(b) $A = 0.70$, atráctor de periodo 2. Dimensión del atráctor: 6V de anchura (eje x) y 0.6V de altura (eje y)



(c) $A = 0.65$, atráctor de periodo 4. Dimensión del atráctor: 7V de anchura (eje x) y 0.65V de altura (eje y)

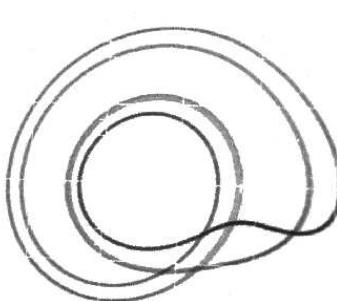
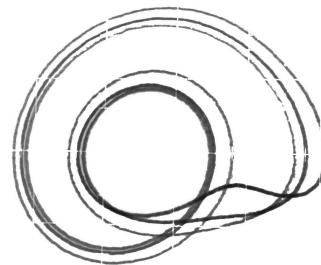
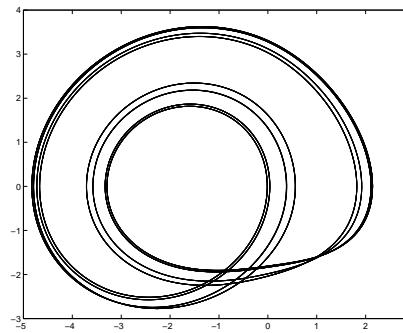
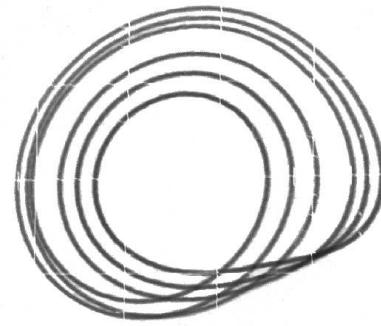
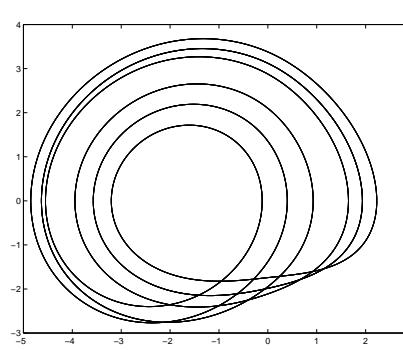


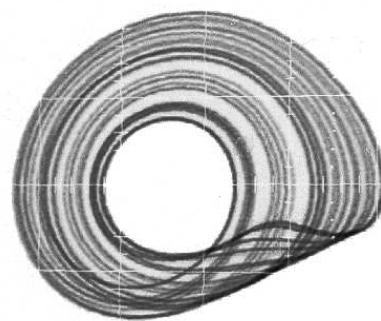
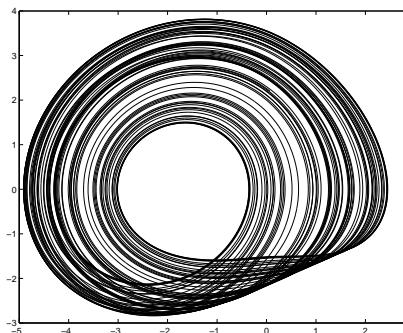
Figura 2.27: Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.77; 0.70$ y 0.65). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .



(a) $A = 0,6418$, atráctor de periodo 6. Dimensión del atrácto: 7V de anchura (eje x) y 0.65V de altura (eje y)

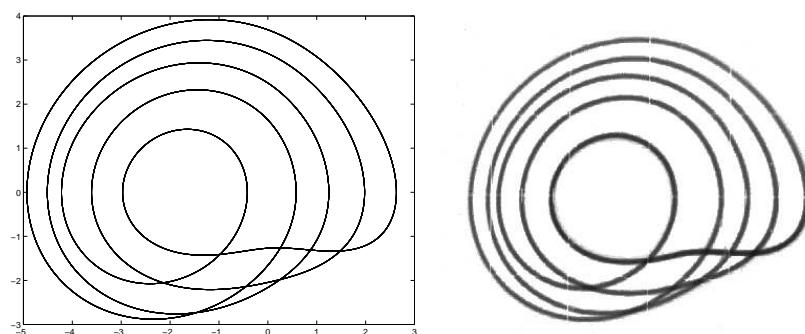


(b) $A = 0,6327$, atráctor de periodo 6. Dimensión del atrácto: 7V de anchura (eje x) y 0.65 de altura (eje y)



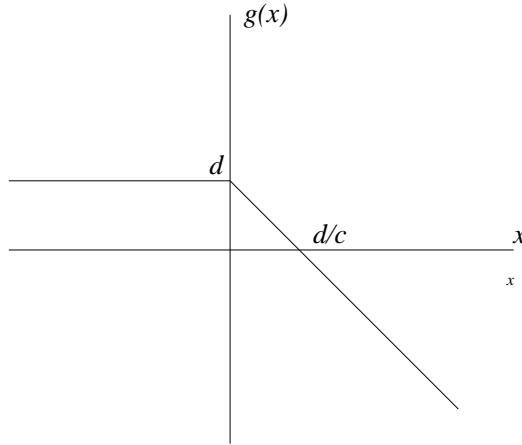
(c) $A = 0,61$, atráctor caótico. Dimensión del atrácto: 7.5V de anchura (eje x) y 0.7V de altura (eje y)

Figura 2.28: Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.6418$; 0.6327 y 0.61). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .



(a) $A = 0,59$, atráctor de periodo 6. Dimensión del atráctor: 7.8V de anchura (eje x) y 0.7V de altura (eje y)

Figura 2.29: Estudio comparativo entre el atráctor obtenido con Matlab (a la izquierda), y el atráctor obtenido con el circuito electrónico (a la derecha) en el sistema “valor absoluto” para $A = 0,59$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .

Figura 2.30: No linealidad del diodo inverso $g(x)$

2.3. No linealidad del tipo “diodo inverso”

Otra de las no linealidades estudiada es el circuito que llamamos de diodo inverso. En este circuito lineal a trozos la no linealidad $g(x)$ (ver figura 2.23) es de la forma:

$$g(x) = -c \max(x, 0) + d \quad (2.21)$$

Donde c y d son constantes. La ecuación diferencial genérica con esta no linealidad se expresa:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} - c \max(x, 0) + d = 0 \quad (2.22)$$

Como en el circuito anterior, según el valor de los coeficientes esta ecuación se pueden generar comportamientos caóticos o regulares. Con el estudio de la ecuación y de su solución analítica se puede ver las zonas de comportamientos estables e inestables.

2.3.1. Solución analítica

La solución analítica depende del signo de $x(t)$. La ecuación diferencial (2.22) es diferente según este signo, debido a la no linealidad a trozos las dos expresiones que adquiere la ecuación son:

$$\begin{aligned} x(t) > 0 \quad & \ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx - d = 0 \\ x(t) < 0 \quad & \ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} - d = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

A partir de estas dos ecuaciones y con el estudio de las autovalores asociados a cada ecuación se puede conocer un poco mejor el comportamiento del sistema. Las dos ecuaciones características correspondientes a las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned} x(t) > 0 \quad & \rho^3 + a\rho^2 + b\rho + c = 0 \\ x(t) < 0 \quad & \rho^3 + a\rho^2 + b\rho = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Se puede ver inmediatamente que la solución de la ecuación 2.23 cuando $x(t) < 0$ consta de una parte osculatoria mas un término creciente con el tiempo. La estructura de las soluciones viene dado por:

$$\begin{aligned} x(t) > 0 \quad & x(t) = \left(-\frac{d}{c}\right) + \sum_{k=1}^3 C_{(k)} e^{\rho_{(k)} t} \\ x(t) < 0 \quad & x(t) = td + \sum_{k=1}^2 C_{(k)} e^{\rho_{(k)} t} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Siendo los $\rho_{(k)}$ soluciones de las ecuaciones (2.24).

Para simplificar el estudio del sistema se han restringido los coeficientes de la ecuación diferencial. Hemos fijado $b = 1$. Con esta simplificación se pueden efectuar algunas precisiones sobre el comportamiento del sistema cuando varia el parámetro a . En el caso $x(t) < 0$ las soluciones de (2.24) son dos complejos conjugados y cero; por otra parte la solución de (2.25) es osculatoria si $a \leq 2 \leq 4$.

2.3.2. Exponentes de Lyapunov

En la figura 2.31 hemos representado el exponente máximo de Lyapunov en función del parámetro de control del sistema A . El margen para el cual el exponente máximo es positivo es pequeño; eso quiere decir que el margen para el cual el sistema presenta un comportamiento caótico es estrecho (para $A \in [0,45; 0,68]$). Por otro lado, los exponentes son bastante pequeños (no superan el valor 0.12). Dentro de la zona de comportamiento caótico se puede observar la aparición de numerosas ventanas donde el exponente máximo es 0. En estas regiones estrechas el sistema presenta un comportamiento regular (no caótico).

El hecho de que el sistema presente muchas ventanas de comportamiento regular no permite su uso para la sincronización del circuito. Una pequeña variación del parámetro de control del sistema puede volver a un régimen regular abandonando el comportamiento caótico.

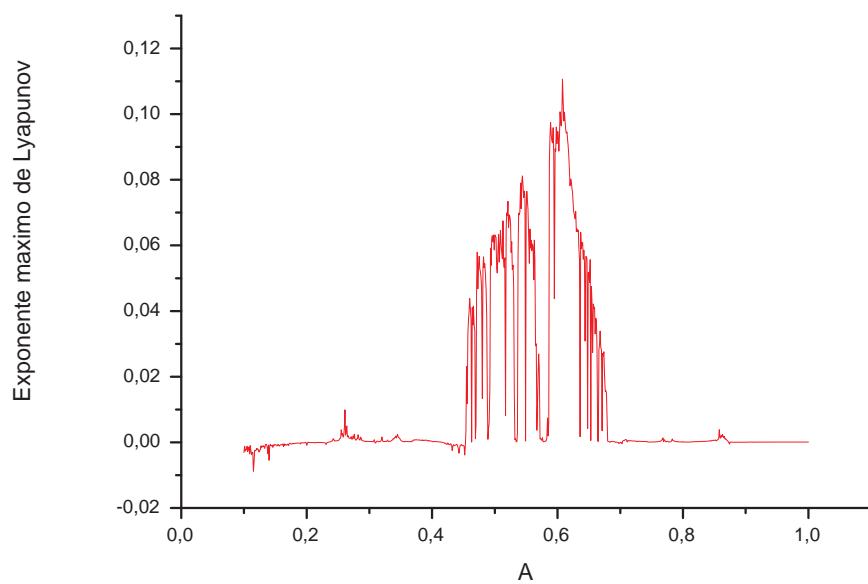


Figura 2.31: Exponente máximo de Lyapunov en función del parámetro de control A para el circuito de diodo inverso

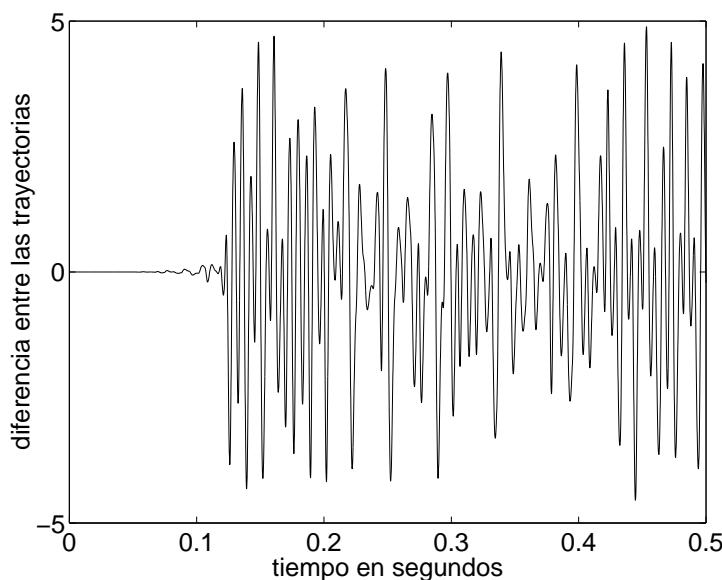


Figura 2.32: Divergencia de dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “diodo inverso”

Las figuras 2.32 y 2.33 representan la divergencia de dos trayectorias que parten de condiciones iniciales muy próximas (una diferencia de 10^{-10} entre las dos). En escala logarítmica se puede apreciar la pendiente con que evoluciona el proceso; esta pendiente representa precisamente el exponente máximo de Lyapunov. La pendiente es bastante difícil de estimar porque no parece constante y, por lo tanto, tampoco parece que sea una estimación muy fiable.

2.3.3. Dimensión fractal del atráctor

Se ha calculado numéricamente la dimensión fractal de un atráctor caótico de este sistema. En la tabla siguiente tenemos las dimensiones correspondientes al atráctor caótico para el parámetro de control $A = 0,61$.

Dimensión de Hausdorff	1.9031
Dimensión de correlación	1.8859
Dimensión de información	1.5048

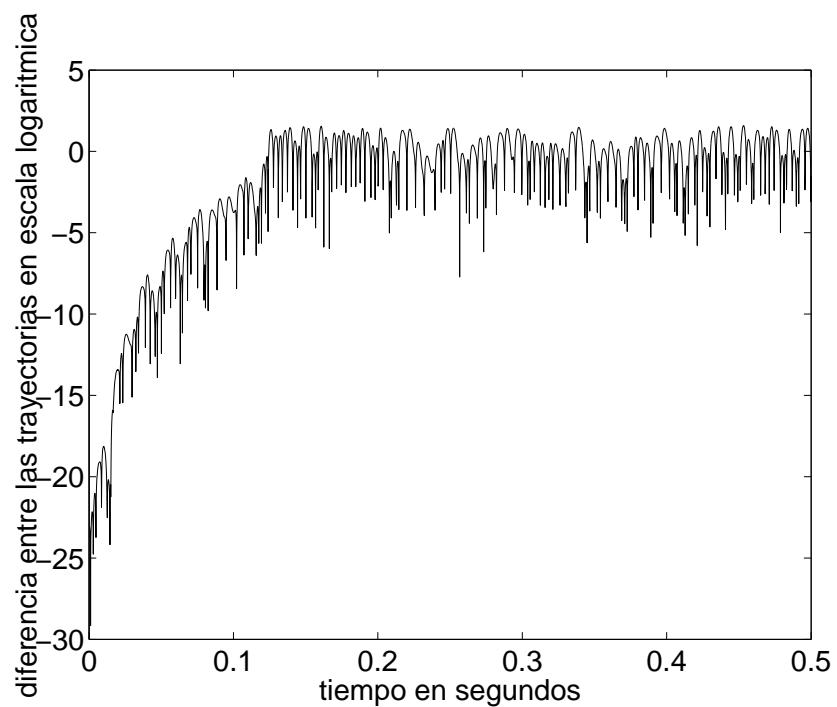


Figura 2.33: Divergencia de dos trayectorias en escala logarítmica para $A = 0,61$ en el sistema “diodo inverso”

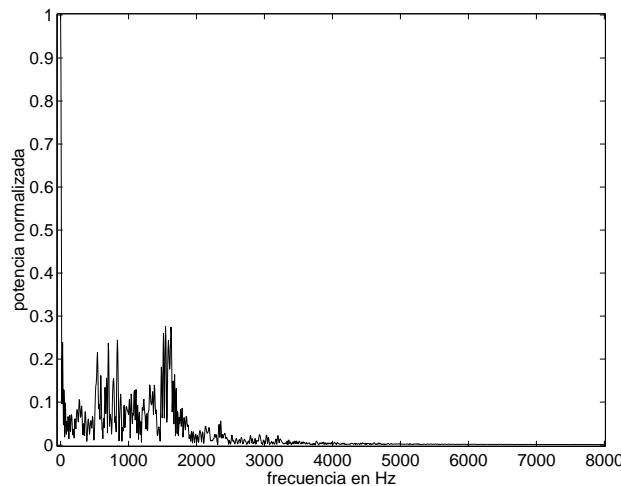


Figura 2.34: Espectro de la variable $x(t)$ del sistema con diodo inverso para $A = 0,6$

El atráctor es bastante plano (la dimensión de Hausdorff está muy cerca de 2), pero no deja de ser un objeto comprendido entre una linea y una superficie.

2.3.4. Espectro y autocorrelación

En régimen caótico el espectro de potencia presenta una banda ancha aunque aparezca una frecuencia predominante (figura 2.34). Se podría enmascarar una señal dentro del ancho de banda $B = [200; 1800]Hz$. Sin embargo no es un ancho de banda suficientemente grande para enmascarar una señal. Este espectro muestra que el sistema no presenta un caos muy elevado, lo que también se puede comprobar a partir de los exponentes máximos de Lyapunov (2.3.2).

Igualmente e comportamiento caótico poco pronunciado se observa en la función de autocorrelación en el tiempo de la variable $x(t)$ (figura 2.35). La función de autocorrelación decrece bastante rápidamente con el tiempo. Gracias a la figura 2.35 se puede medir el tiempo de correlación del sistema para un umbral de correlación de 0.1. Se ha obtenido un tiempo de correlación de 5ms, lo que significa que el sistema no tiene memoria de sus estados pasado

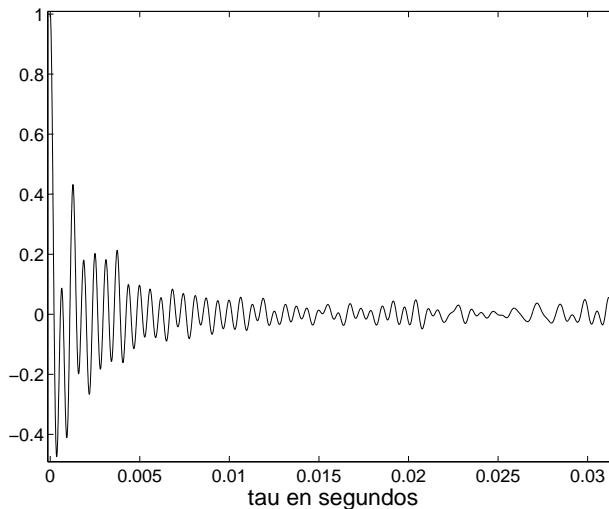


Figura 2.35: Autocorrelación de la variable $x(t)$ del sistema con diodo inverso para $A = 0,6$

ese tiempo.

2.3.5. Secciones de Poincaré

Las secciones de Poincaré nos permiten visualizar la estructura del atráctor mediante un corte del atráctor por un plano. Para un régimen regular se puede ver que las trayectorias quedan confinadas en un zona pequeña. En la figura 2.36 a la izquierda se observan las trayectorias en tres dimensiones y el plano de corte. A la derecha se muestra el plano con las intersecciones de las trayectorias.

Los puntos en azul son las intersecciones del flujo con el plano de abajo hacia arriba y los puntos en rojos son las intersecciones de la trayectoria que se dirige de arriba hacia abajo. Se observa muy bien el ciclo definido por la trayectoria, hay cuatro puntos rojos y cuatro puntos azules. Además, se encuentran agrupados de dos en dos porque el ciclo es doble como puede observarse en la figura de la izquierda.

Ahora, si pasamos a un caso caótico la sección de Poincaré presenta una dispersión de los puntos mucho más grande. La sección de Poincaré muestra muy bien la densidad de trayectorias producidas por el atráctor. El atráctor

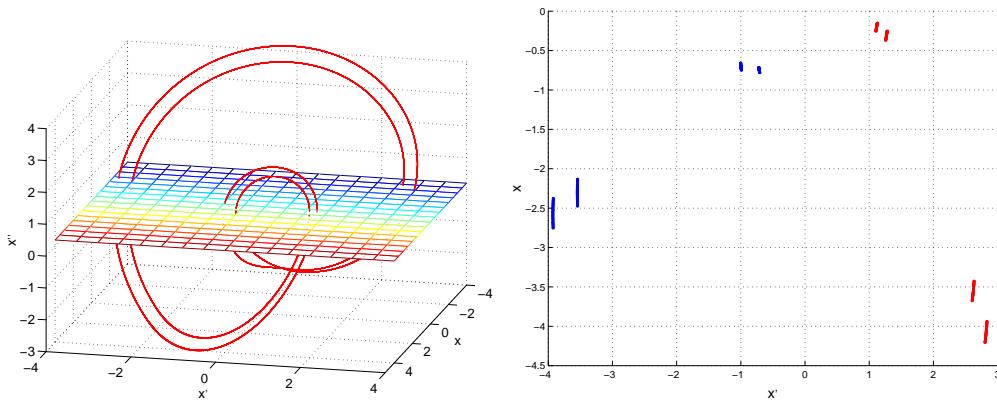


Figura 2.36: Sección de Poincaré en un caso regular para $A = 0,4$ en el sistema “diodo inverso”

es denso en el espacio, por tanto las trayectorias van a recubrir un cierto espacio (ver figura 2.37).

2.3.6. Mapas de retorno

El mapa de retorno de este sistema tiene una forma bastante peculiar. Ya no es un mapa invertible como era el caso de la no linealidad “valor absoluto” (figura 2.11), la estructura ahora es mucho mas complicada. En la figura 2.38 tenemos el máximo x_n de la variable $x(t)$ en función del siguiente máximo x_{n+1} . Aunque presente una forma parabólica no se puede obtener mucha información de este mapa; la aproximación por rectas o por un polinomio no se puede realizar dado que x_{n+1} no es una función analítica de x_n .

2.3.7. Ruta hacia el caos

Este sistema tiene una ruta hacia el caos muy interesante, su diagrama de bifurcación es bidireccional. Es decir que aumentando el parámetro de control a partir del valor 0.1, el sistema presenta un comportamiento regular, después caótico (con ventanas de periodicidad) y finalmente otra vez regular. Este comportamiento, se observa muy bien sobre la figura 2.39. Esta particularidad no se encuentra mucho en la literatura, la ruta típica hacia el caos consiste un comportamiento regular y después un comportamiento caótico

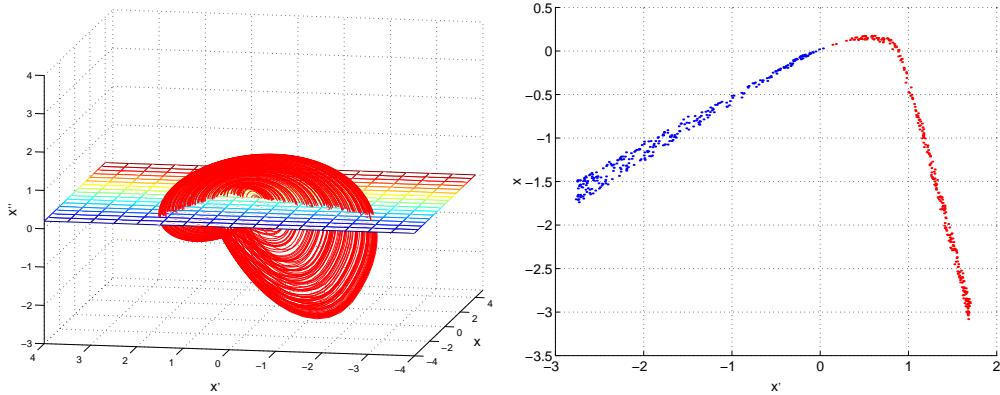


Figura 2.37: Sección de Poincaré en el caso caótico para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”

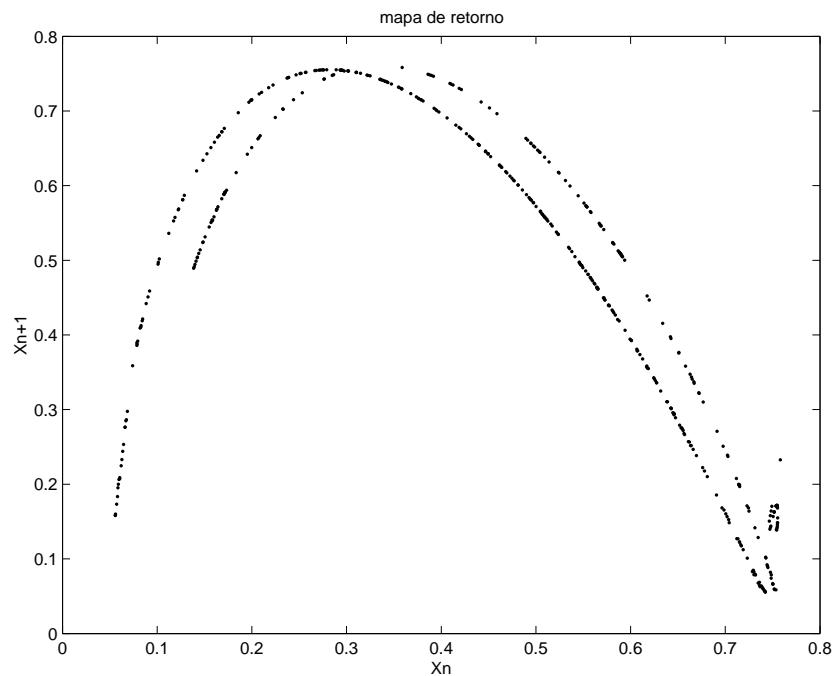


Figura 2.38: Mapa de retorno a partir de la variable $x(t)$ para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”

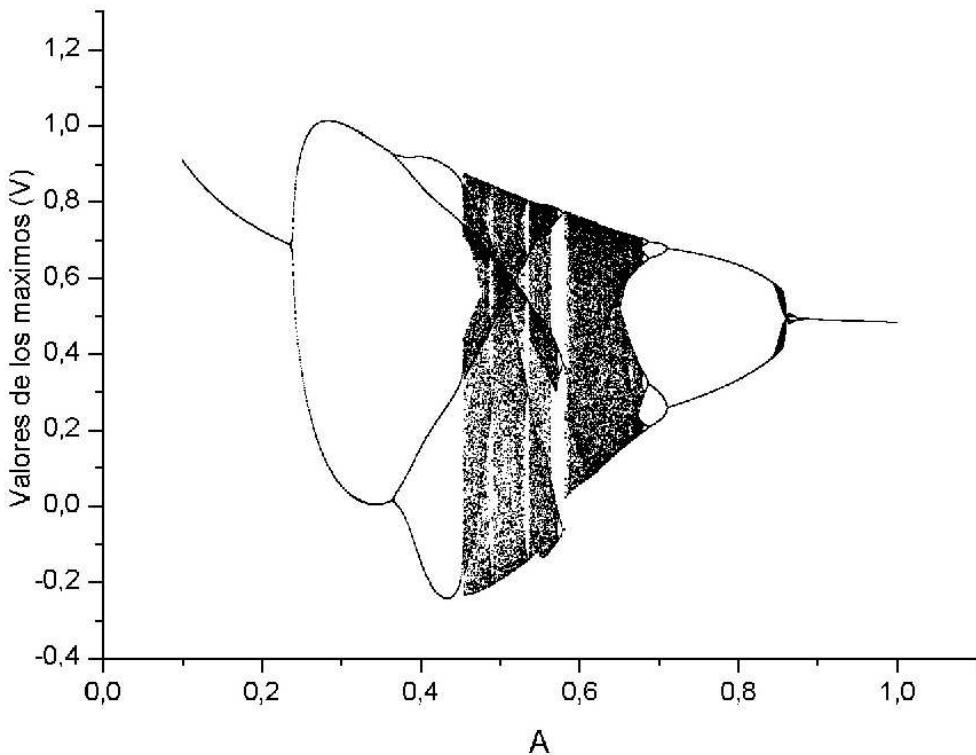


Figura 2.39: Diagrama de bifurcación en función de A en el sistema “diodo inverso”

hasta la inestabilidad (como el diagrama de bifurcación de la figura 2.22).

Otra forma de ver esta evolución es a partir de los espectros y los atráctores del sistema. En la figura 2.40 se puede ver la evolución para algunos valores del parámetro de control A . Esta figura muestra la evolución del espectro con el atráctor correspondiente (en el plano x, \dot{x}). Los desdoblamiento de periodo (las bifurcaciones) se acompañan de armónicos distintos. En el régimen caótico (cuando $A = 0,62$) el espectro presenta una banda ancha (típica del régimen caótico) y el atráctor posee un cierta anchura y es denso.

En la figura 2.41 se ven igualmente los atráctores asociados al diagrama de bifurcación del sistema. Se observa muy bien la evolución de los atráctores

correspondientes; el número de períodos debe ser igual al numero de líneas que se pueden contar verticalmente.

En la figura 2.42 se han superpuesto el diagrama de bifurcación y el exponente máximo de Lyapunov para el mismo conjunto de valores de A . Se observa muy bien la correspondencia entre ambos, cuando el sistema presenta un comportamiento regular (exponente máximo igual a cero) y cuando aparecen los comportamientos caóticos (exponente superior a cero).

2.3.8. El circuito electrónico

La base del circuito electrónico es la misma que la del sistema con la no linealidad valor absoluto (ver figura 2.23). Solo cambia la no linealidad $g(x)$. El circuito de la nolinealidad $g(x)$ es muy sencillo y se compone solo de resistencias, un amplificador operacional y un diodo (ver figura 2.43).

La ecuación diferencial simulada con esta no linealidad es de la forma:

$$\ddot{x} + A_1\ddot{x} + A_2\dot{x} - A_3\max(x, 0) + A_4V_0 = 0 \quad (2.26)$$

Los coeficientes $A_1 \dots A_4$ tienen la siguiente expresión:

$$A_1 = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{R_1 C_2 R_2 C_1}$$

$$A_3 = \frac{R_4}{R_5 C_1 R_6 R_1 C_2 R_3 C_3}$$

$$A_4 = \frac{-V_0}{C_1 R_7 R_1 C_2 R_3 C_3}$$

Se puede ver que los coeficientes A_1 y A_2 son los mismos que en la ecuación (2.16). Efectuando el cambio de variable definido para el valor absoluto en la ecuación (2.17) tenemos la nueva expresión de la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} - C\max(x, 0) + D = 0 \quad (2.27)$$

Los coeficientes A y C pueden expresarse en función de los componentes del circuito:

$$A = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_1 R_2 \frac{C_1}{C_2}} \quad (2.28)$$

$$C = -\frac{R_2 R_4}{R_5 R_3 C_3 R_6} \sqrt{R_2 C_1 R_1 C_2}$$

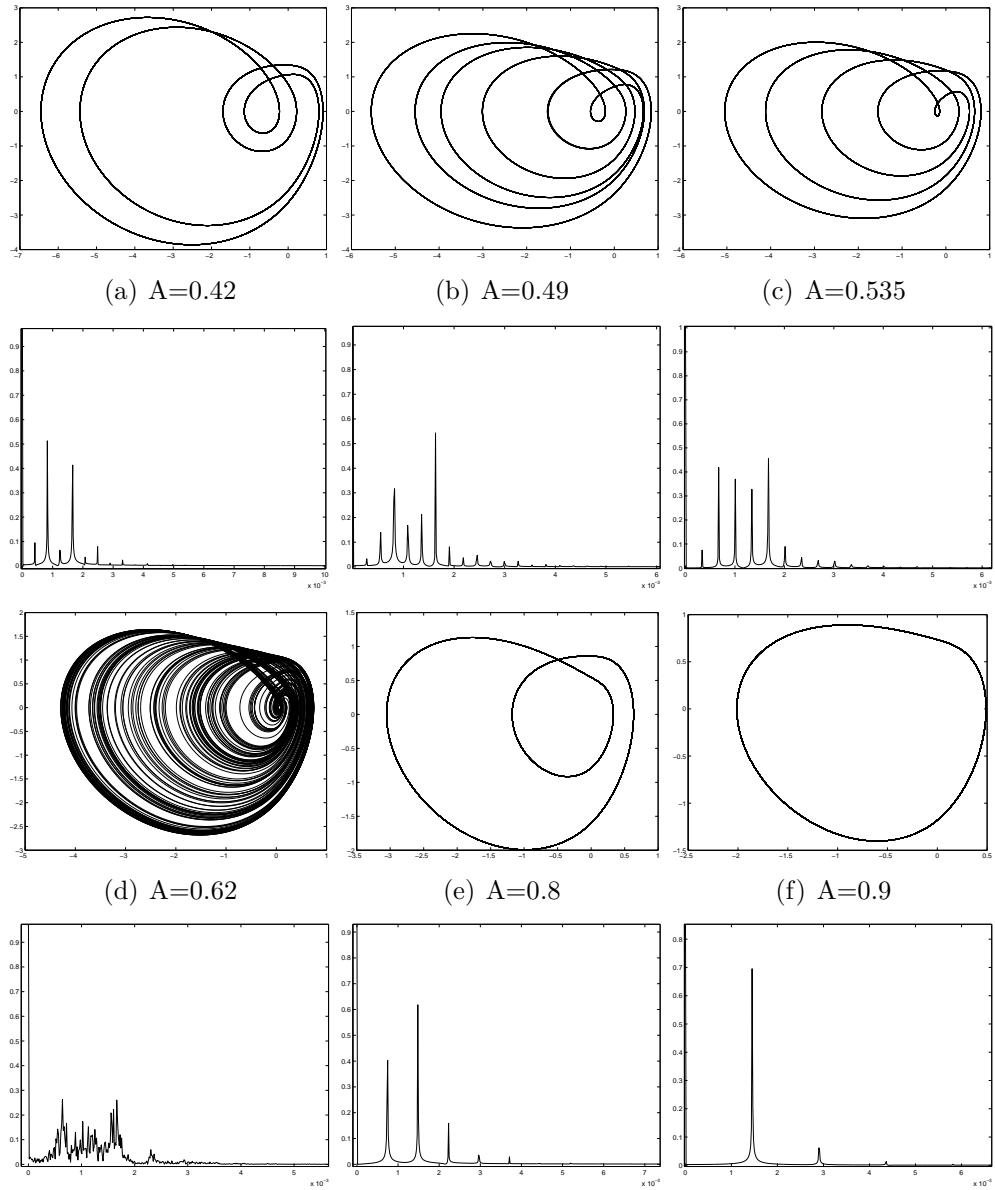


Figura 2.40: Evolución con A de los espectros y de los atráctores (cambios de régimen de funcionamiento) en el sistema “diodo inverso”

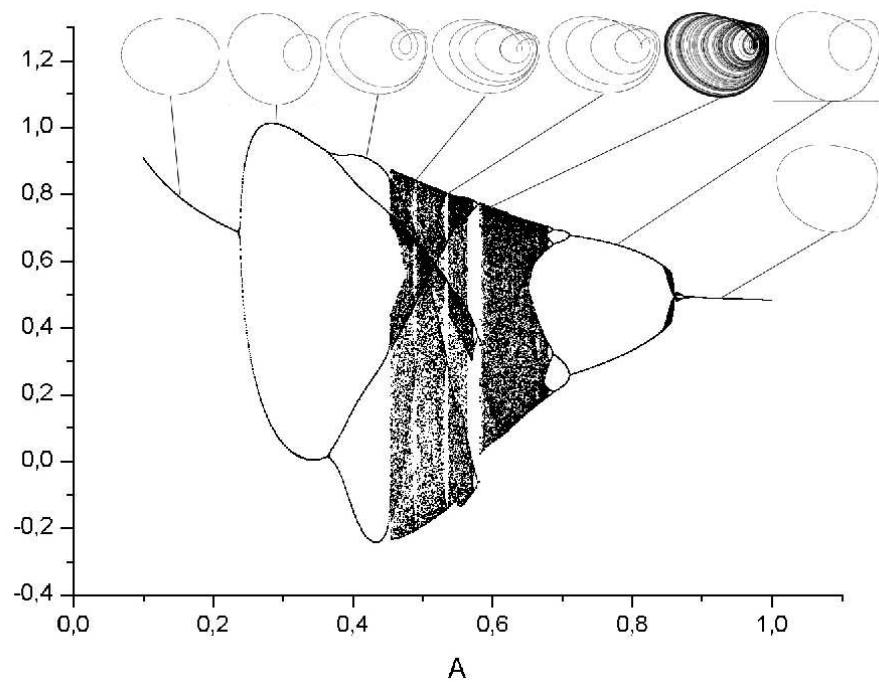


Figura 2.41: Diagrama de bifurcación en función de A con los atráctores correspondientes a distintas regiones de funcionamiento para el sistema “diodo inverso”

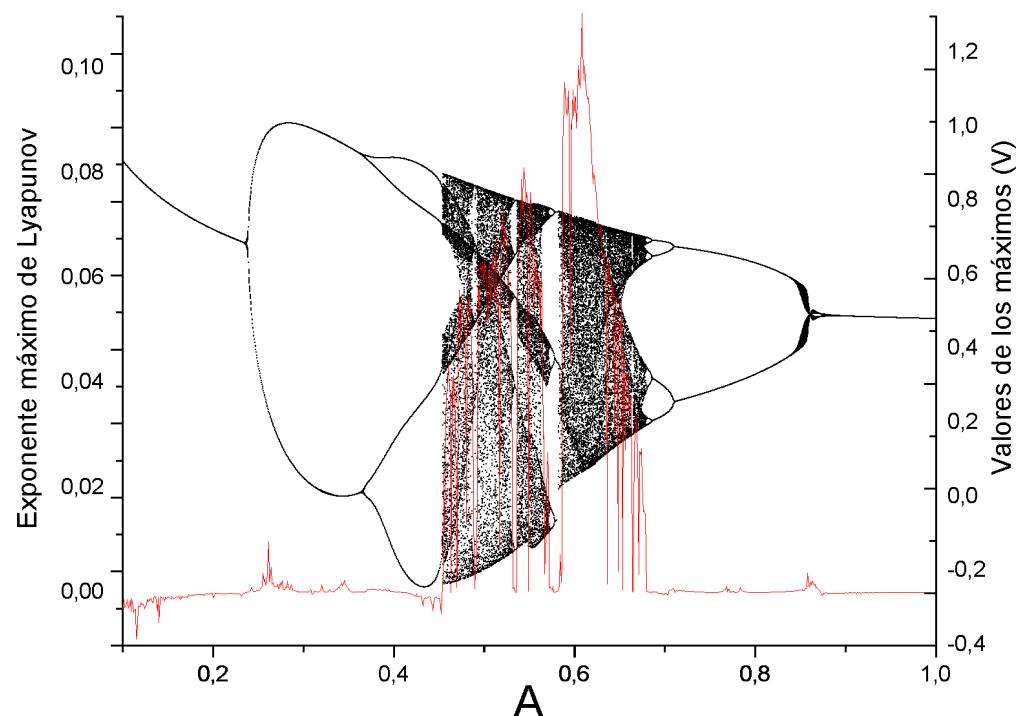


Figura 2.42: Diagrama de bifurcación y exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sistema “diodo inverso”

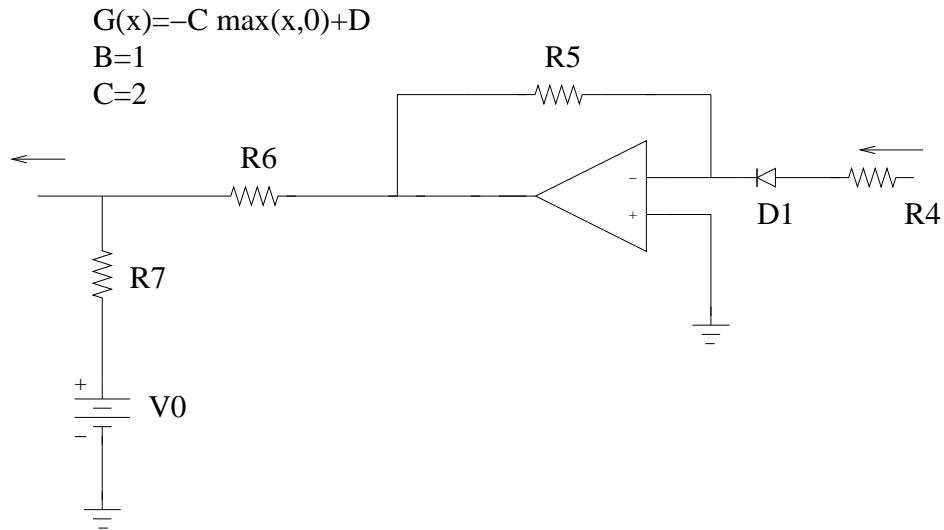


Figura 2.43: Esquema eléctrico de la nolinealidad correspondiente al sistema dotado de “diodo inverso”

Igualmente el coeficiente A es igual que en el caso del circuito con el valor absoluto (ecuación (2.18)). Si fijamos los valores de las resistencias R_1 , R_2 y R_3 entonces el coeficiente A depende solo de C_1 y C_2 . Este coeficiente sirve de parámetro de control del sistema, variándolo obtenemos las figuras del apartado “Ruta hacia el caos”. El coeficiente C puede ajustarse con las resistencias R_4 , R_5 o R_6 . Son las resistencias que permiten controlar la realimentación de la variable x en el circuito. La resistencia R_7 solo interviene en el coeficiente D . Este coeficiente no tiene un papel importante en la ecuación, solo influye en el tamaño del atrátor.

2.3.9. Simulaciones con PSpice

Las simulaciones realizadas con PSpice corresponden perfectamente con las simulaciones precedentes. Los atráctores, los espectros y el diagrama de bifurcación coinciden. Por ejemplo el espectro y el atráctor obtenidos por Matlab y por PSpice para el parámetro de control $A = 0,6$ aparecen representados simultáneamente en la figura 2.44.

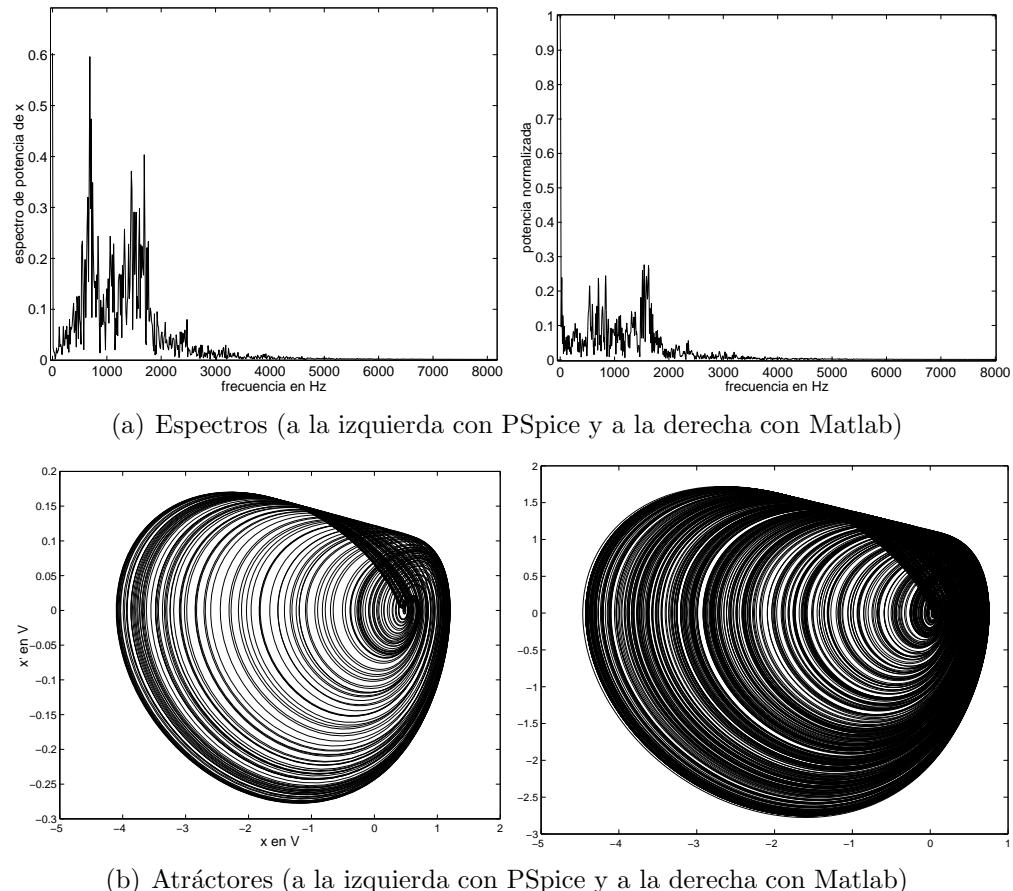


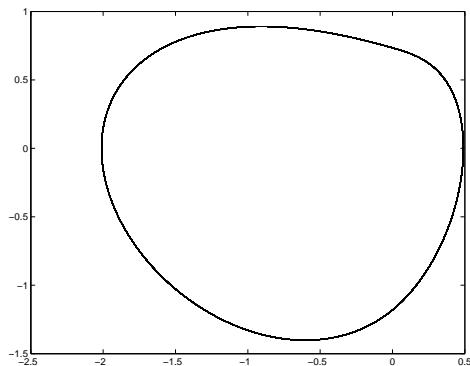
Figura 2.44: Espectro y atráctor simulados con Matlab y PSpice para $A = 0,6$ en el sistema “diodo inverso”

2.3.10. Construcción y análisis del circuito

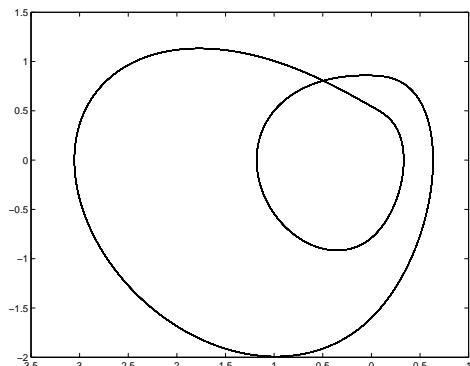
Una vez que hemos construido el circuito para el valor absoluto es muy sencillo actuar sobre la no linealidad para hacer funcionar el circuito. El circuito nos proporcionó una gran variedad de atráctores, la mayoría de ellos no caóticos. Este circuito presenta muchos comportamientos distintos pero hay pocos que nos interesen. Los atráctores siguientes (figuras 2.45 a 2.47) han sido fotografiados en un osciloscopio convencional, luego hemos tratado las imágenes para obtener una mejor visualización. Hemos también omitido los valores de las tensiones en el modo X/Y del osciloscopio. Lo que nos interesa es mas la forma general del atrácto y el hecho de que se corresponda con los modelos teóricos.

Sobre las figuras citadas (2.45 a 2.47) los atráctores de la izquierda corresponden a las simulaciones con Matlab para el mismo valor del parámetro de control A . A la derecha tenemos los atráctores obtenidos experimentalmente. Los atráctores están presentados por orden decreciente del parámetro de control.

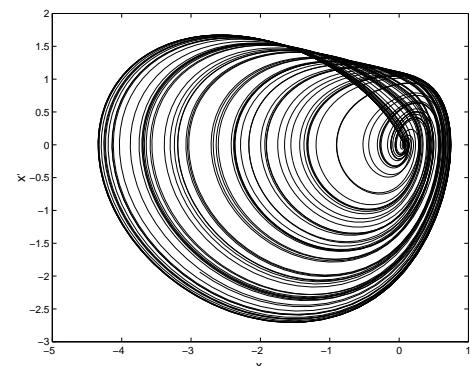
Se puede ver la correspondencia entre los distintos atráctores. No figuran todas las posibilidades, hacen falta condensadores muy precisos para conseguir todos los valores del parámetro de control. El objeto de este estudio no es de obtener una gran variedad de atráctores sino de comprobar que las simulaciones se corresponden con el modelo físico experimental.



(a) $A = 0.9$, atráctor de periodo 1. Dimensión del atráctor: 2.5V de anchura (eje x) y 0.23V de altura (eje y)

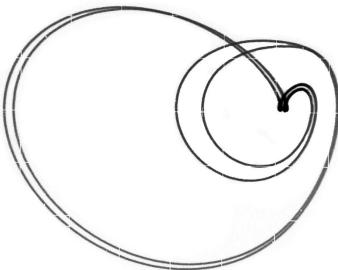
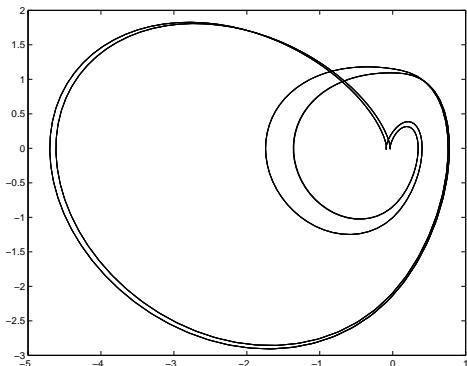


(b) $A = 0.8$, atráctor de periodo 2. Dimensión del atráctor: 3.5V de anchura (eje x) y 0.3V de altura (eje y)

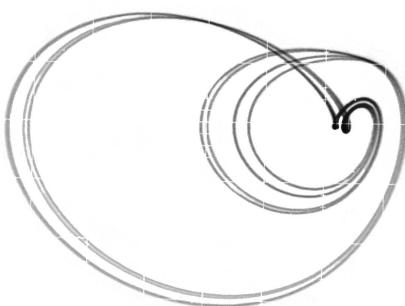
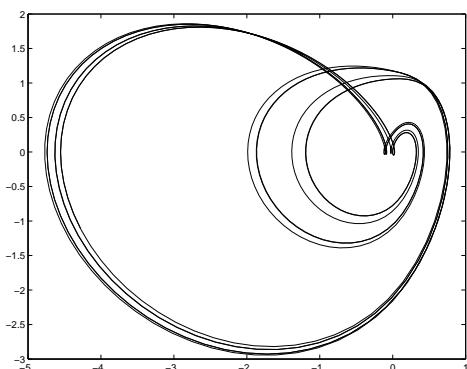


(c) $A = 0.61$, atráctor caótico. Dimensión del atráctor: 4.6V de anchura (eje x) y 0.45V de altura (eje y)

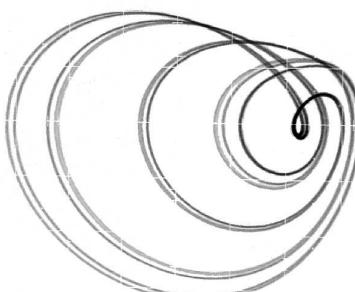
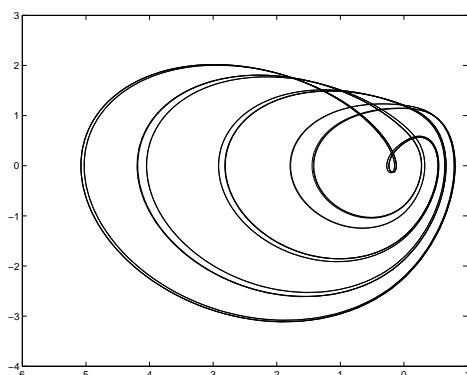
Figura 2.45: Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.9; 0.8$ y 0.61). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .



(a) $A = 0.575$, atrácto de periodo 4. Dimensión del atrácto: 5.6V de anchura (eje x) y 0.4V de altura (eje y)

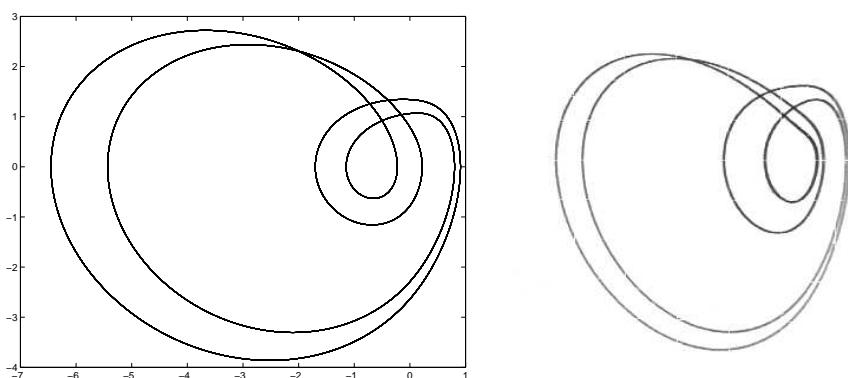


(b) $A = 0.568$, atrácto de periodo 7. Dimensión del atrácto: 5.6V de anchura (eje x) y 0.4V de altura (eje y)



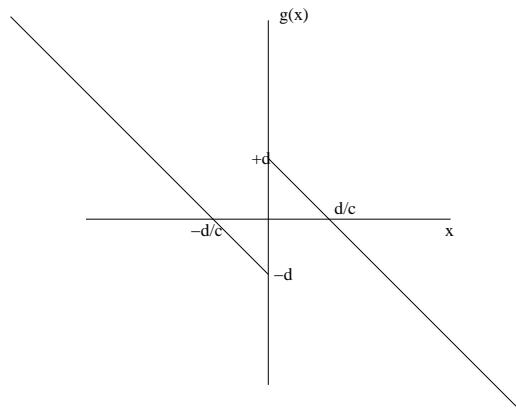
(c) $A = 0.532$, atrácto de periodo 9. Dimensión del atrácto: 5.9V de anchura (eje x) y 0.5V de altura (eje y)

Figura 2.46: Estudio comparativo entre los atráctores obtenidos con Matlab (a la izquierda), y los atráctores obtenidos con el circuito electrónico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para diferentes valores del parámetro de control ($A=0.575; 0.568$ y 0.532). El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} .



(a) $A = 0,42$, atráctor de periodo 4. Dimensión del atráctor: 7.2V de anchura (eje x) y 0.65V de altura (eje y)

Figura 2.47: Estudio comparativo entre el atráctor obtenido con Matlab (a la izquierda), y el atráctor obtenido con el circuito electrónico (a la derecha) del sistema “diodo inverso” para $A = 0,42$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable y .

Figura 2.48: No linealidad $g(x)$ de tipo “salto”

2.4. No linealidad de tipo “Salto”

Se trata del tercer sistema lineal a trozos estudiado. Lo hemos llamado circuito salto porque en la ecuación diferencial existe un coeficiente que fluctúa entre dos valores según el valor que adquiere una variable del sistema. Es decir cuando esta variable alcanza un cierto valor el coeficiente d de la no linealidad “salta” a otro valor.

Este sistema presenta particularidades interesantes para nuestra aplicación, y ofrece un caos estable para un amplio margen de variación del parámetro de control. Es decir es un circuito **robusto**. La no linealidad obedece a la expresión:

$$g(x) = -cx + d\text{sign}(x) \quad (2.29)$$

y viene representada en la figura 2.48. Como en los casos precedentes se define la ecuación diferencial del sistema por:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx - d\text{sign}(x) = 0 \quad (2.30)$$

Para simplificar el estudio de esta ecuación diferencial se ha fijado el coeficiente $b = 1$. Este convenio permite encontrar con facilidad el mayor exponente máximo de Lyapunov. Así se ha elegido como parámetro de control del sistema el coeficiente a al que llamaremos A en el estudio del sistema.

2.4.1. Solución analítica

Como en el caso de la nolinealidad del sistema del “valor absoluto” esta ecuación diferencial tiene una solución analítica pero es un poco más sencilla de calcular y de implementar. Para ciertos valores del parámetro de control A el sistema va a tener un comportamiento oscilatorio alrededor de dos puntos fijos inestables. La ecuación diferencial presenta los dos puntos fijos $x_{\pm}^* = \{\frac{d}{c}; \frac{-d}{c}\}$. Estudiamos la estabilidad de estos dos puntos fijos poniendo $u = x - x^*$. La ecuación diferencial se puede reescribir entonces:

$$\ddot{u} + A\ddot{u} + \dot{u} + c(u + x^*) - d\text{sign}(u + x^*) = 0$$

El sistema se escribe de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -cx^* + d\text{sign}(u + x^*) \end{bmatrix}$$

Para pequeñas variaciones de u podemos hacer la aproximación $\text{sign}(u + x^*) \simeq \text{sign}(x^*)$, así la matriz jacobiana del sistema no depende de u . Una primera constatación es que la tasa de contracción de los volúmenes es negativa, o sea que el sistema es disipativo. Dicha tasa viene dada por la suma de los elementos diagonales de la matriz jacobiana del sistema (ver el apartado 1.3.4 y la ecuación (1.19)), que en nuestro caso vale $-A$. Los autovalores vienen dados por la ecuación característica:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda + c = 0 \quad (2.31)$$

Los puntos fijos son estables para $A > c$ (las partes reales de los autovalores son negativas) o sea la función x tiene un decrecimiento exponencial hacia los puntos fijos. Para $A < c$ hay dos autovalores con la parte real positiva y uno con la parte real negativa. El paso del comportamiento inestable a estable es una bifurcación de Hopf. Hay que notar que si se disminuye demasiado A o si se aumenta c por encima de un cierto umbral el sistema se vuelve inestable (la solución diverge hacia $\pm\infty$). El parámetro d no juega ningún papel en la estabilidad, solo cambia el tamaño del atrátor (es decir el emplazamiento de los puntos fijos).

El comportamiento caótico del sistema aparece cuando los autovalores complejos tienen una parte real positiva. En este régimen el sistema oscila

alternativamente alrededor de dos puntos fijos con un crecimiento exponencial. La solución se puede escribir dependiendo del signo de $x(t)$. Si $x(t) > 0$ (resp $x(t) < 0$) entonces el sistema va a oscilar alrededor del punto fijo $\frac{d}{c}$ (resp $-\frac{d}{c}$). La solución para cada trozo j se puede expresar:

$$x_j(t) = s(j)\left(-\frac{d}{c}\right) + \sum_{k=1}^3 C_{(k)} e^{\rho_{(k)} t} \quad (2.32)$$

Siendo $s(j)$ el signo de $x_j(t)$. Las raíces $\rho_{(k)}$ son las soluciones de la ecuación característica de la ecuación diferencial:

$$(\rho_{(k)})^3 + A(\rho_{(k)})^2 + (\rho_{(k)}) + c = 0 \quad (2.33)$$

Las soluciones son constantes, es decir no dependen del signo de $x(t)$. Para un desarrollo completo de la solución ver en el anexo B.2 (cálculo de las condiciones iniciales para cada trozo ...). Para entender un poco mejor el funcionamiento de este sistema se puede dibujar la solución para un cierto tiempo de integración. Podemos ver que el sistema oscila en torno a un punto y cuando alcanza el 0 cambia de punto de oscilación. Este mecanismo se observa en la figura 2.49; La solución es continua a pesar de que oscila alternativamente en torno a $+d/c$ y a $-d/c$ voltios.

2.4.2. Simulaciones con Matlab

Se ha implementado un programa para dibujar la solución analítica del sistema. Este método nos permite observar las trayectorias del sistema sin hacer la integración de la ecuación diferencial con los métodos clásicos (Runge-Kutta...). Los resultados de los dos métodos concuerdan perfectamente, las trayectorias obtenidas con las dos técnicas tienen las mismas características.

El atráctore en el espacio de las fases presenta la forma de doble rollo para el parámetro de control dentro del margen $0,55 < A < 1,2$ (figura 2.50). Esta estructura de doble rollo se explica muy bien con la solución analítica; la trayectoria de la variable $x(t)$ pasa alternativamente de un punto de atracción inestable a otro.

Se puede calcular la dimensión fractal de este atráctore. A partir de una trayectoria en el espacio de las fases obtenida con la integración de la ecuación calculamos la dimensión de Hausdorff, la dimensión de información y la cor-

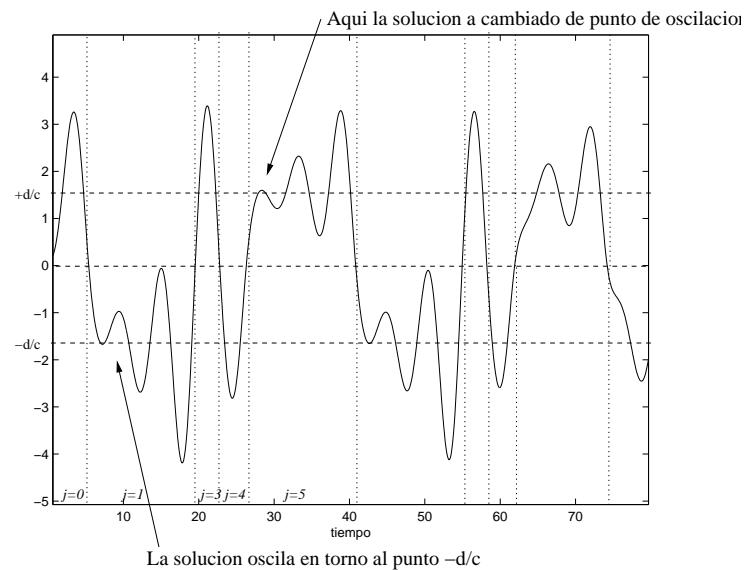


Figura 2.49: La solución $x(t)$ cambia de punto de oscilación para cada fragmento, saltando del $+d/c$ al $-d/c$, en el sistema de tipo “salto”.

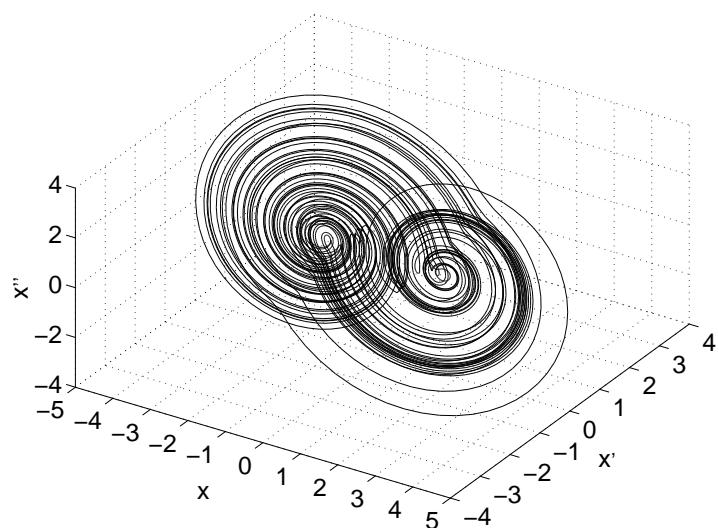


Figura 2.50: Atráctor en el espacio de las fases para $A = 0,61$ y $c = 1,2$ en el sistema de “tipo salto”

relación.

$$D_h = 2,3110$$

$$D_i = 2,1258$$

$$D_c = 2,0569$$

El atrátor tiene una dimensión superior a 2 e inferior a 3. Es un objeto comprendido entre un plano y un volumen. Concretamente la dimensión de Hausdorff y de correlación nos permite conocer la estructura fractal del atrátor y el comportamiento caótico del sistema.

2.4.3. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov cuando el sistema es lineal a trozos, son muy sencillos de calcular, la matriz jacobiana del sistema no depende del tiempo sino solo de los parámetros de control. El exponente mayor viene dado por la parte real de los autovalores, ya que esta parte representa el comportamiento exponencial creciente. La expresión analítica de los autovalores es muy compleja (viene en el anexo B.1) y se pueden calcular a partir de la ecuación (2.33). Aun así, en la figura 2.51, el exponente máximo parece ser una función cúbica del parámetro de control A (en este caso el coeficiente c vale 1,2).

Por otra parte, la integración de las ecuaciones diferenciales y el cálculo numérico de los exponentes de Lyapunov se corresponden perfectamente con los exponentes obtenidos teóricamente. La figura 2.52 representa la ley de variación del exponente máximo de Lyapunov en función de los parámetros A y c .

El exponente máximo crece cuando el coeficiente c crece. Cuando el valor A decrece también aumenta el exponente máximo. El sistema es inestable para ciertas regiones de valores de estos dos parámetros de control (cuando $c > 1,2$ el sistema es inestable). El exponente mayor que se ha obtenido es $\lambda = 0,2$ para $A = 0,58$ y $c = 1,2$. Aun así el sistema no es muy estable, una pequeña variación del parámetro de control A lo dispara.

Se puede representar también la divergencia entre dos trayectorias como lo hemos hecho para los otros sistemas (figura 2.53 y 2.54). La pendiente de la figura 2.54 es muy recta y se puede estimar el exponente mayor de Lyapunov para este valor del parámetro de control:

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{0,5510^2} = 0,18$$

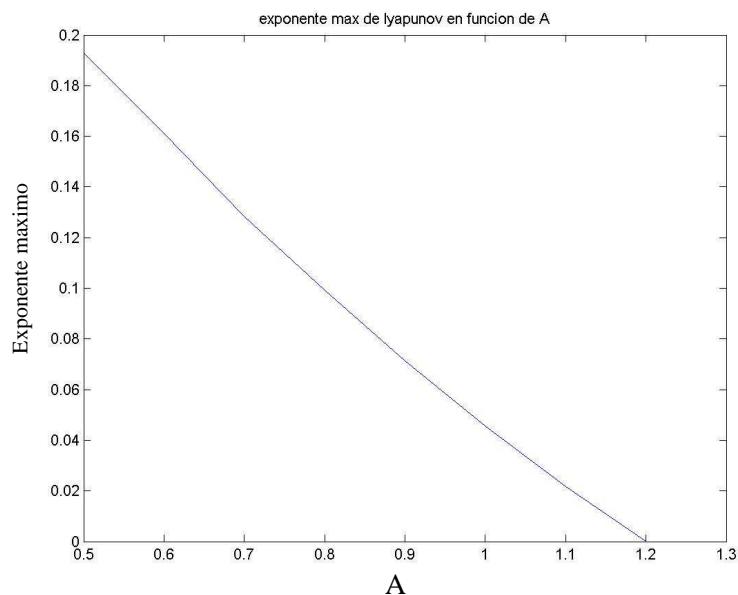


Figura 2.51: Exponente máximo de Lyapunov en función de A para el sistema de “tipo salto”

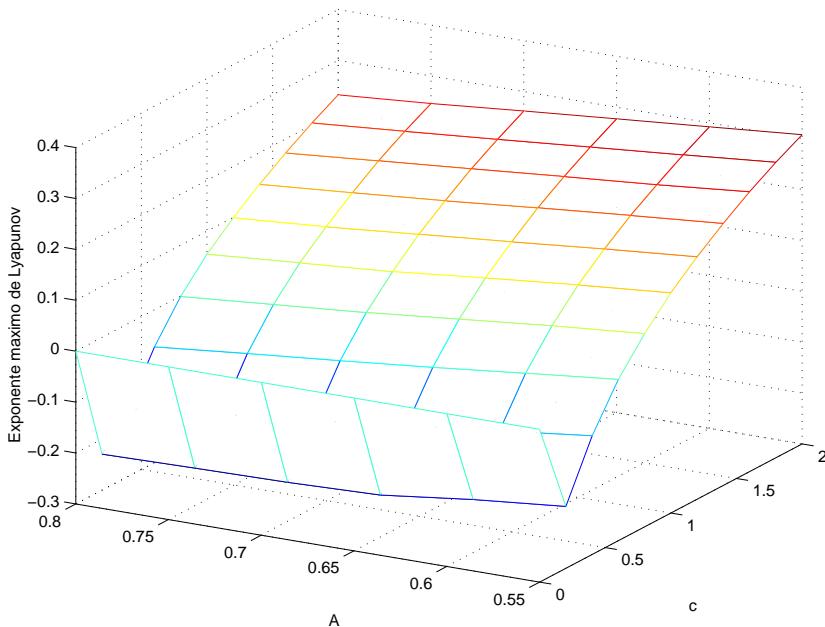


Figura 2.52: Exponente máximo de Lyapunov en el espacio de parámetros $\{A, c\}$ para el sistema de “tipo salto”

Esta estimación no es muy precisa, ya que de forma mas rigurosa hemos obtenido $\lambda = 0,2$. En el caso de la figura 2.54, el parámetro de control A vale 0,61. El exponente máximo de Lyapunov medido con otra técnica (la integración de la ecuación variacional) vale alrededor de 0,16, lo que demuestra que el sistema es caótico. En el caso de un sistema regular la diferencia tendería hacia cero, porque dos trayectorias con las condiciones iniciales próximas tienden a juntarse (esta propiedad sirve precisamente, para definir la estabilidad de trayectorias).

2.4.4. Espectro y autocorrelación

El espectro de $x(t)$ muestra un comportamiento caótico muy visible por ser de “banda ancha y muy ruidoso” (figura 2.55). Esta característica es muy interesante para el enmascaramiento de señales, puesto que se trata de esconder la señal de información dentro de este espectro. La señal regular a enmascarada, a su vez, tendrá un cierto ancho de banda por eso buscamos

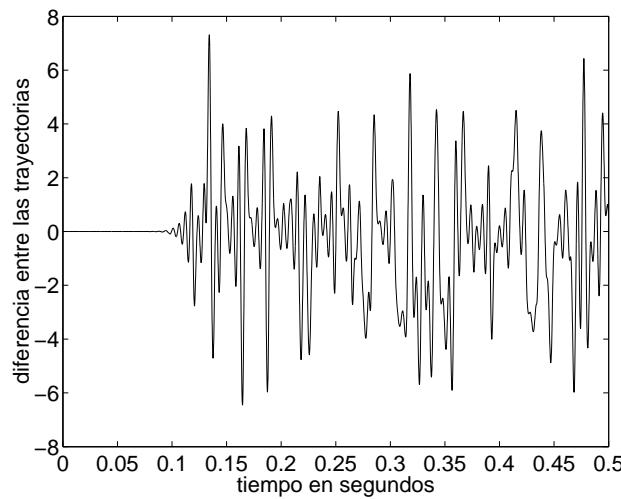


Figura 2.53: Divergencia entre dos trayectorias para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto”

un espectro caótico lo mas ancho posible. En la figura 2.55 el espectro viene en Hertzios, por tanto disponemos de un ancho de banda para enmascarar de $B = [0; 2000]Hz$.

La función de autocorrelación presenta un aspecto también de ruido, y se encuentra muy decorrelada. El tiempo de correlación es muy pequeño (el tiempo de correlación es el tiempo que tarda la función de autocorrelación en disminuir por debajo de un umbral de por ejemplo 0,1; este tiempo puede variar según las definiciones). La figura 2.56 representa la autocorrelación de la variable $x(t)$. Para un umbral de 0,1 el tiempo de correlación será de $0,65ms$.

2.4.5. Mapa de retorno

El mapa de retorno del sistema “tipo salto” no tiene nada de simple, y consta de muchas ramas (ver figura 2.57). Pero cada una de las ramas parecen tener la misma pendiente. El mapa no es invertible, y además no se puede encontrar una expresión simple de x_n en función de x_{n+1} . Pero podemos deducir el exponente de Lyapunov del mapa mediante algunas aproximaciones e hipótesis. Si suponemos que las ramas tienen todas las mismas pendientes

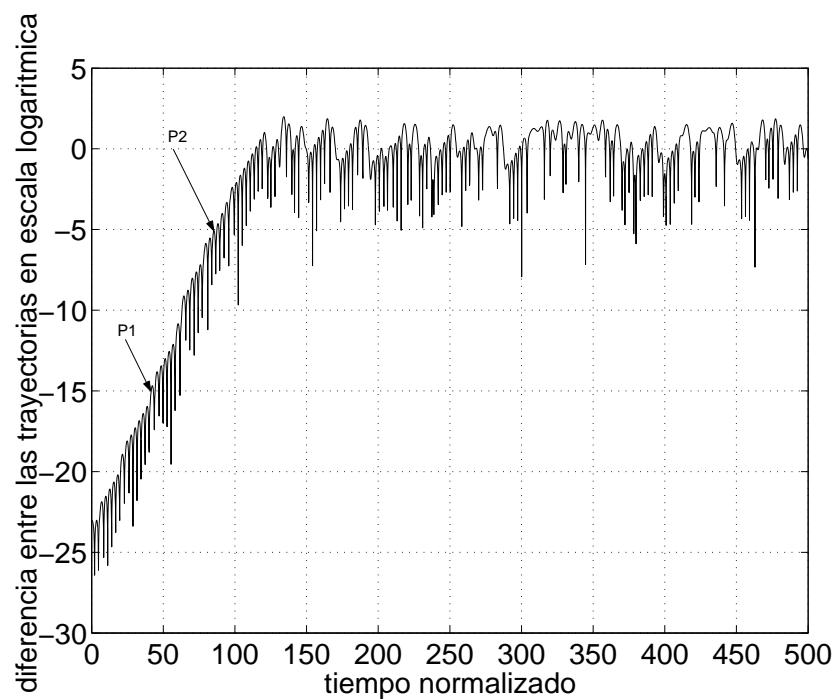


Figura 2.54: Divergencia entre dos trayectorias representada en escala logarítmica para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto”

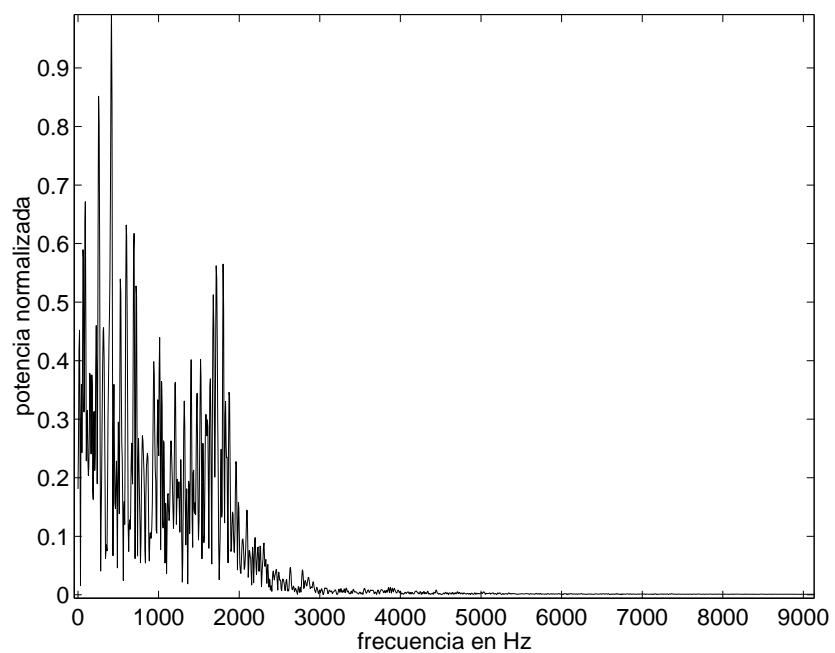


Figura 2.55: Espectro de potencia de $x(t)$ para $A = 0,61$ en el sistema de "tipo salto"

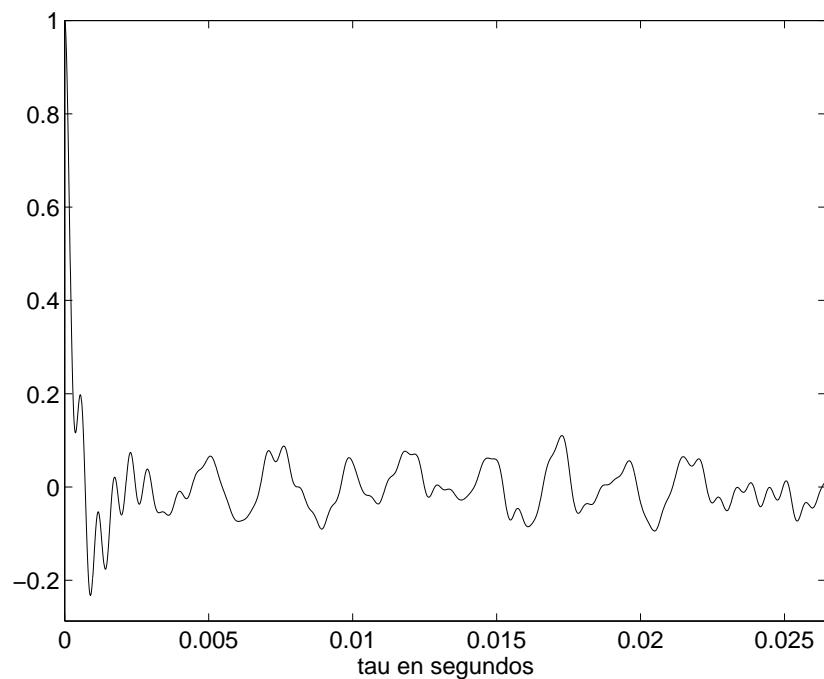


Figura 2.56: Función de autocorrelación para $A = 0,61$ en el sistema de “tipo salto”

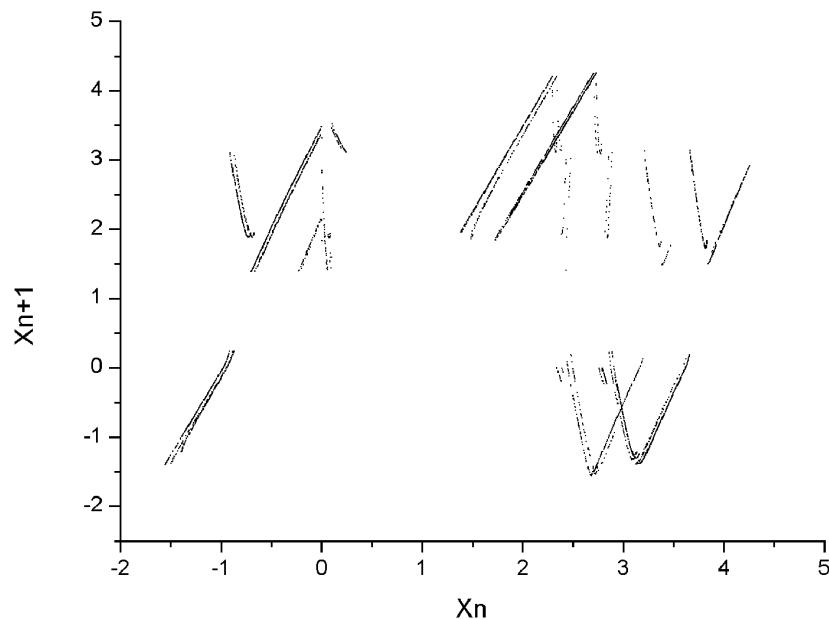


Figura 2.57: Mapa de retorno para $A = 0,61$ en el sistema “tipo salto”

como luego razonaremos, podemos deducir el exponente de Lyapunov partiendo de su definición (fórmula 2.10), esto es:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |f'(x_n)|$$

Suponiendo que f es la función tal que $x_{n+1} = f(x_n)$, y después de haber medido varias pendientes, se observa que estas fluctúan entre 2,3 y 2,8 Tomando un valor medio de 2,5, obtenemos:

$$\sigma = \log|2,5| = 0,9163$$

Lamentablemente no se puede relacionar de forma rigurosa este exponente con el exponente máximo del sistema en tiempo discreto. El tiempo medio de retorno del mapa en el espacio de fases¹, no es tan regular como en el caso del sistema del “valor absoluto”. Para darse cuenta hay que ver el

¹el tiempo medio que tarda en realizarse el recorrido de la trayectoria en el espacio de fases entre dos puntos del mapa

espectro de la variable x en la figura 2.55, el espectro no presenta ninguna frecuencia predominante que permita encontrar la frecuencia con la que ocurren los máximos de la variable x . No obstante podemos estimar este tiempo a partir de las simulaciones con Matlab, obteniendo para el tiempo medio entre dos máximos⁴ $T = 6,2833$. Ya hemos visto como relacionar el exponente de Lyapunov de un mapa de retorno con el exponente máximo de Lyapunov del sistema en tiempo continuo mediante la fórmula (2.11). El exponente máximo en tiempo continuo para el parámetro de control $A = 0,61$ viene dado por:

$$\lambda = \sigma/T = 0,9163/6,2833 = 0,1458 \quad (2.34)$$

El exponente máximo calculado de manera rigurosa vale $\lambda = 0,1586$, por tanto la aproximación realizada con el mapa de retorno es bastante buena.

2.4.6. Secciones de Poincaré

Las secciones de Poincaré del sistema nos muestran una estructura bastante compleja para el atràctor en régimen caótico. La estructura general de doble rollo en el espacio de las fases sigue siendo la misma cuando se varía el parámetro de control A . Además, variando el coeficiente c esta tampoco cambia. La sección de Poincaré nos muestra los sentidos de rotación de los rollos así como la manera de pasar de un rollo a otro.

Primero podemos ver un ejemplo de sección de Poincaré cuando el sistema funciona en régimen regular (figura 2.58 obtenida con un parámetro de control $A = 1,2$). Esta estructura oscilatoria es muy simple (sinusoidal). El mapa reproduce muy bien la estructura con dos puntos uno azul (la trayectoria va de abajo hacia arriba) y uno rojo (la trayectoria va de arriba hacia abajo).

Ahora bien, cuando el sistema se encuentra en un régimen caótico aparece el doble rollo (figura 2.59, con $A = 0,6$). Este se compone de dos rollos y se pasa del uno al otro alternativamente. Sobre la sección de Poincaré se observan los cortes producidos por los dos rollos, son las dos líneas rectas compuestas de puntos rojos y azules. Además estas líneas son la mitad de trazos rojos y la otra mitad de trozos azules. También se observa la región de transición entre rollos en la parte central de la figura.

⁴En tiempo normalizado

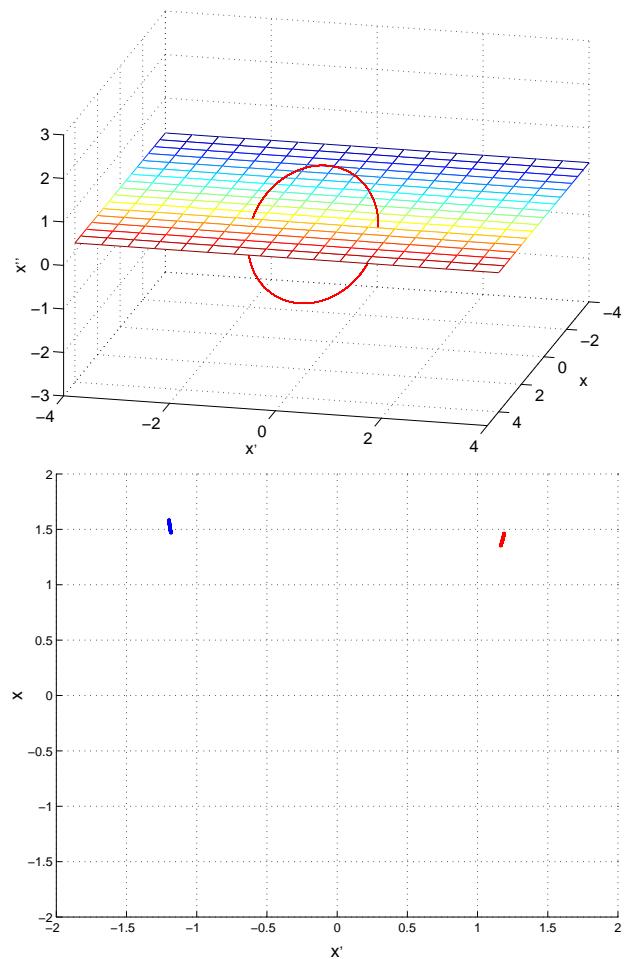


Figura 2.58: Secciones de Poincaré para $A = 1,2$ en el sistema de tipo “salto”

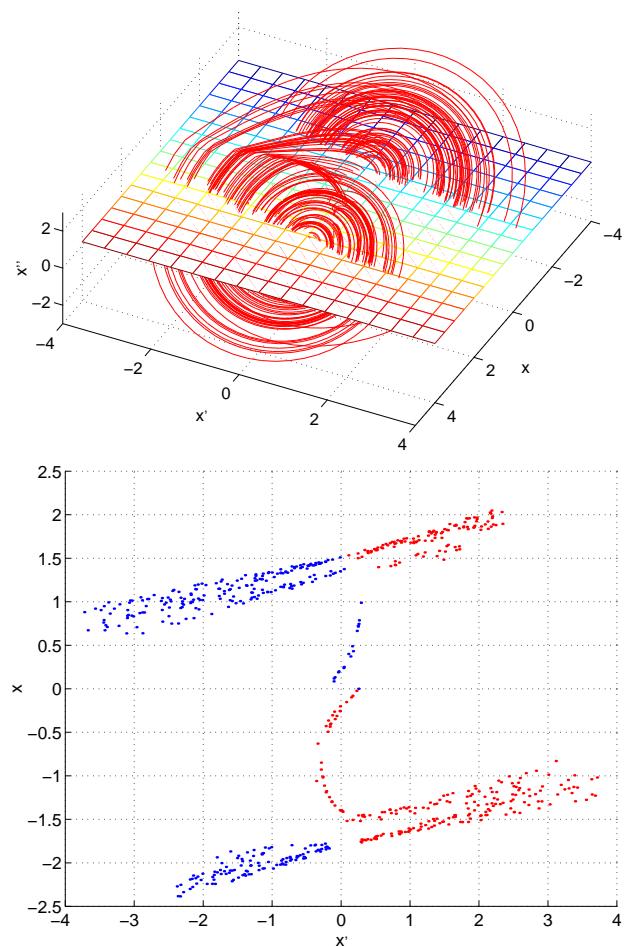


Figura 2.59: Secciones de Poincaré para $A = 0,6$ en el sistema de “tipo salto”

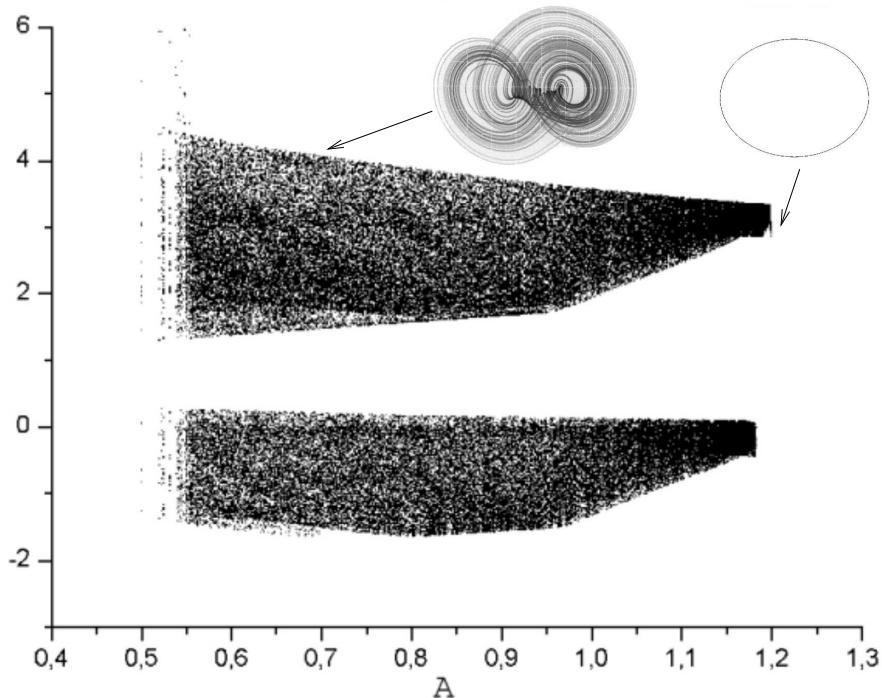


Figura 2.60: Diagrama de bifurcación del sistema de “tipo salto”

2.4.7. Ruta hacia el caos

La ruta hacia el caos del sistema es muy pobre, se compone solo de una bifurcación de Hopf. Variando el parámetro de control A el sistema presenta un atrátor estable (el punto cero) cuando $A > 1,2$. Después aparece un ciclo límite estable para $A \approx 1,2$. El sistema se vuelve caótico para $A < 1,2$ y no aparece ningún otro fenómeno de bifurcación. Para $A < 0,55$ el sistema es inestable. La figura 2.60 muestra el diagrama de bifurcación para el parámetro de control A .

2.4.8. Circuito electrónico

El circuito electrónico presenta la base común a los dos circuitos vistos anteriormente, el esquema eléctrico es el mismo que el de la figura 2.23. El circuito de la nolinealidad es distinto a los dos casos previos y se puede ver

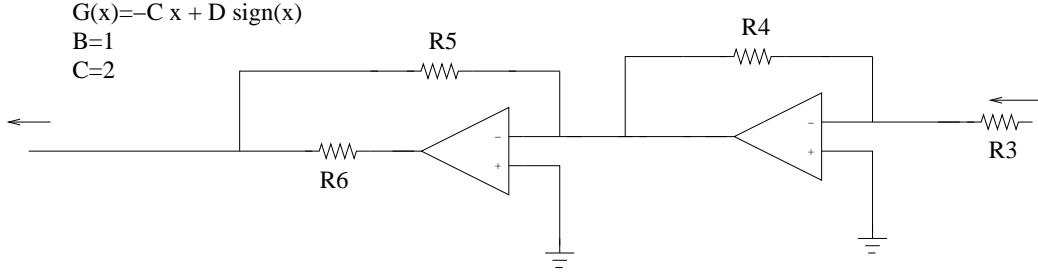


Figura 2.61: Esquema eléctrico de la no linealidad $g(x)$ para el sistema de “tipo salto”

en la figura 2.61.

El procedimiento analítico de estudio es igual que en los otros dos sistemas. Partimos de la ecuación diferencial generada por el sistema:

$$\ddot{x} + A_1\ddot{x} + A_2\dot{x} - A_3x + A_4\text{sign}(x) = 0 \quad (2.35)$$

y los coeficientes se deducen fácilmente a partir de los esquemas eléctricos 2.23 y 2.61, siendo:

$$A_1 = \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{R_1 C_2 R_2 C_1}$$

$$A_3 = \frac{1}{R_5 C_1 R_1 C_2 R_3 C_3}$$

$$A_4 = \frac{-V_0}{C_1 R_6 R_1 C_2 R_3 C_3}$$

V_0 es la tensión de alimentación del circuito. Como se puede comprobar las expresiones de estos coeficientes son muy parecidas a las del circuito con el diodo inverso. Igualmente se efectúa el cambio de variable (2.17) para simplificar el estudio del sistema. Efectuando este la ecuación queda bajo la forma:

$$\ddot{x} + A\ddot{x} + \dot{x} - Cx + D\text{sign}(x) = 0 \quad (2.36)$$

La expresión del coeficiente A en función de los elementos del circuito no

cambia. Los coeficientes A y C tienen ahora la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_1 R_2 \frac{C_1}{C_2}} \\ C &= -\frac{R_2}{R_5 R_3 C_3} \sqrt{R_2 C_1 R_1 C_2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

La expresión de A sigue siendo la misma en los tres circuitos estudiados, porque viene determinada por la parte común osculatoria de los tres circuitos (los tres integradores). Si fijamos todos los componentes de esta parte común ($R_1 R_2 R_3 C_1 C_2$) entonces el coeficiente C depende solo de la resistencia R_5 . Esa resistencia determina solo la tasa de realimentación de la variable x en el circuito. El coeficiente D no tiene mucha importancia, solo influye sobre el tamaño del atrácteur. Este puede ajustarse con la resistencia R_6 y la tensión de alimentación del amplificador operacional.

2.4.9. Simulaciones con PSpice

Las simulaciones del circuito coinciden muy bien con la teoría y con las simulaciones de Matlab. En la figura 2.62 se muestra un ejemplo de espectro y de atrácteur en régimen caótico. El lector podrá comprobar la correspondencia refiriéndose a las figuras anteriores (figuras 2.50 y 2.55).

2.4.10. Construcción y análisis del circuito

Construimos el circuito electrónico a partir de los esquemas vistos antes. Usando la misma base que los otros dos circuitos solo cambiamos la nolinealidad. El circuito presenta los atráctores del mismo tipo que los simulados con Matlab. A continuación incluimos algunos ejemplos de atráctores obtenidos a partir fotografías tomadas con el osciloscopio (figura 2.63) y correspondientes al parámetro de control $A = 0,6$.

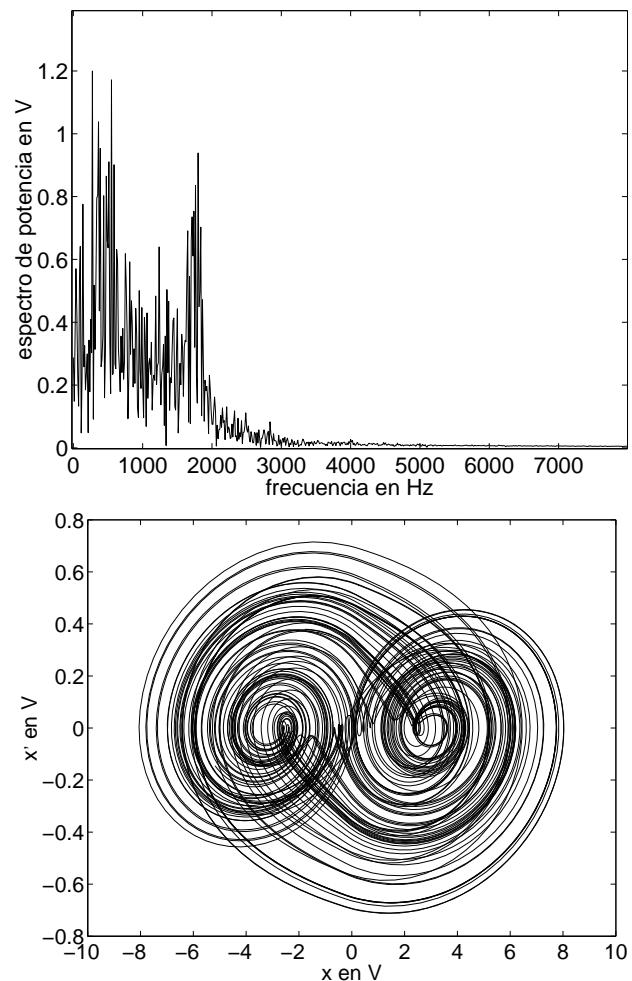


Figura 2.62: Espectro y atráctor simulado con PSpice ($A = 0,6$) para el sistema “tipo salto”

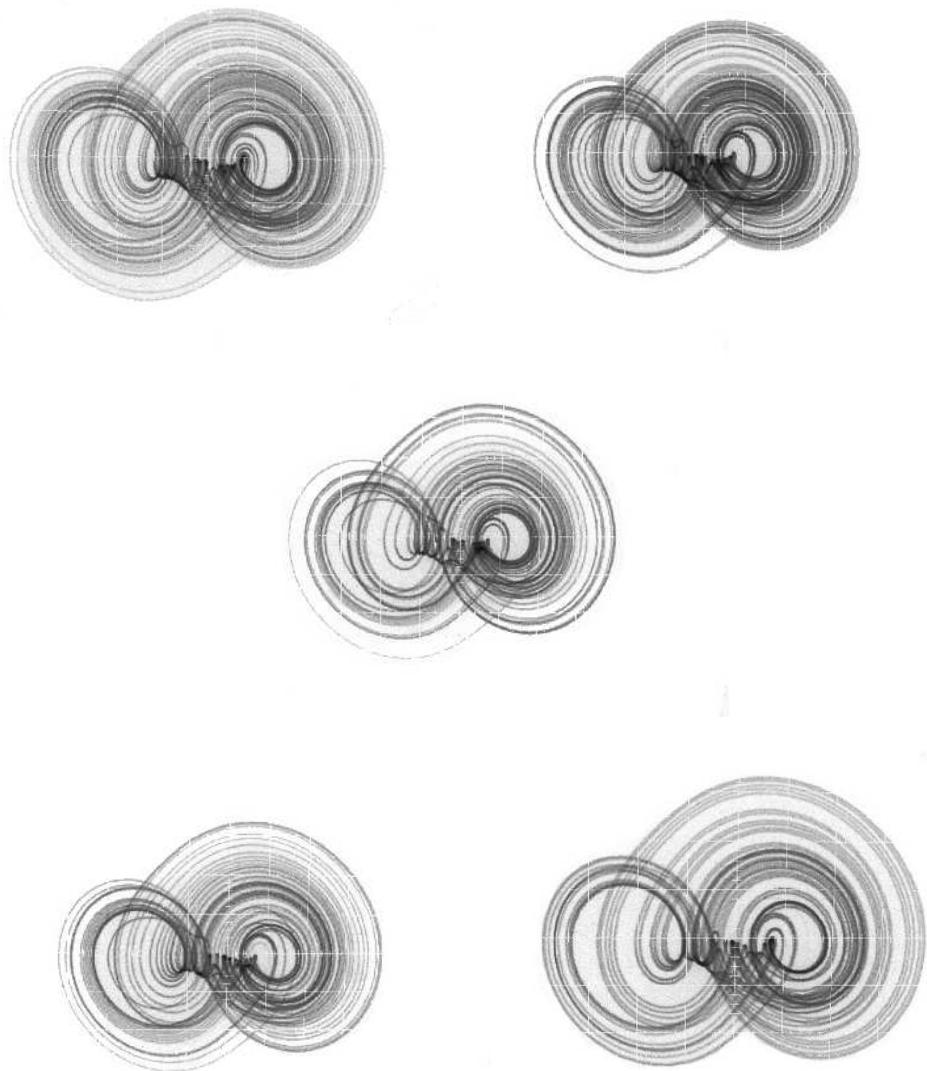


Figura 2.63: Fotografías de atráctores del circuito electrónico “salto” para $A = 0,6$. El eje horizontal corresponde a la variable x y el eje vertical a la variable \dot{x} . Las unidades de la cuadricula son 1V/lado del cuadrado en X y 0.1V/lado del cuadrado en Y en el sistema “tipo salto”

2.5. Discusión Comparativa de los tres sistemas estudiados

Los tres sistemas estudiados presentan ventajas e inconvenientes. Pero podemos extraer algunas características comunes:

- Todos presentan una solución analítica que se puede simular.
- Los exponentes de Lyapunov máximos son todos muy bajos aun cuando el sistema se encuentre optimizado.
- Los circuitos son muy sencillos y requieren pocos medios para construirlos.

Podemos caracterizar el sistema denominado “valor absoluto” por su sencillez, lo que nos permitió estudiar el sistema bajo varios ángulos (solución analítica, mapas de retorno...). Tiene un interés más pedagógico que práctico. Produce un caos demasiado débil para ser explotable, es decir su espectro no es lo bastante “ruidoso” para enmascarar una señal de información. Además el espectro presenta una fuerte componente sinusoidal (ver figura 2.26), y por estas razones no es un buen candidato para la transmisión de información.

El sistema “diodo inverso” merece una atención particular por su diagrama de bifurcación “bidireccional”. Este caso aparece muy poco en la literatura y tal vez es preciso un estudio más en detalle del sistema para profundizar en el origen de este fenómeno. Aparte de esta particularidad el sistema es algo mas caótico que el precedente pero no lo bastante para su empleo en el enmascaramiento de señales. Otra desventaja de este sistema es el margen de valores del parámetro de control muy estrecho para la aparición del caos. Además, este margen contiene numerosas ventanas de comportamiento regular. A lo largo de las experiencias con el circuito el sistema saltaba con facilidad a un régimen regular, lo que no interesa para el enmascaramiento.

El circuito de “salto” es el de mayor interés. Presenta un caos robusto, es decir que el régimen caótico no cambia haciendo variar un poco el parámetro de control. Su diagrama de bifurcación no presenta mucho interés, presenta una ruta hacia el caos muy pobre (por eso es muy estable estructuralmente). Puede ser útil para el enmascaramiento de señales, su espectro es lo suficiente

ancho y potente para ocultar una señal regular.

Como desventaja común a los tres circuitos, los exponentes máximos de Lyapunov muy bajos.

2.5.1. Discusión comparativa de los exponentes de Lyapunov

En la figura 2.64 se muestran los exponente máximos de Lyapunov para los tres sistemas a fin de estudiarlos comparativamente. Los exponentes de Lyapunov han sido estudiados en las secciones 2.2.3 (sistema “valor absoluto”), 2.3.2 (sistema “diodo inverso”) y 2.4.3 (sistema “salto”). Para un mismo valor del parámetro de control, el sistema “salto” posee siempre un exponente maximo de Lyapunov mayor que los otros dos sistemas.

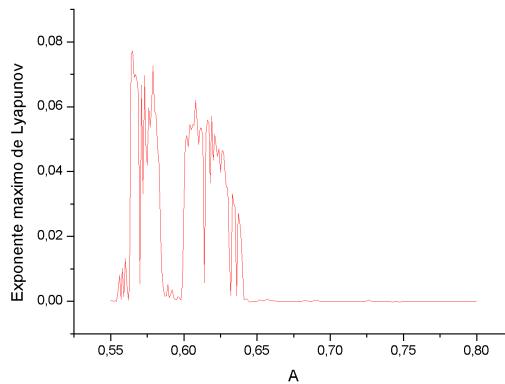
Por otro lado, la ausencia de comportamientos regulares alternantes con los caóticos asegura el mantenimiento de un regimen caótico para un amplio margen de valores de A. Por consiguiente, de los tres sistemas es el mas apto para el enmascaramiento de señales. Estudios posteriores confirmaran esta mayor utilidad.

2.5.2. Discusión comparativa de los espectros

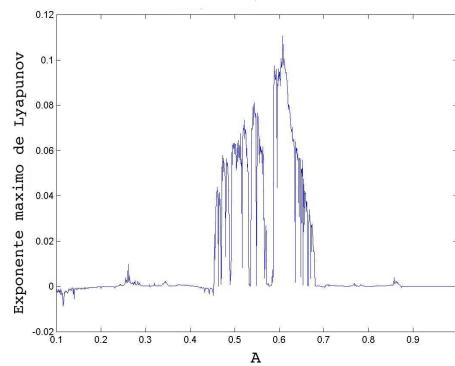
Ahora comparamos los espectros caóticos de los tres sistemas para un mismo valor del parámetro de control. Los espectros han sido estudiados en las secciones 2.2.4 (sistema “valor absoluto”), 2.3.4 (sistema “diodo inverso”) y 2.4.4 (sistema “salto”). En la figura 2.65 se puede observar el ancho de banda util para el enmascaramiento de señales regulares de los tres sistemas. En la tabla siguiente se han resumido los resultados de este estudio comparativo:

Sistema	Ancho de banda
Valor absoluto	300 Hz
Diodo inverso	1600 Hz
Salto	2000 Hz

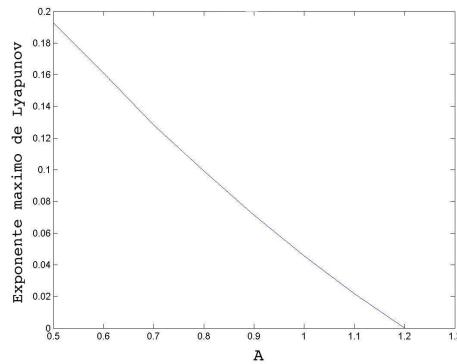
La figura 2.65 representa los espectros de la variable x de los tres sistemas para el parámetro de control $A = 0,61$. Es evidente que el sistema más adecuado para el enmascaramiento de señales es el sistema salto. El sistema valor absoluto presenta muy poco ancho de banda, además la potencia de



(a) Exponentes máximos de Lyapunov del sistema “valor absoluto”



(b) Exponentes máximos de Lyapunov del sistema con “diodo inverso”



(c) Exponentes máximos de Lyapunov del sistema “salto”

Figura 2.64: Exponentes máximos de Lyapunov de los tres sistemas estudiados en función del parámetro de control A

su espectro es muy débil. El sistema “diodo inverso” se sitúa entre los dos, presenta un ancho de banda bastante caótico pero es menos interesante que el circuito “salto”.

2.5.3. Discusión comparativa de las funciones de autocorrelación

Se comparan las funciones de autocorrelación de los tres sistemas para un mismo valor del parámetro de control. Las funciones de autocorrelación han sido estudiados en las secciones 2.2.4 (sistema “valor absoluto”), 2.3.4 (sistema “diodo inverso”) y 2.4.4 (sistema “salto”).

Se trata de determinar cual de los sistemas trabajando en regimen caótico presenta el tiempo de correlación mas corto. En la tabla siguiente se muestran los tres tiempos de correlación correspondiente a los sistemas estudiados⁵ para el parámetro de control $A = 0,61$:

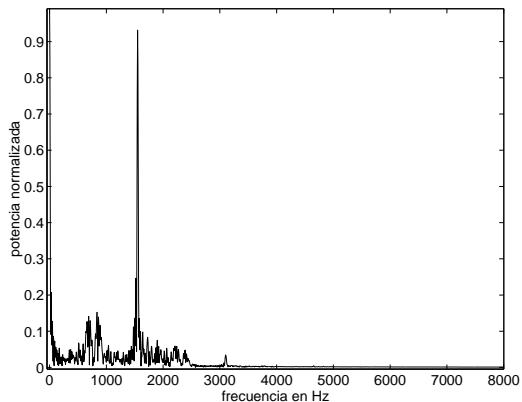
Sistema	Tiempo de correlación
Valor absoluto	varios segundos
Diodo inverso	5 ms
Salto	0.65 ms

La figura 2.66 ilustra la tabla precedente mostrando las funciones de autocorrelación de los tres sistemas. Se obseva que el sistema “Salto” posee el tiempo de correlación mas corto entre los tres sistemas. Eso significa que el sistema no conserva memoria de su estado pasados $0,7ms$. Para el enmascaramiento de señales regulares se requiere una señal caotica no solamente lo mas “ruidosa” posible sino tambien lo mas alejada de los comportamientos regulares y, por tanto, de los tiempo de correlación largo. El sistema “Salto” satisface bien estas condiciones.

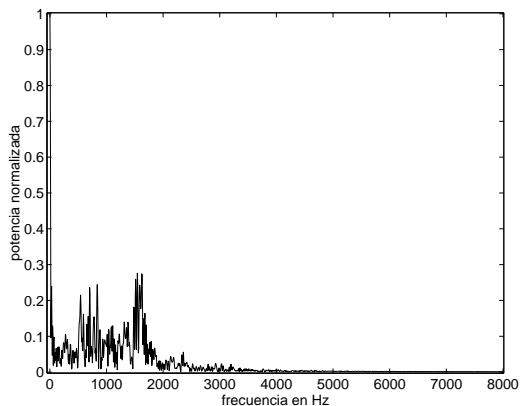
2.5.4. Discusion comparativa de las dimensiones fractales de los atráctores

La tabla siguiente resume los resultados obtenidos en las simulaciones, para los atráctores caóticos con el parámetro de control $A = 0,61$:

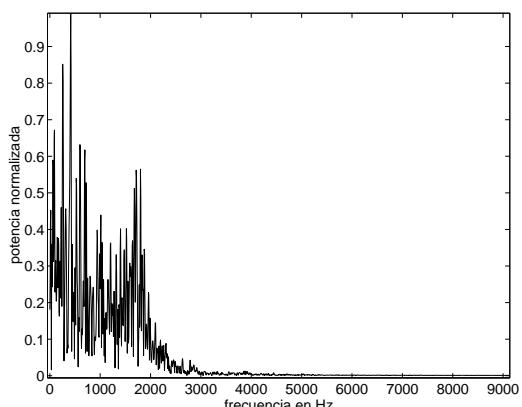
⁵el tiempo de correlación esta calculado para un umbral de la función de autocorrelación de 0.1



(a) Espectro de potencia del sistema “valor absoluto”

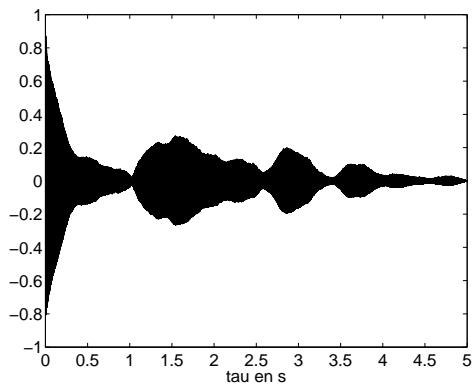


(b) Espectro de potencia del sistema con “diodo inverso”

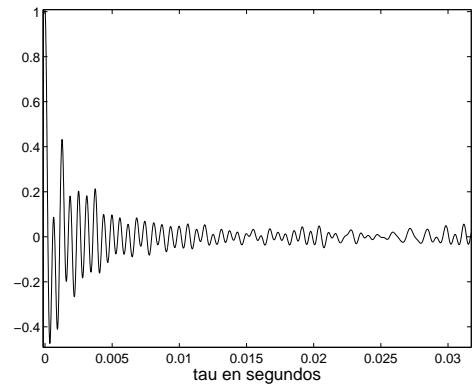


(c) Espectro de potencia del sistema “salto”

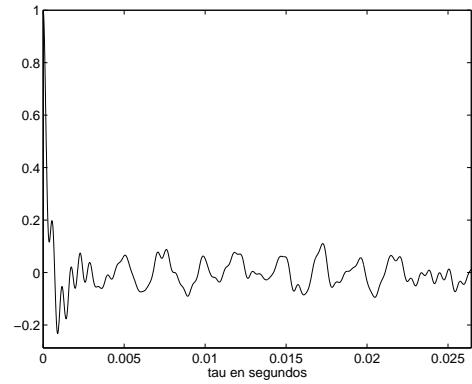
Figura 2.65: Espectros de potencia de los tres sistemas estudiados para el valor $A = 0.61$ del parámetro de control



(a) Función de autocorrelación del sistema “valor absoluto”



(b) Función de autocorrelación del sistema con “diodo inverso”



(c) Función de autocorrelación sistema “salto”

Figura 2.66: Funciones de autocorrelación de los tres sistemas estudiados para el valor $A = 0,61$ del parámetro de control

Sistema	Dim. de Hausdorff	Dim. de correlación	Dim. de información
Valor absoluto	1.9478	1.9077	1.89
Diodo inverso	1.9031	1.8859	1.5048
Salto	2.311	2.1258	2.0569

El sistema valor absoluto presenta una dimensión de Hausdorff muy proxima a la de un plano porque su dimensión fractal esta muy cerca de 2. Existe una relacion entre la dimensión fractal cerca de 2 y el pequeño exponente máximo de Lyapunov del sistema. Cuando el atrácteur tiene una dimensión fractal cercana a un número entero su comportamiento tiende a ser mas regular, aún permaneciendo caótico.

El sistema “Diodo inverso” posee una dimensión de Hausdorff bastante cerca de 2 pero las otras dos dimensiones son claramente fractales, por lo que el sistema posee un comportamiento mas caótico que el anterior.

Entre los tres sistemas, el sistema “Salto” es el que presenta el atrácteur mas caótico. La dimensión de Hausdorff es superior a 2 lo que indica que el atrácteur posee una estructura fractal comprendida entre el plano y el volumen. Este estudio confirma los otros estudios comparativos anteriores y nos hacen concluir que, de los tres sistemas estudiados, el mejor candidato para el enmascaramiento y la transmision de señales es el sistema “Salto”.

Capítulo 3

Aplicaciones a las comunicaciones seguras

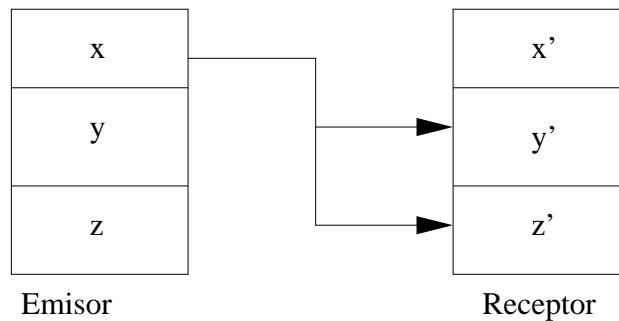


Figura 3.1: Esquema de la sincronización Maestro/Esclavo

En la literatura se puede encontrar varios procedimientos de sincronización, algunos de los cuales han sido muy estudiados y sirven para sincronizar muchos sistemas. Pecora y Carroll [8] escribieron un artículo fundamental sobre la sincronización de circuitos caóticos. En este artículo proponen un esquema de sincronización maestro/esclavo. El sistema maestro impone una tensión al otro (el esclavo), con esta tensión el sistema esclavo reconstruye todas las variables dinámicas. Esta propiedad se puede emplear para enmascarar información dentro de una señal caótica en un sistema emisor y recuperarla en un receptor. Existen también otras técnicas de sincronización como la realimentación lineal y técnicas procedente de la ciencia del control. En este capítulo se aplican estos procedimientos a nuestros sistemas caóticos a fin de transmitir información de forma segura.

3.1. Sincronización Maestro-Esclavo

El esquema de sincronización mostrado en la figura 3.1 fue uno de los primeros propuestos para sincronizar los circuitos caóticos. En un artículo [8] los autores proponen un esquema del tipo Maestro-Esclavo. El sistema Maestro excita el sistema esclavo con una sus variables dinámicas, el sistema esclavo reconstruye todas las variables dinámicas a partir de esta única señal. Las variables así reconstruidas son idénticas a las variables del emisor. eligiendo la señal excitadora de manera adecuada se puede realizar esta sincronización de manera sencilla.

A continuación pondremos el ejemplo del sistema de Lorenz descrito por

las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{3.1}$$

Siendo σ , r y b los parámetros de control del sistema. La idea es construir un subsistema con dos de las tres ecuaciones precedentes. Se elige una señal que enviar (por ejemplo $x(t)$ será la señal excitadora) y se construye el subsistema que recibirá esta señal:

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned} \right\} \text{Maestro} \quad \left. \begin{aligned}\dot{y}_1 &= rx(t) - y_1 - x(t)z_1 \\ \dot{z}_1 &= x(t)y_1 - bz_1\end{aligned} \right\} \text{Esclavo}$$

$$\tag{3.2}$$

El sistema Esclavo podrá reconstruir las variables y_1 y z_1 si se cumplen las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t) - z(t)| &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t) - y(t)| &= 0\end{aligned}\tag{3.3}$$

Es lo que se conoce como estabilidad asintótica del sistema (definición que se ha visto en el apartado 1.3.4). Existen otras combinaciones de subsistemas con vistas a la sincronización. Por ejemplo, si en vez de $x(t)$ enviamos la señal $y(t)$ entonces tenemos un otro sistema esclavo. La condición de estabilidad (3.3) equivale a tener los exponentes de Lyapunov condicionales del subsistema todos negativos. Los dos sistemas se sincronizarán independientemente de las condiciones iniciales de los dos sistemas. Se consigue así una sincronización sin imponer un estado inicial idéntico a los dos sistemas.

Para poder transmitir información se añade la señal regular correspondiente a la señal caótica. La información quedará así enmascarada dentro del espectro de la portadora caótica. El esquema de la figura 3.2 ilustra el principio de la transmisión de información. Se superpone primero la señal de información con una de las variables del sistema. Se envía esta superposición por un canal, se transmite y se introduce en el sistema esclavo para reconstruir las variables dinámicas. Finalmente, a las señales superpuestas del canal se le resta la variable reconstruida x' .

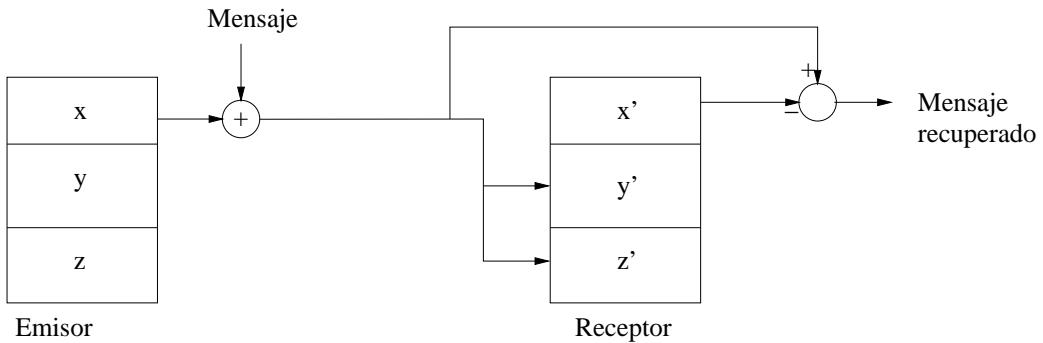


Figura 3.2: Esquema de la transmisión de información enmascarada con una sincronización Maestro/Esclavo

Si la sincronización funciona bien la señal de información debe ser interpretada como una perturbación por el sistema caótico del receptor. Esta perturbación (o señal) no afectará a la sincronización si se cumplen dos condiciones:

1. El receptor presenta unos exponentes de Lyapunov condicionales negativos (se definen estos exponentes mas adelante con la ecuación (3.11)).
2. La señal regular que superponemos a la variable dinámica no presenta una potencia demasiada alta.

A continuación aplicamos el método de Pecora y Carroll para la sincronización de nuestros sistemas.

El sistema autónomo de la ecuación (2.1) se expresa como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -ax_3 - bx_2 - g(x_1)\end{aligned}$$

Podemos enviar como excitadora, por ejemplo, la señal $x_2(t)$, y entonces tendremos los sistemas Maestro / esclavo siguientes:

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -ax_3 - bx_2 - g(x_1)\end{aligned} \right\} \text{Maestro}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}'_3 &= -ax'_3 - bx_2(t) - g(x'_1) \end{aligned} \quad \left. \right\} Esclavo$$

Para comprobar que los dos sistemas pueden sincronizarse y, por tanto, reconstruir las variables x'_1 y x'_3 , el error de sincronización debe tender a cero. Para comprobarlo definimos el vector de errores como la diferencia entre las variables del emisor y del receptor:

$$\begin{aligned} e_1 &= x'_1 - x_1 \\ e_3 &= x'_3 - x_3 \end{aligned}$$

El error e_2 es nulo porque es idéntica en los dos sistemas ($x'_2 = x_2$). Calculamos ahora la dinámica del error expresándola en función de las variables del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}'_1 - \dot{x}_1 = x_2(t) - x_2(t) = 0 \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}'_3 - \dot{x}_3 = -ae_3 - bx_2(t) + bx_2(t) - g(x'_1) + g(x_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para llevar a cabo esta demostración tomaremos como función no lineal g la función $g(x) = -cx + dsign(x)$. La diferencia $-g(x'_1) + g(x_1)$ en la ecuación (3.4) puede expresarse:

$$-g(x'_1) + g(x_1) = -ce_1 - sign(x'_1) + sign(x_1)$$

Para poder expresar el sistema (3.4) solo en función de e_1 y e_3 tenemos que hacer una aproximación. Se supone que x'_1 y x_1 tienen el mismo signo durante un tiempo suficiente para asegurar la sincronización. La expresión precedente se reduce a: $-ce_1$ y podemos expresar la dinámica del error de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Los autovalores de esta matriz son $\{-a; 0\}$. Para que la sincronización pueda efectuarse, todos los autovalores de la matriz deben tener una parte real negativa. El error presenta un descenso exponencial hacia cero cuando las partes reales de los autovalores son negativas. En nuestro caso uno de los autovalores es cero, lo que implica la imposibilidad de la sincronización con la variable $x_2(t)$. No hace falta calcular los exponentes condicionales de Lyapunov en este caso, la sincronización no puede efectuarse.

En vista del fracaso anterior se pueden formar otras combinaciones de ecuaciones para la sincronización del sistema. El siguiente sistema se ha formado empleando la variable de excitación $x_1(t)$. Esta variable dinámica se envía por el canal para sincronizar el sistema esclavo. La nueva combinación de sistema maestro /esclavo viene dada por:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -ax_3 - bx_2 - g(x_1) \end{array} \right\} \text{Maestro}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}'_2 = x'_3 \\ \dot{x}'_3 = -ax'_3 - bx'_2 - g(x_1(t)) \end{array} \right\} \text{Esclavo}$$

En este sistema se envía la variable $x_1(t)$ al sistema esclavo. Usando el mismo método que antes para comprobar la sincronización y con la misma no linealidad $g(x) = -cx + dsign(x)$ obtenemos los autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (3.6)$$

La parte real es negativa si $a > 0$ y $a^2 < 4b$. Siendo las partes reales negativas la sincronización podría ser posible pero hay que asegurarse que los exponentes de Lyapunov condicionales son negativos. Vamos a estudiar la evolución de una pequeña perturbación del sistema esclavo. Llamamos w' al vector de la trayectoria del sistema esclavo:

$$w' = \begin{bmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_2 \\ w'_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Y llamamos $\dot{w}' = h(w', x_1)$ al conjunto de ecuaciones del sistema esclavo:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{w}'_2 = h_2 = w'_3 \\ \dot{w}'_3 = h_3 = -aw'_3 - bw'_2 - g(x_1(t)) \end{array} \right\} = h(w', x_1) \quad (3.8)$$

Queremos determinar la estabilidad de la trayectoria $w'(t)$, cuya condición inicial es $w'(0)$. Consideramos una trayectoria $w(t)$ con una condición inicial $w(0)$ muy cerca de $w'(0)$. El problema es determinar las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b y c para poder afirmar que las dos trayectorias convergen; o expresado de forma matemática, buscamos las condiciones

de convergencia tales que $\Delta w = |w(t) - w'(t)| \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. La derivada temporal del error Δw se expresa a partir de (3.7) y (3.8):

$$\begin{aligned}\dot{\Delta w} &= h(w, x_1) - h(w', x_1) \\ &= D_{w'} h(w', x_1) \Delta w + \mathcal{O}(w', x_1)\end{aligned}\quad (3.9)$$

siendo $D_{w'} h(w', x_1)$ la matriz Jacobiana del sistema h respecto a la variable w' . Para w' pequeños podemos despreciar los términos de orden superior incluidos en $\mathcal{O}(w', x_1)$. La ecuación (3.9) determina la evolución de la perturbación $\Delta w(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. La perturbación va a evolucionar y deformarse en el espacio de las fases según dos direcciones (el espacio de las fases se compone de dos dimensiones en nuestro caso). Cada una de estas deformaciones corresponde a un exponente de Lyapunov, los llamamos exponentes condicionales porque dependen de la señal excitante del emisor x_1 . Estos exponentes se pueden expresar de dos formas:

$$\sigma(\Delta w) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\Delta w(t)}{\Delta w(0)} \right| \quad (3.10)$$

O bien

$$\sigma_i(\Delta w) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)| \quad (3.11)$$

Siendo $m_i(t)$ el i -ésimo autovalor de $\Delta w(t)$ y $\sigma_i(\Delta w)$ el exponente de Lyapunov número i . Estas dos formulaciones son equivalentes (basta desarrollar las ecuaciones para convencerse), pero se usa la segunda formulación más apropiada a nuestro problema. Si escogemos la no linealidad $g(x) = -cx + d\text{sign}(x)$ se puede desarrollar la expresión de la matriz jacobiana $D_{w'} h(w', x_1)$ a partir de la ecuación (3.8):

$$D_{w'} h(w', x_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial w'_2} & \frac{\partial h_2}{\partial w'_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial w'_2} & \frac{\partial h_3}{\partial w'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} = \Lambda \quad (3.12)$$

Fue una gran sorpresa comprobar que la matriz jacobiana no depende de la señal x_1 , además esta matriz no presenta una dependencia temporal. La integración de la ecuación (3.9) se hace trivial; a continuación desarrollamos la solución de la ecuación (3.9) con la condición inicial $\Delta w(0) = I$ (la matriz identidad):

$$\begin{aligned}\dot{\Delta w}(t) &= D_{w'} h(w', x_1) \Delta w(t) = \Lambda \Delta w(t) \\ \dot{\Delta w}(t) / \Delta w(t) &= \Lambda\end{aligned}\quad (3.13)$$

integrando se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln(\Delta w(t)) &= \Lambda t + K \\ \Delta w(t) &= Cst \times e^{(\Lambda t)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

siendo Cst una constante determinada por la condición inicial $\Delta w(0) = I$; en este caso tenemos $Cst = I$. La ecuación precedente expresa la evolución temporal de la perturbación Δw . La definición (3.11) de los exponentes condicionales de Lyapunov requiere el conocimiento de los autovalores de la matriz Δw ; en el caso presente se pueden determinar con la matriz Λ cuya expresión es la ecuación (3.12). El cálculo de los exponentes se puede obtener analíticamente de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\Delta w) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}t}| \\ \sigma_2(\Delta w) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}t}| \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dos casos se presentan, primero si $a^2 > 4b$ los dos exponentes de Lyapunov valen:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \sigma_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{array} \right\} \tag{3.16}$$

Recordamos que el sistema puede sincronizarse si σ_1 y σ_2 son inferiores a cero. La condición de sincronización se expresa como $\sqrt{a^2 - 4b} < a$ y $a > 0$.

En el segundo caso si $a^2 < 4b$, los dos exponentes condicionales de Lyapunov se expresan como:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{-a}{2} \\ \sigma_2 = \frac{-a}{2} \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

Ahora los dos exponentes condicionales son iguales y solo aparece una única condición $a > 0$ (la misma que hemos tenido al principio a partir de la ecuación 3.6). Las simulaciones muestran que los dos sistemas se sincronizan muy bien en ausencia de una señal regular. La figura 3.3 muestra el error de sincronización entre la señal x_2 del emisor y la señal reconstruida x'_2 .

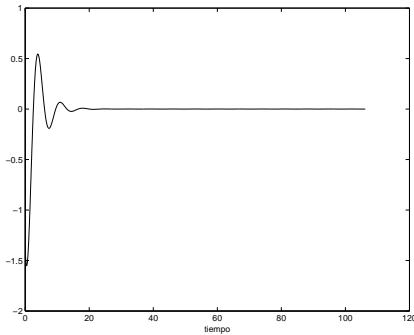


Figura 3.3: Error de sincronización definida como $x_2 - x'_2$ para un sistema Maestro/Esclavo cuya la señal excitadora es $x_1(t)$

Ahora superponemos una señal regular a la señal caótica x_1 que enviamos por el canal y recuperamos según el método de recuperación representado en la figura 3.2. Las simulaciones no dieron buenos resultados. La recuperación se hace muy mal y resulta difícil explotar esta señal. La figura 3.4 representa las señales original y recuperada.

El método de Pecora y Carroll para el envío de una señal encriptada y su posterior recuperación no es adecuado para este sistema. El método se ha utilizado con otros tipos de no linealidades (el sistema con diodo inverso) y no funcionan tampoco. Podemos hacer una hipótesis sobre el mal funcionamiento del circuito: el sistema no tiene exponentes de Lyapunov bastante altos para asegurar la sincronización con una perturbación anadida. Además, no hay muchos acoplamientos entre las variables del sistema, solo hay una no-linealidad para generar el caos. Por estos motivos se han decidido utilizar a continuación métodos procedentes de técnicas de control lineal y no lineal.

3.2. Sincronización con técnicas de control

Las técnicas de control permiten sincronizar sistemas no lineales mediante técnicas procedentes del estudio de sistemas lineales. La técnica que vamos a presentar ahora es muy sencilla aunque las justificaciones teóricas no lo sean.

El principio de esta sincronización consiste en introducir un lazo de con-

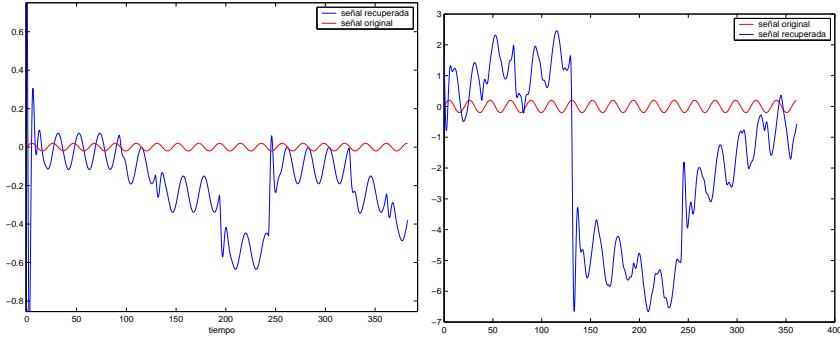


Figura 3.4: señal transmitida y recuperada con la sincronización Maestro/Escalvo, a la izquierda la amplitud de la señal original es de 0.02V y a la derecha de 0.2V

trol de primer orden. Primero se envía una señal de sincronización, es la variable con la que se va sincronizar el receptor. Se calcula el error entre las dos variables dinámicas (la variable del emisor y la variable equivalente del receptor) y se introduce este error con una ganancia en el lazo. El esquema de bloques del receptor realizado con simulink se muestra en la figura 3.5.

Hay que determinar ahora los valores de la ganancia del error de sincronización para asegurar que esta tienda a cero. En el esquema de bloques de la figura 3.5, el punto determinado por la variable ε tiene la expresión:

$$\varepsilon = y' - K(x - x')$$

La expresión de y' en función de x' , proporcionará la función de transferencia H . Por otro lado si pasamos al dominio de Laplace¹ la variable $\varepsilon(p)$ se expresa en función de $X'(p)$:

$$\varepsilon(p) = Y'(p) - K(X(p) - X'(p)) = pX'(p) \quad (3.18)$$

Ahora tenemos todos los elementos para encontrar la función de transferencia entre $X'(p)$ y $X(p)$. Esta función de transferencia expresada en función de la ganancia K permite encontrar las condiciones de sincronización. Para que se realice la sincronización entre las dos variables hace falta que la función de

¹La transformada de Laplace es una aplicación definida $\mathcal{L} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ tal que $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$. Supondremos todas las funciones causales.

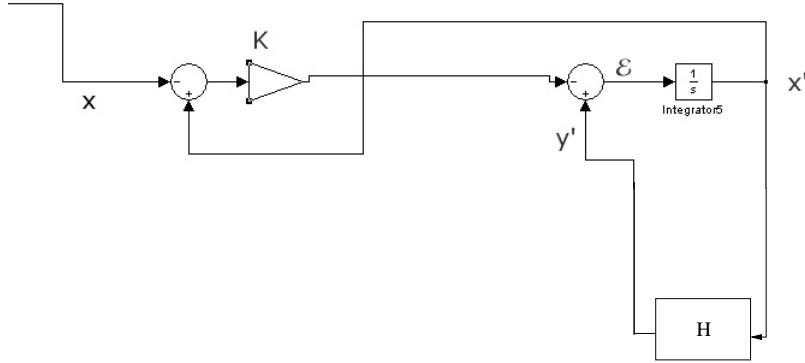


Figura 3.5: Esquema de la sincronización con un control lineal (parte receptor)

transferencia tenga todos los polos con su parte real negativa.

La función de transferencia de la ecuación (2.1) puede expresarse en el dominio de Laplace:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(x) \rightarrow p^3X(p) + ap^2X(p) + bpX(p) = g(X(p))$$

$$\text{Con } X(p) = \frac{g(X(p))}{p^3 + ap^2 + bp} \quad (3.19)$$

La función g es la función no lineal del sistema elegido. Seguimos el desarrollo de la función de transferencia del sistema expresando la no linealidad $g(x) = -cx + dsign(x)$. La variable Y' por tanto tiene la expresión (ver figura 3.6):

$$Y'(p) = \frac{g(X'(p))}{p^2 + ap + b}$$

Usando las ecuaciones (3.18) y (3.19) se puede expresar finalmente la relación entre x y x' :

$$X(p) = X'(p) \left(K + p + \frac{c}{p^2 + ap + b} \right) \frac{1}{K} + \frac{dsign(X'(p))}{p^2 + ap + b}$$

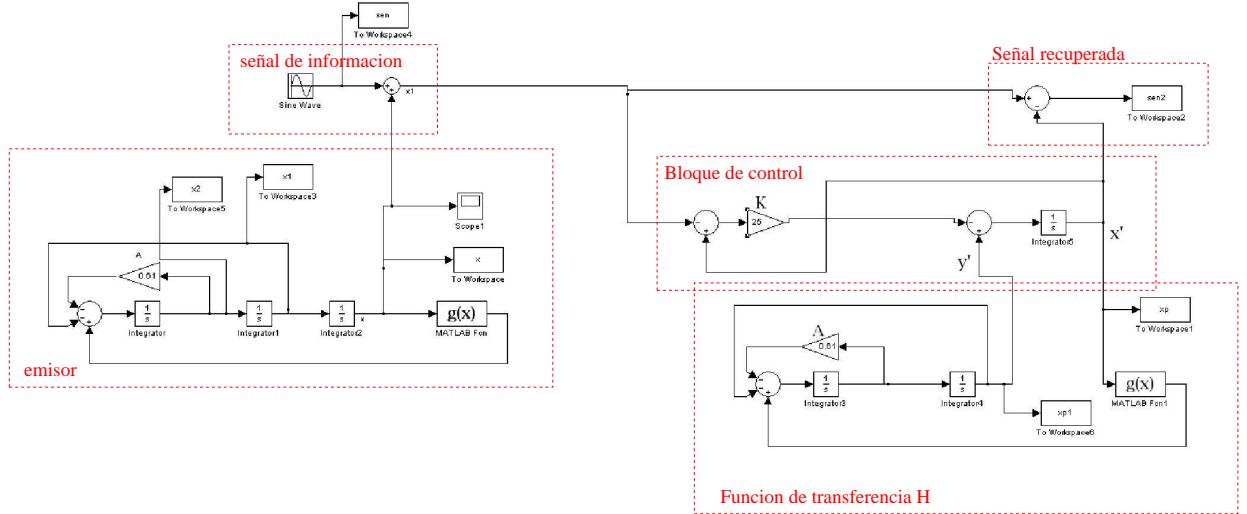


Figura 3.6: Esquema completo de la sincronización con un control lineal realizado con Simulink

Para poder obtener la función de transferencia hacemos una aproximación necesaria, consistente en considerar en la última ecuación la función no lineal $\text{sign}(x'(t))$ invariable a lo largo de un cierto tiempo grande frente a las constantes temporales del sistema. Esta aproximación no es muy rigurosa pero se puede imaginar que el signo de $x'(t)$ no cambia durante un cierto tiempo necesario para la sincronización.

Esta aproximación permite calcular las condiciones de sincronización. Así el término constante desaparece en la última ecuación y aparece la función de transferencia:

$$H(p) = \frac{X'(p)}{X(p)} = \frac{K(p^2 + ap + b)}{(p^2 + ap + b)(K + p) + c} \quad (3.20)$$

Ahora podemos deducir los valores de K que nos interesan sabiendo que es preciso que los polos de la ecuación (3.20) deben tener una parte real negativa. Se ha calculado el margen de valores de K válido para unos coeficientes del sistema dados:

Coefficients	Values of K
$a = 0,6$	
$b = 1$	$K > 0,8$
$c = 1,2$	

La figura 3.7 muestra el error de sincronización para algunos valores de K . Como tal error se representa la diferencia entre las variables $x(t)$ y $x'(t)$, y al lado se muestran los atráctores en el plano (x, \dot{x}) . La trayectoria en azul es la del emisor y en rojo es la del receptor. Se observa como la curva roja alcanza la curva azul después de un cierto tiempo, más o menos largo según el valor de K . Cuando el coeficiente K aumenta la sincronización es más rápida. Pero el problema derivado de una ganancia demasiada alta es una inestabilidad más grande. Para $K > 27$ hay una sincronización muy rápida pero el receptor se vuelve inestable.

Una vez que tenemos los dos sistemas emisor y receptor sincronizados vamos a introducir la señal a enmascarar en la cadena. Esta señal puede ser considerada como una pequeña perturbación. Si el sistema está bien sincronizado la perturbación no le afectará (o dicho de otra forma el sistema permanecerá sincronizado). En estas condiciones la señal puede ser recuperada. En la figura 3.6 aparece el modelo de cálculo completo realizado con simulink.

Para que la sincronización se pueda mantener la señal que enviamos debe de ser muy pequeña. Cuanto más pequeña mejor es la recuperación. Un problema adicional es que con un canal ruidoso la señal se confunde con el ruido del canal. El método, pues, presenta sus limitaciones. En la figura 3.8 se muestra una señal recuperada; se observa que hay pérdida de sincronización. La diferencia de potencia entre la portadora caótica y la señal es de 68dB, o sea una diferencia considerable. Si, por otro lado, aumentamos la potencia de la señal regular a enmascarar, entonces se pierde la sincronización. En la figura 3.8 también se muestra la señal recuperada con una diferencia de 14dB entre la señal a enmascarar y la portadora.

Se ha probado esta sincronización con otras no linealidades; así como la sincronización sin señal adicional funciona siempre, en cuanto se incorpora una señal la recuperación es peor. No se ha diseñado el modelo PSpice correspondiente a este método, los resultados obtenidos con Matlab no son lo

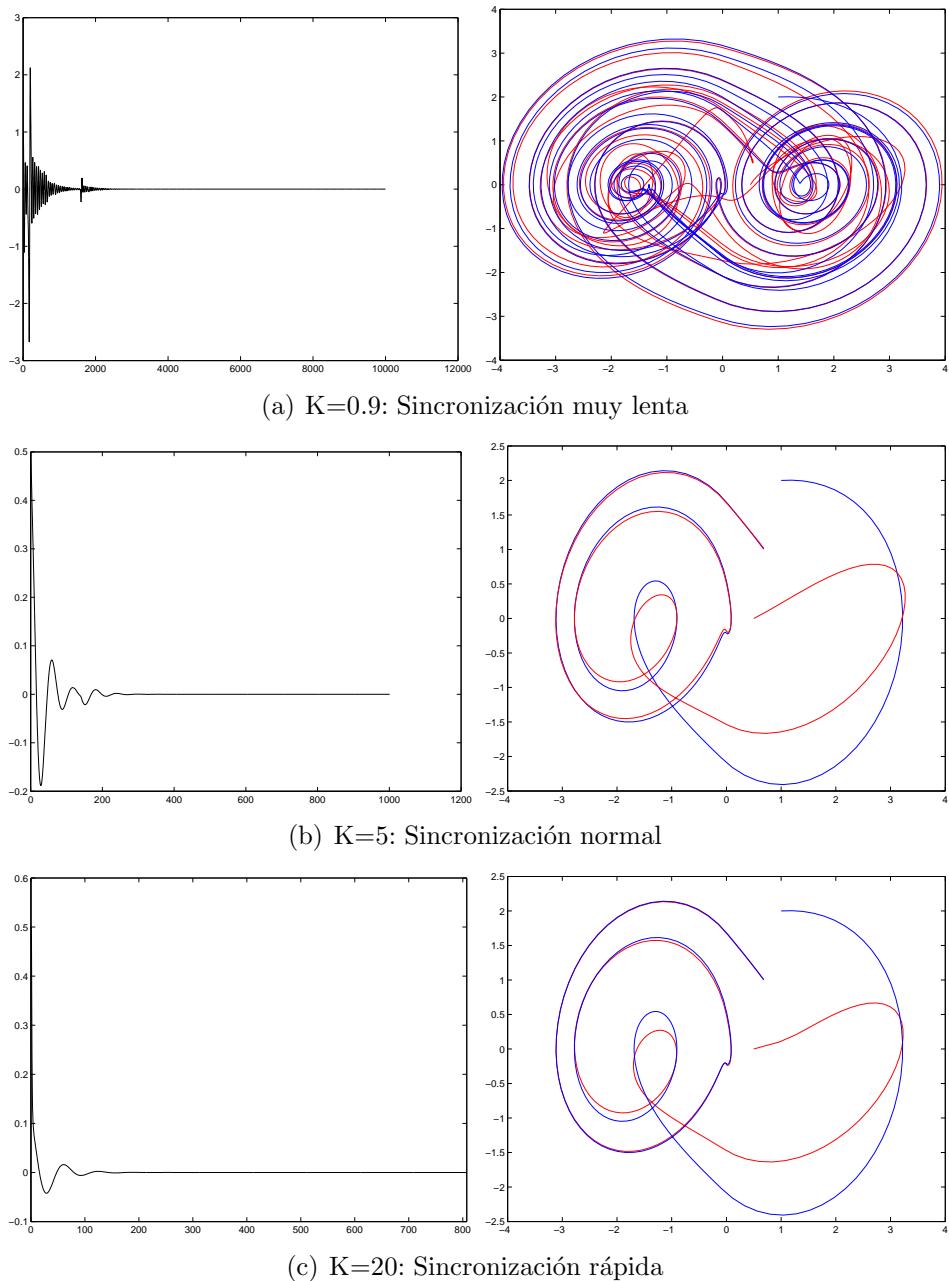


Figura 3.7: Error de sincronización con un control lineal para distintos valores de K . A la izquierda aparece el error de sincronización (el eje horizontal es el tiempo en ms y el eje vertical representa la diferencia $x_1 - x'_1$), a la derecha se muestran los atráctores correspondientes en el plano $\{x, \dot{x}\}$ (en rojo el atrácto del receptor y en azul el atrácto del emisor)

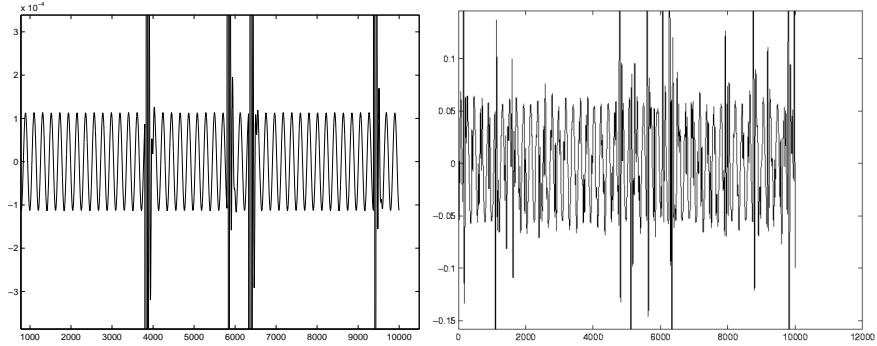


Figura 3.8: Señal recuperada con el método de control lineal con una diferencia de potencia 68dB (a la izquierda) y 14dB (a la derecha) entre la señal y la portadora ($K = 10$)

bastante buenos para pasar a esta etapa.

3.3. Sincronización con realimentación lineal

La sincronización procede de la técnica de control lineal propuesta por Brucoli en [4]. Esta técnica difiere de la última en que ahora la señal de información que deseamos transmitir se introduce también en el emisor. Por esta razón la llamamos sincronización con realimentación lineal. Este sistema mejora bastante la sincronización. El esquema de bloques del método aparece en la figura 3.9.

La justificación teórica de esta sincronización se basa en el uso de una función de Lyapunov adecuada para asegurar que el error de sincronización tienda a cero.

La ecuación del sistema autónoma del emisor con la señal s es:

$$\dot{Y} = f(Y, s) \quad (3.21)$$

y para el sistema receptor:

$$\dot{Y}' = \phi(Y, Y', s) \quad (3.22)$$

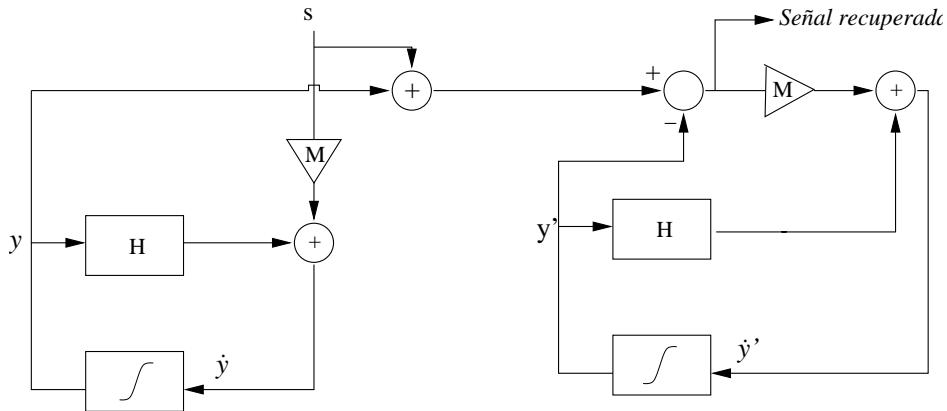


Figura 3.9: Esquema de la sincronización de Brucoli [4]

Tomamos el vector de estado

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

A partir de la figura 3.9 podemos escribir el vector \dot{Y} y \dot{Y}' en función del bloque H y de la señal s :

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= HY + Ms \\ \dot{Y}' &= HY' + M[(Y + s) - Y'] \end{aligned}$$

En la figura 3.9 el bloque H puede descomponerse en una parte lineal Λ y una parte no lineal φ . Las funciones f y ϕ precedentes pueden expresarse en función de Λ y φ . M es la matriz de realimentación del sistema, la cual es idéntica para el receptor y para el emisor. El sistema puede expresarse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \Lambda Y + \varphi(Y) + Ms \\ \dot{Y}' &= \Lambda Y' + \varphi(Y') + M[(Y + s) - Y'] \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora vamos a buscar para qué valores de la ganancia de realimentación M puede sincronizarse el sistema. Para ello definimos el vector error de sincronización entre las dos variables de estado y su derivada temporal:

$$\begin{aligned} e(t) &= Y(t) - Y'(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{Y}(t) - \dot{Y}'(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Expresado de forma matricial tenemos

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ \dot{x} - \dot{x}' \\ \ddot{x} - \ddot{x}' \end{bmatrix}$$

La derivada del error de sincronización viene dada por (3.23) y (3.24):

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \varphi(Y) - \varphi(Y') - M \mathbf{e} \quad (3.25)$$

En el artículo de Brucoli [4] se usa el método de Lyapunov. Siguiendo esa línea, el sistema posee un equilibrio en $\mathbf{e} = 0$ si existe una función de Lyapunov V tal que:

1. $V(\mathbf{e})$ sea definido **positivo**
2. $\dot{V}(\mathbf{e})$ sea definido **negativo**
3. $V(\mathbf{e}) \rightarrow \infty$ para $\|\mathbf{e}\| \rightarrow \infty$
4. $V(0) = 0$

En este caso el error es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov. Así las dos variables de estado Y y Y' convergen y se puede recuperar la señal s de información con facilidad.

Podemos elegir como función de Lyapunov la siguiente:

$$V(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i^2 \quad (3.26)$$

Siendo e_i las componentes del vector \mathbf{e} y λ_i unos coeficientes positivos.

Apliquemos el procedimiento al sistema generado por la ecuación diferencial con la no linealidad $g(x) = -cx + d\text{sign}(x)$. Recordemos que el sistema de la ecuación (2.1) se escribe de forma autónoma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\ddot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -cx + d\text{sign}(x) \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura establezcamos el convenio:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Podemos identificar la matrices Λ y φ que vimos antes al construir la ecuación (3.23) y escribir el sistema con este esquema de sincronización. La adición de la variable s se hace sobre la derivada primera de x , lo que se observa muy bien en el esquema de bloques de la figura 3.9:

$$\text{Emisor} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -cx_1 + dsign(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right. \quad (3.27)$$

$$\text{Receptor} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1(s + x_1 - x'_1) \\ 0 \\ -cx'_1 + dsign(x'_1) \end{bmatrix} \right. \quad (3.28)$$

A partir de estas dos últimas ecuaciones y de (3.23) y (3.25) podemos expresar el sistema en función del error de sincronización.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ -e_2 - Ae_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dsing(x_1) - dsing(x'_1) - ce_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_1 e_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Para poder encontrar la condición de sincronización hay que linealizar este sistema, es decir eliminar las expresiones de signo en la última ecuación. Para ello podemos establecer la hipótesis que x_1 y x'_1 van a ser del mismo signo un cierto tiempo suficiente para asegurar la sincronización².

Con la hipótesis $sign(x) - sign(x') = 0$, la derivada de la función de Lyapunov definida por (3.26) se expresa:

$$\dot{V}(e) = 2(\lambda_1 e_1 \dot{e}_1 + \lambda_2 e_2 \dot{e}_2 + \lambda_3 e_3 \dot{e}_3)$$

²esta hipótesis no es muy rigurosa pero se ha comprobado en la práctica que los sistemas sincronizan en cuanto x_1 y x'_1 tienen el mismo signo

o también

$$\dot{V}(e) = \lambda_1 e_1(e_2 - M_1 e_1) + \lambda_2 e_2 e_3 + \lambda_3(-e_2 - Ae_3 - ce_1)e_3$$

Escribiendo la derivada con una forma cuadrática $\dot{V}(e) = e^T \psi e$ tenemos

$$\dot{V}(e) = [e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} -\lambda_1 M_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_3 c & -\lambda_3 & -A\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

La matriz ψ es definida negativa con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Para que una matriz sea definida negativa basta con que todos sus menores sean negativos. Esto nos lleva a las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 M_1 &< 0 \\ -\lambda_3 A &< 0 \\ \det(\psi) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (M_1 - c) &< 0 \end{aligned}$$

Finalmente las condiciones de sincronización vienen dadas por:

$$\begin{cases} M_1 > 0 \\ A > 0 \\ M_1 < c \end{cases} \quad (3.30)$$

La ganancia M_1 permite pues asegurar la sincronización del sistema y, por tanto, recuperar la señal perfectamente.

La justificación precedente es válida solo para la nolinealidad $g(x) = -cx + dsign(x)$ pero se puede repetir fácilmente para las otras no linealidades. De hecho las demostraciones correspondientes llevan a las mismas condiciones de sincronización.

Este esquema de sincronización ha sido simulado con Matlab y PSpice. Las simulaciones con Matlab funcionan perfectamente; a continuación se muestran los resultados de las simulaciones. Las simulaciones con PSpice, sin embargo, no funcionan tan bien como el modelo; el sistema se sincroniza pero a veces hay pérdidas de sincronización. También se exponen los resultados a continuación.

3.3.1. Simulaciones con Matlab

Las simulaciones se efectuaron con las herramientas Matlab y Simulink. La tabla siguiente representa las no linealidades empleadas para comprobar la sincronización.

Caso	No linealidad $g(x)$	Parámetro de control A
a	$ x - 2$	0.6
b	$-1,2x + 2\text{sign}(x)$	0.55
c	$-6\max(x, 0) + 0,5$	0.6

La señal regular empleada en las siguientes simulaciones es una señal sinusoidal de frecuencia 1000 Hz de amplitud 0.1V y, por tanto, enmascarada dentro del espectro de la señal caótica (hay una diferencia de mas de 10dB entre la señal caótica y la señal regular).

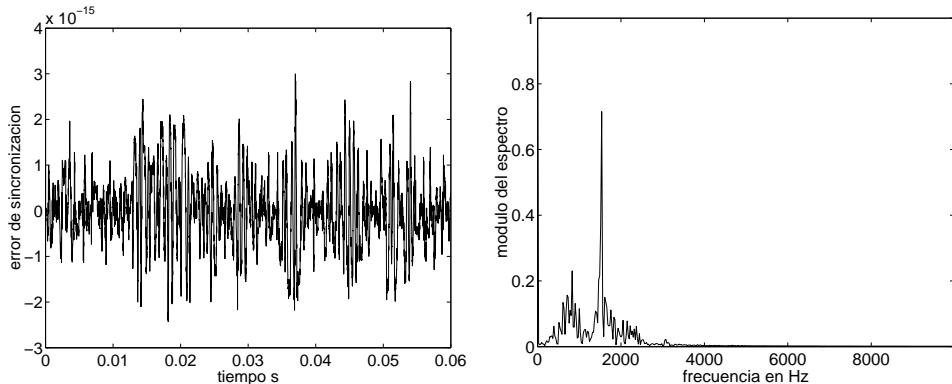
Caso a) $g(x) = |x| - 2$

El sistema ha sido desarrollado en la primera parte de la memoria (capítulo 2.2). El problema de esta ecuación es que el máximo exponente de Lyapunov es muy bajo ($\lambda_1 \simeq 0,04$), lo que supone una desventaja porque para enmascarar eficazmente una señal necesitamos un comportamiento fuertemente caótico. La ventaja es que presenta un comportamiento muy estable y sincroniza muy bien.

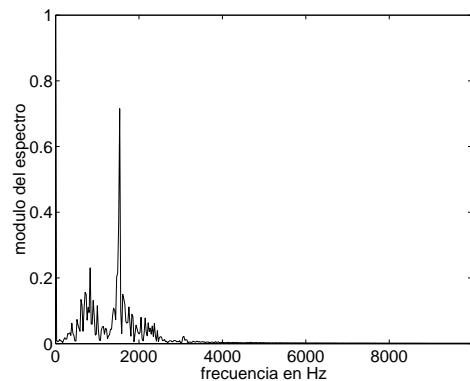
En la figura 3.10 se presenta el error de recuperación entre la señal enviada y la señal recuperada. Este error es despreciable, no superando los $10^{-14}V$. Se muestra el espectro de potencia de la señal transmitida en el canal de transmisión y el espectro de la señal recuperada. La señal regular queda enmascarada aunque aparezca un pico en 1000Hz en el espectro de la señal caótica (fig. 3.10.b). La sincronización se realiza perfectamente pero el ancho de banda y la potencia de la señal caótica no son suficientemente elevados.

Caso b) $g(x) = -1,2x + 2\text{sign}(x)$

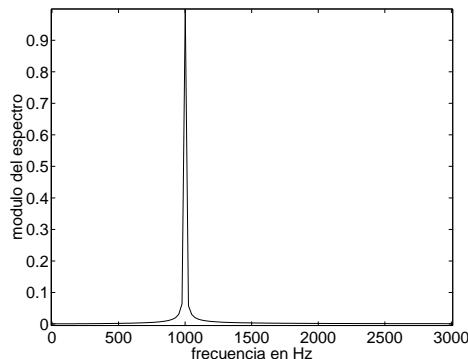
Esta no linealidad es la que produce el mayor exponente de Lyapunov (corresponde al sistema “salto”), debido al atrácteur de doble rollo. En la figura 3.11.a se representa el error de sincronización, que es muy débil y se puede considerar la sincronización como perfecta. El espectro de la señal transmitida en el canal de transmisión en la figura 3.11.b muestra que la señal regular esta bien escondida en dentro de la señal caótica (la diferencia de potencia entre las dos señales es de 30dB). El espectro de la señal recuperada en la figura 3.11.c confirma que la sincronización es perfecta. Este sistema constituye el caso mas interesante de los estudiados, al presentar un espectro lo suficiente ancho para esconder señales de información.



(a) Error de recuperación entre la señal regular emitida y la señal recuperada transmitida por el canal

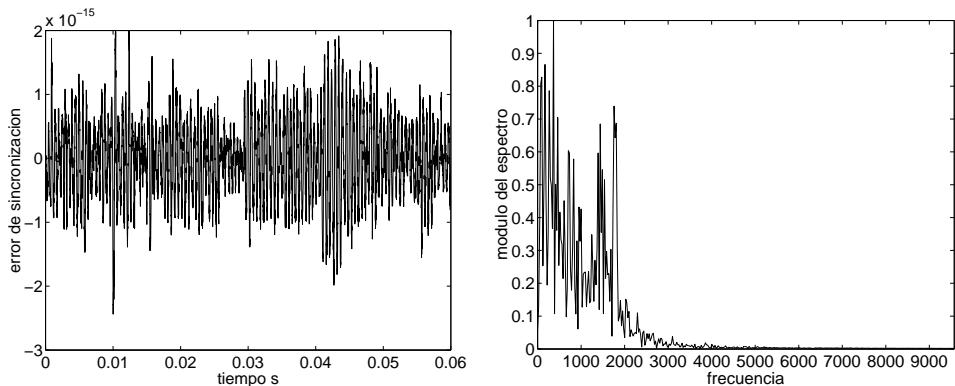


(b) Espectro de potencia de la señal regular emitida y la señal recuperada transmitida por el canal

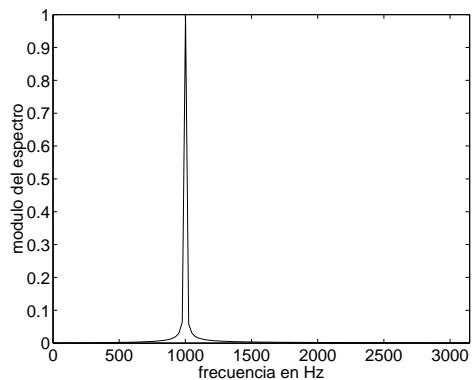


(c) Espectro de potencia de la señal recuperada

Figura 3.10: Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “valor absoluto”, ($g(x) = |x| - 2$)



(a) Error de recuperación entre la señal regular emitida y la señal recuperada transmitida por el canal



(c) Espectro de potencia de la señal recuperada

Figura 3.11: Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “salto” ($g(x) = -1,2x + 2\text{sign}(x)$)

Caso c) $g(x) = -6\max(x, 0) + 0,5$

En este último caso se ha obtenido una sincronización perfecta (ver figura 3.12.a). Pero este sistema es menos interesante que el caso precedente. El espectro de la señal caótica no es tan ancho como en el sistema salto (ver figura 3.12.b y sección 2.5)

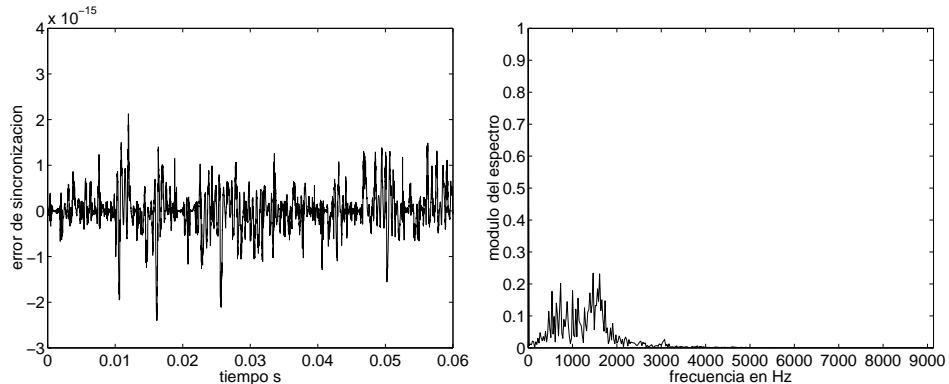
Simulaciones con PSPICE

Este modelo de sincronización ha sido implementado con PSpice para asegurar que el sistema podrá funcionar en la realidad. El hecho de que el modelo PSpice de buenos resultados no nos dice si la implementación física del circuito funcionará o no. Pero si el modelo PSpice falla no hace falta construir el circuito, porque no funcionará con toda seguridad.

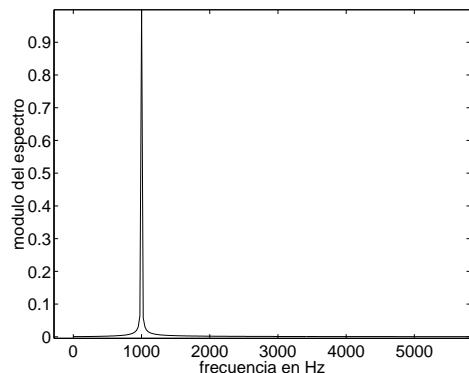
La figura 3.13 representa la versión completa del circuito estudiada con PSpice. El receptor y el emisor están basados en los circuitos ya presentados anteriormente. En concreto la base es la misma que la de figura 2.23. Los sumadores están realizados en su mayoría a partir de amplificadores operacionales exceptuando la suma entre la variable \dot{x} y la señal de información que se hace mediante un integrador. La ganancia de realimentación M_1 se ajusta solo con una resistencia (ver el plano en el anexo C.1).

Las simulaciones no dieron resultados muy satisfactorios, la señal introducida carga mucho el circuito y al aumentar el nivel el circuito satura. Por otro lado, la señal recuperada está muy distorsionada por la señal caótica. En la figura 3.14 se observa que la señal recuperada esta contaminada por la portadora caótica. Las características de la simulación son las siguientes: señal de 1100Hz de amplitud de 80mV, ganancia de realimentación $M_1 = 0,66$ y tiempo de simulación de 50ms.

Con este esquema no se han podido obtener buenos resultados de sincronización debido a la carga del circuito por la señal introducida. A continuación se ha propuesto una modificación del esquema de sincronización con el fin de que el circuito pueda sincronizar correctamente.



(a) Error de recuperación entre la señal regular emitida y la señal recuperada
 (b) Espectro de potencia de la señal transmitida por el canal



(c) Espectro de potencia de la señal recuperada

Figura 3.12: Resultados de las simulaciones de la sincronización con realimentación lineal para el sistema “diodo inverso” ($g(x) = -6\max(x, 0) + 0,5$)

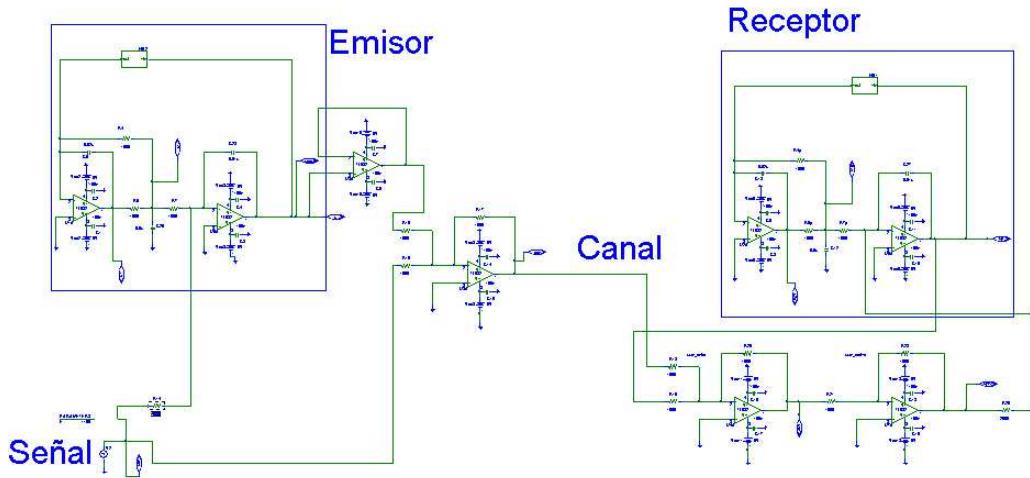


Figura 3.13: Esquema de la simulación con PSpice de la sincronización con realimentación lineal

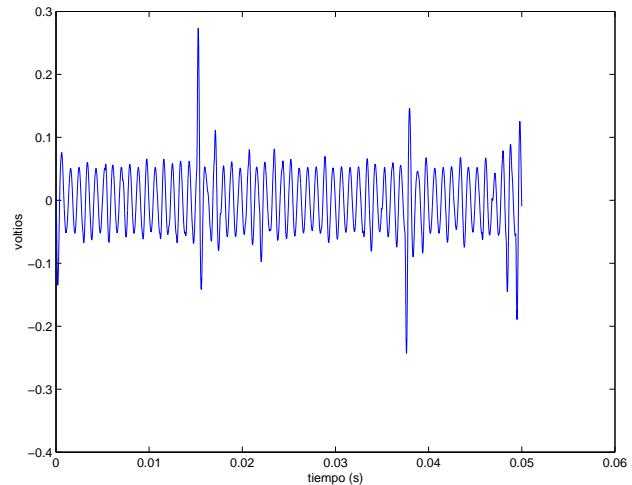


Figura 3.14: Señal recuperada para el sistema salto con la sincronización con realimentacion lineal (simulacion PSpice)

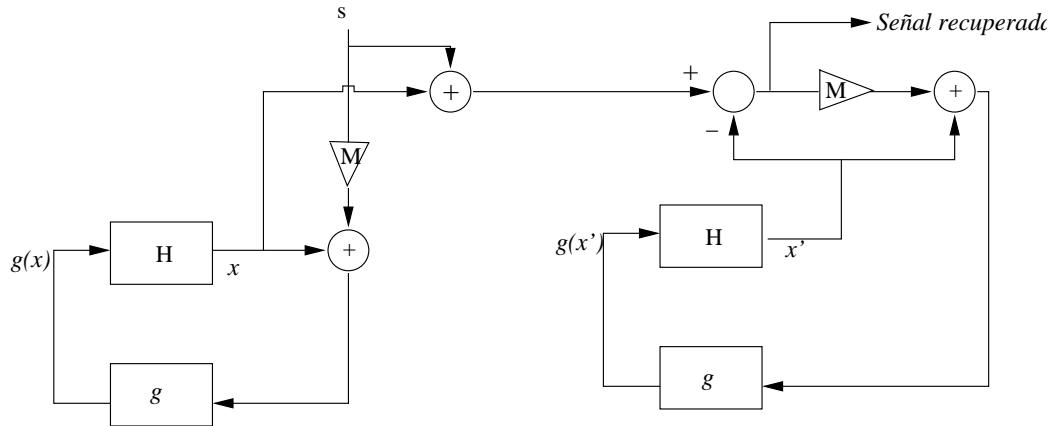


Figura 3.15: Esquema de la sincronización modificada

3.3.2. Variante de la sincronización con realimentación lineal

Para mejorar las simulaciones con PSpice presentamos un esquema un poco modificado, donde la realimentación ya no se efectúa con la variable \dot{x} sino con la variable x directamente (se añade la señal de información directamente a la variable dinámica x). El esquema de bloques de este sistema se encuentra en la figura 3.15.

Las justificaciones teóricas de este esquema de sincronización siguen exactamente el mismo desarrollo que la demostración anterior y llevan a las mismas condiciones de sincronización (ecuación 3.30). La demostración es la misma pero cambiando la variable a partir de la cual hacemos la realimentación (ver anexos B.3). Las simulaciones con Matlab dan los mismos resultados que la versión precedente. Es decir que la sincronización simulada con Simulink es perfecta, presentando un error de sincronización despreciable. No hizo falta repetir las simulaciones precedentes con Matlab.

El circuito PSpice diseñado es muy parecido al que vimos antes, constando de un emisor y un receptor. Vamos a describir primero el funcionamiento del emisor, tal como aparece en la figura 3.16. La base del emisor es la misma que los circuitos ya construidos; la parte que genera las distintas variables dinámicas (x, \dot{x}, \ddot{x}) es idéntica a la figura 2.23. Los bloques anotados en rojo (figura 3.16), representan la diferentes funcionalidades del circuito:

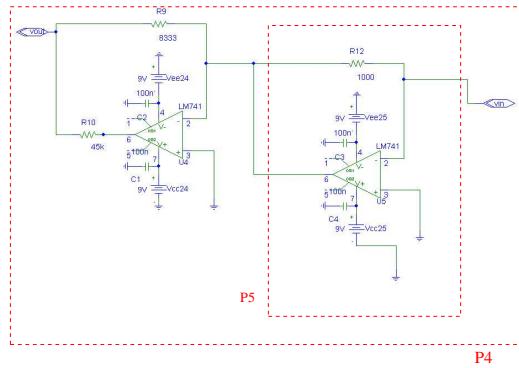
- **P1:** es el sumador de la señal que deseamos enviar con la variable x del sistema. Esta suma se introduce directamente en la nolinealidad situada en el bloque **P4** (el esquema de **P4** aparece en una figura aparte para simplificar la figura).

La nolinealidad ha sido un poco modificada para sumar directamente en el operacional. La suma se efectúa concretamente en el bloque **P5**, que es un sub-bloque del **P4**. La resistencia R_{14} en el bloque **P1** permite ajustar la ganancia de realimentación M_1 . Es un parámetro muy importante y necesita un ajuste preciso. Esta ganancia vale: $M_1 = R_{12}/R_{14}$ (R_{12} se sitúa en el bloque **P5**). La condición de sincronización es $M_1 < 1$ (ecuación (3.30)), luego, para conseguirla es preciso tener una $R_{14} > R_{12}$.

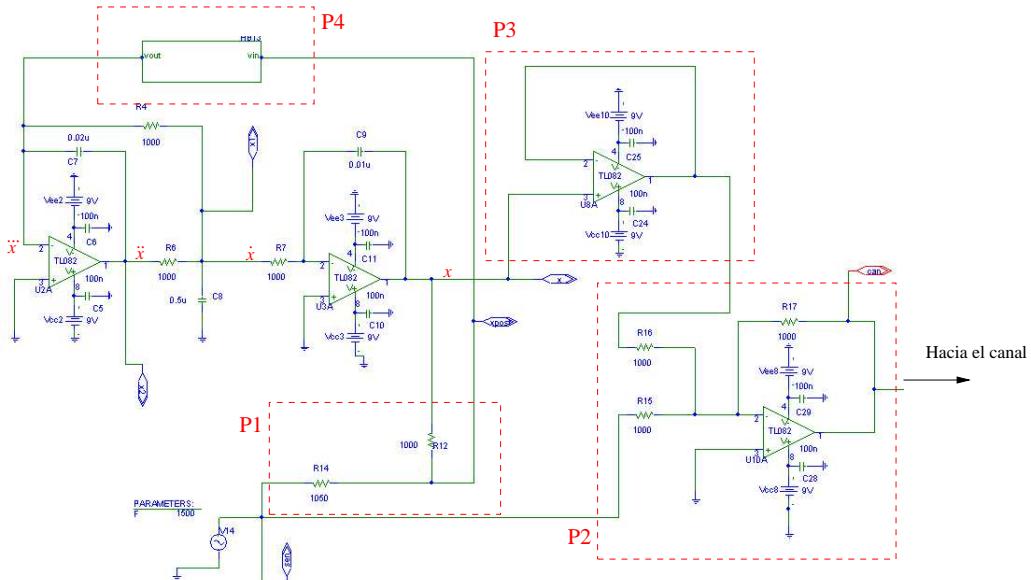
- **P2.** Este bloque efectúa la suma entre la señal regular y la variable x . Esta suma se transmite directamente al canal de transmisión. Hay que notar que **P2** realiza una suma y una inversión de las señales, debido al amplificador operacional. Por tanto lo que enviamos por el canal es en realidad: $-(s(t) + x(t))$. Esta consideración es importante porque en la recepción se usa esta propiedad para reconstruir la señal (ver la descripción del receptor).
- El bloque **P3** solo consiste en un seguidor de tensión. Se ha comprobado que este bloque mejora la sincronización, desacopla el circuito y evita una posible realimentación de la señal de información en el circuito.
- **P4:** es el bloque donde se sitúa la nolinealidad $g(x)$. en este caso se trata de la nolinealidad tipo “salto”. El circuito es muy sencillo y consta en un sumador/inversor (el bloque **P5**), la parte que efectúa el salto (el amplificador operacional) y la realimentación del circuito (mediante la resistencia R_9). Este bloque corresponde a la caja g de la figura 3.15

El circuito ha sido estudiado para minimizar el número de amplificadores operacionales y así reducir la complejidad y el ruido del sistema.

El receptor también se compone de la misma estructura base que el circuito precedente. (figura 3.17). Se puede descomponer el circuito en varios sub-bloques para simplificar el estudio:



(a) No linealidad (bloque P4)



(b) circuito emisor

Figura 3.16: Circuito Emisor correspondiente a la sincronización con realimentación lineal modificada preparado para su estudio con PSpice

- El bloque **P6** recibe la señal que llega del canal y le resta la variable x' . Llamaremos a continuación $s(t)$ a la señal que queremos descodificar y $x(t)$ a la variable dinámica x del emisor. Como se comentó al describir el emisor, lo que circula por el canal es la suma $-(x(t) + s(t))$. En el bloque **P6** se efectúa la operación $-(x(t) + s(t)) + x'(t)$. Si los dos circuitos están sincronizados entonces tenemos $x(t) = x'(t)$ y a la salida aparece la señal $s'(t)$ recuperada.
- En el bloque **P7** se efectúa la suma entre el error de sincronización (que resulta ser la señal $s'(t)$) y la variable x' . Esta suma se introduce directamente en el bloque **P8** donde se encuentra la nolinealidad del circuito. La suma se realiza de la misma manera que en bloque **P1** del emisor. La ganancia de realimentación se controla con la resistencia R_{21} y la ganancia vale $M_1 = 1000/R_{21}$. Esta ganancia tiene que ser idéntica a la ganancia del bloque emisor, se introduce en el receptor la misma proporción de señal regular que en el emisor.
- El bloque **P8** es idéntico al bloque **P4** y contiene la nolinealidad del circuito.

El receptor es muy sencillo pero hay que tener cuidado con la ganancia de realimentación. Si la ganancia está demasiado cerca de 1 entonces el circuito puede inestabilizarse. Hay que igualar las ganancias del emisor y del receptor para garantizar la sincronización. A continuación se muestran los resultados de las simulaciones obtenidos con estos circuitos.

En la figura 3.18 tenemos un ejemplo de señal recuperada, donde la señal original tiene una frecuencia de 1500Hz y una amplitud de 0.1V. La recuperación de la señal es buena. Para evaluar un poco la calidad de la transmisión se ha medido el error cuadrático de recuperación³. La figura 3.19 representa dicho error en función de la frecuencia del tono enviado, con una amplitud constante (0.1 V). La figura 3.19 representa la desviación típica del error de recuperación en función de la frecuencia. Se puede observar que el error cuadrático es constante y bastante pequeño si se compara con el nivel de la señal (diferencia de 10 dB)

³Se entiende por error de recuperación la diferencia entre la señal de información enviada y la señal recuperada

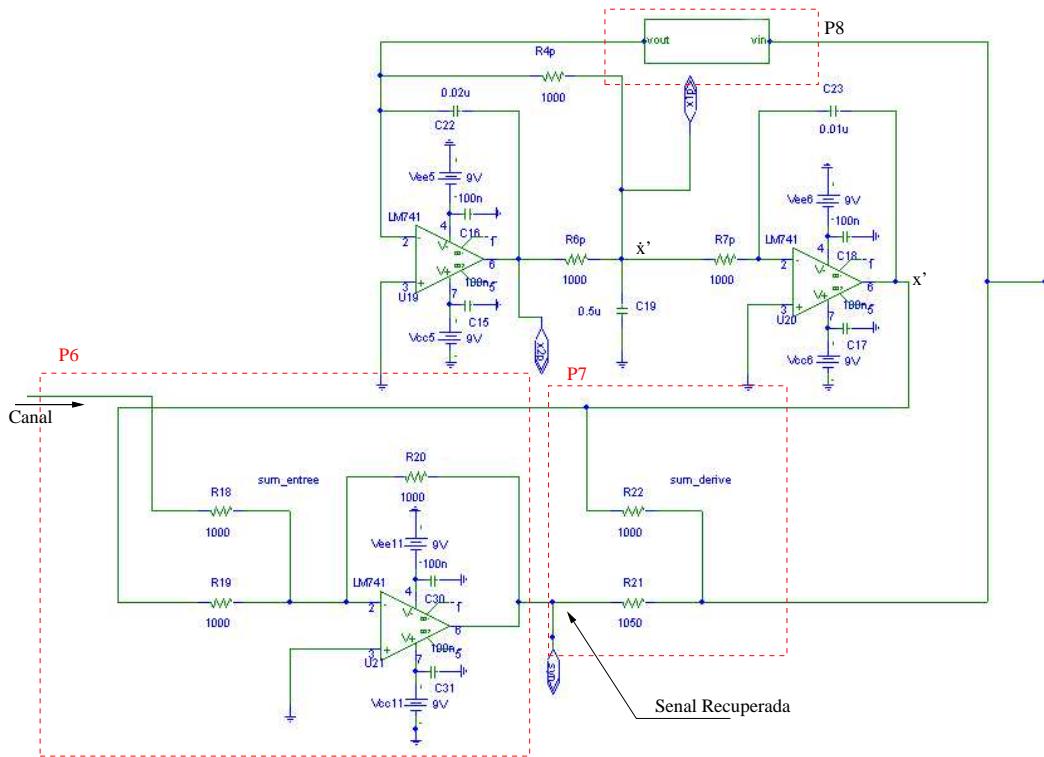


Figura 3.17: Esquema del receptor de la sincronización con realimentación lineal modificada (diseño realizado con PSpice)

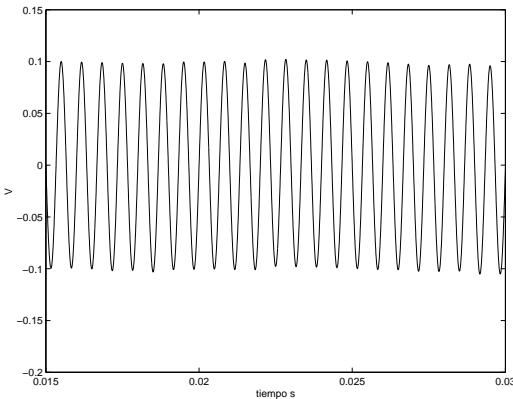


Figura 3.18: Señal recuperada con el método de realimentación lineal modificado (simulación PSpice)

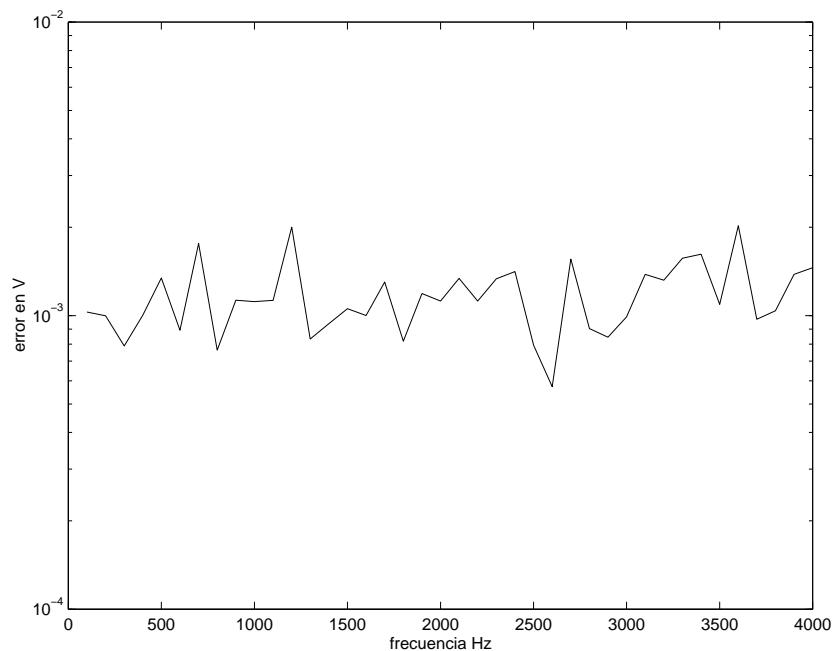


Figura 3.19: Desviación típica del error (en voltios) de recuperación en función de la frecuencia de la señal enviada (sistema de sincronización con realimentación lineal modificado)

Implementación del circuito

Hemos implementado el método de sincronización con realimentación lineal modificada descrito con un circuito electrónico. Se sabe que para obtener una buena sincronización hace falta que el emisor y el receptor tengan los mismos valores para los componentes. En un primer intento utilizamos componentes corrientes con una precisión de 5 % para las resistencias y de 15 % para los condensadores; la sincronización no pudo efectuarse. En un cierto sentido es una ventaja con vistas a la seguridad del procedimiento de encryptamiento porque significa que dos circuitos con parámetros algo distintos no van a poder sincronizarse. La desventaja está en que el circuito necesita componentes con una alta precisión y, por tanto, más caros que los ordinarios. Pero aun así el coste total del circuito sigue siendo muy bajo.

Se ha construido el circuito empleando componentes de precisión, con una tolerancia de 1 % para las resistencias y 1 % para los condensadores. Las pruebas del circuito se hicieron con la no linealidad “salto” (ver capítulo 2.4). En la figura 3.20 se muestra el grado de sincronización alcanzada.

Para ello se representa la variable x (del emisor) en función de la variable x' (la misma pero en el receptor), lo que puede representar de alguna forma como sincroniza el sistema. Si obtuviéramos una recta ($x = x'$) eso significaría que el sistema sincronizaría perfectamente. En el caso presentado no existe ninguna señal regular superpuesta y lo normal es que el sistema se sincronice bien, aunque pueden surgir fallos puntuales como se puede observar en la figura de la derecha (3.20.b). Estos fallos surgen de manera aleatoria y pueden producirse por culpa del ruido o de una diferencia entre los parámetros del emisor y del receptor.

En la segunda parte de la experiencia superponemos un tono senoidal con la señal caótica para comprobar la buena recuperación de la señal. En la figura 3.22 se muestra la señal recuperada. La señal empleada es de 4KHz y su amplitud 0.5V. La figura también es una fotografía de osciloscopio. Se observan varios senos superpuestos porque la cámara capta varios disparos del osciloscopio según el tiempo de apertura del objetivo. Además también interviene la persistencia lumínosa de la pantalla del osciloscopio. Se observa que el seno no es perfecto, apareciendo una modulación de la amplitud y una fluctuación de la fase. Esto es debido a una señal caótica residual que contamina la señal de información. La señal regular es perfectamente identificable y se

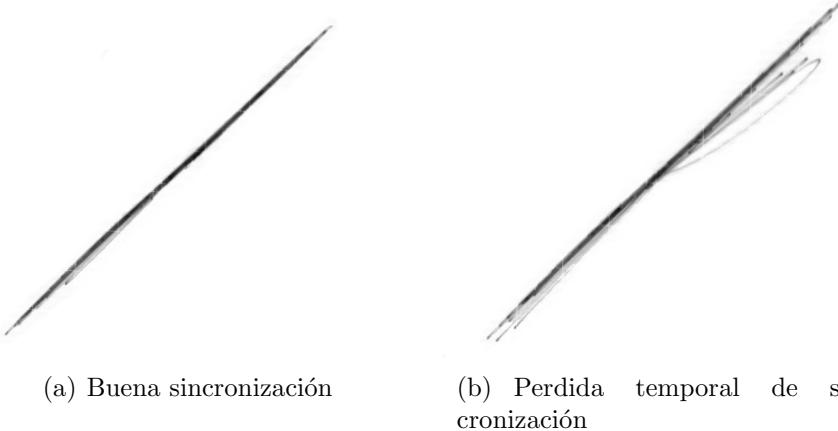


Figura 3.20: Fotografías de $x(t)$ en función de $x(t)'$ sobre un osciloscopio (circuito electrónico con la no linealidad $g(x) = -1,2x + 2\text{sign}(x)$)

puede recuperar la información. Para completar las medidas experimentales se ha utilizado una tarjeta de adquisición de datos (modelo Pico ADC-212). La figura 3.21 representa como varía con la frecuencia la señal recuperada (a la izquierda), el espectro de Fourier de la misma (en el centro), y el espectro de Fourier en el canal, donde la señal regular coexiste con la señal caótica. Este último espectro enteramente caótico muestra la gran dificultad que se presenta para que el profano pueda recuperar la información regular directamente del canal. En los espectros aparece representado el módulo de los espectros normalizados (nos interesamos sobre todo el aspecto cualitativo). Las señales regulares enviadas son tonos de distintas frecuencias y todas ellas con una amplitud de 0.2V.

Para las frecuencias bajas la señal recuperada se encuentra algo deteriorada mientras que para frecuencias más altas (hasta 2000Hz) la señal mejora de calidad. La banda 500 – 2000Hz se puede aprovechar para transmitir información segura. Existe la alternativa de modificar el circuito para hacerlo funcionar a frecuencias mas altas y con ello enmascarar señales dentro de una banda de frecuencias mas elevada.

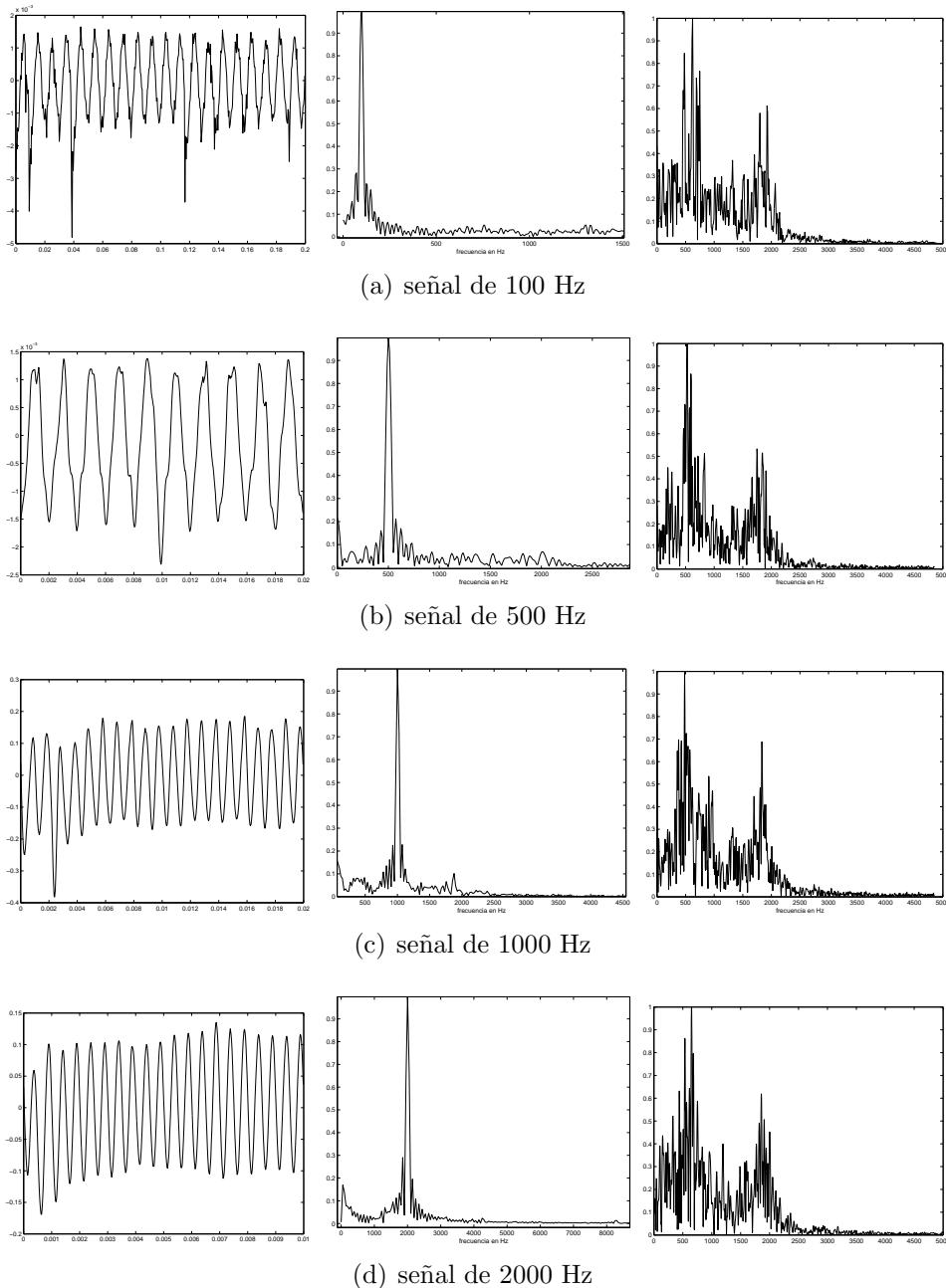


Figura 3.21: Resultados de la sincronización obtenidos con la tarjeta de adquisición de datos. A la izquierda y en el centro aparecen la forma de onda y el espectro de la señal recuperada. A la derecha se representa el espectro de la señal transmitida por el canal.

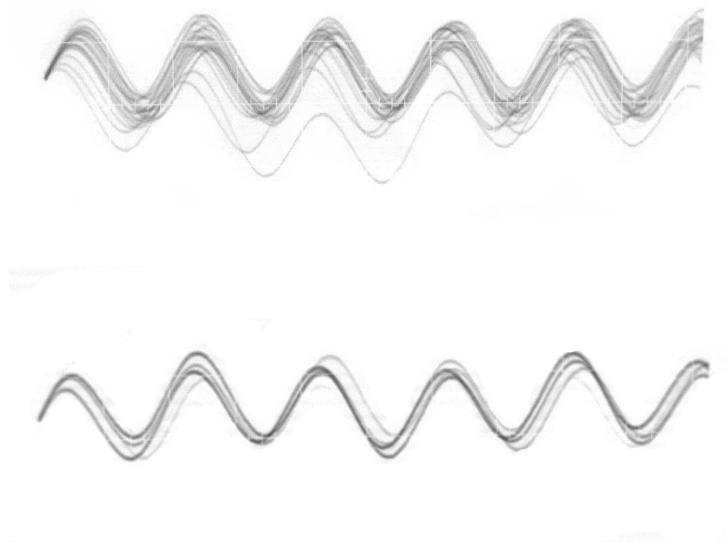


Figura 3.22: Señal recuperada sobre un osciloscopio

Para algunas frecuencias de la señal transmitida el sistema puede entrar en resonancia, pudiendo pasar a un régimen osculatorio regular. Por ejemplo, con un tono de frecuencia de 1630Hz el sistema se vuelve regular.

Se podría alcanzar una mejora de la sincronización si tuviéramos componentes de mayor precisión todavía, o construyendo un circuito integrado. Podemos ajustar los parámetros críticos (como los condensadores o la ganancia de sincronización), aunque resulta difícil. Hay que tomar también en consideración el problema del ruido. Las simulaciones PSpice modelizan en parte el ruido pero en las condiciones del laboratorio el ruido es mucho más importante. En la sección siguiente veremos como el ruido influye notablemente en la calidad de la transmisión.

3.3.3. Estimación de la calidad de la comunicación con Matlab

Es importante conocer el comportamiento del circuito cuando el canal es ruidoso. Para simular el canal ruidoso se añade un ruido gaussiano en el canal y se mide el error de sincronización resultante en función de la relación señal ruido. La relación señal ruido será el cociente entre la potencia de la señal enviada y el ruido añadido sobre el canal:

$$\frac{S}{N} = 10 \log\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_N}\right)$$

siendo σ_S la varianza de la señal y σ_N la varianza del ruido. La figura 3.23 muestra el comportamiento del circuito cuando aumenta la relación S/N. La señal que se envía es un tono de 1500Hz de amplitud igual a 0,1V. El circuito sincroniza muy mal cuando S/N disminuye, y a veces es imposible recuperar la señal (para $S/N < 8dB$ hay tanto ruido como señal).

La ley de variación del error de sincronización en función de S/N expresados ambos en unidades logarítmicas verifica aproximadamente una ley decreciente casi lineal (hay un pico en 13dB pero no es muy importante).

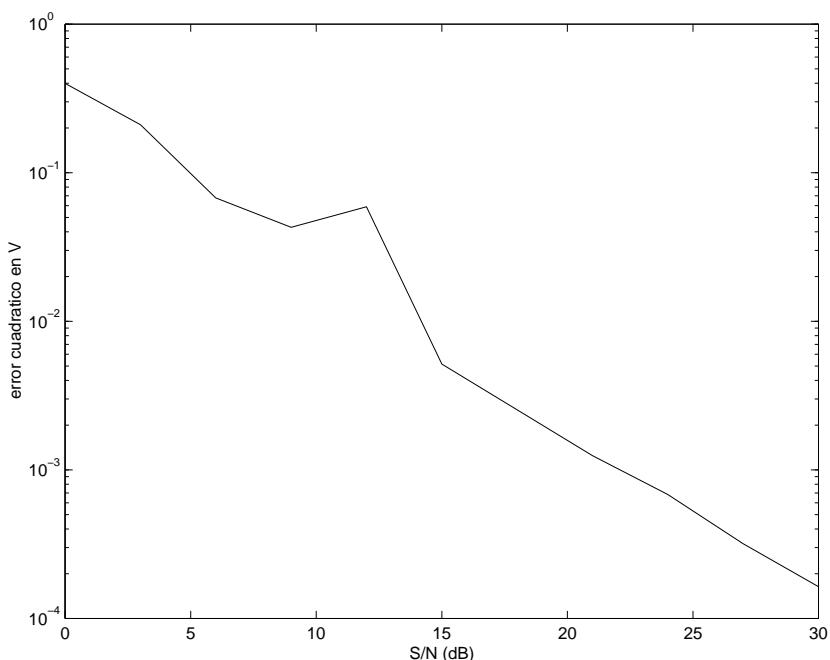


Figura 3.23: Evolución del error de sincronización cuando aumenta la relación señal ruido. Sistema de sincronización lineal modificada trabajando con una señal regular de 0.1V y 1500Hz

Pliego de condiciones

Se trata de realizar un estudio comparativo de tres sistemas caóticos a fin de elegir el mas adecuado para las comunicaciones seguras. Los sistemas estudiados son sistemas determinados por una ecuación diferencial no lineal de tercer orden cuya no linealidad puede tomar tres formas distintas:

- en forma de “V” (un valor absoluto),
- en forma de escalón (un salto),
- en forma de cuesta bajando (un diodo inverso)

En una primera fase deben usarse todos los procedimientos disponibles para la caracterización de los tres sistemas. Se debe construir los circuitos correspondientes a cada sistema y verificar experimentalmente las conclusiones del estudio numérico. La segunda fase tiene por objeto de estudiar los procedimientos de sincronización de sistemas caóticos y decidir cual de ellas conviene a los tres sistemas estudiados.

La primera fase del trabajo requiere el empleo de varios tipos de procedimientos para el estudio del caos:

- Soluciones analíticas de los sistemas
- Exponentes de Lyapunov
- Atráctores
- Diagramas de bifurcación
- Mapas de retorno
- Espectros y funciones de autocorrelación

■ Mapas de Poincaré

El análisis y el estudio de esta fase se realizará con las herramientas de cálculo numérico PSpice y Matlab. Después del estudio de estos sistemas se realizará los circuitos electrónicos para comprobar el estudio teórico.

La segunda fase del proyecto consiste la aplicación a los sistemas propuestos de cuatro procedimientos de sincronización de sistemas caóticos para enmascarar información regular. Se debe averiguar cuál de las cuatro técnicas conviene a los sistemas estudiados. El estudio se acompañará de simulaciones numéricas con Matlab.

Una vez elegido el método adecuado, se simularán con PSpice los circuitos electrónicos de la sincronización. La última parte trata de construir estos circuitos y validar los resultados de las simulaciones. Se efectuarán pruebas de sincronización con y sin señales de información.

Para resumir podemos plantear el estudio de los sistemas en tres fases:

1. estudio numéricos con los procedimientos
2. estudio de la sincronización
3. verificación experimental

Presupuesto

Presupuesto de ejecución material

El presupuesto de ejecución material se define a partir de los siguientes costes:

1. Coste de la mano de obra:

El proyecto ha sido realizado por un ingeniero de telecomunicaciones que ha empleado 600 horas en 7 meses. El coste de la hora es de 36 €, resulta un coste total de 21600 €.

2. Costes materiales

El material empleado al lo largo del proyecto consiste en :

- Un ordenador PC
- Una impresora
- Un osciloscopio analógico, fuentes de alimentación y generadores de señales
- tarjeta de adquisición de datos
- cámara fotográfica digital

El coste de despreciacion de estos productos se estima a 600 €/año, lo que resulta en un coste total por despreciacion de 350 €.

Se añade los costes de material de oficina evaluado a 100 €

El coste de los componentes electrónicos usados se eleva a 110 €

El coste material asciende por tanto a 550 €

El coste del presupuesto material resulta:

Coste de la mano de obra:	21600 €
Coste material:	550 €
Presupuesto de ejecución material :	22150 €

Presupuesto de ejecución por contrata

Al presupuesto anterior hay que añadir el 15 % de gastos generales y financieros y el 7 % de beneficio industrial:

Presupuesto de ejecución material:	22150 €
Gastos generales y financieros (15 %):	3322 €
Beneficio industrial (7 %):	1550 €
Presupuesto de ejecución por contrata:	27022 €

Coste total del proyecto

El coste total del proyecto se calcula añadiendo al presupuesto de ejecución por contrata el 16 % de I.V.A.

Presupuesto de ejecución por contrata:	27022 €
I.V.A (16 %):	4323 €
Coste total del proyecto:	31345 €

Bibliografía

- [1] Stefan J. Linz, J.C Sprott Elementary chaotic flow. Physics Letters A 259 (1999)
- [2] J.C Sprott A new class of chaotic circuit. Physics Letters A 266 (2000)
- [3] J.C Sprott Simple chaotic systems and circuits. American journal of physics 68 (8) (2000)
- [4] Michele Brucoli synchronization of hyperchaotic circuits vía continuous feedback control with application to secure communications. Int. jour. of bifurcation and chaos Vol.8 No. 10 (1998)
- [5] J.-P. Eckmann and Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors. Review of modern physics, vol 57 No3 (1985)
- [6] F.Michaud & S.Reynal, Systèmes dynamiques et Chaos ENSEA (2001)
- [7] A.J Lichtenberg y M.A. Lieberman, Regular and chaotic dynamics. Springer-Verlag (1994)
- [8] Louis M. Pecora y Thomas L. Carroll, Driving systems with chaotic signals Physical review A, Vol 44 number 4 (1991)
- [9] Steven H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos. Perseus books (1994)
- [10] J. Argyris, G. Faust y M. Haase, An exploration of chaos. Texts on computational mechanics Vol VII, North-Holland (1994)
- [11] L. Perko, Differential equations and dynamical systems. Springer (1996)
- [12] S. haykin, Nonlinear methods of spectral analysis, Springer-Verlag (1979)

Apéndice A

Programas Matlab

A.1. Cálculo de los mapas de retorno y de la densidad invariante

```
%  
% Calculo de mapas iterados con una aproximación por rectas y polinomial  
  
% puntos relevados sobre el mapa experimental  
y1=1.1928;  
x1=-0.3847;  
y2=2.4524;  
x2=0.409;  
y3=-0.3847;  
x3=2.4759;  
  
%calculo de las pendientes  
a=inv([x1 ,1 ; x2 ,1 ])*[ y1; y2];  
b=a(2);  
a=a(1);  
  
c=inv([x2 ,1 ; x3 ,1 ])*[ y2; y3];  
d=c(2);  
c=c(1);  
  
hold on  
plot([x1,x2],[x1*a+b, x2*a+b])  
plot([x2,x3],[x2*c+d, x3*c+d])  
  
% calculo de trayectorias (iteracion del mapa)  
  
nb_iteracion=1000;  
x=zeros(1,nb_iteracion);  
  
%condiciones iniciales  
ci=2.5;
```

```

x(1)=ci;

for k=1:(nb_iteracion-1),

    if x(k) < x2
        x(k+1)=a*x(k)+b;
    else
        x(k+1)=c*x(k)+d;
    end
end
% iteraciones ahora con la aproximación cubica
% los coeficientes han sido calculados antes

y=zeros(1,nb_iteracion);

%condiciones iniciales
y(1)=ci;

for k=1:(nb_iteracion-1),
    y(k+1)=0.354*y(k)^3-1.93*y(k)^2+1.61*y(k)+2.08;
end

%
% Implementación del operador de Peron-Frobenius para los dos últimos mapas
%
% rho: densidad invariante para el mapa rectas
% rho2: densidad invariante para el mapa cubico

inter=2.4759+0.3847;
step=0.1; %precisión del mapa

len=length(-0.3847:step:2.4759);
rho=zeros(1,len);
v=ones(1,len)/inter;
% cien iteraciones por puntos
for k=1:100,
    j=1;
    for x=-0.3847:step:2.4759,

        x1=(x-b)/a;
        x2=(x-d)/c;

        if x1 < -0.3847 | x1 > 2.4759,
            x1=0;
        elseif x1>0.409,
            p1=a;
        else
            p1=c;
        end

        if x2 < -0.3847 | x2 > 2.4759,
            x2=0;
        elseif x2 > 0.409,
            p2=a;
        else
            p2=c;
        end
    end
    rho(j)=v;
    j=j+1;
end

```

```

    end

    if x1 ~= 0,
        rho(j) = v(ceil((x1+0.3847)/inter*len))/abs(p1);
    end
    if x2 ~= 0,
        rho(j) = rho(j) + v(ceil((x2+0.3847)/inter*len))/abs(p2);
    end
    j=j+1;
end
v=rho;
rho=zeros(1,len);
end

rho=v;

inter=2.4759+0.3847;
step=0.0001;

len=length(-0.3847:step:2.4759);
rho2=zeros(1,len);
v=ones(1,len)/inter;
p=zeros(1,3);
% 30 iteraciones por puntos
for k=1:30,
    j=1;
    for x=-0.3847:step:2.4759,
        raices=roots([0.354,-1.93,1.61,2.08-x]);
        for r=1:3,
            if raices(r) < -0.3847 | raices(r) > 2.4759 | imag(raices(r))~=0,
                raices(r)=0;
            else
                p(r)=3*0.354*raices(r)^2-2*1.93*raices(r)+1.61;
            end
        end
        for r=1:3,
            % se acumula los valores en rho2
            if raices(r) ~= 0,
                rho2(j) = rho2(j) + v(ceil((raices(r)+0.3847)/inter*len))/abs(p(r));
            end
            j=j+1;
        end
        v=rho2;
        rho2=zeros(1,len);
    end

```

```
end
```

```
rho2=v;
```

A.2. Diagramas de bifurcación

```
function bifur(dep,fin,paso)

% dibujo del diagrama de bifurcación
% se dibuja los máximos del sistema en función de parámetro de control

% dep es el valor inicial del parámetro y va decreciente
% v es una matriz n por m con m el numero de simulaciones
% paso es el paso del parámetro de control del sistema para cada simulación

tam = round(abs((fin-dep)/paso));

% parámetro de control del sistema
global A;
A = dep;

options = odeset('RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7,'refine',1, ...
    'stats','off','events','off');

for k=1:tam,

    [t temp] = ode45('spode2',[0:0.1:600],[0.1 0 0],options);

    temp=temp(:,1);
    temp=temp(1000:end); %cortamos el transitorio
    t=busca_max(temp);   % la función busca_max devuelve los indices de los máximos

    figure(1);
    plot(ones(1,length(t))*A,temp(t),'.r');

    hold on;
    A = A - paso;

end

hold off;
```

A.3. Cálculo de la solución analítica

```
%  
% Calculo de la solución analítica para la no linealidad -c x + d sign x  
%
```

```

clear all;
format short;

% tenemos aquí los coeficientes de la ecuación diferencial, estos
% se pueden modificar
A=0.61;
d=2;
c=1.2;

raiz_plus = roots([1,A,1,c]);

% Matriz inversa esto viene de la resolución a mano
x1=raiz_plus(1);
x2=raiz_plus(2);
x3=raiz_plus(3);

% aquí se calcula una matriz que sirve a resolver el sistema
% para las ecuaciones diferenciales
A_inv= 1/((x3-x2)*(x2-x1)*(x3-x1));

A_inv = A_inv*transpose([x2*x3*(x3-x2), -1*(x3+x2)*(x3-x2), 1*(x3-x2);
-1*x1*x3*(x3-x1), (x3+x1)*(x3-x1), -1*(x3-x1);
x1*x2*(x2-x1), -1*(x2+x1)*(x2-x1), 1*(x2-x1)]);

d=2;
c=1.2;

delta=0.001;
fin=400 ;
x =zeros(1,100);
y=zeros(1,round(length(0:delta:fin)/100));
x(1)=0.1;
ci=[x(1) ,0,0];

sig=sign(x(1))

%contadores
k=1;
p=0;

%calculo de ci coeficientes con las condiciones iniciales ci
C=[0;0;0];
%A=A_inv_plus;
a=exp(raiz_plus.*C);

%A=inv(A);
C=(A_inv.')*[ci(1)-sig*(d/c);ci(2);ci(3)];

for t=0:delta:fin,
    % calculo de los coeficientes de los exponentes por cada
    % trozos (cuando el signo cambia)
    if sig ~= sign(x(k)) & x(k) ~= 0,
        x1=diff(x)/delta;      %derivada primera y secunda
        x2=diff(x1)/delta;

```

```
a=exp(-raiz_plus*t);

%resolución del sistema lineal
sig=sign(x(k))

if k<4,%si el indice es inferior a 4 hay que tomar la derivada en ls otros puntos
ind=101;
else
ind=k;
end

C=((A_inv).')*[-sig*(d/c);x1(ind-2);x2(ind-3)].*a
end

k= mod(k,100);    %trabajamos con cien puntos
k=k+1;

a=exp(raiz_plus*t);

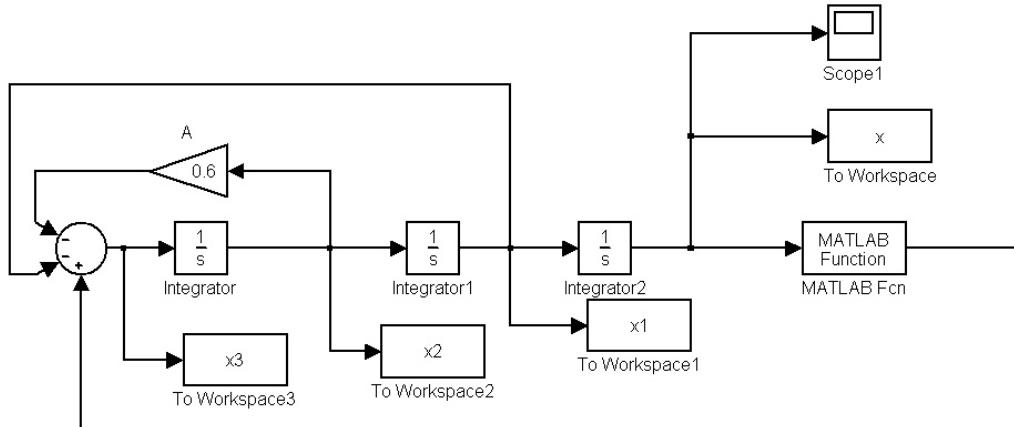
x(mod(k,100)+1)= sig*(d/c) + real(sum(C.*a));

if abs(x(mod(k,100)+1)) < 10^-15,
    x(mod(k,100)+1)=sig*10^-15;
end

if k ==100,%se traza un punto sobre 100
    p=p+1;
    y(p)=x(k);
end
end
plot(y);
```

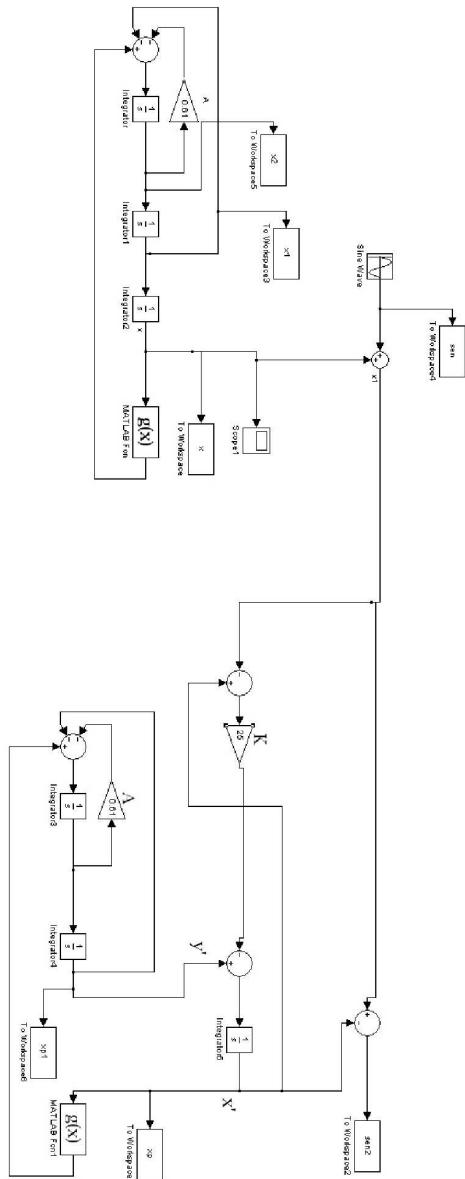
A.4. Diagramas de bloques Simulink

A.4.1. Integración de la ecuación diferencial



Esquema para la integración de la ecuación diferencial “Jerk”

A.4.2. Sincronización con técnicas de control



Esquema de la sincronización con técnicas de control

Apéndice B

Justificaciones teóricas

B.1. Expresión analítica de los autovalores

Se ha calculado con el programa Mathematica la expresión analítica de los autovalores de la ecuación 2.33 con el coeficiente $c = 1$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{A}{3} - \frac{2^{1/3}(3-A^2)}{3\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3}} + \\ &\quad \frac{1}{32^{1/3}}\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3} \\ \lambda_2 &= -\frac{A}{3} + \frac{(1+i\sqrt{3})(3-A^2)}{32^{2/3}\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3}} - \\ &\quad \frac{1}{62^{1/3}}\left((1-i\sqrt{3})\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3}\right) \\ \lambda_3 &= -\frac{A}{3} + \frac{(1-i\sqrt{3})(3-A^2)}{32^{2/3}\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3}} - \\ &\quad \frac{1}{62^{1/3}}\left((1+i\sqrt{3})\left(-27+9A-2A^3+3\sqrt{3}\sqrt{31-18A-A^2+4A^3}\right)^{1/3}\right)\end{aligned}$$

Ahora expresamos las soluciones de 2.33 en función de A y c .

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{A}{3} - \frac{\left(2^{1/3}(-A^2+3c)\right)}{\left(3\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right)} + \\ &\quad \frac{1}{32^{1/3}}\left(\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right) \\ \lambda_2 &= -\frac{A}{3} + \frac{\left((1+i\sqrt{3})(-A^2+3c)\right)}{\left(32^{2/3}\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right)} - \\ &\quad \frac{1}{62^{1/3}}\left((1-i\sqrt{3})\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right) \\ \lambda_3 &= -\frac{A}{3} + \frac{\left((1-i\sqrt{3})(-A^2+3c)\right)}{\left(32^{2/3}\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right)} - \\ &\quad \frac{1}{62^{1/3}}\left((1+i\sqrt{3})\left(-27-2A^3+9Ac+3\sqrt{3}\sqrt{27+4A^3-18Ac-A^2c^2+4c^3}\right)^{(1/3)}\right)\end{aligned}$$

B.2. Desarrollo de la solución analítica del sistema “salto”

En este apartado vamos a desarrollar la solución analítica del sistema definido por la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx - dsign(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Como lo hemos visto esta solución esta definida a trozos y esta “salta” de un punto de atracción inestable al otro. La ecuación diferencial precedente puede descomponerse en dos partes según el signo de $x(t)$:

$$\begin{aligned}x(t) > 0 \quad &\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx - d = 0 \\ x(t) < 0 \quad &\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0\end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

La solución entonces para las dos ecuaciones es muy similar y solo depende del signo de $x(t)$. La solución de $x(t)$ puede escribirse de la forma siguiente:

$$x(t) = \sum_{j=1}^N x_j(t) \Phi(t - t_{j-1}) [1 - \Phi(t - t_j)] \quad (\text{B.3})$$

La solución está definida a trozos (Φ es la función de Heavyside). Los tiempos t_j y t_{j-1} corresponden a los cambios de signo de $x(t)$. La solución para un trozo j se escribe:

$$x_j(t) = s(j) \frac{d}{c} + \sum_{k=1}^3 C_{s(j)}^k e^{\rho^k t}$$

Con $s(j)$ el signo de $x(t)$ para el trozo j . Los coeficientes $C_{s(j)}^k$ son las condiciones iniciales de cada trozo, y los coeficientes ρ^k son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial:

$$(\rho_{(k)})^3 + a(\rho_{(k)})^2 + (\rho_{(k)}) + c = 0$$

Estas raíces no cambian según el signo de $x(t)$, dependen únicamente de los coeficientes de la ecuación diferencial.

Las constantes $C_{s(j)}^k$ están definidas por las condiciones iniciales del segmento para el tiempo t_{j-1} y deben estar calculadas para cada trozo. Tenemos las condiciones iniciales para cada trozo:

$$\left. \begin{array}{l} x_j(t_{j-1}) = 0 \\ \dot{x}_j(t_{j-1}) = \dot{x}_{j-1}(t_{j-1}) \\ \ddot{x}_j(t_{j-1}) = \ddot{x}_{j-1}(t_{j-1}) \end{array} \right\} j = 2, 3, \dots$$

Los coeficientes $C_{s(j)}^{(k)}$ se calculan a partir del sistema lineal:

$$0 = s(j)(-1) + \sum_{k=1}^3 C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

$$\dot{x}_j(t_{j-1}) = \sum_{k=1}^3 \rho_{s(j)}^{(k)} C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

$$\ddot{x}_j(t_{j-1}) = \sum_{k=1}^3 [\rho_{s(j)}^{(k)}]^2 C_{s(j)}^{(k)} e^{\rho_{s(j)}^{(k)} t}$$

Podemos expresar este sistema de forma matricial para resolverlo (llamaremos las tres raíces $\rho_{s(j)}^{(k)}$ con ρ_1, ρ_2, ρ_3 para mas comodidad):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \rho_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{s(j)}^{(1)} e^{\rho_1 t} \\ C_{s(j)}^{(2)} e^{\rho_2 t} \\ C_{s(j)}^{(3)} e^{\rho_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(j) \\ \dot{x}_j(t_{j-1}) \\ \ddot{x}_j(t_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

La matriz cuadrada corresponde a una matriz de Vandermonde y se puede calcular fácilmente su inversa de forma analítica. El determinante de Vandermonde de esta Matriz (la llamaremos Λ) es dado por:

$$\det(\Lambda) = (\rho_3 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)$$

El inverso de la matriz Λ se puede calcular usando la formula:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\text{com}(\Lambda)^t}{\det(\Lambda)}$$

Con com la comatriz u t la transposición. Al final tenemos el inverso de la matriz Λ :

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det(\Lambda)} \begin{pmatrix} \rho_2\rho_3(\rho_3 - \rho_2) & -(\rho_3 + \rho_2)(\rho_3 - \rho_2) & (\rho_3 - \rho_2) \\ -\rho_1\rho_3(\rho_3 - \rho_1) & (\rho_3 + \rho_1)(\rho_3 - \rho_1) & -(\rho_3 - \rho_1) \\ \rho_1\rho_2(\rho_2 - \rho_1) & -(\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1) & (\rho_2 - \rho_1) \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos todo para realizar y simular un programa. El programa asociado a esta demostración se encuentra también en anexos.

B.3. Demostración de la sincronización con la realimentación lineal modificada

El esquema de la sincronización que hemos visto se encuentra en la figura B.1. Vamos a encontrar las condiciones de sincronización de este sistema. La prueba es mas o menos la misma que la prueba en el artículo [4].

La ecuación del sistema autónoma del emisor es con la señal s :

$$\dot{Y} = f(Y, s) \quad (\text{B.5})$$

Y para el sistema receptor:

$$\dot{Y}' = \phi(Y, Y', s) \quad (\text{B.6})$$

Tomamos el vector de estado

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

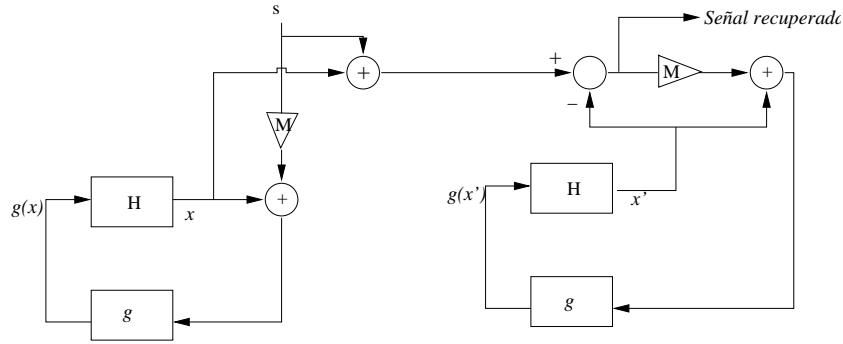


Figura B.1: Esquema de la sincronización modificada

A partir de la figura B.1 podemos escribir el vector \dot{Y} y \dot{Y}' en función del bloque H y de la señal s :

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= HY + Ms \\ \dot{Y}' &= HY' + M[(Y + s) - Y']\end{aligned}$$

Así podemos escribir el sistema de forma sistemática:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \Lambda Y + \varphi(Y) + Ms \\ \dot{Y}' &= \Lambda Y' + \varphi(Y') + M[(Y + s) - Y']\end{aligned}\tag{B.7}$$

Con la matriz Λ la parte lineal y $\varphi(Y)$ la función no lineal del sistema. Ahora vamos a buscar para qué valores de la ganancia de realimentación M el sistema se sincroniza.

Definimos el vector error de sincronización entre las dos variables de estado:

$$e(t) = Y(t) - Y'(t)$$

Expresado de forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ \dot{x} - \dot{x}' \\ \ddot{x} - \ddot{x}' \end{bmatrix}$$

La derivada del error de sincronización es dada por B.7:

$$\dot{e} = \Lambda e + \varphi(Y) - \varphi(Y') - Me\tag{B.8}$$

Aplicado a nuestro sistema de ecuación diferencial con la no linealidad $g(x) = -cx + dsign(x)$. Recordamos que el sistema de la ecuación (2.1) se escribe de forma autónoma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -cx + dsign(x) \end{bmatrix}$$

Para simplificar la escritura tomemos el convenio:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Ahora la realimentación se hace directamente sobre la función no lineal g , es decir introducimos la señal s en esta no linealidad: Para el emisor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c(x_1 + M_1 s) + dsign(x_1 + M_1 s) \end{bmatrix}$$

Para el receptor

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c(M_1(s + x_1) + x'_1(1 - M_1)) + dsign(M_1(s + x_1) + x'_1(1 - M_1)) \end{bmatrix}$$

Ahora escribimos el error de sincronización de forma autónoma:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c(1 - M)e_1 + dsign(x_1 + M_1 s) - dsign(M_1(s + x_1) + x'_1(1 - M_1)) \end{bmatrix}$$

Para expresar el sistema y calcular los autovalores suponemos que en un momento dado vamos a tener:

$$dsign(x_1 + M_1 s) = dsign(M_1(s + x_1) + x'_1(1 - M_1))$$

Es decir que las dos entidades van a tener el mismo signo a partir de un cierto tiempo. Esta hipótesis no es muy rigurosa pero funciona. después de

esta simplificación podemos expresar el sistema bajo la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c(1 - M_1) & -1 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} +$$

Para que la sincronización se efectúa hace falta que las partes reales de todos los autovalores sean negativas. Tenemos la solución:

$$M < 1$$

Esta demostración puede hacerse también con una función de Lyapunov, eso nos da una condición de sincronización igual pero con una demostración mas "robusta".

Apéndice C

Planos de los circuitos PSpice

C.1. Sincronización con realimentación lineal

Diseño PSpice de la sincronización con realimentación lineal

C.2. Sincronización con realimentación lineal, esquema modificado

Diseño PSpice de la sincronización modificada