# MESURES

# INCERTITUDES

# et

# ANALYSE DIMENSIONNELLE

# Mesures et erreurs de mesures

La mesure de grandeurs physiques (température, masse, vitesse, tension, longueur, etc.) est une étape essentielle de l'activité scientifique. Elle intervient aussi dans de nombreuses activités quotidiennes comme le pesage dans le commerce, la mesure de vitesse avec un radar, l'analyse biologique, etc. Cependant, toute mesure, aussi soigneuse soit-elle, est toujours imprécise. L'évaluation de l'incertitude associée à une mesure est donc indissociable de la mesure elle-même.

**Mesurer une grandeur**, c'est rechercher une valeur de cette grandeur et lui associer une incertitude afin d'évaluer la qualité de la mesure.

## A Définitions

- Le **mesurage** est l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement l'intervalle de valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur. Le terme mesurage est préféré à celui de mesure, car le mot mesure a de nombreux sens dans la langue française.
- Le **résultat d'un mesurage** est un ensemble de valeurs attribuées à la grandeur mesurée. C'est un intervalle de valeurs à l'intérieur duquel se trouve la **valeur mesurée**.
- La **valeur vraie** d'une grandeur est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.

L'**erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie.
Par définition, cette erreur est inconnue puisque la valeur vraie est elle-même inconnue.

## B Erreurs et notions associées

Les erreurs de mesures peuvent être dues à l'instrument de mesure, à l'opérateur ou à la variabilité de la grandeur mesurée. On les classe en deux catégories.

### → L'erreur de mesure aléatoire

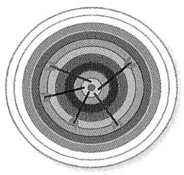
Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage d'une même grandeur, les valeurs mesurées peuvent être différentes. On parle alors d'**erreur de mesure aléatoire**.

Cette dispersion des valeurs mesurées est due à la qualité du mesurage réalisé par l'opérateur et à la qualité de l'instrument de mesure.

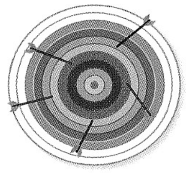
### → L'erreur de mesure systématique

Un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement conduit à des valeurs mesurées proches les unes des autres, mais éloignées de la valeur vraie. On parle alors d'**erreur de mesure systématique**.

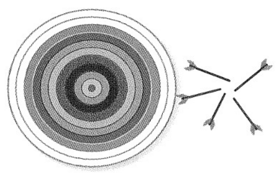
Si la valeur vraie est au centre de la cible et si les flèches représentent des valeurs mesurées :



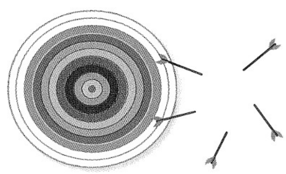
Tous les impacts sont proches du centre de la cible : les erreurs aléatoires et systématiques sont faibles.



Les impacts sont éloignés du centre de la cible, mais centrés, en moyenne, sur le centre de la cible : les erreurs aléatoires sont importantes, mais les erreurs systématiques sont faibles.



Les impacts sont groupés, mais loin du centre : les erreurs aléatoires sont faibles, mais les erreurs systématiques sont importantes.



Les impacts sont étalés et loin du centre : les erreurs aléatoires et systématiques sont importantes.

# Évaluation des incertitudes de mesure

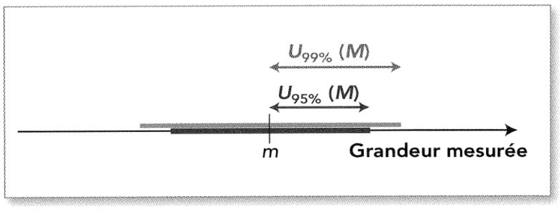
**L'incertitude de mesure** est une estimation de l'erreur de mesure.

- L'incertitude de mesure sera notée $U$ (de l'anglais « *uncertainty* »).

Elle permet de définir un intervalle dans lequel la valeur vraie a de grandes chances de se trouver. Cet intervalle est centré sur la valeur mesurée, notée $m$.

On parle **d'intervalle de confiance.**

- En général, la largeur de cet intervalle est choisie pour avoir 95 % ou 99 % de chance de trouver la valeur vraie à l'intérieur. Pour un même mesurage, le second intervalle (correspondant à un niveau de confiance de 99 %, en vert sur le schéma ci-contre) sera plus large que le premier (correspondant à un niveau de confiance de 95 %, en rouge sur le schéma ci-contre).




- La qualité de la mesure est d'autant meilleure que l'incertitude associée est petite.

## A Évaluer une incertitude de répétabilité

- Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage de la même grandeur, dans les mêmes conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents.
- Il en est de même pour des opérateurs différents réalisant simultanément le mesurage de la même grandeur avec du matériel similaire.
- Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques (moyenne et écart type) pour analyser les résultats.

L'incertitude de mesure correspondant à des mesures répétées d'une même grandeur est appelée **incertitude de répétabilité**. Elle est liée à l'écart type de la série de mesures.

- Pour une série de $n$ mesures indépendantes donnant des valeurs mesurées $m_k$, l'**écart type de la série de mesures** est :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}{n-1}}$$

où $\overline{m}$ est la **valeur moyenne de la série** de mesures, que l'on notera aussi $m_{moy}$.

L'écart type est obtenu en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur.

- L'**incertitude de répétabilité** associée à la mesure est $U(M) = k \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Elle dépend du nombre $n$ de mesures indépendantes réalisées, de l'écart type de la série de mesures et d'un coefficient $k$ appelé **facteur d'élargissement.**

- Le **facteur d'élargissement $k$** dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi.

Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student ».

Un extrait de ce tableau est donné ci-dessous pour un nombre de mesures compris entre 2 et 16, et pour des niveaux de confiance de 95 % et de 99 % :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{95\%}$ | 12,7 | 4,30 | 3,18 | 2,78 | 2,57 | 2,45 | 2,37 | 2,31 | 2,26 | 2,23 | 2,20 | 2,18 | 2,16 | 2,15 | 2,13 |
| $k_{99\%}$ | 63,7 | 9,93 | 5,84 | 4,60 | 4,03 | 3,71 | 3,50 | 3,36 | 3,25 | 3,17 | 3,11 | 3,06 | 3,01 | 2,98 | 2,95 |

Ce tableau montre que :

– Pour un même nombre de mesures, plus le niveau de confiance est grand et plus $k$ est grand.

– Pour un même niveau de confiance, plus le nombre $n$ de mesures indépendantes est grand et plus $k$ est petit.

***Remarque :* en Terminale S, l'expression de l'incertitude de répétabilité et l'extrait de la table de Student correspondant à un(aux) niveau(x) de confiance choisi(s) seront donnés.**

▸ Exemple : la mesure $\Delta t$ de la durée de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus, exprimés en seconde, sont les suivants :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,38 | 1,45 | 1,41 | 1,45 | 1,43 | 1,41 | 1,46 | 1,39 |
| 1,43 | 1,48 | 1,38 | 1,44 | 1,40 | 1,42 | 1,39 | 1,44 |

La série des valeurs mesurées des durées précédentes conduit à un écart type $\sigma_{n-1} = 0{,}029\,65$ s.

Avec un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude de répétabilité est :

$$U_{\text{répétabilité}}(\Delta t) = 2{,}13 \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 2{,}13 \times \frac{0{,}029\,65}{\sqrt{16}} = 0{,}016 \text{ s.}$$

Avec un niveau de confiance de 99 %, l'incertitude de répétabilité est :

$$U_{\text{répétabilité}}(\Delta t) = 2{,}95 \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 2{,}95 \times \frac{0{,}029\,65}{\sqrt{16}} = 0{,}022 \text{ s.}$$

## B Évaluer une incertitude sur une mesure unique

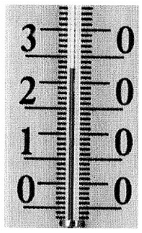
Lorsqu'une mesure ne peut pas être reproduite plusieurs fois, il est impossible d'estimer une incertitude de répétabilité.

Il est alors nécessaire d'analyser les différentes sources d'erreurs liées à l'instrument de mesure. Les valeurs des exemples suivants correspondent à un niveau de confiance de 95 %.

**En Terminale S, les relations à utiliser seront données.**

Le thermomètre est gradué ▸ en degré Celsius. L'incertitude sur une mesure unique de la température $\theta$ est :

$$U_{\text{lecture}}(\theta) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{12}} = 0{,}58 \text{ °C.}$$




### → Cas d'une lecture simple sur une échelle graduée

Lorsque la mesure est obtenue par lecture sur une échelle ou un cadran, pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude de la mesure liée à la lecture est estimée à :

$$U_{\text{lecture}} = \frac{2 \text{ graduations}}{\sqrt{12}}$$

### → Cas d'une double lecture sur une échelle graduée

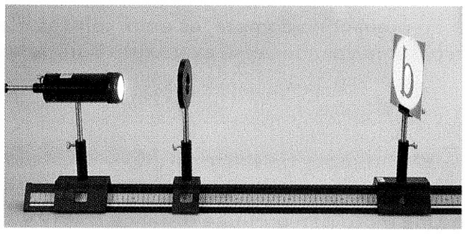
Lorsque la mesure nécessite une double lecture, les incertitudes liées à la lecture peuvent se cumuler ou se compenser, totalement ou partiellement. Pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude liée à la lecture est estimée à :

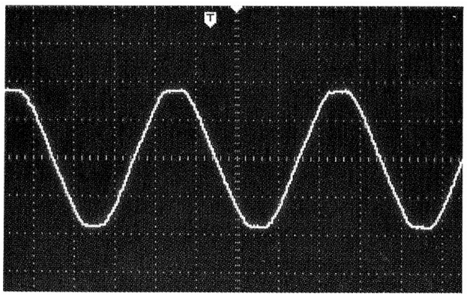
$$U_{\text{double lecture}} = \sqrt{2\left(\frac{2 \text{ graduations}}{\sqrt{12}}\right)^2} = \sqrt{2}\, U_{\text{lecture}}$$

La mesure de la distance $d$ entre la lentille et le plan de formation de l'image ▸ nécessite de repérer les positions de ces deux instruments sur le banc d'optique. Celui-ci étant gradué en mm, l'incertitude liée à la double-lecture est :

$$U_{\text{double lecture}}(d) = \sqrt{2} \times \frac{2 \times 1}{\sqrt{12}} = 0{,}82 \text{ mm.}$$

*En pratique, cette incertitude est souvent arrondie à 1 mm.*





◂ La mesure de la période $T$ d'un signal périodique affiché sur l'écran d'un oscilloscope nécessite de repérer deux points de la courbe et de lire leurs abscisses. Celui-ci étant gradué en cinquièmes de division, l'incertitude liée à la double lecture est :

$$U_{\text{double lecture}}(T) = \sqrt{2} \times \frac{2 \times 0{,}2}{\sqrt{12}} = 0{,}163 \text{ DIV.}$$

Si la base de temps est réglée sur 5,0 ms/DIV, l'incertitude de lecture sur la valeur mesurée de la période est :

$$U_{\text{double lecture}}(T) = 5{,}0 \times 0{,}163 = 0{,}82 \text{ ms.}$$

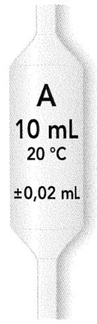
*En pratique, cette incertitude est souvent arrondie à 1 ms.*

**→ Cas d'une mesure obtenue avec un appareil de tolérance connue**

Lorsque la mesure est obtenue avec un appareil pour lequel le constructeur indique la tolérance $t$ (notée $\pm t$), l'incertitude liée à la tolérance de cet appareil est estimée à $\dfrac{2\,t}{\sqrt{3}}$.

Par exemple, pour une pipette jaugée de 10,0 mL de classe A, la tolérance est ±0,02 mL.
L'incertitude sur la mesure de volume $V$ liée à la tolérance de la pipette est :

$$U_{\text{tolérance}}(V) = \frac{2 \times 0{,}02}{\sqrt{3}} = 0{,}023 \text{ mL.}$$




Sur la verrerie jaugée utilisée en chimie, le fabricant indique toujours sa tolérance.

## C Évaluer une incertitude sur une mesure dans laquelle interviennent plusieurs sources d'erreurs

Lors d'un mesurage, il est fréquent d'avoir plusieurs sources d'erreurs à prendre en compte.
C'est notamment le cas lorsque :
– le mesurage fait intervenir une ou plusieurs lectures avec un appareil de tolérance donnée ;
– le mesurage fait intervenir un calcul avec des valeurs dont les incertitudes sont connues.
**En Terminale S, les relations à utiliser seront données.**

**→ Exemple de l'incertitude sur la valeur d'un volume $V$ versé, mesurée avec une burette graduée**

▸ Une burette graduée de tolérance $t = \pm 0{,}05$ mL est graduée en dixième de millilitre.

On suppose que l'opérateur utilise une méthode de lecture du volume correcte. On ne prendra donc en compte que l'incertitude de lecture sur l'échelle graduée de la burette.

▸ Pour faire une mesure de volume versé, il faut faire deux lectures de volume successives (le zéro et le volume versé) et l'incertitude associée à chaque lecture est :

$$U_{\text{lecture}}(V) = \frac{2 \times 0{,}1}{\sqrt{12}} \text{ mL.}$$

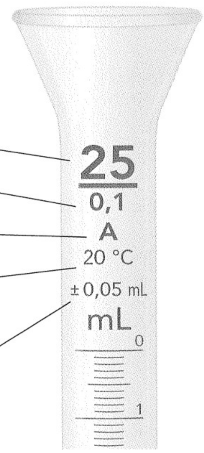
▸ D'autre part, l'incertitude liée à la tolérance indiquée par le constructeur est :

$$U_{\text{tolérance}}(V) = \frac{2 \times 0{,}05}{\sqrt{3}} \text{ mL.}$$

▸ En prenant en compte les deux sources d'erreur, l'incertitude (formule fournie) sur le volume versé avec cette burette est :

$$U(V) = \sqrt{2\,(U_{\text{lecture}})^2 + (U_{\text{tolérance}})^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2 \times 0{,}1}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0{,}05}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0{,}1 \text{ mL.}$$

Sur cette burette graduée, le fabricant a indiqué :
– le volume maximal mesurable : 25 mL;
– la graduation la plus petite : 0,1 mL;
– la classe de l'instrument : A;
– la température pour laquelle l'indication du volume est la plus précise : 20 °C;
– la tolérance : ±0,05 mL.




**→ Exemple de l'incertitude sur la valeur calculée d'une vitesse obtenue par une mesure de distance et une mesure de durée**

▸ Une moto parcourt une distance $d = 125{,}35$ m en une durée $\Delta t = 2{,}164$ s.

La valeur de la vitesse moyenne calculée à partir de ces mesures est $v = \dfrac{d}{\Delta t} = \dfrac{125{,}35}{2{,}164} = 57{,}93 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Cependant, une incertitude est associée à cette valeur de la vitesse. Cette incertitude est liée aux incertitudes sur les mesures des grandeurs intervenant dans le calcul.

Les incertitudes liées aux instruments de mesures utilisés sont telles que :
– l'incertitude sur la mesure de la distance est $U(d) = 0{,}15$ m ;
– l'incertitude sur la mesure de la durée est $U(\Delta t) = 0{,}002$ s.

▸ L'incertitude (formule fournie) sur la valeur de la vitesse moyenne de la moto est alors, dans ce cas :

$$U(v) = v \cdot \sqrt{\left(\frac{U(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{U(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2} = 57{,}93 \times \sqrt{\left(\frac{0{,}15}{125{,}35}\right)^2 + \left(\frac{0{,}002}{2{,}164}\right)^2} = 0{,}088 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

# Expression et acceptabilité du résultat ltat

## A Convention d'écriture pour l'expression du résultat

Le résultat du mesurage d'une grandeur $M$ est un intervalle de confiance associé à un niveau de confiance. L'intervalle de confiance est centré sur la valeur $m$ (valeur mesurée lors d'une mesure unique ou valeur moyenne des mesures lors d'une série de mesures) et a pour demi-largeur l'incertitude de mesure $U(M)$.

Le résultat du mesurage s'écrit $M = m \pm U(M)$ ou $M \in [m - U(M) ; m + U(M)]$. Si elle existe, l'unité est précisée.
Par convention, l'incertitude sera arrondie à la valeur supérieure avec au plus deux chiffres significatifs et les derniers chiffres significatifs conservés pour la valeur mesurée $m$ sont ceux sur lesquels porte l'incertitude $U(M)$.

Ainsi, le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude.

| Dans le résultat de la forme $M = m \pm U(M)$ | |
|---|---|
| Pour la valeur mesurée $m$, on garde : | Pour l'incertitude $U$, on garde : |
| – les chiffres « exacts » (ceux sans incertitude) ;<br>– le 1er chiffre entaché d'erreur ;<br>– le 2e chiffre entaché d'erreur que l'on arrondit. | – le 1er chiffre non nul ;<br>– le chiffre suivant majoré. |

Dans certains cas, il est utile d'écrire le résultat de la mesure au format scientifique, la puissance de 10 utilisée doit alors être la même pour la valeur mesurée $m$ et pour l'incertitude associée $U(M)$.

Par exemple :

| | Valeur mesurée $m$ | Incertitude $U(M)$ | Résultat du mesurage $M$ |
|---|---|---|---|
| Vitesse de la moto (p. 586) | $57{,}925\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ | $0{,}088\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ | $V = (57{,}925 \pm 0{,}088)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ |
| Charge électrique | $1{,}6042 \times 10^{-19}$ C | $0{,}0523 \times 10^{-19}$ C | $q = (1{,}604 \pm 0{,}053) \times 10^{-19}$ C |

Lorsque le niveau de confiance est connu, il est précisé dans l'écriture du résultat.

## B Incertitude relative d'une mesure

L'**incertitude relative** d'une mesure est le quotient de l'incertitude de mesure $U$ par la valeur mesurée $m$, soit $\frac{U}{m}$.

L'incertitude (ou la précision) relative d'une mesure s'exprime en pourcentage : $(\frac{U}{m} \times 100)$ %. C'est un indicateur de la qualité de la mesure : plus elle est petite et plus la mesure est précise. Généralement, on considère que :

Si $\frac{U}{m} \leq 0{,}01$, alors la mesure est de bonne qualité.

## C Comparaison du résultat d'une mesure à une valeur de référence

Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence. La qualité du résultat de la mesure est obtenue par un calcul d'incertitude relative.

Si la grandeur mesurée a une valeur de référence $m_{\text{référence}}$ et une valeur mesurée $m_{\text{mesurée}}$, alors l'incertitude relative est :

$$r = \frac{|m_{\text{mesurée}} - m_{\text{référence}}|}{m_{\text{référence}}}$$

## D Amélioration de la qualité d'une mesure

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1 %, il faut chercher comment améliorer la qualité de la mesure effectuée :
- le matériel choisi doit présenter une tolérance suffisamment faible ;
- le matériel doit être utilisé correctement (lecture du niveau de liquide dans une burette, par exemple) ;
- le nombre de mesures indépendantes doit être suffisant ;
- lors de calculs successifs, il faut garder les résultats intermédiaires dans la mémoire de la calculatrice.

# Analyse dimensionnelle

Les unités sont nécessaires pour comparer les valeurs d'une même grandeur physique et pour vérifier l'homogénéité d'expressions littérales.

## A Le système international (SI)

Le système international d'unités est construit autour de sept unités qui correspondent à sept grandeurs fondamentales différentes.

Il comporte également des unités supplémentaires (le newton pour la valeur de la force, le volt pour la tension, etc.) appelées *unités dérivées*. Les unités dérivées peuvent être exprimées en fonction des *unités de base*.

| Grandeur | Unité SI |
|---|---|
| longueur | mètre (m) |
| masse | kilogramme (kg) |
| temps | seconde (s) |
| intensité électrique | ampère (A) |
| température | kelvin (K) |
| intensité lumineuse | candela (cd) |
| quantité de matière | mole (mol) |

Les sept unités du système international.

## B L'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet :
– de déterminer l'unité du système international d'une grandeur ;
– d'établir qu'une expression littérale est homogène.

### → Comment exprimer la valeur d'une force avec les unités du système international ?

- D'après la deuxième loi de Newton, $\sum\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ avec $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

- La valeur de la quantité de mouvement a la même unité que le produit des unités de la masse $m$ et de la valeur $v$ de la vitesse. La valeur $p$ de la quantité de mouvement s'exprime donc en $\text{kg} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

De plus, $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ donc $\dfrac{dp}{dt}$ et $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ ont la même unité.

$\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ est la variation de la valeur de la quantité de mouvement pendant la durée $\Delta t$.

La valeur de $\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ s'exprime donc en $\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Dans les unités du système international, la valeur d'une force s'exprime donc en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On peut écrire que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

### → Comment vérifier l'homogénéité d'une expression littérale ?

- L'expression littérale de la période de révolution $T$ d'un satellite à une distance $d$ du centre de la Terre s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G \cdot M_T}}$$

G, la constante universelle de gravitation, s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

$M_T$, la masse de la Terre, s'exprime en kilogramme (kg) et $d$ en mètre (m).

- Vérifier l'homogénéité de cette égalité, c'est montrer que $T$ et $2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G \cdot M_T}}$ ont la même unité.

Le tableau ci-contre permet d'établir progressivement les unités des formules littérales.

$2\pi$ est un nombre sans dimension, donc $2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G \cdot M_T}}$ s'exprime en seconde.

L'expression $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d^3}{G \cdot M_T}}$ est bien homogène.

| Grandeur | Unité |
|---|---|
| $T$ | s |
| $M_T$ | kg |
| G | $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| $d$ | m |
| $\dfrac{d^3}{G \cdot M_T}$ | $\dfrac{\text{m}^3}{\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}} = \dfrac{1}{\text{s}^{-2}} = \text{s}^2$ |
| $\sqrt{\dfrac{d^3}{G \cdot M_T}}$ | s |

Tableau de présentation d'une analyse dimensionnelle.

**Une égalité qui n'est pas homogène est fausse.**

*Remarques :*

- On exprime souvent la constante universelle de gravitation G en $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Le newton est homogène à des $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Donc $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est équivalent à $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ et $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est équivalent à $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

On retrouve bien l'unité de G exprimée avec des unités de base du système international.